

Facultad de Ciencias  
**Astronómicas  
y Geofísicas**  
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

Tesis de Grado para obtener la Licenciatura en Geofísica

# **Métodos electromagnéticos de fuentes controladas: modelado computacional**

**Autor: Matias Walter Elias**

Director: Fabio Iván Zyserman

Firma y aclaración del Director:



Fabio I. Zyserman

Firma y aclaración de uno de los Jurados:



Claudia Ravazzoli

La Plata  
- Año - 2019

*A mi mamá, Alcira,  
y a un amigo, Marcelo.*

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Métodos Electromagnéticos de Fuentes Controladas</b>	<b>3</b>
1.1. Introducción . . . . .	3
1.2. El campo electromagnético y el medio . . . . .	4
1.3. Fuentes y soluciones analíticas . . . . .	6
1.4. Soluciones numéricas . . . . .	6
<b>2. Dipolo magnético vertical</b>	<b>8</b>
2.1. Potenciales de Schelkunoff . . . . .	8
2.2. Medio estratificado . . . . .	10
2.3. Campo primario de un DMV . . . . .	13
2.3.1. Integración numérica y filtro digital . . . . .	14
<b>3. Aproximación mediante Elementos Finitos</b>	<b>16</b>
3.1. Formulación del problema . . . . .	16
3.1.1. Descomposición de dominio e hibridización . . . . .	20
3.2. Implementación numérica . . . . .	22
<b>4. Modelado Computacional</b>	<b>25</b>
4.1. El modelo . . . . .	25
4.2. Resultados . . . . .	25
<b>5. Conclusiones</b>	<b>46</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>48</b>

# Introducción

La estructura interna de la Tierra y los procesos que en ella ocurren pueden ser estudiados por medio de sus propiedades físicas y la influencia de éstas sobre diferentes campos, como el gravitacional, electromagnético, de desplazamiento, etc., medibles en regiones cercanas a la superficie. Esto da lugar a diversas técnicas que permiten extraer información del subsuelo de manera indirecta; su aplicación descansa sobre la base de la comprensión de la naturaleza de cada campo, su interacción con el medio, su origen y variabilidad espacial y temporal; como así también, sobre el conocimiento del alcance de las herramientas de medición, procesamiento e interpretación utilizadas.

En particular, los métodos electromagnéticos tienen como objeto de estudio el campo electromagnético y su relación con las propiedades electromagnéticas de los materiales presentes en la litósfera. La diferencia de potencial eléctrico en un medio de conductividad no nula, como lo es el subsuelo, produce corrientes eléctricas que son fuentes de campo magnético. A su vez, las variaciones temporales de campo magnético generan campo eléctrico. Estos dos últimos aspectos sostienen la idea fundamental del método: el campo electromagnético generado como respuesta de la Tierra a un campo electromagnético externo provee información indirecta de las propiedades electromagnéticas de la misma (Spies, 1989).

Estos métodos incluyen una amplia variedad de técnicas, métodos de estudio, aplicaciones y procedimientos de interpretación; y su aplicación involucra la medición de una o varias componentes de campo eléctrico o magnético proveniente de alguna fuente electromagnética que puede ser de origen natural o artificial. El método magnetotelúrico (MT) utiliza campos naturales provocados por tormentas eléctricas o corrientes eléctricas en la ionósfera, éstos son de muy baja frecuencia (de una milésima a 1 Hz) y capaces de penetrar a cientos de kilómetros de profundidad en el subsuelo. Por otro lado, entre los métodos que utilizan fuentes artificiales se encuentran los métodos electromagnéticos de fuentes controladas (CSEM son sus siglas en inglés), de los que se ocupa la presente Tesis. A diferencia del MT, las frecuencias utilizadas en CSEM pueden ser mucho mayores, con la posibilidad de elegir las, y el dato tiene menor sensibilidad al ruido.

Sin perder de vista la complejidad de los métodos de prospección, que abarcan eta-

pas que van desde la búsqueda de estudios previos en una región y planificación de la adquisición hasta el procesamiento e interpretación de los datos, se plantea que es posible mediante mediciones de campo electromagnético sobre la superficie terrestre, o cercano a ella, determinar la distribución de conductividades eléctricas en una región acotada del subsuelo. Para esto es necesario pasar por una primera instancia de *modelado* o resolución del *problema directo* -que motiva el interés de esta Tesis- donde se calcula el campo electromagnético en base a un modelo que define una cierta cantidad de parámetros para representar la realidad, como pueden ser la geometría, el origen de las principales fuentes de campo electromagnético y la distribución de conductividades. Luego, una segunda instancia es la de la resolución del *problema inverso*, donde los valores de campo predichos y los observados son comparados ajustando ciertos parámetros del modelo.

En estas Tesis se analizan e implementan algoritmos para la resolución del problema directo en CSEM en tres dimensiones, utilizando filtros digitales lineales para calcular el campo generado por una fuente artificial en presencia de un subsuelo con distribución estratificada de conductividades eléctricas y métodos de elementos finitos y técnicas iterativas de descomposición de dominio, para la resolución del problema general. Los métodos están especialmente diseñados para trabajar en computadoras paralelas cuyo uso es esencial si el modelado tridimensional ha de ser plausible.

Finalmente, se analiza el comportamiento de estos los algoritmos y la respuesta del campo electromagnético obtenido en base a plantear diferentes modelos con parámetros y características acordes con problemas de interés geofísico.

# Capítulo 1

## Métodos Electromagnéticos de Fuentes Controladas

### *1.1. Introducción*

Los métodos electromagnéticos de fuentes controladas (CSEM) son utilizados para estudiar, de forma indirecta, la distribución de conductividad del subsuelo mediante mediciones de campos electromagnéticos producidos por fuentes artificiales. Han tomado creciente relevancia en exploración continental y marítima; en particular, gran ímpetu en investigaciones de yacimientos de hidrocarburos marinos, los cuales demuestran su potencialidad para detectar los contrastes de conductividad existentes entre la roca reservorio, que contiene petróleo o gas, y el medio circundante (Ellingsrud et al. (2002); Eidesmo et al. (2002); Constable y Srnka (2007)). Las fuentes típicamente utilizadas, dipolos eléctricos, consisten en dos electrodos separados por una corta distancia enterrados en el suelo entre los que se hace circular una corriente eléctrica a determinada frecuencia. Son empleadas en diversas configuraciones sobre la superficie del continente, en pozo o sobre el lecho submarino. Existen, también, trabajos donde se han utilizado bucles de corriente por los que se hace circular corriente alterna, es decir, dipolos magnéticos, montados en aeronaves (AEM), habiendo sido utilizados para la detección de yacimientos minerales sobre el continente (Yang y Oldenburg (2012); Cox et al. (2010)). El dominio de las frecuencias es el más utilizado para la realización de los estudios, principalmente en la prospección de hidrocarburos donde las frecuencias no exceden los 10Hz; por otra parte en AEM las frecuencias alcanzan las decenas de KHz y ha sido igualmente relevante el uso del método en el dominio del tiempo como en el de las frecuencias.

### 1.2. *El campo electromagnético y el medio*

Para poder entender y aplicar cualquier método electromagnético es necesario tener siempre presente las leyes de los campos electromagnéticos en presencia de medios materiales, expresadas matemáticamente mediante las ecuaciones de Maxwell en su formulación macroscópica. Estas son:

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}, \quad (1.1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (1.1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (1.1c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.1d)$$

donde

$\mathbf{E}$  = intensidad de campo eléctrico ( $V/m$ ),

$\mathbf{D}$  = desplazamiento eléctrico ( $C/m^2$ ),

$\mathbf{H}$  = intensidad de campo magnético ( $A/m$ ),

$\mathbf{B}$  = inducción magnética ( $Wb/m^2$ ),

$\mathbf{J}$  = densidad de corriente eléctrica ( $A/m^2$ ),

$\rho$  = densidad de carga eléctrica ( $C/m^3$ ).

De las ecuaciones anteriores se deduce la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (1.2)$$

que establece la ley de conservación de la carga eléctrica. Estas ecuaciones se completan especificando las relaciones constitutivas del medio material. Pueden ser escritas, siempre que la magnitud de los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  y la de sus derivadas temporales no sean muy grandes como

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad (1.3a)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (1.3b)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}. \quad (1.3c)$$

Estas últimas ecuaciones muestran como los campos se ven afectados por las propiedades electromagnéticas del medio en base a un modelo. La permitividad eléctrica  $\epsilon$  ( $F/m$ ), la permeabilidad magnética  $\mu$  ( $H/m$ ) y la conductividad eléctrica  $\sigma$  ( $S/m$ ) son tensores en caso de ser el medio anisótropo, y escalares en caso de isotropía.

Cuando es necesario considerar cambios abruptos de las propiedades electromagnéticas, las condiciones de borde, que expresan la relación entre las magnitudes del

campo electromagnético a un lado y otro de una interfase, deben ser tenidas en cuenta.

$$\boldsymbol{\nu} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{J}_s, \quad (1.4a)$$

$$\boldsymbol{\nu} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0, \quad (1.4b)$$

$$\boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = q_s, \quad (1.4c)$$

$$\boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1) = -\frac{\partial q_s}{\partial t} \quad (1.4d)$$

donde  $\boldsymbol{\nu}$  es un vector unitario perpendicular a la interfase,  $q_s$  es la densidad superficial de carga eléctrica y  $\mathbf{J}_s$  es la densidad superficial de corriente eléctrica, nula cuando la conductividad en ambos medios es finita.

Hay una serie de suposiciones que pueden ser hechas al utilizar métodos electromagnéticos, en particular para CSEM, que permiten simplificar las ecuaciones:

- La permeabilidad magnética del suelo es del orden de la del vacío en la mayoría de los casos; se considera entonces  $\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  H/m, excepto en presencia de magnetitas donde esta hipótesis no es válida.
- Por simplicidad, los medios se consideran isótropos, pero no necesariamente homogéneos.
- Se asume una dependencia temporal armónica de los campos, puesto que siendo las ecuaciones a resolver lineales, toda otra dependencia temporal puede considerarse como una superposición de ondas armónicas.
- En el rango de conductividades encontradas en la Tierra, de  $10^{-3}$  a 1 S/m, y considerando que las frecuencias de interés varían entre  $10^{-3}$  y  $10^4$  Hz, vale siempre que

$$\frac{\omega\epsilon}{\sigma} \ll 1,$$

con lo que se puede despreciar las corrientes de desplazamiento frente a las de conducción, de forma que el problema del CSEM ya no es de propagación de ondas en el subsuelo, sino de su difusión al interior de la Tierra.

- Se considera por simplicidad que  $\epsilon$  y  $\sigma$  son reales e independientes de la frecuencia, o equivalentemente que los medios no son dispersivos.

Teniendo en cuenta estas suposiciones, las ecuaciones de Maxwell con las que es necesario trabajar en CSEM quedan expresadas

$$\nabla \times \mathbf{E} + i\omega\mu\mathbf{H} = 0, \quad (1.5a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \sigma\mathbf{E} = \mathbf{J}_e^s, \quad (1.5b)$$

en su forma armónica e incluyendo la corriente eléctrica externa ( $\mathbf{J}_e^s$ ) causada por la fuente artificial.



### 1.3. Fuentes y soluciones analíticas

En CSEM la principal fuente generadora del campo electromagnético está dada por fuentes eléctricas artificiales, que en su mayoría son bucles de corriente o cables enterrados. Éstas se separan en dos grupos: fuentes dipolares y fuentes finitas. Las primeras son aquellas donde sus dimensiones son despreciables frente a la escala del problema, y por lo tanto son consideradas infinitesimales. Ejemplos de las mismas son el dipolo eléctrico horizontal (DEH), el vertical (DEV), el dipolo magnético vertical (DMV) y el horizontal (DMH). Las segundas son aquellas donde sus dimensiones sí son apreciables frente a la escala del problema y entre ellas cuentan grandes bucles de corriente horizontales de forma rectangular o circular, y cables largos enterrados. Por supuesto siempre es discutible la aplicación práctica de cada tipo de fuente y esto ha motivado el estudio teórico del campo electromagnético que generan y cómo es la respuesta del medio. En particular, el cómputo de la respuesta electromagnética teórica debido a fuentes electromagnéticas sobre modelos de capas planas horizontales, donde las propiedades electromagnéticas varían de una capa a la otra pero dentro de cada una de ellas sus propiedades son homogéneas e isotrópicas es un paso de vital importancia para posteriormente resolver el problema directo con modelos donde la estructura de conductividad que se plantea es más compleja. El cálculo de las respuestas se hace en la región de inducción, o sea a frecuencias tales que las corrientes de desplazamiento son despreciables frente a las de conducción. En este régimen la respuesta electromagnética para la mayoría de los materiales presentes en la Tierra es debida principalmente a su conductividad. Existen en la literatura desarrollos matemáticos que permiten obtener expresiones analíticas de la respuesta electromagnética, sobre un modelo de capas, para diferentes formas de la fuente y su disposición, tanto en el dominio del tiempo como en el de las frecuencias. Muchas de estas expresiones analíticas contienen integrales que presenta la forma de transformadas de Hankel o de Fourier, lo que habilita el uso de filtros digitales para su cómputo mediante integración numérica. En el próximo capítulo se ampliará sobre este punto.

### 1.4. Soluciones numéricas

El caso más general con que se trata en esta Tesis es la determinación del campo electromagnético generado por fuentes dipolares eléctricas en presencia de un medio que tiene variaciones de conductividad en las tres dimensiones espaciales. Una de las estrategias para lograrlo es considerar que el campo electromagnético es la suma de dos componentes, una de éstas llamada primaria,  $\mathbf{E}_p$  y  $\mathbf{H}_p$ , obtenida de forma analítica en un escenario que contiene a la fuente  $\mathbf{J}^s$  y donde la distribución de conductividad es  $\sigma_p$ ; y la otra llamada secundaria,  $\mathbf{E}_s$  y  $\mathbf{H}_s$ , que es obtenida

de forma numérica planteando el problema diferencial en términos de los campos dispersados (Coggon (1971); Wannamaker et al. (1987); Zhdanov y Fang (1996)), en este caso las fuentes de los campos son corrientes anómalas generada por contrastes de conductividad ( $\sigma_s$ ) en presencia de los campos primarios.

El campo total y la distribución de conductividad son escritas de la siguiente forma:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_p + \mathbf{E}_s, \quad (1.6a)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_p + \mathbf{H}_s, \quad (1.6b)$$

$$\sigma = \sigma_p + \sigma_s. \quad (1.6c)$$

Asumiendo que los campos primarios satisfacen las ecuaciones

$$\nabla \times \mathbf{E}_p + i\omega\mu\mathbf{H}_p = 0, \quad (1.7a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_p - \sigma_p\mathbf{E}_p = \mathbf{J}_e^s, \quad (1.7b)$$

y reemplazando las Ecs. (1.6) en las Ecs. (1.5) para el campo total y haciendo uso de las Ecs. 1.7, despejando los campos secundarios se llega a que

$$\nabla \times \mathbf{E}_s + i\omega\mu\mathbf{H}_s = 0, \quad (1.8a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_s - \sigma\mathbf{E}_s = \sigma_s\mathbf{E}_p. \quad (1.8b)$$

Las Ecs. (1.7) serán resueltas analíticamente; mientras que las Ecs. (1.8) se resolverán de forma numérica; para el caso de esta Tesis, utilizando el método de elementos finitos y transformando el sistema de ecuaciones diferenciales en un número finito de sistemas de ecuaciones lineales.

Para la aplicación del mencionado método de aproximación numérica es necesario tener en cuenta que el dominio tridimensional  $\Omega$ , dentro del que se calculará el campo es acotado y por lo tanto es necesario especificar condiciones para los bordes artificiales en la frontera del dominio. La condición a utilizar es la de *borde absorbente* introducida por Sheen (1997)

$$(1 - i)P_\tau a\mathbf{E}_s + \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{H}_s = 0 \quad \text{en } \partial\Omega \equiv \Gamma, \quad (1.9)$$

donde  $a = (\sigma/2\omega\mu)^{\frac{1}{2}}$ ,  $\boldsymbol{\nu}$  es un versor unitario normal al borde computacional ( $\Gamma$ ) y  $P_\tau\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varphi}) = -\boldsymbol{\nu} \times (\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\varphi})$ .

# Capítulo 2

## Dipolo magnético vertical

En este capítulo se presentan los desarrollos matemáticos necesarios para el cálculo, en todo el espacio, del campo primario generado por dipolo magnético vertical en presencia de un medio isótropo donde la conductividad  $\sigma$  sólo presenta discontinuidades en la dirección del eje  $z$ .

### 2.1. Potenciales de Schelkunoff

Para la presente Tesis es necesario tener en cuenta las expresiones matemáticas que permiten obtener soluciones analíticas del campo primario a partir de los potenciales de Schelkunoff (1943), donde el mismo queda expresado como rotores y gradientes de funciones potenciales, escalares y vectoriales. Para simplificar la notación se omiten los subíndices que indican que se trata del campo primario.

En regiones que contienen fuentes eléctricas deben plantearse las ecuaciones de Maxwell inhomogéneas

$$\nabla \times \mathbf{E} + i\omega\mu\mathbf{H} = -\mathbf{J}_m^s, \quad (2.1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \sigma\mathbf{E} = \mathbf{J}_e^s, \quad (2.1b)$$

donde  $\mathbf{J}_m^s$  es una corriente magnética y  $\mathbf{J}_e^s$  es una corriente eléctrica. Las corrientes magnéticas no existen en la realidad pero son un artificio introducido por Schelkunoff que en algunos casos permite obtener expresiones más sencillas para su resolución. Se atribuye la existencia del campo electromagnético a la superposición de fuentes de tipo eléctrico y de tipo magnético. Así

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_m + \mathbf{E}_e, \quad (2.2a)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_m + \mathbf{H}_e. \quad (2.2b)$$

Para el par de vectores  $[\mathbf{E}_m, \mathbf{H}_m]$  se asume que  $\mathbf{J}_e^s$  es cero, mientras que para  $[\mathbf{E}_e, \mathbf{H}_e]$  se asume que  $\mathbf{J}_m^s$  es cero. Así,  $[\mathbf{E}_m, \mathbf{H}_m]$  son soluciones de

$$\nabla \times \mathbf{E}_m = -\mathbf{J}_m^s - i\omega\mu\mathbf{H}_m, \quad (2.3a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_m = \sigma\mathbf{E}_m, \quad (2.3b)$$

y  $[\mathbf{E}_e, \mathbf{H}_e]$  son soluciones de

$$\nabla \times \mathbf{E}_e = i\omega\mu\mathbf{H}_e, \quad (2.4a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_e = \mathbf{J}_e^s + \sigma\mathbf{E}_e. \quad (2.4b)$$

Tomando la divergencia de las Ecs. (2.3), y (2.4) se tiene

$$\nabla \cdot \mathbf{H}_m = -\frac{\nabla \cdot \mathbf{J}_m^s}{i\omega\mu}, \quad (2.5a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_m = 0, \quad (2.5b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H}_e = 0, \quad (2.5c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_e = -\frac{\nabla \cdot \mathbf{J}_e^s}{\sigma}. \quad (2.5d)$$

De las Ecs. (2.5b) y (2.5c) se desprende que  $\mathbf{E}_m$  y  $\mathbf{H}_e$  pueden representarse como rotores de dos funciones vectoriales

$$\mathbf{E}_m = -\nabla \times \mathbf{F}, \quad (2.6a)$$

$$\mathbf{H}_e = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (2.6b)$$

Si se sustituyen las Ecs. (2.6a) y (2.6b) en las Ecs. (2.3b) y (2.4a), respectivamente, se obtiene

$$\mathbf{H}_m = -\sigma\mathbf{F} - \nabla U, \quad (2.7a)$$

$$\mathbf{E}_e = -i\omega\mu\mathbf{A} - \nabla V, \quad (2.7b)$$

donde  $U$  y  $V$  son dos funciones escalares arbitrarias que son introducidas porque la igualdad entre el rotor de dos vectores no implica que éstos sean necesariamente idénticos.

Ya que los escalares  $U$  y  $V$  son arbitrarios, se les puede imponer restricciones arbitrariamente. Es conveniente imponer las condiciones de Lorentz

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = -i\omega\mu U, \quad (2.8a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\sigma V. \quad (2.8b)$$

Combinando las Ecs. (2.6a) y (2.7a), las Ecs. (2.6b) y (2.7b), respectivamente, y haciendo uso de las condiciones expresadas en (2.8), se obtiene

$$\nabla^2 \mathbf{F} + k^2 \mathbf{F} = -\mathbf{J}_m^s, \quad (2.9a)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = -\mathbf{J}_e^s, \quad (2.9b)$$

siendo  $k = (-i\omega\mu\sigma)^{\frac{1}{2}}$ . Estas son las ecuaciones de Helmholtz inhomogéneas en  $\mathbf{F}$  y en  $\mathbf{A}$ , las cuales son aplicables a regiones homogéneas que contienen a las fuentes  $\mathbf{J}_m^s$  o  $\mathbf{J}_e^s$ .

El campo total debido a  $\mathbf{J}_m^s$  y  $\mathbf{J}_e^s$ , una vez resueltas las ecuaciones anteriores para  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{A}$ , queda expresado de la siguiente forma:

$$\mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{A} + \sigma^{-1}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times \mathbf{F}, \quad (2.10a)$$

$$\mathbf{H} = -\sigma\mathbf{F} + (i\omega\mu)^{-1}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) + \nabla \times \mathbf{A}. \quad (2.10b)$$

## 2.2. Medio estratificado

La solución para el campo electromagnético de una fuente finita como un dipolo magnético en presencia de un subsuelo homogéneo o estratificado puede ser representada como una superposición de soluciones de ondas planas con variación de los ángulos de incidencia complejos (Ward y Hohmann, 1987).

Como los cambios de las propiedades físicas coinciden con las coordenadas de las interfases (planos a  $z$  constante), se puede resolver el problema de valores de frontera convirtiendo la ecuaciones en derivadas parciales en ecuaciones diferenciales ordinarias en  $z$ . Esta toma la forma de una transformada de Hankel ya que las coordenadas de las interfaces están infinitamente extendidas en  $x$  y en  $y$ .

La solución general del problema de valores de frontera es la suma de una solución particular de la ecuación inhomogénea y la solución complementaria de la ecuación homogénea. En el caso de una región libre de fuentes no es necesario considerar al vector potencial  $\mathbf{A}$  como debido a fuentes eléctricas y  $\mathbf{F}$  como debido a fuentes magnéticas. De las relaciones

$$\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (2.11a)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \times \mathbf{F}, \quad (2.11b)$$

se pueden definir los vectores potenciales como:

$$\mathbf{A} = A\mathbf{u}_z, \quad (2.12a)$$

$$\mathbf{F} = F\mathbf{u}_z, \quad (2.12b)$$

donde  $\mathbf{u}_z$  es un vector unitario en la dirección de  $z$ . Los potenciales escalares  $A$  y  $F$  satisfacen las ecuaciones:

$$\nabla^2 F + k^2 F = 0, \quad (2.13a)$$

$$\nabla^2 A + k^2 A = 0. \quad (2.13b)$$

Usando la doble transformada de Fourier en las coordenadas de  $x$  e  $y$ , estas ecuaciones se convierten en ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{d^2 \tilde{A}}{dz^2} - u^2 \tilde{A} = 0, \quad (2.14a)$$

$$\frac{d^2 \tilde{F}}{dz^2} - u^2 \tilde{F} = 0, \quad (2.14b)$$

con

$$u^2 = k_x^2 + k_y^2 - k^2. \quad (2.15)$$

Las soluciones de las ecuaciones (2.14), similares a las soluciones de ondas planas, son:

$$\tilde{A}(k_x, k_y, z) = A^+(k_x, k_y)e^{-uz} + A^-(k_x, k_y)e^{uz}, \quad (2.16a)$$

$$\tilde{F}(k_x, k_y, z) = F^+(k_x, k_y)e^{-uz} + F^-(k_x, k_y)e^{uz}, \quad (2.16b)$$

donde " + " y " - " indican si la solución decae hacia abajo o hacia arriba respectivamente. Para el caso de un subsuelo con  $N$  capas, se consideran las soluciones en las diferentes regiones (Fig. 2.1), donde

$$u_n = (k_x^2 + k_y^2 - k_n^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.17)$$

con  $k_n$  el número de onda de la  $n$ -ésima capa. La solución en la  $n$ -ésima capa es dada en términos de las constantes  $A_n^+$ ,  $A_n^-$ ,  $F_n^+$  y  $F_n^-$ , las cuales deben ser determinadas acorde a una solución particular y aplicando las condiciones de borde.

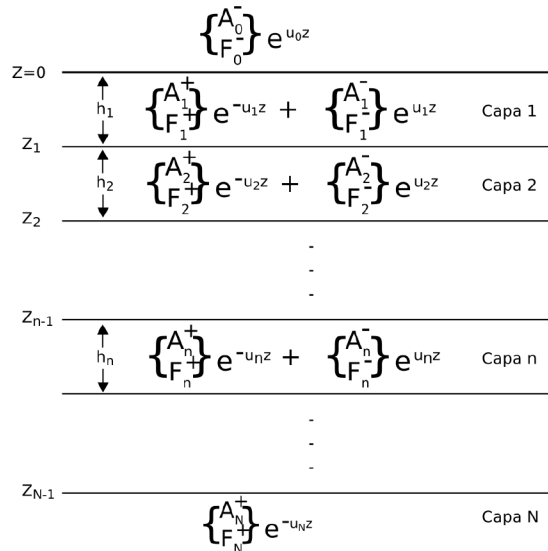


Figura 2.1: Soluciones para los potenciales  $\tilde{A}$  y  $\tilde{F}$  en un subsuelo con  $N$  capas.

Debe incluirse a la solución complementaria la solución particular de la ecuación diferencial inhomogénea en la capa que contiene a la fuente. Para esta Tesis se

considera una fuente puntual, en principio ubicada en la posición  $z = -h$  sobre la superficie. Esta solución particular en el aire puede escribirse, según sea la fuente eléctrica o magnética, como

$$A_p(k_x, k_y)e^{-u_0|z+h|}, \quad (2.18)$$

en el primer caso, y

$$F_p(k_x, k_y)e^{-u_0|z+h|}, \quad (2.19)$$

en el segundo caso.

Los potenciales  $A_p$  y  $F_p$  dependen de la fuente particular considerada. En el caso de que la fuente esté sobre la superficie terrestre y considerando que  $A_p$  y  $F_p$  son las amplitudes del campo incidente, puede escribirse a los coeficientes  $A_0^-$  y  $F_0^-$  como

$$A_0^- = r_{TM}A_p e^{-u_0h}, \quad (2.20a)$$

$$F_0^- = r_{TE}F_p e^{-u_0h}, \quad (2.20b)$$

donde  $r_{TM}$  y  $r_{TE}$  son coeficientes de reflexión dados por

$$r_{TE} = \frac{Y_0 - \hat{Y}_1}{Y_0 + \hat{Y}_1}, \quad (2.21a)$$

$$r_{TM} = \frac{Z_0 - \hat{Z}_1}{Z_0 + \hat{Z}_1}, \quad (2.21b)$$

con

$$Y_0 = \frac{u_0}{\hat{z}_0} \quad (\text{admitancia intrínseca del vacío}), \quad (2.22a)$$

$$Z_0 = \frac{u_0}{\hat{y}_0} \quad (\text{impedancia intrínseca del vacío}), \quad (2.22b)$$

donde  $\hat{z}_0 = i\omega\mu_0$  y  $\hat{y}_0 = i\omega\epsilon_0$ , y con

$$\hat{Y}_1 = \frac{H_y^{TE}}{E_x^{TE}} = -\frac{H_x^{TE}}{E_y^{TE}} \quad (\text{admitancia superficial a } z = 0), \quad (2.23a)$$

$$\hat{Z}_1 = \frac{E_x^{TM}}{H_y^{TM}} = -\frac{E_y^{TM}}{H_x^{TM}} \quad (\text{impedancia superficial a } z = 0). \quad (2.23b)$$

Combinando la solución particular y la complementaria entre la fuente y la Tierra, se obtiene la transformada espacial

$$\tilde{A} = A_p e^{-u_0h} (e^{-u_0z} + r_{TM}e^{u_0z}), \quad (2.24a)$$

$$\tilde{F} = F_p e^{-u_0h} (e^{-u_0z} + r_{TE}e^{u_0z}). \quad (2.24b)$$

Finalmente los potenciales como función de  $y$  y  $x$  están dados por la transformada inversa de Fourier como

$$A = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_p e^{-u_0h} (e^{-u_0z} + r_{TM}e^{u_0z}) e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y, \quad (2.25a)$$

$$F = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_p e^{-u_0h} (e^{-u_0z} + r_{TE}e^{u_0z}) e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y. \quad (2.25b)$$

### 2.3. Campo primario de un DMV

En esta Tesis se tendrá en cuenta en particular las expresiones analíticas para un DMV situado a una altura  $z = -h$  sobre la superficie de un semiespacio homogéneo. La solución particular para un dipolo magnético vertical de momento  $m\mathbf{u}_z$  a  $z = -h$  sobre la superficie de la Tierra satisface la ecuación diferencial,

$$\nabla^2 F + k_0^2 F = -\hat{z}_0 m \delta(x) \delta(y) \delta(z + h), \quad (2.26a)$$

ya que el dipolo está en la dirección del eje  $z$ . La solución de esta ecuación entre el dipolo y la Tierra es

$$\tilde{F} = \frac{\hat{z}_0 m}{2u_0} e^{-u_0 h} e^{-u_0 z}. \quad (2.27a)$$

Debido a la simetría del problema, las corrientes son solo horizontales. El campo eléctrico no tiene componente vertical y, por lo tanto, el campo electromagnético es transversal eléctrico (TE) respecto de  $z$ . Teniendo en cuenta las Ecs. (2.25b) y (2.27) se tiene la expresión del potencial

$$F(x, y, z) = \frac{\hat{z}_0 m}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-u_0(z+h)} + r_{TE} e^{u_0(z-h)}] \frac{1}{u_0} e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y. \quad (2.28a)$$

Como la integral es función de  $k_x^2 + k_y^2$ , puede convertirse a una transformada de Hankel

$$F(\rho, z) = \frac{\hat{z}_0 m}{4\pi} \int_0^{\infty} [e^{-u_0(z+h)} + r_{TE} e^{u_0(z-h)}] \frac{\lambda}{u_0} J_0(\lambda \rho) d\lambda, \quad (2.29a)$$

donde  $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$ . A partir de la expresión del potencial pueden obtenerse las diferentes componentes del campo electromagnético

$$E_\phi = -\frac{\hat{z}_0 m}{4\pi} \int_0^{\infty} [e^{-u_0(z+h)} + r_{TE} e^{u_0(z-h)}] \frac{\lambda^2}{u_0} J_1(\lambda \rho) d\lambda, \quad (2.30a)$$

$$H_\rho = \frac{m}{4\pi} \int_0^{\infty} [e^{-u_0(z+h)} - r_{TE} e^{u_0(z-h)}] \lambda^2 J_1(\lambda \rho) d\lambda, \quad (2.30b)$$

$$H_z = -\frac{m}{4\pi} \int_0^{\infty} [e^{-u_0(z+h)} + r_{TE} e^{u_0(z-h)}] \frac{\lambda^3}{u_0} J_0(\lambda \rho) d\lambda, \quad (2.30c)$$

Se plantea el caso de un subsuelo homogéneo de conductividad  $\sigma_1$  y se tiene en cuenta la aproximación cuasi-estática ( $k_0 \approx 0$ ). Esta es válida cuando las distancias entre emisor y receptor son mucho menores que que la longitud de onda en el vacío, por lo tanto, aplicable a la mayoría de los casos en geofísica. Entonces  $k_0 = 0$ ,  $u_0 = \lambda$ ,  $u_1 = u = (\lambda^2 - k^2)^{1/2}$ ,  $k = k_1 = (-i\omega\mu_0\sigma_1)^{1/2}$ , y

$$r_{TE} = \frac{\lambda - u}{\lambda + u}.$$



Para el caso de un semiespacio homogéneo las componentes del campo electromagnético se escriben como

$$E_\phi = -\frac{\hat{z}_0 m}{4\pi} \int_0^\infty \left[ e^{-\lambda(z+h)} + \frac{\lambda-u}{\lambda+u} e^{\lambda(z-h)} \right] \lambda J_1(\lambda\rho) d\lambda, \quad (2.31a)$$

$$H_\rho = \frac{m}{4\pi} \int_0^\infty \left[ e^{-\lambda(z+h)} - \frac{\lambda-u}{\lambda+u} e^{\lambda(z-h)} \right] \lambda^2 J_1(\lambda\rho) d\lambda, \quad (2.31b)$$

$$H_z = -\frac{m}{4\pi} \int_0^\infty \left[ e^{-\lambda(z+h)} + \frac{\lambda-u}{\lambda+u} e^{\lambda(z-h)} \right] \lambda^2 J_0(\lambda\rho) d\lambda. \quad (2.31c)$$

Estas expresiones son válidas para obtener los valores del campo a una altura  $z$  entre la fuente y la superficie de la Tierra ( $z = 0$ ). Para obtener los valores del campo debajo de la superficie ( $z > 0$ ) puede aprovecharse la simetría en  $z$  del semiespacio homogéneo y obtener fácilmente las expresiones correspondientes. En particular interesa la componente  $E_\phi$  que será ingresada en las ecuaciones para el campo secundario,

$$E_\phi = -\frac{\hat{z}_0 m}{4\pi} \int_0^\infty \left[ 1 + \frac{\lambda-u}{\lambda+u} \right] e^{-u(z+h)} \lambda J_1(\lambda\rho) d\lambda, \quad (2.32)$$

### 2.3.1. Integración numérica y filtro digital

Las integrales que deben evaluarse para obtener los valores de las componentes del campo electromagnético son de la forma

$$f(r) = \int_0^\infty F(\lambda) Z(\lambda r) d\lambda. \quad (2.33)$$

En esta expresión  $Z$  denota una función  $J$  de Bessel de orden 0 o 1 cuando se considera una fuente puntual. La función  $F(\lambda)$  es tal  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} F(\lambda) = 0$ . La naturaleza oscilatoria de  $Z$  y el rango infinito de la integral dificultan la integración. Además, generalmente la integral debe ser evaluada para un gran número de valores de  $r$ , por lo que la forma estándar de computarla es convirtiendo la integral en una convolución, como describió originalmente Ghosh (1971). Para proceder, realiza la sustitución

$$r = e^x, \quad (2.34a)$$

$$\lambda = e^{-y}, \quad (2.34b)$$

y multiplicando por  $e^x$  se obtiene

$$e^x f(e^x) = \int_{-\infty}^\infty F(e^{-y}) [e^{x-y} Z(e^{x-y})] dy, \quad (2.35)$$

que tiene la forma de una integral de convolución. En una notación más simple,

$$g(x) = \int_{-\infty}^\infty k(y) h(x-y) dy, \quad (2.36)$$

donde

$$\begin{aligned}g(x) &= e^x f(e^x), \\k(y) &= F(e^{-y}), \\h(x - y) &= e^{x-y} Z(e^{x-y}).\end{aligned}$$

Aquí,  $g$  es la salida,  $k$  es la entrada y  $h$  puede interpretarse como un filtro. La Ec. (2.36) puede ser aproximada como una convolución discreta, así

$$g[j] = \sum_i k[i]h[j - i], \quad (2.37)$$

o, conmutando,

$$g[j] = \sum_{i=N_1}^{N_2} k[j - i]h[i], \quad (2.38)$$

donde los corchetes indican que  $g[\ ]$ ,  $k[\ ]$  y  $h[\ ]$  son secuencias discretas que aproximan a las respectivas funciones.

Los coeficientes del filtro  $h[i]$ , en esta Tesis, son los de Guptasarma y Singh (1997) que aproximan a  $h(x)$  para la integración numérica propuesta.

# Capítulo 3

## Aproximación mediante Elementos Finitos

El método de elementos finitos es una técnica general para construir soluciones aproximadas de ecuaciones diferenciales en dominios de forma arbitraria y con diversas condiciones de contorno.

### 3.1. Formulación del problema

En esta sección se siguen los desarrollos presentados en Zyserman (2000).  
Previo a la formulación del problema, se introduce alguna notación. Para todo entero no negativo  $s$ ,  $(H^s(\Omega), \|\cdot\|_s)$  denota el espacio de Sobolev usual sobre  $\Omega$  (Adams, 1976). En particular  $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$  y  $\|\cdot\|_0$  es la norma usual en  $L^2$ , inducida por el producto interno  $(v, w)_\Omega = \int_\Omega v \bar{w} dx$ , donde la barra indica complejo conjugado. Si  $\Gamma$  está contenida en el borde  $\partial\Omega$  del dominio  $\Omega$ , se define  $\langle v, w \rangle_\Gamma = \int_\Gamma v \bar{w} ds$  para el producto interno en  $L^2(\Gamma)$ , con la norma asociada por  $\|\cdot\|_{0,\Gamma} = \langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma^{\frac{1}{2}}$ .  
El dominio  $\Omega$  es un prisma rectangular, y el borde  $\partial\Omega \equiv \Gamma$  son las seis caras del prisma. La subdivisión del dominio se realiza en paralelepípedos  $\Omega_j$  de volumen  $h_{x_j} \cdot h_{y_j} \cdot h_{z_j}$ ;  $\Gamma_j$  es la frontera del subdominio  $\Omega_j$ . Por  $\Gamma_{jk}$  se entiende al rectángulo común a los dominios  $\Omega_j$  y  $\Omega_k$ . Vale que  $|\Gamma_{jk}| = |\Gamma_{kj}|$ , pero en el primer caso -lado izquierdo de la igualdad- el vector normal unitario  $\nu$  apunta desde  $\Omega_j$  a  $\Omega_k$ , y en el segundo, a la inversa.

Sea

$$H(\text{curl}, \Omega) = \left\{ \varphi \in (L^2(\Omega))^3 : \nabla \times \varphi \in (L^2(\Omega))^3 \right\}, \quad (3.1)$$

un espacio de Hilbert con producto interno y norma

$$(\varphi, \psi)_{H(\text{curl}, \Omega)} = (\varphi, \psi) + (\nabla \times \varphi, \nabla \times \psi) \quad \|\varphi\|_{H(\text{curl}, \Omega)} = (\|\varphi\|_0^2 + \|\nabla \times \varphi\|_0^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.2)$$

El problema cuya solución  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$  se quiere obtener es

$$\sigma \mathbf{E} - \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{G} \quad \text{en } \Omega, \quad (3.3a)$$

$$i\omega\mu\mathbf{H} + \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad \text{en } \Omega, \quad (3.3b)$$

$$(1 - i)P_\tau a\mathbf{E} + \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{H} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma, \quad (3.3c)$$

donde  $\mathbf{G} = -\sigma_s \mathbf{E}_p$ ,  $a = (\sigma/2\omega\mu)^{\frac{1}{2}}$ . Para simplificar la notación se han omitido los subíndices del campo secundario. La prueba de la existencia y unicidad de la solución a este problema está dada en Santos y Sheen (2000).

Para obtener la forma variacional mixta del sistema (3.3), se testea la Ec. (3.3b) con la función de prueba  $\boldsymbol{\varphi} \in (L^2(\Omega))^3$ , y la Ec. (3.3a) con  $\boldsymbol{\psi} \in H(\text{curl } \Omega)$ ; se integra por partes y se hace uso de la Ec. (3.3c) (Sheen, 1992). Se puede entonces buscar el par  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$  solución de

$$\begin{aligned} (\sigma \mathbf{E}, \boldsymbol{\psi}) - (\mathbf{H}, \nabla \times \boldsymbol{\psi}) + \langle (1 - i)P_\tau a\mathbf{E}, P_\tau \boldsymbol{\psi} \rangle &= (\mathbf{G}, \boldsymbol{\psi}) \\ \boldsymbol{\psi} &\in H(\text{curl } \Omega), \end{aligned} \quad (3.4a)$$

$$(i\omega\mu\mathbf{H}, \boldsymbol{\varphi}) + (\nabla \times \mathbf{E}, \boldsymbol{\varphi}) = 0 \quad \boldsymbol{\varphi} \in (L^2(\Omega))^3. \quad (3.4b)$$

La descripción de los espacios de elementos finitos no conformes que se utilizará en la discretización del problema planteado sigue a Douglas et al. (1999); Douglas et al. (2000). Uno de los objetivos de usar este tipo de elementos finitos es facilitar los cálculos, relajando la condición de continuidad entre las caras de los subdominios restringiéndola al centro del rectángulo. Para hacerlo correctamente deben utilizarse espacios aproximantes  $Y^h$  y  $Z^h$  de  $H(\text{curl } \Omega)$  y  $(L^2(\Omega))^3$  respectivamente. Para construir estos espacios de elementos finitos, se introducen los espacios de polinomios  $Q(K) = Q_x \times Q_y \times Q_z$  sobre el cubo de referencia  $K = [-1, 1]^3$ , donde

$$Q_x = \text{Span}\left\{1, y, z, \left(y^2 - \frac{5}{3}y^4\right) - \left(z^2 - \frac{5}{3}z^4\right)\right\},$$

$$Q_y = \text{Span}\left\{1, z, x, \left(z^2 - \frac{5}{3}z^4\right) - \left(x^2 - \frac{5}{3}x^4\right)\right\},$$

$$Q_z = \text{Span}\left\{1, x, y, \left(x^2 - \frac{5}{3}x^4\right) - \left(y^2 - \frac{5}{3}y^4\right)\right\},$$

y  $S(K) = S_x \times S_y \times S_z$ , donde

$$S_x = \text{Span}\left\{1, y - \frac{10}{3}y^3, z - \frac{10}{3}z^3\right\},$$

$$S_y = \text{Span}\left\{1, z - \frac{10}{3}z^3, x - \frac{10}{3}x^3\right\},$$

$$S_z = \text{Span}\left\{1, x - \frac{10}{3}x^3, y - \frac{10}{3}y^3\right\},$$

Los grados de libertad para  $Q(K)$  son la evaluación en los puntos medios de las caras de las componentes tangenciales,

$$\Phi(\boldsymbol{\psi}) = \{(P_\tau \boldsymbol{\psi})(m_i), i = 1 \dots 6\} \quad (3.5)$$

$\alpha$	$\psi^\alpha$	$\eta$	$\varphi^\eta$
$\mathcal{W}_x$	$(\frac{1}{4} - \frac{y}{2} - \frac{3}{8}(y^2 - \frac{5}{3}y^4 - (z^2 - \frac{5}{3}z^4)), 0, 0)$	1	$(\frac{1}{8}, 0, 0)$
$\mathcal{E}_x$	$(\frac{1}{4} + \frac{y}{2} - \frac{3}{8}(y^2 - \frac{5}{3}y^4 - (z^2 - \frac{5}{3}z^4)), 0, 0)$	2	$(\frac{3}{56}(y - \frac{10}{3}y^3), 0, 0)$
$\mathcal{S}_x$	$(\frac{1}{4} - \frac{z}{2} + \frac{3}{8}(y^2 - \frac{5}{3}y^4 - (z^2 - \frac{5}{3}z^4)), 0, 0)$	3	$(-\frac{3}{56}(z - \frac{10}{3}z^3), 0, 0)$
$\mathcal{N}_x$	$(\frac{1}{4} + \frac{z}{2} + \frac{3}{8}(y^2 - \frac{5}{3}y^4 - (z^2 - \frac{5}{3}z^4)), 0, 0)$	4	$(0, \frac{1}{8}, 0)$
$\mathcal{B}_y$	$(0, \frac{1}{4} - \frac{x}{2} - \frac{3}{8}(x^2 - \frac{5}{3}x^4 - (z^2 - \frac{5}{3}z^4)), 0)$	5	$(0, -\frac{3}{56}(x - \frac{10}{3}x^3), 0)$
$\mathcal{F}_y$	$(0, \frac{1}{4} + \frac{x}{2} - \frac{3}{8}(x^2 - \frac{5}{3}x^4 - (z^2 - \frac{5}{3}z^4)), 0)$	6	$(0, \frac{3}{56}(z - \frac{10}{3}z^3), 0)$
$\mathcal{W}_z$	$(0, 0, \frac{1}{4} - \frac{y}{2} + \frac{3}{8}(x^2 - \frac{5}{3}x^4 - (y^2 - \frac{5}{3}y^4)))$	7	$(0, 0, \frac{1}{8})$
$\mathcal{E}_z$	$(0, 0, \frac{1}{4} + \frac{y}{2} + \frac{3}{8}(x^2 - \frac{5}{3}x^4 - (y^2 - \frac{5}{3}y^4)))$	8	$(0, 0, \frac{3}{56}(x - \frac{10}{3}x^3))$
$\mathcal{S}_y$	$(0, \frac{1}{4} - \frac{z}{2} + \frac{3}{8}(x^2 - \frac{5}{3}x^4 - (z^2 - \frac{5}{3}z^4)), 0)$	9	$(0, 0, -\frac{3}{56}(y - \frac{10}{3}y^3))$
$\mathcal{N}_y$	$(0, \frac{1}{4} + \frac{z}{2} + \frac{3}{8}(x^2 - \frac{5}{3}x^4 - (z^2 - \frac{5}{3}z^4)), 0)$		
$\mathcal{B}_z$	$(0, 0, \frac{1}{4} - \frac{x}{2} - \frac{3}{8}(x^2 - \frac{5}{3}x^4 - (y^2 - \frac{5}{3}y^4)))$		
$\mathcal{F}_z$	$(0, 0, \frac{1}{4} + \frac{x}{2} - \frac{3}{8}(x^2 - \frac{5}{3}x^4 - (y^2 - \frac{5}{3}y^4)))$		

Tabla 3.1: En las funciones base de  $Q(K)$ ,  $\psi^{At}$  significa componente  $t$  no nula en el punto medio de la cara  $\mathcal{A}$  del cubo de referencia  $K = [-1, 1]^3$ , ver Fig. 3.1 por detalles sobre  $K$ . Puede también verse que el espacio  $S(K)$  es el curl de  $Q(K)$ , una propiedad que deben verificar los espacios de los métodos mixtos.

donde  $m_i$  es el centro de la  $i$ -ésima cara del cubo  $K$ , mientras que para  $S(K)$  están definidos por los momentos

$$\int_K \varphi_l dx dy dz \quad \text{y} \quad \int_K \text{curl} \varphi_l dx dy dz, \quad l = x, y, z, \quad (3.6)$$

donde *curl* debe entenderse bidimensional. Las Ecs. (3.5) y (3.6) proveen los doce (nueve) grados de libertad para determinar unívocamente los elementos de  $Q(K)$  ( $S(K)$ ) respectivamente. Para obtener las bases de estos espacios asociadas a los grados de libertad definidos, se procede aplicando los grados de libertad a un elemento genérico, y se obtiene, para el caso de  $Q(K)$  un sistema lineal de doce ecuaciones, y para  $S(K)$  uno de nueve. Las columnas de las matrices inversas de la matrices de coeficientes nos dan los coeficientes de los vectores de las bases mostradas en la Tabla 3.1. Para la definición del espacio  $Y^h$  se introduce el siguiente conjunto de vectores constantes bidimensionales

$$\tilde{\Lambda}^h = \{\tilde{\lambda}^h : \tilde{\lambda}^h|_{\Gamma_{jk}} = \tilde{\lambda}_{jk} \in P_0 \times P_0 \quad \text{en cada cara} \quad \Gamma_{jk} \quad \text{de} \quad \Omega_j, \tilde{\lambda}_{jk} + \tilde{\lambda}_{kj} = 0\}.$$

Además se usa  $\langle\langle a, b \rangle\rangle_{\Gamma_{jk}}$  para denotar la aproximación a  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma_{jk}}$  mediante la regla del punto medio sobre  $\Gamma_{jk}$ , es decir, si  $m_{jk}$  es el punto medio de la cara  $\Gamma_{jk}$ ,

$$\langle\langle a, b \rangle\rangle_{\Gamma_{jk}} = |\Gamma_{jk}|(a\bar{b})(m_{jk}).$$

Se está ahora en condiciones de definir los espacios de elementos finitos que

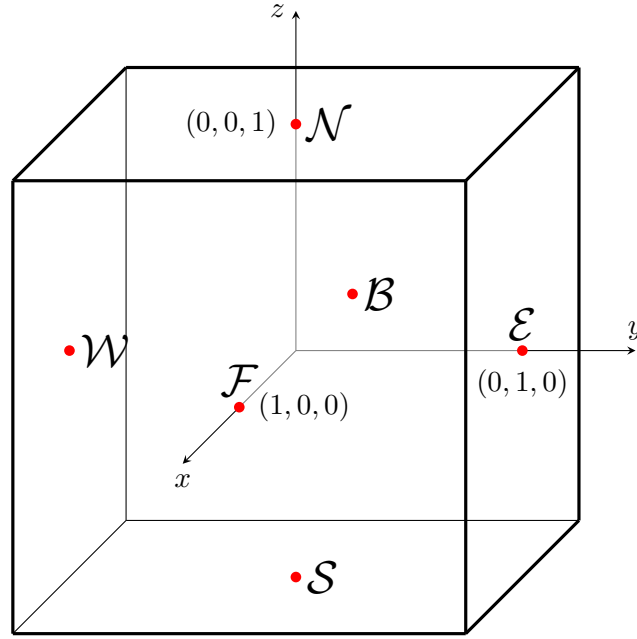


Figura 3.1: Cubo de referencia. Se considera por ejemplo a  $\psi^{\mathcal{W}_x}$ . En el punto  $(0, -1, 0)$ ,  $P_\tau \psi^{\mathcal{W}_x} = (1, 0, 0)$ , mientras que en los restantes puntos medios vale  $(0, 0, 0)$ . Análoga es la situación con las demás funciones base de  $Q(K)$ . Esta es una propiedad importante para la estimación del error de aproximación del método (Douglas et al., 1999).

utilizar en la aproximación del problema (3.3) como

$$Y^h = \{\boldsymbol{\psi} \in (L^2(\Omega_j))^3 : \boldsymbol{\psi}|_{\Omega_j} \in Q(\Omega_j) \text{ y } \sum_{jk} \langle \langle \Theta, P_\tau \boldsymbol{\psi} \rangle \rangle_{\Gamma_{jk}} = 0, \quad \forall \Theta \in \tilde{\Lambda}^h\},$$

$$Z^h = \{\boldsymbol{\varphi} \in (L^2(\Omega_j))^3 : \boldsymbol{\varphi}|_{\Gamma_j} \in S(\Omega_j)\}.$$

La última condición en la definición del espacio  $Y^h$  es la que expresa el relajamiento de la restricción de continuidad de las componentes tangenciales de las funciones a través de las caras; ahora sólo se requiere dicha continuidad en promedio y sólo en los puntos medios de las mismas.

Finalmente el procedimiento de elementos finitos mixtos no conformes es la restricción a los espacios que se acaban de construir de las Ecs. (3.4). Por lo tanto se debe encontrar  $(\mathbf{E}^h, \mathbf{H}^h) \in Y^h \times Z^h$  que verifiquen

$$(\sigma \mathbf{E}^h, \boldsymbol{\psi}) - \sum_j (\mathbf{H}^h, \nabla \times \boldsymbol{\psi})_{\Omega_j} + \langle (1-i)P_\tau a \mathbf{E}^h, P_\tau \boldsymbol{\psi} \rangle_\Gamma = (\mathbf{G}, \boldsymbol{\psi}) \quad \boldsymbol{\psi} \in Y^h, \quad (3.7a)$$

$$(i\omega\mu \mathbf{H}^h, \boldsymbol{\varphi}) + \sum_j (\nabla \times \mathbf{E}^h, \boldsymbol{\varphi})_{\Omega_j} = 0, \quad \boldsymbol{\varphi} \in Z^h. \quad (3.7b)$$

En Douglas et al. (2000) se demuestra que el error asociado a este método es asintóticamente de orden  $h^{\frac{1}{2}}$ .

### 3.1.1. Descomposición de dominio e hibridización

**Descomposición de dominio (DD):** La idea general es dividir el dominio en el cual se quiere resolver una ecuación diferencial en varios subdominios, lo que conduce a algoritmos naturalmente paralelizables. Si bien los métodos DD surgieron para resolver problemas elípticos, han sido utilizados con asiduidad para resolver también otros tipos de ecuaciones diferenciales parciales (Keyes et al. (1992); Keyes y Xu (1994)), entre ellas las ecuaciones de Maxwell armónicas (Després et al., 1992). Existen dos tipos de métodos DD, con y sin superposición de dominios. En general los primeros son más simples en el sentido de su implementación, pero son sensibles a discontinuidades en los coeficientes del problema, y duplican los cálculos en las áreas superpuestas, lo que es particularmente costoso en el caso de problemas tridimensionales con gran número de subdominios. Los segundos, por su parte, resuelven las desventajas del caso anterior, pero pueden ser computacionalmente caros.

**Hibridización:** Para obtener un método de elementos finitos híbrido, se remueve la condición de continuidad de las componentes tangenciales de los elementos de  $Y^h$  sobre las fronteras interdominios, y se las acopla indirectamente mediante vínculos válidos sobre dichas interfases, cuyo cumplimiento se fuerza a través de la introducción de multiplicadores de Lagrange. Como resultado de esta formulación, pueden hacerse aproximaciones de la solución en el interior de un elemento  $\Omega_j$  independientes de las aproximaciones sobre sus bordes (Carey y Oden, 1983). El planteo híbrido tiene asociado un problema algebraico más simple que, en este caso, al correspondiente a las Ecs. (3.7) (Arnold y Brezzi, 1985), pero se paga el costo de introducir nuevas variables.

Para obtener la versión con descomposición de dominio, se restringe el problema (3.3) a cada uno de los subdominios  $\Omega_j$  de la descomposición, que se hace coincidir con la partición de elementos finitos, es decir, se elige una descomposición donde los dominios no se superponen. El objetivo es resolver localmente, en cada  $\Omega_j$ , las ecuaciones (3.3), es decir

$$\sigma \mathbf{E}_j - \nabla \times \mathbf{H}_j = \mathbf{G}_j \quad \text{en } \Omega_j, \quad (3.8a)$$

$$i\omega\mu \mathbf{H}_j + \nabla \times \mathbf{E}_j = 0 \quad \text{en } \Omega_j, \quad (3.8b)$$

$$(1 - i)P_\tau a \mathbf{E}_j + \boldsymbol{\nu}_j \times \mathbf{H}_j = 0 \quad \text{sobre } B_j^a, \quad (3.8c)$$

donde  $B_j^a = \Gamma \cap \Gamma_j$ . En los bordes internos deben imponerse condiciones de consistencia, tanto para  $\mathbf{E}_j$  como para  $\mathbf{H}_j$ . Las condiciones son la continuidad de las componentes tangenciales de las funciones, es decir

$$P_\tau \mathbf{E}_j = P_\tau \mathbf{E}_k \quad \text{sobre } \Gamma_{jk}, \quad (3.9a)$$

$$\boldsymbol{\nu}_j \times \mathbf{H}_j = -\boldsymbol{\nu}_k \times \mathbf{H}_k \quad \text{sobre } \Gamma_{jk}. \quad (3.9b)$$

Estas condiciones pueden ser reescritas como condiciones de transmisión de Robin (Douglas et al., 1993; Kim, 1995), que en el presente caso se leen

$$(\boldsymbol{\nu}_j \times \mathbf{H}_j + \beta_{jk} P_\tau \mathbf{E}_j) = -(\boldsymbol{\nu}_k \times \mathbf{H}_k - \beta_{jk} P_\tau \mathbf{E}_k) \quad \text{sobre } \Gamma_{jk} \subset \Gamma_j, \quad (3.10a)$$

$$(\boldsymbol{\nu}_k \times \mathbf{H}_k + \beta_{jk} P_\tau \mathbf{E}_k) = -(\boldsymbol{\nu}_j \times \mathbf{H}_j - \beta_{jk} P_\tau \mathbf{E}_j) \quad \text{sobre } \Gamma_{kj} \subset \Gamma_k, \quad (3.10b)$$

donde ahora  $\beta_{jk}$  es un número complejo con parte real positiva y parte imaginaria negativa o nula, que se introduce para acelerar la convergencia. La forma variacional del problema con descomposición de dominio se obtiene de las Ecs. (3.8) en forma análoga al caso global, observando en este caso que en la integración por partes deben ser tenidas en cuenta también las interfases internas. Despejando de la Ec. (3.10a) a  $\boldsymbol{\nu}_j \times \mathbf{H}_j$  en los bordes internos  $\Gamma_{jk}$  se puede escribir el problema variacional mixto con descomposición de dominio a nivel diferencial como sigue: Hallar pares  $(\mathbf{E}_j, \mathbf{H}_j)$ ,  $j = 1 \dots J$  solución de

$$\begin{aligned} & (\sigma \mathbf{E}_j, \boldsymbol{\psi})_{\Omega_j} - (\mathbf{H}_j, \nabla \times \boldsymbol{\psi})_{\Omega_j} \\ & + \sum_{\substack{k \\ \Gamma_{jk} \cap \Gamma = \phi}} \langle \beta_{jk} (P_\tau \mathbf{E}_j - P_\tau \mathbf{E}_k) + \boldsymbol{\nu}_k \times \mathbf{H}_k, P_\tau \boldsymbol{\psi} \rangle_{\Gamma_{jk}} \\ & + \langle (1 - i) P_\tau a \mathbf{E}_j, P_\tau \boldsymbol{\psi} \rangle_{\Gamma_j} = (\mathbf{G}_j, \boldsymbol{\psi})_{\Omega_j}, \quad \boldsymbol{\psi} \in H(\text{curl}, \Omega_j), \end{aligned} \quad (3.11a)$$

$$(i\omega\mu \mathbf{H}_j, \boldsymbol{\varphi})_{\Omega_j} + (\nabla \times \mathbf{E}_j, \boldsymbol{\varphi})_{\Omega_j} = 0, \quad \boldsymbol{\varphi} \in (L^2(\Omega_j))^3. \quad (3.11b)$$

El proceso iterativo motivado por (3.11) se establece pasando los términos que involucran a vecinos del subdominio  $\Omega_j$  al lado derecho de las ecuaciones, y considerando a este último un nivel atrasado. Ahora, para obtener la versión discreta del método iterativo, se debe hibridizar al proceso iterativo propuesto (Douglas et al., 1993; Beckie et al., 1993; Mosé et al., 1994). Disociando el valor de  $\mathbf{H}$  del interior de cada dominio de su valor sobre los bordes, e incorporando un conjunto de multiplicadores de Lagrange asociados con la componente tangencial de  $\mathbf{H}$  evaluada en el punto medio de la interfase -es decir  $\lambda \simeq (\boldsymbol{\nu}_j \times \mathbf{H}_j)(m_{jk})$  sobre  $\Gamma_{jk}$ - para relajar la condición de continuidad impuesta por las condiciones de Robin sobre los elementos de  $Z^h$ ,

$$\Lambda^h = \{\boldsymbol{\lambda}^h : \boldsymbol{\lambda}^h|_{\Gamma_{jk}} \equiv \boldsymbol{\lambda}_{jk}^h \in P_0(\Gamma_{jk}) \times P_0(\Gamma_{jk})\}.$$

Existen dos multiplicadores sobre cada interfase que son vectores bidimensionales. Se puede entonces establecer el algoritmo de elementos finitos mixtos híbrido con descomposición de dominio de la siguiente manera: dados los valores iniciales arbitrarios  $(\mathbf{E}_j^{h,0}, \mathbf{H}_j^{h,0}, \lambda_{jk}^{h,0}, \lambda_{kj}^{h,0}) \in Y_j^h \times Z_j^h \times \Lambda_{jk}^h \times \Lambda_{kj}^h$  encontrar  $(\mathbf{E}_j^{h,n+1}, \mathbf{H}_j^{h,n+1}, \lambda_{jk}^{h,n+1}) \in$



$Y_j^h \times Z_j^h \times \Lambda_{jk}^h$  como solución de las ecuaciones

$$\begin{aligned} & (\sigma \mathbf{E}_j^{h,n+1}, \boldsymbol{\psi})_{\Omega_j} - (\mathbf{H}_j^{h,n+1}, \nabla \times \boldsymbol{\psi})_{\Omega_j} \\ & + \sum_{\Gamma_{jk} \cap \Gamma = \phi}^k \langle \langle \beta_{jk} P_\tau \mathbf{E}_j^{h,n+1}, P_\tau \boldsymbol{\psi} \rangle \rangle_{\Gamma_{jk}} + \langle \langle (1-i) P_\tau a \mathbf{E}_j^{h,n+1}, P_\tau \boldsymbol{\psi} \rangle \rangle_{B_j^a} \\ & = (\mathbf{G}_j, \boldsymbol{\psi})_{\Omega_j} + \sum_{\Gamma_{jk} \cap \Gamma = \phi}^k \langle \langle \beta_{jk} P_\tau \mathbf{E}_k^{h,n} - \boldsymbol{\lambda}_{jk}^{h,n}, P_\tau \boldsymbol{\psi} \rangle \rangle_{\Gamma_{jk}}, \quad \boldsymbol{\psi} \in Y_j^h, \end{aligned} \quad (3.12a)$$

$$(i\omega\mu \mathbf{H}_j^{h,n+1}, \boldsymbol{\varphi})_{\Omega_j} + (\nabla \times \mathbf{E}_j^{h,n+1}, \boldsymbol{\varphi})_{\Omega_j} = 0, \quad \boldsymbol{\varphi} \in Z_j^h, \quad (3.12b)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{jk}^{h,n+1} = -\boldsymbol{\lambda}_{kj}^{h,n} + \beta_{jk} (P_\tau \mathbf{E}_k^{h,n} - P_\tau \mathbf{E}_j^{h,n+1})(m_{jk}), \quad m_{jk} \in \Gamma_{jk}. \quad (3.12c)$$

En Douglas et al. (2000) se prueba que el método iterativo converge a la solución del problema discreto global, y que el error disminuye un factor  $1 - Ch$  en cada iteración, donde  $C$  es una constante independiente de  $h$ , el tamaño de la grilla. Se verá la implementación de este algoritmo en el siguiente capítulo, aplicándolo a la resolución del problema directo tridimensional en CSEM.

### 3.2. Implementación numérica

Utilizando la misma grilla para la partición de elementos finitos y la descomposición de dominio, se divide a la región  $\Omega$ , como se ve en la Fig. 3.2, en un conjunto de prismas rectangulares adyacentes no superpuestos entre sí, de volumen  $h_j \cdot h_k \cdot h_l$ ,  $j = 1 \dots n_x$ ,  $k = 1 \dots n_y$ ,  $l = 1 \dots n_z$ . Se toma  $h_j = x_{j+1} - x_j$ ,  $h_k = y_{k+1} - y_k$  y  $h_l = z_{l+1} - z_l$  y se denota  $\Gamma_{jkl}$  a la frontera del subdominio  $\Omega_{jkl}$  conformada por el conjunto de seis rectángulos  $G = \{\mathcal{F}, \mathcal{B}, \mathcal{W}, \mathcal{E}, \mathcal{N}, \mathcal{S}\}$ .

En cada celda  $\Omega_{jkl}$  se aproximan los campos eléctrico y magnético respectivamente de acuerdo al método descrito en la sección anterior, mediante la superposición lineal:

$$\mathbf{E}_{jkl}^{n+1} = \sum_{\alpha} \mathbf{e}_{jkl}^{\alpha, n+1} \boldsymbol{\psi}^{\alpha}(x', y', z'), \quad (3.13a)$$

$$\mathbf{H}_{jkl}^{n+1} = \sum_{\eta} \mathbf{h}_{jkl}^{\eta, n+1} \boldsymbol{\psi}^{\eta}(x', y', z'), \quad (3.13b)$$

donde los índices  $\alpha$  y  $\eta$  corren sobre todas las funciones base de los respectivos espacios aproximantes definidas en la Tabla 3.1 y los coeficientes complejos  $\mathbf{e}_{jkl}^{\alpha, n+1}$  y  $\mathbf{h}_{jkl}^{\eta, n+1}$  son los determinados en la iteración  $n + 1$ . De esta manera en cada subdominio se utilizan doce funciones base para aproximar el campo eléctrico, y nueve para hacer lo propio con el campo magnético. Las variables de las funciones base se encuentran ajustadas de manera que éstas se mantengan dentro del cubo de referencia. Así,  $x' = \frac{2x}{h_j} - 1$ , de igual manera para  $y'$  y  $z'$ .

Estas aproximaciones para los campos se introducen en las Ecs. (3.12) que establecen el algoritmo DDFE. Como las Ecs. (3.12a) y (3.12b) deben cumplirse para toda

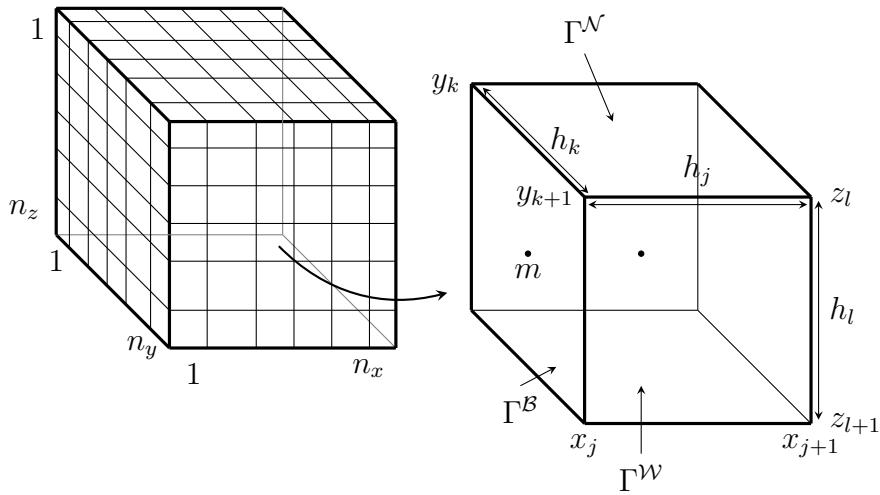


Figura 3.2: A la izquierda una posible grilla para discretizar el problema. A la derecha, detalle del subdominio  $\Omega_{jkl}$ . A los puntos medios de la cara  $m$  están asociados los multiplicadores de Lagrange  $\lambda$ , y los correspondientes coeficientes de  $\mathbf{E}$ , mientras que al centro del dominio se asocian -arbitrariamente- los coeficientes de  $\mathbf{H}$ .

función de prueba  $\psi$  y  $\varphi$  de los espacios de elementos finitos  $Y_j^h$  y  $Z_j^h$ , se requiere que estas ecuaciones se cumplan para cada una de las funciones base de los respectivos espacios  $\psi^\alpha$  y  $\varphi^\eta$ . Por lo tanto se reemplaza a cada una de estas funciones, referidas al subdominio  $\Omega_{jkl}$ , por las enumeradas en la Tabla 3.1. Con estas consideraciones, suponiendo que la conductividad se considera constante en cada subdominio y aproximando las integrales de superficie por la regla del punto medio, se reduce al sistema de ecuaciones (3.12) a un sistema lineal de 21 incógnitas en cada subdominio y para cada iteración. Sin embargo, la dimensión de este problema puede ser reducida, ya que con la elección realizada de las funciones base del campo magnético, el primer término de la Ec. (3.12b) resulta diagonal, lo que permite obtener los coeficientes  $\mathfrak{h}_{jkl}^{\eta, n+1}$  en términos de los  $\mathfrak{e}_{jkl}^{\alpha, n+1}$ . Reemplazando en la Ec. (3.12a) se obtiene un sistema lineal de 12 ecuaciones con 12 incógnitas para los coeficientes del campo eléctrico:

$$\mathbf{C}_{jkl} \mathfrak{e}_{jkl}^{n+1} = \mathbf{b}_{jkl}^n. \quad (3.14)$$

Las matrices de coeficientes no cambian a lo largo del proceso iterativo mientras que los vectores  $\mathbf{b}_{jkl}^n$  deben ser recalculados en cada iteración.

Se debe obtener por último la versión discreta de la Ec. (3.12c), tarea fácilmente realizable a partir de las Ecs. (3.13). Debe notarse que la Ec. (3.12c) son seis ecuaciones vectoriales, ya que por ella estamos indicando los multiplicadores de Lagrange asociados al valor de componente tangencial del campo magnético en los puntos medios de las seis caras del dominio  $\Omega_{jkl}$ .

Se propone entonces el algoritmo iterativo de elementos finitos mixtos no conformes híbrido con descomposición de dominio como sigue:

1. Elegir valores iniciales  $(\epsilon_{jkl}^{\alpha,0}, \lambda_{jkl}^{s,0}, s \in G)$  para las incógnitas en todas las celdas  $\Omega_{jkl}$ .
2. Para todos los dominios  $\Omega_{jkl}$ 
  - a) Resolver el sistema lineal  $\mathbf{C}_{jkl} \mathbf{e}_{jkl}^{n+1} = \mathbf{b}_{jkl}^n$ .
  - b) Computar los  $\lambda_{jkl}^{s,n+1}, s \in G$ .
  - c) Recalcular  $\mathbf{b}_{jkl}^n$ .
3. Chequear convergencia. Si no a sido alcanzada, ir al paso 2.

Una vez que el algoritmo ha convergido, los coeficientes  $\mathfrak{h}$  del campo magnético se calculan a partir de los correspondientes para el campo eléctrico, tal como se dijo más arriba.

Se elige el parámetro  $\beta$  como

$$\beta_{jkl}^s = \frac{(1-i)}{2}(a_{jkl} + a_{(jkl)*}), \quad s \in G, \quad (3.15)$$

donde el asterisco indica que el coeficiente  $a$  está calculado utilizando valores de la conductividad correspondientes (según el valor de  $s$ ) al dominio adyacente al  $\Omega_{jkl}$ , es decir si  $s = \mathcal{F}$ ,  $a_{(jkl)*} = a_{j+1kl}$ . Los valores iniciales para todas las incógnitas se toman nulos, aunque el algoritmo converge para cualquier otra elección.

# Capítulo 4

## Modelado Computacional

En este capítulo se describirá el modelo computacional a resolver y se presentarán los resultados del cómputo del campo primario y secundario. De esta manera se estará resolviendo el problema directo para el CSEM y se podrá analizar brevemente la coherencia de las soluciones en relación con los parámetros del modelo.

### 4.1. El modelo

Se consideran las Ecs. (1.5) definidas en un dominio tridimensional  $\Omega$  mostrado en la Fig. 4.1. Este dominio presenta una capa superior que representa el aire, de conductividad  $\sigma_0$  pequeña pero no nula, y una capa inferior que representa un subsuelo homogéneo de conductividad  $\sigma_1$  en el que se encuentran diferentes inhomogeneidades de volumen total  $\Omega_s$ . La distribución de conductividad puede ser descripta por:

$$\sigma(x, y, z) = \begin{cases} \sigma_p(z) & \text{en } \Omega_p \text{ (capas),} \\ \sigma_p(z) + \sigma_s(x, y, z) & \text{en } \Omega_s \text{ (inhomogeneidades).} \end{cases} \quad (4.1)$$

Luego se formula el modelo diferencial en términos de los campos dispersados. El campo primario  $\mathbf{E}_p$  y  $\mathbf{H}_p$  debe calcularse como solución de las Ecs. (1.7) para un modelo con  $\sigma = \sigma_p(z)$ , que en este caso representa a un semiespacio homogéneo. El campo total, solución de las Ecs. (1.5) en  $\Omega$  con conductividad  $\sigma$ , se expresa como  $\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_p + \mathbf{E}_s$  y  $\mathbf{H}_t = \mathbf{H}_p + \mathbf{H}_s$ , y el campo secundario  $\mathbf{E}_s$  y  $\mathbf{H}_s$  debido a la presencia de las inhomogeneidades, satisfacen las Ecs. (1.8).

Es necesario utilizar para las Ecs. (1.8), en vista de que el dominio será acotado, la condición de borde absorbente expresada en la Ec. (1.9).

### 4.2. Resultados

En primera instancia se calculó el campo electromagnético debido a un DMV ubicado en la superficie ( $h = 0$ ) de un semiespacio homogéneo (Fig. 4.2), de conduc-

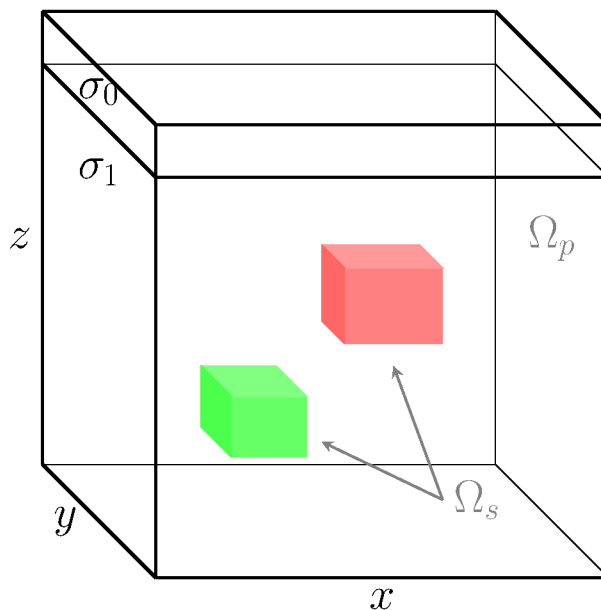


Figura 4.1: Modelo de tridimensional del subsuelo

tividades  $\sigma_1$ , representando al subsuelo, y  $\sigma_0$ , de un valor muy bajo, representando al aire. Esto se realizó utilizando una versión modificada del código EMDPLER (Singh y Mogi, 2010). Como para esta configuración particular existen expresiones analíticas

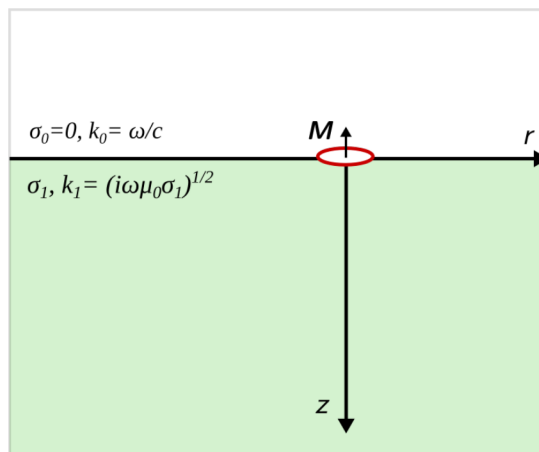


Figura 4.2: DMV en la superficie de un semiespacio homogéneo.

presentes en la literatura (Ward y Hohmann, 1987) que permiten calcular el campo en superficie ( $z = 0$ ), se compararon los resultados obtenidos mediante integración numérica con los resultados analíticos a  $z = 0$  en un rango de frecuencias amplio. En la Fig. 4.3 se muestran los valores analíticos y los computados numéricamente de la parte real y la parte imaginaria del campo eléctrico en función de la frecuencia. Dada la simetría del problema es conveniente la descripción en coordenadas cilíndricas. Se observa una buena correlación entre las curvas de la parte real para casi todas las frecuencias, mientras que para la parte imaginaria la correlación no es buena a altas

frecuencia. Lo mismo se observa en la componente  $z$  del campo magnético y sucede tanto para la parte real como para la parte imaginaria a altas frecuencias (Fig. 4.4). Esto puede deberse a que no se están considerando las corrientes de desplazamiento, las cuales son importantes a altas frecuencias. Este análisis también se hizo para la componente  $r$  del campo magnético obteniendo resultados similares. En cualquier caso, la correlación es buena para el rango de frecuencias mayormente utilizadas en CSEM.

Luego, se hizo la misma comparación, con el fin de observar la coherencia espacial, en un rango de distancias ( $r$ ) amplio entre emisor y receptor. Esto se hizo para diferentes conductividades,  $\sigma_1 = 0,01 S/m$  y  $\sigma_1 = 1 S/m$ , y para diferentes frecuencias,  $f = 1 Hz$  y  $f = 100 Hz$ , en vista de conocer el alcance de la solución según el caso. En la Fig. 4.5 se muestran las curvas para la componente  $\phi$  del campo eléctrico desde pocos centímetros hasta miles de kilómetros de distancia entre emisor y receptor. En este caso la conductividad del semiespacio es de  $1,0 S/m$  y se considera una frecuencia de  $100 Hz$ . Las curvas son prácticamente iguales para la parte real mientras que para la parte imaginaria la solución numérica diverge respecto de la solución analítica a distancias mayores de un kilómetro. Por otro lado, la Fig. 4.6 muestra la misma componente del campo eléctrico obtenida para una frecuencia de  $1 Hz$  y donde la conductividad del semiespacio es de  $0,01 S/m$ . En esta figura se observa una perfecta coincidencia entre las curvas de la solución analítica y la computada numéricamente. Para las otras componentes de campo se obtuvieron resultados similares y puede decirse que la solución calculada mediante integración numérica tiene mejores resultados para frecuencias y conductividades bajas si lo que se quiere es calcular su valor a grandes distancias de la fuente.

Además, como el campo es calculado tanto para  $z < 0$  (en el aire) como para  $z > 0$  (en el subsuelo), una forma de buscar cierta coherencia en los resultados sería pedir que los valores del campo simétricos respecto de la superficie tiendan a igualarse cuando la conductividad del semiespacio ( $\sigma_1$ ) tiende a la conductividad del aire ( $\sigma_0$ ). Esto se observa en la parte superior de la Fig. 4.7, donde se muestra como varía la componente  $\phi$  del campo eléctrico en función de la conductividad del semiespacio para dos casos, en uno el receptor se encuentra a una distancia  $100 m$  ( $z < 0$ ) por encima de la superficie y en el otro el receptor está a  $100 m$  ( $z > 0$ ) por debajo de la superficie. En la parte inferior de esta misma figura se observa que el valor del campo calculado sobre la superficie ( $z = 0$ ) tiende al valor del campo de un espacio homogéneo de conductividad  $\sigma_0$  si se hace tender la conductividad del semiespacio a  $\sigma_0$ . Esto evidencia la coherencia de la solución también en los casos límites.

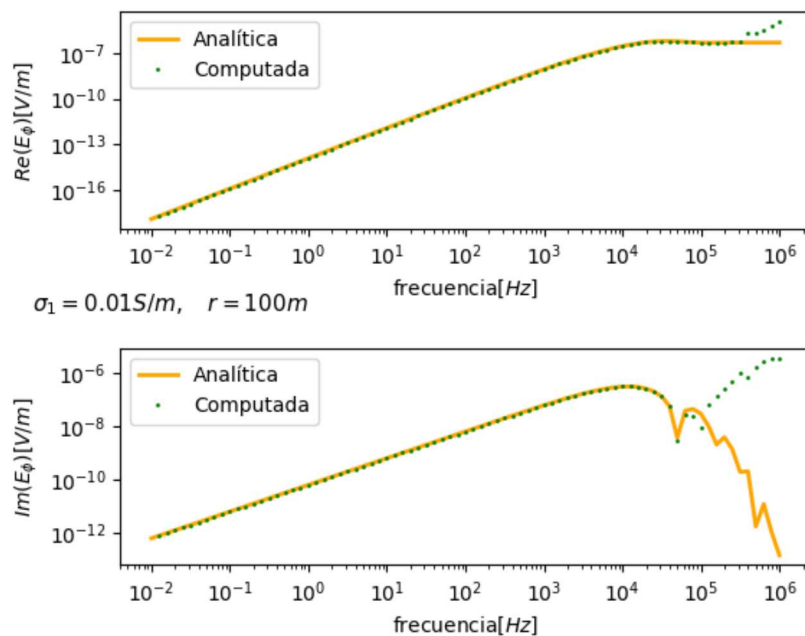


Figura 4.3: Componente  $\phi$  del campo eléctrico en la superficie ( $z = 0$ ) de un semiespacio de conductividad  $0,01 S/m$  a una distancia emisor-receptor de  $100 m$ .

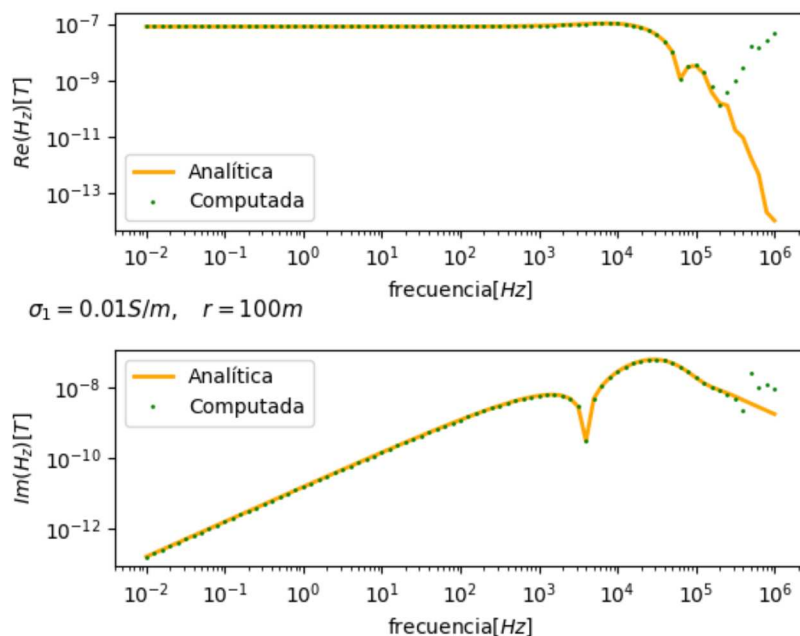


Figura 4.4: Componente  $z$  del campo magnético en la superficie ( $z = 0$ ) de un semiespacio de conductividad  $0,01 S/m$  a una distancia emisor-receptor de  $100 m$ .

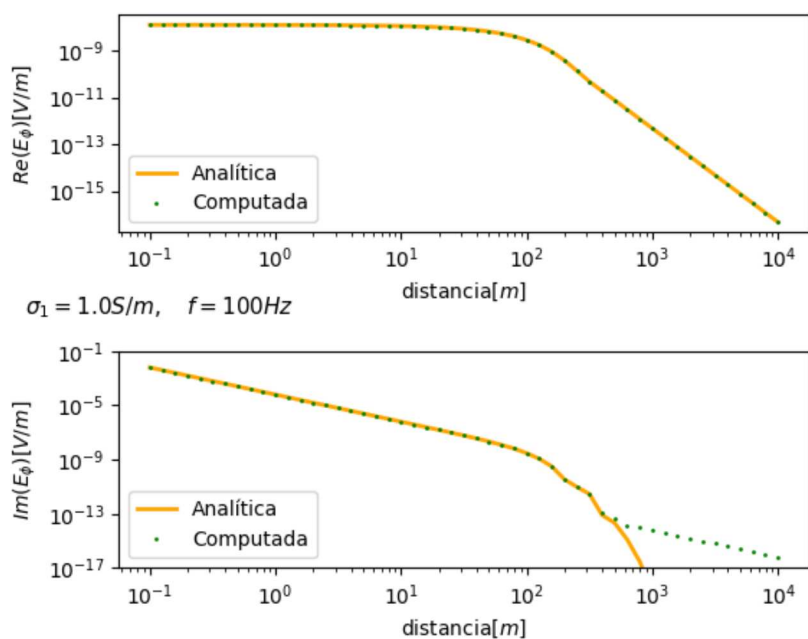


Figura 4.5: Componente  $\phi$  del campo eléctrico en la superficie ( $z = 0$ ) de un semiespacio de conductividad  $1,0 S/m$ . Frecuencia de  $100 Hz$ .

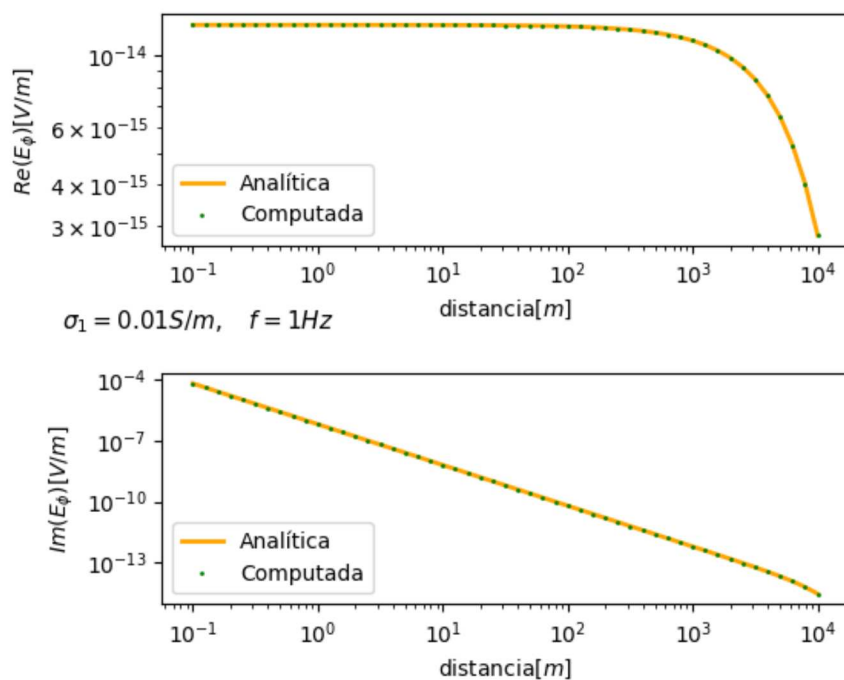


Figura 4.6: Componente  $\phi$  del campo eléctrico en la superficie ( $z = 0$ ) de un semiespacio de conductividad  $0,01 S/m$ . Frecuencia de  $1 Hz$ .



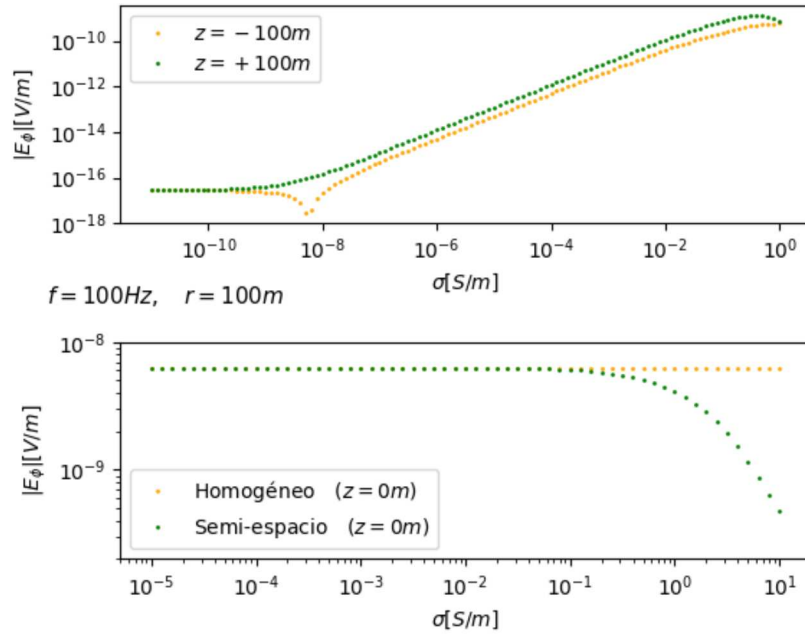


Figura 4.7: Comparación con la tendencia de  $\sigma_1$  a  $\sigma_0$ . Frecuencia de 100  $Hz$ . Distancia horizontal emisor-receptor de 100  $m$ .

El cómputo de este campo fue utilizado para ingresar el valor del campo primario en las Ecs. (1.8), y posteriormente computar el valor del campo dispersado mediante la aplicación de la metodología descrita en el Capítulo 3 en dos modelos que incluyen cuerpos de dimensiones acotadas y conductividades diferentes a la del semiespacio, de conductividad  $\sigma_1$ , y que se encuentran inmersos en él. El tiempo de cómputo para dichos modelos fue alrededor de 3 horas y en ambos casos el cálculo se realizó utilizando 32 procesadores en paralelo.

El primero de estos modelos se presenta en la Fig. 4.8 y consiste en un cubo de 710  $m$  de lado, de conductividad  $\sigma_2$ , el tope del cubo se encuentra a 284  $m$  debajo de la superficie que separa a los dos semiespacios y ubicado en el centro del dominio. Las medidas del dominio son 18  $km \times 18 km \times 2,2 km$ , la capa superior (aire) mide 213  $m$  y tiene una conductividad  $\sigma_0 = 10^{-7} S/m$ . El dominio fue dividido en una grilla homogénea de  $256 \times 256 \times 32$  elementos. La fuente es un DMV ubicado directamente sobre la superficie ( $z = 0$ ) y en el centro del dominio.

En una primera instancia se consideraron frecuencias de 1, 20, 50, 100 y 500  $Hz$ , y las conductividades  $\sigma_1 = 0,01 S/m$  y  $\sigma_2 = 0,1 S/m$ . En la Fig. 4.9 se presenta, para cada frecuencia, el módulo de las componentes del campo total en superficie dividido el módulo de su correspondiente componente de campo primario. Puede verse que teniendo en cuenta la geometría del modelo y la longitud de penetración

$$\delta = 503 \left( \frac{1}{f \sigma_1} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.2)$$

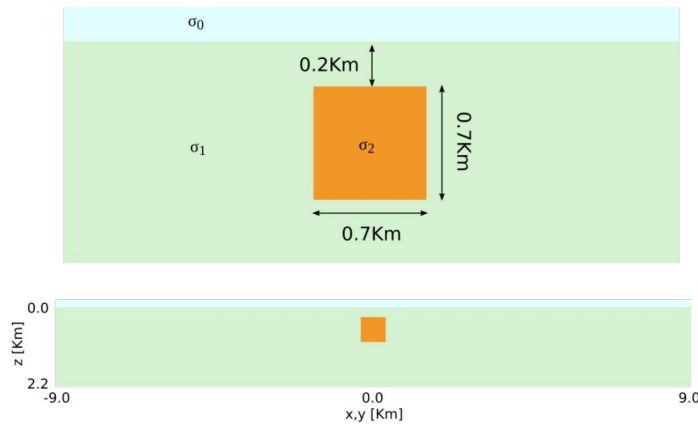


Figura 4.8: Modelo 1.

parámetro que representa el alcance del campo electromagnético en función de la conductividad y la frecuencia (Ward y Hohmann, 1987), es esperable que la amplitud de la anomalía generada por la presencia del cubo sea mayor para las frecuencias intermedias. Para la componente  $y$  del campo eléctrico y la componente  $z$  del campo magnético las frecuencias de 100 y 50  $Hz$  son las que presentan anomalías de mayor amplitud y alcanzan valores de hasta un 10 % del campo primario. Estas variaciones son más importantes cerca de la inhomogeneidad y disminuyen a medida que se alejan de ella. La componente  $x$  del campo magnético también presenta mayores variaciones para las frecuencias de 100 y 50  $Hz$ , con la particularidad de que éstas están más concentradas cerca de la inhomogeneidad y decaen rápidamente, por lo que podría ser más sensible a variaciones laterales de conductividad que las otras componentes.

Si se tiene en cuenta la Ec. 1.8b, donde el campo eléctrico primario puede interpretarse como fuente del campo electromagnético secundario, se ve que el valor de  $\sigma_s$ , que representa el contraste entre las conductividades  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ , tiene relación directa con la amplitud de la fuente que genera el campo electromagnético secundario. Por lo tanto, a mayor  $\sigma_s$  se esperaría mayor diferencia entre campo total y campo primario; esto se observa comparando las Figs. 4.9 y 4.10, donde para cada caso  $\sigma_s$  es 0,09  $S/m$  y 0,099  $S/m$  respectivamente. En el caso donde el contraste es mayor, las amplitudes llegan a ser casi un 30 % del campo primario para el campo eléctrico en  $\phi$  y el campo magnético en  $z$ , y más del doble para el campo magnético en  $x$ .

En el caso de tener una anomalía resistiva, Figs. 4.11 y 4.12, se observa que la diferencia entre campo total y campo primario es sensiblemente menor que en el caso de una anomalía conductiva, lo cual es coherente con lo que se encuentra en la literatura. Teniendo en cuenta la Ec. 1.8b, la fuente del campo dispersado es de menor magnitud para una anomalía resistiva que para una anomalía conductiva, si es el caso de la Fig. 4.11, el campo primario es de menor magnitud cuando la conductividad  $\sigma_1$  es grande, y si es el caso de la Fig. 4.12,  $\sigma_s$  es de menor magnitud que

en los casos de anomalía conductiva considerados. En ambos casos las amplitudes son cercanas al 2% o menores.

En todos los casos considerados hasta aquí, donde el DMV está ubicado directamente encima de la inhomogeneidad conductiva ( $x = 0 \text{ Km}$ ,  $y = 0 \text{ Km}$ ), la diferencia entre campo total y campo primario está más extendida lateralmente para la componente horizontal del campo eléctrico y la vertical del campo magnético que para la componente horizontal del campo magnético. En el caso de desplazar lateralmente el DMV una distancia de 2,8 Km de la posición original en la dirección de  $y$ , las corrientes de conducción fluyen de diferente forma a través de la inhomogeneidad que en los casos anteriores y la variación lateral entre campo total y campo primario está más concentrada en el lugar donde se encuentra la inhomogeneidad para cada una de las componentes del campo electromagnético, como se observa en la Fig. 4.13. Es interesante resaltar que la componente horizontal del campo eléctrico presenta anomalías de amplitudes de hasta un 60% para la mayoría de las frecuencias. La componente vertical del campo magnético también muestra anomalías de gran amplitud, de hasta un 30% para las frecuencias más altas.

Además, se consideró el caso de ubicar varios dipolos en una línea a lo largo de la dirección  $x$  y simétrica respecto de la dirección  $y$ . En la Fig. 4.14 se presentan los resultados obtenidos para esta configuración, con 80 dipolos separados entre ellos una distancia de 71 m. Se muestran los datos solo en las direcciones de mayor variación entre campo total y campo primario y se observa que la variación está más concentrada sobre la inhomogeneidad que en el caso de tener un solo dipolo ubicado directamente encima ella. Por otro lado, las amplitudes no son más grandes a pesar de la mayor cantidad de fuentes, salvo para la componente  $x$  del campo magnético.

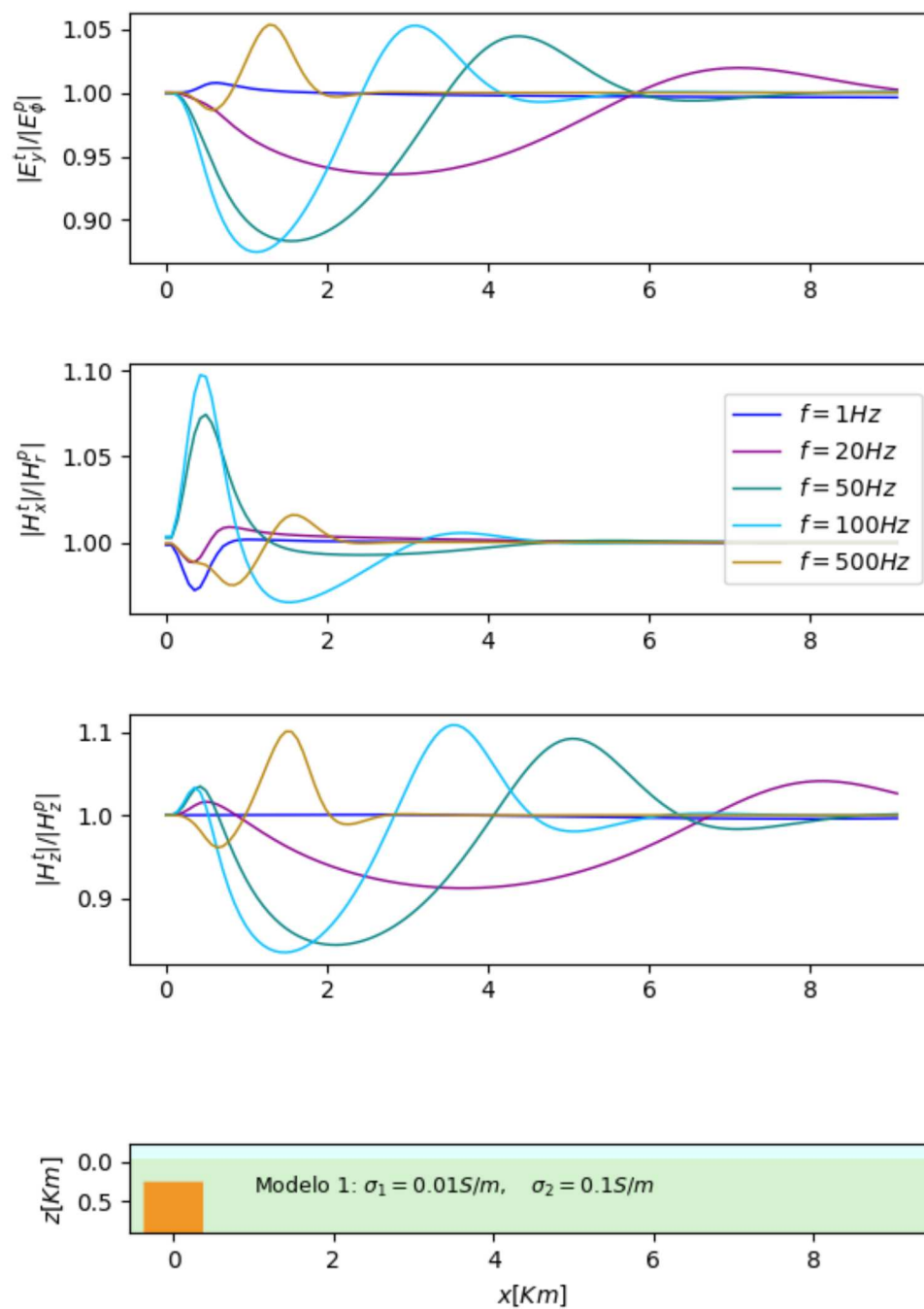


Figura 4.9: Cociente entre el campo total y campo primario. Anomalia conductiva.

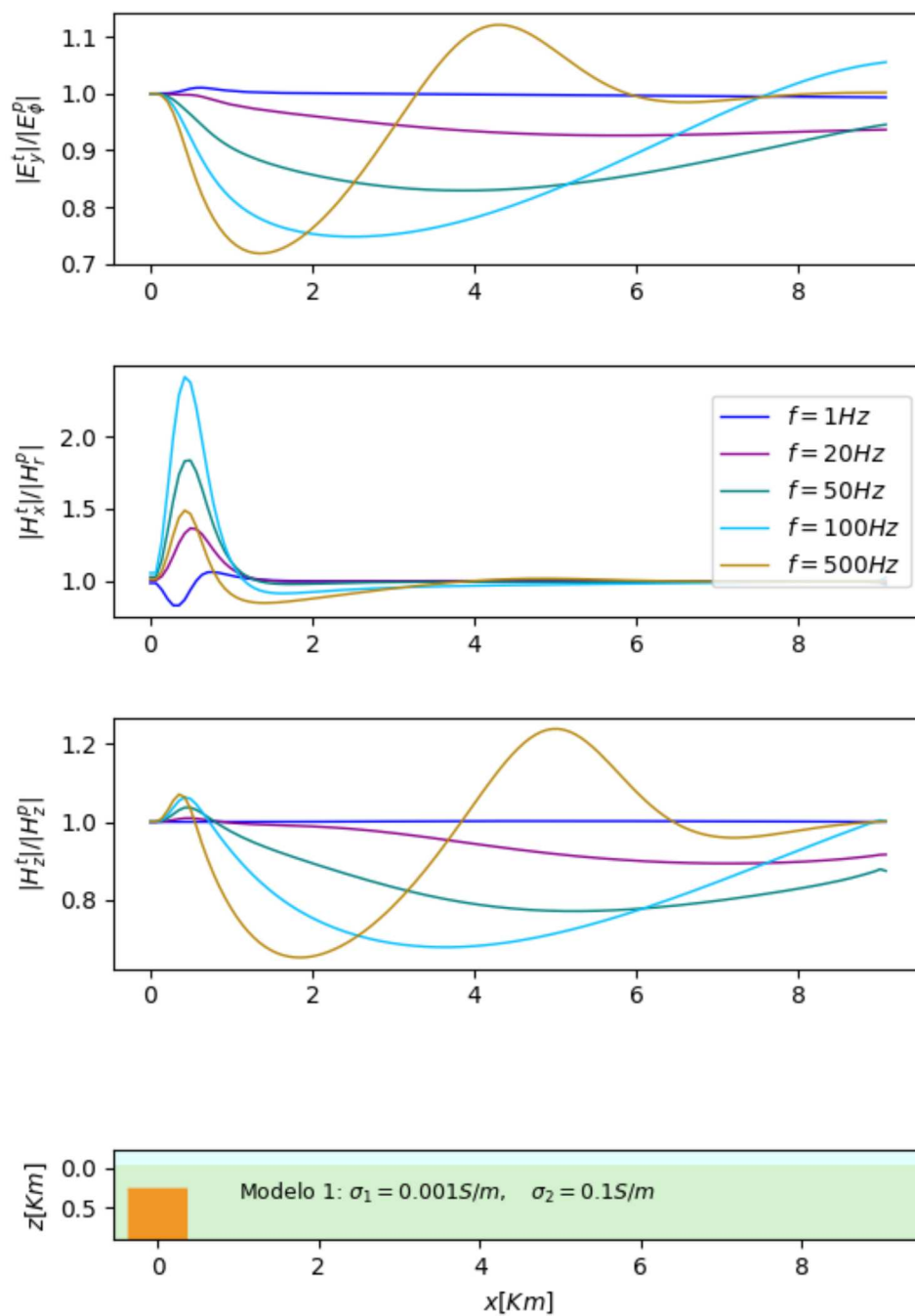


Figura 4.10: Cociente entre el campo total y campo primario. Anomalia conductiva.

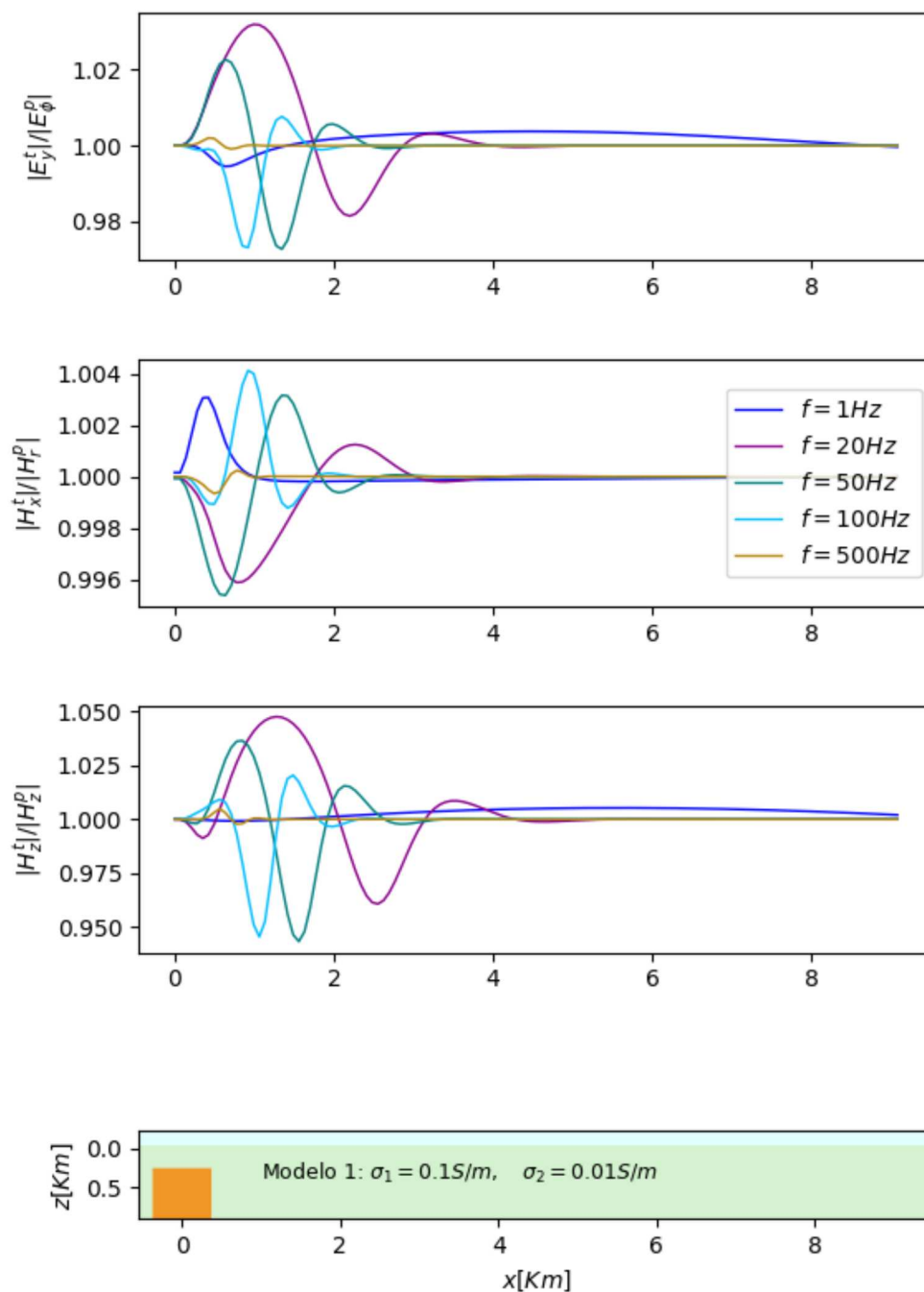


Figura 4.11: Cociente entre el campo total y campo primario. Anomalia resistiva.

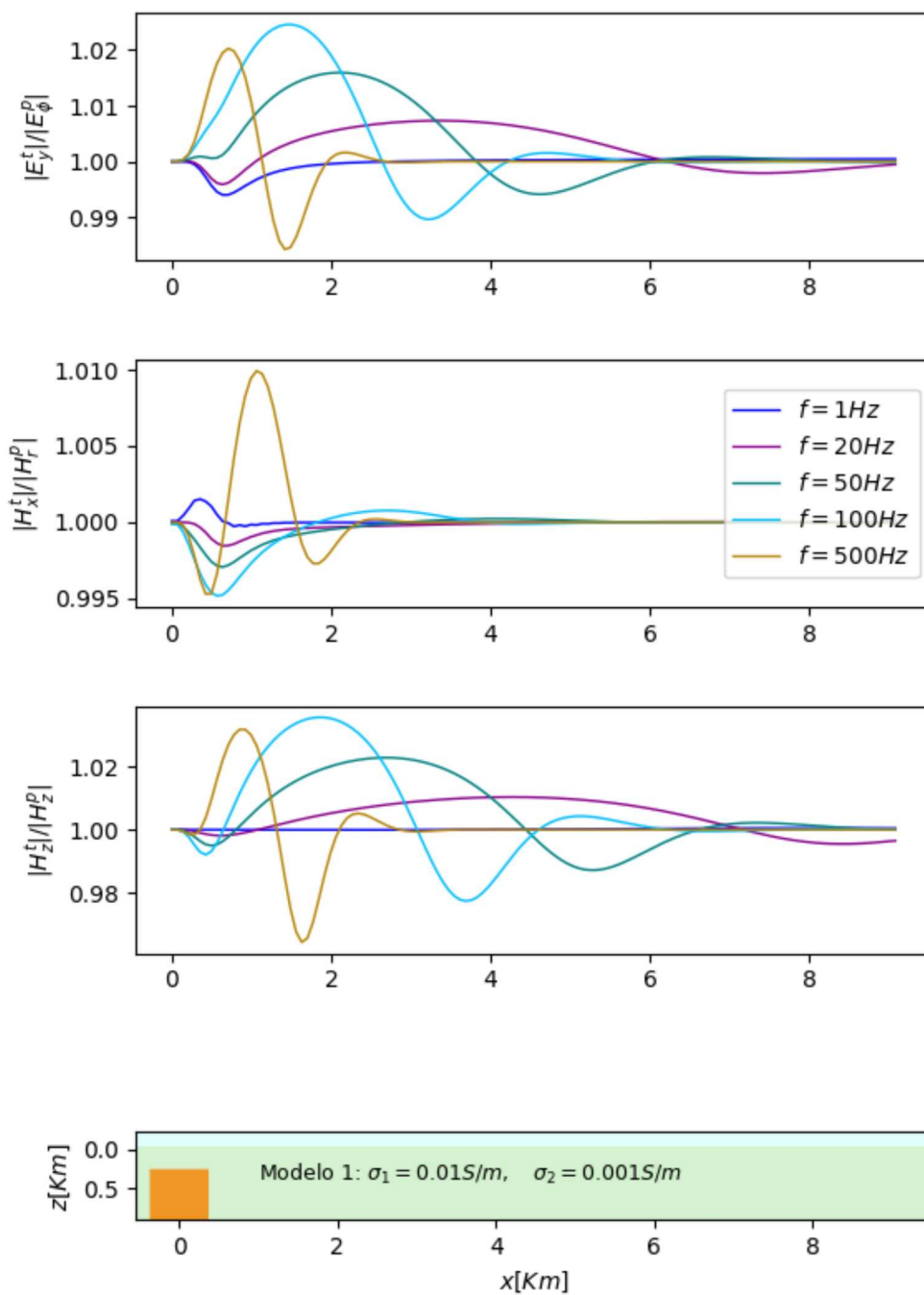


Figura 4.12: Cociente entre el campo total y campo primario. Anomalia resistiva.

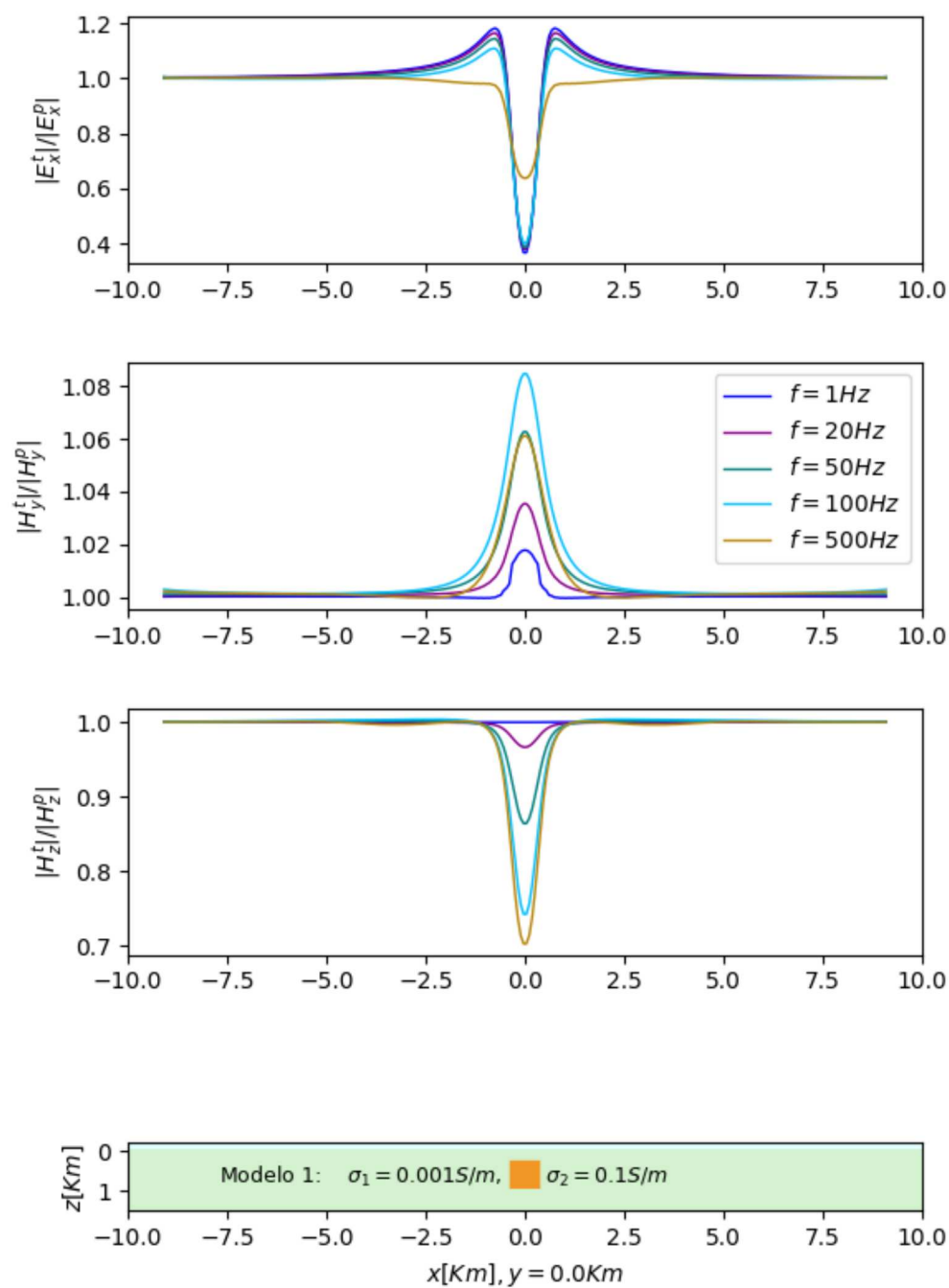


Figura 4.13: Cociente entre el campo total y campo primario. Dipolo en  $x = 0 \text{ Km}$ ,  $y = 2,8 \text{ Km}$ .



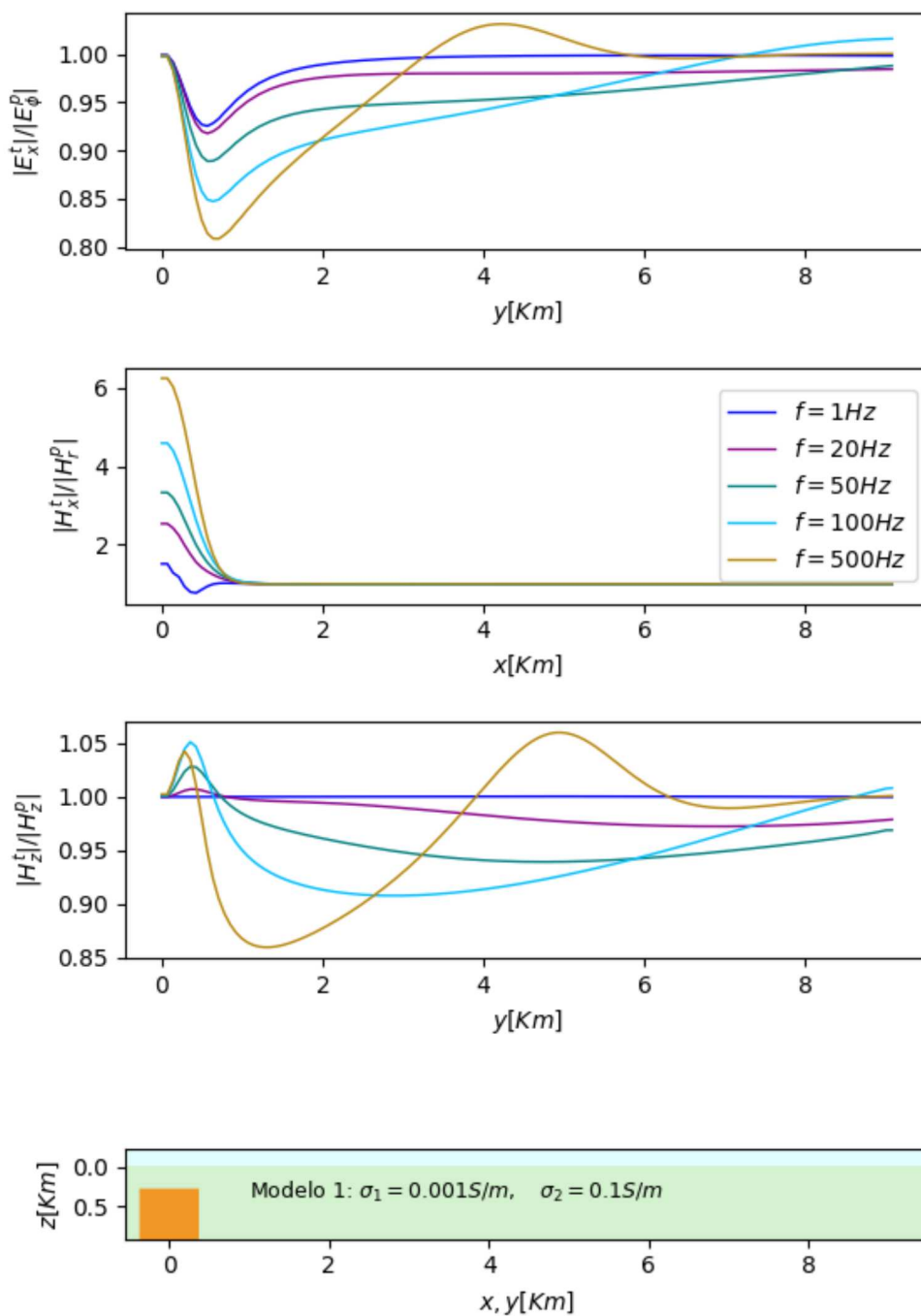


Figura 4.14: Cociente entre el campo total y campo primario. Línea de 80 dipolos en  $x$ .

Se pasa ahora a considerar el modelo una capa de la Fig. 4.15, para observar cómo influye su presencia sobre el campo electromagnético total generado por un DMV sobre la superficie. Se analizó la influencia de la capa para diferentes valores de  $L$  proporcionales a la longitud de penetración  $\delta$ . En la Fig. 4.17 se presentan los resultados para  $L$  igual a  $\delta$ ,  $\frac{3}{4}\delta$ ,  $\frac{1}{2}\delta$  y  $\frac{1}{4}\delta$ . Se observa que el módulo del campo total respecto del módulo del campo primario presenta mayor variación lateral cerca de la fuente. En la Fig. 4.18 se muestran los resultados a lo largo de la dirección  $x$  a una distancia  $y = 3,7 \text{ Km}$  de la fuente, donde los valores del campo total respecto del primario se mantienen más uniformes a lo largo de la dirección  $x$ . Teniendo en cuenta la información anterior se eligió la posición y la frecuencia de la fuente para el siguiente modelo.

El segundo modelo se muestra en la Fig. 4.16 y consiste en tres capas, la superior

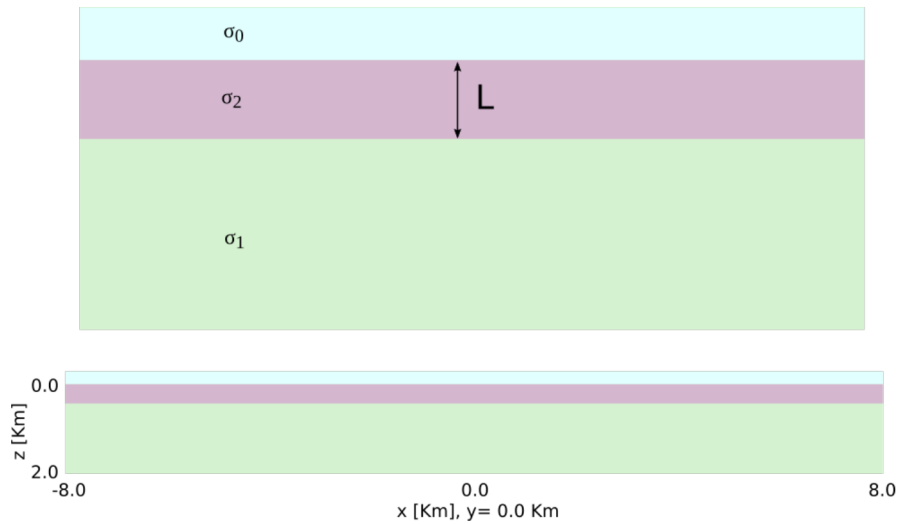


Figura 4.15: Modelo de una capa.

de conductividad  $\sigma_0 = 10^{-7} \text{ S/m}$ , la intermedia de conductividad  $\sigma_2$  y la inferior de conductividad  $\sigma_1$ ; debajo de la capa intermedia hay dos bloques rectangulares de conductividades  $\sigma_3$  y  $\sigma_4$ . Las medidas del dominio son  $16 \text{ km} \times 16 \text{ km} \times 2 \text{ km}$ , la capa superior (aire) mide  $252 \text{ m}$ , la capa intermedia es de  $378 \text{ m}$  y la inferior llega hasta el borde inferior del dominio. Los bloques están en contacto entre sí, sus topes están en contacto con la parte inferior de la capa intermedia y tienen el mismo espesor, otros detalles de sus dimensiones y posición pueden verse en la Fig. 4.16. El dominio fue dividido en una grilla homogénea de  $256 \times 256 \times 32$  elementos. La fuente es un DMV ubicado directamente sobre la superficie ( $z = 0$ ).

Se eligió una frecuencia de  $100 \text{ Hz}$  tal que el espesor de la capa intermedia fuera comparable a tres cuartos de la longitud de penetración  $\delta$ . En la Fig. 4.19 se presentan los resultados para el caso en que la fuente se encuentra a  $x = 0 \text{ Km}$  y  $y = 3,7 \text{ Km}$ . La posición de la fuente se eligió con el objetivo de que la variación entre campo

total y campo primario, a lo largo de la dirección de  $x$ , provocada por la presencia de la capa de conductividad  $\sigma_2$  sea suficientemente uniforme, y así poder observar el efecto superpuesto provocado por la presencia de los bloques subyacentes. Para apreciar mejor este efecto se incluyen los resultados obtenidos para un modelo sin los bloques, lo cual evidencia un apartamiento de la curva de referencia para cada una de las componentes, marcando los bordes de cada bloque y respondiendo de diferente forma para el bloque más resistivo que para el más conductivo.

Luego se colocó la fuente en la posición  $x = 3,7 \text{ Km}$  y  $y = 0 \text{ Km}$  para ver el efecto

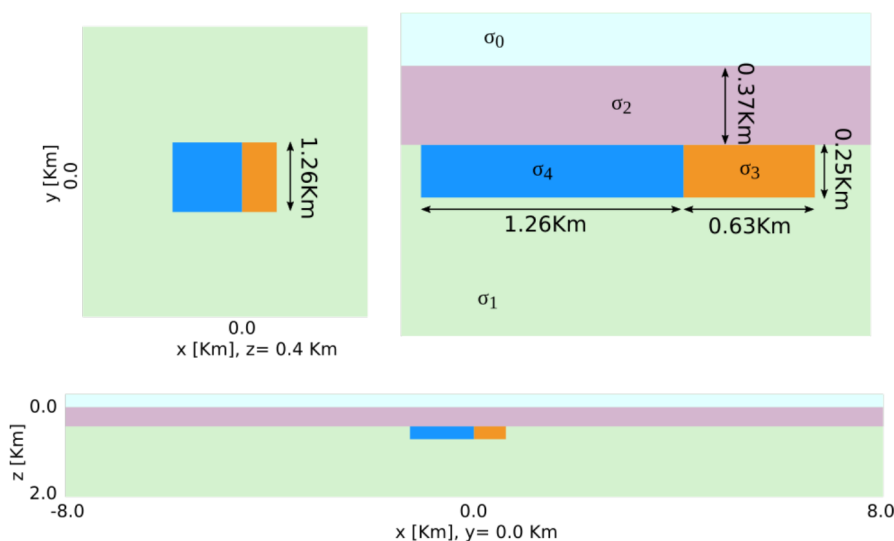


Figura 4.16: Modelo 2.

de la presencia de los bloques en la dirección  $y$ . En la Fig. 4.20 se muestran los resultados a lo largo de la dirección  $y$  en una posición directamente por encima del bloque más resistivo, donde para cada una de las componentes de campo se observa el apartamiento, respecto de la curva de referencia, cercano a los bordes entre el bloque y el medio circundante. En la Fig. 4.21 se presenta algo similar, pero esta vez en una posición directamente por encima del bloque más conductivo, se detectan los bordes del bloque y un apartamiento respecto de la curva de referencia diferente al de la Fig. 4.20 como consecuencia de que el bloque que se encuentra debajo es el más conductivo.

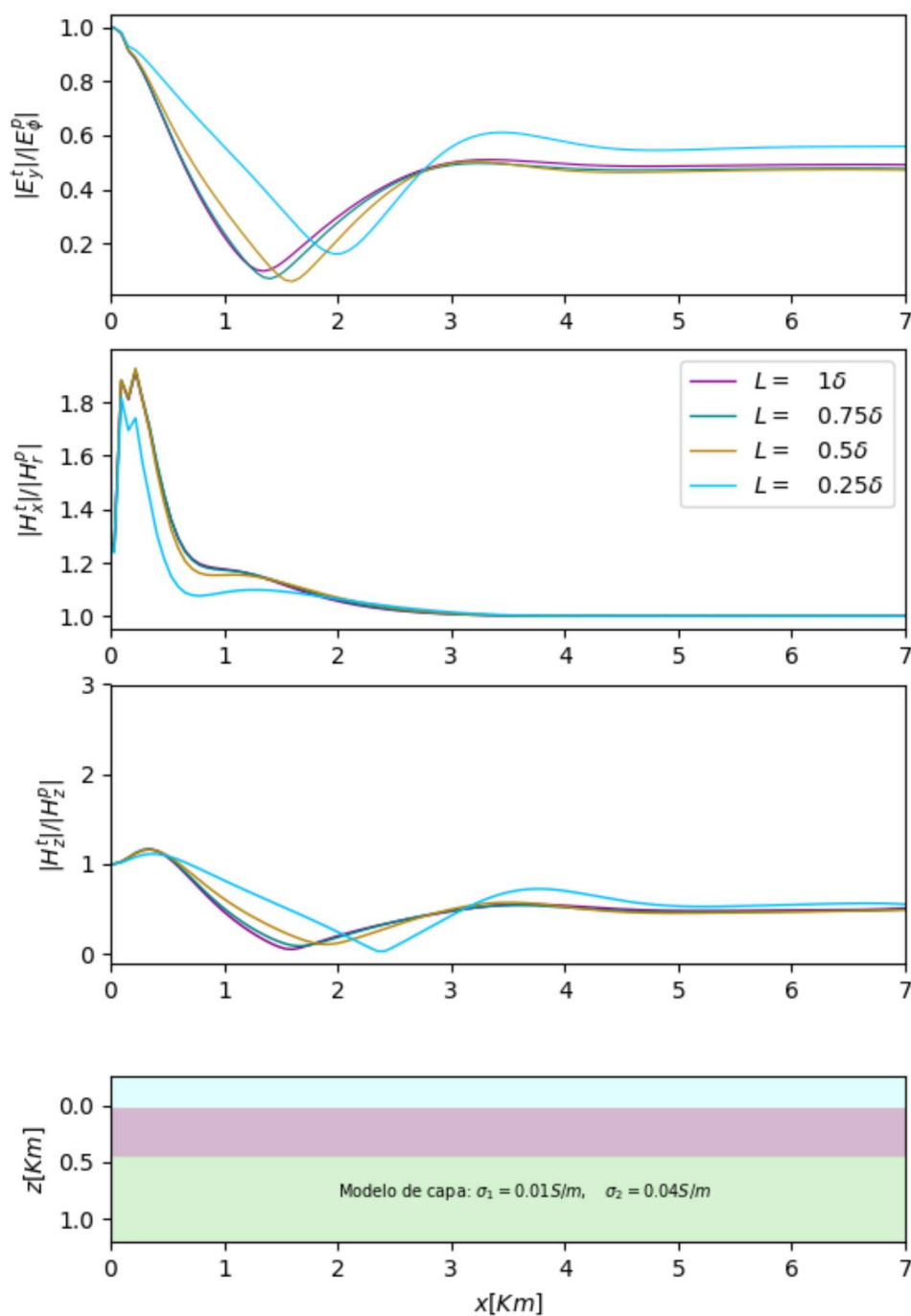


Figura 4.17: Cociente entre el campo total y campo primario para diferentes valores de espesor  $L$  en el modelo de una capa. Fuente en el origen. Datos a  $y = 0$  Km.

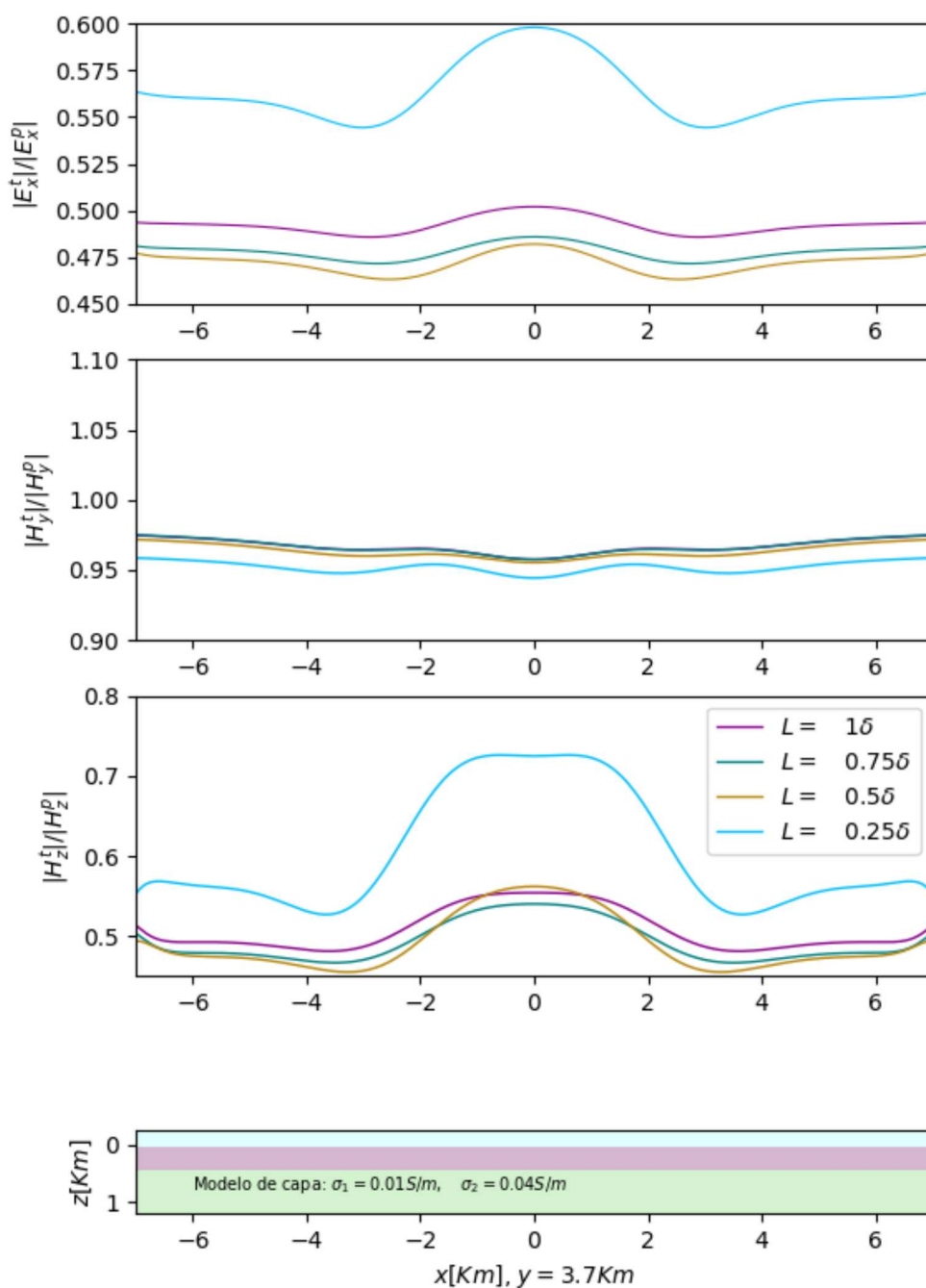


Figura 4.18: Cociente entre el campo total y campo primario para diferentes valores de espesor  $L$  en el modelo de una capa. Fuente en el origen. Datos a  $y = 3,7 \text{ Km}$ .

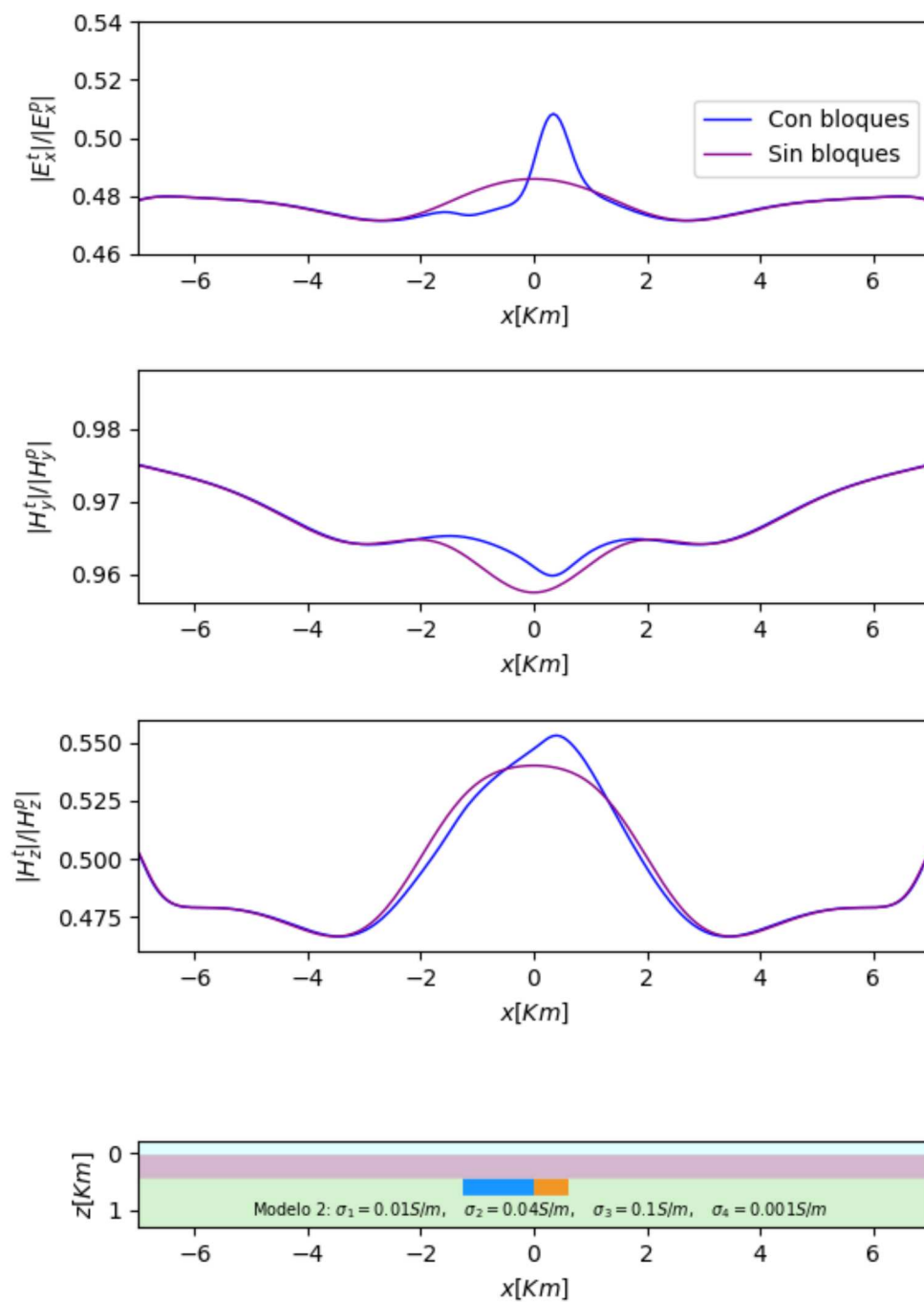


Figura 4.19: Cociente entre el campo total y campo primario para el Modelo 2 y para el modelo de una capa como curva de referencia. La fuente se ubica a  $3,7 Km$  del origen en la dirección de  $y$  en  $x = 0 Km$ .

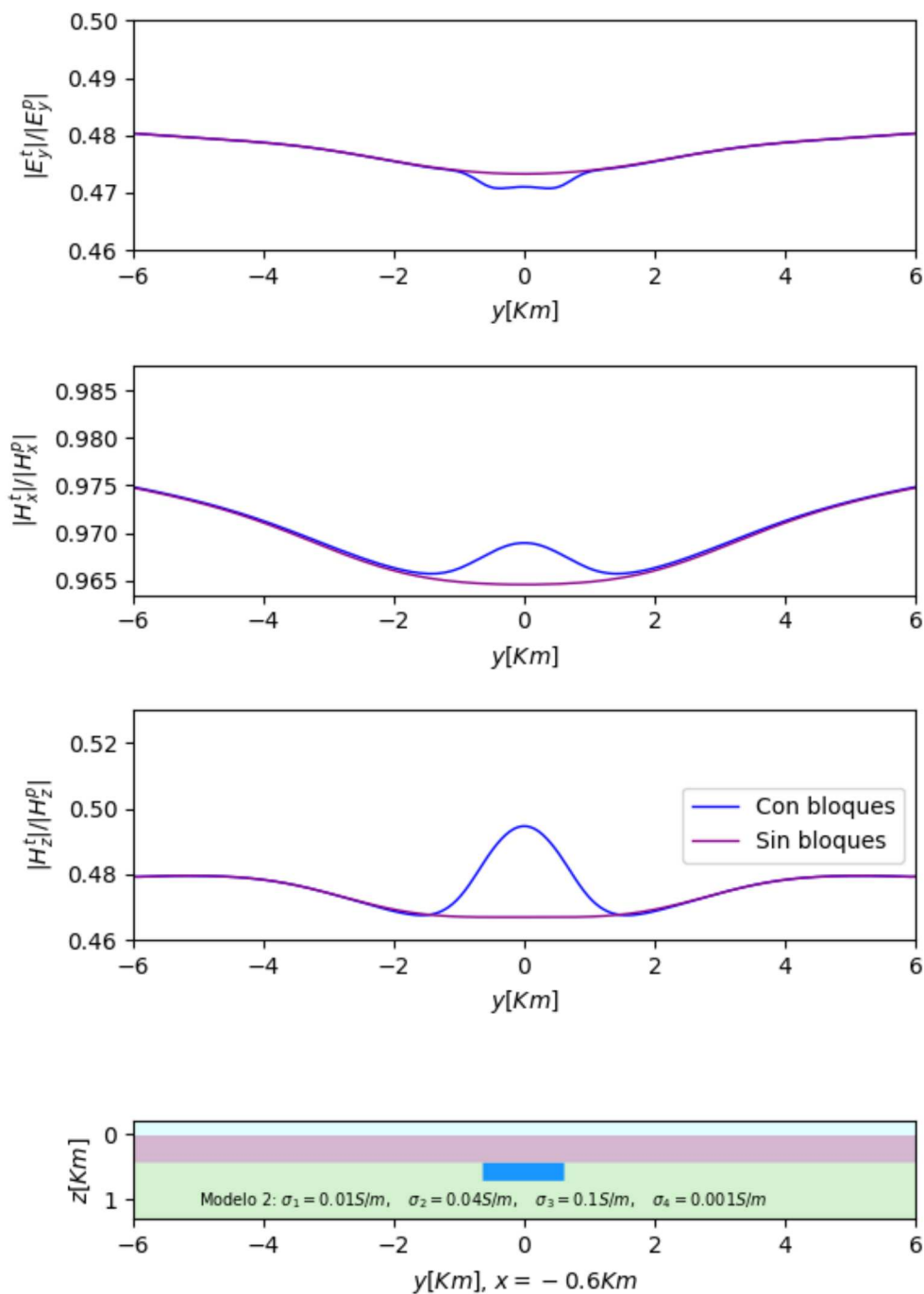


Figura 4.20: Cociente entre el campo total y campo primario para el Modelo 2 y para el modelo de una capa como curva de referencia. La fuente se ubica a  $3,7$  Km del origen en la dirección de  $x$  en  $y = 0$  Km.

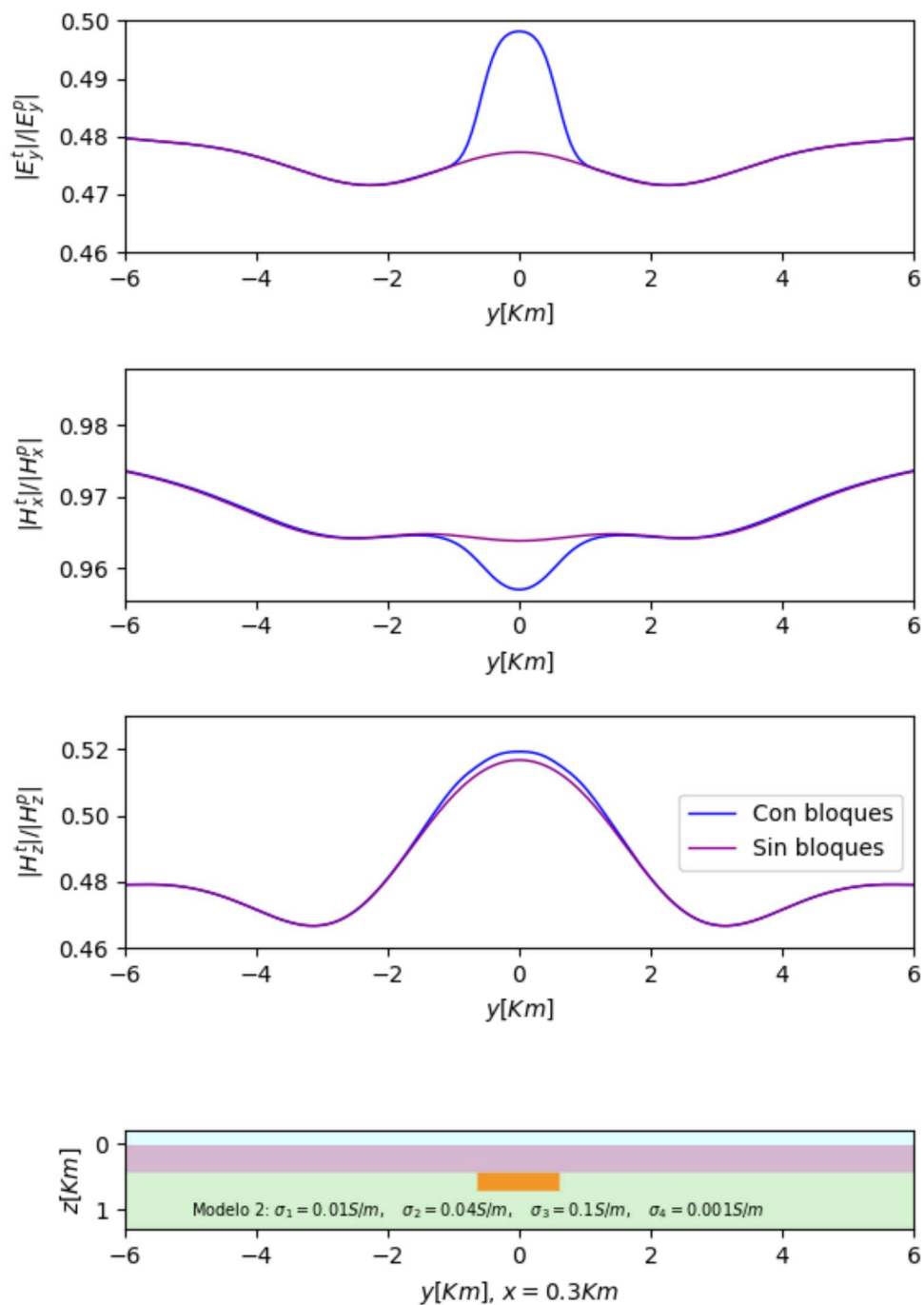


Figura 4.21: Cociente entre el campo total y campo primario para el Modelo 2 y para el modelo de una capa como curva de referencia. La fuente se ubica a 3,7 Km del origen en la dirección de  $x$  en  $y = 0 Km$ .



# Capítulo 5

## Conclusiones

En el marco de los Métodos Electromagnéticos de Fuentes Controladas (CSEM) se ha estudiado la posibilidad de modelar el campo electromagnético generado por una fuente artificial en presencia de un medio con una distribución de conductividades eléctricas sencilla, variable en las tres dimensiones del espacio, que representa al subsuelo terrestre.

Se ha obtenido, mediante integración numérica, el campo electromagnético primario producido por un dipolo magnético vertical (DMV) sobre la superficie de un semi-espacio infinito de conductividad uniforme. La solución se ha computado para todas las regiones del espacio y se la ha comparado con soluciones analíticas presentes en la literatura para situaciones particulares, analizando de esta manera su alcance tanto en el espacio como en la frecuencia.

Mediante la implementación de algoritmos que utilizan elementos finitos y descomposición de dominio se ha resuelto numéricamente las ecuaciones de Maxwell armónicas en computadoras con arquitectura paralela. De esta manera se ha obtenido el campo electromagnético de dos modelos tridimensionales en tiempos de cómputo razonables.

El análisis de los resultados ha mostrado la coherencia de la solución respecto a los diferentes parámetros de cada modelo, como lo son: frecuencia y longitud de penetración, contraste de conductividad, dimensiones y ubicación del cuerpo anómalo, posición de la fuente respecto del cuerpo anómalo. Cada una de las componentes de campo total que ha sido comparada con su correspondiente componente de campo primario, evidenciando que son sensibles a las anomalías de conductividad del subsuelo, siendo en muchos casos variaciones considerablemente mayores al 5% del campo primario. Además, en particular para el segundo modelo, el análisis ha permitido discernir entre frecuencias y posiciones de la fuente para poder diferenciar entre el efecto anómalo que producen los cuerpos localizados y el efecto anómalo global.

Como continuación de este trabajo se planea modificar el código ya existente para

implementar otros tipos de fuentes artificiales y considerar topografía y anisotropía. Se proyecta mejorar la eficiencia del algoritmo, en términos de los tiempos de cómputo, a partir de la incorporación de técnicas de programación en paralelo y/o algoritmos modernos de resolución de sistemas lineales raros. Posteriormente, se realizará la incorporación del código para el problema directo a algoritmos de inversión probabilística. Y por último, la utilización de la metodología en aplicaciones ambientales, como monitoreo de la deposición geológica de  $CO_2$  y de energías renovables, como la caracterización de reservorios de energía geotérmica.

# Bibliografía

Adams, R. A., 1976, Sobolev spaces: Academic Press.

Arnold, D. N., y Brezzi, F., 1985, Mixed and nonconforming finite element methods: implementation, postprocessing and error estimates: R.A.I.R.O. Modélisation, Mathématique et Analyse Numérique, **9**, 7–32.

Beckie, R., Wood, E., y Aldama, A., 1993, Mixed finite element simulation of saturated groundwater flow using a multigrid accelerated domain decomposition technique: Water Resources Research, **29**, no. 9, 3145–3157.

Carey, G. F., y Oden, J. T., 1983, Finite elements: a second course:, volumen 2 de **The Texas finite element series** Prentice-Hall.

Coggon, J. H., 1971, Electromagnetic and electrical modelling by the finite element method: Geophysics, **36**, 132–155.

Constable, S., y Srnka, L. I., 2007, An introduction to marine controlled-source electromagnetic methods for hydrocarbon exploration: Geophysics, **72**, WA3–WA12.

Cox, L. H., Wilson, G. A., y Zhdanov, M. S., 2010, 3d inversion of airborne electromagnetic data using a moving footprint: Exploration Geophysics, **41**, 250–259.

Després, B., Joly, P., y Roberts, J. E., 1992, A domain decomposition method for the harmonic maxwell equations, *in* Beauwens, R., y de Groen, P., Eds., Iterative Methods in Linear Algebra: Elsevier Science Publishers B. V. (North-Holland), 475–484.

Douglas Jr., J., Leme, P. J. P., Pereira, F., y Yeh, L., 1993, A massively parallel iterative numerical algorithm for immiscible flow in naturally fractured reservoirs: Int. Series of Numer. Math., **114**, 75–93.

Douglas Jr., J., Santos, J. E., Sheen, D., y Ye, X., 1999, Nonconforming Galerkin methods based on quadrilateral elements for second order elliptic problems: Math. Modelling and Numer. Anal., **33**, 747–770.

- Douglas Jr., J., Santos, J. E., y Sheen, D., 2000, A nonconforming mixed finite element method for Maxwell's equations: *Math. Mod. and Meth. in App. Sci.*, en prensa.
- Eidesmo, T., Ellingsrud, S., MacGregor, L., Constable, S., Sinha, M., Johansen, S., Kong, F., y Westerdahl, H., 2002, Sea bed logging (sbl), a new method for remote and direct identification of hydrocarbon filled layers in deepwater areas: *First Break*, **20**, 144–152.
- Ellingsrud, S., Sinha, M., Constable, S., MacGregor, L., Eidesmo, T., y Johansen, S., 2002, Remote sensing of hydrocarbon layers by seabed logging (sbl): results from a cruise offshore Angola: *The Leading Edge*, **21**, 972–982.
- Ghosh, D. P., 1971, The application of linear filter theory to the direct interpretation of geoelectrical resistivity sounding measurements: *Geophys. Prosp.*, **19**, 192–217.
- Guptasarma, D., y Singh, B., 1997, New digital linear filters for Hankel  $J_0$  and  $J_1$  transforms: *Geophysical Prospecting*, **45**, 745–762.
- Keyes, D. E., Chan, T. F., Meurant, G., Scroggs, J. S., y Voigt, R. G., Eds., 1992, Fifth international symposium on domain decomposition methods for partial differential equations American Mathematical Society.
- Keyes, D. E., y Xu, J., Eds., 1994, Domain decomposition methods in science and engineering computing, volumen 180 de **Contemporary mathematics** American Mathematical Society.
- Kim, S., 1995, Domain decomposition methods for contaminant transport in fractured porous media: Ph.D. thesis, Purdue University.
- Mosé, R., Siegel, P., Ackerer, P., y Chavent, G., 1994, Application of the mixed hybrid finite element approximation in a groundwater flow model: Luxury or necessity?: *Water Resources Research*, **30**, no. 11, 3001–3012.
- Santos, J. E., y Sheen, D., 2000, On the existence and uniqueness of Maxwell's equations in bounded domains with application to magnetotellurics: *Math. Mod. and Meth. in App. Sci.*, en prensa.
- Schelkunoff, S. A., 1943, *Electromagnetic waves*: D. Van Nostrand Co., Inc.
- Sheen, D., 1992, A generalized Green's theorem: *Appl. Math. Lett.*, **5**, 95–98.
- Sheen, D., 1997, Approximation of electromagnetic fields: Part I. continuous problems: *SIAM J. Appl. Math.*, **57**, 1716–1736.

- Singh, N. P., y Mogi, T., 2010, Emdpler: A F77 program for modelling de EM response of dipolar sources over the non-magnetic layer earth models: *Computers & Geosciences*, **36**, 430–440.
- Spies, B. R., 1989, Depth of investigation in electromagnetic sounding methods: *Geophysics*, **54**, no. 7, 872–888.
- Wannamaker, P. E., Stodt, J. A., y Rijo, L., 1987, A stable finite element solution for two-dimensional magnetotelluric modelling: *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, **88**, 277–296.
- Ward, S., y Hohmann, G. W., 1987, Electromagnetic theory for geophysical applications, *in* Nabighian, M., Ed., *Electromagnetic methods in applied geophysics*: SEG, *Investigation in Geophysics*, Vol. 1, 3, 131–311.
- Yang, D., y Oldenburg, D. W., 2012, Three-dimensional inversion of airborne time-domain electromagnetic data with applications to a porphyry deposit: *Geophysics*, **77**, no. 2, B23–B34.
- Zhdanov, M. S., y Fang, S., 1996, Quasi-linear approximation in 3-D electromagnetic modeling: *Geophysics*, **61**, no. 3, 646–665.
- Zyserman, F. I., 2000, Simulación numérica de difusión electromagnética en el subsuelo terrestre: Tesis doctoral, Fac. de Cs. Exactas, UNLP.