

DIVERSOS ENFOQUES PARA EL ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO DINÁMICO DE VIGAS TIMOSHENKO AFG

Gonzalo J. Gilardi ^{a,b}, Diana V. Bambill ^{a,b} y Carlos A. Rossit ^{a,b}

^a*Departamento de Ingeniería, Instituto de Mecánica Aplicada, (IMA), Universidad Nacional del Sur,
Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina, <http://www.uns.edu.ar>*

^b*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Argentina.*

gonzalo.gilardi@uns.edu.ar, dbambill@criba.edu.ar, carossit@criba.edu.ar

Palabras clave: Viga, Timoshenko, AFG, Método de Rayleigh-Ritz, Método de Cuadratura Diferencial Generalizada, Método de Elementos Finitos.

Resumen. Desde su primera implementación en el año 1984 a la actualidad, el estudio y desarrollo de materiales avanzados cuyas propiedades varían gradualmente con alguna de sus dimensiones (FGM por su nombre en inglés: Functionally Graded Materials), se ha convertido en un importante foco de atracción tecnológico e innovador para las modernas y futuras aplicaciones ingenieriles. En cuanto a su implementación en el elemento estructural viga, ha adquirido un notable desarrollo en materia investigativa en la última década. En particular, nuestro interés se ha centrado en estudiar el comportamiento dinámico del elemento cuando las propiedades del material varían a lo largo de su directriz (AFG por su nombre en inglés: Axially Functionally Graded). Esto se fundamenta, en que cuando la viga se encuentra en entornos vibratorios, el efecto inercial magnifica la influencia del material constituyente, por lo que las características del mismo adquieren mayor importancia. El problema dinámico de la viga AFG se dificulta de sobremanera en su tratamiento matemático, debido a que las ecuaciones que lo representan poseen coeficientes variables. Es por ello que, en general, para la determinación de los parámetros que caracterizan el comportamiento dinámico de la viga es necesario recurrir a métodos aproximados. En el presente trabajo, las ecuaciones que representan el movimiento de la viga AFG son formuladas en base a la teoría de Timoshenko y resueltas mediante la implementación de los métodos aproximados de Rayleigh-Ritz, Cuadratura Diferencial Generalizada y Elementos Finitos. Se evalúan variados ejemplos numéricos con distintas condiciones de borde, variaciones de la sección transversal y diversos tipos de materiales de propiedades variables; con la finalidad realizar una comparación de la precisión de los métodos. Los resultados concuerdan con situaciones particulares del modelo, disponibles en la literatura científica.

1 INTRODUCCIÓN

El revolucionario avance de la tecnología en el último siglo, ha hecho que el mundo que hoy conocemos, evolucione de tal manera que en pocos lapsos de tiempo surjan nuevos descubrimientos. En materia ingenieril, precisamente en el año 1984, aparece una nueva clase de material avanzado denominado FGM (por su nombre en inglés: Functionally Graded Materials), Niino et al. (1987). Este novedoso material, posee la particularidad de que sus propiedades varían gradualmente con alguna de sus dimensiones, eliminando la formación de interfaces bruscas y consecuentemente evitando el proceso de delaminación que se origina en los materiales compuestos, Martínez et al. (2011). Además, los FGM pueden ser diseñados y fabricados mediante una ley de variación predeterminada, de manera tal que el contenido en porcentaje de los dos o más materiales que constituyan al nuevo material, permitan obtener las propiedades requeridas para esa aplicación específica.

En virtud de las características favorables citadas, diversas áreas de la ingeniería están desarrollando numerosos estudios acerca del comportamiento estático y dinámico de estructuras resistentes constituidas por FGM, así como en la implementación de nuevas tecnologías de fabricación. El principal objetivo es sin duda, innovar en las modernas y futuras aplicaciones ingenieriles.

El presente trabajo trata sobre el análisis de las vibraciones libres en el plano transversal, de vigas Timoshenko construidas parcial o totalmente por FGM. El material se asume variable en el sentido longitudinal de la viga, por lo cual se denomina AFG (por su nombre en inglés: Axially Functionally Graded). Se considera la presencia de cambios bruscos (escalón) y graduales en la sección transversal de la viga. Para resolver el problema dinámico de la viga AFG se recurre a la implementación de los métodos de Rayleigh-Ritz (Ilanko et al. 2014), Cuadratura Diferencial Generalizada (Liu y Wu, 2001) y Elementos Finitos (Rossi, 2007).

2 GENERALIDADES DEL MODELO DE ANÁLISIS

El modelo de viga Timoshenko AFG desarrollado, de dos tramos, permite adosar una masa puntual m en cualquier posición dentro de su longitud L . La viga presenta sección transversal A de doble simetría (rectangular), de ancho b y altura h . Además, A puede variar de manera ahusada en la dirección axial y a cada tramo se le pueden adjudicar propiedades AFG distintas. El eje \bar{x} , con origen el extremo izquierdo de la viga, coincide con el eje neutro (en la posición sin flexionar) y el eje \bar{y} es perpendicular al \bar{x} en el baricentro de la sección transversal inicial. La Figura 1 presenta un esquema del modelo desarrollado.

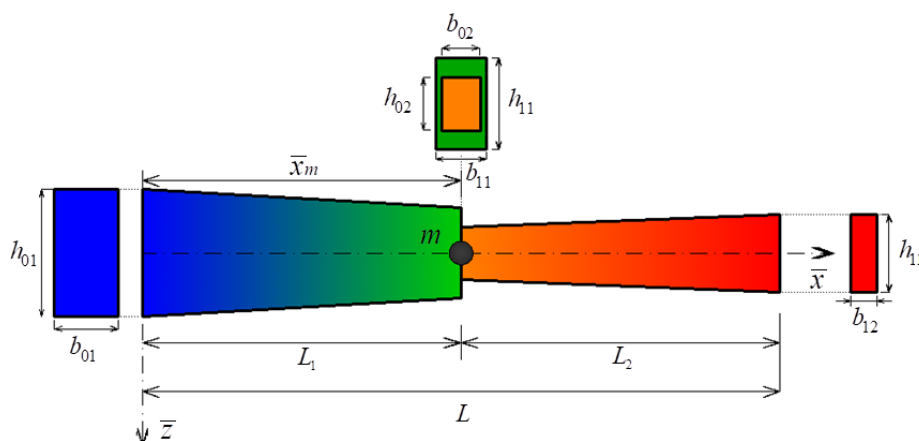


Figura 1: Esquema general del modelo.

Cada parámetro geométrico y del material, posee un primer subíndice que identifica el extremo del tramo al que se está haciendo referencia, “0” para el extremo izquierdo y “1” para el derecho. A continuación, los subíndices “1” y “2” indican el tramo en consideración.

3 LEY DE VARIACIÓN PARA LAS CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS Y PROPIEDADES DEL MATERIAL

Las vigas con sección transversal variable y constituidas por material AFG, cuyas propiedades elásticas en consideración son E el módulo de Young, G el módulo de corte y ρ la masa por unidad de volumen, requieren una expresión que describa la variación de una propiedad $T(\bar{x})$ (del material o geométrica) según su eje

$$T(\bar{x}) = T_0 f_T(\bar{x}) \quad \forall \quad \bar{x} \in [0, L], \quad (1)$$

con T_0 como valor inicial y asumiendo una ley potencial para dicha variación:

$$f_T(\bar{x}) = 1 + \left(\frac{T_1}{T_0} - 1 \right) \left(\frac{\bar{x}}{L} \right)^n. \quad (2)$$

donde n es el exponente que determina el grado de variación de la función. Luego, las características geométricas y propiedades del material quedan definidas como:

$$\begin{aligned} E(\bar{x}) &= E_0 f_E(\bar{x}), \quad G(\bar{x}) = G_0 f_G(\bar{x}), \quad \rho(\bar{x}) = \rho_0 f_\rho(\bar{x}), \\ I(\bar{x}) &= I_0 f_I(\bar{x}), \quad A(\bar{x}) = A_0 f_A(\bar{x}), \quad b(\bar{x}) = b_0 f_b(\bar{x}), \quad h(\bar{x}) = h_0 f_h(\bar{x}); \end{aligned} \quad (3)$$

donde I es el momento de inercia de la sección transversal A . El material se considera isótropo $G(\bar{x}) = E(\bar{x}) / 2(1+\nu)$, por lo tanto $f_E(\bar{x}) = f_G(\bar{x})$, y ν es el coeficiente de Poisson.

4 MÉTODOS APROXIMADOS

4.1 Método de Rayleigh-Ritz

Para la determinación de los coeficientes de frecuencias naturales del sistema viga-masa adosada, se parte de la expresión de la deflexión transversal w y del ángulo de rotación normal ψ (debido a la flexión), para sus modos normales de vibración:

$$w(\bar{x}, t) = \bar{W}(\bar{x}) \cos(\omega t) \quad , \quad \psi(\bar{x}, t) = \bar{\Psi}(\bar{x}) \cos(\omega t) \quad , \quad (4)$$

donde ω es la frecuencia natural circular de vibración transversal de la viga, $\bar{W}(\bar{x})$ y $\bar{\Psi}(\bar{x})$ son las amplitudes del desplazamiento y del giro, respectivamente. Para el desarrollo de los cálculos, se considera la adimensionalización global de la coordenada espacial \bar{x} y de las amplitudes, respecto de la longitud L de la viga. Además, se define la coordenada x_s como la posición donde la sección puede presentar una discontinuidad geométrica o del material.

$$x = \frac{\bar{x}}{L} \quad , \quad W = \frac{\bar{W}}{L} \quad , \quad \Psi = \bar{\Psi} \quad , \quad x_s = \frac{L_1}{L}. \quad (5)$$

Luego, las amplitudes son aproximadas, de acuerdo con el método, en la forma:

$$\Psi(x) \cong \Psi_a(x) = \sum_{i=1}^{Np} C_i p_i(x) \quad W(x) \cong W_a(x) = \sum_{j=1}^{Nq} D_j q_j(x) \quad (6)$$

Las C_i y D_j son constantes arbitrarias, $p_i(x)$ y $q_j(x)$ son funciones coordenadas que

satisfacen las condiciones de borde esenciales, N_p y N_q determinan el número de términos a sumar. Sea adopta $N_p = N_q$ para el análisis.

El funcional de energía J , para el problema de vibraciones en vigas, viene dado por:

$$J = U_{m\acute{a}x} - T_{m\acute{a}x}, \quad (7)$$

donde $U_{m\acute{a}x}$ es la energía máxima de deformación y $T_{m\acute{a}x}$ es la energía cinética máxima. Para el caso de la viga de dos tramos, pueden escribirse como:

$$U_{m\acute{a}x} = \frac{1}{2} \int_0^{x_s} \left[\frac{E_1(x) I_1(x)}{L^2} \left(\frac{d\Psi_a(x)}{dx} \right)^2 + \kappa_1 G_1(x) A_1(x) \left(\frac{dW_a(x)}{dx} - \Psi_a(x) \right)^2 \right] L dx + \frac{1}{2} \int_{x_s}^1 \left[\frac{E_2(x) I_2(x)}{L^2} \left(\frac{d\Psi_a(x)}{dx} \right)^2 + \kappa_2 G_2(x) A_2(x) \left(\frac{dW_a(x)}{dx} - \Psi_a(x) \right)^2 \right] L dx \quad (8)$$

$$T_{m\acute{a}x} = \frac{1}{2} \omega^2 \left\{ \int_0^{x_s} \left[\rho_1(x) A_1(x) (W_a(x))^2 L^2 + \rho_1(x) I_1(x) (\Psi_a(x))^2 \right] + \int_{x_s}^1 \left[\rho_2(x) A_2(x) (W_a(x))^2 L^2 dx + \rho_2(x) I_2(x) (\Psi_a(x))^2 \right] L dx + \frac{1}{2} \omega^2 m \left[L^2 (W_a(x_m))^2 + r_g^2 (\Psi_a(x_m))^2 \right] \right\} \quad (9)$$

x_m es la posición donde se ubica la masa adosada m y r_g es la distancia que existe entre el eje neutro de la viga y el centro de rotación de la masa. Se asume que $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, y además, que los coeficientes de corte $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$, por tener los tramos la misma forma geométrica. Seguidamente, se reemplazan las Ecs. (3) en las Ecs. (8) y (9), y posteriormente éstas en la Ec. (7). Entonces, el funcional adopta la forma:

$$J[W_a(x), \Psi_a(x)] = \int_0^{x_s} \left[f_{E1} f_{I1} (\Psi_a'(x))^2 + \frac{s_1^2}{\lambda} f_{E1} f_{A1} (W_a'(x) - \Psi_a(x))^2 \right] dx + C_E C_I \int_{x_s}^1 \left[f_{E2} f_{I2} (\Psi_a'(x))^2 + \frac{s_2^2}{\lambda} f_{E2} f_{A2} (W_a'(x) - \Psi_a(x))^2 \right] dx + C_\rho C_A \int_0^{x_s} \left[f_{\rho1} f_{A1} (W_a(x))^2 + \frac{f_{\rho1} f_{I1}}{s_1^2} (\Psi_a(x))^2 \right] dx + C_\rho C_A \int_{x_s}^1 \left[f_{\rho2} f_{A2} (W_a(x))^2 + \frac{f_{\rho2} f_{I2}}{s_2^2} (\Psi_a(x))^2 \right] dx + M \left[(W_a(x_m))^2 + c^2 (\Psi_a(x_m))^2 \right] \quad (10)$$

con

$$\Omega = \omega L^2 \sqrt{\frac{\rho_{01} A_{01}}{E_{01} I_{01}}}, \quad C_E = \frac{E_{02}}{E_{01}}, \quad C_\rho = \frac{\rho_{02}}{\rho_{01}}, \quad C_A = \frac{A_{02}}{A_{01}}, \quad C_I = \frac{I_{02}}{I_{01}}, \quad M = \frac{m}{\rho_{01} A_{01} L}, \quad c = \frac{r_g}{L}$$

$$s_1 = L \sqrt{\frac{A_{01}}{I_{01}}}, \quad s_2 = L \sqrt{\frac{A_{02}}{I_{02}}}, \quad \lambda = \frac{2(1+\nu)}{\kappa}, \quad f_j' = \frac{df_j}{dx}$$

donde Ω es el coeficiente de frecuencia, referenciado a las características geométricas de la sección inicial y a las propiedades mecánicas del material que la constituyen. M es el coeficiente de masas que relaciona la masa puntual m con la masa de una viga de material homogéneo y sección constante. s es el parámetro que tiene en cuenta la esbeltez de la viga.

A continuación, el funcional es minimizado respecto a cada constante arbitraria (C_i y D_j)

$$\begin{aligned}\frac{\partial J[W_a(x), \Psi_a(x)]}{\partial C_i} &= 0 \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, Np \\ \frac{\partial J[W_a(x), \Psi_a(x)]}{\partial D_j} &= 0 \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, Nq\end{aligned}\quad (11)$$

lo que da como resultado, un sistema de ecuaciones lineales:

$$\mathbf{R} \begin{Bmatrix} C_i \\ D_j \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (12)$$

Sea el determinante de la matriz \mathbf{R} la ecuación de los coeficientes de frecuencias, la misma puede expresarse de la siguiente manera:

$$\mathbf{R} = \mathbf{K} - \Omega^2 \mathbf{M} \quad (13)$$

donde

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}k_{ii}^{[i,l]} &= \int_0^{x_s} \left(f_{E1} f_{I1} p_i' p_l' + \frac{S_1^2}{\lambda} f_{E1} f_{A1} p_i p_l \right) dx + C_E C_I \int_{x_s}^1 \left(f_{E2} f_{I2} p_i' p_l' + \frac{S_2^2}{\lambda} f_{E2} f_{A2} p_i p_l \right) dx \\ k_{ij}^{[i,r]} &= - \int_0^{x_s} \left(\frac{S_1^2}{\lambda} f_{E1} f_{A1} p_i q_r' \right) dx - C_E C_I \int_{x_s}^1 \left(\frac{S_2^2}{\lambda} f_{E2} f_{A2} p_i q_r' \right) dx \\ k_{ji}^{[j,l]} &= - \int_0^{x_s} \left(\frac{S_1^2}{\lambda} f_{E1} f_{A1} q_j' p_l \right) dx - C_E C_I \int_{x_s}^1 \left(\frac{S_2^2}{\lambda} f_{E2} f_{A2} q_j' p_l \right) dx \\ k_{jj}^{[j,r]} &= \int_0^{x_s} \left(\frac{S_1^2}{\lambda} f_{E1} f_{A1} q_j' q_r' \right) dx + C_E C_I \int_{x_s}^1 \left(\frac{S_2^2}{\lambda} f_{E2} f_{A2} q_j' q_r' \right) dx\end{aligned}\quad (14)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{ii} & m_{ij} \\ m_{ji} & m_{jj} \end{bmatrix}$$

$$m_{ii}^{[i,l]} = \frac{1}{S_1^2} \int_0^{x_s} (f_{\rho 1} f_{I1} p_i p_l) dx + \frac{C_\rho C_A}{S_2^2} \int_{x_s}^1 (f_{\rho 2} f_{I2} p_i p_l) dx + M c^2 p_i(x_m) p_l(x_m) \quad (15)$$

$$m_{ij}^{[i,r]} = 0$$

$$m_{ji}^{[j,l]} = 0$$

$$m_{jj}^{[j,r]} = \int_0^{x_s} (f_{\rho 1} f_{A1} q_j q_r) dx + C_\rho C_A \int_{x_s}^1 (f_{\rho 2} f_{A2} q_j q_r) dx + M q_j(x_m) q_r(x_m)$$

k_{ij} son los elementos que componen a la matriz de rigidez \mathbf{K} y los m_{ij} a la matriz de masa \mathbf{M} . Entonces, el problema de autovalores puede expresarse como:

$$|\mathbf{KM}^{-1} - \Omega^2 \mathbf{I}| = |\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I}| = 0 \quad (16)$$

con $\lambda = \sqrt{\Omega}$ como los autovalores de la matriz \mathbf{B} .

Para considerar las condiciones de borde (C.B.) clásicas de la viga, el método requiere elegir una función coordenada que satisfaga al menos las condiciones de borde esenciales. Debido a que existen dos variables, estas funciones aproximantes no necesariamente deben ser las mismas, en la [Tabla 1](#) se presentan los polinomios elegidos para el análisis. El extremo de la viga, según las C.B. clásicas puede estar: L (Libre), E (Empotrado) y A (Apoyado).

C.B.	$p_i(x)$	$q_j(x)$
E-L	x^i	x^j
E-E	$(x-1)x^i$	$(x-1)x^j$
E-A	x^i	$(x-1)x^j$
A-A	x^{i-1}	$(x-1)x^j$

Tabla 1: Polinomios para las distintas condiciones de borde clásicas.

4.2 Método de Cuadratura Diferencial Generalizada (GDQM)

Los coeficientes de frecuencias naturales, resultan de resolver un sistema de ecuaciones análogas de cuadratura diferencial, es decir, el sistema de ecuaciones lineales equivalente que se obtiene de transformar el sistema de ecuaciones diferenciales gobernante.

Para implementar el método en el estudio de las vibraciones transversales libres de la viga AFG, se parte del sistema de ecuaciones diferenciales correspondiente

$$[1] \quad \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left[\kappa G(\bar{x}) A(\bar{x}) \left(\frac{\partial w(\bar{x}, t)}{\partial \bar{x}} - \psi(\bar{x}, t) \right) \right] - \rho(\bar{x}) A(\bar{x}) \frac{\partial^2 w(\bar{x}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (17)$$

$$[2] \quad \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left[E(\bar{x}) I(\bar{x}) \frac{\partial w(\bar{x}, t)}{\partial \bar{x}} \right] + \kappa G(\bar{x}) A(\bar{x}) \left(\frac{\partial w(\bar{x}, t)}{\partial \bar{x}} - \psi(\bar{x}, t) \right) - \rho(\bar{x}) I(\bar{x}) \frac{\partial^2 \psi(\bar{x}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (18)$$

Debido a que se está considerando una viga de dos tramos, teniendo en cuenta las Ecs. (4) y (5), resulta conveniente la siguiente adimensionalización local (por tramo):

$$\begin{aligned} \text{Tramo 1: } & x_1 = \bar{x}_1 / L_1, \quad W_1 = \bar{W}_1 / L_1, \quad \Psi_1 = \bar{\Psi}_1 \\ \text{Tramo 2: } & x_2 = \bar{x}_2 / L_2, \quad W_2 = \bar{W}_2 / L_2, \quad \Psi_2 = \bar{\Psi}_2. \end{aligned} \quad (19)$$

Seguidamente, se determinan las ecuaciones gobernantes para cada tramo.

• Ecuación [1]- Tramo 1 (Ec. (17)):

$$\left[\kappa G_1(x) A_1(x) (w_1' - \psi_1) \right]' - \rho_1(x) A_1(x) \ddot{w}_1 = 0 \quad \text{con } f_j' = \frac{df_j}{dx} \text{ y } \dot{f}_j = \frac{df_j}{dt} \quad (20)$$

se reemplaza las Ec. (19) en la Ec. (20), entonces:

$$\frac{d}{L_1 dx} \left[\frac{\kappa E_1(x) A_1(x)}{2(1+\nu)} \left(\frac{d(\bar{W}_1 \cos(\omega t))}{L_1 dx} - \bar{\Psi}_1 \cos(\omega t) \right) \right] - \rho_1(x) A_1(x) \frac{d^2(\bar{W}_1 \cos(\omega t))}{dt^2} = 0 \quad (21)$$

Luego, se introducen las expresiones análogas de la Ec. (3), pero adimensionalizadas por tramo:

$$\left\{ \frac{E_{01} A_{01}}{\lambda L_1} \left[f_{E1} f_{A1} (W_1' - \Psi_1) \right]' + \rho_{01} A_{01} f_{\rho 1} f_{A1} \omega^2 L_1 W_1 \right\} \cos(\omega t) = 0 \quad (22)$$

trabajando algebraicamente, se llega a la expresión:

$$\frac{s_{01}^2}{\lambda} \left(\frac{L}{L_1} \right)^2 \left[\frac{f_{E1}' f_{A1} + f_{E1} f_{A1}'}{f_{\rho 1} f_{A1}} (W_1' - \Psi_1) + \frac{f_{E1}}{f_{\rho 1}} (W_1'' - \Psi_1') \right] + \Omega^2 W_1 = 0 \quad (23)$$

De manera análoga, se obtienen las demás ecuaciones, recordando que $\Omega = \omega L^2 \sqrt{\frac{\rho_{01} A_{01}}{E_{01} I_{01}}}$.

- Ecuación [1]- Tramo 2 (Ec. (17)):

$$\left[\kappa G_2(x) A_2(x) (w_2' - \psi_2) \right]' - \rho_2(x) A_2(x) \ddot{w}_2 = 0 \quad (24)$$

se llega a:

$$\frac{s_{01}^2}{\lambda} \frac{C_E}{C_\rho} \left(\frac{L}{L_2} \right)^2 \left[\frac{f_{E2}' f_{A2} + f_{E2} f_{A2}'}{f_{\rho 2} f_{A2}} (W_2' - \Psi_2) + \frac{f_{E2}}{f_{\rho 2}} (W_2'' - \Psi_2') \right] + \Omega^2 W_2 = 0 \quad (25)$$

- Ecuación [2]- Tramo 1 (Ec. (18)):

$$(E_1(x) I_1(x) \psi_1')' + \kappa G_1(x) A_1(x) (w_1' - \psi_1) - \rho_1(x) I_1(x) \ddot{\psi}_1 = 0 \quad (26)$$

se obtiene la expresión:

$$\frac{s_{01}^2}{f_{\rho 1} f_{I1}} \left(\frac{L}{L_1} \right)^2 \left[(f_{E1}' f_{I1} + f_{E1} f_{I1}') \Psi_1' + f_{E1} f_{I1} \Psi_1'' \right] + \frac{s_{01}^4}{\lambda} \frac{f_{E1} f_{A1}}{f_{\rho 1} f_{I1}} (W_1' - \Psi_1) + \Omega^2 \Psi_1 = 0 \quad (27)$$

- Ecuación [2]- Tramo 2 (Ec. (18)):

$$(E_2(x) I_2(x) \psi_2')' + \kappa G_2(x) A_2(x) (w_2' - \theta_2) - \rho_2(x) I_2(x) \ddot{\psi}_2 = 0 \quad (28)$$

se llega a:

$$s_{01}^2 \frac{C_E}{C_\rho} \left(\frac{L}{L_2} \right)^2 \frac{(f_{E2}' f_{I2} + f_{E2} f_{I2}') \Psi_2' + f_{E2} f_{I2} \Psi_2''}{f_{\rho 2} f_{I2}} + \frac{s_{01}^2 s_{02}^2}{\lambda} \frac{C_E}{C_\rho} \frac{f_{E2} f_{A2}}{f_{\rho 2} f_{I2}} (W_2' - \Psi_2) + \Omega^2 \Psi_2 = 0 \quad (29)$$

A continuación, se definen los coeficientes de forma:

$$\alpha_{1i} = \frac{f_{Ei}' f_{Ai} + f_{Ei} f_{Ai}'}{f_{\rho i} f_{Ai}}; \alpha_{2i} = \frac{f_{Ei}}{f_{\rho i}}; \alpha_{3i} = \frac{f_{Ei}' f_{Ii} + f_{Ei} f_{Ii}'}{f_{\rho i} f_{Ii}}; \alpha_{4i} = \frac{f_{Ei} f_{Ai}}{f_{\rho i} f_{Ii}} \quad i = 1, 2. \quad (30)$$

Con la finalidad de obtener las ecuaciones gobernantes análogas de cuadratura, la viga AFG es discretizada en una grilla de N_k nodos de prueba, por tramo, del tipo Chebyshev–Gauss–Lobato (Zong y Zhang, 2009):

$$x_{i,k} = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \cos \left[\frac{(i-1)\pi}{N_k - 1} \right] \right\} \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, N_k \text{ y } k = 1, 2; \quad (31)$$

donde $x_{i,k}$ es la coordenada espacial que ubica al nodo i en el tramo k de la viga. Siguiendo las reglas de la cuadratura (Bert y Malik, 1997), la derivada de orden (q) del desplazamiento W y el giro Ψ para un punto de la grilla i puede expresarse como:

$$\frac{d^{(q)} W_k}{dx^q} \Big|_{x_{i,k}} = \sum_{j=1}^{N_k} R_{ijk}^{(q)} W_{jk}, \quad \frac{d^{(q)} \Psi_k}{dx^q} \Big|_{x_{i,k}} = \sum_{j=1}^{N_k} R_{ijk}^{(q)} \Psi_{jk} \quad \text{con } k = 1, 2; \quad (32)$$

donde W_{jk} y Ψ_{jk} son el desplazamiento y el giro del nodo j en el tramo k , respectivamente.

Los $R_{ijk}^{(q)}$ se denominan coeficientes de ponderación, para el orden de derivada (q), y pueden obtenerse a través de las funciones de interpolación de Lagrange (Karami et al. 2003):

$$\prod(x_{ik}) = \prod_{j=1 \text{ con } j \neq i}^{N_k} (x_{ik} - x_{jk}) \text{ con } i, j = 1, 2, \dots, N_k \text{ y } k = 1, 2 \quad (33)$$

$$R_{ijk}^{(1)} = \frac{\prod(x_{ik})}{(x_{ik} - x_{jk}) \prod(x_{jk})}, \quad q = 1; \quad R_{ijk}^{(q)} = R_{iik}^{(q-1)} R_{ijk}^{(1)} - \frac{R_{ijk}^{(q-1)}}{x_{ik} - x_{jk}}, \quad q > 1 \quad (34)$$

$i, j = 1, 2, \dots, N_k \text{ con } k = 1, 2 \text{ y para } i \neq j$

$$R_{iik}^{(1)} = - \sum_{j=1 \text{ con } j \neq i}^{N_k} R_{ijk}^{(1)}, \quad q = 1; \quad R_{iik}^{(q)} = - \sum_{j=1 \text{ con } j \neq i}^{N_k} R_{ijk}^{(q)}, \quad q > 1 \quad (35)$$

$i, j = 1, 2, \dots, N_k \text{ con } k = 1, 2 \text{ y para } i = j$.

Aplicando la regla definida en la Ec. (32) a las Ecs. (23), (25), (27) y (29); y utilizando los coeficientes de forma de la Ec.(30), se obtiene la ecuación gobernante análoga de cuadratura

$$\begin{aligned} L_{11}W_{j1} + L_{12}W_{j2} + L_{13}\Psi_{j1} + L_{14}\Psi_{j2} &= \Omega^2 W_{i1} \\ L_{21}W_{j1} + L_{22}W_{j2} + L_{23}\Psi_{j1} + L_{24}\Psi_{j2} &= \Omega^2 W_{i2} \quad \text{con } i, j = 2, 3, \dots, N_k - 1 \\ L_{31}W_{j1} + L_{32}W_{j2} + L_{33}\Psi_{j1} + L_{34}\Psi_{j2} &= \Omega^2 \Psi_{i1} \quad \text{y } k = 1, 2. \\ L_{41}W_{j1} + L_{42}W_{j2} + L_{43}\Psi_{j1} + L_{44}\Psi_{j2} &= \Omega^2 \Psi_{i2} \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} L_{11} &= -\frac{s_{01}^2}{\lambda} \left(\frac{L}{L_1} \right)^2 \left[\alpha_{11}(x_{i1}) \sum_{j=1}^{N_1} R_{ij1}^{(1)} + \alpha_{21}(x_{i1}) \sum_{j=1}^{N_1} R_{ij1}^{(2)} \right], \\ L_{13} &= \frac{s_{01}^2}{\lambda} \left(\frac{L}{L_1} \right)^2 \left[\alpha_{11}(x_{i1}) + \alpha_{21}(x_{i1}) \sum_{j=1}^{N_1} R_{ij1}^{(1)} \right], \\ L_{22} &= -\frac{s_{01}^2}{\lambda} \frac{C_E}{C_\rho} \left(\frac{L}{L_2} \right)^2 \left[\alpha_{12}(x_{i2}) \sum_{j=1}^{N_2} R_{ij2}^{(1)} + \alpha_{22}(x_{i2}) \sum_{j=1}^{N_2} R_{ij2}^{(2)} \right], \\ L_{24} &= \frac{s_{01}^2}{\lambda} \frac{C_E}{C_\rho} \left(\frac{L}{L_2} \right)^2 \left[\alpha_{12}(x_{i2}) + \alpha_{22}(x_{i2}) \sum_{j=1}^{N_2} R_{ij2}^{(1)} \right], \\ L_{31} &= -\frac{s_{01}^4}{\lambda} \alpha_{41}(x_{i1}) \sum_{j=1}^{N_1} R_{ij1}^{(1)}, \\ L_{33} &= -s_{01}^2 \left(\frac{L}{L_1} \right)^2 \left[\alpha_{31}(x_{i1}) \sum_{j=1}^{N_1} R_{ij1}^{(1)} + \alpha_{21}(x_{i1}) \sum_{j=1}^{N_1} R_{ij1}^{(2)} \right] + \frac{s_{01}^4}{\lambda} \alpha_{41}(x_{i1}), \\ L_{42} &= -\frac{s_{01}^2 s_{02}^2}{\lambda} \alpha_{42}(x_{i2}) \sum_{j=1}^{N_2} R_{ij2}^{(1)}, \\ L_{44} &= -s_{01}^2 \left(\frac{L}{L_2} \right)^2 \left[\alpha_{32}(x_{i2}) \sum_{j=1}^{N_2} R_{ij2}^{(1)} + \alpha_{22}(x_{i2}) \sum_{j=1}^{N_2} R_{ij2}^{(2)} \right] + \frac{s_{01}^2 s_{02}^2}{\lambda} \frac{C_E}{C_\rho} \alpha_{42}(x_{i2}), \\ L_{12} &= L_{14} = L_{21} = L_{23} = L_{32} = L_{34} = L_{41} = L_{43} = 0 \end{aligned} \quad (37)$$

Para constituir el sistema de ecuaciones del problema es necesario, además, obtener las condiciones de continuidad y de borde análogas de cuadratura. Las condiciones de continuidad se deben cumplir para asegurar integridad del sistema. Estas implican que se deba

satisfacer la compatibilidad, en $x = x_s$, entre los tramos 1 y 2 de los desplazamientos y giros; y además, de los esfuerzos internos de corte y momento flector.

- Desplazamiento:

$$\bar{W}_1 = \bar{W}_2 \quad (38)$$

Considerando la adimensionalización de la Ec. (19):

$$L_1 W_1 = L_2 W_2 \quad (39)$$

- Giro:

$$\bar{\Psi}_1 = \bar{\Psi}_2 \quad (40)$$

Idem a la Ec. (38) se considera la Ec. (19), entonces:

$$\Psi_1 = \Psi_2 \quad (41)$$

- Esfuerzo de corte:

$$\kappa G_1(x) A_1(x) (\bar{W}_1' - \bar{\Psi}_1) = \kappa G_2(x) A_2(x) (\bar{W}_2' - \bar{\Psi}_2) + \omega^2 m \bar{W}_1 \quad (42)$$

Se reemplaza las Ec. (19) en la Ec. (42):

$$\frac{\kappa E_1(x) A_1(x)}{2(1+\nu)} (W_1' - \Psi_1) - \frac{\kappa E_2(x) A_2(x)}{2(1+\nu)} (W_2' - \Psi_2) = \omega^2 m L_1 W_1 \quad (43)$$

A continuación, se introduce la Ec. (3), ya adimensionalizada según la Ec. (19):

$$\frac{E_{01} A_{01}}{\lambda} f_{E1} f_{A1} (W_1' - \Psi_1) - \frac{E_{02} A_{02}}{\lambda} f_{E2} f_{A2} (W_2' - \Psi_2) = \omega^2 m L_1 W_1 \quad (44)$$

Multiplicando por $\frac{\rho_{01} A_{01} L^4 E_{01} I_{01}}{\rho_{01} A_{01} L^4 E_{01} I_{01}}$ al segundo miembro, y agrupando:

$$\frac{E_{01} A_{01}}{\lambda L_1} f_{E1} f_{A1} \frac{L^3}{E_{01} I_{01}} (W_1' - \Psi_1) - \frac{E_{02} A_{02}}{\lambda L_1} f_{E2} f_{A2} \frac{L^3}{E_{01} I_{01}} \frac{A_{01}}{A_{01}} (W_2' - \Psi_2) = \frac{\omega^2 \rho_{01} A_{01} L^4}{E_{01} I_{01}} \frac{m}{\rho_{01} A_{01} L} W_1 \quad (45)$$

y considerando las expresiones definidas en la Ec. (11) se llega a la expresión:

$$\frac{s_{01}^2}{M \lambda} \frac{L}{L_1} \left\{ f_{E1} f_{A1} (W_1' - \Psi_1) - C_E C_A f_{E2} f_{A2} (W_2' - \Psi_2) \right\} = \Omega^2 W_1 \quad (46)$$

La cual se transforma de acuerdo a las reglas de la cuadratura a:

$$\frac{s_{01}^2}{M \lambda} \frac{L}{L_1} \left\{ f_{E1} f_{A1} \left(\sum_{j=1}^{N_1} R_{j1}^{(1)} W_{i1} \Big|_{i=N_1} - \Psi_{i1} \Big|_{i=N_1} \right) - C_E C_A f_{E2} f_{A2} \left(\sum_{j=1}^{N_2} R_{j2}^{(1)} W_{i2} \Big|_{i=1} - \Psi_{i2} \Big|_{i=1} \right) \right\} = \Omega^2 W_{i1} \Big|_{i=N_1} \quad (47)$$

- Momento flector:

$$E_1(x) I_1(x) \bar{\Psi}_1' = E_2(x) I_2(x) \bar{\Psi}_2' + \omega^2 m r_g^2 \bar{\Psi}_1 \quad (48)$$

Se reemplaza la Ec. (6) y se introduce la ley de la Ec. (1) al igual que para la Ec. (40)

$$E_{01} f_{E1} I_{01} f_{I1} \frac{\Psi_1'}{L_1} - E_{02} f_{E2} I_{02} f_{I2} \frac{\Psi_2'}{L_2} = \omega^2 m r_g^2 \Psi_1 \quad (49)$$

Multiplicando por $\frac{\rho_{01} A_{01} L^4}{\rho_{01} A_{01} L^4}$ al segundo miembro, y agrupando:

$$\frac{f_{E1} f_{I1}}{L_1} \Psi_1' - \frac{E_{02} I_{02}}{E_{01} I_{01}} \frac{f_{E2} f_{I2}}{L_2} \Psi_2' = \frac{\omega^2 \rho_{01} A_{01} L^4}{E_{01} I_{01}} \frac{m}{\rho_{01} A_{01} L} \frac{r_g^2}{L^2} \frac{1}{L} \Psi_1'. \tag{50}$$

Si se continúa trabajando, considerando la Ec. (10), se obtiene la expresión:

$$\frac{L}{M c^2} \left\{ \frac{f_{E1} f_{I1}}{L_1} \Psi_1' - C_E C_I \frac{f_{E2} f_{I2}}{L_2} \Psi_2' \right\} = \Omega^2 \Psi_1', \tag{51}$$

que de acuerdo con las reglas de la cuadratura se transforma a:

$$\frac{L}{M c^2} \left\{ \frac{f_{E1} f_{I1}}{L_1} \sum_{j=1}^{N_1} R_{ij1}^{(1)} \Psi_{i1}|_{i=N_1} - C_E C_I \frac{f_{E2} f_{I2}}{L_2} \sum_{j=1}^{N_2} R_{ij2}^{(1)} \Psi_{i2}|_{i=N_2} \right\} = \Omega^2 \Psi_{i1}|_{i=N_1}. \tag{52}$$

Se ha considerado el caso general de que exista una masa puntual adosada en la continuidad. En caso de que no haya masa m en dicha continuidad, solo bastaría con igualar las expresiones encerradas entre llaves en las Ecs. (47) y (52) a cero.

Por otra parte, las C.B. clásicas se presentan en la [Tabla 2](#). Y en caso de que la masa esté adosada en uno de los extremos, se pueden visualizar en la [Tabla 3](#).

C.B.	$x_1 = 0$	$x_2 = 1$
E	$W_{i1} = 0$ con $i = 1$	$W_{i2} = 0$ con $i = N_2$
	$\Psi_{i1} = 0$ con $i = 1$	$\Psi_{i2} = 0$ con $i = N_2$
L	$\left[\sum_{j=1}^{N_1} R_{ij1}^{(1)} W_{j1} \right] - \Psi_{i1} = 0$ con $i = 1$	$\left[\sum_{j=1}^{N_2} R_{ij2}^{(1)} W_{j2} \right] - \Psi_{i2} = 0$ con $i = N_2$
	$\sum_{j=1}^{N_1} R_{ij1}^{(1)} \Psi_{i1} = 0$ con $i = 1$	$\sum_{j=1}^{N_2} R_{ij2}^{(1)} \Psi_{i2} = 0$ con $i = N_2$
A	$W_{i1} = 0$ con $i = 1$	$W_{i2} = 0$ con $i = N_2$
	$\sum_{j=1}^{N_1} R_{ij1}^{(1)} \Psi_{i1} = 0$ con $i = 1$	$\sum_{j=1}^{N_2} R_{ij2}^{(1)} \Psi_{i2} = 0$ con $i = N_2$

Tabla 2: Expresión de las condiciones de borde clásicas según GDQM.

Masa	$-\frac{s_{01}^2 L f_{E1} f_{A1}}{M \lambda L_1} \left[\sum_{j=1}^{N_1} R_{ij1}^{(1)} W_{j1} - \Psi_{j1} \right] = \Omega^2 W_{i1}$ con $i = 1$	$x_1 = 0$
	$-\frac{f_{E1} f_{I1}}{M c^2} \frac{L}{L_1} \sum_{j=1}^{N_1} R_{ij1}^{(1)} \Psi_{j1} = \Omega^2 \Psi_{i1}$ con $i = 1$	
	$\frac{C_E C_A f_{E2} f_{A2}}{M \lambda} \frac{s_{01}^2 L}{L_2} \left[\sum_{j=1}^{N_2} R_{ij2}^{(1)} W_{j2} - \Psi_{j2} \right] = \Omega^2 W_{i2}$ con $i = N_2$	$x_2 = 1$
	$\frac{C_E C_I f_{E2} f_{I2}}{M c^2} \frac{L}{L_2} \sum_{j=1}^{N_2} R_{ij2}^{(1)} \Psi_{j2} = \Omega^2 \Psi_{i2}$ con $i = N_2$	

Tabla 3: Masa puntual adosada en uno de los extremos de la viga.

4.3 Método de Elementos Finitos (MEF)

El elemento viga a utilizar es denominado cúbico-cuadrático de dos nodos (Rossi, 2007), debido al orden de los polinomios con que se aproximan las variables w y ψ . Cada elemento posee una longitud $\ell = 2a$ y un nodo en cada extremo, con dos grados de libertad (G.L.), debido a las variables mencionadas. En la [Figura 2](#) se presenta el esquema del elemento.

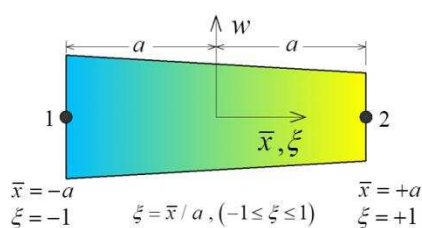


Figura 2: Esquema del Elemento Finito AFG.

Teniendo en cuenta que las funciones de forma permiten representar las elásticas estáticas de una barra sin carga en el tramo, surge la idea de imponer esta propiedad para desarrollar el elemento finito de viga Timoshenko. Entonces, haciendo $\dot{w} = 0$ y $\dot{\psi} = 0$ en las ecuaciones de movimiento, Ecs. (17) y (18), y considerando una viga de un tramo de sección transversal uniforme y de material homogéneo, se obtienen las ecuaciones diferenciales de equilibrio estático:

$$[1] \quad \kappa GA \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{x}^2} - \frac{\partial \psi}{\partial \bar{x}} \right) = 0 \quad (53)$$

$$[2] \quad EI \frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{x}^2} + \kappa GA \left(\frac{\partial w}{\partial \bar{x}} - \psi \right) = 0. \quad (54)$$

Derivando la Ec. (54) respecto a la variable x y restando la Ec.(53), resulta:

$$\frac{\partial^3 \psi}{\partial \bar{x}^3} = 0. \quad (55)$$

Derivando dos veces la Ec. (53) respecto a la variable x y reemplazando en la Ec. (55), se obtiene:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \bar{x}^4} = 0. \quad (56)$$

Sustituyendo $\bar{x} = a \xi$, las soluciones de la Ecs. (55) y (56) son los polinomios completos:

$$w(\xi) = a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + a_3 \xi^3. \quad (57)$$

$$\psi(\xi) = b_0 + b_1 \xi + b_2 \xi^2. \quad (58)$$

Introduciéndolos en las ecuaciones diferenciales en las Ecs. (53) y (54), se llega a:

$$\frac{1}{a} (2a_2 + 6a_3 \xi) - \frac{1}{a} (b_1 + 2b_2 \xi) = 0. \quad (59)$$

$$\frac{\kappa GA}{a} (a_1 + 2a_2 \xi + 3a_3 \xi^2) - \frac{EI_z}{a^2} (2b_2) - \kappa GA (b_0 + b_1 \xi + b_2 \xi^2) = 0. \quad (60)$$

Las Ecs.(59) y (60) se deben satisfacer para todo punto del elemento, entonces:

$$b_0 = \frac{1}{a} a_1 + \frac{2\phi}{a} a_3; \quad b_1 = \frac{2}{a} a_2; \quad b_2 = \frac{3}{a} a_3 \quad \text{con} \quad \phi = \frac{3EI}{\kappa GA a^2}. \quad (61)$$

Derivando la Ec. (57) respecto a ξ y reemplazando la Ec. (61) en la Ec. (58), la expresión de la distorsión γ que resulta es:

$$\gamma(\xi) = \frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial \xi} - \psi = -\frac{2\phi a_3}{a} \quad (62)$$

Luego, los cuatro grados de libertad del elemento tienen la siguiente forma:

$$\begin{aligned} w_1 &= w(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \\ w_2 &= w(+1) = a_0 + a_1\xi + a_2 + a_3 \\ \psi_1 &= \psi(-1) = (a_1 + 2\phi a_3 - 2a_2 + 3a_3) / a \\ \psi_2 &= \psi(+1) = (a_1 + 2\phi a_3 + 2a_2 + 3a_3) / a \end{aligned} \quad (63)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales se determinan los coeficientes a_0, a_1, a_2, a_3 en función de los grados de libertad w_1, w_2, ψ_1 y ψ_2 . Reemplazando en la Ecs. (57) y (58) se obtiene finalmente:

$$w(\xi) = N_{w1}(\xi) w_1 + N_{w2}(\xi) \psi_1 + N_{w3}(\xi) w_2 + N_{w4}(\xi) \psi_2 = [N_w(\xi)] \{\delta_e\} \quad (64)$$

$$\psi(\xi) = N_{\psi1}(\xi) w_1 + N_{\psi2}(\xi) \psi_1 + N_{\psi3}(\xi) w_2 + N_{\psi4}(\xi) \psi_2 = [N_\psi(\xi)] \{\delta_e\} \quad (65)$$

donde las ocho funciones de interpolación adoptan la siguiente forma:

$$\begin{aligned} N_{w1}(\xi) &= \frac{1}{4(1+\phi)} [2(1+\phi) - 3(1+2\phi)\xi + \xi^3] \\ N_{w2}(\xi) &= \frac{a}{4(1+\phi)} [1+\phi - \xi - (1+\phi)\xi^2 + \xi^3] \\ N_{w3}(\xi) &= \frac{1}{4(1+\phi)} [2(1+\phi) + 3(1+2\phi)\xi - \xi^3] \\ N_{w4}(\xi) &= \frac{a}{4(1+\phi)} [-1 - \phi - \xi + (1+\phi)\xi^2 + \xi^3] \\ N_{\psi1}(\xi) &= \frac{3}{4(1+\phi)} [-1 + \xi^2] \\ N_{\psi2}(\xi) &= \frac{1}{4(1+\phi)} [-1 + 2\phi - 2(1+\phi)\xi + 3\xi^2] \\ N_{\psi3}(\xi) &= \frac{3}{4(1+\phi)} [1 - \xi^2] = -N_{\psi1}(\xi) \\ N_{\psi4}(\xi) &= \frac{1}{4(1+\phi)} [-1 + 2\phi + 2(1+\phi)\xi + 3\xi^2] \end{aligned} \quad (66)$$

para $\xi = \bar{x} / a, (-1 \leq \xi \leq 1)$. Y la distorsión γ del elemento queda expresada como:

$$\begin{aligned} \gamma(\xi) &= \frac{1}{a} \frac{\partial w(\xi)}{\partial \xi} - \psi(\xi) = N_{\gamma1}(\xi) w_1 + N_{\gamma2}(\xi) \psi_1 + N_{\gamma3}(\xi) w_2 + N_{\gamma4}(\xi) \psi_2 = \frac{1}{a} [N_\gamma(\xi)] \{\delta_e\} \\ \text{con} \quad N_{\gamma1} &= -N_{\gamma3} = -\frac{\phi}{2(1+\phi)a} \quad ; \quad N_{\gamma2} = N_{\gamma4} = a N_{\gamma1} \end{aligned} \quad (68)$$

Seguidamente, se obtienen las matrices de masa y de rigidez del elemento.

La matriz de masa del elemento se obtiene de sustituir los vectores $[N_w(\xi)]$ y $[N_\psi(\xi)]$ en la expresión de energía cinética:

$$\begin{aligned}
T_e &= \frac{1}{2} \int_{-a}^a \rho(x) A(x) (\dot{w}(x))^2 dx + \frac{1}{2} \int_{-a}^a \rho(x) I(x) (\dot{\psi}(x))^2 dx \\
&= \frac{1}{2} \{\dot{\delta}_e\}' \int_{-1}^1 \rho(x) A(x) [N_w(\xi)]' [N_w(\xi)] a d\xi \{\dot{\delta}_e\} + \frac{1}{2} \{\dot{\delta}_e\}' \int_{-1}^1 \rho(x) I(x) [N_\psi(\xi)]' [N_\psi(\xi)] a d\xi \{\dot{\delta}_e\} \\
&= \frac{1}{2} \{\dot{\delta}_e\}' [m_e] \{\dot{\delta}_e\}
\end{aligned} \tag{69}$$

con

$$[m_e] = a \left\{ \int_{-1}^1 \rho(x) A(x) [N_w(\xi)]' [N_w(\xi)] d\xi + \int_{-1}^1 \rho(x) I(x) [N_\psi(\xi)]' [N_\psi(\xi)] d\xi \right\}.$$

Como se mencionó al principio, el modelo debe contemplar una masa puntual adosada a la viga. Al considerarse el efecto de inercia traslacional y rotacional de la misma, deberán sumarse dos términos a la matriz de masa del elemento, definida en la Ec. (69), que lleve dicha masa. El algoritmo desarrollado, plantea ubicarla en el nodo derecho del elemento, es decir, en $\xi = 1$. Por lo tanto los términos que se deben adicionar son:

$$m [N_w(1)]' [N_w(1)] + m r_g^2 [N_\psi(1)]' [N_\psi(1)]. \tag{70}$$

Por otra parte, para obtener la matriz de rigidez del elemento se reemplazan los vectores $[N_\psi'(\xi)]$ y $[N_\gamma(\xi)]$ en la expresión de la energía de deformación. Sea:

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = \frac{1}{a} \frac{d\psi(\xi)}{d\xi} = \frac{1}{a} N_\psi'(\xi) \{\delta_e\}, \tag{71}$$

entonces:

$$\begin{aligned}
U_e &= \frac{1}{2} \int_{-a}^a E(x) I(x) (\psi'')^2 dx + \frac{1}{2} \int_{-a}^a \kappa G(x) A(x) (w'(x) - \psi(x)) dx \\
&= \frac{1}{2} \{\delta_e\}' \int_{-1}^1 \frac{E(x) I(x)}{a} [N_\psi'(\xi)]' [N_\psi'(\xi)] d\xi \{\delta_e\} + \frac{1}{2} \{\delta_e\}' \int_{-1}^1 \frac{\kappa G(x) A(x)}{a} [N_\gamma(\xi)]' [N_\gamma(\xi)] d\xi \{\delta_e\} \\
&= \frac{1}{2} \{\delta_e\}' [k_e] \{\delta_e\}
\end{aligned} \tag{72}$$

con

$$[k_e] = \frac{1}{a} \left\{ \int_{-1}^1 E(x) I(x) [N_\psi'(\xi)]' [N_\psi'(\xi)] d\xi + \int_{-1}^1 \kappa G(x) A(x) [N_\gamma(\xi)]' [N_\gamma(\xi)] d\xi \right\}.$$

Se optó por un mallado regular, es decir, todos los elementos con la misma longitud. De esta manera la semi-longitud del elemento viene dada por:

$$a = \frac{L}{2n_e}, \tag{73}$$

donde n_e es el número de elementos.

El elemento desarrollado de forma genérica se implementa para los dos tramos. La necesidad de generar otro tramo depende de la existencia de alguna singularidad del material (cambio de ley de distribución), geometría (cambio brusco o de forma) o bien se adose una masa. Además, todas estas singularidades pueden producirse en una misma coordenada x .

Debido a que se considera una viga AFG de sección variable, estas matrices irán cambiando, elemento a elemento, ya que las propiedades del material y las características

geométricas poseen una ley de variación que depende de la coordenada x . El proceso de ensamblado es idéntico al de una viga de sección constante y de material uniforme.

Para considerar las distintas condiciones de borde clásicas, el método sólo anula las condiciones esenciales (desplazamiento y giro) conocidas. Basta, entonces, con eliminar las filas y columnas correspondientes, en las matrices resultantes de masa y de rigidez.

5 RESULTADOS NUMÉRICOS

5.1 Casos de comparación

El grado de certeza que brinda un método, sobre la solución de un problema, es lo primero que se debe comprobar. Seguidamente, los métodos aproximados desarrollados son contrastados con dos casos particulares disponibles en la literatura.

5.1.1 Viga de material homogéneo en voladizo:

c_b	Ω	0.0				0.5			
		GDQM	M.R-Ritz	MEF	DTM	GDQM	M.R-Ritz	MEF	DTM
0.2	1	3.42466	3.42466	3.42466	3.42466	4.15186	4.15186	4.15186	4.15186
	2	15.8905	15.8905	15.8905	15.8905	16.9642	16.9642	16.9642	16.9642
	3	35.4301	35.4301	35.4301	35.4301	36.3101	36.3101	36.3101	36.3101
	4	56.8910	56.8910	56.8910	56.8910	57.6759	57.6759	57.6759	57.6759
	5	79.3608	79.3608	79.3608	-	80.0873	80.0873	80.0873	-
0.4	1	3.56054	3.56054	3.56054	3.56054	4.29314	4.29314	4.29314	4.29314
	2	15.3528	15.3528	15.3528	15.3528	16.3651	16.3651	16.3651	16.3651
	3	33.7876	33.7876	33.7876	33.7876	34.6531	34.6531	34.6531	34.6531
	4	54.7561	54.7561	54.7561	54.7561	55.5115	55.5115	55.5115	55.5115
	5	77.1391	77.1391	77.1391	-	77.7984	77.7984	77.7984	-
0.6	1	3.76227	3.76227	3.76227	3.76227	4.50198	4.50198	4.50198	4.50198
	2	14.6448	14.6448	14.6448	14.6448	15.5954	15.5954	15.5954	15.5954
	3	31.6239	31.6239	31.6239	31.6239	32.4786	32.4786	32.4786	32.4786
	4	51.6225	51.6225	51.6225	51.6225	52.3699	52.3699	52.3699	52.3699
	5	73.4126	73.4126	73.4126	-	74.0525	74.0525	74.0525	-
0.8	1	4.11768	4.11768	4.11768	4.11768	4.86899	4.86899	4.86899	4.86899
	2	13.7574	13.7574	13.7574	13.7574	14.6445	14.6445	14.6445	14.6445
	3	28.6360	28.6360	28.6360	28.6360	29.4779	29.4779	29.4779	29.4779
	4	46.8288	46.8288	46.8288	46.8288	47.5848	47.5848	47.5848	47.5848
	5	67.1978	67.1978	67.1978	-	67.8538	67.8538	67.8538	-

Tabla 4: Coeficientes de frecuencias $\Omega_i = \omega_i L^2 \sqrt{\rho A_0 / EI_0}$ viga de material homogéneo en voladizo

El primer caso a comparar corresponde una viga Timoshenko rotante, de sección transversal rectangular y doblemente ahusada; estudiada por [Ozgumus y Kaya \(2008\)](#). Estos autores obtuvieron los primeros cuatro coeficientes de frecuencias, empleando el método de transformación diferencial (Differential Transform Method-DTM-). La ley de variación que

optaron para la variación de los parámetros geométricos fue

$$b(x) = b_0(1 - c_b x)^n; h(x) = h_0(1 - c_h x)^n \quad \text{con} \quad c_b = 1 - \frac{b_1}{b_0}, \quad c_h = 1 - \frac{h_1}{h_0} \quad \text{y} \quad n = 1. \quad (74)$$

En particular, se compara el caso en que la velocidad de rotación es nula, $s = 12.5$ y $E / \kappa G = 3.059$. En la [Tabla 4](#), se pueden apreciar los distintos casos comparados.

Los coeficientes de frecuencias determinados reflejan una excelente concordancia para todos los casos. Se recuerda que Rayleigh-Ritz brinda cotas superiores a los valores buscados. La precisión se obtuvo de un minucioso análisis de convergencia. Se implementan 23 nodos en GDQM, 20 términos de polinomios en Rayleigh-Ritz y 3000 elementos en MEF.

5.1.2 Viga AFG con distintas C.B. clásicas:

C.B.	Ω	GDQM	M.R-Ritz	MEF	Shahba et al. (2011)	Huang et al. (2013)	Zhao et al. (2017)
E-L	1	3.93579	3.93579	3.93574	3.9359	3.93579	3.93585
	2	15.1533	15.1533	15.1533	15.1577	15.1533	15.1540
	3	31.2239	31.2239	31.2239	31.2638	31.2239	31.2257
	4	47.5836	47.5836	47.5837	47.7164	47.5857	47.5871
	5	62.7344	62.7344	62.7346	—	—	—
E-A	1	10.8007	10.8007	10.8007	—	10.8007	10.8011
	2	25.6179	25.6179	25.6180	—	25.6179	25.6194
	3	42.6474	42.6474	42.6476	—	42.6478	42.6502
	4	58.8528	58.8528	58.8532	—	58.8595	58.8588
	5	62.7800	62.7800	62.7802	—	—	—
E-E	1	12.4633	12.4633	12.4634	12.4689	12.4633	12.4691
	2	26.3804	26.3804	26.3806	26.4153	26.3804	26.3822
	3	42.9607	42.9607	42.9609	43.0904	42.9611	42.9636
	4	59.3916	59.3916	59.3919	59.6829	59.4023	59.3958
	5	68.0580	68.0580	68.0583	—	—	—
A-A	1	7.65276	7.65276	7.65281	7.6545	—	7.6529
	2	23.7126	23.7126	23.7127	23.7369	—	—
	3	41.7042	41.7042	41.7044	41.8210	—	—
	4	57.7613	57.7613	57.7616	57.8739	—	—
	5	60.1514	60.1514	60.1517	—	—	—

Tabla 5: Coeficientes de frecuencias para viga AFG con C.B. clásicas.

El segundo caso en consideración, es una viga Timoshenko AFG de sección transversal ahusada. Este caso fue estudiado por varios autores, entre ellos cabe citar: [Shahba et al. \(2011\)](#) empleando MEF, [Huang et al. \(2013\)](#) utilizando un método de transformación por variable auxiliar y [Zhao et al. \(2017\)](#) mediante la teoría de polinomios de Chebyshev. Los dos materiales constituyentes son: zirconia (ZrO_2) y aluminio (Al), cuyas propiedades son:

(ZrO_2): $E_0 = 200$ GPa, $\rho_0 = 5700$ kg/m³; (Al): $E_1 = 70$ GPa, $\rho_1 = 2702$ kg/m³. La ley de variación del material es no lineal, con $n = 2$ de acuerdo a la Ec. (2). Además, adoptaron $s = 10$, $\kappa = 5/6$, $\nu = 0.3$ y sección ahusada con $\beta = 0.1$ para la siguiente ley

$$A(x) = A_0(1 - \beta x); I(x) = I_0(1 - \beta x)^3 \quad \text{con } x \in [0, 1]. \quad (75)$$

Los primeros cinco coeficientes de frecuencias, para distintas condiciones de borde, se encuentran tabulados en la [Tabla 5](#).

Se observa muy buena correlación entre los resultados. Los métodos empleados, presentan mayor semejanza con el trabajo de [Zhao et al. \(2013\)](#). La precisión, para GDQM y Rayleigh-Ritz se mantuvo utilizando 23 nodos y 20 términos de polinomios, respectivamente; pero para MEF fue necesario incrementar a 6000 elementos.

5.2 Casos propuestos

En el estudio del comportamiento dinámico de este tipo de estructuras, la cantidad y variabilidad de parámetros que intervienen, permiten generar una gran diversidad de casos. El presente estudio solo desarrolla algunos casos puntuales, considerando el material AFG propuesto por [Su et al. \(2013\)](#). El cual está constituido por dos materiales: acero (Ac) y alúmina (Al_2O_3), cuyas propiedades son: $E_{Ac} = 210$ GPa, $\rho_{Ac} = 7800$ kg/m³, $E_{Al_2O_3} = 390$ GPa, $\rho_{Al_2O_3} = 3960$ kg/m³ y sus respectivas relaciones $E_{Al_2O_3} / E_{Ac} = 1.857$ y $\rho_{Al_2O_3} / \rho_{Ac} = 0.508$. La alúmina evidencia ser un material mucho más rígido y a su vez más liviano que el acero.

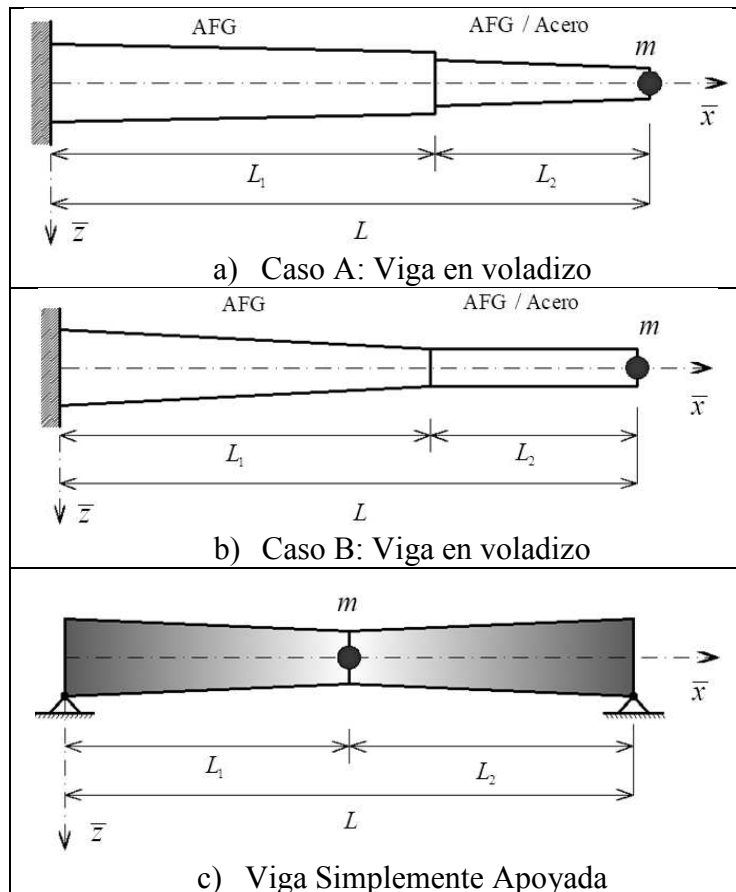


Figura 3: Esquemas de casos propuestos para vigas AFG.

Gilardi et al. (2015, 2016), han demostrado que implementar materiales AFG en vigas, permite obtener coeficientes de frecuencias mayores en comparación a vigas constituidas por material homogéneo. Desde el punto de vista de la rigidización dinámica, alejar la frecuencia fundamental de la viga de la frecuencia de funcionamiento de un equipo (motor adosado); disminuye las posibilidades de que se produzca el fenómeno de resonancia.

Por otra parte, han evidenciado que una masa adosada, además de disminuir los coeficientes de frecuencia, es un factor determinante en el momento de elegir la composición del material AFG a utilizar.

Las composiciones a utilizar en el presente trabajo contemplan las conclusiones de las citas descriptas anteriormente, por lo que se pone énfasis en comparar los métodos desarrollados. Para todos los casos se considera los parámetros: $s=10, \kappa=5/6, \nu=0.3$ y que los coeficientes de frecuencia están referenciados a una viga homogénea de acero y de sección transversal constante.

La Figura 3 presenta esquemas que serán de utilidad, para interpretar los casos propuestos.

c_b	Ω	0.2			0.4			0.6		
		GDQM	M.R-Ritz	MEF	GDQM	M.R-Ritz	MEF	GDQM	M.R-Ritz	MEF
0	1	2.42561	2.42561	2.42561	2.40411	2.40411	2.40411	2.36506	2.36506	2.36506
	2	14.8539	14.8539	14.8539	14.6826	14.6826	14.6826	14.3197	14.3197	14.3197
	3	30.2159	30.2159	30.2159	28.1697	28.1697	28.1697	25.3897	25.3897	25.3897
	4	41.7565	41.7565	41.7565	40.7071	40.7071	40.7071	39.6686	39.6686	39.6686
	5	63.1745	63.1745	63.1745	62.8410	62.8410	62.8410	62.4317	62.4317	62.4317
0.2	1	2.27912	2.27912	2.27912	2.24026	2.24026	2.24026	2.18201	2.18201	2.18201
	2	13.5028	13.5028	13.5028	13.1713	13.1713	13.1713	12.5484	12.5484	12.5484
	3	26.0297	26.0297	26.0297	24.2600	24.2600	24.2600	22.1086	22.1086	22.1086
	4	40.0712	40.0712	40.0712	39.3568	39.3568	39.3568	38.6020	38.6020	38.6020
	5	61.7283	61.7283	61.7283	61.4552	61.4552	61.4552	61.1114	61.1114	61.1114
0.4	1	2.09308	2.09308	2.09308	2.03658	2.03658	2.03658	1.95936	1.95936	1.95936
	2	11.5134	11.5134	11.5134	10.9659	10.9659	10.9659	10.0741	10.0741	10.0741
	3	21.5758	21.5758	21.5758	20.4153	20.4153	20.4153	19.1444	19.1444	19.1444
	4	37.9323	37.9323	37.9323	37.5386	37.5386	37.5386	37.0828	37.0828	37.0828
	5	59.7458	59.7458	59.7458	59.5675	59.5675	59.5675	59.3251	59.3251	59.3251
0.6	1	1.84456	1.84456	1.84456	1.77086	1.77086	1.77086	1.67563	1.67563	1.67563
	2	8.51871	8.51871	8.51871	7.84937	7.84937	7.84937	6.93126	6.93126	6.93126
	3	17.4609	17.4609	17.4609	17.0091	17.0091	17.0091	16.5381	16.5381	16.5381
	4	35.1154	35.1154	35.1154	35.0003	35.0003	35.0003	34.8382	34.8382	34.8382
	5	56.7840	56.7840	56.7840	56.7370	56.7370	56.7370	56.6436	56.6436	56.6436
0.8	1	1.46988	1.46988	1.46988	1.38087	1.38087	1.38087	1.26968	1.26968	1.26968
	2	4.49189	4.49190	4.49190	4.03071	4.03071	4.03071	3.46333	3.46333	3.46333
	3	13.7900	13.7900	13.7900	13.8254	13.8254	13.8254	13.8731	13.8731	13.8731
	4	30.8706	30.8706	30.8706	30.9939	30.9939	30.9939	31.1198	31.1198	31.1198
	5	51.6107	51.6107	51.6107	51.7296	51.7296	51.7296	51.8457	51.8457	51.8457

Tabla 6: Coeficientes de frecuencia para viga AFG con masa ($M = 1$)

5.2.1 Viga AFG en voladizo con masa:

Se modela una viga AFG cantiléver de un tramo, ($L_2 = 0$) en la [Figura 3a](#)), y con masa puntual m adosada en el extremo libre. La composición del material AFG es ($\text{Al}_2\text{O}_3 - \text{Ac}$) y varía linealmente, es decir, con $n=1$. Se elige $M=1$ y $c=r_g/L=0.1$, luego m tiene la misma magnitud de masa que una viga de sección transversal constante y homogénea de alúmina ($m_{\text{viga}} = \rho_{\text{Al}_2\text{O}_3} AL$), debido a que $\rho_{01} = \rho_{\text{Al}_2\text{O}_3}$. La viga presenta además, sección transversal ahusada con ancho b y altura h variando de forma lineal ($n=1$), de acuerdo con la Ec. (74).

En la [Tabla 6](#), se presentan los coeficientes de frecuencia obtenidos. Se observa una excelente correspondencia en los resultados. La precisión se obtuvo, utilizando 23 nodos en GDQM, 20 términos de polinomios en Rayleigh-Ritz y 3000 elementos en MEF.

5.2.2 Viga en voladizo de dos tramos con masa:

Se modelan dos casos particulares de vigas en voladizo. Las vigas poseen ancho b constante en ambos tramos y para las propiedades de los materiales AFG se asume la composición ($\text{Al}_2\text{O}_3 - \text{Ac}$) con ley de variación lineal ($n=1$), según la Ec. (2). Además, se considera $M=1$, para la masa a adosar y $c=r_g/L=0.1$.

Caso A: corresponde a una viga cuyo primer tramo posee altura h variable con $n=1$, y propiedades de material AFG. El segundo tramo comienza en $x_s=0.67$ y se contempla la posibilidad de que sea totalmente de acero [1] o bien de material AFG [2]. El modelo se puede apreciar en la [Figura 3a](#)).

Caso B: modifica la geometría del Caso A, considerando ahusado a los dos tramos. Como muestra la [Figura 3b](#)).

Los coeficientes de frecuencia del Caso A y B se presentan en la [Tabla 7](#) y [Tabla 8](#), respectivamente.

$\frac{h_{11}}{h_{01}}$	$\frac{h_{11}}{h_{02}}$	$\frac{h_{12}}{h_{02}}$	Caso A	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Solución
0.5	1	1	[1]	1.60234	8.62948	17.8385	32.6208	51.0664	GDQM
				1.60236	8.62956	17.8386	32.6210	51.0668	M.R-Ritz
				1.60234	8.62948	17.8385	32.6208	51.0664	MEF
			[2]	1.67820	9.78112	19.0898	36.9016	56.6207	GDQM
				1.68017	9.79289	19.0998	36.9308	56.6707	M.R-Ritz
				1.67831	9.78174	19.0911	36.9037	56.6262	MEF

Tabla 7: Coeficientes de frecuencia para viga AFG en voladizo de dos tramos con masa ($M=1$).

Para el Caso A[1] y B[1] se emplearon 30 términos de polinomios para M.R-Ritz, 23 nodos en GDQM y 3000 elementos en MEF; y para el Caso A[2] y B[2] hubo que aumentar el número de elementos a 5000 en MEF.

Se observa muy buena semejanza en los resultados. En particular, en los casos A[1] y B[1] se aprecia menor diferencia, entre los métodos, que en A[2] y B[2]. Además, se puede evidenciar el efecto de rigidización, al implementar un material AFG en el tramo 2.

$\frac{h_{11}}{h_{01}}$	$\frac{h_{11}}{h_{02}}$	$\frac{h_{12}}{h_{02}}$	Caso B	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Solución
0.8	1.33	0.67	[1]	2.03422	8.49449	16.4021	32.3743	52.5980	GDQM
				2.03740	8.50322	16.4208	32.3834	52.6803	M.R-Ritz
				2.03460	8.49705	16.4059	32.3759	52.6031	MEF
			[2]	2.14768	9.56409	17.6804	36.3017	58.6103	GDQM
				2.14794	9.56491	17.6828	36.3045	58.6263	M.R-Ritz
				2.14790	9.56675	17.6835	36.3054	58.6165	MEF

Tabla 8: Coeficientes de frecuencia para viga AFG en voladizo con masa ($M = 1$).

5.2.3 Viga AFG simplemente apoyada:

Se modela una viga AFG simplemente apoyada contemplando la posibilidad de una masa puntual m en la mitad de la longitud de la viga. La viga presenta sección transversal ahusada con ancho b constante y altura h variando linealmente, de acuerdo con el modelo que se puede apreciar en la Figura 3c). La composición de los materiales se considera que varía linealmente ($n = 1$), con acero en los vínculos y alúmina en el centro del tramo.

Se elige $M = 1$ y $c = r_g / L = 0.1$, pero ahora m tienen la magnitud de masa de una viga de acero y de sección transversal constante ($m_{viga} = \rho_{Ac} AL$), $\rho_{01} = \rho_{Ac}$.

En la Tabla 9, se presentan los coeficientes de frecuencia hallados para las vigas AFG.

$\frac{h_{11}}{h_{01}}$	$\frac{h_{11}}{h_{02}}$	$\frac{h_{12}}{h_{02}}$	M	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Solución
1	1	1	0	12.5188	34.0832	59.9574	74.2842	81.9485	GDQM
				12.5196	34.0836	59.9575	74.2859	81.9506	M.R-Ritz
				12.5202	34.0869	59.9640	74.2920	81.9570	MEF
			1	6.38910	28.4106	42.9647	47.6632	79.0360	GDQM
				6.39564	28.5151	43.3285	48.1388	79.2358	M.R-Ritz
				6.38951	28.4130	42.987	47.6668	79.0436	MEF
0.5	1	2	0	8.56276	28.8498	54.7384	78.6673	83.0437	GDQM
				8.56419	28.8503	54.7393	78.6674	83.0451	M.R-Ritz
				8.56263	28.8508	54.7420	78.6746	83.0570	MEF
			1	3.58797	18.1407	35.4786	35.8805	79.7044	GDQM
				3.59132	18.5886	35.8147	36.7066	79.7569	M.R-Ritz
				3.58758	18.1386	35.4799	35.8813	79.7150	MEF

Tabla 9: Coeficientes de frecuencia para viga AFG simplemente apoyada.

La correspondencia en los resultados obtenidos es muy buena y permite apreciar la reducción de los coeficientes de frecuencia, como efecto de adosar una masa a la viga. La precisión se obtuvo, utilizando 23 nodos en GDQM, 30 términos de polinomios en Rayleigh-Ritz y 6000 elementos en MEF.

6 CONCLUSIONES

El estudio desarrollado, permite dar certezas de que los métodos aproximados de Rayleigh-Ritz, Cuadratura Diferencial Generalizada y Elementos Finitos brindan gran eficiencia y precisión en la resolución de esta clase de problemas.

La complejidad de los casos propuestos, pone en evidencia el comportamiento de los métodos. Los métodos de Rayleigh-Ritz y MEF requieren aumentar el número de polinomios a sumar o la cantidad de elementos, respectivamente; para lograr la precisión en los resultados que GDQM obtiene empleando solo 23 Nodos. Este último método, permite considerar muy bien las singularidades, converge muy rápido y usa muy poco tiempo computacional. En cambio, al método energético de Rayleigh-Ritz posee más complicaciones para aproximar cambios bruscos, dado a que utiliza funciones continuas; y MEF requiere un gran número de elementos y mucho tiempo computacional, pero logra representar las singularidades mejor que Rayleigh-Ritz.

Por otro lado, quedaron demostradas las ventajas estructurales de utilizar FGM en el diseño de vigas y el efecto de la masa adosada en la reducción de los coeficientes de frecuencia.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al Departamento de Ingeniería, a la Secretaría General de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional del Sur (U.N.S.), al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) y a la Comisión de Investigaciones Científicas (C.I.C.) de la Provincia de Buenos Aires, bajo cuyos auspicios se realizó el presente estudio.

REFERENCIAS

- Bert, C.W. and Malik, M. Differential quadrature: a powerful new technique for analysis of composite structures. *Compos Struct*, 39(3–4):179–189, 1997.
- Gilardi, G.J., Bambill, D.V. and Rossit, C.A. Free vibrations of an axially functionally graded beam with a concentrated mass, *Ebook PANACM 2015*. CIMNE, 410–421, 2015.
- Gilardi, G.J., Rossit, C.A and Bambill, D.V. Vibraciones de vigas construidas con material funcionalmente graduado que soportan masas adosadas, *Mecánica Computacional Vol. XXXIV*, 529–544, 2016.
- Huang, Y., Yang, L. and Luo, Q. Free vibration of axially functionally graded Timoshenko beams with non-uniform cross-section. *Composites: Part B*, 45:1493–1498, 2013.
- Ilanko, S., Monterrubio, L.E. and Mochida, Y. *The Rayleigh-Ritz Method for Structural Analysis*. Wiley & Sons, 1–32, 2014.
- Karami, G., Malekzadeh, P., and Shahpari, S. A DQEM for vibration of shear deformable nonuniform beams with general boundary conditions. *Engineering Structures*, 25:1169–1178, 2003.
- Liu, G.R. and Wu, T.Y. Vibration analysis of beams using the Generalized Differential Quadrature Rule and Domain Decomposition. *Journal of Sound and Vibration*, 246(3):461–481, 2001.
- Martínez, X., Oller, S. and Barbero E. Caracterización de la delaminación en materiales compuestos mediante la teoría de mezclas serie/paralelo. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 27(3): 189–199, 2011.
- Niino, M., Hirai, T. and Watanabe R. The functionally gradient materials. *J Jap Soc Compos Mat.*, 13:257–264, 1987.
- Ozgumus, O.O. and Maya, M.O. Flap wise bending vibration analysis of a rotating double-tapered Timoshenko beam. *Archive of Applied Mechanics*, 78:389–392, 2008.

- Rossi, R.E. *Introducción al análisis de Vibraciones con el Métodos de Elementos Finitos*. Edi UNS, 69–184, 2007.
- Shahba, A., Attarnejad, R., Marvi, M.T. and Hajilar S. Free vibration and stability analysis of axially functionally graded tapered Timoshenko beams with classical and non-classical boundary conditions. *Composites: Part B*, 42:801–808, 2011.
- Su, H., Banerjee, J.R. and Cheung, C.W. Dynamic stiffness formulation and free vibration analysis of functionally graded beams. *Composite Structures*, 106:854–862, 2013.
- Zhao, Y., Huang, Y. and Guo, M. A novel approach for free vibration of axially functionally graded beams with non-uniform cross-section based on Chebyshev polynomials theory, *Composite Structures* (2017), doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.02.012>
- Zong, Z. and Zhang, Y.Y. *Advanced differential quadrature methods*. CRC Press, 2009.