

SOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES CON COEFICIENTES CONSTANTES UTILIZANDO TÉCNICAS DE PROBLEMA INVERSO DE MOMENTOS

María B. Pintarelli

*Grupo de Aplicaciones Matemáticas y Estadísticas de la Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata, La Plata, Prov. De Buenos Aires, Argentina, mariabpintarelli@gmail.com,
<https://www.ing.unlp.edu.ar>*

Palabras Clave: Ecuaciones diferenciales lineales simultáneas, Problema inverso de momentos, Ecuaciones integrales.

Resumen. Es conocido que dado un sistema de ecuaciones diferenciales lineales simultáneas con coeficientes constantes se puede aplicar el método de Laplace para resolverlo. Se hallan las transformadas de Laplace y el problema queda reducido a la resolución de un sistema algebraico de ecuaciones de las funciones determinantes, y aplicando la transformación inversa se determinan las funciones generatrices, soluciones del sistema dado. Esto implica la necesidad de conocer la forma analítica de la transformada inversa de la función. En este caso las condiciones iniciales consisten en conocer el valor que toma la función generatriz y sus derivadas en el cero. Se propone en este trabajo una generalización de este método, el cual consiste en definir un operador integral más general que la transformada de Laplace, las condiciones iniciales consisten en condiciones de Cauchy en el contorno. Y por último se halla en forma aproximada la transformación inversa de las funciones generatrices en forma numérica utilizando las técnicas de problema inverso de momentos, sin ser necesario conocer la forma analítica de la transformada inversa de la función.

1 INTRODUCCION

Dado un sistema de ecuaciones diferenciales lineales ordinarias con coeficientes constantes de la forma

$$\begin{aligned} y_1^{(n)}(x) &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_k, y_1^{(1)}, \dots, y_k^{(1)}, \dots, y_1^{(n-1)}, \dots, y_k^{(n-1)}) \\ &\vdots \\ y_k^{(n)}(x) &= f_k(x, y_1, y_2, \dots, y_k, y_1^{(1)}, \dots, y_k^{(1)}, \dots, y_1^{(n-1)}, \dots, y_k^{(n-1)}) \end{aligned} \quad (1)$$

donde $y_i^{(n)}(x)$ indica la derivada de orden n de $y_i(x)$ $i = 1, \dots, k$ y $f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_k, y_1^{(1)}, \dots, y_k^{(1)}, \dots, y_1^{(n-1)}, \dots, y_k^{(n-1)})$ $i = 1, \dots, k$ son funciones lineales de $x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_k(x), y_1^{(1)}(x), \dots, y_k^{(1)}(x), \dots, y_1^{(n-1)}(x), \dots, y_k^{(n-1)}(x)$ con coeficientes constantes, se quiere hallar las funciones $y_1(x), y_2(x), \dots, y_k(x)$ que son solución del sistema dado.

Existen una variedad de métodos para resolver este problema, expuestos en detalle en la literatura ([David Kincaid, Ward Cheney, 1994](#)); ([Rubio Sanjuan, 1951](#)). Algunos consisten en aproximaciones numéricas, otros dan las solución exacta.

Si el dominio de las funciones incógnitas es $(0, \infty)$ y se conoce

$$\begin{aligned} y_1(0), y_1^{(1)}(0), \dots, \dots, y_1^{(n-1)}(0) \\ \vdots \\ y_k(0), y_k^{(1)}(0), \dots, \dots, y_k^{(n-1)}(0) \end{aligned}$$

un método conocido, ([Rubio Sanjuan, 1951](#)), es aplicar la transformada de Laplace a cada ecuación del sistema (1). Recordar que la transformada de Laplace se define como

$$L(y) = \int_0^{\infty} y(x)e^{-\alpha x} dx \quad (2)$$

y que integrando (2) por partes repetidas veces, se llega a la conocida propiedad

$$L(y^{(n)}(x)) = \alpha^n L(y(x)) - (\alpha^{n-1}y(0) + \dots + \alpha y^{(n-2)}(0) + y^{(n-1)}(0))$$

De esa forma, aplicando transformada de Laplace a (1) queda determinado un sistema de ecuaciones algebraicas

$$\begin{aligned} a_{11}(\alpha)L(y_1) + a_{12}(\alpha)L(y_2) + \dots + a_{1k}(\alpha)L(y_k) &= c_1(\alpha) \\ \vdots & \\ a_{k1}(\alpha)L(y_1) + a_{k2}(\alpha)L(y_2) + \dots + a_{kk}(\alpha)L(y_k) &= c_k(\alpha) \end{aligned}$$

donde las incógnitas son $L(y_1), L(y_2), \dots, L(y_k)$.

Al resolver este sistema quedan expresadas las transformadas de Laplace en función de una expresión que depende de α

$$L(y_i(x)) = \int_0^{\infty} y_i(x) e^{-\alpha x} dx = \mu_i(\alpha) \quad i = 1, \dots, k$$

El problema reside en encontrar la antitransformada de $\mu_i(\alpha) \quad i = 1, \dots, k$

En este trabajo se propone hallar una aproximación numérica de la antitransformada de $\mu_i(\alpha) \quad i = 1, \dots, k$ utilizando las técnicas de problema inverso de momentos. Más aún, se generaliza la transformada de Laplace en un operador más general definido sobre un intervalo (a, b) , con condiciones de Cauchy en a y b .

2 PROBLEMA INVERSO DE MOMENTOS

El problema de momentos generalizados (J.A. Shohat and J.D. Tamarkin, 1943; Ang, R. Gorenflo, V.K. Le and D.D. Trong, 2002) consiste en encontrar una función $f(x)$ sobre un dominio $\Omega \subset R^d$ que satisface la sucesión de ecuaciones

$$\mu_i = \int_{\Omega} g_i(x) f(x) dx \quad i \in N \quad (3)$$

donde N es el conjunto de los números naturales, (g_i) es una sucesión dada de funciones en $L^2(\Omega)$ linealmente independientes conocidas y la sucesión de números reales $\{\mu_i\}_{i \in N}$ son datos conocidos.

El problema de momentos de Hausdorff (J.A. Shohat and J.D. Tamarkin, 1943; G. Talenti, 1987) es un ejemplo clásico de un problema de momentos, consiste en encontrar una función $f(x)$ en (a, b) tal que

$$\mu_i = \int_a^b x^i f(x) dx \quad i \in N.$$

En este caso $g_i(x) = x^i$ con i perteneciente al conjunto N .

Si el intervalo de integración es $(0, \infty)$ se tiene el problema de momentos de Stieltjes; si el intervalo de integración es $(-\infty, \infty)$ se tiene el problema de momentos de Hamburger (J.A. Shohat and J.D. Tamarkin, 1943; G. Talenti, 1987).

El problema de momentos es un problema mal condicionado en el sentido que puede no existir solución y de existir no hay dependencia continua sobre los datos dados (J.A. Shohat and J.D. Tamarkin, 1943; Ang, R. Gorenflo, V.K. Le and D.D. Trong, 2002). Hay varios métodos para construir soluciones regularizadas. Uno de ellos es el método de la expansión truncada (Ang, R. Gorenflo, V.K. Le and D.D. Trong, 2002).

Dicho método consiste en resolver (3) considerando el problema finito de momentos

$$\mu_i = \int_{\Omega} g_i(x) f(x) dx \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4)$$

donde la solución aproximada de $f(x)$ es $p_n(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i(x)$, y las funciones $\varphi_i(x)$ resultan de ortonormalizar g_1, g_2, \dots, g_n siendo λ_i coeficientes en función de los datos μ_i . En el subespacio generado por g_1, g_2, \dots, g_n la solución es estable. Si $n \in N$ es elegido en forma apropiada entonces la solución de (4) se aproxima a la solución del problema original (3).

En el caso en que los datos $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ sean inexactos se deben aplicar teoremas de convergencia y estimaciones del error para la solución regularizada (pág. 19 a 30 de Ang, R. Gorenflo, V.K. Le and D.D. Trong ,2002).

Otro método es el método de Tikhonov (pág. 18 de Ang, R. Gorenflo, V.K. Le and D.D. Trong ,2002). En este método se escribe (3) en la forma $Af = \mu$ con

$$Af = \left(\int_{\Omega} g_1 f, \int_{\Omega} g_2 f, \dots \right), \quad \mu = (\mu_1, \mu_2, \dots)$$

y se debe encontrar $f \in L^2(\Omega)$ que satisfaga la ecuación variacional

$$\beta(f, v)_{L^2(\Omega)} + (Af, Av)_{l^2} = (f, Av)_{l^2}, \quad \forall v \in L^2(\Omega),$$

donde $(\cdot, \cdot)_{L^2(\Omega)}$ y $(\cdot, \cdot)_{l^2}$ son los productos internos usuales de $L^2(\Omega)$ y l^2 respectivamente y $\beta > 0$.

3 SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS LINEALES

Dado un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales con coeficientes constantes de la forma

$$\begin{aligned} y_1^{(n)}(x) &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_k, y_1^{(1)}, \dots, y_k^{(1)}, \dots, y_1^{(n-1)}, \dots, y_k^{(n-1)}) \\ &\vdots \\ y_k^{(n)}(x) &= f_k(x, y_1, y_2, \dots, y_k, y_1^{(1)}, \dots, y_k^{(1)}, \dots, y_1^{(n-1)}, \dots, y_k^{(n-1)}) \end{aligned} \quad (5)$$

donde $y_i^{(n)}(x)$ indica la derivada de orden n de $y_i(x)$ $i = 1, \dots, k$ y $f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_k, y_1^{(1)}, \dots, y_k^{(1)}, \dots, y_1^{(n-1)}, \dots, y_k^{(n-1)})$ $i = 1, \dots, k$ son funciones lineales de $x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_k(x), y_1^{(1)}(x), \dots, y_k^{(1)}(x), \dots, y_1^{(n-1)}(x), \dots, y_k^{(n-1)}(x)$ con coeficientes constantes, se quieren hallar aproximaciones numéricas de las funciones $y_1(x), y_2(x), \dots, y_k(x)$ que son solución del sistema dado. Asumimos condiciones de Cauchy en un intervalo (a, b)

$$\begin{aligned} &y_1(a), y_1^{(1)}(a), \dots, \dots, y_1^{(n-1)}(a) \\ &\quad \vdots \\ &y_k(a), y_k^{(1)}(a), \dots, \dots, y_k^{(n-1)}(a) \\ &\quad \vdots \\ &y_1(b), y_1^{(1)}(b), \dots, \dots, y_1^{(n-1)}(b) \\ &\quad \vdots \\ &y_k(b), y_k^{(1)}(b), \dots, \dots, y_k^{(n-1)}(b) \end{aligned} \quad (6)$$

Además suponemos que cada $y_i(x) \in L^2(a, b)$.
Se define el operador

$$L^*(y(x)) = \int_a^b y(x)e^{-\alpha x} dx \quad (7)$$

Integrando (7) por partes se llega a la relación

$$L^*(y^{(1)}(x)) = y(b)e^{-\alpha b} - y(a)e^{-\alpha a} + \alpha L^*(y(x))$$

Integrando por partes (7) repetidas veces se llega a

$$L^*(y^{(n)}(x)) = e^{-\alpha b} [y^{(n-1)}(b) + \alpha y^{(n-2)}(b) + \dots + \alpha^{n-1} y(b)] - \\ - e^{-\alpha a} [y^{(n-1)}(a) + \alpha y^{(n-2)}(a) + \dots + \alpha^{n-1} y(a)] + \\ + \alpha^n L^*(y(x)) \quad (8)$$

Notar que si en (7) $b \rightarrow \infty$, y $a = 0$ entonces se vuelve a la propiedad de la transformada de Laplace nombrada anteriormente.

Aplicamos L^* a cada ecuación del sistema (5) y teniendo en cuenta (8) se llega a un sistema de ecuaciones algebraicas

$$\begin{aligned} a_{11}(\alpha)L^*(y_1) + a_{12}(\alpha)L^*(y_2) + \dots + a_{1k}(\alpha)L^*(y_k) &= c_1(\alpha) \\ \vdots & \\ a_{k1}(\alpha)L^*(y_1) + a_{k2}(\alpha)L^*(y_2) + \dots + a_{kk}(\alpha)L^*(y_k) &= c_k(\alpha) \end{aligned} \quad (9)$$

donde las incógnitas son $L^*(y_1), L^*(y_2), \dots, L^*(y_k)$.

Al resolver el sistema (9), las incógnitas $L^*(y_i)$ $i = 1, \dots, k$ quedan expresadas en función de α , es decir $L^*(y_i) = \mu_i(\alpha)$ $i = 1, \dots, k$.

Anotamos A a la matriz de los coeficientes

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}(\alpha) & a_{12}(\alpha) & \dots & a_{1k}(\alpha) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1}(\alpha) & a_{k2}(\alpha) & \dots & a_{kk}(\alpha) \end{pmatrix}$$

Si $\text{Det}(A) \neq 0$ entonces el sistema (9) tendrá solución única.

Se hace el cambio de variable $z = e^{-x}$ y obtenemos

$$L^*(y_i) = \int_a^b y_i(x)e^{-\alpha x} dx = \int_{e^{-b}}^{e^{-a}} y_i(-\ln(z))z^{\alpha-1} dz = \int_{a_1}^{b_1} y_i^*(z)z^{\alpha-1} dz$$

donde $a_1 = e^{-b}$ y $b_1 = e^{-a}$ y $y_i^*(z) = y_i(-\ln(z))$.

Entonces se puede interpretar a

$$\int_{a_1}^{b_1} y_i^*(z)z^{\alpha-1} dz = \mu_i(\alpha) \quad (10)$$

como un problema inverso de momentos dando a α valores tales que $\text{Det}(A) \neq 0$.

Se resuelve el problema de momentos considerando el correspondiente problema de momentos finito, esto es, asignando a α un número finito de valores, $\alpha = \text{alfa}, \dots, n$, con *alfa* elegido convenientemente para que $\text{Det}(A) \neq 0$.

Esto se repite en cada $L^*(y_i) = \mu_i(\alpha) \quad i = 1, \dots, k$. Para aplicar el método de la expansion truncada se escribe (10) como

$$\int_{a_1}^{b_1} y_i^*(z) z^{\text{alfa}-1} z^{\alpha-\text{alfa}} dz = \mu_i(\alpha)$$

Se obtiene una solución aproximada $p_{ni}(z)$ para cada $y_i^*(z) z^{\text{alfa}-1}$. Luego la solución aproximada para $y_i(x)$ será $y_i(x) \approx (e^x)^{\text{alfa}-1} p_{ni}(e^{-x})$.

En el caso de ser (a, b) un intervalo no acotado, por ejemplo (a, ∞) , es conveniente proceder de otra forma, sin hacer cambio de variable debido a que en ciertos casos la norma L^2 de la diferencia $y_i(x) - (e^x)^{\text{alfa}-1} p_{ni}(e^{-x})$ sería divergente.

Este segundo procedimiento (M. B. Pintarelli and F. Vericat (2008)) consiste en tomar una base $\{\psi_r(\alpha)\}_r$ de $L^2(a, \infty)$ y entonces

$$\int_a^\infty y_i(x) e^{-\alpha x} dx = \mu_i(\alpha)$$

puede ser transformado en un problema de momentos generalizado al multiplicar ambos miembros de la igualdad por $\psi_r(\alpha)$ e integrar con respecto a α . De esta forma se llega a

$$\int_a^\infty y_i(x) g_r(x) dx = \mu_{ir} \quad r = 1, 2, \dots$$

donde

$$g_r(x) = \int_a^\infty e^{-\alpha x} \psi_r(\alpha) d\alpha$$

y los momentos μ_{ir} son

$$\mu_{ir} = \int_a^\infty \mu_i(\alpha) \psi_r(\alpha) d\alpha .$$

Este procedimiento también se puede aplicar si (a, b) es un intervalo acotado.

4 SOLUCIÓN DEL PROBLEMA INVERSO DE MOMENTOS

Para resolver (10) numericamente como un problema de momentos, se aplica el método de expansion truncada detallado en G. Talenti (1987), y generalizado en M. B. Pintarelli and F. Vericat (2008), con el fin de encontrar una aproximación $p_{ni}(z)$ de $y_i^*(z) z^{\text{alfa}-1}$ para el correspondiente problema finito con $\alpha = \text{alfa}, \dots, n$; donde n es el número de momentos $\mu_i(\alpha)$ que se consideran.

Sea $\phi_\alpha(z)$ $\alpha = \text{alfa}, \dots, n$ la base obtenida al ortonormalizar $z^{\alpha-\text{alfa}}$; $\alpha = \text{alfa}, \dots, n$ y

adicionando al conjunto resultante las funciones necesarias hasta alcanzar una base ortonormal. O, escrito de otra forma, z^r ; $r = 0, \dots, n^*$ $n^* = n - \text{alfa} + 1$. Si el intervalo es no acotado se ortonormalizan las funciones $g_r(x)$ definidas previamente. Mediante el método de la expansión truncada se aproxima la función $y_i^*(z)$ con:

$$p_{ni}(z) = \sum_{r=0}^{n^*} \lambda_r \phi_r(z) \quad ; \quad \lambda_r = \sum_{j=0}^r C_{rj} \mu_j \quad r = 0, 1, \dots, n^*,$$

y C_{rj} son los coeficientes de una matriz C que verifican

$$C_{rj} = \left(\sum_{k=j}^{r-1} (-1)^k \frac{\langle z^r | \phi_k(z) \rangle}{\|\phi_k(z)\|^2} C_{kj} \right) \cdot \|\phi_r(z)\|^{-1} \quad 1 < r \leq n \quad ; \quad 1 \leq j < r,$$

Los términos de la diagonal son $C_{rr} = \|\phi_r(z)\|^{-1} \quad r = 0, 1, \dots, n^*$

El siguiente teorema da una cota de la exactitud de la aproximación.

Teorema: Sea el conjunto de números reales $\{\mu_r\}_{r=0}^{n^*}$ y supongamos que $y(z)$ en $L^2(a_1, b_1)$ verifica para algún n^* , ε y M (dos números positivos):

$$\sum_{r=0}^{n^*} \left| \int_{a_1}^{b_1} z^r y(z) dz - \mu_r \right|^2 \leq \varepsilon^2$$

y

$$\int_{a_1}^{b_1} |y^{(1)}(z)|^2 dz \leq M^2 \tag{11}$$

entonces

$$\int_{a_1}^{b_1} |y(z) - p_{n^*}(z)|^2 dz \leq \|C^T C\| \varepsilon^2 + \frac{(b_1 - a_1)^2}{4(n^* + 1)^2} M^2 \tag{12}.$$

Si el intervalo es (a, ∞) , entonces la condición (11) cambia por

$$\int_a^\infty z e^z (y^{(1)}(z))^2 dz \leq M^2$$

Y la conclusión (12) cambia por

$$\int_a^\infty |y(z) - p_{n^*}(z)|^2 dz \leq \|C^T C\| \varepsilon^2 + \frac{M^2}{(n^* + 1)^2}$$

Además debe cumplirse que

$$z^r y(z) \rightarrow 0 \quad \text{si } z \rightarrow \infty \quad \text{para todo } r \in \mathbb{N} .$$

La demostración de este Teorema se detalla en [M. B. Pintarelli and F. Vericat \(2008\)](#) para el caso de intervalo acotado, y en [M. B. Pintarelli \(2016\)](#) para el caso de intervalo (a_1, ∞) .

5 EJEMPLOS NUMÉRICOS

Ilustramos lo expuesto anteriormente con ejemplos sencillos.

Ejemplo 1

Se considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y^{(2)}(x) + 2y(x) + 4z(x) = e^x \\ z^{(2)}(x) - y(x) - 3z(x) = -x \end{cases}$$

en el intervalo (1,3) bajo las condiciones

$$\begin{cases} y(1) = -2 + e + e^{-\sqrt{2}} + e^{\sqrt{2}} + \cos(1) + \operatorname{sen}(1) \\ y(3) = -6 + e^3 + e^{-3\sqrt{2}} + e^{3\sqrt{2}} + \cos(3) + \operatorname{sen}(3) \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} z(1) = 1 - \frac{e}{2} - e^{-\sqrt{2}} - e^{\sqrt{2}} - \frac{\cos(1)}{4} - \frac{\operatorname{sen}(1)}{4} \\ z(3) = 3 + \frac{e^3}{2} - e^{-3\sqrt{2}} - e^{3\sqrt{2}} - \frac{\cos(3)}{4} - \frac{\operatorname{sen}(3)}{4} \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} y^{(1)}(1) = -2 + e - \sqrt{2}e^{-\sqrt{2}} + \sqrt{2}e^{\sqrt{2}} + \cos(1) - \operatorname{sen}(1) \\ y^{(1)}(3) = -2 + e^3 - \sqrt{2}e^{-3\sqrt{2}} + \sqrt{2}e^{3\sqrt{2}} + \cos(3) - \operatorname{sen}(3) \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} z^{(1)}(1) = 1 - \frac{e}{2} + \sqrt{2}e^{-\sqrt{2}} - \sqrt{2}e^{\sqrt{2}} - \frac{\cos(1)}{4} + \frac{\operatorname{sen}(1)}{4} \\ z^{(1)}(3) = 1 - \frac{e^3}{2} + \sqrt{2}e^{-3\sqrt{2}} - \sqrt{2}e^{3\sqrt{2}} - \frac{\cos(3)}{4} + \frac{\operatorname{sen}(3)}{4} \end{cases} \quad (16)$$

La solución exacta del sistema es

$$\begin{cases} y(x) = e^{x\sqrt{2}} + e^{-x\sqrt{2}} + \operatorname{sen}(x) + \cos(x) + e^x - 2x \\ z(x) = -e^{x\sqrt{2}} - e^{-x\sqrt{2}} - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(x) - \frac{1}{4}\cos(x) - \frac{e^x}{2} + x \end{cases}$$

Aplicamos el operador L^* a ambas ecuaciones del sistema y se llega a

$$\begin{cases} (\alpha^2 + 2)L^*(y) + 4L^*(z) = L^*(e^x) - cy(\alpha) \\ -L^*(y) + (\alpha^2 - 3)L^*(z) = L^*(-x) - cz(\alpha) \end{cases} \quad (17)$$

donde $cy(\alpha)$ y $cz(\alpha)$ son expresiones en función de las condiciones (13), (14), (15) y (16). El determinante de la matriz de los coeficientes del sistema (17) es

$$\begin{vmatrix} \alpha^2 + 2 & 4 \\ -1 & \alpha^2 - 3 \end{vmatrix} = \alpha^4 - \alpha^2 - 2$$

Y se anula para $\alpha = -i, \alpha = i, \alpha = \sqrt{2}, \alpha = -\sqrt{2}$

Resolvemos el sistema con el software Mathematica y obtenemos expresiones para $L^*(y)$ y $L^*(z)$ en función de α .

Evaluamos estas expresiones dando valores a α desde $alfa = 2$ hasta $n = 8$, es decir tomamos 7 "momentos" $\mu(\alpha)$.

El valor para $alfa$ se fija igual a 2 con el fin de evitar discontinuidades.

Aplicando el método de expansion truncada obtenemos una aproximación para $y(x)$ dada por

$$y(x) \approx (e^x)^{alfa-1} p y_n(e^{-x})$$

cuya exactitud es

$$\int_1^3 |y(x) - (e^x)^{alfa-1} p y_n(e^{-x})|^2 dx = 0.0557505$$

Análogamente, para $z(x)$ se obtiene una exactitud de

$$\int_1^3 |z(x) - (e^x)^{alfa-1} p z_n(e^{-x})|^2 dx = 0.0543516$$

En la Figura 1 y en la Figura 2 se observan los gráficos de $y(x)$ y $z(x)$ con sus respectivas aproximaciones superpuestas

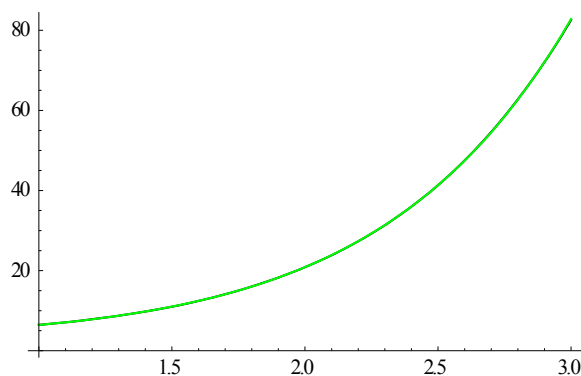
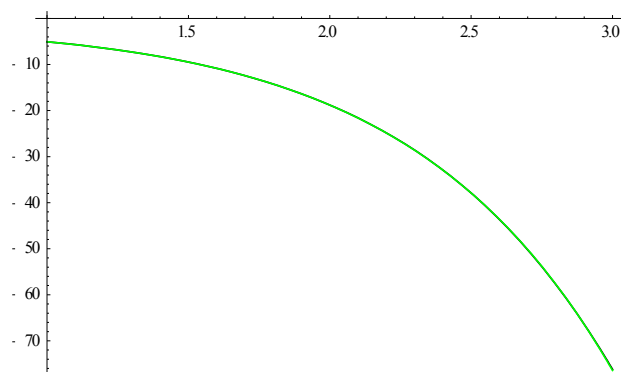


Figura 1: $y(x)$ y su aproximación

Figura 2: $z(x)$ y su aproximación

Ejemplo 2

Se considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y^{(1)}(x) = 3z(x) - 4u(x) \\ z^{(1)}(x) = -u(x) \\ u^{(1)}(x) = z(x) - 2y(x) \end{cases}$$

en el intervalo $(0,1)$ bajo las condiciones

$$\begin{cases} y(0) = 3 ; y(1) = e^3 + \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e} \\ z(0) = 1.6 ; z(1) = 4.43912 \\ u(0) = 1.2 ; u(1) = -11.5752 \end{cases} \quad (18)$$

La solución exacta del sistema es

$$\begin{cases} y(x) = e^{-x} + e^{-2x} + e^{3x} \\ z(x) = e^{-x} + 0.4e^{-2x} + 0.2e^{3x} \\ u(x) = e^{-x} + 0.8e^{-2x} - 0.6e^{3x} \end{cases}$$

Aplicamos el operador L^* a ambas ecuaciones del sistema y se llega a

$$\begin{cases} \alpha L^*(y) - 3L^*(z) + 4L^*(u) = -cy(\alpha) \\ \alpha L^*(z) + L^*(u) - cz(\alpha) \\ 2L^*(y) - L^*(z) + \alpha L^*(u) = -cu(\alpha) \end{cases} \quad (19)$$

donde $cy(\alpha)$, $cz(\alpha)$ y $cu(\alpha)$ son expresiones en función de las condiciones (18)

El determinante de la matriz de los coeficientes del sistema (19) es

$$\begin{vmatrix} \alpha & -3 & 4 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 2 & -1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^3 - 7\alpha - 6$$

Y se anula para $\alpha = -2$; $\alpha = -1$; $\alpha = 3$.

Resolvemos el sistema con el software Mathematica y obtenemos expresiones para $L^*(y)$, $L^*(z)$ y $L^*(u)$ en función de α .

Aplicamos el primer procedimiento para resolver el sistema haciendo cambio de variable, ya que al intentar aplicar el segundo procedimiento nos encontramos con una discontinuidad al ortonormalizar la base.

Evaluamos estas expresiones dando valores a α desde $\alpha = 4$ hasta $\alpha = 8$, es decir tomamos 5 “momentos” $\mu(\alpha)$.

El valor para α se fija igual a 4 con el fin de evitar discontinuidades y para que la solución sea única..

Aplicando el método de expansion truncada obtenemos una aproximación para $y(x)$ dada por

$$(e^x)^{\alpha-1} p y_n(e^{-x})$$

cuya exactitud es

$$\int_0^1 |y(x) - (e^x)^{\alpha-1} p y_n(e^{-x})|^2 dx = 0.00135636$$

En la [Figura 3](#) se observan los gráficos de $y(x)$ y de su aproximación superpuestos

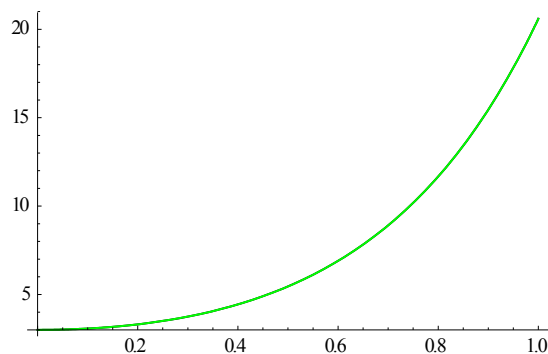


Figura 3: $y(x)$ y su aproximación

Análogamente, para $z(x)$ se obtiene una exactitud de

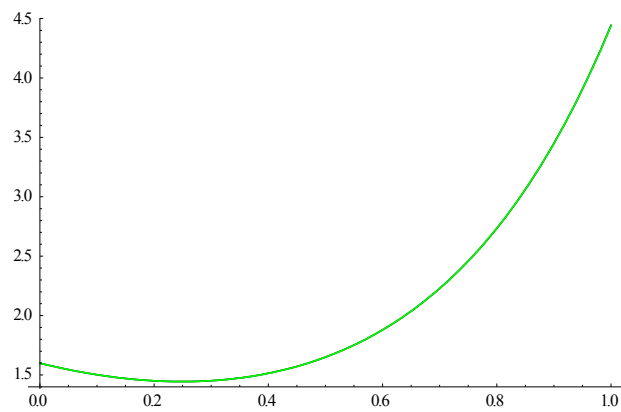
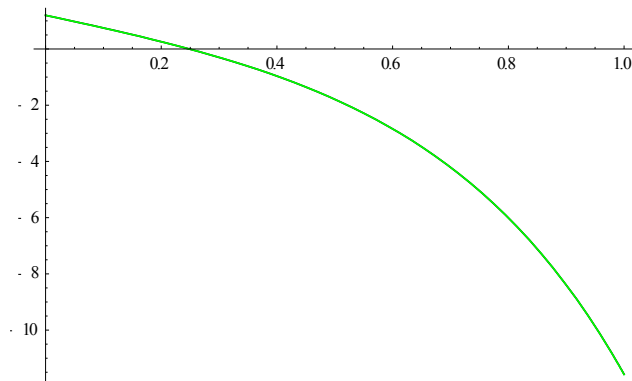
$$\int_0^1 |z(x) - (e^x)^{\alpha-1} p z_n(e^{-x})|^2 dx = 0.000542543$$

En la [Figura 4](#) se observan los gráficos de $z(x)$ y de su aproximación superpuestos

Por ultimo obtenemos la aproximación para $u(x)$. Se tiene en este caso una exactitud de

$$\int_0^1 |u(x) - (e^x)^{\alpha-1} p u_n(e^{-x})|^2 dx = 0.00108509$$

En la [Figura 5](#) se observan los gráficos de $u(x)$ y de su aproximación superpuestos

Figura 4: $z(x)$ y su aproximaciónFigura 5: $u(x)$ y su aproximación

Ejemplo 3

Se considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y^{(1)}(x) + 3y(x) + z(x) = 0 \\ z^{(1)}(x) - y(x) + z(x) = 0 \end{cases} \quad (20)$$

En el intervalo $(0, \infty)$ bajo las condiciones

$$y(0) = 1 ; z(0) = -2$$

La solución exacta del sistema es

$$\begin{cases} y(x) = (1 + x)e^{-2x} \\ z(x) = -(2 + x)e^{-2x} \end{cases}$$

Aplicamos la transformada de Laplace a ambas ecuaciones del sistema (20) y se llega a

$$\begin{cases} (\alpha + 3)L(y) + L(z) = 1 \\ -L(y) + (\alpha + 1)L(z) = -2 \end{cases} \quad (21)$$

El determinante de la matriz de los coeficientes del sistema (21) es

$$\begin{vmatrix} 3 + \alpha & 1 \\ -1 & 1 + \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 + 4\alpha + 4$$

que se anula para $\alpha = -2$

Resolvemos el sistema con el software Mathematica y obtenemos expresiones para $L(y)$ y $L(z)$ en función de α :

$$\begin{cases} L(y) = \frac{3 + \alpha}{(2 + \alpha)^2} \\ L(z) = \frac{-5 - 2\alpha}{(2 + \alpha)^2} \end{cases} \quad (22)$$

Consideramos la base $\{\psi_r(\alpha)\}_r = \{\alpha^r e^{-\alpha}\}_\alpha$ de $L^2(0, \infty)$. Aplicamos el segundo procedimiento para $n = 4$ momentos.

Con el método de expansion truncada obtenemos una aproximación para $y(x)$ cuya exactitud es

$$\int_0^\infty |y(x) - py_n(x)|^2 dx = 0.0203557$$

Análogamente, para $z(x)$ se obtiene una exactitud de

$$\int_0^\infty |z(x) - pz_n(x)|^2 dx = 0.02963743.$$

En la Figura 6 se observan los gráficos de $y(x)$ y su aproximación superpuestas. Análogamente en la Figura 7 para $z(x)$ y su aproximación.

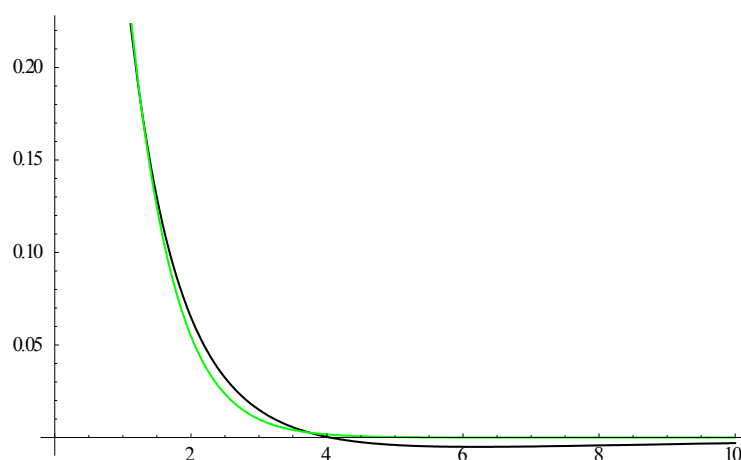
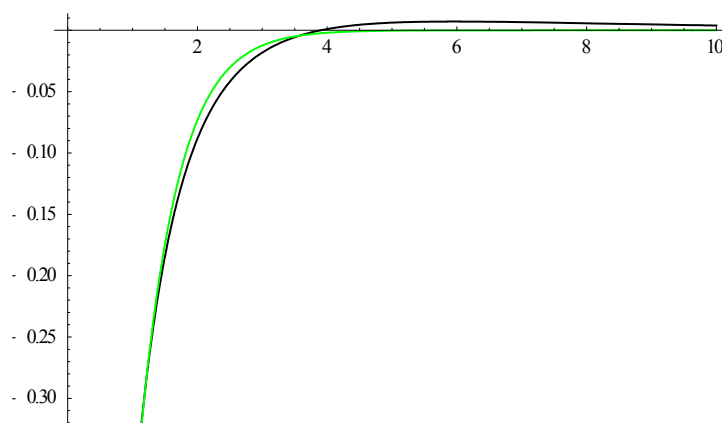


Figura 6 : $y(x)$ y su aproximación

Figura 7 : $z(x)$ y su aproximación

6 CONCLUSIONES

Dado un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales con coeficientes constantes de la forma

$$\begin{aligned} y_1^{(n)}(x) &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_k, y_1^{(1)}, \dots, y_k^{(1)}, \dots, y_1^{(n-1)}, \dots, y_k^{(n-1)}) \\ &\vdots \\ y_k^{(n)}(x) &= f_k(x, y_1, y_2, \dots, y_k, y_1^{(1)}, \dots, y_k^{(1)}, \dots, y_1^{(n-1)}, \dots, y_k^{(n-1)}) \end{aligned}$$

donde $y_i^{(n)}(x)$ indica la derivada de orden n de $y_i(x)$ $i = 1, \dots, k$ y $f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_k, y_1^{(1)}, \dots, y_k^{(1)}, \dots, y_1^{(n-1)}, \dots, y_k^{(n-1)})$ $i = 1, \dots, k$ son funciones lineales de $x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_k(x), y_1^{(1)}(x), \dots, y_k^{(1)}(x), \dots, y_1^{(n-1)}(x), \dots, y_k^{(n-1)}(x)$ con coeficientes constantes, se pueden hallar en forma aproximada, las funciones $y_1(x), y_2(x), \dots, y_k(x)$, que son solución del sistema dado, bajo condiciones de Cauchy en un intervalo (a, b) , considerando el operador

$$L^*(y(x)) = \int_a^b y(x) e^{-\alpha x} dx$$

el cual coincide con la Transformada de Laplace si $a = 0$ y $b = \infty$.

Además suponemos que cada $y_i(x) \in L^2(a, b)$.

Al aplicar dicho operador sobre cada ecuación del sistema se obtiene un sistema de ecuaciones algebraicas donde las incógnitas son $L^*(y_1), L^*(y_2), \dots, L^*(y_k)$ y los coeficientes están dados por expresiones en función de α .

Por lo tanto, al resolver el sistema de ecuaciones algebraicas las incógnitas quedan igualadas a expresiones en función de α

$$\int_a^b y_i(x) e^{-\alpha x} dx = \mu_i(\alpha)$$

Haciendo cambio de variable y discretizando el problema, dando a α valores apropiados, se lo puede interpretar como un problema inverso de momentos y resolverlo utilizando la técnica de la expansión truncada. De esa manera obtenemos una aproximación numérica para cada $y_i(x)$.

En el caso de tener un intervalo de la forma (a, ∞) , multiplicamos ambos miembros de la igualdad anterior por una base de $L^2(a, \infty)$ e integramos. De esa forma obtenemos la igualdad

$$\int_a^{\infty} y_i(x) g_r(x) dx = \mu_{ir} \quad r = 1, 2, \dots$$

donde

$$g_r(x) = \int_a^{\infty} e^{-\alpha x} \psi_r(\alpha) d\alpha$$

y los momentos μ_r son

$$\mu_{ir} = \int_a^{\infty} \mu_i(\alpha) \psi_r(\alpha) d\alpha .$$

Este procedimiento también se puede aplicar si (a, b) es un intervalo acotado.

Nuevamente aplicando el método de expansión truncada al correspondiente problema de momentos finito, se encuentra una aproximación numérica para cada $y_i(x)$.

REFERENCIAS

- D.D. Ang, R. Gorenflo, V.K. Le and D.D. Trong, Moment theory and some inverse problems in potential theory and heat conduction, *Lectures Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2002*.
- David Kincaid, Ward Cheney, Análisis Numérico, las matemáticas del cálculo científico, *Addison-Wesley Iberoamericana, 1994*.
- M. B. Pintarelli and F. Vericat, Stability theorem and inversion algorithm for a generalize moment problem, *Far East Journal of Mathematical Sciences*, pp. 253-274. 30, 2008
- M. B. Pintarelli, Parabolic Partial Differential Equations as Inverse Moments Problem, *Applied Mathematics, Vol7 Number1*, pp. 77-99. (Publicación Online, disponible en <http://www.scirp.org/journal/AM/>), 2016
- Rubio Sanjuan, *Ampliación de Matemáticas*, Editorial Labor, 1951
- J.A. Shohat and J.D. Tamarkin, The problem of Moments, *Mathematic Surveys, Am. Math. Soc., Providence, RI, 1943*.
- G. Talenti, Recovering a function from a finite number of moments, *Inverse Problems* 3, pp.501- 517, 1987.