

Elaboración e implementación de un instrumento semiótico como “memoria externa” para el desarrollo de competencias en Álgebra y Geometría Analítica

EJE TEMÁTICO N°4. Innovaciones.

Relato de experiencia pedagógica

D’Andrea Leonardo Javier¹

Kozak Ana María²

Mollo Marcela Alejandra³

1 Facultad Regional Avellaneda - Universidad Tecnológica Nacional, Argentina, dandrealj@yahoo.com

2 Facultad Regional Avellaneda - Universidad Tecnológica Nacional, Argentina, anamakozak@gmail.com

3 Facultad Regional Avellaneda - Universidad Tecnológica Nacional, Argentina, mmollo@hotmail.com.ar

RESUMEN

En línea con lo que plantea el Consejo Federal de Decanos de Ingeniería (CONFEDI) acerca de la enseñanza centrada en el desarrollo de competencias, se propone reflexionar acerca de los alcances y limitaciones de una experiencia compartida entre docentes y estudiantes en la elaboración y la implementación de una hoja de fórmulas como “memoria externa” en las clases de Álgebra y Geometría Analítica de la Facultad Regional Avellaneda, Universidad Tecnológica Nacional, Argentina.

Posteriormente, posicionados en una concepción dialéctica entre enseñanza y aprendizaje como labor conjunta, inmersos en una práctica reflexiva y centrados en las competencias de egreso definidas por el CONFEDI para las diferentes Ingenierías; se describen los resultados obtenidos a partir de un análisis objetivo y subjetivo del diseño y uso del artefacto semiótico, y se mencionan acciones para mejorar la propuesta.

PALABRAS CLAVE: Competencias, Semiótica Matemática, Ingeniería, Geometría Analítica.

1. INTRODUCCIÓN

“La evolución del saber debe concebirse no como un fenómeno natural sino como un fenómeno cultural”

Radford, 2017, p. 107

Desde una perspectiva histórico cultural en la Educación (Vygotsky, 1934; Hernández Rojas, 1988; Wertsh, 1988; Moll, 1993; Baquero, 1997; Daniels, 2003; Vygotsky, 2012a-2012b-2012c-2012d; Baquero y Limón Luque, 2012) y ubicados en los principios de la Teoría de la Objetivación – TO – (Radford, 2000-2006-2014-2017) sobre la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática, se considera

fundamental comenzar explicitando qué se entiende por saber y por conocimiento: “no podemos entender el aprendizaje si no logramos dar una explicación satisfactoria del objeto de aprendizaje y de la naturaleza de ese objeto” (Radford, 2017, p. 97).

Siguiendo a Radford (2017), el saber es considerado una *potencialidad* en el sentido aristotélico, por ejemplo el saber algebraico es una potencialidad incrustada en la cultura, brinda “posibilidades a los individuos para pensar, reflexionar, plantear y resolver problemas de cierta manera” (p. 101). Es importante aclarar que no se coloca al saber en una línea platonista, formas universales y atemporales independientes del trabajo humano; sino que “son los propios individuos los que constituyen el saber en potencialidad a través de su propia labor – a través de sus acciones, de sus reflexiones, sus sufrimientos y sus esperanzas” (Radford, 2017, p. 101), tal como se expresa en el epígrafe de este apartado.

De esta manera, se entenderá al saber matemático como “concreción de formas abstractas previas de pensamiento y acción matemáticas, que son lingüísticas, perceptivas, artefactuales y corporales” (Radford, 2017, p. 107). Posteriormente, se define al conocimiento como la *actualización* o *materialización* del saber.

El saber es algo *general* que para existir, debe materializarse a través de un proceso de actualización, el cual denominamos conocimiento, y este último como contenido conceptual concreto aparece o puede aparecer únicamente en una *actividad*: “la actividad demarca la manera en que el saber se manifiesta en el conocimiento” (Radford, 2017, p. 109).

Desde la TO el conocimiento no es un proceso directo, sino que requiere del aprendizaje, concebido como “el encuentro consciente y deliberado con formas histórica y culturalmente codificadas de pensamiento y acción” (Radford, 2017, p. 133). A diferencia de la noción constructivista, que se centra en el estudiante y el aprendizaje debe emanar de este último, la TO propone una relación docente-estudiante enmarcada por la idea de *labor conjunta* (véase Figura 1) de *naturaleza ética* (una orientación genuina no egoísta hacia los otros).



Ilustración 1 (Labor conjunta que ocurre en un espacio socio-político al interior del cual tiene lugar un conociendo –*knowing*– y el volviéndose –*becoming*–, esto es volviéndose sujeto en tanto que proyecto histórico-social siempre inconcluso). Fuente: Radford, 2014, p. 135.

2. COMPETENCIAS COMO ORIGEN Y DIRECCIÓN DEL DISEÑO Y USO DE LA HOJA DE FÓRMULAS

“El hombre crea estímulos artificiales y domina así los propios procesos de su memorización”
Vygotsky, 2012c, p. 79

En línea con lo que plantea el CONFEDI (2014, 2016, 2018) acerca de la enseñanza centrada en el desarrollo de competencias, y en la puesta en práctica de lo mencionado en un trabajo anterior (D'Andrea, 2019a) sobre diseñar de actividades matemáticas en las carreras de Ingeniería desde el Enfoque por Competencias, se propone analizar los alcances y limitaciones de la elaboración y la implementación de una hoja de fórmulas en las clases de Álgebra y Geometría Analítica (AyGA) de la Facultad Regional Avellaneda, Universidad Tecnológica Nacional (FRA-UTN), Argentina.

Basados en la noción vygotskyana de *signo*, los principios que guían el presente trabajo son que el empleo de signos auxiliares interviene entre el campo sensorial y el sistema motor, posibilitando nuevas formas de conducta; las operaciones con signos requieren un vínculo intermedio entre el estímulo y la respuesta, y dicho estímulo (signo) de segundo orden¹ introducido en la operación cumple la función especial de crear una nueva relación: invierte la acción, ya que opera en el individuo y no en el entorno (Vygotsky, 2012a).

El término “introducido” refiere a que el individuo debe estar activamente comprometido a establecer dicho vínculo. De esta manera surge un *acto complejo y mediato*.

Gentiletti (2012), basándose en la psicología cultural, afirma que la toma de apuntes por parte de los estudiantes “colabora en muchos sentidos a la concentración y la percepción discriminada de los elementos centrales del discurso, constituyéndose en la ‘memoria externa’ del desarrollo de una clase” (p. 51).

Durante el año 2019, los docentes de la cátedra AyGA de la FRA-UTN consensuaron proponer a los estudiantes la realización e implementación de una hoja de fórmulas para la instancia evaluativa de las unidades de la materia donde se abordan las nociones de Geometría Analítica: Rectas en el plano, Rectas y Planos en el espacio tridimensional, Cónicas, Superficies (Cuádricas).

Se acordó que el diseño de la hoja tiene la finalidad de incluir todas las fórmulas que se consideren necesarias para la resolución de las actividades que se trabajan en las clases y que puedan colaborar durante la resolución del parcial, a modo de “liberarse” de su memorización (véase el epígrafe de la presente sección).

Desde este acuerdo, un grupo de docentes de la cátedra posicionados en una concepción dialéctica entre enseñanza y aprendizaje como labor conjunta, inmersos en una práctica reflexiva (Perrenoud, 2009; Tobón, 2013) y centrados las competencias de egreso definidas por el CONFEDI (2014, 2016) para las diferentes ingenierías, llevaron a cabo la experiencia de elaborar -en cada curso- el artefacto semiótico en forma colaborativa con el propósito de promover grupalmente el intercambio de visiones personales, poniendo en debate cuáles deben ser los objetos matemáticos por incluir y el modo de formularlos en la hoja.

Entre las competencias genéricas que son la “fuente” desde donde se originan estas actividades, se comprende que las acciones que se desprenderán de estas últimas permiten en forma directa o indirectamente el desarrollo de las primeras. Por ello, se han considerado las competencias sociales,

¹ Para Vygotsky (2012a) la característica central de las funciones elementales es que se encuentran directamente y totalmente determinadas por los estímulos provenientes del entorno, mientras que en las funciones superiores, el rasgo principal es la estimulación autogenerada, la creación y uso de estímulos artificiales que se convierten en las causas inmediatas de la conducta.

políticas y actitudinales que se exponen en la Tabla 1 (CONFEDI, 2014)

Tabla 1 (Competencias genéricas que originan y dirigen la actividad). Fuente: creación propia.

| Competencias genéricas | ¿Cómo se evidencian en la actividad? | | |
|---|--|--|---|
| | Saber | Saber hacer | Saber Ser |
| <p><i>Desempeñarse de manera efectiva en equipos de trabajo:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> * Identificar las metas y responsabilidades individuales y colectivas y actuar de acuerdo a ellas. * Reconocer y respetar los puntos de vista y opiniones de otros miembros del equipo y llegar a acuerdos. * Asumir responsabilidades y roles dentro del equipo de trabajo. | <p>Discutir e intercambiar con las/os cursantes y el docente qué fórmulas deben o no incluirse, fundamentar desde los conocimientos las creencias y percepciones propias ante los demás.</p> | <p>Compartir y reflexionar en grupo cuáles son los alcances o las limitaciones de contar con ellas durante la resolución de problemas.</p> | <p>Participar activamente en el diseño de la hoja de fórmulas, posicionarse en una actitud participativa y colaborativa según lo requiera la propuesta. Socializar las ideas con el equipo, comprender la dinámica del debate, tomar decisiones que integren distintas opiniones y puntos de vista.</p> |
| <p><i>Comunicarse con efectividad:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> * Seleccionar estrategias de comunicación. * Producir e interpretar textos técnicos (...) | <p>Relacionar los objetos matemáticos asociados a las fórmulas, utilizar o no subtítulos, conectar los conocimientos asociados a esas fórmulas.</p> | <p>Expresarse con claridad, de manera concisa y precisa. Utilizar y articular de manera eficaz el lenguaje formal de las fórmulas matemáticas. Identificar las ideas centrales de lo trabajado durante las clases. Contemplar la validez y coherencia de la información seleccionada en la hoja.</p> | <p>Adaptar las estrategias de comunicación a los objetivos pretendidos. Considerar producciones y sugerencias de otras/os compañeros/as y el/la docente.</p> |
| <p><i>Actuar con ética, responsabilidad profesional y compromiso social (...):</i></p> <ul style="list-style-type: none"> * Actuar éticamente. * Actuar con responsabilidad profesional y compromiso social. | <p>Participar activamente en la actualización del saber, comprender la responsabilidad ética en la labor conjunta durante las clases. Comprometerse en las actividades individuales y grupales llevadas a cabo que requiere el acercamiento a los saberes.</p> | <p>Desempeñarse con honestidad e integridad personal ante el diseño y el uso de la hoja de fórmulas. Reconocer los aportes y sugerencias de otras/os compañeros/as y docente.</p> | <p>Respetar los compromisos asumidos, respecto a las pautas acordadas y plazos establecidos en las tareas.</p> |
| <p><i>Aprender en forma continua y autónoma:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> * Reconocer la necesidad de un aprendizaje | <p>Reconocer que a pesar de contar con las fórmulas, es necesario</p> | <p>Detectar durante el diseño las debilidades en el propio aprendizaje y encontrar los mecanismos o recursos para</p> | <p>Lograr autonomía en el aprendizaje, poder autoevaluarse y buscar ayuda en otras</p> |

| | | | |
|--|---|--|---|
| continuo (...) * Lograr autonomía en el aprendizaje. | comprender los saberes. | actualizar o profundizar los conocimientos. Recurrir a estrategias personales de formación, evaluar el propio desempeño y explorar más allá de las áreas del conocimiento trabajadas en el aula. | personas o mediante medios diversos (libros, Internet u otros). |
| <i>Actuar con espíritu emprendedor:</i> * Crear y desarrollar una visión. * Crear y mantener una red de contactos. | Reconocer en la hoja de fórmulas una posibilidad de crear un instrumento semiótico propio como consecuencia de una labor conjunta en el aula. | Autoevaluarse en el diseño y el uso de la hoja identificando fortalezas, debilidades y potencialidades. Tomar decisiones en contextos de incertidumbre y ambigüedad (porque no se sabrá qué ayuda brindará el artefacto durante el examen). | Actuar proactivamente, autoevaluarse y asumir riesgos. Crear y fortalecer relaciones de confianza y cooperación en el grupo. |

Para tales fines, se comparte en el aula virtual del curso un documento con algunas de las fórmulas a incluir, se vuelve sobre ella en las clases para discutir sobre la comprensión y el posible uso de las anotaciones. Es imprescindible, como afirma Gentiletti (2012), que el diseño se realice en forma paulatina, guiada y grupal, no refleje sólo la voz del docente sino la construcción compartida del conocimiento, porque de esta manera se “favorece la concientización de las producciones discursivas de todos y (...) mejora la capacidad de atención y escucha entre compañeros” (p. 51).

Una de las cuestiones que reguló el trabajo fueron las restricciones que se plantearon desde la cátedra frente a la propuesta, y se explicitaron en las aulas en forma de interrogantes para la discusión entre docentes y estudiantes: ¿cuál es toda la información que podemos incluir en la hoja? ¿Se pueden agregar ejemplos? ¿Pueden o deben escribirse todas y cada una de las fórmulas que se trabajan? ¿Es posible ampliar las fórmulas con definiciones y/o propiedades?

Mercer (1997) afirma que “la información se puede acumular, pero el conocimiento y la comprensión sólo se generan trabajando con la información, seleccionándola, organizándola y discutiendo su importancia” (citado en Gentiletti, 2012, p. 53), y propone estimular en la clase distintos tipos de conversación, como por ejemplo la *conversación exploratoria* que permite generar interacciones discursivas en las prácticas educativas fomentando la construcción compartida y crítica del conocimiento:

La información que se pone a disposición del grupo no es para hacer ostentación del saber, sino justamente para la evaluación conjunta de su pertinencia y fiabilidad. Las propuestas de los compañeros pueden ser tanto confirmadas como refutadas por el resto, pero el aspecto diferencial es que se deben explicitar las razones de una u otra opción, a la vez que ofrecer alternativas. El propósito deja de centrarse en cada uno, o en lo personal, para lograr el acuerdo conjunto en relación con las ideas que se van construyendo. (Gentiletti, 2012, p. 54)

Entre los acuerdos logrados, se mencionan:

- Deberían escribirse aquellas fórmulas que fueron novedosas en el aprendizaje de los contenidos de la materia, omitiendo aquellas que eran “conocidas” (tales como el Teorema de

Pitágoras, las razones trigonométricas, propiedades de potenciación y radicación, definición y propiedades del valor absoluto de un número real, definición, propiedades y operaciones entre vectores, métodos de resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales y Mixtos).

- Elegir un orden de las fórmulas que orienten mejor su búsqueda (por ejemplo, inicialmente las referidas a Rectas, luego a Planos, luego a Cónicas, y finalmente a Superficies).
- Generalizar algunas fórmulas a modo de contemplar todos los casos posibles de signos o valores de las variables.

3. ANÁLISIS DEL INSTRUMENTO SEMIÓTICO COMO “MEMORIA EXTERNA”

*“Esto es un hecho, y, como sabemos, los hechos son difíciles de refutar”
Vygotsky, 1934/1995, p. 210*

La implementación de la hoja de fórmulas, como recurso didáctico construido en forma colaborativa en clase, es posible analizarlo desde dos niveles como artefacto semiótico (Radford, 2018 citado en D’Andrea, 2019b): un *nivel objetivo* o *conceptual*, referido a las relaciones entre signos que provienen de la manera en que los conceptos matemáticos están relaciones entre sí; y un *nivel vivencial* o *subjetivo*, que tiene que ver con la relación subjetiva con la Matemática y a los signos que van dejando traza de ella.

En el apartado anterior, se ha iniciado con la descripción objetiva de la hoja de fórmulas, a la cual se debe completar mencionando que en general las hojas diseñadas daban cuenta de una desconexión entre los bloques temáticos (véase ANEXO donde se comparte una extracto de la hoja de fórmulas diseñada conjuntamente). Se pudo observar cómo se diferenciaron las fórmulas encuadrándolas en sectores, generando la poca funcionalidad que podría brindar escribir un esquema (por ejemplo: una red conceptual, diagrama de Venn, cuadro sinóptico) para repensar qué fórmulas de cónicas reaparecen en superficies, cómo algunas fórmulas de rectas en el plano se extienden a rectas en el espacio tridimensional, porqué diferenciar y remarcar las diferencias en fórmulas en los distintos espacios, entre otras relaciones que propician mayor comprensión y conocimiento de los saberes.

Para describir un análisis vivencial del artefacto, se llevó adelante una encuesta a 101 estudiantes de cuatro cursos distintos en los que se implementó la propuesta.

Considerando que si bien la hoja de fórmulas se armó inicialmente en grupo, para la instancia de parcial se acordó que podría cada estudiante realizar algún agregado y/o modificación – que sin salirse de lo acordado – pueda *personalizar* el instrumento. De esta manera, una de las preguntas de la encuesta fue si se realizaron modificaciones a la hoja grupal, obteniéndose 63% con respuesta afirmativa. Entre las razones de esta elección, se comparten: “considero que faltaban algunas fórmulas”, “rescribir alguna de ellas cambiando el nombre de parámetros o variables”, “expresar otros despejes de las fórmulas dadas”.

Frente al interrogante sobre la utilidad del material en el parcial, un 85% responde afirmativamente y, dentro del 15% de la respuesta negativa, algunos comentarios realizados fueron: “con lo practicado ya recordaba las fórmulas”, “no la necesité porque me había preparado bien para el examen”, “fue útil para superficies, el resto no lo pude utilizar porque no logré comenzar a desarrollar los ejercicios por su dificultad”, “no pude resolver el parcial”.

Tratando de enumerar motivos similares ante la respuesta afirmativa a la utilidad del artefacto y en función al epígrafe del presente apartado, se han reconocido al menos siete razones significativas que se comparten en la Figura 2.

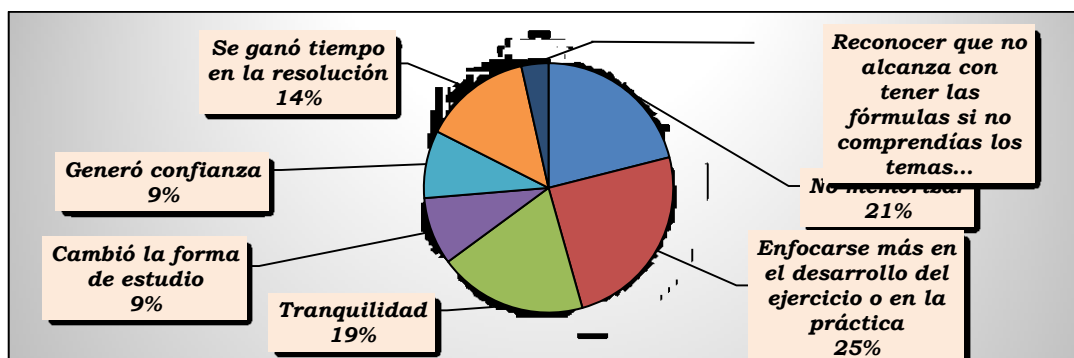


Ilustración 2 (Comparación entre los motivos de la respuesta afirmativa por la utilidad de la hoja de fórmulas sobre 57 (cincuenta y siete) respuestas). Fuente: creación propia.

4. CONCLUSIONES

“Es el propio hombre el que determina su comportamiento con ayuda de estímulos-medios artificialmente creados”
Vygotsky, 2012c, p. 77

4.1 Acerca del desarrollo de competencias y los constructos vygotskyanos

Haber elegido una perspectiva sociocultural como marco teórico, que acompaña el desarrollo de competencias, se sustenta en uno de los orígenes del concepto de competencia que Tobón (2006) recupera de la psicología cultural cuyo principal representante es Vygotsky: “acciones situadas que se definen en relación con determinados instrumentos mediadores” (p. 3).

La implementación de una hoja de fórmulas como artefacto semiótico de “memoria externa” responde al *principio de la significación* que describe Vygotsky (2012c) al considerar que cuando “el hombre introduce estímulos artificiales, confiere significado a su conducta y crea con la ayuda de los signos, actuando desde fuera, nuevas conexiones en el cerebro” (p. 85) influyendo en el comportamiento.

Se puede observar que el uso del instrumento orientador, cuando es introducido (en el sentido vygotskyano y según el epígrafe de esta sección) en la actividad por parte del estudiante, reestructura los procesos psicológicos superiores de los sujetos tales como la memoria, la atención voluntaria, la percepción (Vygotsky, 2012a-2012c).

La actualización de los saberes matemáticos asociados al Álgebra y Geometría Analítica, en particular el conocimiento de las nociones geométricas que se trabajan, que Vygotsky (2012d) denomina proceso de enraizamiento (“interiorización” de las operaciones con signos) no es puramente mecánico, no se efectúa automáticamente. Se trata de un proceso complejo y mediato que inicialmente surge en el proceso de cooperación e interacción social, debido a que las funciones psicológicas superiores tienen al principio un carácter de actividad exterior (proceso interpsicológico), “el signo es, por regla general, un estímulo auxiliar externo, un medio externo de autoestímulo” (Vygotsky, 2012d, p. 79).

4.2 Respeto al diseño y uso de la hoja de fórmulas

Se concluye que es imprescindible diseñar la hoja de fórmulas en una labor conjunta que responda a esa primera noción de objetivación: la *objetivación del saber* consiste en reconocer que un objeto (no sólo objetos materiales sino también el sistema de ideas científicas, artísticas, médicas, u otras) nos ob-jeta, porque no es el resultado de nuestras acciones, responde a la labor de las generaciones que nos preceden, y está impregnado de significados, y para reconocer esa “inteligencia” depositada en el objeto, Radford (2014) afirma que es necesario pasar por la objetivación definida como “el proceso social, corpóreo y simbólicamente mediado de toma de conciencia y discernimiento crítico de formas de expresión, acción y reflexión constituidas históricamente y culturalmente” (p. 141).

Para lograr la interiorización, la propia operación con signos varía, dejando de ser externa para transformarse en una capa intrapsicológica nueva, una complicada reorganización de toda la estructura de las funciones psicológicas. Vygotsky (2012c) describe tres tipos de arraigo, que podemos ejemplificarlos con el análisis objetivo y subjetivo de la implementación de la hoja de fórmulas mencionado anteriormente.

Un primer tipo de interiorización se denomina “arraigo tipo sutura”, pensando en la sutura del tejido vivo mediante un hilo que luego cicatrizará, y el hilo provisorio se extrae. Se entiende que diseñar una hoja con las fórmulas bajo un título o subtítulo, ordenadas, diferenciadas y sin conexión separadas por cuadros son ejemplos de esa “sutura” conceptual de los saberes. La pregunta que surge entonces e invita a reflexionar es: ¿durante la resolución de ejercicios, se ha podido “quitar” ese hilo provisorio?

El segunda tipo de arraigo se lo llama “arraigo completo” y refiere al paso de la operación donde se borra la diferencia entre los estímulos externos y los internos. En la presente experiencia puede reconocerse esta interiorización, cuando las/os estudiantes expresan que no recurrieron a la hoja de fórmulas, porque las recordaban y podían aplicarlas sin temor a cometer errores. El interrogante que se desprende, para profundizar en la propuesta, es: ¿se trata de una “simple memorización” de la fórmula o se ha alcanzado la comprensión y conocimiento de la misma?

Y el tercer tipo de arraigo se describe como “asimilación de la propia estructura del proceso”, donde se reconocen las reglas de utilización de los signos externos, se materializa el conocimiento de la propia estructura de estos últimos. En el presente caso, puede percibirse esta interiorización en respuestas tales como no alcanza con tener las fórmulas, es necesario haber logrado el conocimiento de los saberes, era necesario establecer mayor conexión entre las distintas fórmulas porque los temas están íntimamente relacionados, puedo no recurrir a la hoja porque no sólo recuerdo algunas de ellas sino que podría deducir las que no recuerde.

4.3 Sobre fortalecer la experiencia

Finalmente, a través del presente trabajo se ha podido “mover” de la comunicación a la metacomunicación: “del ‘aprender sobre las cosas’ al ‘aprender sobre el aprender’” (Gvartz y Palamidessi, 2014, p. 128). En efecto, debido a ello, para mejorar futuras implementaciones de hojas de fórmulas que pueda abarcar mayor número de competencias genéricas: “competencias tecnológicas” (CONFEDI, 2014-2016), se propone:

- Trabajar el diseño de la hoja colaborativamente desde el inicio de clases, implementando

mejores herramientas tecnológicas a través del aula del Campus Virtual de FRA-UTN: Google Drive, Padlet, Cmap Tools, Google Drawings, Wikis, VoiceThread, entre otros escenarios colaborativos posibles; con el fin de organizar una sesión en la que cada integrante pueda, de manera libre, compartir ideas y visualizar relaciones entre ellas. Asimismo, trabajar en un documento donde se posibilite editar, comentar, consultar, negociar conceptos y poder reconocer cambios a medida que transcurre el tiempo.

- Proponer e incentivar a realizar diferentes modelos de hojas de fórmulas: mapas conceptuales, red conceptual, cuadro sinóptico, cuadros de doble entrada; que permitan y fortalezcan las conexiones (o no) entre los saberes.
- Revisar y reformular (en caso de requerirse) las estrategias didácticas y los materiales didácticos como las guías teórico-prácticas de la cátedra, de manera tal que se orienten en la misma dirección sobre la integración genuina de los saberes, superen las desconexiones con que suelen trabajarse las unidades temáticas de la materia, en particular el bloque referido a la Geometría Analítica.

BIBLIOGRAFÍA

- Baquero, R. (1997). *Vygotsky y el aprendizaje escolar*. Buenos Aires: Aique Grupo Editor.
- Baquero, R. y Limón Luque, M. (2014). *Introducción a la psicología del aprendizaje escolar*. Bernal: UNQ Editorial.
- CONFEDI (2014). *Competencias en ingeniería*. Argentina: Universidad FASTA.
- CONFEDI (2016). *Competencias y perfil del Ingeniero Iberoamericano, formación de profesores y desarrollo tecnológico e innovación*. Bogotá, Colombia: ASIBEI.
- CONFEDI (2018). *Propuesta de estándares de segunda generación para la acreditación de carreras de ingeniería en la república argentina - Libro rojo*. Argentina: CONFEDI.
- D'Andrea, L. J. (2019a). Un diseño de actividades matemáticas para el desarrollo de competencias en las carreras de Ingeniería. *Revista digital El enfoque por competencia en las Ciencias Básicas (CIIE – CONFEDI)*, 1: 125-136.
- D'Andrea, L. J. (2019b). El rol dinámico de una hoja de signos en la actividad matemática. *Novedades Educativas*, 344: 62-68.
- Daniels, H. (2003). *Vygotsky y la pedagogía*. Buenos Aires: Editorial Paidós.
- Hernández Rojas, G. (1988). *Paradigmas en psicología de la educación*. México: Paidós.
- Moll, L. (1993). *Vygotsky y la educación*. España: Aique Grupo Editor.
- Perrenoud, P. (2009). Enfoque por competencias ¿una respuesta al fracaso escolar? *Pedagogía Social. Revista Interuniversitaria*, 16: 45-64.
- Radford, L. (2000). Sujeto, objeto, cultura y la formación del conocimiento. *Educación Matemática*, 12(1): 51-69.
- Radford, L. (2006). Semiótica cultural y cognición. En R. Cantoral y O. Covián (eds.), *Investigación en Matemática Educativa en Latinoamérica*. México.
- Radford, L. (2014). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(2): 132-150.
- Radford, L. y D'Amore, B. (2017). *Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos*. Bogotá: UFD Editorial.
- Tobón, S. (2006). *Aspectos básicos de la formación basada en competencias*. Talca: Proyecto Mesesup.
- Tobón, S. (2013). *Formación integral y competencias*. (4ta. Ed.). Bogotá: ECOE.
- Vygotsky, L. S. (1934/1995). *Pensamiento y lenguaje*. Buenos Aires: Editorial Paidós.
- Vygotsky, L. S. (2012a). *El desarrollo de los Procesos Psicológicos Superiores*. Barcelona (España): Austral.
- Vygotsky, L. S. (2012b). *Obras escogidas – III*. Madrid (España): Machado Libros.
- Vygotsky, L. S. (2012c). *Obras escogidas – IV*. Madrid (España): Machado Libros.
- Vygotsky, L. S. (2012d). *Obras escogidas – VI*. Madrid (España): Machado Libros.

Wertsh, J. (1988). *Vygotsky y la formación social de la mente*. Buenos Aires: Paidós.

ANEXO

RECTAS EN EL PLANO (R^2):

| | | |
|---|--|--|
| Implícita: $Ax + By + C = 0$ | Explícita: $y = mx + b$ | Segmentaria: $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ |
| Paramétrica vectorial $(x; y) = (x_0; y_0) + \lambda(d_1; d_2)$ | Paramétrica cartesiana $\begin{cases} x = x_0 + \lambda d_1 \\ y = y_0 + \lambda d_2 \end{cases}$ | Simétrica: $\frac{x-x_0}{d_1} = \frac{y-y_0}{d_2}$ |
| Distancia de punto a recta $Dist(P_0; r) = \frac{ Ax_0 + By_0 + C }{\sqrt{A^2 + B^2}}$ | Ángulo entre dos rectas $\text{áng}(r; s) = \text{áng}(\vec{d}_s; \vec{d}_r)$ o $\text{áng}(\vec{n}_s; \vec{n}_r)$ | Haz de rectas $(Ax + By + C) + \lambda(A'x + B'y + C') = 0$ |

PLANO (R^3):

| | |
|--|--|
| Implícita: $Ax + By + Cz + D = 0$ | Segmentaria: $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1$ |
| Paramétrica vectorial $(x; y; z) = (x_0; y_0; z_0) + \alpha(a_1; a_2; a_3) + \beta(b_1; b_2; b_3)$ | Paramétrica cartesiana: $\begin{cases} x = x_0 + \alpha a_1 + \beta b_1 \\ y = y_0 + \alpha a_2 + \beta b_2 \\ z = z_0 + \alpha a_3 + \beta b_3 \end{cases}$ |
| Haz de Planos: $(Ax + By + Cz + D) + \lambda(A'x + B'y + C'z + D') = 0$ | |
| Distancia de punto a plano: $Dist(P_0; pl) = \frac{ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D }{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ | Ángulo entre dos planos: $\text{áng}(\alpha; \beta) = \text{áng}(\vec{n}_\alpha; \vec{n}_\beta)$ |

RECTAS EN EL ESPACIO (R^3):

| | | |
|---|---|---|
| Paramétrica vectorial: $r: (x; y; z) = (x_0; y_0; z_0) + \lambda(d_1; d_2; d_3)$ | Paramétrica Cartesiana: $r: \begin{cases} x = x_0 + \lambda d_1 \\ y = y_0 + \lambda d_2 \\ z = z_0 + \lambda d_3 \end{cases}$ | Simétricas: $r: \frac{x-x_0}{d_1} = \frac{y-y_0}{d_2} = \frac{z-z_0}{d_3}$ |
| Intersección de dos planos: $r: \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$ | | |
| $Dist(P_1; r) = \frac{\ P_0 P_1 \times \vec{a}\ }{\ \vec{a}\ }$ (distancia de punto a recta) | | |
| $Dist(r; s) = \frac{ P_s P_r \cdot (\vec{d}_s \times \vec{d}_r) }{\ \vec{d}_s \times \vec{d}_r\ }$ (distancia entre rectas alabeadas) / Coplanares o alabeadas: Rango $(\vec{P}_s \vec{P}_r, \vec{d}_s, \vec{d}_r)$ | | |
| $\text{áng}(r; s) = \text{áng}(\vec{d}_s; \vec{d}_r)$ (ángulo entre rectas) | | |
| $\text{áng}(r; \alpha) = \arcsen \frac{ \vec{d}_s \cdot \vec{n}_\alpha }{\ \vec{d}_s\ \ \vec{n}_\alpha\ }$ (ángulo entre recta y plano) | | |

CÓNICAS (R^2): Ecuación General: $Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$

| | |
|--|--|
| Circunferencia: $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ | Parábola: $(x-h)^2 = \pm 2p(y-k)$ $(y-k)^2 = \pm 2p(x-h)$ Lado recto: $2p$ |
| Elipse: $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ o $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ $a^2 = b^2 + c^2$ Lado recto: $\frac{2b^2}{a}$ Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$ Dist. entre directrices: $\frac{2a}{e}$ | Hipérbola: $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ o $-\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ $c^2 = a^2 + b^2$ Lado recto: $\frac{2b^2}{a}$ Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$ Dist. entre directrices: $\frac{2a}{e}$ |

SUPERFICIES (R^3): (...)