

## SOLUCIÓN DISCRETA EXPLÍCITA DE UN PROBLEMA DE CONTROL ÓPTIMO DISTRIBUIDO

**Julieta Bollati<sup>a</sup>, Mariela C. Olgún<sup>b</sup> y Domingo A. Tarzia<sup>a</sup>**

<sup>a</sup>*Depto de Matemática-CONICET, Universidad Austral, Paraguay 1950, S2000FZF Rosario, Argentina, JBollati@austral.edu.ar;DTarzia@austral.edu.ar*

<sup>b</sup>*Depto de Matemática, EFB-FCEIA, Universidad Nacional de Rosario, Avda. Pellegrini 250, S2000BPT Rosario, Argentina, mcolguin@fceia.unr.edu.ar*

**Palabras Clave:** Ecuaciones variacionales elípticas, Control óptimo, Diferencias finitas, Soluciones explícitas.

**Resumen.** Se considera un sistema estacionario de conducción del calor  $S$  en un dominio multidimensional acotado para la ecuación de Poisson con una fuente y con condiciones de contorno mixtas dadas por una temperatura en la porción de frontera  $F_1$ , un flujo de calor en la porción  $F_2$  y una condición adiabática sobre la restante porción de frontera  $F_3$ . Se considera además, un problema de control óptimo  $P$  para el sistema  $S$  con una función de costo cuadrático. Para el sistema  $S$  con dominio rectangular, se conocen de manera explícita, el control óptimo continuo y el estado correspondiente del sistema. En este trabajo, mediante el método de diferencias finitas, se discretiza el sistema  $S$  obteniéndose el sistema  $S_h$  y el problema  $P_h$  correspondiente, siendo  $h$  el paso espacial en la discretización. El objetivo del trabajo es hallar las soluciones del problema control óptimo y del sistema discretos en forma explícita. Luego, estudiar la convergencia de la familia de estados discretos solución de  $S_h$  a la solución continua del sistema  $S$  y la convergencia de la familia de soluciones de los problemas  $P_h$  discretos a la solución del problema continuo  $P$  hallándose el orden de convergencia. Los resultados teóricos se chequean con resultados numéricos para distintos valores del paso espacial  $h$  cuando  $h$  tiende a cero. Estas soluciones discretas explícitas podrían ser utilizadas para chequear cálculos numéricos en condiciones de dominios generales.

## 1. INTRODUCCIÓN

Se considera un dominio acotado  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  cuya frontera regular  $\Gamma$  está compuesta por tres porciones de frontera  $\Gamma_i$  ( $med(\Gamma_i) > 0$ , para  $i = 1, 2, 3$ ). Se presenta el siguiente problema estacionario de conducción del calor ( $S$ ), con condiciones de frontera mixtas:

$$-\Delta u = g \text{ en } \Omega, \quad (1)$$

$$u = b \text{ sobre } \Gamma_1, \quad -\frac{\partial u}{\partial n} = q \text{ sobre } \Gamma_2, \quad -\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sobre } \Gamma_3, \quad (2)$$

donde  $u$  es la temperatura estacionaria en  $\Omega$ ,  $g$  es la energía interna del sistema,  $q$  es el flujo de calor sobre el borde  $\Gamma_2$ , y  $b > 0$  es la temperatura ambiente (constante). Se supone que se satisfacen las hipótesis:  $g \in H = L^2(\Omega)$  y  $q \in Q = L^2(\Gamma_2)$ . Según sean los datos, este problema representa el caso estacionario de un problema de cambio de fase (Tarzia, 1979).

El problema elíptico definido antes en (1,2), tiene la formulación variacional dada del siguiente modo (Kinderhlerer y Stampacchia, 2000; Tarzia, 1979):

Hallar  $u \in K$  tal que,

$$a(u, v) = (g, u)_H - (q, v)_Q, \quad \forall v \in V_0 \quad (3)$$

donde la aplicación  $a$  y los productos internos en  $H$  y  $Q$  se definen como:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \quad (u, v)_H = \int_{\Omega} u v \, dx, \quad (u, v)_Q = \int_{\Gamma_2} u v \, ds$$

con:

$$V = H^1(\Omega), \quad V_0 = \{v \in V : v|_{\Gamma_1} = 0\} \quad \text{y} \quad K = v_0 + V_0$$

para  $v_0 \in V$  dado, con  $v_0|_{\Gamma_1} = b$ .

Se observa que  $a$  es una aplicación bilineal, continua, simétrica y coerciva en  $V_0$  y entonces el problema dado por la ecuación variacional elíptica (3) tiene solución única (Kinderhlerer y Stampacchia, 2000).

Vinculado a este sistema, se ha considerado un problema de control óptimo, llamado ( $P$ ), como el que se detalla a continuación (Lions, 1968; Tröltzsch, 2010).

Sea el funcional costo cuadrático  $J : H \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  definido por:

$$J(g) = \frac{1}{2} \|u - z_d\|_H^2 + \frac{M}{2} \|g\|_H^2 \quad (4)$$

con  $M > 0$  una constante dada,  $u$  la solución de (3) asociada con el control  $g \in H$  y  $z_d \in H$  el estado deseado del sistema continuo ( $S$ ). El problema de control óptimo distribuido continuo, es decir sobre la fuente de energía  $g$ , asociado a ( $S$ ) queda establecido como:

**Problema ( $P$ ):** Hallar el control óptimo continuo  $g_{op} \in H$  tal que

$$J(g_{op}) = \min_{g \in H} J(g). \quad (5)$$

Este problema de control óptimo tiene por objetivo hallar la temperatura estacionaria próxima a la temperatura deseada  $z_d$ .

En el trabajo (Gariboldi y Tarzia, 2003) se obtuvieron resultados de existencia y unicidad para el sistema  $S$  y para el problema de control óptimo continuo ( $P$ ) en determinado espacio y en el trabajo (Tarzia, 2016) se realizó el análisis numérico correspondiente. Además, en (Bollati et al., 2017) se obtuvieron las soluciones explícitas del problema de control continuo definido por (1, 2, 4 y 5) para un dominio rectangular en el plano.

El objetivo de este trabajo es el de hallar las soluciones discretas explícitas que aproximan a las soluciones continuas del sistema ( $S$ ) y del problema de control óptimo asociado ( $P$ ), descrito por (1, 2) y (4, 5) respectivamente considerando un dominio  $\Omega$  particular de forma rectangular en el plano y obtener estimaciones de error. Con este fin, en la Sección 2 se discretiza la ecuación en derivadas parciales que gobierna el estado del sistema ( $S$ ) utilizando el método de diferencias finitas (Crank, 1984) con  $h$  el parámetro de la discretización y se calcula, de manera explícita, la solución discreta del sistema lineal de ecuaciones que resulta, llamado ( $S_h$ ). Además se estudia la convergencia de la familia de estados discretos solución de ( $S_h$ ) a la solución continua del sistema ( $S$ ). En la Sección 3, se establece la función costo discreto, llamado así dado que se define en función de la solución del sistema ( $S_h$ ). Se plantea la familia de problemas de control óptimo discreto ( $P_h$ ), dependiente del parámetro  $h$  y nuevamente se analizan estimaciones de error. Por último, en la Sección 4, los resultados teóricos se chequean con resultados numéricos para distintos valores del paso espacial  $h$  cuando  $h$  tiende a cero. Estas soluciones discretas explícitas podrían ser utilizadas para chequear cálculos numéricos en condiciones de dominios generales.

## 2. DISCRETIZACIÓN DEL SISTEMA ( $S$ )

Se considera, de aquí en adelante, el dominio  $\Omega = (0, x_0) \times (0, y_0)$  con  $x_0 > 0$  y  $y_0 > 0$ . Se notan  $\Gamma_i$  con  $i = 1, 2, 3$  las porciones de frontera definidas como:

$$\Gamma_1 = \{(0, y) : y \in (0, y_0]\}, \quad \Gamma_2 = \{(x_0, y) : y \in (0, y_0]\}$$

y

$$\Gamma_3 = \{(x, 0) : x \in [0, x_0]\} \cup \{(x, y_0) : x \in [0, x_0]\}.$$

En (Bollati et al., 2017) se vio que la solución del sistema ( $S$ ) establecido en (1 y 2) está dada por

$$u(x, y) = -\frac{1}{2}gx^2 + (gx_0 - q)x + b$$

donde los datos  $b, g$  y  $q$  son constantes. Asumiendo, además, que el estado deseado  $z_d$  es constante en la expresión (4), se tiene que la función costo cuadrático se escribe como:

$$J(g) = \frac{1}{2}x_0y_0 \left\{ g^2 \left( \frac{2}{15}x_0^4 + M \right) + g \left( -\frac{5}{12}qx_0^3 + \frac{2}{3}(b - z_d)x_0^2 \right) + \frac{1}{3}q^2x_0^2 - q(b - z_d)x_0 + (b - z_d)^2 \right\}$$

y entonces, el control óptimo distribuido del problema ( $P$ ), llamado  $g_{op}$ , está dado por:

$$g_{op} = \frac{1}{3x_0^2} \frac{\frac{5}{8}qx_0 - (b - z_d)}{\frac{2}{15} + \frac{M}{x_0^4}}$$

y por ende el estado óptimo continuo asociado a este control es

$$u_{gop}(x, y) = -\frac{1}{2}g_{op}x^2 + (g_{op}x_0 - q)x + b.$$

Dada la simetría del dominio, resulta que la solución  $u$  del sistema ( $S$ ) es independiente de la variable  $y$ , como puede observarse. Por lo tanto, en lo que sigue, se trabaja con un problema unidimensional.

Sea  $n \in \mathbb{N}$ , se definen:

$$h = \frac{x_0}{n}; \quad x_i = (i-1)h, \text{ para } i = 1, \dots, n+1, \quad u_i \approx u(x_i, y) \text{ para } i = 1, \dots, n+1, \quad (6)$$

donde,  $n$  es la cantidad de subintervalos a considerar en  $[0, x_0]$ ,  $h$  es la amplitud constante de estos subintervalos y  $u_i$  es el valor aproximado de la función  $u$  evaluada en el punto  $(x_i, y) \in \Omega$  para  $i = 1, \dots, n+1$ .

Entonces, aplicando el método de diferencias finitas al sistema ( $S$ ) descrito por las ecuaciones (1 y 2), se obtiene el sistema lineal de ecuaciones discretas ( $S_h$ )

$$B\bar{v} = T$$

donde  $\bar{v} = (u_i)_{i=2, \dots, n+1}$  es el vector de las incógnitas en  $\mathbb{R}^n$ ,  $B$  es la matriz de coeficientes tridiagonal de orden  $n$  de la forma:

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ \vdots & \dots & \dots & & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

y el vector de los términos independientes, de orden  $n$ , es:

$$T = \left( -gh^2 - b, -gh^2, \dots, -gh^2, -qh \right)^t.$$

Puede verse que la matriz cuadrada  $B$  es inversible y por lo tanto el sistema de ecuaciones admite una única solución que es de la forma:

$$u_1 = b; \quad u_{i+1} = b + ih(gx_0 - q) - h^2g \frac{i(i+1)}{2}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Lema 1:

a) Sea la función

$$u_h(x, y) = (x_0g - q - hgi)x + h^2g \left( \frac{i^2 - i}{2} \right) + b, \quad (7)$$

definida  $\forall x \in [x_i, x_{i+1}]$ ,  $i = 1, \dots, n$ , e  $y \in [0, y_0]$ . Entonces, la solución continua  $u(x, y)$  del sistema ( $S$ ), puede aproximarse mediante la función discreta  $u_h(x, y)$  en  $\bar{\Omega}$ .

b) Se verifica que:

$$i) \quad u_h(x, y) \leq u(x, y), \quad \forall (x, y) \in \bar{\Omega} \text{ si } g > 0;$$

$$\text{ii) } u_h(x, y) \geq u(x, y), \quad \forall (x, y) \in \bar{\Omega} \text{ si } g < 0.$$

c) Si  $u$  es la solución del sistema (S) y  $u_h$  es la función dada en (7) para cada  $h$ , se tiene que:

$$\|u - u_h\|_H \leq C_1 |g| h,$$

$$\text{donde } C_1 = x_0 \sqrt{\frac{2}{15} x_0 y_0} > 0.$$

Demostración:

a) Surge del método numérico utilizado.

b) De la definición de las funciones  $u$  y  $u_h$ , se tiene que

$$u(x_i, y) - u_i = \frac{g h^2 (i - 1)}{2}, \quad i = 1, \dots, n + 1.$$

c) Resulta a partir de la definición de norma en el espacio  $H$  y de las funciones  $u$  y  $u_h$ .

Observación: La máxima diferencia entre las funciones  $u(x, y)$  y  $u_h$  se da sobre el borde  $\Gamma_2$  y vale exactamente  $h \frac{|g|x_0}{2}$  para cada  $h > 0$ .

### 3. DISCRETIZACIÓN DEL PROBLEMA (P)

Se define la función costo discreta del siguiente modo:

$$J_h(g) = \frac{1}{2} \|u_h - z_d\|_H^2 + \frac{1}{2} M \|g\|_H^2$$

donde la función  $u_h$  está dada en (7),  $h$  es el parámetro definido en (6) y, como se dijo antes, el estado deseado  $z_d$  se supone constante. El control  $g$  también se considera constante. De la definición de norma en el espacio  $H$  resulta:

$$J_h(g) = \frac{1}{2} y_0 \left\{ M g^2 x_0 + \sum_{i=1}^n \int_{x_i}^{x_{i+1}} [u_h(x, y) - z_d]^2 dx \right\}$$

y trabajando algebraicamente, se tiene:

$$\begin{aligned} J_h(g) = & \frac{1}{2} x_0 y_0 \left\{ g^2 \left[ \left( M + \frac{2}{15} x_0^4 \right) + h \left( \frac{1}{180} h^3 + \frac{1}{24} x_0 h^2 + \frac{1}{36} x_0^2 h - \frac{5}{24} x_0^3 \right) \right] \right. \\ & + g \left[ \frac{2}{3} (b - z_d) x_0^2 - \frac{5}{12} q x_0^3 + q h x_0 \left( \frac{x_0}{3} + \frac{h}{12} \right) - (b - z_d) h \left( \frac{x_0}{2} + \frac{h}{6} \right) \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{3} q^2 x_0^2 + (b - z_d)^2 - q x_0 (b - z_d) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Lema 2:

Se tiene:

$$|J(g) - J_h(g)| \approx C_2 |g| h + o(h^2) \quad (8)$$

con  $C_2 = x_0^2 y_0 \left| \frac{5}{24} g x_0^2 - \frac{q}{3} x_0 + \frac{1}{2} (b - z_d) \right|$ , constante independiente de  $h$ .

Demostración:

Trabajando algebraicamente, se tiene que:

$$J(g) - J_h(g) = \frac{1}{2} x_0 y_0 g h \left[ \frac{5}{24} g x_0^3 - \frac{q}{3} x_0^2 + \frac{1}{2} (b - z_d) x_0 + h \left( \frac{1}{36} (b - z_d) - \frac{q x_0}{12} - \frac{g x_0}{36} \right) - \frac{g x_0 h^2}{24} - \frac{g h^3}{180} \right]$$

de donde resulta (8).

Como la función  $J_h(g)$  es una función polinómica de segundo grado en la variable  $g$ , es sencillo obtener la siguiente expresión analítica para la función  $J'_h$ :

$$J'_h(g) = \frac{1}{2} x_0 y_0 \left\{ g \left( 2M + \frac{4}{15} x_0^4 - \frac{5}{12} h x_0^3 + \frac{1}{18} h^2 x_0^2 + \frac{1}{12} h^3 x_0 + \frac{1}{90} h^4 \right) + \frac{2}{3} (b - z_d) x_0^2 - \frac{5}{12} q x_0^3 \right. \\ \left. + h \left( \frac{1}{3} q x_0^2 - \frac{1}{2} (b - z_d) x_0 \right) + h^2 \left( \frac{1}{12} q x_0 - \frac{1}{6} (b - z_d) \right) \right\}.$$

A partir de la condición de optimalidad y de trabajo algebraico, se obtiene el siguiente resultado:

Lema 3: Se tiene que:

a) la expresión explícita el control óptimo  $g_{op_h}$  está dada por :

$$g_{op_h} = \frac{1}{3x_0^2} \frac{\left( \frac{5}{8} q x_0 - (b - z_d) \right) + h \left( \frac{3(b-z_d)}{4x_0} - \frac{q}{2} \right) + h^2 \left( \frac{b-z_d}{4x_0^2} - \frac{q}{8x_0} \right)}{\left( \frac{2}{15} + \frac{M}{x_0^4} \right) + \frac{h}{12x_0} \left( \frac{h^3}{15x_0^3} + \frac{h^2}{2x_0^2} + \frac{h}{3x_0} - \frac{5}{2} \right)}. \quad (9)$$

b) Además se tiene que valen las siguientes estimaciones de error:

$$(i) \quad |g_{op} - g_{op_h}| \approx C_3 h + o(h^2) \quad (10)$$

$$(ii) \quad \left| J(g_{op}) - J_h(g_{op_h}) \right| \approx C_4 h + o(h^2) \quad (11)$$

donde  $C_3$  y  $C_4$  son constantes independientes de  $h$ .

Demostración:

b) Reescribiendo la expresión (9) como:

$$g_{op_h} = \frac{1}{3x_0^2} \frac{A_1 + h A_2 + h^2 A_3}{A_4 + A_5}$$

donde  $A_1 = \left(\frac{5}{8}qx_0 - (b - z_d)\right)$ ,  $A_2 = \left(\frac{3(b-z_d)}{4x_0} - \frac{q}{2}\right)$ ,  $A_3 = \left(\frac{b-z_d}{4x_0^2} - \frac{q}{8x_0}\right)$ ,  $A_4 = \left(\frac{2}{15} + \frac{M}{x_0^4}\right)$   
 y  $A_5 = \left(\frac{1}{180}\frac{h^4}{x_0^4} + \frac{1}{24}\frac{h^3}{x_0^3} + \frac{1}{36}\frac{h^2}{x_0^2} - \frac{5}{24}\frac{h}{x_0}\right)$ , resulta que:

$$g_{op} - g_{op_h} = \frac{1}{3x_0^2} \frac{h(A_2 A_4 + h A_3 A_4) - A_1 A_5}{A_4^2 + A_4 A_5}$$

de donde se tiene (10) con  $C_3 = \frac{1}{3x_0^2} \frac{|A_2 A_4 - \frac{5A_1}{24x_0}|}{A_4^2}$ .

c) A partir de las expresiones para  $J(g)$  con  $g = g_{op}$  y  $J_h(g)$  con  $g = g_{op_h}$ , resulta que:

$$J(g_{op}) - J_h(g_{op_h}) = \frac{1}{2}x_0 y_0 \left[ (g_{op} - g_{op_h})(A_6 + A_7(g_{op} + g_{op_h})) + h(A_8 g_{op_h} - A_5 g_{op_h}^2) \right]$$

donde se definen  $A_6$ ,  $A_7$  y  $A_8$  como:

$$A_6 = -\frac{2}{3}x_0^2 A_1, \quad A_7 = x_0^4 A_4, \quad \text{y} \quad A_8 = -\frac{2}{3}x_0^2 A_2.$$

Utilizando (10) se obtiene (11) donde  $C_4 = \frac{1}{2}x_0 y_0 C_3 |A_6|$ .

#### 4. RESULTADOS NUMÉRICOS

En esta sección, se obtienen algunos resultados numéricos para el problema de control óptimo distribuido planteado en (1, 2 y 5). Se consideran los siguientes datos:

- Dominio:  $\Omega = [0, 1]^2$ ,
- temperatura ambiente sobre el borde  $\Gamma_1$ :  $b = 30^\circ\text{C}$ ;
- Flujo de calor sobre el borde  $\Gamma_2$ :  $q = 12^\circ\text{C}/m$  y
- Sobre el borde  $\Gamma_3$  se tiene  $q = 0$ .

Proponiendo una fuente  $g = 10^\circ\text{C}/m^2$ , se aprecia en la Figura 1 el comportamiento de la solución discreta utilizando valores de  $n$  entre 5 y 30. Ahí se observa a la solución exacta del sistema ( $S$ ) asociada a la fuente  $g$  propuesta versus las diferentes soluciones del sistema discreto ( $S_h$ ) para los distintos valores del parámetro definido en (6)  $h = \frac{1}{n}$ .

Puede verse también el modo en que se da la convergencia mostrada en la Sección 2. Como se observó en el Lema 1-b, hay un comportamiento creciente de la familia  $u_h$  hacia el estado  $u$  para la fuente  $g$  utilizada puesto que es positiva.

Además, en las Figuras 2 y 3, se observa para valores de  $n$  entre 5 y 100 como se comportan la familia de funciones costo discreto  $\{J_h(g)\}$ , definida en la Sección 3 y luego la familia  $\{g_{op_h}\}_h$  definida en (9). En la Figura 4, se muestra la familia de estados del sistema discreto correspondiente a los controles discretos  $g_{op_h}$  para cada valor del parámetro  $h$ .

## 5. CONCLUSIONES

En conclusión, utilizando los resultados previos, se cumplió el objetivo del trabajo. Es decir:

- i) se hallaron las soluciones de las familias de sistemas discretos ( $S_h$ ) y de problemas de control óptimo discreto ( $P_h$ ) en forma explícita,
- ii) se obtuvieron estimaciones para el error al aproximar las soluciones continuas de ( $S$ ) y ( $P$ ), respectivamente, mediante las soluciones discretas, tanto para el estado como para el control óptimo y la función costo propuestos en un dominio rectangular en el plano,
- iii) se compararon los resultados teóricos con resultados numéricos para distintos valores del paso espacial  $h$  cuando  $h$  tiende a cero.

Estas soluciones discretas explícitas podrían ser utilizadas para chequear cálculos numéricos en condiciones de dominios generales.

## 6. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido parcialmente subsidiado por los proyectos PIP No 0275 de CONICET - Univ. Austral, Rosario, Argentina y AFOSR - SOARD Grant FA 9550-14-1-0122.

## REFERENCIAS

- Bollati J., Gariboldi C., y Tarzia D.A. Soluciones explícitas de problemas de control óptimo distribuido, frontera y distribuido-frontera. *VI MACI 2017, G. Soto, N. Acosta (Eds.), Matemática Aplicada, Computacional e Industrial*, 6:521–524, 2017.
- Crank J. *Free and moving boundary problems*. Clarendon Press, 1984.
- Gariboldi C. y Tarzia D.A. Convergence of distributed optimal controls on the internal energy in mixed elliptic problems when the heat transfer coefficient goes to infinity. *Applied Mathematics and Optimization*, 47:213–230, 2003.
- Kinderlehrer D. y Stampacchia G. *An introduction to variational inequalities and their applications*. SIAM, Philadelphia, 2000.
- Lions J. *Contrôle optimal de systemes gouvernes par des equations aux derivees partielles*. Dunod, Paris, 1968.
- Tarzia D.A. Sur le problème de stefan à deux phases. *C.R. Acad. Sc. París, Serie A*, 288:941–944, 1979.
- Tarzia D.A. Double convergence of a family of discrete distributed mixed elliptic optimal control problems with a parameter. *in Proceedings of the 27th IFIP TC 7 Conference on System Modeling and Optimization, CSMO 2015, IFIP AICT 494, L. Bociu and J.-A. Desideri and A. Habbal (Eds.), Springer, Berlin*, páginas 493–504, 2016.
- Tröltzsch F. *Optimal control of partial differential equations: Theory, methods and applications*. Amer. Math. Soc., Providence, 2010.



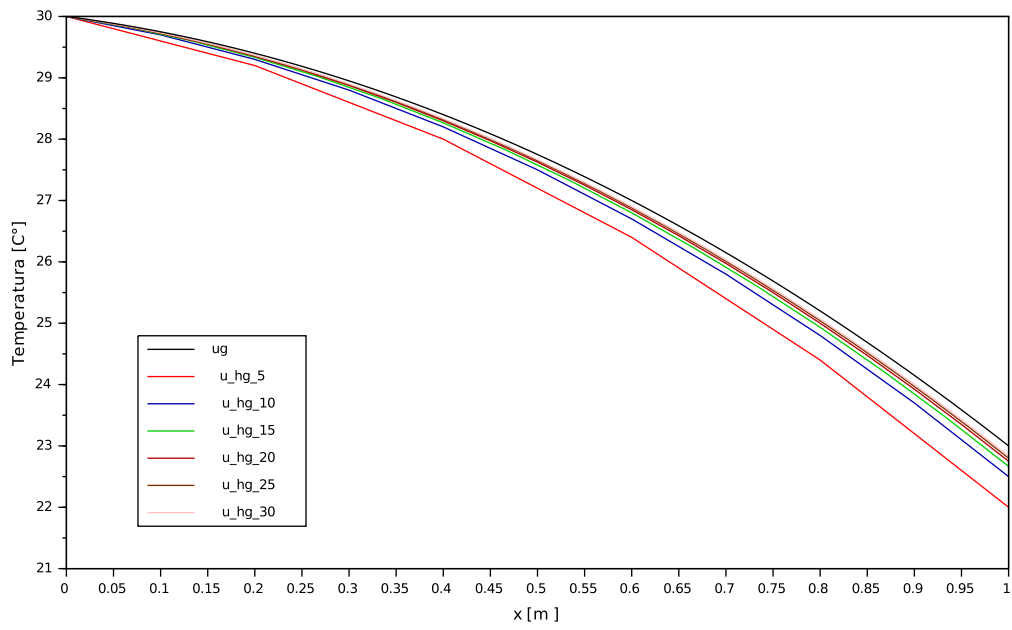


Figura 1: Comparación entre la solución exacta y diferentes soluciones aproximadas

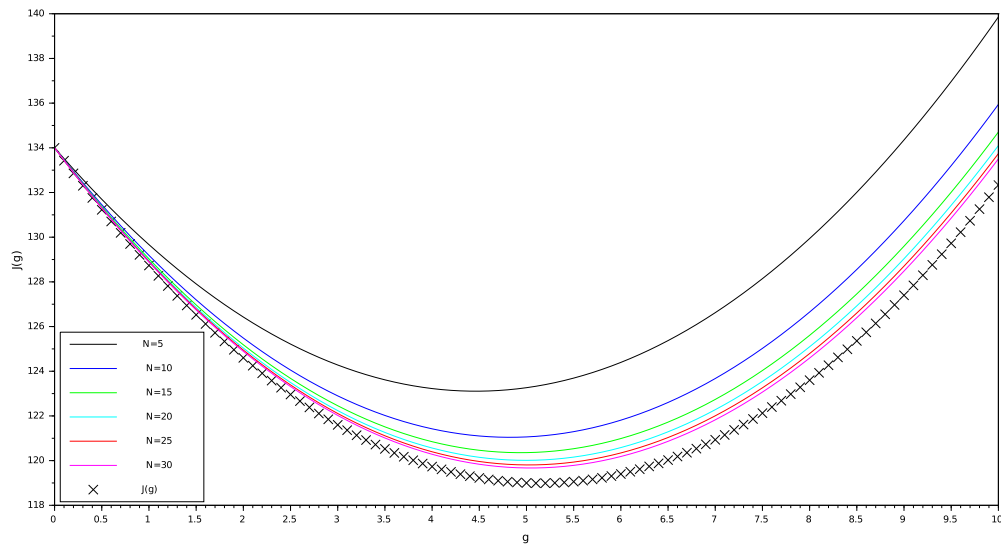


Figura 2:  $J(g)$  vs.  $\{J_h(g)\}_h$

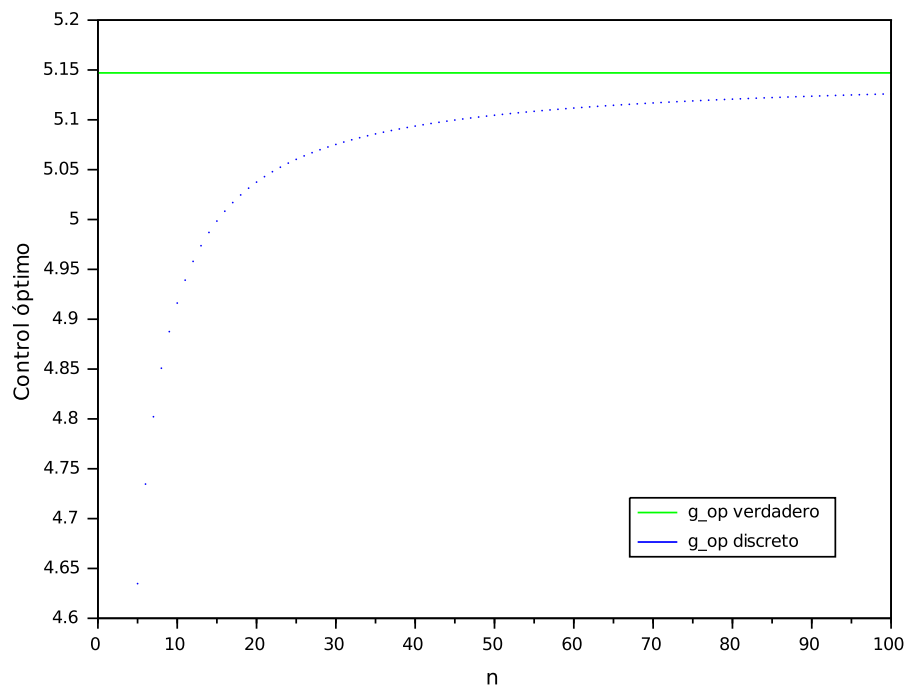


Figura 3:  $g_{op}$  vs.  $\{g_{op_h}\}_h$

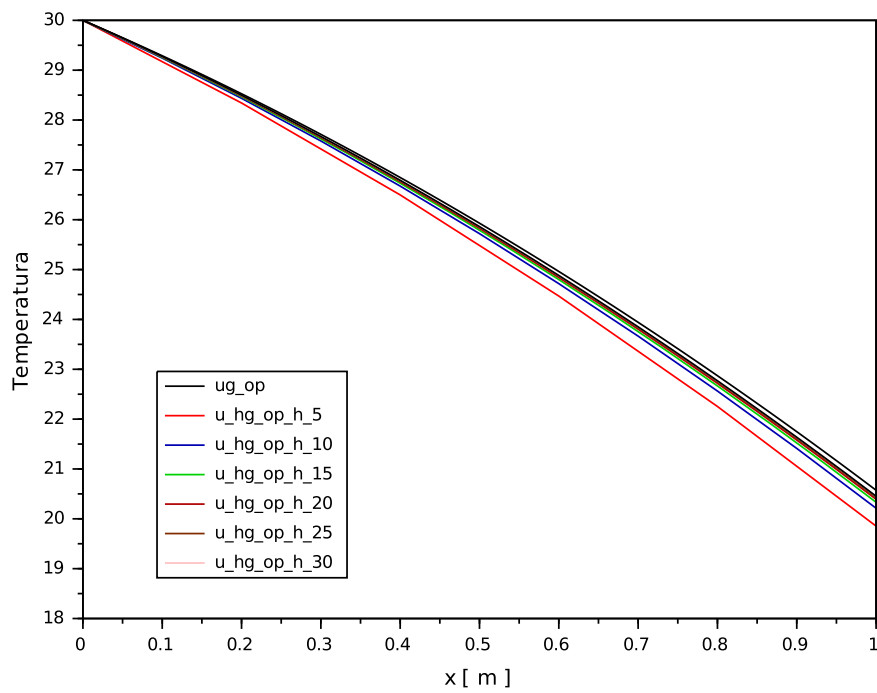


Figura 4:  $u(g_{op})$  vs.  $\{u_h(g_{op_h})\}_h$