ASPECTOS DESTACADOS DE LAS TEORÍAS COGNITIVAS DEL APRENDIZAJE, COMO ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS PARA LA ENSEÑANZA YAPRENDIZAJE DE CONCEPTOS DEL CÁLCULO VECTORIAL

Viviana Angélica Costa
IMApEC, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata Argentina
NIECyT, Univeridad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires
vacosta@ing.unlp.edu.ar

Resumen. Este trabajo se centra en la problemática de la enseñanza y aprendizaje del Cálculo Vectorial. Se sitúa esta rama de la matemática en el contexto de la ingeniería y sus orígenes. Se exponen aspectos destacados de algunas teorías cognitivas del aprendizaje: la teoría de los modelos mentales de Johnson-Laird y la teoría del aprendizaje significativo subversivo. Proponemos considerar las mismas como marco referencial en el desarrollo de estrategias didácticas para la enseñanza y aprendizaje de los conceptos matemáticos mencionados.

Palabras clave: teorías cognitivas, cálculo vectorial, ingeniería

Abstract. This paper focuses on the problems of teaching and learning Vector Calculus. It places this branch of mathematics in engineering context and origins. Contributions are presented in this research lines from considering highlights of cognitive learning theories: the theory of mental models of Johnson-Laird and theory subversive meaningful learning. We propose to consider them as a framework in developing didactic strategies for teaching and learning of mathematical concepts mentioned.

Key words: cognitive theories, vector calculus, engineering

Introducción

Este trabajo se centra en la problemática de la *enseñanza y aprendizaje del Cálculo Vectorial* en carreras de *ingeniería*. El *Cálculo Vectorial* es una rama de las matemáticas referidas al análisis real de funciones de dos o más variables. Sus orígenes se encuentran a fines del siglo XVIII y a principios del siglo XIX, fuertemente ligados con los inicios de la *física- matemática*, la *termodinámica*, la *hidrodinámica*, la *mecánica de los fluidos,* la *electricidad,* el *magnetismo,* la *teoría del potencial y* la *Ecuación de Laplace* (Crowe, 1994; Wussing, 1998; Mankiewicz, 2005). Su estudio es esencial para alumnos de carreras de ingeniería. Les proporcionará herramientas básicas que los ayudarán en la modelización matemática de diversos *fenómenos físicos* de los sistemas en ingeniería que podrán ser analizados a partir de una representación *vectorial* (Feynman, 1987).

La enseñanza y aprendizaje de los conceptos del *Cálculo Vectorial* no es sencilla debido a la complejidad y alto grado de abstracción de los objetos matemáticos de estudio, por lo que el alumno requerirá de un *pensamiento matemático avanzado* (Azcárate Giménez y Camacho Machín, 2003). Esta problemática ha sido abordada en contextos más simples del *Cálculo* a nivel universitario (Moreno, 2005; Guzmán, 2007; McCartan, Hermon & Cunningham, 2010). Ellos expresan que la enseñanza tradicional, mecanicista, descontextualizada y técnica, obstaculiza la comprensión de los significados de los objetos matemáticos de estudio y sus vínculos con otras ciencias. Algunos investigadores proponen contextualizar el estudio, vinculándolo con la *ingeniería* y la *física* (Ramos & Font, 2006; Font, 2008; Dunn & Barbanel, 2000; Kümmerer, 2002; Camarera, 2009; Zúñiga, 2007; Willcox & Bounova, 2004). Otros proponen el uso de Tecnologías de la Información y de la Comunicación (TIC) para generar imágenes externas con el objeto de vincular *conceptos del Cálculo Vectorial* con sus *aplicaciones físicas* (Costa, Di Domenicantonio y Vacchino, 2010; Perjési, 2003; Álvarez, 2010). Estas últimas propuestas se basan en que la visualización de imágenes juega un rol central en el aprendizaje de las ciencias (Zimmerman & Cunningham, 1991; Hitt, 1998). Por ello es importante que el profesor busque para la enseñanza y aprendizaje de los objetos bajo estudio, diversas *estrategias didácticas,* integrando no sólo *qué se enseña* si no *cómo se enseña* (Salinas y Alanís, 2009).

Teorías cognitivas de aprendizaje

Las *teorías cognitivas del aprendizaje* describen los procesos mediante los cuales los seres humanos aprenden, en como ingresa la información al aprender y como se transforma en el individuo (Gardner, 1988). En lo que sigue exponemos aspectos destacados de alguna de estas teorías: la teoría de los *modelos mentales de Johnson-Laird* y la teoría del *aprendizaje significativo subversivo*. Las mismas pueden ser adoptadas como marco referencial en la investigación en la enseñanza y aprendizaje del Cálculo Vectorial, servir de base para el desarrollo e implementación de situaciones didácticas en el aula y obtener resultados que permitan afirmar su utilidad.

Teoría del aprendizaje significativo subversivo

Postman y Weingartner (1969) proponen un *aprendizaje significativo* como *actividad subversiva* (Moreira, 2005). Relatan las problemáticas de los tipos de enseñanza que no educan para las necesidades actuales del mundo, donde se espera tener personas con personalidad, inquisitivas, creativas, innovadoras que enfrenten la incertidumbre y que construyan significados nuevos. Esto constituiría un proceso de búsqueda y de construcción de significados que podríamos llamar *aprender a aprender*. Moreira (2005) considera que para sobrevivir en la sociedad contemporánea, el término *aprendizaje significativo crítico* puede ser más adecuado. Entiende por *aprendizaje crítico*: aquella perspectiva que permite al sujeto formar parte de su cultura y, al mismo tiempo, estar fuera de ella. Se trata de una perspectiva antropológica en relación a las actividades de su grupo social, que permite al individuo participar de tales actividades, pero, al mismo tiempo, reconocer cuándo la realidad se está alejando tanto que ya no se está captando por parte del grupo. Considera que a través del aprendizaje significativo crítico el alumno podrá formar parte de su cultura y, al mismo tiempo, no ser subyugado por ella, por sus ritos, sus mitos y sus ideologías. A través de ese aprendizaje es como el estudiante podrá lidiar, de forma constructiva, con el cambio, sin dejarse dominar, manejar la información sin sentirse impotente frente a su gran disponibilidad y velocidad de flujo, beneficiarse y desarrollar la tecnología, sin convertirse en tecnófilo. Por medio de este aprendizaje podrá trabajar con la incertidumbre, la relatividad, la no causalidad, la probabilidad, la no dicotomización de las diferencias, con la idea de que el conocimiento es construcción nuestra, que apenas representamos el mundo y nunca lo captamos directamente.

¿Cómo podemos los profesores facilitar el *aprendizaje significativo crítico*? Para ello Moreira destaca los siguientes puntos:

1. Aprender/enseñar preguntas en lugar de respuestas
2. Aprender a partir de distintos materiales educativos
3. Aprender que somos perceptores y representadores del mundo
4. Aprender que el lenguaje está totalmente involucrado en todos los intentos humanos de percibir la realidad
5. Aprender que el significado está en las personas, no en las palabras.
6. Aprender que el hombre aprende corrigiendo sus errores
7. Aprender a desaprender, a no usar los conceptos y las estrategias irrelevantes para la sobrevivencia
8. Aprender que las preguntas son instrumentos de percepción y que las definiciones y las metáforas son instrumentos para pensar.

En el contexto de la enseñanza del Cálculo Vectorial en carreras de ingeniería, se considera de interés proponer estrategias didácticas centradas en el ítem 1. ¡Enseñar a preguntar! Cuando un alumno, se está formulando una pregunta, está utilizando su conocimiento previo de forma no arbitraria y eso evidencia un *aprendizaje significativo*. En relación a esto, Moreira (2005) se pregunta cómo hacer para provocar esta acción en los estudiantes. Dice que más que una cuestión de motivación es hacer que el alumno perciba como relevante el nuevo concepto que queremos que construya. Expresa que el camino para ello, podría ser enseñar a los alumnos a preguntar, a formular preguntas significativas, en el contexto en que se está trabajando.

En relación al *Cálculo Vectorial*, como se menciona en la introducción, un estudiante puede aprender (*qué hacer*) mecánicamente las técnicas de cálculo para obtener las magnitudes escalares y vectoriales como son: *circulación*, *flujo*, *trabajo*, *rotor* y *divergencia*, sin un análisis de los procedimientos utilizados, ni de interpretación de resultados, constituyendo esto un aprendizaje no significativo (*cómo hacer*). El conocimiento de esas magnitudes es importante para alumnos de ingeniería pues a partir de las mismas les será posible describir y comprender fenómenos naturales, leyes del electromagnetismo y de la mecánica de los fluidos, entre otros (Feynman, 1987).

Nos preguntamos entonces, ¿Cómo lograr un *aprendizaje significativo crítico* de éstos conceptos en el estudiante? Una propuesta para la enseñanza y aprendizaje de esos conceptos consiste en desarrollar e implementar actividades para que el alumno se pregunte y a partir de las respuestas construya los significados de las magnitudes mencionadas. Preguntas tales como: ¿Cómo y porqué surgió la necesidad de calcular esas magnitudes en un contexto histórico? ¿Qué miden esas magnitudes según sea el campo vectorial: un campo de velocidades de un fluido (aire, agua), de propagación del calor, eléctrico, magnético, gravitatorio? ¿Existe alguna relación entre el *flujo* de un *campo vectorial* a través de una superficie con la cantidad de líneas de fuerza que la atraviesan? ¿Tiene algún significado físico el *flujo* a través de una superficie si la misma es cerrada? ¿Cuál, si la superficie encierra *fuentes* en su interior? ¿Cómo interpretar la *circulación* según sea su valor: positivo, negativo, o nulo, en relación con las características intrínsecas del campo vectorial? ¿Cuál es la *circulación* si el campo es *conservativo*?

La teoría de los modelos mentales de Johnson-Laird

La *Teoría de los Modelos Mentales* desarrollada por *Johnson-Laird* pretende dar una explicación de los mecanismos involucrados en el razonamiento, postulando que los humanos representan el mundo con el cual interactúan a través de *modelos mentales* (Johnson-Laird, 1983, 1990).

La *mente* es representacional y computacional. La representaciones mentales, son las maneras de nuestra mente de "re-presentar" internamente el mundo externo. Las imágenes corresponden a visiones de los modelos.

Un *modelo mental* está compuesto por elementos y relaciones que representan un estado de cosas específico, estructurados de una manera adecuada al proceso sobre el que deberán operar. Hay varias teorías sobre modelos mentales, pero la de Johnson-Laird es hasta hoy la más completa y articulada. Un modelo mental puede contener proposiciones pero estas pueden existir como representación mental en el sentido de Johnson-Laird, sin formar parte de un modelo mental.

En este sentido, la conexión con el mundo se establece a partir de una equivalencia entre un modelo mental y las partes del mundo que son designadas. A partir de esto se postula que el razonamiento científico está basado en modelos (Johnson-Laird, 1983).

Los *modelos mentales* por lo tanto, constituyen una representación o "estructura análoga" del mundo-real o de una situación-imaginada específica. Un modelo mental construye a su vez imágenes, que corresponden también a modelos mentales particulares y constitutivos de ese modelo mental. Se pueden representar principalmente a partir de tres fuentes: de percepción visual, analógica y sobre experimentos del pensamiento (Johnson-Laird, 1983). Johnson-Laird establece que no puede explicarse el razonamiento sin recurrir a la idea de modelo mental. Su Teoría de los Modelos Mentales para el razonamiento (Johnson-Laird, 1983, 1990) establece que el proceso de inferencia no puede reducirse a la lógica ni al empleo de reglas formales que operan sobre las representaciones proposicionales.

Entonces, *el razonamiento consistiría en la construcción y manipulación de Modelos Mentales de naturaleza analógica*. Johnson-Laird postula que existen por lo menos tres clases de representaciones mentales distintas: *las representaciones proposicionales*, definidas como cadenas de símbolos, similares al lenguaje natural, en el sentido que necesitan de reglas sintácticas para combinarse, pero que no se confunden con él; *los modelos mentales*, análogos estructurales del mundo y *las imágenes*, definidas como visuales del modelo (Moreira, 1999).

¿Qué aplicaciones tiene lo anterior en la enseñanza?

Las representaciones externas, son pictóricas o lingüísticas y las internas, o representaciones mentales, son proposicionales o analógicas. No existe una relación directa entre la representación externa y la representación interna. La investigación acerca del uso educativo de las imágenes externas es variada y es un campo abierto de gran importancia.

Hay diversas opiniones sobre los beneficios que tiene el uso de imágenes externas como recurso educativo en la enseñanza, y en cómo, cuánto y de qué manera, contribuyen a la comprensión. Las opiniones difieren también si el campo de aplicación es la física o la matemática. Pues si bien estas ciencias se entrelazan, tienen distintos objetos de estudio. La física, trabaja con objetos reales que ocupan un espacio y un tiempo y la matemática con objetos abstractos, que son creados por el hombre, que existen en su mente. Las representaciones que se tienen de los objetos de estudio son de distinta naturaleza en cada disciplina.

Unos y otros, parecen adherir a un conjunto de eslóganes que sostienen las ventajas y bondades del uso de representaciones visuales para: mejorar el aprendizaje, reducir la abstracción de los conceptos científicos, facilitar la comprensión, mejorar el recuerdo, promover la imaginación, introducir los fenómenos científicos de una forma vinculada a la "vida cotidiana", facilitar la resolución de problemas, motivar a los estudiantes y a los lectores en general, y podría continuarse enumerando (Otero, 2004).

Eslóganes como "una imagen vale más que mil palabras" se interpretan a partir de la idea de que las imágenes provocan una forma de comunicación más libre y menos formalizada y que permiten al vulgarizador concretizar las ideas científicas, porque ellas tienen un valor sinóptico y ayudan a considerar varios elementos y sus relaciones en una misma representación. En la práctica, algunos científicos y editores de libros de texto y un número considerable de profesores consideran ventajoso y ¡simple! reemplazar el discurso verbal por otro imagínistico. Así, poseedores de un formidable optimismo epistemológico, cognitivo y didáctico, adhieren al destierro de las palabras para ¡ahora sí! explicar sencillamente con imágenes a los niños (Otero, 2004).

Desde la Psicología Cognitiva, algunas investigaciones muestran que ciertas imágenes externas podrían afectar la comprensión y el razonamiento. Las investigaciones (Kosslyn, 1986, 1996; Johnson-Laird, 1983, 1996) muestran que el sistema cognitivo desarrolla un proceso interpretativo de las imágenes externas, que comienza con la percepción, pero "mirar" una imagen, no implica que será "almacenada" directamente en nuestra mente. Para interpretar y entender el discurso visual y verbal (imágenes y palabras), se construye una representación mental en la memoria de trabajo, a partir de la interacción entre representaciones internas y externas se desarrolla un proceso interpretativo de naturaleza estratégica.

En el campo de la matemática muchos conceptos y procesos se ligan al potencial didáctico de la visualización y la forma en que ésta, puede favorecer el aprendizaje. La visualización posibilita crear en la mente una imagen visual de un concepto abstracto. A partir de gráficos realizados con diversos recursos, diferentes procesos permiten "ver" las matemáticas. Esto ha generado diversas investigaciones en relación con el potencial didáctico de la visualización, la forma como ésta puede favorecer al aprendizaje y bajo qué condiciones utilizarla.

En matemática, un mismo objeto es posible que tenga múltiples representaciones (diferentes significantes del mismo objeto). Hablar de representación (significado y comprensión) implica necesariamente hablar del conocimiento matemático. La representación se caracteriza mediante una correspondencia abstracta entre dos entidades que son puestas en alguna relación referencial una con otra, por un actor o un observador.

La comprensión de un objeto matemático se entiende en términos de integración de *representaciones mentales*. Esta integración es la que aseguraría la competencia en el uso de las representaciones externas asociadas al objeto. Un objetivo central en la enseñanza de las matemáticas consistiría en conseguir que los alumnos sean capaces de pasar desde una representación a otra. Se reconoce que este objetivo es difícil de lograr (Font, Godino & D'Amore, 2007).

Un aspecto importante en la enseñanza de la matemática de conceptos abstractos es el de vincular éstos con aplicaciones a la física u con otros objetos según el contexto, produciendo un determinado significado.

¿Qué aplicaciones tiene lo anterior en la enseñanza y aprendizaje del *Cálculo Vectorial*?

En particular, para el estudio del concepto *campo vectorial*, se propone desarrollar actividades con el objetivo que el alumno asocie las distintas representaciones (gráficas, simbólicas, u otras) y de distinta naturaleza, física (campo gravitatorio, campo magnético, campo de gradientes de un campo escalar) y matemática, de un mismo objeto (Figura 1).

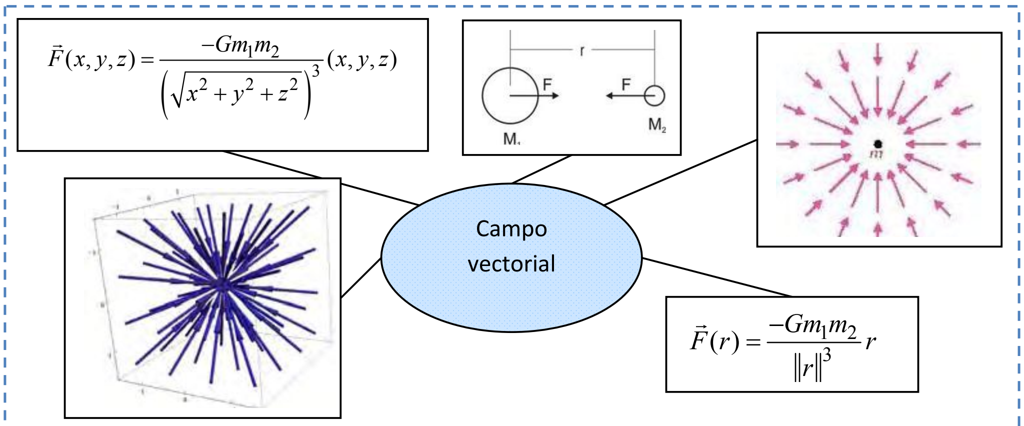

Figura 1: Campo vectorial gravitatorio. Diversas representaciones de un mismo objeto.

Referencias bibliográficas

Álvarez, T. (2010). La visualización de conceptos matemáticos y el aprendizaje del electromagnetismo. *Latin-American Journal of Physics Education*, *4* (1), 143-148.

Azcárate Giménez, C. y Camacho Machín, M. (2003). Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, 10(2), 135-150.

Camarera, G. P. (2009). La matemática en el contexto de las ciencias. *Innovación educativa 9* (48), 15-25.

Costa, V. A., Di Domenicantonio, R. M. y Vacchino, M. C. (2010). Material educativo digital como recurso didáctico para el aprendizaje del Cálculo Integral y Vectorial. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática 21*, 173-185.

Crowe, M. (1994). *A history of vector analysis: The Evolution of the Idea of a Vectorial System*. Mineola, N.Y.: Courier Dover Publications.

Dunn, J. W. & Barbanel, J. (2000). One model for an integrated math/physics course focusing on electricity and magnetism and related calculus topics. *American Journal of Physics*, 68 (8), 749-757.

Feynman, R. P. (1987). *Física, Vol II (Electromagnetismo y materia).* Massachusetts: Addison-Wesley Iberoamericana.

Font, V., Godino, J. D. & D'Amore, B. (2007). An onto-semiotic approach to representations in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 27(2), 2 -7.

Font, V. (2008). Enseñanza de la matemática. Tendencias y perspectivas. En C. Gaita (Eds). *III Coloquio Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas* (pp. 21-62), Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú, Departamento de Ciencias, Maestría en la enseñanza de las matemáticas.

Gardner, H. (1988). *La nueva Ciencia de la Mente. Historia de la Revolución Cognitiva, Las primeras décadas de la Ciencia Cognitiva*. Barcelona: Paidós.

Guzmán, M. de. (2007). Enseñanza de las ciencias y la matemática. *Revista iberoamericana de educación 43*, 19-58.

Hitt, F. (1998). Visualización matemática, nuevas representaciones, nuevas tecnologías y currículum. *Revista de Educación Matemática 10*, 23-45.

Johnson-Laird, P. (1983). *Mental models*. Cambridge: Cambridge University Press.

Johnson-Laird, P. (1990). *El ordenador y la mente*. Barcelona: Paidós.

Johnson-Laird, P. (1996). Images, Models, and Propositional Representations. En M. de Vega, M. J. Intons Peterson, P. Johnson-Laird, M. Denis & M. Marschark (Eds), *Models of Visuospatial Cognition* (pp. 90-126), New York: Oxford University Press.

Kosslyn, S. (1986). *Image and Mind*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Kosslyn, S. (1996). *Image and Brain*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Kümmerer, B. (2002). Trying the Impossible: Teaching Mathematics To Physicists And Engineers. En D. Holton (Eds. *The teaching and learning of mathematics at university level. An ICMI Study* (pp. 321- 334). New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow:

Mankiewicz, R. (2005). *Historia de las Matemáticas, del cálculo al caos*. Barcelona: Paidós Ibérica.

McCartan, C. D., Hermon, J. P. & Cunningham, G. (2010). A Validated Approach to Teaching Engineering Mathematics. *Engineering Education 2010, "Inspiring the Next Generation of*

Engineers", Aston University. Recuperado el 1 de Julio de 2010 de http://www.engsc.ac.uk/downloads/scholarart/ee2010/105_GP_McCartan.pdf

Moreira, M. A. (1999). *Modelos mentales*. Recuperado el 4 de febrero de 2013 de http://moreira.if.ufrgs.br/modelosmentales.pdf

Moreira, M. A. (2005). Aprendizaje significativo crítico. *Indivisa, Boletín de Estudios e Investigación,* 6, 83-101.

Moreno M, M. (2005). El papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo: evolución, estado actual y retos futuros. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralba (Eds), *IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 81-96), Córdoba, España: Universidad de Córdoba.

Otero, M. R. (2004). El uso de imágenes en la Educación en Ciencias como Campo de Investigación. *Revista de Enseñanza de la Física* 17(1), 9-22.

Perjési, I. H. (2003). Application of CAS for teaching of integral-transforming theorems. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* , 35(2), 43-47.

Postman, N. & Weingartner, C. (1969). *Teaching as a subversive activity*. New York: Dell Publishing Co.

Ramos, A. B. & Font, V. (2006). Contesto e contestualizzazione nell'insegnamento e nell'apprendimento della matematica. Una prospettiva ontosemiotica. *La Matematica e la sua didattica 20*(4), 535-556.

Salinas, P. y Alanís, J. A. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del cálculo dentro de una institución educativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 12*(3), 355-382.

Willcox K. & Bounova G. (2004). *Mathematics in Engineering: Identifying, Enhancing and Linking the Implicit Mathematics Curriculum.* Recuperado el 4 de febrero de 2013 de http://acdl.mit.edu/WillcoxASEE04.pdf

Wussing, H. (1998). *Lecciones de historia de las matemáticas.* Madrid: Siglo XXI de España Editores.

Zimmerman, W. & Cunningham S. (1991). *Visualization in teaching and learning mathematics*. Washington DC: Mathematical Association of America.

Zúñiga, S. L. (2007). El cálculo en carreras de ingeniería: un estudio cognitivo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 10*(1), 145-155.