



# Desarrollo de un simulador 3D para propagación de ondas en medios porosos

por Nuria Sarochar

Directora: Dra. Patricia M. Gauzellino

**Tesis de Grado para obtener el título en Geofísica**

Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas

Universidad Nacional de La Plata

Abril 2020

Firma y aclaración de la directora:

Firma y aclaración de uno de los jurados:



---

# Índice

<b>1. Teoría de Biot</b>	<b>3</b>
1.1. Hipótesis . . . . .	3
1.2. Variables Elementales . . . . .	4
1.3. Análisis Energético . . . . .	5
1.4. Ecuaciones de Movimiento . . . . .	7
1.4.1. Solución de las ecuaciones de movimiento . . . . .	9
1.4.2. Ondas Compresionales . . . . .	9
1.4.3. Ondas de Corte . . . . .	10
1.5. Rango de las altas frecuencias. . . . .	11
1.6. Cómo Incluir la Atenuación . . . . .	12
<b>2. Método de Elementos Finitos.</b>	<b>15</b>
2.1. Planteo del Problema. . . . .	15
2.2. Formulación Variacional del Problema. . . . .	15
2.3. Aproximaciones de Galerkin. . . . .	16
2.4. Funciones de Forma o Interpolación. . . . .	18
2.5. Cálculo de Elementos Finitos. . . . .	22
2.6. Precisión de las aproximaciones por Elementos Finitos. . . . .	23
<b>3. Ecuaciones de Biot en una Dimensión.</b>	<b>25</b>
3.1. Ecuaciones de Biot. . . . .	25
3.2. Forma variacional o débil. . . . .	26
3.3. MEF. Problema algebraico. . . . .	28
3.4. Ejemplo para una muestra Homogénea. . . . .	32
3.5. Ejemplo para un modelo de dos capas. . . . .	33
3.6. Ejemplo para un medio con fluido efectivo. . . . .	35
<b>4. Ecuaciones de Biot en Dos Dimensiones.</b>	<b>39</b>
4.1. Ejemplo para un Medio Homogéneo . . . . .	39
4.2. Ejemplo para un Medio con Fluido Efectivo. . . . .	40
<b>5. Ecuaciones de Biot en Tres Dimensiones.</b>	<b>45</b>
5.1. Formulación del Modelo Diferencial. . . . .	45
5.1.1. Condiciones de Borde Absorbentes. . . . .	45
5.2. Formulación por Elementos Finitos. . . . .	46
5.2.1. Forma Variacional. . . . .	46
5.2.2. Partición del Dominio y Funciones Base. . . . .	47
5.3. Paralelización del Código. . . . .	52
5.4. Ejemplo de Aplicación. . . . .	53
<b>6. Conclusiones</b>	<b>57</b>
<b>7. Anexo</b>	<b>59</b>
7.1. Testeos con las Funciones de Prueba. . . . .	59
7.2. Actualización de los Multiplicadores de Lagrange . . . . .	83
7.3. Coeficientes de la matriz . . . . .	86
7.4. Incorporación de las Condiciones de Borde. . . . .	91

---

## Resumen.

El estudio de medios porosos es relevante en geofísica de exploración y desarrollo, ya que en formaciones hidrocarburíferas sus poros se encuentran saturados por el petróleo y el gas. Asimismo, este tipo de medios son usados en análisis geotécnicos y ambientales, por ejemplo al caracterizar la calidad de los suelos, contaminación de acuíferos, secuestro de  $\text{CO}_2$  en el subsuelo, etc. En otro orden de ideas, en biomecánica, huesos humanos y de animales también se representan como un material de alta porosidad con sangre y médula en los poros.

Para describir la propagación de ondas en medios porosos puede ser usada la teoría de Biot, entendiendo por medio poroso el formado por una matriz sólida cuyos poros pueden estar saturados totalmente por alguna fase fluida.

El objetivo del trabajo es desarrollar un simulador 3D para propagación de ondas en medios porosos descritos por las ecuaciones de Biot, usando el método numérico de elementos finitos y computación de alto rendimiento.

En el Capítulo 1 se presenta la teoría de Biot, pues es necesario su estudio y comprensión para caracterizar el medio. Si bien en el rango de frecuencias sísmicas hubiera bastado el uso de la teoría de Gassmann, se elige la formulación más general de Biot que permite trabajar también en altas frecuencias, incluyendo la presión y contenido de fluido. Al tener en cuenta la posibilidad de movimiento en sentido opuesto entre sólido y fluido, da lugar a la propagación de una segunda onda compresional, llamada onda P lenta de Biot. Por lo tanto, pueden propagarse tres modos de onda, los modos clásicos de onda compresional P (onda rápida) y onda de corte S, y la onda lenta de Biot.

El estudio del método de elementos finitos para resolver ecuaciones diferenciales se expone en el Capítulo 2. Su aplicación se realiza en el Capítulo 3, resolviendo las ecuaciones de Biot en una sola dimensión y desarrollando un código Fortran al implementarlo computacionalmente. Se trabaja en el dominio espacio-frecuencia, ya que de esta manera se puede incluir de manera natural los parámetros que gobiernan fenómenos de dispersión y atenuación del medio, dando lugar a modelos más realistas. Se muestran resultados para una arenisca saturada con agua y las diferencias cuando la fase fluida corresponde a un fluido efectivo de agua y gas, donde la saturación del gas va cambiando.

El uso y conocimiento del simulador bidimensional preexistente, se plasma en el Capítulo 4. Numéricamente, se realiza una descomposición de dominio combinada con el empleo de elementos finitos no conformes. La particularidad de estos elementos finitos es que los puntos nodales se ubican en el centro de los lados de los elementos y no en sus vértices. Al dividir el dominio en subdominios no solapados, las ecuaciones se plantean independientemente en cada uno de ellos. La vinculación del elemento con sus vecinos se realiza vía las condiciones de borde de Robin que dan cuenta de la continuidad de los desplazamientos y las tensiones en los nodos de la malla de elementos finitos. Esta forma de trabajo evita la construcción, almacenaje y solución de un sistema de ecuaciones lineales de gran tamaño asociado a la técnica global de elementos finitos. Los ejemplos de este simulador 2D tienen en cuenta el mismo medio empleado en el caso unidimensional.

En el Capítulo 5 se implementa el modelado para las ecuaciones de Biot en 3D. Realizando una extensión de lo ya hecho en 2D, es decir, descomposición de dominio y elementos finitos no conformes; se escribe la forma variacional, se particiona el dominio usando hexaedros y se integra en forma exacta. Realizado el problema algebraico se implementa un código computacional. El número de incógnitas y cantidad de variables involucradas en el problema, hace obligatoria la ejecución del código en máquinas con

arquitectura en paralelo. Por lo tanto, se lleva a cabo también, la adecuación de la resolución en paralelo desde el 2D al 3D. De igual manera que en los casos anteriores y a modo de contralor, el ejemplo del simulador 3D corresponde a la misma arenisca saturada.

# 1. Teoría de Biot

Una onda sísmica es una perturbación que se propaga a través de la Tierra. Hay varias clases de ondas, entre las principales cabe nombrar las ondas primarias y secundarias. Las ondas primarias, llamadas también ondas  $P$ , son las ondas de mayor velocidad. Estas ondas producen una perturbación en el sentido de la propagación, por lo que son ondas compresionales. Al ser las de mayor velocidad, son las primeras en ser vistas en un registro. Las llamadas ondas  $S$  o secundarias llegan luego de las ondas  $P$  ya que su velocidad es menor. Estas ondas tienen la propiedad de producir una perturbación transversal a la dirección de propagación, y es por ello que son ondas de corte.

Las ondas sísmicas se pueden observar en un estudio sísmico, colocando una fuente, como puede ser un explosivo o un camión vibrador y a una cierta distancia un geófono, o varios de ellos a distintas distancias. Un geófono es un dispositivo electrónico que recibe la señal de la onda emitida por la fuente, y genera una respuesta, que luego es posible mejorar a través de procesos computacionales, e interpretar en último lugar.

Es de interés científico estudiar la propagación de ondas sísmicas en medios porosos. En particular, los yacimientos de hidrocarburos que corresponden a medios porosos saturados por agua, gas y/o petróleo.

Una teoría utilizada para describir medios porosos, es la teoría propuesta por M. A. Biot (Biot, 1956 a, 1956 b y 1962). En la misma se considera un sistema compuesto de una matriz sólida, elástica y porosa, saturada por un fluido viscoso. El fluido se considera compresible y fluye de manera relativa a la matriz sólida, causando fricción con el sólido. Se asume también que los poros de la matriz son de dimensiones similares, y que sus paredes son impermeables. Con esta descripción se predice una onda rotacional  $S$  y dos ondas compresionales llamadas onda  $P_1$  rápida y onda  $P_2$  lenta. La primera de ellas corresponde a la onda clásica compresional y la onda  $P_2$  se debe al desfase en el movimiento entre el fluido y la matriz sólida. A frecuencias bajas el movimiento relativo del fluido dentro de los poros es del tipo de Poiseuille, mientras que a altas frecuencias se debe realizar una corrección a la viscosidad.

A lo largo de este capítulo, se seguirá lo expuesto por Solazzi en su tesis doctoral (Solazzi, 2018).

## 1.1. Hipótesis

Las hipótesis en las que se basa la teoría de Biot son las siguientes:

- La matriz sólida es porosa, continua, elástica e isotrópica.
- Los desplazamientos de la fase sólida y fluida son muy pequeños. Debido a esto, las formulaciones Eulerianas y Lagrangianas coinciden hasta el primer orden. Esto es válido ya que las deformaciones producidas por el paso de una onda sísmica son menores a  $10^{-6}$  de la unidad usada.
- Es posible aplicar principios de la mecánica de medios continuos para definir variables macroscópicas.
- La longitud de onda es mucho mayor que las dimensiones de los volúmenes elementales empleados en la formulación de un medio continuo para definir las variables macroscópicas.

- Las condiciones termodinámicas son adiabáticas.
- La fase fluida es continua y la distribución de tensiones dentro del fluido puede ser considerada hidrostática.
- No existen acoplamientos termomecánicos.

Una clara y detallada presentación de esta teoría se encuentra en la tesis doctoral de S. Solazzi, 2018.

## 1.2. Variables Elementales

Considérese un volumen elemental  $\Omega$  de material poroso saturado que posee un tamaño mucho mayor al tamaño característico de los poros y granos del sólido, pero mucho más pequeño que las longitudes de ondas sísmicas predominantes. Se define la porosidad en el espacio como la relación entre el volumen de los poros  $V_p$  y el volumen total  $V$  de  $\Omega$ .

$$\phi(x) = \frac{V_p}{V} \quad (1.1)$$

Sean  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  el desplazamiento promedio de las partículas de la matriz sólida del volumen elemental para un tiempo  $t$ , y  $\mathbf{u}^f(\mathbf{x}, t)$  el desplazamiento promedio de la fase fluida, como ambos deben entenderse como un desplazamiento equivalente, es posible definir el vector desplazamiento del fluido con respecto al sólido como:

$$\mathbf{w} = \phi(\mathbf{u}^f - \mathbf{u}). \quad (1.2)$$

En la teoría de elasticidad lineal, el tensor de deformaciones de la matriz sólida está dado por

$$\epsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1.3)$$

A su vez, el tensor de tensiones totales  $\boldsymbol{\tau}$  tiene en cuenta tanto las tensiones actuantes sobre la fase sólida como las de la fase fluida,

$$\boldsymbol{\tau} = (1 - \phi)\boldsymbol{\tau}^s - \phi p_f \mathbf{I}, \quad (1.4)$$

donde  $p_f$  es el cambio de presión del fluido poral debido a la perturbación generada por el paso de la onda sísmica,  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad, y  $\boldsymbol{\tau}^s$  es el tensor de tensiones de la matriz sólida. Si  $\Gamma$  determina la frontera del volumen  $\Omega$ , a partir del teorema de la divergencia, es posible escribir

$$\int_{\Gamma} \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\nu} dS = \int_{\Omega} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{w} dV, \quad (1.5)$$

donde  $\boldsymbol{\nu}$  es el versor normal unitario exterior a  $\Gamma$ , y  $dS$  un diferencial de superficie. Si el volumen  $V$  es suficientemente pequeño como para considerar  $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{w}$  constante en  $\Omega$ , la ecuación (1.5) resulta

$$\frac{1}{V} \int_{\Gamma} \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\nu} dS \simeq \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{w}. \quad (1.6)$$

Puede verse que  $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{w}$  es una medida del cambio de contenido del fluido por unidad de volumen. El cambio local en contenido de fluido poral  $\xi$  se define como

$$\xi = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{w}. \quad (1.7)$$



Estas definiciones son las que conforman las variables de la teoría de Biot. Analizando la expresión de la energía elástica de deformación del medio poroso saturado, es posible relacionar el tensor de tensiones, el tensor de deformaciones, la presión del fluido poral y el cambio en el contenido del fluido.

### 1.3. Análisis Energético

El planteo realizado por Biot hace uso de la formulación Lagrangiana. Dado que ésta formulación se basa en estados de energía, es necesario hacer un análisis energético del fenómeno físico para poder determinar las ecuaciones de movimiento.

La perturbación dada por una onda sísmica se produce en un lapso de tiempo muy breve, y por consiguiente, se puede considerar que no hay intercambio de calor con el medio. Es posible asumir la existencia de un potencial volumétrico interno  $W$  cuya variación representa el trabajo por unidad de volumen necesario para deformar la roca en una transformación infinitesimal macroscópica. Este potencial volumétrico es la densidad de energía elástica de deformación del medio, y depende de las componentes del tensor de deformaciones y del cambio de contenido en fluido. Su variación responde a una forma diferencial exacta,

$$dW = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} d\epsilon_{ij} + \frac{\partial W}{\partial \xi} d\xi. \quad (1.8)$$

El primer miembro de la ecuación (1.8) corresponde al trabajo generado por deformación macroscópica a contenido de fluido constante, y el segundo termino se asocia al trabajo generado por un incremento de fluido a deformación macroscópica fija. Luego, según el principio de los trabajos virtuales,

$$\tau_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}}, \quad (1.9)$$

$$p_f = \frac{\partial W}{\partial \xi}. \quad (1.10)$$

Para continuar con el desarrollo, es preciso encontrar una expresión para  $W$  en función de los desplazamientos de la fase sólida y fluida. La densidad de energía elástica de deformación  $W$  es una función escalar e isótropa, y por lo tanto, depende de la deformación propiamente dicha, y no de la rotación del sistema. Por lo tanto, la densidad de energía es una función de los invariantes del tensor de las deformaciones  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ , y del cambio de contenido en fluido  $\xi$ . En la teoría de Biot se considera que la relación entre esfuerzo y deformación es lineal, y por ello, las energías deben ser formas cuadráticas. Luego,  $W$  depende solamente de  $\xi$  y de los invariantes lineal  $I_1$  y cuadrático  $I_2$  del tensor de deformaciones. Es decir,

$$I_1 = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} \quad (1.11)$$

$$I_2 = \epsilon_{xx}\epsilon_{yy} + \epsilon_{xx}\epsilon_{zz} + \epsilon_{zz}\epsilon_{yy} - \epsilon_{xy}\epsilon_{yx} - \epsilon_{xz}\epsilon_{zx} - \epsilon_{yz}\epsilon_{zy} \quad (1.12)$$

Luego, se deriva que la densidad de la energía elástica en la teoría de la poroelasticidad, según el trabajo de Biot de 1962 es

$$2W = (\lambda_c + 2\mu)I_1^2 - 4\mu I_2 - \alpha M I_1 \xi + M \xi^2, \quad (1.13)$$

donde  $\lambda_c$ ,  $\mu$ ,  $\alpha$  y  $M$  son constantes a determinar. Usando la ecuación (1.13) en (1.9) y (1.10), es posible obtener las relaciones constitutivas para un medio poroso.

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu\boldsymbol{\epsilon} + \mathbf{I}(\lambda_c \nabla \cdot \mathbf{u} - \alpha M \xi), \quad (1.14)$$

$$p_f = -\alpha M \nabla \cdot \mathbf{u} + M \xi. \quad (1.15)$$

Es posible ver que las tensiones y la presión se relacionan con las deformaciones y el incremento en el contenido de fluido a través de las cuatro constantes  $\lambda_c, \mu, \alpha$  y  $M$ . El coeficiente  $\mu$  es el módulo de corte clásico del medio poroso saturado, que es igual al módulo de corte de la matriz seca  $\mu_m$ . El coeficiente  $\lambda_c$  es la constante de Lamé en un estado donde no hay intercambio de fluido con el entorno.  $M$  es el coeficiente de Biot, y denota el incremento de la presión del fluido en respuesta a un aumento del contenido de fluido de una unidad, a deformación constante. El coeficiente  $\alpha$  es el coeficiente de Biot-Willis, y cuantifica la relación entre la variación en el contenido de fluido y la deformación macroscópica para un sistema abierto, donde un fluido puede escapar libremente. En definitiva, puede escribirse (Carcione, 2014)

$$\alpha = 1 - \frac{K_m}{K_s}, \quad (1.16)$$

$$\lambda_c = K_m + \alpha^2 M - \frac{2}{3} \mu, \quad (1.17)$$

$$M = \left( \frac{\phi}{K_f} + \frac{\alpha - \phi}{K_s} \right)^{-1}, \quad (1.18)$$

donde  $K_f, K_s$  y  $K_m$  son los módulos de volumen o de *bulk* del fluido, del material que compone la matriz, y de la matriz seca, respectivamente.

Empleando las relaciones constitutivas (1.14) y (1.15) en la ecuación (1.13), se puede ver que

$$W = \frac{1}{2} \left( \sum_i \sum_j \tau_{ij} \epsilon_{ij} + p_f \xi \right). \quad (1.19)$$

Otro factor a tener en cuenta a la hora de analizar la energía de un sistema poroelástico saturado es la disipación de energía, que se produce por la fricción viscosa. Cuando una onda se propaga por un medio poroelástico, el fluido poral puede experimentar desplazamientos respecto de la matriz, y producir disipación. Se genera una correspondiente fuerza disipativa  $\mathbf{F}$  por unidad de volumen, que depende de la velocidad relativa del fluido respecto de la matriz.

$$F_i = -b \frac{\partial w_i}{\partial t} = -b \dot{w}_i, \quad (1.20)$$

donde  $b$  es un coeficiente de fricción. A partir de esta fuerza de fricción, es posible definir una función de disipación  $D$ , tal como plantea Biot en su teoría, tal que

$$F_i = \frac{\partial D}{\partial \dot{w}_i}. \quad (1.21)$$

Por lo tanto, la función de disipación puede expresarse como

$$D = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{w}}^T b \dot{\mathbf{w}}. \quad (1.22)$$

En este problema también se hace presente la energía cinética, ya que con el paso de una onda sísmica se produce un cierto movimiento en las partículas. En la teoría de Biot, se postula una forma cuadrática para la densidad de energía cinética, que contiene un término de acople. También asume que el material es estadísticamente isótropo, y por

lo tanto, las direcciones  $x, y$  y  $z$  son equivalentes y desacopladas dinámicamente. Pero, dado que la velocidad del sólido  $\mathbf{u}$  y del fluido  $\mathbf{w}$  no son velocidades verdaderas, si no velocidades promedio, no es posible obtener la densidad de energía cinética macroscópica con la suma de las densidades de energía cinéticas del sólido y del fluido. Por ello, la forma cuadrática de la densidad de energía cinética se escribe como:

$$C = \frac{1}{2}\rho_b \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}} + \rho_f \dot{\mathbf{w}}^T \dot{\mathbf{u}} + \frac{1}{2}g \dot{\mathbf{w}}^T \dot{\mathbf{w}}, \quad (1.23)$$

donde  $\rho_f$  es la densidad del fluido de los poros,  $\rho_b = (1 - \phi)\rho_s + \phi\rho_f$  es la densidad promedio del agregado, o la densidad *bulk*, siendo  $\rho_s$  la densidad de los granos sólidos.  $g$  es el factor de acoplamiento de masa, que cuantifica la interacción entre la fase fluida y la fase sólida, teniendo en cuenta que el movimiento del fluido no se da necesariamente en la dirección del gradiente de presión, debido a la tortuosidad del espacio de los poros. El factor de acoplamiento de masa puede calcularse como:

$$g = \frac{S\rho_f}{\phi}, \quad (1.24)$$

donde  $S$  es la tortuosidad de los poros.

## 1.4. Ecuaciones de Movimiento

Es necesario, para poder estudiar el fenómeno físico de la propagación de ondas en un medio poroelástico saturado, obtener las ecuaciones de onda. De esa manera, es posible entender cómo se propaga el fenómeno y qué factores intervienen. Para la formulación de las ecuaciones de movimiento se tiene en cuenta que la relación entre la tensión y la deformación no tiene en cuenta fuerzas disipativas. Además, se introducen los conceptos de la formulación Lagrangiana y de las coordenadas generalizadas.

La formulación lagrangiana se basa en el Principio de Hamilton, llamado a veces principio de mínima acción. Esta formulación es independiente a las leyes de Newton. El principio de Hamilton dice (Platzek, A. M., notas de clase Mecánica del Continuo):

*”de todas las trayectorias compatibles con los vínculos que puede seguir un sistema dinámico para desplazarse de una posición a otra dada en un intervalo de tiempo determinado, la trayectoria verdaderamente seguida es aquella que hace mínima, o estacionaria, la integral temporal de la diferencia entre la energía cinética y el potencial, en el intervalo considerado.”*

En la formulación newtoniana sus relaciones son entre vectores, diferenciales y deben cumplirse para cada punto de la trayectoria. En cambio, el principio de Hamilton trabaja con escalares y es un principio integral, satisfaciéndose las condiciones del movimiento en toda la trayectoria.

Se considera una unidad cúbica del material poroso saturado como un volumen elemental (Biot, 1956 a). Este volumen elemental se asume que es pequeño, relativo a la longitud de onda de las ondas elásticas, y que el tamaño de los poros es comparativamente pequeño frente al tamaño del elemento cúbico. Por hipótesis, a velocidad microscópica es igual a la que tendría un fluido incompresible, debido a que un campo de velocidades en fluidos compresibles, se aproxima al de los fluidos incompresibles para obstáculos que son pequeños comparados con la longitud de onda. Por lo tanto, el patrón de movimiento microscópico del fluido relativo al sólido depende sólo de la dirección del flujo relativo y no de su magnitud. En este caso, el campo de velocidades microscópico será una

función lineal de seis componentes de velocidad promedio, del sólido y del fluido. Así, las coordenadas generalizadas para la formulación lagrangiana serán las seis componentes del desplazamiento del sólido y del fluido, respectivamente.

$$u_x, u_y, u_z, w_x, w_y, w_z. \quad (1.25)$$

El lagrangiano por unidad de volumen  $L$  se define como la diferencia entre la densidad de energía cinética (1.23) y el potencial de deformación (1.19).

$$L = C - W. \quad (1.26)$$

Entre todos los campos de desplazamiento posibles que satisfacen las condiciones de contorno de un problema, el que realmente ocurre es aquel que hace estacionaria la integral sobre tiempo y espacio de  $L$  y del trabajo de las fuerzas disipativas, que se derivan de la función de disipación  $D$  (1.22). Por último, las ecuaciones de Euler-Lagrange responden a

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial L}{\partial q_{i,j}} - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{D}{\partial \dot{q}_i} = 0, \quad (1.27)$$

donde  $q_i$ , con  $i = x, y, z$  son las coordenadas generalizadas, y  $q_{i,j} = \partial q_i / \partial x_j$ . Usando las expresiones de  $L$  y  $D$  en la ecuación (1.27), se obtienen las ecuaciones de movimiento de Biot en el dominio del espacio y del tiempo.

$$\rho_b \ddot{\mathbf{u}} + \rho_f \ddot{\mathbf{w}} - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = f^{(1)}, \quad (1.28)$$

$$\rho_f \ddot{\mathbf{u}} + g \ddot{\mathbf{w}} + b \dot{\mathbf{w}} + \nabla p_f = f^{(2)}. \quad (1.29)$$

donde  $f^{(1)}$  y  $f^{(2)}$  son fuerzas externas aplicadas a la matriz sólida y al fluido, respectivamente, asociadas a una fuente externa.

Estas dos últimas ecuaciones, en conjunto con las ecuaciones constitutivas (1.14) y (1.15), permiten el estudio de la propagación de ondas sísmicas en medios porosos saturados por un fluido viscoso compresible. En el caso estacionario,  $\ddot{w}_i = 0$  u  $\ddot{u}_i = 0$ , y la ecuación (1.29) se reduce a  $-\nabla p_f = b \dot{\mathbf{w}}$ . Luego, por analogía a la ley de Darcy, puede escribirse:

$$b = \frac{\eta}{\kappa}, \quad (1.30)$$

donde  $\eta$  es la viscosidad dinámica del fluido y  $\kappa$  la permeabilidad de la matriz.

También, las ecuaciones de movimiento pueden ser expresadas en el dominio del espacio y de la frecuencia (Santos y Gauzellino, 2016)

$$\nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}} = -\omega^2 \rho_b \hat{\mathbf{u}} - \omega^2 \rho_f \hat{\mathbf{w}}, \quad (1.31)$$

$$-\nabla \hat{p}_f = -\omega^2 \rho_f \hat{\mathbf{u}} - \omega^2 g \hat{\mathbf{w}} + i\omega b \hat{\mathbf{w}}, \quad (1.32)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia angular, y el signo  $\hat{\phantom{x}}$  representa las funciones transformadas al dominio de la frecuencia.

Las expresiones para  $b$  y  $g$  son correctas siempre y cuando el flujo sea laminar, es decir, si las fuerzas viscosas predominan sobre las fuerzas inerciales. En caso contrario, se comienzan a desarrollar capas límites viscosas dentro del espacio poral. Para que el flujo sea considerado laminar, el espesor de la capa límite viscosa debe ser mayor al radio poral. Esta condición se sostiene para frecuencias menores a la frecuencia crítica de Biot

$$\omega_{Biot} = \frac{\phi \eta}{S \rho_f \kappa}. \quad (1.33)$$

Para frecuencias mayores a  $\omega_{Biot}$ , el flujo deja de ser laminar y es necesario considerar una dependencia de  $b$  y de  $g$  con la frecuencia (Biot, 1956b).

### 1.4.1. Solución de las ecuaciones de movimiento

El campo de desplazamiento de las ondas sísmicas es un campo vectorial. Es por ello que puede ser descrito según el Teorema de Helmholtz. Este teorema dice que todo campo vectorial puede descomponerse en dos términos, el gradiente de una función escalar  $\varphi$  y el rotor de una función potencial vectorial  $\Psi$ , con  $\nabla \cdot \Psi = 0$ . La función escalar está asociada a las ondas  $P$ , ya que es compresional, y al ser su rotor nulo, se lo asocia a un campo irrotacional. La función vectorial se la asocia a las ondas  $S$  de corte. Es por ello que se considera el teorema de descomposición de Helmholtz, para desacoplar los campos de ondas compresionales y de corte. Por lo tanto, se asume que los desplazamientos  $\hat{\mathbf{u}}$  y  $\hat{\mathbf{w}}$  poseen una componente irrotacional y otra isovolumétrica.

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{w}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla\varphi_1 \\ \nabla\varphi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nabla \times \Psi_1 \\ \nabla \times \Psi_2 \end{pmatrix} \quad (1.34)$$

donde  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  son potenciales escalares, y  $\Psi_1$  y  $\Psi_2$  son potenciales vectoriales. Así, es posible encontrar soluciones independientes para las ecuaciones de onda compresionales y de corte.

### 1.4.2. Ondas Compresionales

Para analizar las ondas compresionales u ondas  $P$  se toma la divergencia del desplazamiento. De esta manera, el campo de desplazamiento rotacional o de corte es nulo y sólo queda la componente compresional. Al considerar la propagación de una onda plana compresional monocromática, de frecuencia  $\omega$ , a través de un medio poroelástico, el desplazamiento del sólido y del fluido se expresan respectivamente como

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \omega) &= \nabla\varphi_1, \\ \hat{\mathbf{w}}(\mathbf{x}, \omega) &= \nabla\varphi_2, \end{aligned} \quad (1.35)$$

donde

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= A_c e^{i(\omega t - \mathbf{k}_c \cdot \mathbf{x})}, \\ \varphi_2 &= B_c e^{i(\omega t - \mathbf{k}_c \cdot \mathbf{x})}, \end{aligned} \quad (1.36)$$

siendo  $\mathbf{k}_c$  es el vector de onda compresional y  $A_c$  y  $B_c$  las amplitudes de las ondas. Para ondas homogéneas, puede escribirse

$$\mathbf{k}_c = k_c(\omega) \check{\mathbf{k}}_c. \quad (1.37)$$

$k_c(\omega)$  es el número de onda complejo, y  $\check{\mathbf{k}}_c$  es un vector unitario en la dirección de propagación de la onda. Como se consideran ondas planas compresionales,  $\hat{\mathbf{u}}$ ,  $\hat{\mathbf{w}}$  y  $\check{\mathbf{k}}_c$  son paralelos. Tomando el caso de una onda compresional monocromática propagándose en la dirección del eje  $x$ ,  $\check{\mathbf{k}}_c = \check{\mathbf{k}}_1$ . Si se introduce el juego de ecuaciones (1.35) y (1.36) en las ecuaciones de movimiento (1.31) y (1.32), y empleando las relaciones constitutivas (1.14) y (1.15), se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} [-\rho_b \omega^2 + H k_c(\omega)^2] A_c + [-\omega^2 \rho_f + \alpha M k_c(\omega)^2] B_c &= 0, \\ [-\omega^2 \rho_f + \alpha M k_c(\omega)^2] A_c + [-\omega^2 g + i b \omega + M k_c(\omega)^2] B_c &= 0, \end{aligned} \quad (1.38)$$

donde  $H = \lambda_c + 2\mu$ . El determinante de este sistema de ecuaciones debe ser nulo para que tenga una solución que no sea la trivial, es decir  $B_c = A_c = 0$ . Esto da una ecuación

bicadrática en  $k_c$ , la cual posee cuatro soluciones matemáticamente válidas. Sólo dos de ellas tienen significado físico. Luego, se encuentran dos posibles ondas, una onda compresional rápida  $P_1$  y otra lenta  $P_2$ .

Analizando la relación de ortogonalidad entre las amplitudes de las ecuaciones de onda para ambas velocidades, puede verse que dichas amplitudes se encuentran en fase para la onda de mayor velocidad, mientras que para la de menor velocidad, están a contrafase. Esto quiere decir que para la onda rápida  $P_1$  la matriz sólida y el fluido se mueven en fase, mientras que para la onda lenta  $P_2$  los movimientos son a contrafase. Las ondas  $P_1$  se pueden analizar en tres rangos distintos de frecuencia:

- $\omega \ll \omega_{Biot}$ : Las fuerzas viscosas predominan por sobre las fuerzas inerciales. La fase sólida y fluida tienden a moverse de forma conjunta frente al paso de una onda P rápida. Como el desplazamiento relativo del fluido es prácticamente nulo, la atenuación y la dispersión son despreciables.
- $\omega \gg \omega_{Biot}$ : Los efectos inerciales del fluido son significativos, pero la capa límite es muy delgada y las fuerzas viscosas no logran hacer trabajo. Es por ello que la atenuación y la dispersión de las ondas P son despreciables.
- $\omega \approx \omega_{Biot}$ : El espesor de la capa límite es del orden del radio poral, de modo que prácticamente todo el fluido está afectado por las fuerzas viscosas, y el desplazamiento relativo del fluido es considerable. Hay significativa atenuación y disipación sísmica.

Además, la onda lenta  $P_2$  para altas frecuencias es un modo de propagación. Por el contrario, para bajas frecuencias, es altamente dispersiva y toma la forma de un proceso de difusión de la presión del fluido. Su velocidad está relacionada a la velocidad de los cambios en la presión de fluido (Mavko et al., 2009).

### 1.4.3. Ondas de Corte

En el caso de ondas de corte, tomando el rotor del campo de desplazamiento es posible obtener solamente el campo de desplazamiento rotacional o de corte. Para analizar los posibles desplazamientos transversales asociados a ondas de corte, los desplazamientos del sólido y del fluido se expresan respectivamente como

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \omega) &= \nabla \times \Psi_1, \\ \widehat{\mathbf{w}}(\mathbf{x}, \omega) &= \nabla \times \Psi_2,\end{aligned}\tag{1.39}$$

donde

$$\begin{aligned}\Psi_1 &= \mathbf{A}_s e^{i(\omega t - \mathbf{k}_s \cdot \mathbf{x})}, \\ \Psi_2 &= \mathbf{B}_s e^{i(\omega t - \mathbf{k}_s \cdot \mathbf{x})}.\end{aligned}\tag{1.40}$$

$\mathbf{A}_s$  y  $\mathbf{B}_s$  son los vectores que determinan la dirección, el sentido y la amplitud de los potenciales, y  $\mathbf{k}_s$  es el vector de número de onda. Considerando una onda plana monocromática  $S$  propagándose en un medio homogéneo e isótropo, los desplazamientos  $\widehat{\mathbf{u}}$  y  $\widehat{\mathbf{w}}$  son paralelos, pero ortogonales a  $\mathbf{k}_s$ . Si se tiene el caso de una onda plana que se propaga en la dirección del eje  $x$  y que tanto  $\Psi_1$  como  $\Psi_2$  están contenidas en el eje  $z$ ,

introduciendo las ecuaciones (1.39) y (1.40) en las ecuaciones de movimiento, y teniendo en cuenta las relaciones constitutivas, se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} \left[ -\rho_b + \mu \left( \frac{k_s(\omega)}{\omega} \right)^2 \right] A_s - \rho_f B_s &= 0, \\ -\rho_f A_s + \left[ -g + \frac{ib}{\omega} \right] B_s &= 0. \end{aligned} \quad (1.41)$$

$A_s$ ,  $B_s$  y  $k_s(\omega)$  son los módulos de los vectores  $\mathbf{A}_s$ ,  $\mathbf{B}_s$  y  $\mathbf{k}_s$  respectivamente. Si se desea que el sistema tenga una solución más allá de la trivial, el determinante debe ser nulo, y el módulo del número de onda complejo para la onda S es por lo tanto

$$k_s(\omega) = \left[ \frac{\omega^2}{\mu} \left( \rho_b - \frac{\rho_f^2}{g - i\frac{b}{\omega}} \right) \right]^{1/2}. \quad (1.42)$$

En este caso, existen dos posibles soluciones para  $k_s(\omega)$ , pero una sola de ellas es físicamente aceptable. Tomando aquella solución para la que la parte imaginaria es negativa, se obtiene que los desplazamientos disminuyen su amplitud al propagarse la onda a través del medio. Para las ondas de corte, existe un único modo de propagación. En este caso, la rotación del fluido y del sólido están en la misma dirección. La rotación del sólido causa una rotación parcial de arrastre en el fluido, a través de un acople inercial. Esta onda posee una pérdida de energía por fricción viscosa para frecuencias cercanas a  $\omega_{Biot}$ , mientras que es despreciable en el límite de bajas y de altas frecuencias. En el caso de la onda S, la atenuación y dispersión del medio se debe solo a efectos de aceleración de la matriz.

En medios con heterogeneidades, puede haber conversión de modo de ondas P y S, generando ondas  $P_2$ .

## 1.5. Rango de las altas frecuencias.

Hasta aquí se han presentado las ecuaciones que gobiernan el fenómeno de propagación de ondas para un medio poroelástico saturado para el caso en el que el fluido cumple con las características de ser un fluido de Poiseuille, que es válido hasta cierta frecuencia. Esta frecuencia, llamada Frecuencia Crítica de Biot  $\omega_{Biot}$ , corresponde a la frecuencia en la que las fuerzas inerciales y viscosas son del mismo orden. Cuando se supera este límite, el flujo deja de ser laminar y las fuerzas inerciales predominan sobre las fuerzas viscosas. En ese caso, las constantes  $b$  y  $g$  comienzan a depender de la frecuencia. A través del análisis del flujo en un conducto cilíndrico y de rendijas planas, Biot llega a la conclusión que en el rango de las altas frecuencias las ecuaciones de movimiento (1.31) y (1.32) deben ser modificadas usando una función universal. Sea  $S$  el factor de tortuosidad,

$$S = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{\phi} \right), \quad (1.43)$$

cualquier corrección en frecuencia puede hacerse a través de la función (Santos y Gauzellino, 2016)

$$F(\omega) = \left( 1 + i \frac{4S^2 \kappa}{x \Lambda^2 \phi} \right) = F_R(\omega) + iF_I(\omega), \quad (1.44)$$

donde  $x = \frac{\eta\phi\kappa^{-1}}{\omega\rho}$  y  $\Lambda$  se calcula a través de la relación:

$$\frac{8S\kappa}{\phi\Lambda^2} = 1. \quad (1.45)$$

Mediante manipulación algebraica las ecuaciones de movimiento en el dominio de la frecuencia pueden escribirse como

$$-\omega^2\rho_s u(\omega) - \omega^2\rho_f w(\omega) - \nabla \cdot \tau = f^{(1)}, \quad (1.46)$$

$$-\omega^2\rho_f u(\omega) - \omega^2g(\omega)w(\omega) + i\omega b(\omega)w(\omega) + \nabla p_f = f^{(2)}, \quad (1.47)$$

donde  $f^{(1)}$  y  $f^{(2)}$  son fuerzas externas actuantes en la matriz y el fluido, siendo

$$g(\omega) = \frac{S\rho_f}{\phi} + \frac{F_I(\omega)}{\omega}\eta\kappa^{-1}, \quad (1.48)$$

$$b(\omega) = \eta\kappa^{-1}F_R(\omega). \quad (1.49)$$

Estas ecuaciones, más las relaciones constitutivas (1.14) y (1.15) son las ecuaciones de Biot para las altas frecuencias. Analizando la función  $F(\omega)$ , y los coeficientes  $g(\omega)$  y  $b(\omega)$ , se puede ver que se recuperan dichos coeficientes para las bajas frecuencias (Santos y Gauzellino, 2016).

## 1.6. Cómo Incluir la Atenuación

Si bien el subsuelo se describe como un sólido elástico y una fase fluida viscosa, las tensiones y deformaciones también dependen del tiempo. Por esta razón, es más realista considerar la reología de un medio viscoelástico en la propagación de ondas. Las ecuaciones de Biot incluyen un término de fricción viscosa, por lo que ya existe una cierta atenuación. En este trabajo, a esta atenuación se le agrega un modelo adicional de atenuación.

En el dominio de la frecuencia, por el principio de correspondencia, se puede expresar

$$\tau(\omega) = M(\omega) \cdot \epsilon(\omega),$$

donde  $M(\omega)$  es un número complejo que depende de la frecuencia y que representa un módulo viscoelástico. Por lo tanto, si se tiene en cuenta la viscoelasticidad, los coeficientes  $\lambda$ ,  $\mu$  y  $M$  se transforman en coeficientes complejos dependientes de la frecuencia, y su incorporación en las ecuaciones es más sencilla en el dominio de la frecuencia que en el dominio del tiempo. Por esta razón, se trabaja en el dominio de la frecuencia.

A partir del módulo  $M(\omega)$  se define el factor de calidad como

$$Q_M(\omega) = \frac{\text{Re}(M(\omega))}{\text{Im}(M(\omega))}.$$

Para el modelo de Zener o Standard Linear Solid (Liu et al., 1976) se expresa el módulo

$$M(\omega) = M \frac{1 + i\omega t_\epsilon}{1 + i\omega t_\sigma},$$

donde  $M$  es el valor del parámetro a frecuencia nula, y los tiempos de relajación son

$$t_\epsilon = \frac{t_0}{Q_0} \left( 1 + \sqrt{Q_0^2 + 1} \right), \quad t_\sigma = t_\epsilon - \frac{2t_0}{Q_0}.$$



---

El tiempo de relajación  $t_0$  corresponde a  $1/t_0$  que es la frecuencia central del pico de relajación y  $Q_0$  es el módulo del factor de calidad más pequeño, en este trabajo,  $q_0 = 30$ .

Si se desea tener un modelo con un factor de calidad constante en el rango de frecuencias sísmicas, se extiende a una distribución continua de mecanismos de relajación basados en el modelo de Zener. En este caso, el módulo se calcula como

$$M(\omega) = M \left( 1 + \frac{2}{\pi Q_M} \ln \frac{1 + i\omega t_2}{1 + i\omega t_1} \right),$$

donde  $Q_M$  es el valor medio constante para los tiempos  $t_1$  y  $t_2$ , con  $t_2 < t_1$ .

Aplicando el modelo de Liu, el coeficiente de Biot,  $M$ , y el módulo de corte,  $\mu$ , pasan de ser reales a ser complejos.



## 2. Método de Elementos Finitos.

El método de elementos finitos (MEF) es una técnica numérica para obtener soluciones aproximadas de ecuaciones diferenciales con condiciones de borde. El método se basa en la división del dominio donde se resolverá la ecuación diferencial en un número finito de subdominios y usando conceptos variacionales, construir una solución aproximada sobre este conjunto de elementos finitos (Becker, 1981).

Las ecuaciones de Biot son ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de segundo orden con condiciones de borde, que involucran derivadas primeras y segundas para el desplazamiento del fluido y del sólido. En esta sección se presenta el MEF que se empleará para resolver las mencionadas ecuaciones.

### 2.1. Planteo del Problema.

Considérese un problema que puede ser representado a través de una ecuación diferencial con condiciones de borde. Si el dato del problema es “suave”, el término no homogéneo y los coeficientes son diferenciables infinitamente, entonces existe una única función que satisface la ecuación diferencial en todo punto del dominio, así como las condiciones de borde (Becker, 1981). En este trabajo, los datos son la caracterización del medio y la fuente externa.

A veces, esto no se cumple. Puede ocurrir que no exista una solución al problema porque el dato no es suave, o que, si la solución existe, no pueda encontrarse en una forma cerrada por la complejidad del dominio, los coeficientes o las condiciones de borde. Esto quiere decir que las condiciones que debe cumplir la solución de la ecuación diferencial son muy fuertes. La solución no puede satisfacer la ecuación diferencial en todos los puntos. Es por ello que se debe realizar una reformulación del problema, de forma tal que admita condiciones más *débiles* en la solución y sus derivadas. Estas reformulaciones son denominadas *formulaciones variacionales* o *formulaciones débiles* del problema y son diseñadas para acomodar datos y soluciones irregulares (Becker, 1981). Cuando una solución existe para la formulación clásica, también será solución para la formulación débil, por lo que no se pierde información en la reformulación, mientras que se gana una ventaja en el método para hallar la solución. Esta formulación es la que se usa para construir las aproximaciones de elementos finitos de la solución.

### 2.2. Formulación Variacional del Problema.

Siguiendo a Becker (1981), si, por ejemplo, la ecuación diferencial unidimensional es  $-u''(x) + u(x) = x$ , una manera de realizar la formulación variacional o débil del problema, es encontrar una función  $u$  tal que la ecuación diferencial, junto con las condiciones de borde se satisfagan, pero como un promedio pesado. Este promedio pesado puede escribirse como

$$\int_{x_0}^{x_1} (-u'' + u)v \, dx = \int_{x_0}^{x_1} xv \, dx. \quad (2.1)$$

La función  $v$  es una función de peso o de *prueba* y es cualquier función de  $x$  que se comporte de la mejor manera para que la integral tenga sentido. Esta función debe ser lo suficientemente suave como para ser considerada una función de prueba. Estas funciones forman parte del conjunto de funciones de prueba  $V$ . La formulación débil del problema puede interpretarse como una seguridad de que la solución será correcta cuando sea testeada en cualquier punto de la región.

Si el conjunto al que pertenece la función solución se lo denomina  $\widehat{V}$ , las funciones de prueba  $v$  pueden no pertenecer al mismo conjunto de la solución. En este caso, es necesario considerar los dos conjuntos de funciones,  $V$  y  $\widehat{V}$  y suponer que ambos son iguales.

Es posible, si  $u$  y  $v$  son lo suficientemente suaves, realizar la integración por partes. De esta manera, pueden obtenerse derivadas primeras en vez de segundas, y así ir progresivamente debilitando los requisitos en la solución del problema. Luego se tiene

$$\int_{x_0}^{x_1} -u''v \, dx = \int_{x_0}^{x_1} u'v' \, dx - u'v \Big|_{x_0}^{x_1}. \quad (2.2)$$

Si se considera, por ejemplo, que las funciones de prueba se hacen nulas en los bordes y se tiene en cuenta esto en la ecuación (2.2), se llega a la siguiente formulación variacional

$$\int_{x_0}^{x_1} (u'v' + uv - xv) \, dx = 0, \quad (2.3)$$

donde puede verse con claridad que ya no cuenta con una segunda derivada para la solución, sino que la misma sólo depende de la derivada primera. Esta formulación variacional se denomina *simétrica*.

En el caso de la formulación débil, el conjunto de las funciones de prueba que contiene a  $u$  y a  $v$  es un nuevo conjunto acotado, al que se denominará  $V_1$ . Este conjunto contiene sólo las funciones que satisfacen las condiciones de borde y que son suficientemente regulares como para que la integral (2.3) tenga sentido.

### 2.3. Aproximaciones de Galerkin.

El conjunto de funciones  $V_1$  que contiene la solución y las funciones de prueba para el problema (2.2) es un espacio lineal y es infinito dimensional. Esto quiere decir que las combinaciones lineales entre elementos de  $V_1$  también son elementos de  $V_1$ , y además, que es necesario especificar una infinidad de parámetros para poder determinar unívocamente una función de prueba arbitraria  $v$ .

Si se introduce el conjunto de funciones

$$\psi_n(x) = \sqrt{2} \sin(n\pi x), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.4)$$

y  $v$  es una función de prueba perteneciente a  $V_1$ , puede verificarse que  $v$  puede ser escrita como

$$v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(x) \quad (2.5)$$

donde los coeficientes escalares  $a_n$  están dados por

$$a_n = \int_{x_0}^{x_1} v(x) \psi_n(x) \, dx. \quad (2.6)$$

En este sentido, una infinidad de coeficientes  $a_n$  deben ser especificados para definir cada función de prueba  $v$ , es decir,  $V_1$  es infinito dimensional.

Supóngase que se tiene un conjunto infinito de funciones  $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots\}$  en  $V_1$ , que tiene la propiedad de que cada una de las funciones de prueba  $v$  pueden ser representadas de la forma

$$v(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \varphi_i(x), \quad (2.7)$$

donde  $\beta_i$  son constantes y la serie converge en el espacio  $V_1$ . Con el planteo anterior, se puede decir que el conjunto de funciones  $\varphi_i$  provee una base para  $V_1$ , y por lo tanto son las *funciones base* del espacio vectorial.

Tomando un número finito  $N$  de términos en la serie (2.7), se obtendrá una aproximación  $v_N$  de la función de prueba  $v$ .

$$v_N(x) = \sum_{i=1}^N \beta_i \varphi_i(x). \quad (2.8)$$

Las  $N$  funciones base  $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_N(x)\}$  expanden un subespacio  $N$ -dimensional  $V_N$  de  $V_1$ . El subespacio  $H_N$  es finito dimensional, ya que cada función  $v_N$  es determinada por una combinación lineal de sólo  $N$  funciones de  $\varphi_i$ .

El método de Galerkin consiste en encontrar soluciones aproximadas al problema de condiciones de borde con la formulación variacional simétrica, en un subespacio  $V_N$  del espacio  $V_1$  de funciones admisibles y no en el espacio  $V_1$  mismo. Por lo tanto, lo que se busca es una solución aproximada  $u_N$  en  $V_N$  de la forma

$$u_N(x) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \varphi_j(x) \quad (2.9)$$

que satisfaga la ecuación diferencial del problema. Dado que cada  $\varphi_j$  son conocidas,  $u_N$  será completamente determinada una vez que los  $N$  coeficientes  $\alpha_i$  sean determinados. Los coeficientes  $\alpha_i$  son conocidos como los *grados de libertad* de la aproximación.

El siguiente paso es hallar los valores para  $\alpha_i$  y así poder encontrar la solución al problema. Tomando nuevamente el ejemplo de la ecuación (2.3) para el caso del método de Galerkin, la ecuación para los primeros  $N$  elementos queda

$$\int_{x_0}^{x_1} (u'_N v'_N + u_N v_N) dx = \int_{x_0}^{x_1} x v_N dx. \quad (2.10)$$

Para hallar los valores de los  $\alpha_i$  se reemplaza en la ecuación anterior las expresiones (2.8) y (2.9) y mediante procedimientos algebraicos se llega a la expresión

$$\sum_{i=1}^N \beta_i \left( \sum_{j=1}^N K_{ij} \alpha_j - F_i \right) = 0, \quad (2.11)$$

donde

$$K_{ij} = \int_{x_0}^{x_1} [\varphi'_i(x) \varphi'_j(x) + \varphi_i(x) \varphi_j(x)] dx \quad (2.12)$$

y

$$F_j = \int_{x_0}^{x_1} x \varphi_j dx. \quad (2.13)$$

La matriz cuadrada de  $N \times N$  elementos,  $\mathbf{K} = [K_{ij}]$ , es llamada *matriz de rigidez* del problema para las funciones base  $\varphi_i$  y el vector columna  $\mathbf{F} = [F_i]$  de dimensiones  $N \times 1$  se lo denomina *vector de carga*. Finalmente, los valores de los  $\alpha_i$  se pueden escribir como

$$\alpha_j = \sum_{i=1}^N (K^{-1})_{ij} F_i, \quad (2.14)$$

donde  $(K^{-1})_{ij}$  son los elementos de la matriz inversa de  $\mathbf{K}$ . Ahora, es posible hallar la solución  $u_N$  a partir de reemplazar la ecuación anterior en la ecuación (2.9).

La formulación variacional simétrica se presenta como una formulación conveniente por sobre la formulación débil clásica debido a varios motivos:

- La aproximación de la formulación simétrica ha llevado a una matriz de rigidez simétrica, cosa que una formulación no simétrica nunca podría hacer.
- Si se usa una formulación simétrica para resolver el problema, puede demostrarse que el método de Galerkin provee la mejor aproximación al problema de condiciones de borde.
- Para una formulación simétrica, los espacios de las soluciones y las funciones de prueba coinciden, y por lo tanto solo es necesario construir un grupo de funciones base  $\{\varphi\}$ .

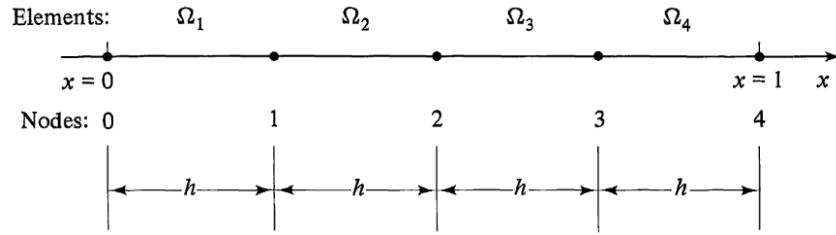
La calidad de las aproximaciones depende exclusivamente de la elección en las funciones base  $\{\varphi\}$ ; una vez elegidas, la determinación de los coeficientes  $\{\alpha\}$  se reduce a un problema computacional.

## 2.4. Funciones de Forma o Interpolación.

El método de elementos finitos requiere de una adecuada elección de funciones de prueba, que son las funciones base  $\{\varphi\}$  del método y que define el error en las aproximaciones en la solución. De todos modos, no hay una forma sistemática de construir estas funciones base, ya que son arbitrarias. Hay una infinidad de funciones base que pueden ser elegidas y que condicionan fuertemente la solución del problema. Mayor es el inconveniente en la elección para el caso de problemas en dos o tres dimensiones, donde deben concordar con condiciones de borde más complejas, a veces por la geometría del problema mismo. Una elección mala de los  $\varphi_i$  puede generar una matriz de rigidez mal condicionada y por lo tanto el problema no puede ser resuelto en límites aceptables de exactitud, por no ser invertible  $\mathbf{K}$ . El método de Galerkin tiene ciertas limitaciones.

El método de elementos finitos provee de una técnica general y sistemática para construir las funciones de forma del método de las aproximaciones de Galerkin. La idea general es que estas funciones  $\{\varphi\}$  puedan ser definidas por partes sobre subregiones del dominio, a las que se denomina *elementos finitos* y que sobre cualquier subdominio las  $\{\varphi\}$  puedan ser elegidas como funciones muy simples, por ejemplo, polinomios de grado muy bajo.

Lo primero que hay que realizar es la división del dominio en un número finito de elementos. La longitud de cada elemento  $\Omega_i$  se denomina  $h_i$ . Entre cada elemento, los puntos que marcan el comienzo y fin de cada elemento, se denominan *nodos primarios*. La conjunción entre los elementos y los puntos nodales, formando el dominio, son lo que se llama una *mallá de elementos finitos*. Un ejemplo de esto puede verse en la Figura 2.1, que muestra una partición de 4 elementos en un dominio comprendido en  $0 \leq x \leq 1$ .



**Figura 2.1:** Partición de elementos finitos (Becker, 1981).

Una vez definidos los elementos finitos, los valores  $h_i$  son usados como parámetros en vez de la cantidad de elementos  $N$ . Esto ocurre ya que a medida que la longitud de los elementos se hace más pequeña, la cantidad de los mismos aumenta para cubrir todo el dominio y por lo tanto, más funciones bases forman el conjunto  $V_N$ . Es por ello que se deben llamar a  $u_N, v_N$  y  $V_N$  como  $u_h, v_h$  y  $H_h$ .

Una vez construida la malla de elementos finitos para el problema, se procede formando un conjunto de funciones de forma usando los siguientes criterios fundamentales:

- Son generadas por funciones simples definidas a trozos, elemento a elemento, sobre la malla de elementos finitos.
- Son suficientemente suaves como para ser miembros de la clase de funciones de prueba  $V_1$ .
- Se eligen de forma que los parámetros  $\alpha_i$  que definen las soluciones aproximadas  $u_h$  sean precisamente los valores de  $u_h(x)$  en los puntos nodales.

Un conjunto de funciones muy simples pero de muy buena actuación, que satisfacen estos tres criterios son

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{h_i}, & \text{para } x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{x_{i+1}-x}{h_{i+1}}, & \text{para } x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{para } x \leq x_{i-1} \text{ y } x \geq x_{i+1} \end{cases} \quad (2.15)$$

donde  $h_i = x_i - x_{i-1}$  es el largo del elemento  $\Omega_i$ . Además, la primera derivada es

$$\varphi'_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{h_i} & \text{para } x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{-1}{h_{i+1}} & \text{para } x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{para } x \leq x_{i-1} \text{ y } x \geq x_{i+1}. \end{cases} \quad (2.16)$$

Estas mismas funciones se encuentran graficadas para el dominio de  $0 \leq x \leq 4$  en las Figuras 2.2 y 2.3.

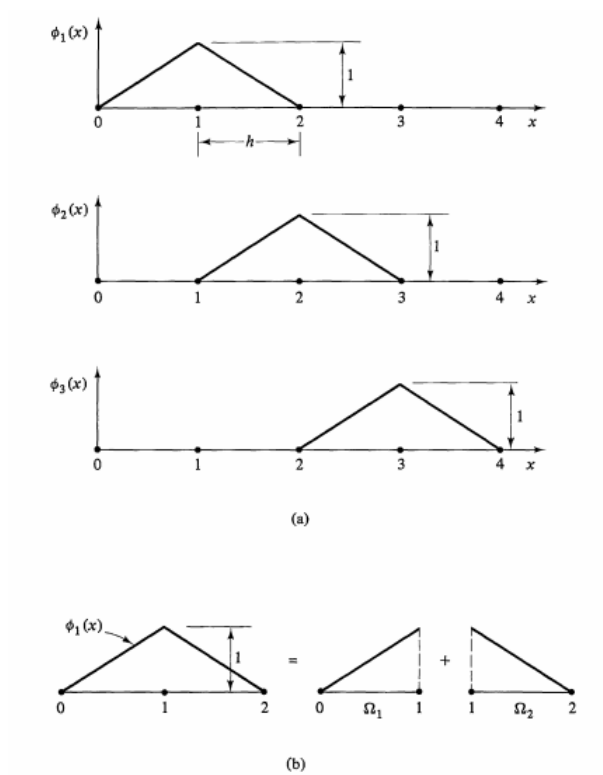


Figura 2.2: Ejemplo de funciones bases de elementos finitos (Becker, 1981).

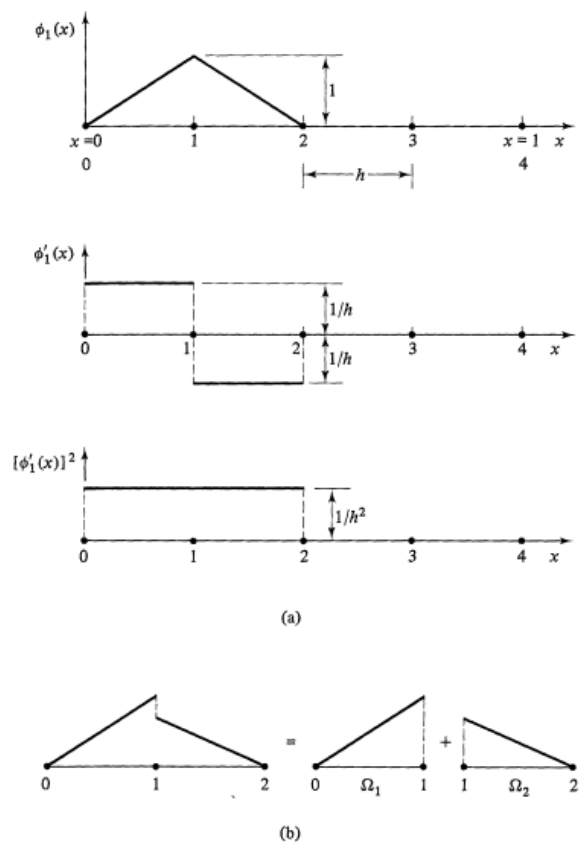


Figura 2.3: Derivadas de las funciones base (Becker, 1981).

Para demostrar que estas funciones satisfacen los criterios anteriormente mencionados,



hay que observar primero que cada función  $\varphi_i, i = 1, 2, 3, \dots$  es el resultado de pegar funciones definidas por partes en cada elemento finito, como puede verse en la Figura 2.2b. Por lo tanto, satisface el primer ítem de los criterios. La fuerza del MEF yace en esta forma particular de construir las funciones base, de manera que las aproximaciones al problema pueden ser construidas elemento a elemento, siendo la solución final la suma de todas las contribuciones para cada elemento.

Para que satisfagan el segundo criterio, hay que recordar que para que  $\{\varphi\}$  sea base del conjunto  $V_1$ , debe ser cada función de cuadrado integrable para la primer derivada y desvanecerse en los puntos del borde. Las funciones que se muestran en la Figura 2.2a satisfacen la condición de borde de manera clara, ya que en los bordes de cada elemento su valor es cero. Además, también es cuadrado integrable, ya que la derivada de cada  $\varphi_i$  es una función por partes, del tipo ilustrado en la Figura 2.3a, y por lo tanto,  $[\varphi'_i]^2$  es integrable, de modo que el área debajo de la curva cumple con ser convergente,

$$\int_0^1 [\varphi'_i]^2 dx = \frac{1}{h^2} 2h = 2h^{-1} < \infty. \quad (2.17)$$

Es importante a la hora de unir funciones lineales definidas por partes para formar estas funciones, que las funciones coincidan en los nodos en común, es decir, que haya continuidad en el dominio del problema. Si este no es el caso, como se ilustra en la Figura 2.3b, la función base no será de cuadrado integrable, y por lo tanto no va a pertenecer a la clase de funciones admisibles por  $V_1$ .

En cuanto al tercer criterio, los parámetros  $\alpha_i$  que definen las soluciones  $u_h$  deberían ser los valores de la solución en los puntos nodales. Para que este criterio se satisfaga, cada función base debe tener la propiedad de que su valor sea la unidad en un nodo y cero en todos los otros. Por lo tanto, si  $x_j$  es la coordenada  $x$  del nodo  $j$ , luego

$$\varphi_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (2.18)$$

Puede verse en la Figura 2.2a que este criterio se cumple para cada función.

Como fue mencionado, siendo  $v_h$  una función de  $V_1$  puede escribirse

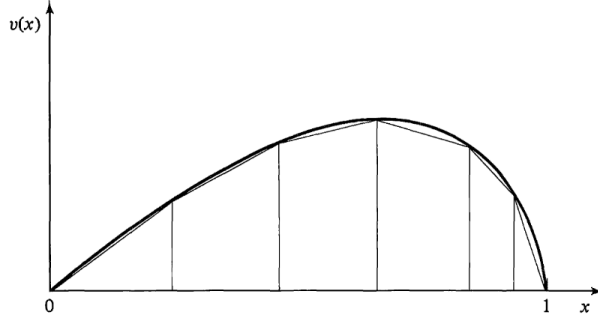
$$v_h(x) = \sum_{i_1}^N \beta_i \varphi_i(x). \quad (2.19)$$

Por lo tanto, si  $v_j$  es el valor de  $v_h$  en un punto nodal, en la representación de elementos finitos se puede escribir

$$v_h(x) = \sum_{i=1}^N v_j \varphi_i(x). \quad (2.20)$$

Para ilustrar mejor el concepto de elementos finitos, supongase que la Figura 2.4 es la solución exacta al problema. Si se considera la forma de esta función sobre un subintervalo lo suficientemente pequeño del dominio, puede verse que es prácticamente lineal en cada subintervalo. Si la solución  $u$  es aproximada por varias funciones lineales con valores coincidentes con  $u$  en sus puntos nodales, el resultado con forma poligonal se asemeja a la forma de la solución verdadera  $u$ . Ésta es una interpolación por partes de la solución. A medida que la malla se refina, cada subintervalo se hace más pequeño, la interpolación por elementos finitos se hace progresivamente más cercana a  $u$ . Por otro lado, la solución

aproximada por elementos finitos  $u_h$  al problema de condiciones de borde será también una función lineal por partes, pero sus valores nodales no coincidirán con la solución exacta. De todos modos, si la malla se refina, la solución  $u_h$  será cada vez más aproximada. En este método, nunca se lleva el valor del tamaño de los elementos a un límite pequeño, como en el cálculo diferencial, manteniendo el tamaño del elemento en un valor  $h$ , y por ello, el método se denomina de elementos finitos.



**Figura 2.4:** Interpolación lineal local de una función suave (Becker, 1981).

## 2.5. Cálculo de Elementos Finitos.

A través de la aproximación de Galerkin al problema variacional con condiciones de borde, el problema consiste en encontrar  $u_h$  definido por las elecciones particulares de  $\varphi_i$ ,

$$u_h = \sum_{i=1}^N u_i \varphi_i, \quad (2.21)$$

siendo  $u_i$  los valores de  $u_h$  en los nodos de la malla de elementos finitos. Teniendo en cuenta lo anteriormente dicho y las ecuaciones (2.9) y (2.11) para el cálculo de la solución aproximada, la matriz de rigidez y el vector de carga pueden relacionarse de manera que

$$\sum_{i=1}^N K_{ij} u_j = F_i \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.22)$$

Sus propiedades se detallan a continuación:

**Sumabilidad de rigidez.** Cada elemento de  $K_{ij}$  se obtiene integrando  $(\varphi_i' \varphi_j' + \varphi_i \varphi_j)$  en el dominio del problema. Si se toma la integral dentro del elemento  $\Omega_e$ , luego

$$K_{ij}^e = \int_{\Omega_e} (\varphi_i' \varphi_j' + \varphi_i \varphi_j) dx \quad (2.23)$$

representa la componente de la matriz de rigidez del elemento  $\Omega_e$ . Por lo tanto

$$K_{ij} = \sum_{e=1}^4 K_{ij}^e, \quad (2.24)$$

para un dominio partido en 4 subintervalos.

De manera similar ocurre para el vector de carga,

$$K_i = \sum_{e=1}^4 F_i^e. \quad (2.25)$$

El hecho de que tanto  $K_{ij}$  y  $F_i$  puedan ser computados como sumas de contribuciones de cada elemento, hace que sea posible generar  $\mathbf{K}$  y  $\vec{F}$  calculado solamente los elementos de  $\mathbf{K}^e$  y  $\vec{F}^e$  para un elemento  $\Omega_e$  cualquiera.

**Matriz rala.** Las funciones base  $\varphi_i$  y sus derivadas,  $\varphi'_i$  son distintas de cero solamente en elementos adyacentes al nodo  $i$ . Esto quiere decir que si los nodos  $i$  y  $j$  no pertenecen al mismo elemento,  $K_{ij} = 0$ . Esto implica que, en una malla conformada por varios elementos, muchos de los elementos  $K_{ij}$  de la matriz de rigidez serán cero. Matrices que contiene muchos ceros se las denomina *ralas*, y la forma en la que se definieron las funciones base para el método de elementos finitos, conlleva a una matriz de rigidez rala.

**Simetría de  $\mathbf{K}$ .** Intercambiando  $i$  y  $j$  en la expresión (2.23), la expresión integral para  $K_{ij}$  no cambia para el valor calculado, por lo tanto,  $K_{ij} = K_{ji}$  y la matriz de rigidez será por lo tanto simétrica. Sin embargo, en muchos problemas físicos basados en leyes conservativas, esta simetría aparecerá de manera natural en la forma débil. La simetría de  $\mathbf{K}$  no es por la elección de las funciones base, sino que depende enteramente del problema físico a resolver.

## 2.6. Precisión de las aproximaciones por Elementos Finitos.

El método de elementos finitos provee una aproximación a la solución exacta y es por ello necesario e interesante conocer la estimación del error de esta aproximación. El error  $e$  se define como la diferencia entre la solución real y la aproximada,

$$e(x) = u(x) - u_h(x). \quad (2.26)$$

El error real no puede ser calculado salvo que se sepa a priori la solución exacta. Es por ello que, cuando no se conoce  $u$ , el error puede ser estimado si éste decrece con  $h$  mientras el número de elementos crece. La información sobre los errores suelen darse a través de normas, éstas pueden ser:

- la norma de energía,

$$\|e\|_x = \left\{ \int_0^1 [(e')^2 + e^2] dx \right\}^{1/2}; \quad (2.27)$$

- la norma de mínimos cuadrados,

$$\|e\|_0 = \left( \int_0^1 e^2 dx \right)^{1/2}; \quad (2.28)$$

- y la norma infinito,

$$\|e\|_\infty = \max_{0 \leq x \leq 1} |e(x)|. \quad (2.29)$$

Una estimación de los límites del error podría ser para  $h$  constante,

$$\|e\| \leq Ch^p \quad (2.30)$$

donde  $C$  es una constante que depende de los datos del problema y  $p$  es un entero que depende de las funciones base elegidas para el MEF, denominado *radio de convergencia*

del método con respecto a una cierta norma elegida. Si  $p$  es positivo, el error se hará cero a medida que  $h$  tienda a cero. Cuando  $\|e\|$  se acerca a cero, la aproximación a la solución converge con respecto a la norma elegida. Es posible tener situaciones en las que el error converja para una norma y no para otras; por lo tanto, el sentido de la convergencia depende de la norma escogida.

Estimaciones como las dadas en (2.30) no requieren información de la solución de elementos finitos y se las conoce antes del cálculo de la solución, recibiendo el nombre de *estimador a priori*.

### 3. Ecuaciones de Biot en una Dimensión.

Para comenzar con el uso del MEF y comprender los alcances de la teoría de Biot, en esta sección se resuelven las ecuaciones de Biot en 1D.

#### 3.1. Ecuaciones de Biot.

Las ecuaciones que gobiernan el problema de propagación de ondas en medios porosos son (ver ecuaciones (1.28) y (1.29))

$$\begin{aligned} \rho_b(x)\ddot{\mathbf{u}}(x,t) + \rho_f(x)\ddot{\mathbf{w}}(x,t) - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} &= f^{(1)}(x,t), \\ \rho_f(x)\ddot{\mathbf{u}}(x,t) + g(x)\ddot{\mathbf{w}}(x,t) + b(x)\dot{\mathbf{w}}(x,t) + \nabla p_f(x,t) &= f^{(2)}(x,t). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Como ya se había dicho, es conveniente trabajar en el dominio de la frecuencia para incluir atenuación. Además, dado que en las ecuaciones de Biot se tienen derivadas primeras y segundas del desplazamiento con respecto al tiempo, al trabajar en este dominio las ecuaciones quedan en función del desplazamiento y no de las derivadas temporales del mismo. Determinando  $U(\omega)$  en función de la frecuencia como

$$\hat{U}(\omega) = \hat{u}e^{i\omega t}, \quad (3.2)$$

luego las derivadas primeras y segundas son

$$\begin{aligned} \dot{\hat{U}}(\omega) &= i\omega\hat{u}(\omega)e^{i\omega t} \\ \ddot{\hat{U}}(\omega) &= -\omega^2\hat{u}(\omega)e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Aplicando a las ecuaciones en el dominio del tiempo, se obtienen las ecuaciones de Biot como en (1.31) y (1.32)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}} &= -\omega^2\rho_b(x)\hat{\mathbf{u}}(x,\omega) - \omega^2\rho_f(x)\hat{\mathbf{w}}(x,\omega), \\ -\nabla\hat{p}_f(x,\omega) &= -\omega^2\rho_f(x)\hat{\mathbf{u}}(x,\omega) - \omega^2g(x)\hat{\mathbf{w}}(x,\omega) + i\omega b(x)\hat{\mathbf{w}}(x,\omega), \end{aligned}$$

que son las expresiones generales en el dominio de la frecuencia. Para el problema 1D, las ecuaciones se reducen a

$$\begin{aligned} -\omega^2\rho_b(x)\hat{u}(x,\omega) - \omega^2\rho_f(x)\hat{w}(x,\omega) + \frac{\partial}{\partial x}\tau(x,\omega) &= f^1(x,\omega), \\ -\omega^2\rho_f(x)\hat{u}(x,\omega) - \omega^2g(x)\hat{w}(x,\omega) - i\omega\frac{\eta(x)}{\kappa(x)}\hat{w}(x,\omega) + \frac{\partial}{\partial x}p_f(x,\omega) &= f^2(x,\omega), \end{aligned} \quad (3.4)$$

Estas ecuaciones junto con las relaciones constitutivas detalladas a continuación ((1.14) y (1.15)),

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= 2\mu\boldsymbol{\epsilon} + \vec{I}(\lambda_c\nabla \cdot \mathbf{u} - \alpha M\zeta) \\ p_f &= -\alpha M\nabla \cdot \mathbf{u} + M\zeta, \end{aligned}$$

determinan el conjunto de ecuaciones de Biot. Si se trabaja sólo en la dirección vertical, el único eje será el eje  $z$  y por lo tanto las relaciones constitutivas se escriben como

$$\tau_{33} = 2\mu\epsilon_{33}(u_3) + \lambda_u\frac{\partial u_3}{\partial x_3} + B\frac{\partial w_3}{\partial x_3}, \quad (3.5)$$

$$p_f(u_3) = -B \frac{\partial u_3}{\partial x_3} - M \frac{\partial w_3}{\partial x_3}, \quad (3.6)$$

$$\alpha M = B, \quad (3.7)$$

donde  $\mu$  y  $\lambda_u$  son los coeficientes de Lamè,  $\lambda_c = K - \frac{2}{3}\mu$ , siendo  $K$  el módulo de compresibilidad,  $B$  un factor geodinámico adimensional y  $M$  el coeficientes de Biot. Si la porosidad es  $\phi$ , luego

$$\lambda_c = \frac{(1 - \phi) \left( 1 - \phi - \frac{K_m}{K_s} \right) K_s + \phi \frac{K_s}{K_f} K_m}{1 - \phi - \frac{K_m}{K_s} + \phi \frac{K_s}{K_f}}, \quad (3.8)$$

$$B = \frac{\left( 1 - \phi - \frac{K_m}{K_s} \right) \phi K_s}{1 - \phi - \frac{K_m}{K_s} + \phi \frac{K_s}{K_f}}, \quad (3.9)$$

y

$$M = \frac{\phi^2 K_s}{1 - \phi - \frac{K_m}{K_s} + \phi \frac{K_s}{K_f}}. \quad (3.10)$$

$K_f$ ,  $K_s$  y  $K_m$  son los módulos de volumen del fluido, de los granos sólido y de la matriz seca, respectivamente.

### 3.2. Forma variacional o débil.

Suprimiendo por simplicidad la dependencia de las variables con el espacio y la frecuencia, se escribe la forma variacional testeando las ecuaciones (3.4) con las funciones de prueba  $v^s$  y  $v^f$  del sólido y del fluido, respectivamente:

$$(-\omega^2 \rho_b \hat{u}_3, v^s) + (-\omega^2 \rho_f \hat{w}_3, v^s) - (\nabla \cdot \tau_{33}, v^s) = (f^s, v^s), \quad (3.11)$$

$$(-\omega^2 \rho_f \hat{u}_3, v^f) + (-\omega^2 g \hat{w}_3, v^f) + (-i\omega \frac{\eta}{\kappa} \hat{w}_3, v^f) + (\nabla \cdot p_f, v^f) = (f^f, v^f). \quad (3.12)$$

Realizando integración por partes,  $\int u dv = u v \Big|_{borde} - \int v du$ , se obtiene

$$(\nabla \cdot \tau_{33}, v^s) = \tau_{33} \cdot v^s \Big|_{borde} - (\tau_{33}, \nabla \cdot v^s), \quad (3.13)$$

$$(\nabla \cdot p_f, v^f) = p_f \cdot v^f \Big|_{borde} - (p_f, \nabla \cdot v^f), \quad (3.14)$$

y reemplazando en las ecuaciones (3.11) y (3.12) puede escribirse

$$\begin{aligned} (-\omega^2 \rho_b \hat{u}_3, v^s) + (-\omega^2 \rho_f \hat{w}_3, v^s) + (\tau_{33}, \nabla \cdot v^s) - \tau_{33} \cdot v^s \Big|_{borde} \\ = (f^s, v^s), \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} (-\omega^2 \rho_f \hat{u}_3, v^f) + (-\omega^2 g \hat{w}_3, v^f) + (-i\omega \frac{\eta}{\kappa} \hat{w}_3, v^f) - (p_f, \nabla \cdot v^f) + p_f \cdot v^f \Big|_{borde} \\ = (f^f, v^f). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Considerando condiciones de borde absorbentes, es decir, el borde es transparente para ondas que llegan normal al mismo, se debe cumplir la condición

$$(-\tau(u)\boldsymbol{\nu}, -p_f) = i\omega\boldsymbol{\beta}(u \cdot \boldsymbol{\nu}, w \cdot \boldsymbol{\nu}), \quad (3.17)$$

donde  $\boldsymbol{\nu}$  es un versor externo y  $\boldsymbol{\beta}$  es una matriz de  $2 \times 2$

$$\boldsymbol{\beta} = \left[ (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{P})^t \right]^{1/2} \mathbf{A}, \quad (3.18)$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \rho_b & \rho_f \\ \rho_f & g \end{pmatrix}, \quad (3.19)$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \lambda_u + 2\mu & B \\ B & M \end{pmatrix}.$$

Teniendo en cuenta la forma de los elementos de la matriz  $\boldsymbol{\beta}$ , la ecuación (3.17) puede escribirse como

$$-\tau(u) \cdot \boldsymbol{\nu} = i\omega [(\beta_{11}\rho_b + \beta_{12}\rho_f) u_3 \cdot \boldsymbol{\nu} + (\beta_{11}\rho_f + \beta_{12}g) w_3 \cdot \boldsymbol{\nu}], \quad (3.20)$$

$$+p_f \cdot \boldsymbol{\nu} = i\omega [(\beta_{21}\rho_b + \beta_{22}\rho_f) u_3 \cdot \boldsymbol{\nu} + (\beta_{21}\rho_f + \beta_{22}g) w_3 \cdot \boldsymbol{\nu}]. \quad (3.21)$$

Reemplazando estas expresiones en (3.15) y (3.16) se llega a

$$(-\omega^2\rho_b\widehat{u}_3, v^s) + (-\omega^2\rho_f\widehat{w}_3, v^s) + (\tau_{33}, \nabla \cdot v^s) + \langle i\omega (\beta_{11}\rho_b + \beta_{12}\rho_f) u_3 \cdot \boldsymbol{\nu} \rangle + \langle i\omega (\beta_{11}\rho_f + \beta_{12}g) w_3 \cdot \boldsymbol{\nu} \rangle = (f^s, v^s), \quad (3.22)$$

$$(-\omega^2\rho_f\widehat{u}_3, v^f) + (-\omega^2g\widehat{w}_3, v^f) + (-i\omega\frac{\eta}{\kappa}\widehat{w}_3, v^f) - (p_f, \nabla \cdot v^f) + \langle i\omega (\beta_{21}\rho_b + \beta_{22}\rho_f) u_3 \cdot \boldsymbol{\nu} \rangle + \langle i\omega (\beta_{21}\rho_f + \beta_{22}g) w_3 \cdot \boldsymbol{\nu} \rangle = (f^f, v^f) \quad (3.23)$$

Finalmente, realizando el reemplazo de las relaciones constitutivas (3.5) en (3.22) y (3.23) resulta

$$(-\omega^2\rho_b\widehat{u}_3, v^s) + (-\omega^2\rho_f\widehat{w}_3, v^s) + \left( 2\mu\frac{\partial u_3}{\partial z} + \lambda_u\frac{\partial u_3}{\partial z}, \nabla \cdot v^s \right) + \left( B\frac{\partial w_3}{\partial z}, \nabla \cdot v^s \right) + \langle i\omega (\beta_{11}\rho_b + \beta_{12}\rho_f) u_3 \cdot \boldsymbol{\nu} \rangle + \langle i\omega (\beta_{11}\rho_f + \beta_{12}g) w_3 \cdot \boldsymbol{\nu} \rangle = (F^s, v^s), \quad (3.24)$$

$$(-\omega^2\rho_f\widehat{u}_3, v^f) + (-\omega^2g\widehat{w}_3, v^f) + (-i\omega\frac{\eta}{\kappa}\widehat{w}_3, v^f) + \left( B\frac{\partial u_3}{\partial z}, \nabla \cdot v^f \right) + \left( M\frac{\partial w_3}{\partial z}, \nabla \cdot v^f \right) + \langle i\omega (\beta_{21}\rho_b + \beta_{22}\rho_f) u_3 \cdot \boldsymbol{\nu} \rangle + \langle i\omega (\beta_{21}\rho_f + \beta_{22}g) w_3 \cdot \boldsymbol{\nu} \rangle = (F^f, v^f), \quad (3.25)$$

donde  $\langle \cdot \rangle$  indica los términos del borde. Las ecuaciones (3.24) y (3.25) determinan la forma débil de las ecuaciones (3.4).

### 3.3. MEF. Problema algebraico.

Para aplicar el método de elementos finitos se particiona el dominio  $\Omega$  en segmentos no solapados

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^N \Omega_i. \quad (3.26)$$

Las funciones de prueba usadas son

$$\varphi(z) = \begin{cases} \varphi_i(z) = \frac{z-z_{i-1}}{z_i-z_{i-1}} \\ \varphi_{i-1}(z) = \frac{z_i-z}{z_i-z_{i-1}} \end{cases} \quad \text{para } z_{i-1} \leq z \leq z_i \quad (3.27)$$

$$\varphi(z) = \begin{cases} \varphi_i(z) = \frac{z_{i+1}-z}{z_{i+1}-z_i} \\ \varphi_{i+1}(z) = \frac{z-z_i}{z_{i+1}-z_i} \end{cases} \quad \text{para } z_i \leq z \leq z_{i+1} \quad (3.28)$$

Como puede verse en la Figura 3.1, los valores de las funciones base son uno para el nodo en el que se encuentra, y cero para el resto. Las mismas funciones base son utilizadas tanto para los desplazamientos del sólido como para del fluido.

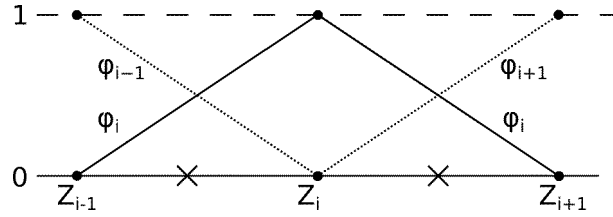


Figura 3.1: Funciones base para el método de elementos finitos en 1D.

Por lo tanto,  $v^s \equiv v^f$ . En cada elemento, los desplazamientos pueden ser escritos por las aproximaciones de Galerkin, a partir de (2.21), como combinación lineal de las funciones base  $\varphi_i$ .

$$u = \sum_{i=0}^N u_i \varphi_i \quad , \quad w = \sum_{i=0}^N w_i \varphi_i.$$

Los mismos deben ser calculados como

$$u_i = u_{i-1} \varphi_{i-1} + u_i \varphi_i + u_{i+1} \varphi_{i+1}, \quad (3.29)$$

$$w_i = w_{i-1} \varphi_{i-1} + w_i \varphi_i + w_{i+1} \varphi_{i+1}. \quad (3.30)$$

Incorporando esto y resolviendo la forma débil de la ecuación (3.24) en un elemento cualquiera  $i$ , se obtiene

$$\underbrace{(-\omega^2 \rho_b \hat{u}_3, v^s)_i}_{(a)} + \underbrace{(-\omega^2 \rho_f \hat{w}_3, v^s)_i}_{(b)} + \underbrace{\left( 2\mu \frac{\partial u_3}{\partial z} + \lambda_u \frac{\partial u_3}{\partial z}, \nabla \cdot v^s \right)_i}_{(c)} + \underbrace{\left( B \frac{\partial w_3}{\partial z}, \nabla \cdot v^s \right)_i}_{(d)} + \langle i\omega (\beta_{11}\rho_b + \beta_{12}\rho_f) u_3 \cdot \boldsymbol{\nu} \rangle_i + \langle i\omega (\beta_{11}\rho_f + \beta_{12}g) w_3 \cdot \boldsymbol{\nu} \rangle_i = (F^s, v^s)_i, \quad (3.31)$$

Para el término (a),

$$(-\omega^2 \rho_b \hat{u}_3, v^s)_i = (-\omega^2 \rho_b [u_{3,i-1} \varphi_{i-1} + u_{3,i} \varphi_i + u_{3,i+1} \varphi_{i+1}], \varphi_i)_i. \quad (3.32)$$



Y por lo tanto,

$$-\omega^2 \int_{z_{i-1}}^{z_{i+1}} \rho_b [u_{3,i-1}\varphi_{i-1} + u_{3,i}\varphi_i u_{3,i+1}\varphi_{i+1}] \varphi_i dz \quad (3.33)$$

Reemplazando las expresiones para las funciones de prueba, y partiendo la integral entre los intervalos  $z_{i-1} \leq z \leq z_i$  y  $z_i \leq z \leq z_{i+1}$ ,

$$-\omega^2 \left[ \rho_{b_{i-1}} \int_{z_{i-1}}^{z_i} u_{3,i-1}\varphi_{i-1}\varphi_i dz + \rho_{b_{i-1}} \int_{z_{i-1}}^{z_i} u_{3,i}\varphi_i\varphi_i dz + \rho_{b_i} \int_{z_i}^{z_{i+1}} u_{3,i}\varphi_i\varphi_i dz + \rho_{b_i} \int_{z_i}^{z_{i+1}} u_{3,i+1}\varphi_{i+1}\varphi_i dz \right] \quad (3.34)$$

$$= -\omega^2 \left[ \rho_{b_{i-1}} \int_{z_{i-1}}^{z_i} u_{3,i-1} \left( \frac{z_i - z}{z_i - z_{i-1}} \right) \left( \frac{z - z_{i-1}}{z_i - z_{i-1}} \right) dz + \rho_{b_{i-1}} \int_{z_{i-1}}^{z_i} u_{3,i} \left( \frac{z - z_{i-1}}{z_i - z_{i-1}} \right)^2 dz + \rho_{b_i} \int_{z_i}^{z_{i+1}} u_{3,i} \left( \frac{z_i - z}{z_i - z_{i-1}} \right)^2 dz + \rho_{b_i} \int_{z_i}^{z_{i+1}} u_{3,i+1} \left( \frac{z - z_{i+1}}{z_{i-1} - z_i} \right) \left( \frac{z_{i+1} - z}{z_{i+1} - z_i} \right) dz \right] \quad (3.35)$$

$$= -\omega^2 \left\{ \rho_{b_{i-1}} \left( \frac{z_i - z_{i-1}}{6} \right) u_{3,i-1} + \left[ \rho_{b_{i-1}} \left( \frac{z_i - z_{i-1}}{3} \right) + \rho_{b_i} \left( \frac{z_{i+1} - z_i}{3} \right) \right] u_{3,i} + \rho_{b_i} \left( \frac{z_{i+1} - z_i}{6} \right) u_{3,i+1} \right\}. \quad (3.36)$$

Para el término (b), realizando el mismo desarrollo que para el caso anterior,

$$= -\omega^2 \left\{ \rho_{f_{i-1}} \left( \frac{z_i - z_{i-1}}{6} \right) w_{3,i-1} + \left[ \rho_{f_{i-1}} \left( \frac{z_i - z_{i-1}}{3} \right) + \rho_{f_i} \left( \frac{z_{i+1} - z_i}{3} \right) \right] w_{3,i} + \rho_{f_i} \left( \frac{z_{i+1} - z_i}{6} \right) w_{3,i+1} \right\}. \quad (3.37)$$

Y se procede de la misma manera para los términos (c) y (d)

$$\left( 2\mu \frac{\partial u_3}{\partial z} + \lambda_u \frac{\partial u_3}{\partial z}, \nabla \cdot v^s \right)_i = -(\lambda_u + 2\mu)_{i-1} \left( \frac{1}{z_i - z_{i-1}} \right) u_{3,i-1} + \left[ (\lambda_u + 2\mu)_{i-1} \left( \frac{1}{z_i - z_{i-1}} \right) + (\lambda_u + 2\mu)_i \left( \frac{1}{z_{i+1} - z_i} \right) \right] u_{3,i} - (\lambda_u + 2\mu)_i \left( \frac{1}{z_{i+1} - z_i} \right) u_{3,i+1}, \quad (3.38)$$

$$\left( B \frac{\partial w_3}{\partial z}, \nabla \cdot v^s \right)_i = -B_{i-1} \left( \frac{1}{z_i - z_{i-1}} \right) w_{3,i-1} + \left[ B_{i-1} \left( \frac{1}{z_i - z_{i-1}} \right) + B_i \left( \frac{1}{z_{i+1} - z_i} \right) \right] w_{3,i} - B_i \left( \frac{1}{z_{i+1} - z_i} \right) w_{3,i+1}. \quad (3.39)$$

Procediendo de la misma manera para la ecuación (3.25),

$$\underbrace{(-\omega^2 \rho_f \widehat{u}_{3,i}, v^f)_i}_{(e)} + \underbrace{(-\omega^2 g \widehat{w}_{3,i}, v^f)_i}_{(f)} + \underbrace{(-i\omega \frac{\eta}{\kappa} \widehat{w}_{3,i}, v^f)_i}_{(g)} + \underbrace{\left( B \frac{\partial u_3}{\partial z}, \nabla \cdot v^f \right)_i}_{(h)} + \underbrace{\left( M \frac{\partial w_3}{\partial z}, \nabla \cdot v^f \right)_i}_{(i)} + \langle i\omega (\beta_{21}\rho_b + \beta_{22}\rho_f) u_{3,i} \cdot \boldsymbol{\nu} \rangle + \langle i\omega (\beta_{21}\rho_f + \beta_{22}g) w_{3,i} \cdot \boldsymbol{\nu} \rangle = (F^f, v^f). \quad (3.40)$$

El término (e) resulta

$$\begin{aligned} (-\omega^2 \rho_f \widehat{u}_{3,i}, v^f) &= -\omega^2 \left\{ \rho_{f_{i-1}} \left( \frac{z_i - z_{i-1}}{6} \right) u_{3,i-1} + \left[ \rho_{f_{i-1}} \left( \frac{z_i - z_{i-1}}{3} \right) + \rho_{f_i} \left( \frac{z_{i+1} - z_i}{3} \right) \right] u_{3,i} \right. \\ &\quad \left. + \rho_{f_i} \left( \frac{z_{i+1} - z_i}{6} \right) u_{3,i+1} \right\}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Y por lo tanto, los términos restantes (f), (g), (h) e (i) resultan

$$\begin{aligned} (-\omega^2 g \widehat{w}_{3,i}, v^f)_i &= -\omega^2 \left\{ g_{i-1} \left( \frac{z_i - z_{i-1}}{6} \right) w_{3,i-1} + \left[ g_{i-1} \left( \frac{z_i - z_{i-1}}{3} \right) + g_i \left( \frac{z_{i+1} - z_i}{3} \right) \right] w_{3,i} \right. \\ &\quad \left. + g_i \left( \frac{z_{i+1} - z_i}{6} \right) w_{3,i+1} \right\}, \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} (-i\omega \frac{\eta}{\kappa} \widehat{w}_{3,i}, v^f)_i &= -i\omega \left\{ \frac{\eta}{\kappa_{i-1}} \left( \frac{z_i - z_{i-1}}{6} \right) w_{3,i-1} + \left[ \frac{\eta}{\kappa_{i-1}} \left( \frac{z_i - z_{i-1}}{3} \right) + \frac{\eta}{\kappa_i} \left( \frac{z_{i+1} - z_i}{3} \right) \right] w_{3,i} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\eta}{\kappa_i} \left( \frac{z_{i+1} - z_i}{6} \right) w_{3,i+1} \right\}, \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} \left( B \frac{\partial u_3}{\partial z}, \nabla \cdot v^f \right)_i &= -B_{i-1} \left( \frac{1}{z_i - z_{i-1}} \right) u_{3,i-1} + \left[ B_{i-1} \left( \frac{1}{z_i - z_{i-1}} \right) + B_i \left( \frac{1}{z_{i+1} - z_i} \right) \right] u_{3,i} \\ &\quad - B_i \left( \frac{1}{z_{i+1} - z_i} \right) u_{3,i+1}, \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} \left( M \frac{\partial w_3}{\partial z}, \nabla \cdot v^f \right)_i &= -M_{i-1} \left( \frac{1}{z_i - z_{i-1}} \right) w_{3,i-1} + \left[ M_{i-1} \left( \frac{1}{z_i - z_{i-1}} \right) + M_i \left( \frac{1}{z_{i+1} - z_i} \right) \right] w_{3,i} \\ &\quad - M_i \left( \frac{1}{z_{i+1} - z_i} \right) w_{3,i+1}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Incorporando lo anteriormente calculado la ecuación (3.24) resulta

$$\begin{aligned} &-\omega^2 \left\{ \rho_{b_{i-1}} \left( \frac{z_i - z_{i-1}}{6} \right) u_{3,i-1} + \left[ \rho_{b_{i-1}} \left( \frac{z_i - z_{i-1}}{3} \right) + \rho_{b_i} \left( \frac{z_{i+1} - z_i}{3} \right) \right] u_{3,i} + \rho_{b_i} \left( \frac{z_{i+1} - z_i}{6} \right) u_{3,i+1} \right\} \\ &-\omega^2 \left\{ \rho_{f_{i-1}} \left( \frac{z_i - z_{i-1}}{6} \right) w_{3,i-1} + \left[ \rho_{f_{i-1}} \left( \frac{z_i - z_{i-1}}{3} \right) + \rho_{f_i} \left( \frac{z_{i+1} - z_i}{3} \right) \right] w_{3,i} + \rho_{f_i} \left( \frac{z_{i+1} - z_i}{6} \right) w_{3,i+1} \right\} \\ &-(\lambda_u + 2\mu)_{i-1} \left( \frac{1}{z_i - z_{i-1}} \right) u_{3,i-1} + \left[ (\lambda_u + 2\mu)_{i-1} \left( \frac{1}{z_i - z_{i-1}} \right) + \right. \\ &\quad \left. (\lambda_u + 2\mu)_i \left( \frac{1}{z_{i+1} - z_i} \right) \right] u_{3,i} - (\lambda_u + 2\mu)_i \left( \frac{1}{z_{i+1} - z_i} \right) u_{3,i+1} \\ &B_{i-1} \left( \frac{1}{z_i - z_{i-1}} \right) w_{3,i-1} + \left[ B_{i-1} \left( \frac{1}{z_i - z_{i-1}} \right) + B_i \left( \frac{1}{z_{i+1} - z_i} \right) \right] w_{3,i} - B_i \left( \frac{1}{z_{i+1} - z_i} \right) w_{3,i+1} \\ &+ \langle i\omega (\beta_{11}\rho_b + \beta_{12}\rho_f) u_{3,i} \cdot \mathbf{v} \rangle_i + \langle i\omega (\beta_{11}\rho_f + \beta_{12}g) w_{3,i} \cdot \mathbf{v} \rangle_i = (F^s, \varphi)_i. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Análogamente para la ecuación (3.25)

$$\begin{aligned} &-\omega^2 \left\{ \rho_{f_{i-1}} \left( \frac{z_i - z_{i-1}}{6} \right) u_{3,i-1} + \left[ \rho_{f_{i-1}} \left( \frac{z_i - z_{i-1}}{3} \right) + \rho_{f_i} \left( \frac{z_{i+1} - z_i}{3} \right) \right] u_{3,i} + \rho_{f_i} \left( \frac{z_{i+1} - z_i}{6} \right) u_{3,i+1} \right\} \\ &-\omega^2 \left\{ g_{i-1} \left( \frac{z_i - z_{i-1}}{6} \right) w_{3,i-1} + \left[ g_{i-1} \left( \frac{z_i - z_{i-1}}{3} \right) + g_i \left( \frac{z_{i+1} - z_i}{3} \right) \right] w_{3,i} + g_i \left( \frac{z_{i+1} - z_i}{6} \right) w_{3,i+1} \right\} \end{aligned}$$

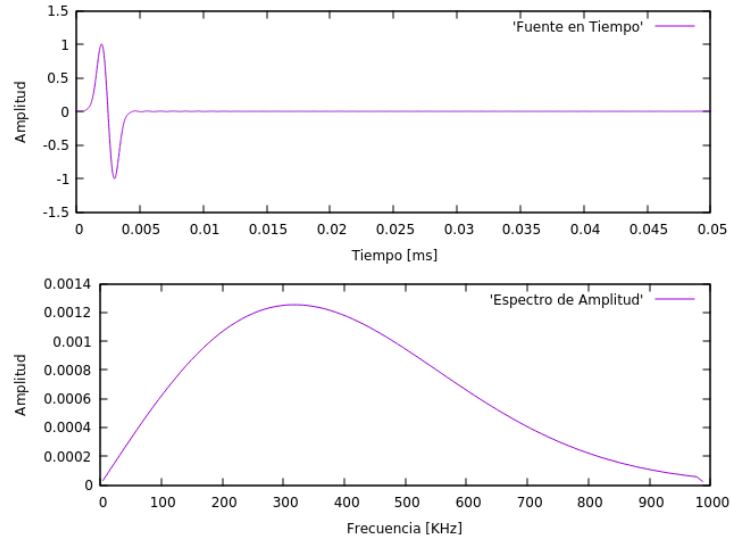
$$\begin{aligned}
& -i\omega \left\{ \frac{\eta}{\kappa_{i-1}} \left( \frac{z_i - z_{i-1}}{6} \right) w_{3,i-1} + \left[ \frac{\eta}{\kappa_{i-1}} \left( \frac{z_i - z_{i-1}}{3} \right) + \frac{\eta}{\kappa_i} \left( \frac{z_{i+1} - z_i}{3} \right) \right] w_{3,i} \right. \\
& \left. + \frac{\eta}{\kappa_i} \left( \frac{z_{i+1} - z_i}{6} \right) w_{3,i+1} \right\} \\
& -B_{i-1} \left( \frac{1}{z_i - z_{i-1}} \right) u_{3,i-1} + \left[ B_{i-1} \left( \frac{1}{z_i - z_{i-1}} \right) + B_i \left( \frac{1}{z_{i+1} - z_i} \right) \right] u_{3,i} - B_i \left( \frac{1}{z_{i+1} - z_i} \right) u_{3,i+1} \\
& -M_{i-1} \left( \frac{1}{z_i - z_{i-1}} \right) w_{3,i-1} + \left[ M_{i-1} \left( \frac{1}{z_i - z_{i-1}} \right) + M_i \left( \frac{1}{z_{i+1} - z_i} \right) \right] w_{3,i} - M_i \left( \frac{1}{z_{i+1} - z_i} \right) w_{3,i+1} \\
& + \langle i\omega (\beta_{21}\rho_b + \beta_{22}\rho_f) u_{3,i} \cdot \boldsymbol{\nu} \rangle + \langle i\omega (\beta_{21}\rho_f + \beta_{22}g) w_{3,i} \cdot \boldsymbol{\nu} \rangle = (F^f, \varphi). \tag{3.47}
\end{aligned}$$

Sumando (3.46) y (3.47) y ordenando según factor común de las incógnitas, resulta

$$\begin{aligned}
& \left[ -\omega^2 \rho_{b_{i-1}} \left( \frac{z_i - z_{i-1}}{6} \right) - (\lambda_u + 2\mu)_{i-1} \left( \frac{1}{z_i - z_{i-1}} \right) - \omega^2 \rho_{f_{i-1}} \left( \frac{z_i - z_{i-1}}{6} \right) - B_{i-1} \left( \frac{1}{z_i - z_{i-1}} \right) \right] u_{3,i-1} \\
& + \left[ -\omega^2 \rho_{b_{i-1}} \left( \frac{z_i - z_{i-1}}{3} \right) - \omega^2 \rho_{b_i} \left( \frac{z_{i+1} - z_i}{3} \right) + (\lambda_u + 2\mu)_{i-1} \left( \frac{1}{z_i - z_{i-1}} \right) + (\lambda_u + 2\mu)_i \left( \frac{1}{z_{i+1} - z_i} \right) \right. \\
& \left. - \omega^2 \rho_{f_{i-1}} \left( \frac{z_i - z_{i-1}}{3} \right) - \omega^2 \rho_{f_i} \left( \frac{z_{i+1} - z_i}{3} \right) + B_{i-1} \left( \frac{1}{z_i - z_{i-1}} \right) + B_i \left( \frac{1}{z_{i+1} - z_i} \right) \right] u_{3,i} \\
& + \left[ -\omega^2 \rho_{b_i} \left( \frac{z_{i+1} - z_i}{6} \right) - (\lambda_u + 2\mu)_i \left( \frac{1}{z_{i+1} - z_i} \right) - \omega^2 \rho_{f_i} \left( \frac{z_{i+1} - z_i}{6} \right) - B_i \left( \frac{1}{z_{i+1} - z_i} \right) \right] u_{3,i+1} \\
& + \left[ -\omega^2 \rho_{f_{i-1}} \left( \frac{z_i - z_{i-1}}{6} \right) - B_{i-1} \left( \frac{1}{z_i - z_{i-1}} \right) - \omega^2 g_{i-1} \left( \frac{z_i - z_{i-1}}{6} \right) - i\omega \frac{\eta}{\kappa_{i-1}} \left( \frac{z_i - z_{i-1}}{6} \right) \right. \\
& \left. - M_{i-1} \left( \frac{1}{z_i - z_{i-1}} \right) \right] w_{3,i-1} \\
& + \left[ -\omega^2 \rho_{f_{i-1}} \left( \frac{z_i - z_{i-1}}{3} \right) - \omega^2 \rho_{f_i} \left( \frac{z_{i+1} - z_i}{3} \right) + B_{i-1} \left( \frac{1}{z_i - z_{i-1}} \right) + B_i \left( \frac{1}{z_{i+1} - z_i} \right) \right. \\
& \left. - \omega^2 g_{i-1} \left( \frac{z_i - z_{i-1}}{3} \right) - \omega^2 g_i \left( \frac{z_{i+1} - z_i}{3} \right) - i\omega \frac{\eta}{\kappa_{i-1}} \left( \frac{z_i - z_{i-1}}{3} \right) - i\omega \frac{\eta}{\kappa_i} \left( \frac{z_{i+1} - z_i}{3} \right) \right. \\
& \left. M_{i-1} \left( \frac{1}{z_i - z_{i-1}} \right) + M_i \left( \frac{1}{z_{i+1} - z_i} \right) \right] w_{3,i} \\
& \left[ -\omega^2 \rho_{f_i} \left( \frac{z_{i+1} - z_i}{6} \right) - B_i \left( \frac{1}{z_{i+1} - z_i} \right) - \omega^2 g_i \left( \frac{z_{i+1} - z_i}{6} \right) - i\omega \frac{\eta}{\kappa_i} \left( \frac{z_{i+1} - z_i}{6} \right) \right. \\
& \left. - M_i \left( \frac{1}{z_{i+1} - z_i} \right) \right] w_{3,i+1} \\
& + \langle i\omega (\beta_{11}\rho_b + \beta_{12}\rho_f) u_{3,i} \cdot \boldsymbol{\nu} \rangle_i + \langle i\omega (\beta_{11}\rho_f + \beta_{12}g) w_{3,i} \cdot \boldsymbol{\nu} \rangle_i \\
& + \langle i\omega (\beta_{21}\rho_b + \beta_{22}\rho_f) u_{3,i} \cdot \boldsymbol{\nu} \rangle + \langle i\omega (\beta_{21}\rho_f + \beta_{22}g) w_{3,i} \cdot \boldsymbol{\nu} \rangle \\
& = (F^s, \varphi)_i + (F^f, \varphi). \tag{3.48}
\end{aligned}$$

De esta manera se genera un sistema de ecuaciones con seis incógnitas. Las tres incógnitas para el sólido son  $u_{i-1}, u_i$  y  $u_{i+1}$  mientras que las tres del fluido son  $w_{i-1}, w_i$  y  $w_{i+1}$ . Una vez generado el sistema de ecuaciones, se hallan las incógnitas usando el método de factorización  $LU$ . Los desplazamientos que se obtienen están en el dominio de la frecuencia, por lo que se transforman al dominio del tiempo usando transformada inversa de Fourier, obteniendo como resultado final las trazas sísmicas en cada receptor. El código computacional se escribió en lenguaje Fortran. Además, se coloca una fuente externa para el problema no homogéneo, posicionándola a través de un delta de Dirac.

Como este caso es en una sola dimensión, no es posible el estudio de la onda S, ya que no se permiten desplazamientos transversales.



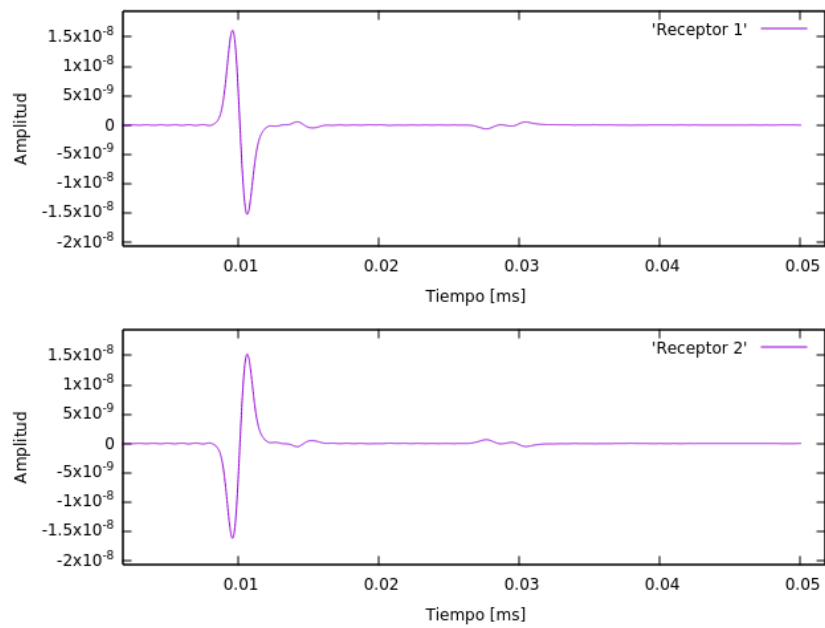
**Figura 3.2:** Fuente en el dominio del tiempo (arriba) y espectro de amplitud (abajo).

### 3.4. Ejemplo para una muestra Homogénea.

Implementado el código, se aplica a un medio homogéneo que corresponde a una arenisca *Nivelsteiner* saturada por agua. Los parámetros que caracterizan a esta arenisca pueden verse en la Tabla 1. La muestra es un cuadrado de 6 *cm* de lado, con una fuente colocada en el centro y dos receptores distanciados 2,3 *cm* a cada lado de la misma. La malla de elementos finitos tiene un tamaño de 0,004 *cm*. La fuente en tiempo y su espectro de amplitud se muestran en la Figura 3.2, siendo su frecuencia central 320 *KHz*. La velocidad de la onda P es 2,815 *m/ms*. En la Figura 3.3 se muestran los arribos a los receptores, donde puede apreciarse que la onda llega al mismo tiempo en ambos, a 0,008 *ms*, dado que la fuente es central y los receptores se colocan simétricos a ella. Las perturbaciones de baja amplitud en aproximadamente 0,027 *ms* corresponden a la onda P lenta, de velocidad 0,897 *m/ms*. El cálculo se realiza empleando 110 puntos en frecuencia para un intervalo de 0 a 100 *Hz*.

Granos Sólidos	Módulo de Bulk, $K_s$	$36 \times 10^{10} \text{ dyn/cm}^2$
	Densidad, $\rho_s$	$2,65 \text{ g/cm}^3$
Matriz Seca	Módulo de Corte, $\mu$	$4,55 \times 10^{10} \text{ dyn/cm}^2$
	Porosidad, $\phi$	0,33
	Módulo de Bulk, $K_m$	$6,21 \times 10^{10} \text{ dyn/cm}^2$
	Permeabilidad, $\kappa$	$4,9346165 \times 10^{-8} \text{ cm}^2$
Fluido 1: Gas	Densidad, $\rho_f$	$0,078 \text{ g/cm}^3$
	Módulo de Bulk, $K_f$	$0,012 \times 10^{10} \text{ dyn/cm}^2$
	Viscosidad, $\eta$	0,0015
Fluido 2: Agua	Densidad, $\rho_f$	$1,0 \text{ g/cm}^3$
	Módulo de Bulk, $K_f$	$2,223 \times 10^{10} \text{ dyn/cm}^2$
	Viscosidad, $\eta$	0,01 <i>Poise</i>

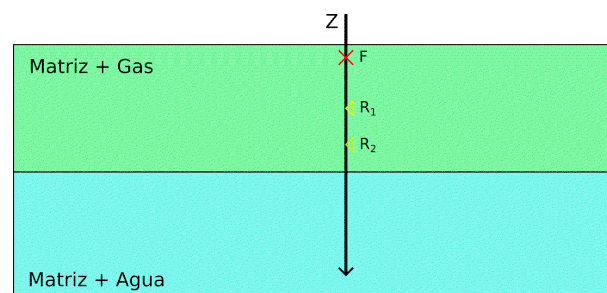
**Tabla 1:** Caracterización del medio.



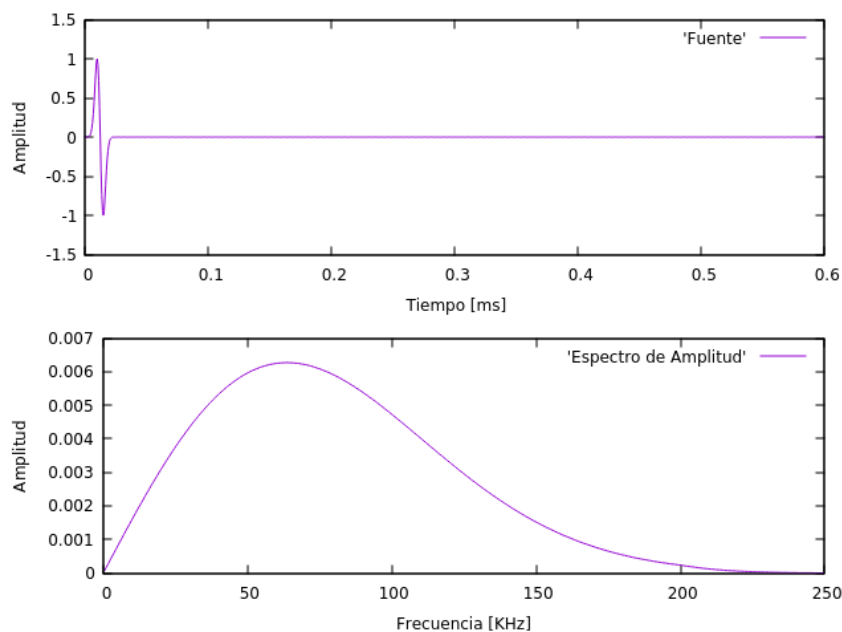
**Figura 3.3:** Trazas del receptor 1 a 0.7 cm de profundidad (arriba) y del receptor 2 a 5.3 cm de profundidad (abajo).

### 3.5. Ejemplo para un modelo de dos capas.

Se modela ahora para un medio de dos capas conformada por una *arenisca Nivelsteiner* con diferentes fluidos saturantes. El dominio es un cuadrado de 2 m de lado, el primer metro saturado con gas, y el segundo con agua. Dos receptores se ubican a 0.5 y 0.8 metros a partir de la superficie. Puede verse un diagrama del modelo geométrico en la Figura 3.4. La fuente se ubica cercana a la superficie, a 0.1 metro de profundidad, cuya forma en el tiempo y espectro de amplitud se muestran en la Figura 3.5. La malla de elementos tiene 1500 nodos, se calcula con 370 puntos en frecuencia y se mide por un período tiempo de 0.6 milisegundos. Las constantes que caracterizan al medio pueden verse en la Tabla 1.



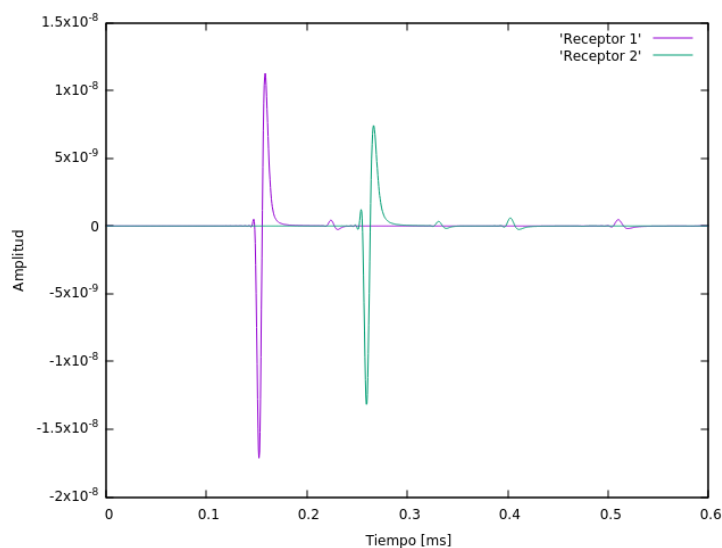
**Figura 3.4:** Modelo geométrico de dos capas compuesto por una arenisca saturada con gas (primer capa) y agua (segunda capa).



**Figura 3.5:** Fuente en el dominio del tiempo (arriba) y espectro de amplitud (abajo).

Las trazas registradas por los receptores se muestran en la Figura 3.6. Pueden observarse los arribos directos de la onda P al primer receptor (violeta) y al segundo receptor (verde), aproximadamente  $0,15ms$  y  $0,26ms$  de tiempo, respectivamente. La velocidad del medio es de  $2,62m/ms$ . El decaimiento en las amplitudes entre ambos receptores se explica por el modelo de atenuación utilizado.

Además, es posible visualizar en cada receptor un segundo arribo correspondiente a la llamada *onda fantasma*. Esta onda viaja de la fuente a superficie, donde se refleja para luego arribar al receptor. Es posible ver esta onda debido a que las condiciones de borde absorbentes no logran eliminar las reflexiones espurias en su totalidad. Cabe notar las señales reflejadas en la discontinuidad debido al cambio de fluido, según se muestra en Figura 3.6 como un tercer arribo. El receptor 2 recibe primero la reflexión por su mayor cercanía a la discontinuidad. La onda P lenta no se distingue en los registros debido al corto tiempo de simulación.



**Figura 3.6:** Señal de los receptores 1 y 2 para el primer medio saturado con gas y el segundo con agua.

### 3.6. Ejemplo para un medio con fluido efectivo.

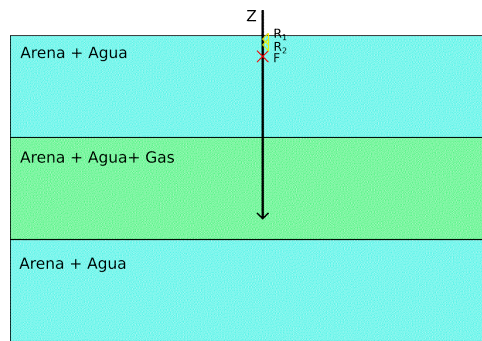
En este tercer ejemplo, se estudia el comportamiento de las respuestas de los receptores ante la presencia de más de un fluido saturante. Dado que la teoría considera una única fase fluida, se puede definir un *fluido efectivo*, que equivale a una ponderación de acuerdo a las saturaciones de los fluidos en cuestión.

Si  $s_a$  y  $s_g$ ,  $\rho_a$  y  $\rho_g$ , y  $K_a$  y  $K_g$  indican las saturaciones, las densidades y los módulos de bulk para el fluido, para el agua y el gas, respectivamente; las constantes físicas para el fluido efectivo pueden escribirse como:

$$\begin{aligned}\rho_{eff} &= s_a\rho_a + s_g\rho_g \\ \eta_{eff} &= s_a\eta_a + s_g\eta_g \\ K_{f\ eff} &= \left( \frac{s_a}{K_a} + \frac{s_g}{K_g} \right)^{-1}.\end{aligned}\tag{3.49}$$

Los valores de la densidad y la viscosidad están dados a partir de promedios pesados con la saturación, mientras que el módulo de Bulk se calcula a partir del límite inferior de Reuss (Mavko et al., 2009) bajo la hipótesis de que ambos fluidos se encuentran bajo la misma presión.

La simulación se realiza para un modelo con tres capas de 500 metros de espesor cada una. La primer y tercer capa se encuentran saturadas con agua, mientras que la segunda está saturada con un fluido efectivo que presenta distintas saturaciones de gas y agua en cada prueba. La matriz sólida está compuesta por una arenisca Nivelsteiner. La fuente es del mismo tipo que los ejemplos anteriores, con frecuencia central en 40 Hz. Los receptores se encuentran en superficie y la fuente a 5 metros de profundidad. El modelo se ilustra en la Figura 3.7. Los parámetros físicos utilizados son los mismos que para los casos anteriores y corresponden a la Tabla 1.

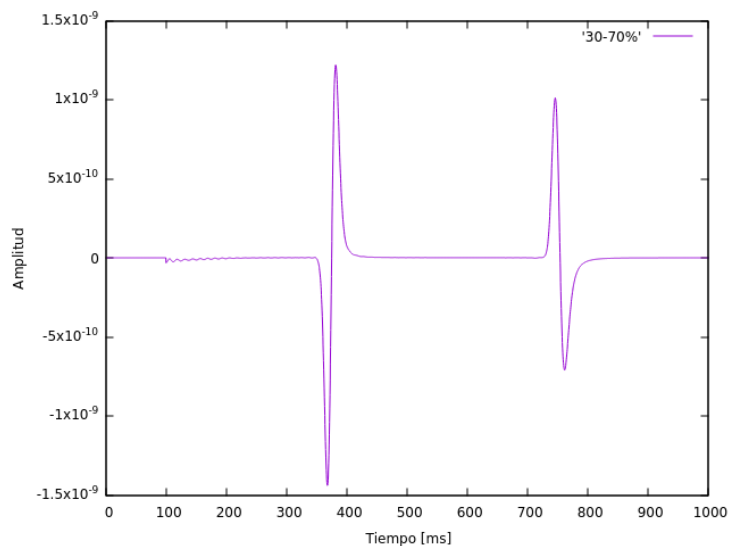


**Figura 3.7:** Modelo geométrico de tres capas compuesto por una arenisca saturada con gas (primer y tercer capa) y con un fluido efectivo (segunda capa).

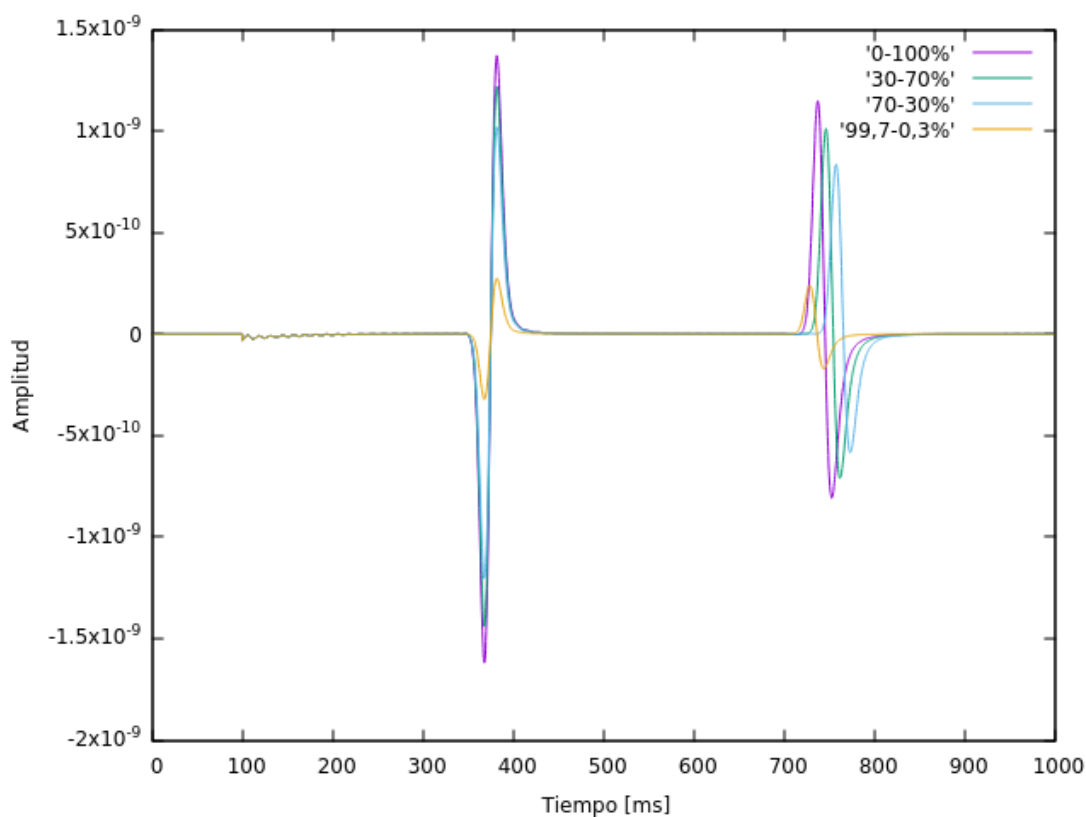
En este estudio se ha silenciado el comienzo de la traza para no observar la onda directa, de poco interés en este caso. De esta forma, el primer arribo que es posible ver en los registros corresponde a la onda reflejada en la interfaz del primer medio con el segundo.

Se realizan distintas pruebas para ver los tiempos y amplitudes en la onda reflejada. La primer prueba se realiza con una saturación del 30% de agua y del 70% de gas. El resultado del receptor  $R1$  se muestra en la Figura 3.8. Pueden verse dos arribos de gran amplitud, el primero correspondiente a la onda reflejada en la interfaz del primer medio con el segundo medio. El segundo arribo corresponde a la onda reflejada en la interfaz

entre el segundo y tercer medio, y por lo tanto viaja por el medio saturado con velocidad del fluido efectivo. Las velocidades de las ondas P rápidas son  $2,81m/ms$  para los medios saturados con agua, y de  $2,58m/ms$  para el medio efectivo.



**Figura 3.8:** Receptor 1 para el caso dónde la capa dos cuenta con un fluido efectivo con saturaciones de 30% de agua y 70% de gas.

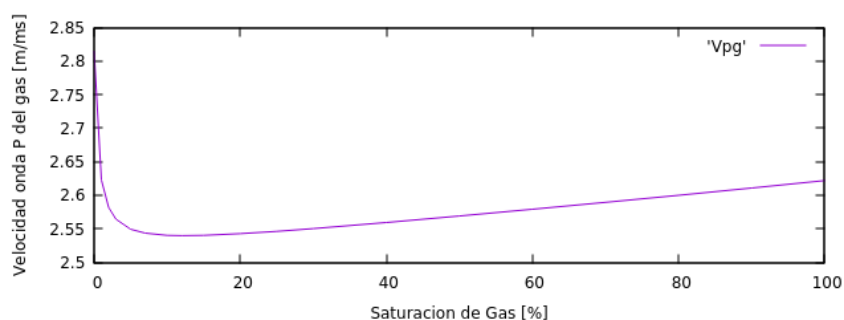


**Figura 3.9:** Receptor 1 para el caso donde la segunda capa contiene un fluido efectivo con relaciones agua-gas del 99,7% - 0,3% (naranja), 70% - 30% (celeste), 30% - 70% (verde); y 100% contenido de gas (violeta).

La onda reflejada en la interfaz formada por el primer y segundo medio viaja a la



velocidad del medio saturado con agua, por lo que es esperable que al momento de modificar las relaciones agua-gas del medio saturado por el fluido efectivo, su velocidad no cambie y por lo tanto tampoco lo haga su tiempo de arribo. Asimismo, al cambiar el coeficiente de reflexión se puede notar el cambio en amplitud de la señal. Sin embargo, mientras era esperable que la velocidad de la onda P del medio saturado con fluido efectivo disminuya a medida que la concentración de gas aumenta, se observa un comportamiento distinto. Al agregar una pequeña cantidad de gas a la mezcla la velocidad del medio disminuye considerablemente, alcanzando un mínimo para una concentración de gas del 12 % y aumentando hasta alcanzar un máximo de 2,62  $m/ms$  cuando se cuenta con un medio saturado solamente con gas. En la Figura 3.9 se muestran los registros del primer receptor, para relaciones de concentración agua-gas del 99,7 % - 0.3 % (naranja), 70 % - 30 % (celeste), 30 % - 70 % (verde); y 100 % contenido de gas (violeta), donde puede apreciarse que para la mayor concentración de agua (onda naranja), el arribo de la onda que viaja por el medio efectivo llega poco tiempo antes de las demás. Al alcanzar una concentración de gas del 30 % la onda que viaja por el mismo medio se registra un tiempo más tarde que para las demás concentraciones, pudiendo apreciarse que al aumentar la cantidad de gas el tiempo de arribo disminuye, al aumentar la velocidad. El cambio de velocidad con respecto a la concentración de gas se encuentra graficado en la Figura 3.10. El mismo gráfico se obtuvo calculando la velocidad de la onda P para distintas saturaciones de gas.



**Figura 3.10:** Cambio de la velocidad del medio saturado con un fluido efectivo donde se va variando la saturación del gas.



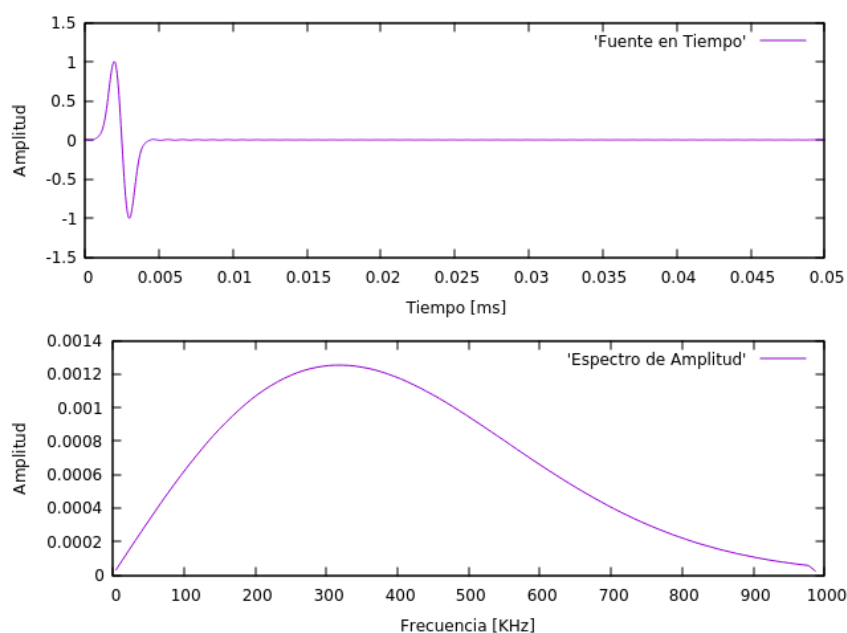
## 4. Ecuaciones de Biot en Dos Dimensiones.

En el capítulo anterior se resolvieron las ecuaciones para el caso de una sola dimensión, donde todo movimiento ocurre en una misma línea. En este capítulo se presenta el modelo computacional para el caso de dos dimensiones, donde los movimientos ocurrirán en un plano. Debido a la cantidad de datos que maneja el programa es necesario implementarlo en paralelo. Esto quiere decir que se utilizan más de un procesador para correrlo, a cada procesador se le adjudica una parte del dominio para resolver y debe haber comunicación de información entre los distintos procesadores. En esta sección se estudia y se usa un código computacional ya desarrollado por el Departamento de Aplicada de la Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas de la UNLP.

### 4.1. Ejemplo para un Medio Homogéneo

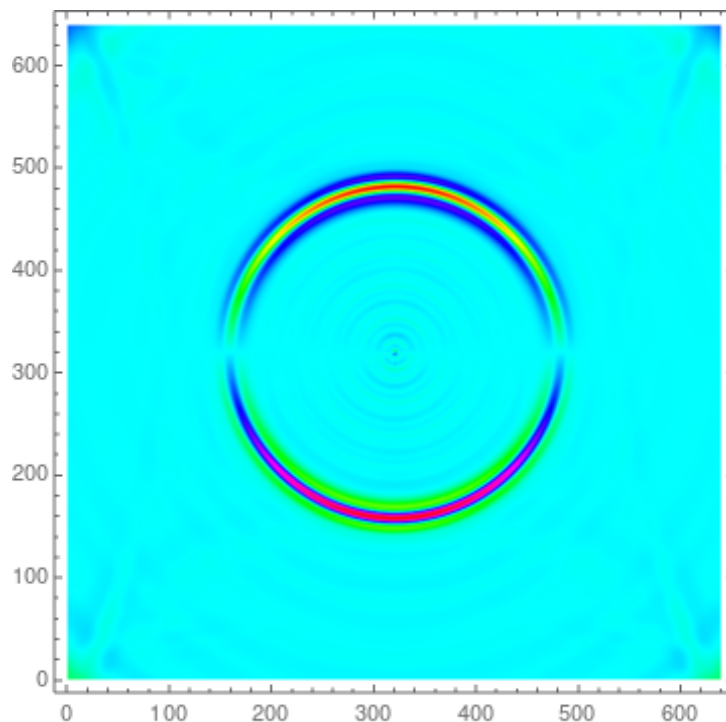
El código computacional se aplica a un medio homogéneo de 6 centímetros de ancho por 6 cm de largo. Dicho medio corresponde a la misma arenisca Nivelsteiner saturada con agua y se recuerda que las propiedades del medio se encuentran en la Tabla 1. La fuente utilizada se muestra en la Figura 4.1 y se localiza en el centro del dominio.

El programa está implementado para correr en máquinas con arquitectura en paralelo y fue posible hacerlo con un total de 64 procesadores. La forma de programación recibe el nombre de SPMD (Single Program Multiple Data), con comunicación de información entre procesadores empleando el protocolo MPI (Message Passing Interface) para enviar y recibir información. Se utiliza una malla de 640 nodos tanto en el eje  $x$  como en el eje  $y$  y con un total de 110 puntos en frecuencia para un intervalo entre 1 y 1000 kHz. Si se usan 8 procesadores en la dirección  $x$  y en la dirección  $y$ , cada uno de ellos resuelve una parte del problema que tiene  $80 \times 80$  nodos, cantidad considerablemente inferior a la original.



**Figura 4.1:** Fuente en el dominio del tiempo (arriba) y espectro de amplitud (abajo).

Las velocidades calculadas para la onda P rápida es de  $2,969m/ms$ , para la onda S  $1,644m/ms$  y para la onda P lenta  $0,976m/ms$ . La simulación se corrió para un tiempo



**Figura 4.2:** Componente vertical de la velocidad de las partículas de la fase sólida a 0.008 milisegundos.

total de 0.05 milisegundos.

Se considera la divergencia para la fuente y se muestra en un tiempo de  $0,008ms$  la propagación de las ondas. Como el medio es homogéneo, no se produce ningún fenómeno de reflexión o refracción de la onda, y por lo tanto el frente de ondas es radial con centro en la fuente. En la Figura 4.2 puede verse el frente de ondas para la onda P rápida.

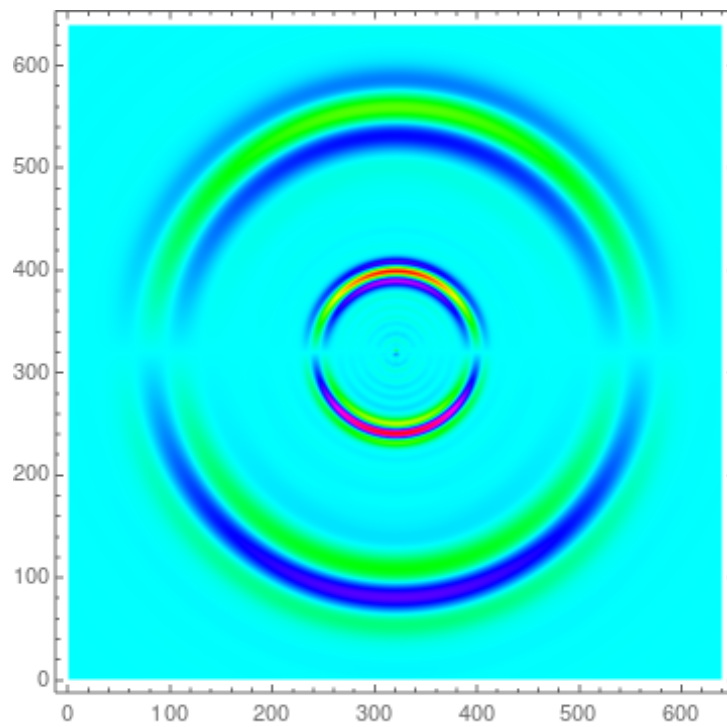
En la Figura (4.3), correspondiente a un tiempo de  $0,010ms$ , se observan dos frentes de ondas. Los mismos corresponden con la onda P rápida, el de mayor radio, y con la onda P lenta, el de menor radio.

Para destacar la onda de corte, en la Figura 4.4 se grafica la componente  $y$  del rotor de la velocidad de las partículas a un tiempo de  $0,010ms$ . En este caso, la única onda que aparece es la onda S.

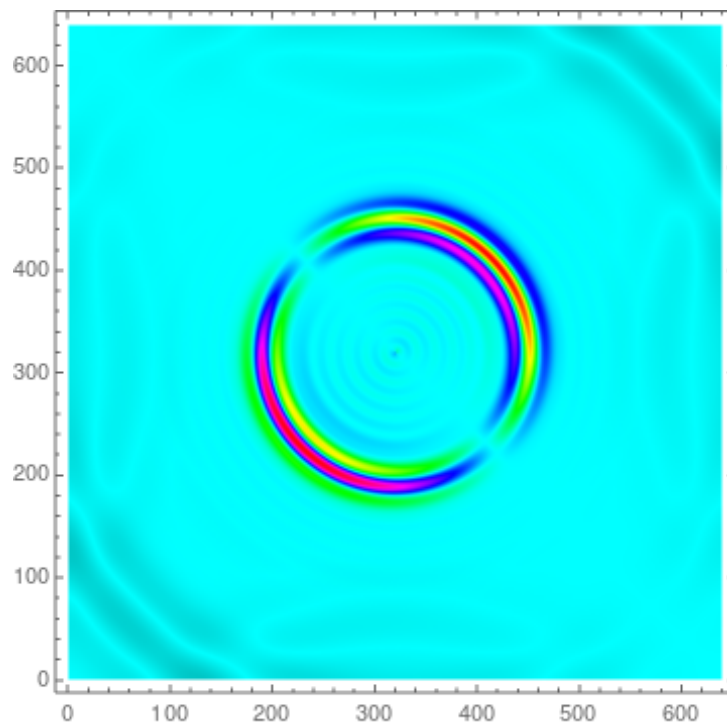
## 4.2. Ejemplo para un Medio con Fluido Efectivo.

Al igual que en el caso de Biot para una dimensión, se realiza el cálculo de propagación de ondas para un medio saturado por un fluido efectivo. Se describe un medio con dos capas, en un dominio de  $1 Km$  de largo por  $1 Km$  de profundidad. El primer medio corresponde a la arenisca Nivelsteiner saturada con agua, desde superficie a los  $500 m$  de profundidad; mientras que para el segundo medio, su fluido es un fluido efectivo. Este fluido efectivo es una combinación entre distintas saturaciones de gas y agua, cuyos parámetros son dados según (3.49). La Tabla 1 muestra los valores usados para cada fase fluida. El modelo geométrico puede verse en la Figura 4.6.

Se realiza la simulación con el código Fortran en paralelo usando 64 procesadores. La discretización del dominio se realizó con 256 elementos tanto para el eje horizontal como para el vertical. El programa calcula con 100 puntos en frecuencia entre 1 y 60 Hz, para una fuente tipo Ricker (Figura 4.5) con una frecuencia central de  $30 Hz$  y un tiempo total de 1 segundo. La fuente se ubica a 250 metros de distancia en el eje horizontal, y a 10m

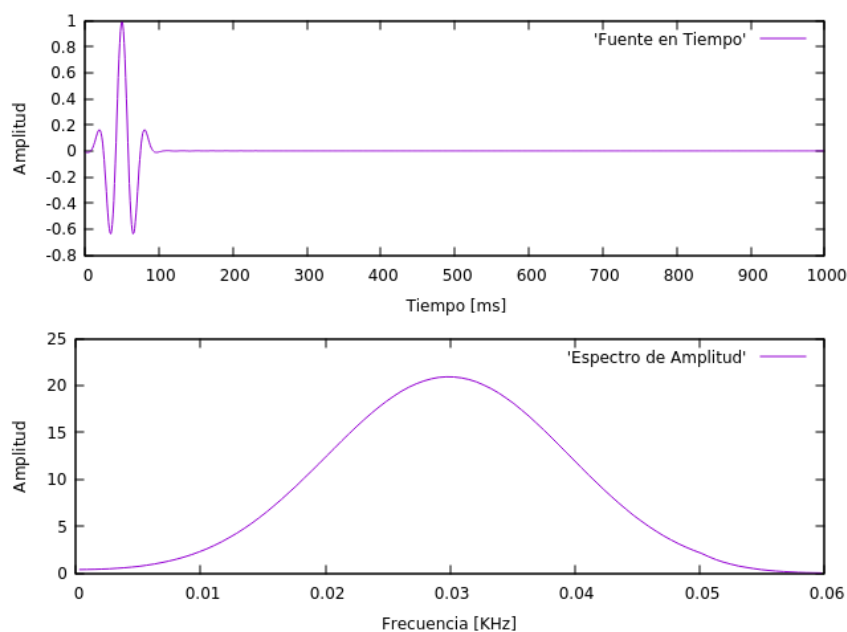


**Figura 4.3:** Componente vertical de la velocidad de las partículas de la fase sólida a 0.010 milisegundos.

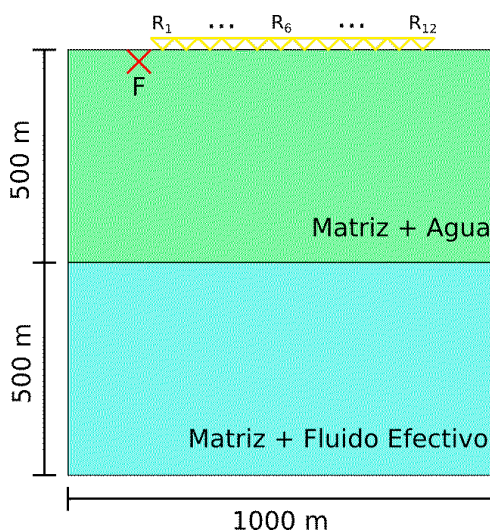


**Figura 4.4:** Propagación de onda S, rotor del desplazamiento, a 0.010 milisegundos.

de profundidad. Se registraron las ondas que llegaban a superficie con un tendido de 12 geófonos, con un offset mínimo de 50 m, y una distancia entre geófonos también de 50 m.



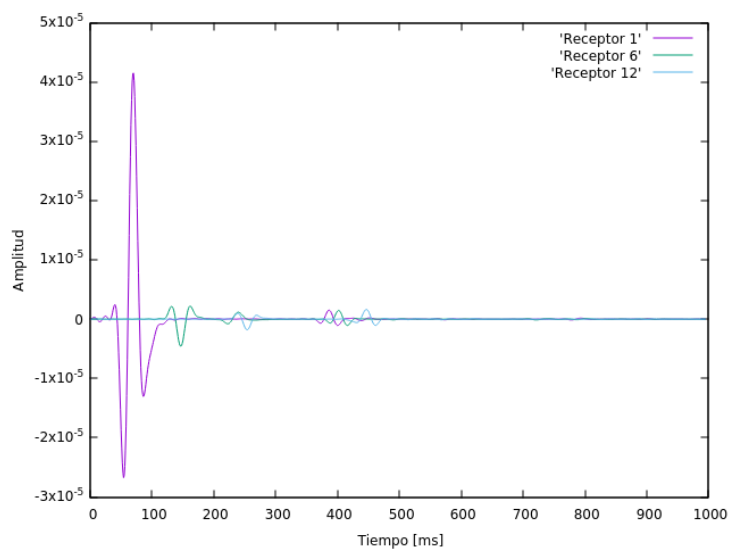
**Figura 4.5:** Fuente en el dominio del tiempo (arriba) y espectro de amplitud (abajo).



**Figura 4.6:** Modelo geométrico de dos capas compuesta por una arenisca con agua (primer capa) y un fluido efectivo (segunda capa).

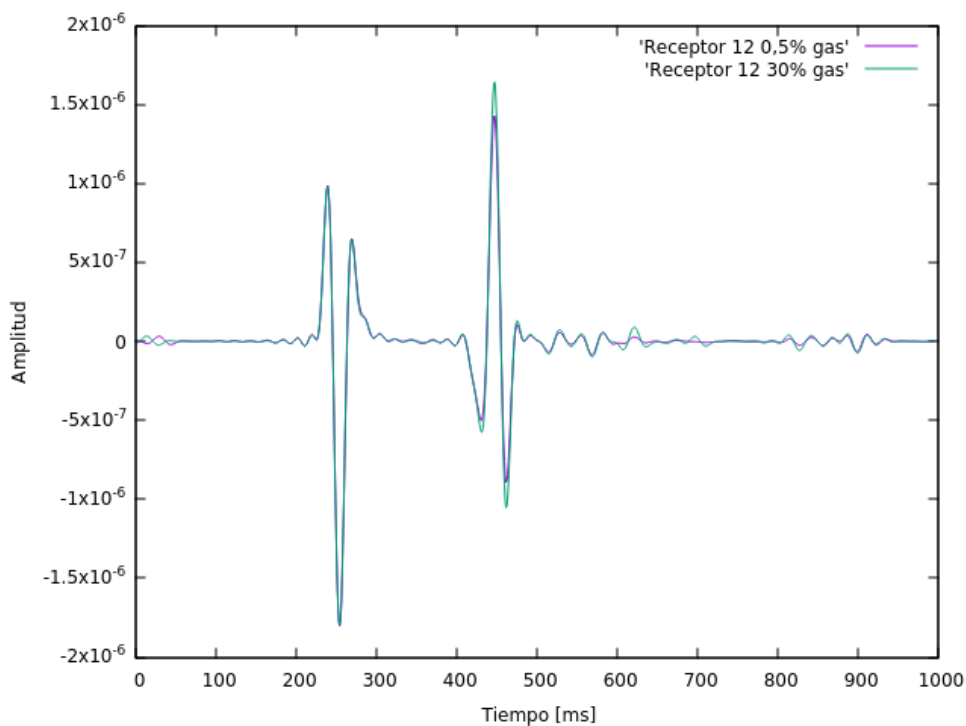
Se realiza la prueba para saturaciones de gas del 0.5 % y 30 %, analizando las trazas obtenidas para los receptores localizados 50 m de la fuente, a 300 m y a 600 m. En la Figura 4.7 pueden verse las trazas para dichos receptores, para una saturación del 30 % de gas. En la misma puede observarse que los tres receptores cuentan con dos saltos en amplitud importantes, el primero correspondiente con el primer arribo de la onda directa, y el segundo con la reflexión con el segundo medio, el medio efectivo. El primer arribo del primer receptor presenta una amplitud mucho mayor a los primeros arribos de los otros dos receptores y esto se debe a su cercanía de la fuente. La atenuación se representa mediante el modelo de Liu et al. (1976) con un valor medio del factor de calidad  $Q$  de 80,

aplicado al módulo de onda plana, al módulo de corte y a los granos sólidos de la matriz rocosa.



**Figura 4.7:** Trazas en los receptores a 50 m (violeta), 300 m (verde) y 600 m (azul), para una concentración de 30 % de gas en el segundo medio.

Comparando las trazas con distintas saturaciones de gas para el receptor localizado 600m, Figura 4.8, puede notarse que para la menor concentración de gas (0.5 %, color violeta) la amplitud del arribo para la reflexión en el medio con fluido efectivo es menor. Al aumentar la saturación del gas, la amplitud de la reflexión aumenta. Esta situación es esperable si se piensa, por ejemplo, en la respuesta de AVO para arenas con presencia de gas.



**Figura 4.8:** Trazas de los receptores a 600m, para saturaciones de gas del 0.5 % (violeta) y 30 % (verde).





## 5. Ecuaciones de Biot en Tres Dimensiones.

En los capítulos anteriores se han resuelto las ecuaciones de Biot para el caso uni y bidimensional. Ahora se extenderá la formulación para el caso tridimensional. El foco principal de este trabajo se encuentra en el presente Capítulo, por esta razón, se desarrolla de manera detallada.

En general, el MEF conduce a sistemas de ecuaciones lineales grandes que requieren de técnicas especiales para ser resueltos. El algoritmo implementado tiene la particularidad de resolver un sistema de ecuaciones lineales pequeño vinculado a cada elemento finito. Luego, deben relacionarse todos estos elementos cumpliendo las condiciones de continuidad de los desplazamientos y de las tensiones para finalmente, ir actualizándose sus incógnitas en un procedimiento iterativo. Se opta por este procedimiento de alto costo computacional, en virtud de que la resolución del sistema de ecuaciones es sumamente sencilla.

### 5.1. Formulación del Modelo Diferencial.

Las ecuaciones de Biot 3D en el dominio espacio-frecuencia para hallar  $\mathbf{u}(x, y, z, \omega)$  y  $\mathbf{w}(x, y, z, \omega)$  son:

$$\begin{aligned} -\omega^2 \rho(x, y, z) \mathbf{u}(x, y, z, \omega) - \omega^2 \rho_f(x, y, z) \mathbf{w}(x, y, z, \omega) - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}) &= F^s(x, y, z, \omega), \\ -\omega^2 \rho_f(x, y, z) \mathbf{u}(x, y, z, \omega) - \omega^2 g(x, y, z, \omega) \mathbf{w}(x, y, z, \omega) + i\omega d(x, y, z, \omega) \mathbf{w}(x, y, z, \omega) \\ + \nabla P_f(\mathbf{u}) &= F^f(x, y, z, \omega), \end{aligned}$$

siendo las relaciones constitutivas

$$\begin{aligned} \tau_{ij}(\mathbf{U}) &= 2\mu(x, y, z, \omega) \varepsilon_{ij} + \delta_{ij}(\lambda_c(x, y, z, \omega) \varepsilon_{ii} - B(x, y, z, \omega) \xi^f), \\ P_f(\mathbf{U}) &= -B(x, y, z, \omega) \varepsilon_{ii} + M(x, y, z, \omega) \xi^f, \end{aligned} \tag{5.1}$$

con  $\mathbf{U} = (\mathbf{u}, \mathbf{w})$  y  $i, j = 1, 2, 3$ .

Para completar el planteo del problema se precisan determinar las condiciones de borde. En general, el dominio donde se va a usar el simulador de propagación de ondas es una región acotada, con bordes delimitados, pero representando una frontera artificial que las ondas atraviesan sin modificaciones. En estos casos habrá que plantear *condiciones de borde absorbentes*, para que las reflexiones espurias sean minimizadas.

#### 5.1.1. Condiciones de Borde Absorbentes.

La condición de borde absorbente de primer orden para un medio sólido 3D, puede escribirse como (Santos y Gauzellino, 2016):

$$-\mathcal{F}_s = \mathcal{B}(\dot{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\nu}, \dot{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\chi}^1, \dot{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\chi}^2), \tag{5.2}$$

donde  $\dot{\mathbf{u}}$  denota la primer derivada con respecto al tiempo del desplazamiento,  $\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\chi}^1$ , y  $\boldsymbol{\chi}^2$  son los vectores normal y tangenciales para cada cara, respectivamente.  $\mathcal{F}_s$  son las fuerzas totales que se aplican en la superficie  $s$ , el borde del dominio. En este caso el vector de desplazamiento  $\mathbf{u}$  se encuentra en el dominio del tiempo. La matriz  $\mathcal{B}$ , definida positiva, es una matriz de coeficientes dados por

$$\mathcal{B} = \rho \mathcal{L}^{1/2}, \tag{5.3}$$

donde  $\rho$  es la densidad del medio y  $\mathcal{L} = \mathbf{N}^t \mathbf{\Lambda} \mathbf{N}$ .  $\mathbf{N}$  es la matriz que contiene los autovectores de  $\mathcal{L}$  y la matriz diagonal  $\mathbf{\Lambda}$  contiene los autovalores  $c_1^2$ ,  $c_2^2$  y  $c_3^2$ .  $c_1^2$  corresponde a la velocidad de la onda P y  $c_2^2 = c_3^2$  corresponden a la velocidad de la onda S.

Cuando el dominio es un material poroso, saturado por un fluido, hay que hacer una modificación a lo anterior. La condición de borde absorbente se expresa como

$$\mathcal{B}_p (\dot{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\nu}, \dot{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\chi}^1, \dot{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\chi}^2, \dot{\mathbf{w}} \cdot \boldsymbol{\nu}), \quad (5.4)$$

considerando ahora la incorporación de la primer derivada con respecto al tiempo del desplazamiento del fluido,  $\dot{\mathbf{w}}$ . En este caso, la matriz  $\mathcal{B}_p$  se define como

$$\mathcal{B}_p = \left[ (\mathcal{A}_p^{-1} \mathcal{E}_p)^t \right]^{1/2} \mathcal{A}_p, \quad (5.5)$$

siendo las matrices  $\mathcal{A}_p$  y  $\mathcal{E}_p$

$$\mathcal{A}_p = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & \rho_f \\ 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 \\ \rho_f & 0 & 0 & g \end{pmatrix}, \quad \mathcal{E}_p = \begin{pmatrix} \lambda_c + 2\mu & 0 & 0 & B \\ 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 \\ B & 0 & 0 & M \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

En estas expresiones  $q$  indica

$$q = \rho - g^{-1} \rho_f^2. \quad (5.7)$$

En el dominio de la frecuencia, la condición (5.4) es

$$-i\omega \mathcal{B}_p (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu}, \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\chi}^1, \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\chi}^2, \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\nu}). \quad (5.8)$$

denotando  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{w}$  como los desplazamientos del sólido y del fluido en el dominio de la frecuencia; y por lo tanto, la condición de borde absorbente toma la forma

$$(-\tau(u_j) \nu_j \cdot \nu_j, -\tau(u_j) \nu_j \cdot \chi_j^1, -\tau(u_j) \nu_j \cdot \chi_j^2, P_f \cdot \nu_j) = -i\omega \mathcal{B}_p (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu}, \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\chi}^1, \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\chi}^2, \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\nu}). \quad (5.9)$$

## 5.2. Formulación por Elementos Finitos.

### 5.2.1. Forma Variacional.

Para obtener la forma variacional se multiplica por las funciones de prueba  $\mathbf{v}^s$  y  $\mathbf{v}^f$  para el sólido y el fluido respectivamente. Recordando que se deben reducir los términos a derivadas de primer orden y se integra por partes para incluir la condición de borde, el problema sumando ambas ecuaciones se enuncia finalmente como: hallar  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{w}$  tal que

$$\begin{aligned} & -\omega^2 (\rho u_j + \rho_f w_j, \mathbf{v}^s) - \omega^2 (\rho_f u_j + g w_j, \mathbf{v}^f) + i\omega (d w_j, \mathbf{v}^f) \\ & + \Lambda(\mathbf{U}, \mathbf{v}) - \langle \tau(u_j), \mathbf{v}^s \rangle_\Gamma + \langle P_f(u_j), \mathbf{v}^f \rangle_\Gamma \\ & = (F^s, \mathbf{v}^s) + (F^f, \mathbf{v}^f), \end{aligned} \quad (5.10)$$

donde por simplicidad se ha omitido en la escritura la dependencia explícita de las variables y se ha expresado en componentes, siendo  $j = 1, 2, 3$ . Además,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  determina la integral sobre las caras que forman el borde. El término especial  $\Lambda(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  está dado por

$$\Lambda(\mathbf{U}, \mathbf{v}) = \sum_{pq} \left( \tau_{pq}(\mathbf{U}), \varepsilon_{pq}(\mathbf{v}^s) \right) - \left( P_f(\mathbf{U}), \nabla \cdot \mathbf{v}^f \right), \quad (5.11)$$

donde  $p, q = 1, 2, 3$  y en forma explícita es

$$\begin{aligned}
\Lambda(\mathbf{U}, \mathbf{v}) &= (2\mu\varepsilon_{11}(\mathbf{u}) + \lambda_c [\varepsilon_{11}(\mathbf{u}) + \varepsilon_{22}(\mathbf{u}) + \varepsilon_{33}(\mathbf{u})] + B\nabla \cdot \mathbf{w}, \varepsilon_{11}(\mathbf{v}^s)) \\
&+ (2\mu\varepsilon_{22}(\mathbf{u}) + \lambda_c [\varepsilon_{11}(\mathbf{u}) + \varepsilon_{22}(\mathbf{u}) + \varepsilon_{33}(\mathbf{u})] + B\nabla \cdot \mathbf{w}, \varepsilon_{22}(\mathbf{v}^s)) \\
&+ (2\mu\varepsilon_{33}(\mathbf{u}) + \lambda_c [\varepsilon_{11}(\mathbf{u}) + \varepsilon_{22}(\mathbf{u}) + \varepsilon_{33}(\mathbf{u})] + B\nabla \cdot \mathbf{w}, \varepsilon_{33}(\mathbf{v}^s)) \\
&+ (B [\varepsilon_{11}(\mathbf{u}) + \varepsilon_{22}(\mathbf{u}) + \varepsilon_{33}(\mathbf{u})] + M\nabla \cdot \mathbf{w}, \nabla \cdot \mathbf{v}^f) \\
&+ (4\mu\varepsilon_{12}(\mathbf{u}), \varepsilon_{12}(\mathbf{v}^s)) \\
&+ (4\mu\varepsilon_{13}(\mathbf{u}), \varepsilon_{13}(\mathbf{v}^s)) \\
&+ (4\mu\varepsilon_{23}(\mathbf{u}), \varepsilon_{23}(\mathbf{v}^s)).
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Tanto  $\mathbf{u}$  como  $\mathbf{v}$  pertenecen al espacio de Sobolev de funciones en  $L^2(\Omega)$  con derivadas primeras en  $L^2(\Omega)$  y en  $[H^1(\Omega)]^3$  respectivamente.

### 5.2.2. Partición del Dominio y Funciones Base.

La extensión de la malla de elementos finitos rectangulares en 2D, concluye en una partición  $\mathcal{T}^h(\Omega)$  del dominio  $\Omega$  en hexaedros regulares no solapados  $\Omega_j$  de diámetro  $h$ . Así, el dominio cerrado es  $\bar{\Omega} = \cup_j \bar{\Omega}_j$ . Llamando  $\partial\Omega_j$  a los lados de cada cubo, entonces se define  $\Gamma_{jk} = \partial\Omega_j \cap \partial\Omega_k$  al lado común entre dos cubos adyacentes  $\Omega_j$  y  $\Omega_k$ , y  $\Gamma_j = \partial\Omega_j \cap \Gamma$  a la frontera externa del dominio. También  $\xi_j$  y  $\xi_{jk}$  indican los centroides de  $\Gamma_j$  y  $\Gamma_{jk}$  respectivamente.

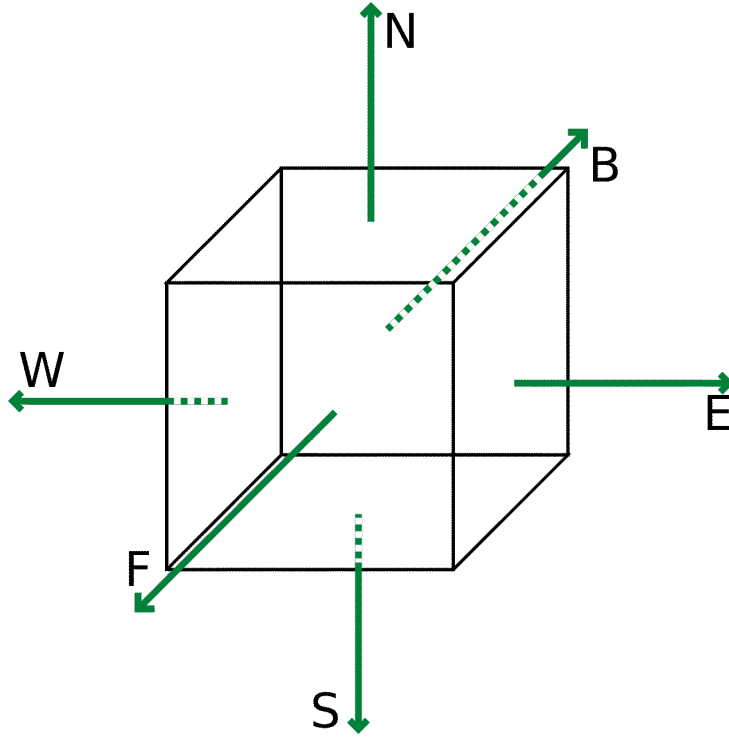
En este caso 3D, se considera un espacio de elementos finitos no conformes que se construye a partir del siguiente elemento de referencia  $\hat{R} = [-1, 1]^3$ ,

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(\hat{R}) = \text{Span} \left\{ \pm \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{4}x^4, \pm \frac{1}{2}y - \frac{3}{4}y^2 + \frac{5}{4}y^4, \pm \frac{1}{2}z - \frac{3}{4}z^2 + \frac{5}{4}z^4, \right. \\
\left. 1 + \frac{3}{2} \left( x^2 + y^2 + z^2 - \frac{5}{3}(x^4 + y^4 + z^4) \right) \right\}.
\end{aligned}$$

Los seis nodos asociados con  $\mathcal{S}(\hat{R})$  son los valores en los puntos medios de las caras de  $\hat{R}$ . Los desplazamientos nodales son los grados de libertad. La Figura 5.1 ejemplifica la posición de los puntos nodales en el elemento para las componentes de los desplazamientos de las fases sólida y fluida. Asimismo se indica la dirección de las normales a las caras; por ejemplo, la letra E hace referencia a la cara Este y su normal externa está dirigida hacia el eje-y positivo, mientras que la normal externa de la cara West (W) está dirigida hacia el eje-y negativo. En la dirección del eje-x, se define la cara Front (F) con normal externa en el sentido positivo del eje y la cara Back (B) con su normal en el sentido negativo. En forma análoga, las letras N y S hacen referencia a las caras Norte y Sur, con sus respectivas normales externas en el sentido positivo y negativo del eje-z.

En el hexaedro de referencia de lados  $h_x, h_y$  y  $h_z$ , teniendo presente las definiciones anteriores, las seis funciones base para el sólido se eligen como

$$\begin{aligned}
\varphi^B(x, y, z) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \left( -1 + \frac{2x}{h_x} \right) + \frac{1}{4} \left\{ -2 \left[ \left( -1 + \frac{2x}{h_x} \right)^2 - \frac{5}{3} \left( -1 + \frac{2x}{h_x} \right)^4 \right] + \right. \\
\left. \left( -1 + \frac{2y}{h_y} \right)^2 - \frac{5}{3} \left( -1 + \frac{2y}{h_y} \right)^4 + \left( -1 + \frac{2z}{h_z} \right)^2 - \frac{5}{3} \left( -1 + \frac{2z}{h_z} \right)^4 \right\}, \tag{5.13}
\end{aligned}$$



**Figura 5.1:** Elemento donde las letras E, W, F, B, N y S hacen referencia a la denominación de las caras del elemento y la dirección de las normales externas a las mismas.

$$\varphi^F(x, y, z) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \left( -1 + \frac{2x}{h_x} \right) + \frac{1}{4} \left\{ -2 \left[ \left( -1 + \frac{2x}{h_x} \right)^2 - \frac{5}{3} \left( -1 + \frac{2x}{h_x} \right)^4 \right] + \left( -1 + \frac{2y}{h_y} \right)^2 - \frac{5}{3} \left( -1 + \frac{2y}{h_y} \right)^4 + \left( -1 + \frac{2z}{h_z} \right)^2 - \frac{5}{3} \left( -1 + \frac{2z}{h_z} \right)^4 \right\}, \quad (5.14)$$

$$\varphi^E(x, y, z) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \left( -1 + \frac{2y}{h_y} \right) + \frac{1}{4} \left\{ -2 \left[ \left( -1 + \frac{2y}{h_y} \right)^2 - \frac{5}{3} \left( -1 + \frac{2y}{h_y} \right)^4 \right] + \left( -1 + \frac{2x}{h_x} \right)^2 - \frac{5}{3} \left( -1 + \frac{2x}{h_x} \right)^4 + \left( -1 + \frac{2z}{h_z} \right)^2 - \frac{5}{3} \left( -1 + \frac{2z}{h_z} \right)^4 \right\}, \quad (5.15)$$

$$\varphi^W(x, y, z) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \left( -1 + \frac{2y}{h_y} \right) + \frac{1}{4} \left\{ -2 \left[ \left( -1 + \frac{2y}{h_y} \right)^2 - \frac{5}{3} \left( -1 + \frac{2y}{h_y} \right)^4 \right] + \left( -1 + \frac{2x}{h_x} \right)^2 - \frac{5}{3} \left( -1 + \frac{2x}{h_x} \right)^4 + \left( -1 + \frac{2z}{h_z} \right)^2 - \frac{5}{3} \left( -1 + \frac{2z}{h_z} \right)^4 \right\}, \quad (5.16)$$

$$\varphi^N(x, y, z) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \left( -1 + \frac{2z}{h_z} \right) + \frac{1}{4} \left\{ -2 \left[ \left( -1 + \frac{2z}{h_z} \right)^2 - \frac{5}{3} \left( -1 + \frac{2z}{h_z} \right)^4 \right] + \left( -1 + \frac{2x}{h_x} \right)^2 - \frac{5}{3} \left( -1 + \frac{2x}{h_x} \right)^4 + \left( -1 + \frac{2y}{h_y} \right)^2 - \frac{5}{3} \left( -1 + \frac{2y}{h_y} \right)^4 \right\}, \quad (5.17)$$

$$\varphi^S(x, y, z) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \left( -1 + \frac{2z}{h_z} \right) + \frac{1}{4} \left\{ -2 \left[ \left( -1 + \frac{2z}{h_z} \right)^2 - \frac{5}{3} \left( -1 + \frac{2z}{h_z} \right)^4 \right] + \left( -1 + \frac{2x}{h_x} \right)^2 - \frac{5}{3} \left( -1 + \frac{2x}{h_x} \right)^4 + \left( -1 + \frac{2y}{h_y} \right)^2 - \frac{5}{3} \left( -1 + \frac{2y}{h_y} \right)^4 \right\}, \quad (5.18)$$

y las seis funciones base para el fluido como

$$\psi^F(x, y, z) = \frac{x}{h_x}, \quad \psi^B(x, y, z) = -1 + \frac{x}{h_x}, \quad (5.19)$$

$$\psi^E(x, y, z) = \frac{y}{h_y}, \quad \psi^W(x, y, z) = -1 + \frac{y}{h_y}, \quad (5.20)$$

$$\psi^N(x, y, z) = \frac{z}{h_z}, \quad \psi^S(x, y, z) = -1 + \frac{z}{h_z}, \quad (5.21)$$

donde el signo menos del primer término en las funciones para Back, West y South pone de manifiesto que al comprimir una muestra del material poroso la presión de fluido ofrece resistencia, resultando de signo opuesto. Es por ello que estas funciones base son de signo contrario a lo usual.

Estas funciones contemplan la posibilidad de  $h$  variable en las tres direcciones. La función base  $\varphi^E$  vale 1 en el punto medio de la cara E ( $x=h_x/2, y=h_y, z=h_z/2$ ) y se anula en todos los otros puntos medios de las caras. Similares resultados se cumplen para las funciones base restantes.

El espacio de elementos finitos no conformes se puede expresar como

$$\mathcal{S}(\Omega_j) = \mathcal{NC}^h = \{ \mathbf{v} \mid \mathbf{v}_j = \mathbf{v} \mid_{\Omega_j} \in \mathcal{NC}_j^h, j = 1, \dots, J; \mathbf{v}_j(\xi_{j,k}) = \mathbf{v}_k(\xi_{j,k}), \forall \{j, k\} \}.$$

Esto significa que cualquier función  $\mathbf{v} \in \mathcal{NC}^h$  debe tener continuidad sólo en los puntos medios de las caras de  $\Omega_j$ .

Con lo expresado hasta el momento, el método de Galerkin global usando elementos finitos no conformes se define como: hallar  $\mathbf{u}^h$  y  $\mathbf{w}^h \in [\mathcal{NC}^h]^3$  tal que

$$\begin{aligned} & -\omega^2 (\rho \mathbf{u}^h + \rho_f \mathbf{w}^h, \mathbf{v}^s) - \omega^2 (\rho_f \mathbf{u}^h + g \mathbf{w}^h, \mathbf{v}^f) + i\omega (d\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^f) \\ & + \Lambda(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \langle \tau(u_i), \mathbf{v}^s \rangle_{\Gamma} + \langle P_f(u_i), \mathbf{v}^f \rangle_{\Gamma} \\ & = (F^s, \mathbf{v}^s) + (F^f, \mathbf{v}^f), \quad \mathbf{v}^s, \mathbf{v}^f \in [\mathcal{NC}^h]^3. \end{aligned} \quad (5.22)$$

En esta etapa de la resolución es donde se elige localizar los cálculos usando la técnica iterativa de descomposición de dominio a nivel diferencial. Recordando la partición  $\mathcal{T}^h(\Omega)$ , se trata de estimar los valores de  $\mathbf{u}^h$  y  $\mathbf{w}^h$  en cada hexaedro, tal que

$$\begin{aligned} & -\omega^2 (\rho \mathbf{u}^h + \rho_f \mathbf{w}^h, \mathbf{v}^s)_{\Omega_j} - \omega^2 (\rho_f \mathbf{u}^h + g \mathbf{w}^h, \mathbf{v}^f)_{\Omega_j} + i\omega (d\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^f)_{\Omega_j} \\ & + \Lambda(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\Omega_j} - \langle \tau(u_i), \mathbf{v}^s \rangle_{\Gamma_j} + \langle P_f(u_i), \mathbf{v}^f \rangle_{\Gamma_j} \\ & = (F^s, \mathbf{v}^s)_{\Omega_j} + (F^f, \mathbf{v}^f)_{\Omega_j}, \quad \mathbf{v}^s, \mathbf{v}^f \in [\mathcal{NC}^h]^3. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Las condiciones de consistencia entre los elementos están dadas por las continuidad de los desplazamientos, las tensiones y la presión de fluido. Por lo tanto, se imponen las condiciones de transmisión de Robin sobre los bordes  $\Gamma_{jk}$

$$\left( \tau(u_j) \nu_{jk} \cdot \nu_{jk}, \tau(u_j) \nu_{jk} \cdot \chi_{jk}^{(1)}, \tau(u_j) \nu_{jk} \cdot \chi_{jk}^{(2)}, -P_f(u_j) \right)$$

$$\begin{aligned}
& +i\omega\beta \left( u_j \cdot \nu_{jk}, u_j \cdot \chi_{jk}^{(1)}, u_j \cdot \chi_{jk}^{(2)}, w_j \cdot \nu_{jk} \right) \\
& = \left( \tau(u_k)\nu_{kj} \cdot \nu_{kj}, \tau(u_k)\nu_{kj} \cdot \chi_{kj}^{(1)}, \tau(u_k)\nu_{kj} \cdot \chi_{kj}^{(2)}, -P_f(u_k) \right) \\
& +i\omega\beta \left( u_k \cdot \nu_{kj}, u_k \cdot \chi_{kj}^{(1)}, u_k \cdot \chi_{kj}^{(2)}, w_k \cdot \nu_{kj} \right). \tag{5.24}
\end{aligned}$$

$\beta$  es una matriz compleja definida positiva sobre los bordes interiores  $\Gamma_{jk}$ .

El procedimiento se completa definiendo un conjunto de multiplicadores de Lagrange  $\lambda_{jk}^h$  relacionado con los valores de tensión y presión de fluido, dando lugar entonces, a un procedimiento híbrido de descomposición de dominio. Se establece

$$\begin{aligned}
\lambda_{jk}^{s,\nu} & = (\tau(u_j)\nu_{jk} \cdot \nu_{jk}) (\xi_{jk}), \\
\lambda_{jk}^{s,\chi^{(1)}} & = (\tau(u_j)\nu_{jk} \cdot \chi^{(1)}) (\xi_{jk}), \\
\lambda_{jk}^{s,\chi^{(2)}} & = (\tau(u_j)\nu_{jk} \cdot \chi^{(2)}) (\xi_{jk}), \\
\lambda_{jk}^f & = P_f(u_j) (\xi_{jk}) \tag{5.25}
\end{aligned}$$

y

$$\Lambda^h = \{\lambda^h : \lambda^h|_{\Gamma_{jk}} = \lambda_{jk}^h \in [P_0(\Gamma_{jk})]^3 = [\Lambda_{jk}^h]^3\},$$

donde  $P_0(\Gamma_{jk})$  son funciones constantes sobre  $\Gamma_{jk}$ . Se destaca que  $\Lambda_{jk}^h$  y  $\Lambda_{kj}^h$  son conjuntos diferentes.

Se nota claramente que el intercambio de información entre elementos resulta menor si se usan estos elementos no conformes (un nodo por cara) en lugar de los clásicos elementos conformes (cuatro nodos por cara). Además, desde el punto de vista matemático, es posible analizar el error del procedimiento no conforme y estimar la velocidad de convergencia del algoritmo iterativo de descomposición de dominio en función del tamaño de malla  $h$ . Si bien estos aspectos están fuera del alcance de este trabajo, pueden verse en (Douglas et.al., 1999 y Douglas et. el., 2001).

Retomando las condiciones de borde de Robin (5.24), las mismas pueden reescribirse en la forma débil como

$$\begin{aligned}
& - \left\langle \left( \tau(u_j)\nu_{jk} \cdot \nu_{jk}, \tau(u_j)\nu_{jk} \cdot \chi_{jk}^{(1)}, \tau(u_j)\nu_{jk} \cdot \chi_{jk}^{(2)}, -P_f(u_j) \right) + i\omega\beta \left( u_j \cdot \nu_{jk}, u_j \cdot \chi_{jk}^{(1)}, u_j \cdot \chi_{jk}^{(2)}, \right. \right. \\
& \left. \left. w_j \cdot \nu_{jk} \right), \left( v^s \cdot \nu_{jk}, v^s \cdot \chi_{jk}^{(1)}, v^s \cdot \chi_{jk}^{(2)}, v^f \cdot \nu_{jk} \right) \right\rangle_{\Gamma_{jk}} = \left\langle i\omega\beta \left( u_k \cdot \nu_{kj}, u_k \cdot \chi_{kj}^{(1)}, u_k \cdot \chi_{kj}^{(2)}, w_k \cdot \nu_{kj} \right) \right. \\
& \left. - \left( \tau(u_k)\nu_{kj} \cdot \nu_{kj}, \tau(u_k)\nu_{kj} \cdot \chi_{kj}^{(1)}, \tau(u_k)\nu_{kj} \cdot \chi_{kj}^{(2)}, -P_f(u_k) \right), \left( v^s \cdot \nu_{jk}, v^s \cdot \chi_{jk}^{(1)}, v^s \cdot \chi_{jk}^{(2)}, v^f \cdot \nu_{jk} \right) \right\rangle_{\Gamma_{jk}}. \tag{5.26}
\end{aligned}$$

Incorporando las condiciones de Robin para los bordes internos (ecuación (5.26) y las condiciones de borde absorbente para los bordes externos del dominio (ecuación (5.9)) en (5.23) se obtiene

$$\begin{aligned}
& -\omega^2 (\rho u_j + \rho_f w_j, v^s)_{\Omega_j} - \omega^2 (\rho_f u_j + g w_j, v^f)_{\Omega_j} + i\omega (d w_j, v^f)_{\Omega_j} \\
& + \Lambda(\mathbf{U}, \mathbf{v})_{\Omega_j} + \sum_{\Gamma_{jk}} -i\omega \left\langle \mathcal{B}_p \left( u_j \cdot \nu_{jk}, u_j \cdot \chi_{jk}^1, u_j \cdot \chi_{jk}^2, w_j \cdot \nu_{jk} \right), \left( v^s \cdot \nu_{jk}, v^s \cdot \chi_{jk}^1, v^s \cdot \chi_{jk}^2, v^f \cdot \nu_{jk} \right) \right\rangle \\
& + \sum_{jk} \left\langle -i\omega\beta \left( u_j \cdot \nu_{jk}, u_j \cdot \chi_{jk}^{(1)}, u_j \cdot \chi_{jk}^{(2)}, w_j \cdot \nu_{jk} \right), \left( v^s \cdot \nu_{jk}, v^s \cdot \chi_{jk}^{(1)}, v^s \cdot \chi_{jk}^{(2)}, v^f \cdot \nu_{jk} \right) \right\rangle_{\Gamma_{jk}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \sum_{jk} \left\langle i\omega\beta \left( u_k \cdot \nu_{kj}, u_k \cdot \chi_{kj}^{(1)}, u_k \cdot \chi_{kj}^{(2)}, w_k \cdot \nu_{kj} \right) + \left( \tau(u_k)\nu_{kj} \cdot \nu_{kj}, \tau(u_k)\nu_{kj} \cdot \chi_{kj}^{(1)}, \tau(u_k)\nu_{kj} \cdot \chi_{kj}^{(2)}, \right. \right. \\
&\quad \left. \left. -P_f(u_k) \right), \left( v^s \cdot \nu_{jk}, v^s \cdot \chi_{jk}^{(1)}, v^s \cdot \chi_{jk}^{(2)}, v^f \cdot \nu_{jk} \right) \right\rangle_{\Gamma_{jk}} + (F^s, \mathbf{v}^s)_{\Omega_j} + (F^f, \mathbf{v}^f)_{\Omega_j}. \tag{5.27}
\end{aligned}$$

Escribiendo en la forma iterativa en términos de los multiplicadores de Lagrange, se puede expresar

$$\begin{aligned}
&-\omega^2 (\rho u_j^n + \rho_f w_j^n, v^s)_{\Omega_j} - \omega^2 (\rho_f u_j^n + g w_j^n, v^f)_{\Omega_j} + i\omega (d w_j^n, v^f)_{\Omega_j} \\
&+ \Lambda(\mathbf{U}^n, \mathbf{v})_{\Omega_j} + \sum_{\Gamma_{jk}} -i\omega \left\langle \mathcal{B}_p \left( u_j^n \cdot \nu_{jk}, u_j^n \cdot \chi_{jk}^1, u_j^n \cdot \chi_{jk}^2, w_j^n \cdot \nu_{jk} \right), \left( v^s \cdot \nu_{jk}, v^s \cdot \chi_{jk}^1, v^s \cdot \chi_{jk}^2, v^f \cdot \nu_{jk} \right) \right\rangle \\
&- \sum_{jk} \left\langle i\omega\beta \left( u_j^n \cdot \nu_{jk}, u_j^n \cdot \chi_{jk}^{(1)}, u_j^n \cdot \chi_{jk}^{(2)}, w_j^n \cdot \nu_{jk} \right), \left( v^s \cdot \nu_{jk}, v^s \cdot \chi_{jk}^{(1)}, v^s \cdot \chi_{jk}^{(2)}, v^f \cdot \nu_{jk} \right) \right\rangle_{\Gamma_{jk}} \\
&= \sum_{jk} \left\langle i\omega\beta \left( u_k^{n-1} \cdot \nu_{kj}, u_k^{n-1} \cdot \chi_{kj}^{(1)}, u_k^{n-1} \cdot \chi_{kj}^{(2)}, w_k^{n-1} \cdot \nu_{kj} \right) + \left( -\lambda_{kj}^{s,\nu,n-1}, -\lambda_{kj}^{s,\chi^{(1)},n-1}, -\lambda_{kj}^{s,\chi^{(2)},n-1}, \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \lambda_{kj}^{f,\nu,n-1} \right), \left( v^s \cdot \nu_{jk}, v^s \cdot \chi_{jk}^{(1)}, v^s \cdot \chi_{jk}^{(2)}, v^f \cdot \nu_{jk} \right) \right\rangle_{\Gamma_{jk}} + (F^s, \mathbf{v}^s)_{\Omega_j} + (F^f, \mathbf{v}^f)_{\Omega_j}. \tag{5.28}
\end{aligned}$$

Usando la condiciones de borde de Robin en la forma iterativa la actualización de los multiplicadores de Lagrange toma la forma

$$\begin{aligned}
&\left( \lambda_{jk}^{s,\nu,n}, \lambda_{jk}^{s,\chi^{(1)},n}, \lambda_{jk}^{s,\chi^{(2)},n}, -\lambda_{jk}^{f,\nu,n} \right) \\
&= \left( \lambda_{kj}^{s,\nu,n-1}, \lambda_{kj}^{s,\chi^{(1)},n-1}, \lambda_{kj}^{s,\chi^{(2)},n-1}, -\lambda_{kj}^{f,\nu,n-1} \right) \\
&-i\omega\beta \left( u_j^n \cdot \nu_{jk} + u_k^{n-1} \cdot \nu_{kj}, \right. \\
&\quad u_j^n \cdot \chi_{jk}^{(1)} + u_k^{n-1} \cdot \chi_{kj}^{(1)}, \\
&\quad u_j^n \cdot \chi_{jk}^{(2)} + u_k^{n-1} \cdot \chi_{kj}^{(2)}, \\
&\quad \left. w_j^n \cdot \nu_{jk} + w_k^{n-1} \cdot \nu_{kj} \right). \tag{5.29}
\end{aligned}$$

Se puede demostrar que  $[u^{h,n} - u^h]^3 \rightarrow 0$  en  $[L^2(\Omega)]^3$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , de manera que la estimación global Galerkin no conforme se obtiene en el límite.

La ecuación (5.28) al ser testada por las funciones de prueba y utilizando las aproximaciones de Galerkin genera un sistema de ecuaciones lineales de 24 incógnitas, cuyas filas de la matriz de coeficientes toman la forma de

$$\begin{aligned}
&a_{i,1}u_1^B + a_{i,2}u_2^B + a_{i,3}u_3^B + a_{i,4}w_1^B + a_{i,5}u_1^E + a_{i,6}u_2^E + a_{i,7}u_3^E + a_{i,8}w_2^E + \\
&a_{i,9}u_1^W + a_{i,10}u_2^W + a_{i,11}u_3^W + a_{i,12}w_2^W + a_{i,13}u_1^N + a_{i,14}u_2^N + a_{i,15}u_3^N + a_{i,16}w_3^N + \\
&a_{i,17}u_1^S + a_{i,18}u_2^S + a_{i,19}u_3^S + a_{i,20}w_3^S + a_{i,21}u_1^F + a_{i,22}u_2^F + a_{i,23}u_3^F + a_{i,24}w_1^F = F_i,
\end{aligned}$$

siendo los  $a_{i,j}, j = 1, \dots, 24$  los coeficientes de la matriz, detallados en el **Anexo 1** en conjunto con las condiciones de borde y el término del lado derecho.

Una vez formado el sistema de ecuaciones se resuelve a través del método LU, en la que la matriz de coeficientes se conforma por la multiplicación de dos matrices,  $\mathbf{L}$  triangular inferior y  $\mathbf{U}$  triangular superior con 1 en su diagonal principal.

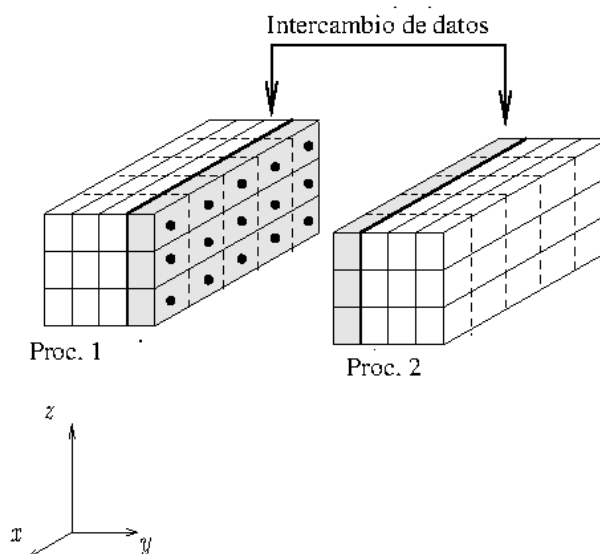
En este trabajo, se han dividido los elementos finitos en dos conjuntos, llamados “red” (rojos) y “black” (negros) semejantes a un tablero de ajedrez, de manera que los

elementos rojos solo tienen vecinos negros, y viceversa. En cada iteración, el sistema lineal es resuelto para los elementos rojos, siendo los elementos negros parte del lado derecho del sistema. Luego, los multiplicadores de Lagrange son actualizados, y todas las variables son relajadas. Lo mismo se realiza para los elementos negros. Una vez realizado el proceso para todos los elementos, se chequea la convergencia, y si no es alcanzada, comienza otra iteración.

### 5.3. Paralelización del Código.

La técnica aplicada de descomposición de dominio divide el dominio en subdominios no solapados y las ecuaciones se resuelven independiente en cada uno de los elementos finitos resultantes. Es decir, por cada elemento finito se tiene un sistema de ecuaciones lineales de  $24 \times 24$  para ser resuelto. Se programa la paralelización en la forma SPMD. La rutina para la comunicación de la información se escribe como una extensión de su respectiva rutina en 2D, dividiendo los procesadores en la dirección del eje- $y$  y en la dirección del eje- $z$ . De esta forma, sólo es necesario incorporar a la transmisión y recepción de los mensajes las variables propias de la tercer dimensión.

La Figura 5.2 muestra un esquema del procedimiento de paralelización (Gauzellino et al., 2009). El dominio total está representado por 5 elementos finitos en la dirección  $x$ , 8 en la dirección  $y$  y 3 en la dirección  $z$ . Los 120 elementos se dividen en  $5 \times 4 \times 3 = 60$  elementos y así obtener el resultado en cada uno de los dos procesadores en la dirección del eje- $y$ . La información a ser transferida y recibida por estos procesadores corresponde a los elementos sombreados y a los nodos indicados. En particular, el procesador 1 transfiere desplazamientos y multiplicadores de Lagrange de las caras E de los elementos (  $5 \times 3$  nodos) y recibe del procesador 2, los desplazamientos y multiplicadores de Lagrange de las caras W de los elementos. Un intercambio análogo debe también ser indicado para el procesador 2.



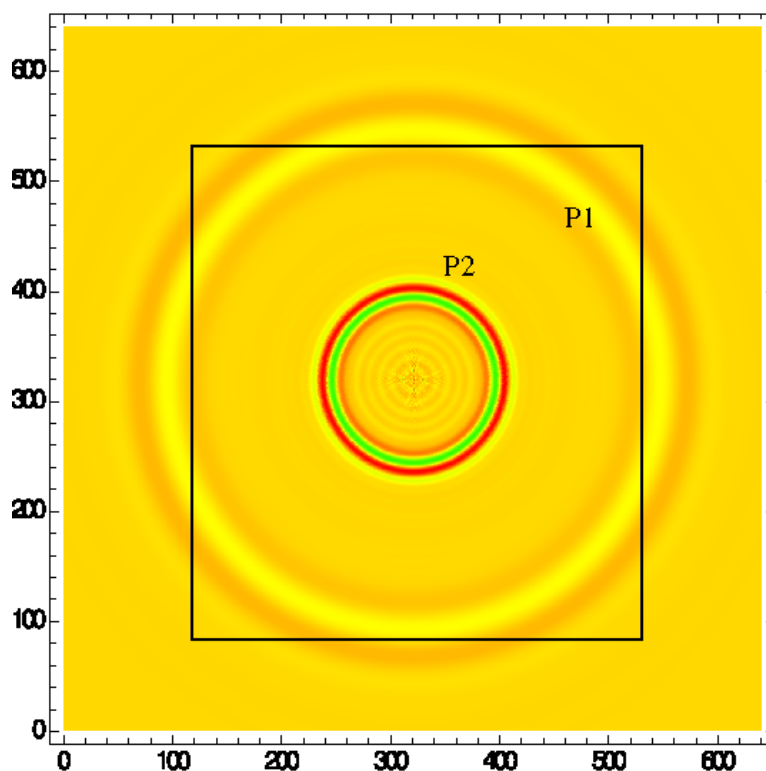
**Figura 5.2:** Esquema para el procedimiento de paralelización e intercambio de la información.



## 5.4. Ejemplo de Aplicación.

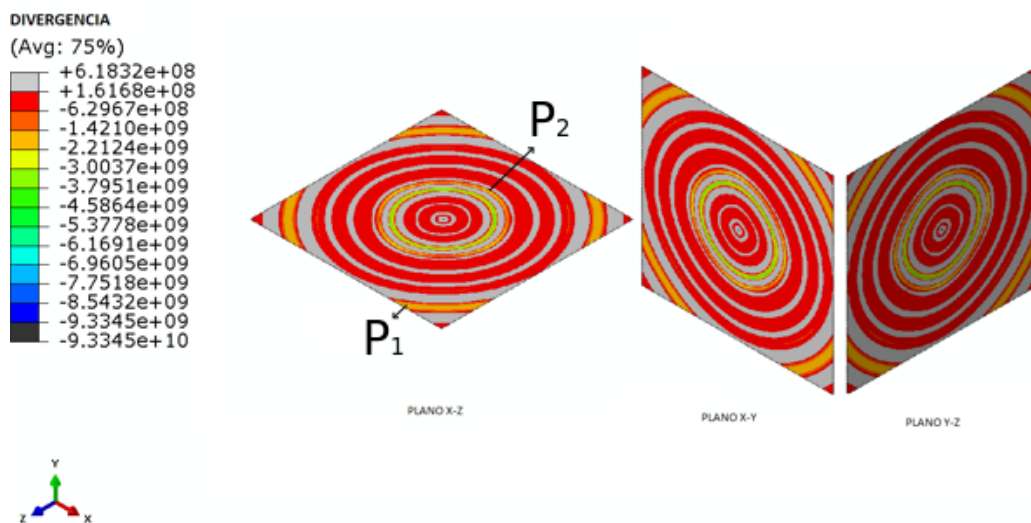
El código computacional implementado se prueba para un medio homogéneo. A modo de validación, el medio utilizado fue el mismo que en los casos anteriores, arenisca Nivelsteiner saturada con agua. Las constantes que caracterizan este medio pueden verse en la Tabla 1.

Debido al costo computacional del algoritmo, aún implementado en paralelo; se reduce el dominio a un cubo de  $3,75\text{ cm}$  de lado (recordar que en 2D, el dominio es un cuadrado de  $6\text{ cm}$  de lado. La fuente utilizada es la misma que en el ejemplo del caso 2D (Figura 4.1), con una frecuencia central de  $320\text{ KHz}$ . El problema elíptico de Helmholtz se resuelve para 70 puntos en frecuencia entre 1 y 1000 kHz, verificando que esta menor cantidad de puntos no interfiera en el resultado final. El tiempo total de simulación es de  $0,05\text{ ms}$ . Para correr este programa se emplearon los 64 procesadores disponibles y la malla de elementos finitos es de  $128 \times 128 \times 128$ ; por lo que cada procesador resuelve un problema de  $128 \times 16 \times 16$  elementos.

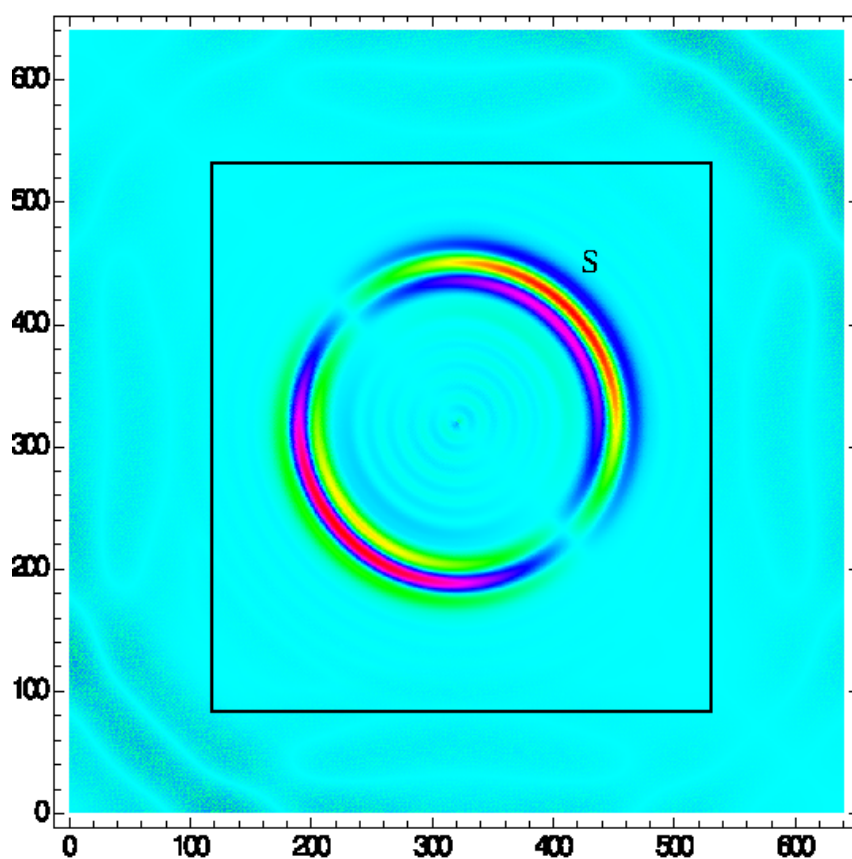


**Figura 5.3:** Propagación de ondas en un medio homogéneo 2D. Se grafica la divergencia del campo de velocidades luego de  $0,010\text{ ms}$  de activada la fuente y se muestra el dominio reducido para el caso 3D.

En la Figura 5.3 se representa la divergencia del campo de velocidades para el caso 2D. Así se espera ver sólo los frentes de onda de las ondas compresionales rápida y lenta, que se indican con los nombres de  $P_1$  y  $P_2$  respectivamente. Además, se delimita el espacio restringido a un plano para el caso 3D. En la Figura 5.4 se muestra una captura a  $0,010\text{ ms}$  en tiempo de la propagación de ondas para la divergencia del campo de velocidades. Puede apreciarse la propagación concéntrica de las ondas, debido a la homogeneidad del medio, con centro en la posición de la fuente. En coincidencia con los frentes de onda, las ondas que pueden apreciarse en la figura son la  $P_1$  rápida, cuyo frente es el que cuenta con mayor radio y la  $P_2$  lenta con frente de ondas de menor radio. Al comparar las Figuras 5.3 y 5.4 se observa la coincidencia de la posición de los frentes de ondas compresionales.

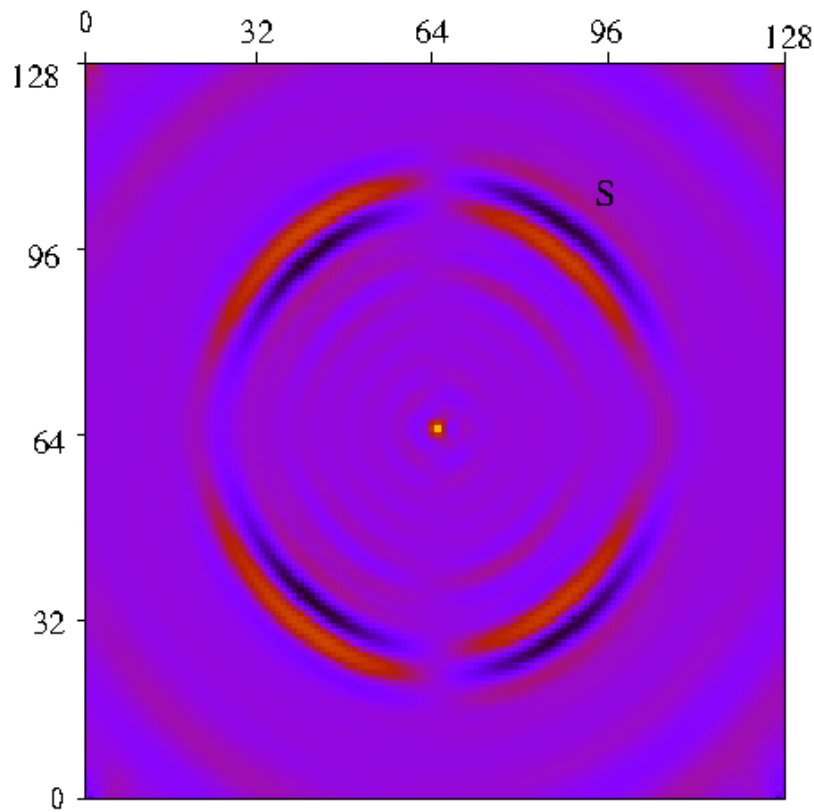


**Figura 5.4:** Propagación de ondas en un medio homogéneo 3D. Se grafica la divergencia del campo de velocidades.



**Figura 5.5:** Propagación de ondas en un medio homogéneo 2D. Se grafica el rotor del campo de velocidades luego de 0,010 ms de activada la fuente y se muestra el dominio reducido para el caso 3D.

Para completar la validación, en la Figura 5.5 se presenta el resultado de haber aplicado rotor al campo de velocidades para el caso 2D. También se muestra el dominio en el plano que corresponde al caso 3D. Ahora la comparación se realiza considerando que en el dominio 3D se tiene una fuente que genera ondas S por una deformación  $\epsilon_{yz} = 1$ , de



**Figura 5.6:** Propagación de ondas en un medio homogéneo 3D. Componente Z del campo de velocidades luego de 0,010 ms de activada la fuente que genera ondas de corte en el plano (y,z).

manera tal que si  $\delta_{x_f, y_f, z_f}$  es la distribución de Dirac que señala el punto donde se localiza la fuente  $(x_f, y_f, z_f)$ , se hace

$$\left( \frac{\partial \delta_{x_f, y_f, z_f}}{\partial z}, \frac{\partial \delta_{x_f, y_f, z_f}}{\partial y} \right).$$

El frente de ondas S se muestra en la Figura 5.6. Se grafica un corte del dominio 3D que corresponde al plano (y,z) conteniendo a la fuente y se representa la componente Z del campo de velocidades. Aquí también se puede observar la coincidencia de la posición de los frentes de ondas de corte.



## 6. Conclusiones

Se ha utilizado el MEF para resolver el problema de la propagación de ondas en medios porosos. En forma detallada se ha presentado la resolución de las ecuaciones de Biot en una y tres dimensiones, implementándose los respectivos código computacionales en lenguaje Fortran. Para el caso 3D la programación es del tipo SDMD con interfaz MPI para el paso de mensajes. Además, se ha estudiado y usado el simulador 2D que ya fuera desarrollado en SDMD.

Con el propósito de validar los resultados, los ejemplos fueron corridos para el mismo medio homogéneo, la arenisca Nivelsteiner saturada con gas o agua, o con una combinación de ambas fases fluidas como si se tratase de un fluido efectivo. Los resultados de los distintos ejemplos, ya sea los campos de ondas en los snapshots como las señales que se registran en los receptores, muestran la coherencia esperada al realizar cálculos de velocidades, distancias, y tiempos de arribo de las distintas ondas, sin notar discrepancias con los tiempos que deberían medirse teóricamente. El modelo homogéneo 2D fue diseñado de forma tal que las dos ondas compresionales y la onda de corte pudieran ser observadas. Las altas frecuencias a las que se trabajó permiten discriminar las tres clases de ondas. El uso de operadores divergencia y rotor en la fuente o en los resultados auxilian para identificar y destacar las diferentes ondas ya mencionadas. De esta manera, fue exitoso el análisis de los resultados del simulador 3D al compararlo con el ya implementado simulador 2D; principalmente en la detección de la onda  $P_2$  lenta pronosticada por Biot en su teoría.

Con respecto a las amplitudes, se destacan los cambios observados con las diferentes saturaciones de gas en la arenisca. Siempre hay un incremento en amplitud con el aumento de la saturación de gas. Con respecto a las velocidades, se advierte que poca presencia de gas provoca un rápido descenso de la velocidad y esta tendencia se invierte alrededor del 15% de saturación de gas, donde se comienza a registrar un lento aumento en la velocidad debido a la menor densidad. Una posibilidad de trabajo de aplicación a futuro sería un estudio que tratase de estimar la relación amplitud-saturación de gas en las técnicas geofísicas basadas en este atributo de amplitud.

Considerando el procedimiento numérico para obtener la solución de las ecuaciones, es necesario mejorar la eficiencia del código computacional. Si bien es conocido que la técnica iterativa de descomposición de dominio es computacionalmente cara, también se conoce que puede mejorar cambiando la forma de construir y resolver el sistemas de ecuaciones lineales resultante. Será más eficiente construir sistemas de ecuaciones lineales con mayor número de incógnitas que puedan almacenarse en la memoria caché de la máquina y hallar su solución mediante algún solver adecuado. Además, también es posible ver si mejora la implementación en paralelo SDMD, contando con la posibilidad de tener más de un procesador en la dirección del eje-x. Recién cuando se llegue a un producto computacional eficiente se podrá analizar la performance del algoritmo y obviamente, disponer de un simulador 3D para su aplicación en distintas ramas de la geofísica.



## 7. Anexo

En este anexo se expresan las ecuaciones necesarias para hallar cada coeficiente de la matriz de ecuaciones lineales obtenida a partir de aplicar la formulación de Elementos Finitos a las ecuaciones de Biot, en tres dimensiones. Se parte de la ecuación (5.10), y se testea con las distintas funciones de prueba, en cada componente, tanto para el sólido como del fluido. De esta manera, se obtienen 24 coeficientes para cada función de prueba que, al ser también 24, concluye en un sistema de ecuaciones de 24 ecuaciones con 24 incógnitas cada una, y por lo tanto una matriz de coeficientes de  $24 \times 24$  coeficientes. Cada coeficiente se nombra de manera tal que

$$a_{i,1}u_1^B + a_{i,2}u_2^B + a_{i,3}u_3^B + a_{i,4}w_1^B + a_{i,5}u_1^E + a_{i,6}u_2^E + a_{i,7}u_3^E + a_{i,8}w_2^E + a_{i,9}u_1^W + a_{i,10}u_2^W + a_{i,11}u_3^W + a_{i,12}w_2^W + a_{i,13}u_1^N + a_{i,14}u_2^N + a_{i,15}u_3^N + a_{i,16}w_3^N + a_{i,17}u_1^S + a_{i,18}u_2^S + a_{i,19}u_3^S + a_{i,20}w_3^S + a_{i,21}u_1^F + a_{i,22}u_2^F + a_{i,23}u_3^F + a_{i,24}w_1^F = F_i,$$

donde  $i = 1, \dots, 24$  representa cada fila de la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones lineal.

### 7.1. Testeos con las Funciones de Prueba.

Testeando con la primer función base  $v^s = (v_1^s, v_2^s, v_3^s) = (\varphi^{s,B}(x, y, z), 0, 0)$  y  $v^f = (0, 0, 0)$  en (5.10), se obtiene la ecuación:

$$\begin{aligned} & -\omega^2 \left( \rho \left[ u_1^{s,B} \varphi_1^{s,B} + u_1^{s,E} \varphi_1^{s,E} + u_1^{s,W} \varphi_1^{s,W} + u_1^{s,N} \varphi_1^{s,N} + u_1^{s,S} \varphi_1^{s,S} + u_1^{s,F} \varphi_1^{s,F} \right], \varphi_1^{s,B} \right) \\ & -\omega^2 \left( \rho_f \left[ u_1^{f,B} \psi^B + u_1^{f,F} \psi^F \right], \varphi_1^{s,B} \right) \\ & \left( (\lambda_c + 2\mu) \frac{\partial \left[ u_1^{s,B} \varphi_1^{s,B} + u_1^{s,E} \varphi_1^{s,E} + u_1^{s,W} \varphi_1^{s,W} + u_1^{s,N} \varphi_1^{s,N} + u_1^{s,S} \varphi_1^{s,S} + u_1^{s,F} \varphi_1^{s,F} \right]}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_1^{s,B}}{\partial x} \right) \\ & + \left( \lambda_c \frac{\partial \left[ u_2^{s,B} \varphi_2^{s,B} + u_2^{s,E} \varphi_2^{s,E} + u_2^{s,W} \varphi_2^{s,W} + u_2^{s,N} \varphi_2^{s,N} + u_2^{s,S} \varphi_2^{s,S} + u_2^{s,F} \varphi_2^{s,F} \right]}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_1^{s,B}}{\partial x} \right) \\ & + \left( \lambda_c \frac{\partial \left[ u_3^{s,B} \varphi_3^{s,B} + u_3^{s,E} \varphi_3^{s,E} + u_3^{s,W} \varphi_3^{s,W} + u_3^{s,N} \varphi_3^{s,N} + u_3^{s,S} \varphi_3^{s,S} + u_2^{s,F} \varphi_2^{s,F} \right]}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_1^{s,B}}{\partial x} \right) \\ & + \left( \mu \frac{\partial \left[ u_1^{s,B} \varphi_1^{s,B} + u_1^{s,E} \varphi_1^{s,E} + u_1^{s,W} \varphi_1^{s,W} + u_1^{s,N} \varphi_1^{s,N} + u_1^{s,S} \varphi_1^{s,S} + u_1^{s,F} \varphi_1^{s,F} \right]}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_1^{s,B}}{\partial y} \right) \\ & + \left( \mu \frac{\partial \left[ u_2^{s,B} \varphi_2^{s,B} + u_2^{s,E} \varphi_2^{s,E} + u_2^{s,W} \varphi_2^{s,W} + u_2^{s,N} \varphi_2^{s,N} + u_2^{s,S} \varphi_2^{s,S} + u_2^{s,F} \varphi_2^{s,F} \right]}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_1^{s,B}}{\partial y} \right) \\ & + \left( \mu \frac{\partial \left[ u_1^{s,B} \varphi_1^{s,B} + u_1^{s,E} \varphi_1^{s,E} + u_1^{s,W} \varphi_1^{s,W} + u_1^{s,N} \varphi_1^{s,N} + u_1^{s,S} \varphi_1^{s,S} + u_1^{s,F} \varphi_1^{s,F} \right]}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_1^{s,B}}{\partial z} \right) \\ & + \left( \mu \frac{\partial \left[ u_3^{s,B} \varphi_3^{s,B} + u_3^{s,E} \varphi_3^{s,E} + u_3^{s,W} \varphi_3^{s,W} + u_3^{s,N} \varphi_3^{s,N} + U_3^{s,S} \varphi_3^{s,S} + u_3^{s,F} \varphi_3^{s,F} \right]}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_1^{s,B}}{\partial z} \right) \\ & + \left( B \frac{\partial \left[ u_1^{f,B} \psi^B + u_1^{f,F} \psi^F \right]}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_1^{s,B}}{\partial x} \right) + \left( B \frac{\partial \left[ u_2^E \psi^E + u_2^W \psi^W \right]}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_1^{s,B}}{\partial x} \right) \end{aligned}$$





$$\begin{aligned}
l &= \frac{41h_x h_y h_z}{1890} & l_1 &= \frac{233h_x h_y h_z}{1890} \\
m &= \frac{37h_y h_z}{63h_x} & m_1 &= \frac{211h_y h_z}{63h_x} & m_2 &= \frac{85h_y h_z}{63h_x} \\
n &= \frac{37h_x h_z}{63h_y} & n_1 &= \frac{211h_x h_z}{63h_y} & n_2 &= \frac{85h_x h_z}{63h_y} \\
e &= \frac{37h_x h_y}{63h_z} & e_1 &= \frac{211h_x h_y}{63h_z} & e_2 &= \frac{85h_x h_y}{63h_z} \\
& & & & q &= \frac{h_x h_y h_z}{12} \\
r &= \frac{h_y h_z}{h_x} & s &= \frac{h_x h_z}{h_y} & t &= \frac{h_x h_y}{h_z}
\end{aligned} \tag{7.2}$$

Multiplicando por las funciones de prueba y reduciendo los términos a derivadas de primer orden los coeficientes quedan:

$$\begin{aligned}
& [(-\omega^2 \rho l_1) + ((\lambda_c + 2\mu)m_1) + (\mu n) + (\mu e)] u_1^B + \\
& \quad [(\lambda_c \ 0) + (\mu \ 0)] u_2^B + [(\lambda_c \ 0) + (\mu \ 0)] u_3^B \\
& [(-\omega^2 \rho l) + ((\lambda_c + 2\mu)(-2m)) + (\mu(-2n)) + (\mu e)] u_1^E \\
& \quad [(\lambda_c \ (-h_z)) + (\mu \ 0)] u_2^E + [(\lambda_c \ 0) + (\mu \ 0)] u_3^E + \\
& [(-\omega^2 \rho l) + ((\lambda_c + 2\mu)(-2m)) + (\mu(-2n)) + (\mu e)] u_1^W \\
& \quad [(\lambda_c h_z) + (\mu \ 0)] u_2^W + [(\lambda_c \ 0) + (\mu \ 0)] u_3^W \\
& [(-\omega^2 \rho l) + ((\lambda_c + 2\mu)(-2m)) + (\mu n) + (\mu(-2e))] u_1^N \\
& \quad [(\lambda_c \ 0) + (\mu \ 0)] u_2^N + [(\lambda_c(-h_y)) + (\mu \ 0)] u_3^N + \\
& [(-\omega^2 l) + ((\lambda_c + 2\mu)(-2m)) + (\mu n) + (\mu(-2o))] u_1^S \\
& \quad [(\lambda_c \ 0) + (\mu \ 0)] u_2^S + [(\lambda_c \ h_y) + (\mu \ 0)] u_3^S + \\
& [(-\omega^2 \rho(-2l)) + ((\lambda_c + 2\mu)m_2) + (\mu n) + (\mu e)] u_1^F \\
& \quad [(\lambda_c \ 0) + (\mu \ 0)] u_2^F + [(\lambda_c \ 0) + (\mu \ 0)] u_3^F + \\
& [(-\omega^2 \rho_f(-2q)) + (B(-r))] w_1^B + [(B(-h_z))] w_2^E + [(B(-h_z))] w_2^W + \\
& \quad [(B(-h_y))] w_3^N + [(B(-h_y))] w_3^S + [(-\omega^2 \rho_f \ 0) + (B(-r))] w_1^F + \\
& \quad - \left\langle \tau(u_j), \varphi_1^{s,B} \right\rangle_{\Gamma^B} \\
& \quad = \left( F^s, \varphi_1^{s,B} \right)_{\Omega_j}.
\end{aligned}$$

Para obtener la segunda ecuación se testea con la segunda función de prueba,  $v^s = (v_1^s, v_2^s, v_3^s) = (0, \varphi^{s,B}(x, y, z), 0)$  y  $v^f = (0, 0, 0)$ .

$$\begin{aligned}
& -\omega^2 \left( \rho \left[ u_2^{s,B} \varphi_2^{s,B} + u_2^{s,E} \varphi_2^{s,E} + u_2^{s,W} \varphi_2^{s,W} + u_2^{s,N} \varphi_2^{s,N} + u_2^{s,S} \varphi_2^{s,S} + u_2^{s,F} \varphi_2^{s,F} \right], \varphi_2^{s,B} \right) \\
& -\omega^2 \left( \rho_f \left[ u_2^{f,E} \psi^E + u_2^{f,W} \psi^W \right], \varphi_2^{s,B} \right) \\
& \left( (\lambda_c + 2\mu) \frac{\partial \left[ u_2^{s,B} \varphi_2^{s,B} + u_2^{s,E} \varphi_2^{s,E} + u_2^{s,W} \varphi_2^{s,W} + u_2^{s,N} \varphi_2^{s,N} + u_2^{s,S} \varphi_2^{s,S} + u_2^{s,F} \varphi_2^{s,F} \right]}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial y} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \lambda_c \frac{\partial \left[ u_1^{s,B} \varphi_1^{s,B} + u_1^{s,E} \varphi_1^{s,E} + u_1^{s,W} \varphi_1^{s,W} + u_1^{s,N} \varphi_1^{s,N} + u_1^{s,S} \varphi_1^{s,S} + u_1^{s,F} \varphi_1^{s,F} \right]}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial y} \right) \\
& + \left( \lambda_c \frac{\partial \left[ u_3^{s,B} \varphi_3^{s,B} + u_3^{s,E} \varphi_3^{s,E} + u_3^{s,W} \varphi_3^{s,W} + u_3^{s,N} \varphi_3^{s,N} + u_3^{s,S} \varphi_3^{s,S} + u_3^{s,F} \varphi_3^{s,F} \right]}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial y} \right) \\
& + \left( \mu \frac{\partial \left[ u_1^{s,B} \varphi_1^{s,B} + u_1^{s,E} \varphi_1^{s,E} + u_1^{s,W} \varphi_1^{s,W} + u_1^{s,N} \varphi_1^{s,N} + u_1^{s,S} \varphi_1^{s,S} + u_1^{s,F} \varphi_1^{s,F} \right]}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial x} \right) \\
& + \left( \mu \frac{\partial \left[ u_2^{s,B} \varphi_2^{s,B} + u_2^{s,E} \varphi_2^{s,E} + u_2^{s,W} \varphi_2^{s,W} + u_2^{s,N} \varphi_2^{s,N} + u_2^{s,S} \varphi_2^{s,S} + u_2^{s,F} \varphi_2^{s,F} \right]}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial x} \right) \\
& + \left( \mu \frac{\partial \left[ u_2^{s,B} \varphi_2^{s,B} + u_2^{s,E} \varphi_2^{s,E} + u_2^{s,W} \varphi_2^{s,W} + u_2^{s,N} \varphi_2^{s,N} + u_2^{s,S} \varphi_2^{s,S} + u_2^{s,F} \varphi_2^{s,F} \right]}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial z} \right) \\
& + \left( \mu \frac{\partial \left[ u_3^{s,B} \varphi_3^{s,B} + u_3^{s,E} \varphi_3^{s,E} + u_3^{s,W} \varphi_3^{s,W} + u_3^{s,N} \varphi_3^{s,N} + u_3^{s,S} \varphi_3^{s,S} + u_3^{s,F} \varphi_3^{s,F} \right]}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial z} \right) \\
& + \left( B \frac{\partial \left[ u_1^{f,B} \psi^B + u_1^{f,F} \psi^F \right]}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial y} \right) + \left( B \frac{\partial \left[ u_2^E \psi^E + u_2^W \psi^W \right]}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial y} \right) \\
& + \left( B \frac{\partial \left[ u_3^N \psi^N + u_3^S \psi^S \right]}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial y} \right) \\
& - \left\langle \tau(u_j), \varphi_2^{s,B} \right\rangle_{\Gamma^B} = \left( F^s, \varphi_2^{s,B} \right)_{\Omega_j}. \tag{7.3}
\end{aligned}$$

Haciendo los factores comunes por cada inc3gnita de la (7.3), se tiene los 24 coeficientes  $a_{2,1}$  al  $a_{2,24}$

$$\begin{aligned}
& \left[ \left( \lambda_c \frac{\partial \varphi_1^{s,B}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial y} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_1^{s,B}}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial x} \right) \right] u_1^B + \left[ \left( -\omega^2 \rho \varphi_2^{s,B}, \varphi_2^{s,B} \right) + \left( (\lambda_c + 2\mu) \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial y} \right) \right. \\
& \quad \left. + \left( \mu \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial x} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial z} \right) \right] u_2^B + \left[ \left( \lambda_c \frac{\partial \varphi_3^{s,B}}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial y} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_3^{s,B}}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial z} \right) \right] u_3^B \\
& \left[ \left( \lambda_c \frac{\partial \varphi_1^{s,E}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial y} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_1^{s,E}}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial x} \right) \right] u_1^E + \left[ \left( -\omega^2 \rho \varphi_2^{s,E}, \varphi_2^{s,B} \right) + \left( (\lambda_c + 2\mu) \frac{\partial \varphi_2^{s,E}}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial y} \right) \right. \\
& \quad \left. + \left( \mu \frac{\partial \varphi_2^{s,E}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial x} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_2^{s,E}}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial z} \right) \right] u_2^E + \left[ \left( \lambda_c \frac{\partial \varphi_3^{s,E}}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial y} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_3^{s,E}}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial z} \right) \right] u_3^E \\
& \left[ \left( \lambda_c \frac{\partial \varphi_1^{s,W}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial y} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_1^{s,W}}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial x} \right) \right] u_1^W + \left[ \left( -\omega^2 \rho \varphi_2^{s,W}, \varphi_2^{s,B} \right) + \left( (\lambda_c + 2\mu) \frac{\partial \varphi_2^{s,W}}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial y} \right) \right. \\
& \quad \left. + \left( \mu \frac{\partial \varphi_2^{s,W}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial x} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_2^{s,W}}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial z} \right) \right] u_2^W + \left[ \left( \lambda_c \frac{\partial \varphi_3^{s,W}}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial y} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_3^{s,W}}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial z} \right) \right] u_3^W \\
& \left[ \left( \lambda_c \frac{\partial \varphi_1^{s,N}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial y} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_1^{s,N}}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial x} \right) \right] u_1^N + \left[ \left( -\omega^2 \rho \varphi_2^{s,N}, \varphi_2^{s,B} \right) + \left( (\lambda_c + 2\mu) \frac{\partial \varphi_2^{s,N}}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial y} \right) \right. \\
& \quad \left. + \left( \mu \frac{\partial \varphi_2^{s,N}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial x} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_2^{s,N}}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial z} \right) \right] u_2^N + \left[ \left( \lambda_c \frac{\partial \varphi_3^{s,N}}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial y} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_3^{s,N}}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial z} \right) \right] u_3^N \\
& \left[ \left( \lambda_c \frac{\partial \varphi_1^{s,S}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial y} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_1^{s,S}}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial x} \right) \right] u_1^S + \left[ \left( -\omega^2 \rho \varphi_2^{s,S}, \varphi_2^{s,B} \right) + \left( (\lambda_c + 2\mu) \frac{\partial \varphi_2^{s,S}}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial y} \right) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \mu \frac{\partial \varphi_2^{s,S}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial x} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_2^{s,S}}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial z} \right) \Big] u_2^S + \left[ \left( \lambda_c \frac{\partial \varphi_3^{s,S}}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial y} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_3^{s,S}}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial z} \right) \right] u_3^S \\
& \left[ \left( \lambda_c \frac{\partial \varphi_1^{s,F}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial y} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_1^{s,F}}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial x} \right) \right] u_1^F + \left[ (-\omega^2 \rho \varphi_2^{s,F}, \varphi_2^{s,B}) + \left( (\lambda_c + 2\mu) \frac{\partial \varphi_2^{s,F}}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial y} \right) \right] \\
& + \left( \mu \frac{\partial \varphi_2^{s,F}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial x} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_2^{s,F}}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial z} \right) \Big] u_2^F + \left[ \left( \lambda_c \frac{\partial \varphi_3^{s,F}}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial y} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_3^{s,F}}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial z} \right) \right] u_3^F \\
& \left[ \left( B \frac{\partial \psi^B}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial y} \right) \right] w_1^B + \left[ (-\omega^2 \rho_f \psi^E, \varphi_2^{s,B}) + \left( B \frac{\partial \psi^E}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial y} \right) \right] w_2^E + \\
& \left[ (-\omega^2 \rho_f \psi^W, \varphi_2^{s,B}) + \left( B \frac{\partial \psi^W}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial y} \right) \right] w_2^W + \left[ \left( B \frac{\partial \psi^N}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial y} \right) \right] w_3^N + \\
& \left[ \left( B \frac{\partial \psi^S}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial y} \right) \right] w_3^S + \left[ \left( B \frac{\partial \psi^F}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial y} \right) \right] w_1^F \\
& - \left\langle \tau(u_j), \varphi_2^{s,B} \right\rangle_{\Gamma^B} = \left( F^s, \varphi_2^{s,B} \right)_{\Omega_j}.
\end{aligned}$$

Integrando cada coeficiente queda:

$$\begin{aligned}
& [\lambda_c 0 + \mu 0] u_1^B + [(-\omega^2 \rho l_1) + ((\lambda_c + 2\mu) n) + (\mu m_1) + (\mu e)] u_2^B + [\lambda_c 0 + \mu 0] u_3^B \\
& [\lambda_c 0 + \mu(-h_z)] u_1^E + [(-\omega^2 \rho l) + ((\lambda_c + 2\mu)(-2n)) + (\mu(-2m)) + (\mu e)] u_2^E + [\lambda_c 0 + \mu 0] u_3^E \\
& [\lambda_c 0 + \mu h_z] u_1^W + [(-\omega^2 \rho l) + ((\lambda_c + 2\mu)(-2n)) + (\mu(-2m)) + (\mu e)] u_2^W + [\lambda_c 0 \mu 0] u_3^W \\
& [\lambda_c 0 + \mu 0] u_1^N + [(-\omega^2 \rho l) + ((\lambda_c + 2\mu) (n)) + (\mu (-2m)) + (\mu (-2o))] u_2^N + [\lambda_c 0 \mu 0] u_3^N \\
& [\lambda_c 0 + \mu 0] u_1^S + [(-\omega^2 \rho l) + ((\lambda_c + 2\mu) n) + \mu (-2m) + (\mu (-2o))] u_2^S + [\lambda_c 0 + \mu 0] u_3^S \\
& [\lambda_c 0 + \mu 0] u_1^F + [(-\omega^2 \rho (-2l)) + ((\lambda_c + 2\mu) (n)) + (\mu(m_2)) + (\mu (e))] u_2^F + [(\lambda_c 0 + \mu 0] u_3^F \\
& [B 0] w_1^B + [(-\omega^2 \rho_f q) + B 0] w_2^E + [(-\omega^2 \rho_f (-q)) + B 0] w_2^W + [B 0] w_3^N + \\
& [B 0] w_3^S + [B 0] w_1^F - \left\langle \tau(u_j), \varphi_2^{s,B} \right\rangle_{\Gamma^B} = \left( F^s, \varphi_2^{s,B} \right)_{\Omega_j}.
\end{aligned}$$

Testeando con la la tercera función de prueba  $v^s = (v_1^s, v_2^s, v_3^s) = (0, 0, \varphi^{s,B}(x, y, z))$  y  $v^f = (0, 0, 0)$ .

$$\begin{aligned}
& -\omega^2 \left( \rho \left[ u_3^{s,B} \varphi_3^{s,B} + u_3^{s,E} \varphi_3^{s,E} + u_3^{s,W} \varphi_3^{s,W} + u_3^{s,N} \varphi_3^{s,N} + u_3^{s,S} \varphi_3^{s,S} + u_3^{s,F} \varphi_3^{s,F} \right], \varphi_3^{s,B} \right) \\
& -\omega^2 \left( \rho_f \left[ u_3^{f,N} \psi^N + u_3^{f,S} \psi^S \right], \varphi_3^{s,B} \right) \\
& \left( (\lambda_c + 2\mu) \frac{\partial \left[ u_3^{s,B} \varphi_3^{s,B} + u_3^{s,E} \varphi_3^{s,E} + u_3^{s,W} \varphi_3^{s,W} + u_3^{s,N} \varphi_3^{s,N} + u_3^{s,S} \varphi_3^{s,S} + u_3^{s,F} \varphi_3^{s,F} \right]}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_3^{s,B}}{\partial z} \right) \\
& + \left( \lambda_c \frac{\partial \left[ u_1^{s,B} \varphi_1^{s,B} + u_1^{s,E} \varphi_1^{s,E} + u_1^{s,W} \varphi_1^{s,W} + u_1^{s,N} \varphi_1^{s,N} + u_1^{s,S} \varphi_1^{s,S} + u_1^{s,F} \varphi_1^{s,F} \right]}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_3^{s,B}}{\partial z} \right)
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \left[ \left( \lambda_c \frac{\partial \varphi_1^{s,F}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_3^{s,B}}{\partial z} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_1^{s,F}}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_3^{s,B}}{\partial x} \right) \right] u_1^F + \left[ \left( \lambda_c \frac{\partial \varphi_2^{s,F}}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_3^{s,B}}{\partial z} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_2^{s,F}}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_3^{s,B}}{\partial y} \right) \right] u_2^F + \\
& \left[ \left( -\omega^2 \rho \varphi_3^{s,F}, \varphi_3^{s,B} \right) + \left( (\lambda_c + 2\mu) \frac{\partial \varphi_3^{s,F}}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_3^{s,B}}{\partial z} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_3^{s,F}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_3^{s,B}}{\partial x} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_3^{s,F}}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_3^{s,B}}{\partial y} \right) \right] u_3^F + \\
& \left[ \left( B \frac{\partial \psi^B}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_3^{s,B}}{\partial z} \right) \right] w_1^B + \left[ \left( B \frac{\partial \psi^E}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_3^{s,B}}{\partial z} \right) \right] w_2^E + \left[ \left( B \frac{\partial \psi^W}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_3^{s,B}}{\partial z} \right) \right] w_2^W + \\
& \left[ \left( -\omega^2 \rho_f \psi^N, \varphi_3^{s,B} \right) + \left( B \frac{\partial \psi^N}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_3^{s,B}}{\partial z} \right) \right] w_3^N + \left[ \left( -\omega^2 \rho_f \psi^S, \varphi_3^{s,B} \right) + \left( B \frac{\partial \psi^S}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_3^{s,B}}{\partial z} \right) \right] w_3^S + \\
& \left[ \left( B \frac{\partial \psi^F}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_3^{s,B}}{\partial z} \right) \right] w_1^F - \langle \tau(u_j), \varphi_3^{s,B} \rangle_{\Gamma^B} = (F^s, \varphi_3^{s,B})_{\Omega_j}.
\end{aligned}$$

Integrando, los coeficientes que se obtienen son:

$$\begin{aligned}
& [\lambda_c 0 + \mu 0] u_1^B + [\lambda_c 0 + \mu 0] u_2^B + [-\omega^2 \rho l_1 + (\lambda_c + 2\mu) e + \mu m_1 + \mu n] u_3^B + \\
& [\lambda_c 0 + \mu 0] u_1^E + [(\lambda_c 0 + \mu 0) u_2^E + [-\omega^2 \rho l + (\lambda_c + 2\mu) e + \mu (-2m) + \mu (-2n)] u_3^E + \\
& [\lambda_c 0 + \mu 0] u_1^W + [\lambda_c 0 + \mu 0] u_2^W + [-\omega^2 \rho l + (\lambda_c + 2\mu) e + \mu (-2m) + \mu (-2n)] u_3^W + \\
& [\lambda_c 0 + \mu (-h_y)] u_1^N + [\lambda_c 0 + \mu 0] u_2^N + [-\omega^2 \rho l + (\lambda_c + 2\mu) (-2o) + \mu (-2m) + \mu (n)] u_3^N + \\
& [\lambda_c 0 + \mu (h_y)] u_1^S + [\lambda_c 0 + \mu 0] u_2^S + [-\omega^2 \rho l + (\lambda_c + 2\mu) (-2o) + \mu (-2m) + \mu (n)] u_3^S + \\
& [\lambda_c 0 + \mu 0] u_1^F + [\lambda_c 0 + \mu 0] u_2^F + \\
& [-\omega^2 \rho (-2l) + (\lambda_c + 2\mu) e + \mu m_2 + \mu n] u_3^F + \\
& [B 0] w_1^B + [B 0] w_2^E + [B 0] w_2^W + \\
& [-\omega^2 \rho_f q + B 0] w_3^N + [-\omega^2 \rho_f (-q) + B 0] w_3^S + \\
& [B 0] w_1^F - \langle \tau(u_j), \varphi_3^{s,B} \rangle_{\Gamma^B} = (F^s, \varphi_3^{s,B})_{\Omega_j}.
\end{aligned}$$

Para las funciones de prueba del fluido, se prueba con  $v^s = (0, 0, 0)$  y  $v^f = (\psi^B(x, y, z), 0, 0)$ , la cuarta función de prueba, resultando la ecuación (7.5).

$$\begin{aligned}
& \left( -\omega^2 \rho_f \left[ u_1^{s,B} \varphi_1^{s,B} + u_1^{s,E} \varphi_1^{s,E} + u_1^{s,W} \varphi_1^{s,W} + u_1^{s,N} \varphi_1^{s,N} + u_1^{s,S} \varphi_1^{s,S} + u_1^{s,F} \varphi_1^{s,F} \right], \psi_1^B \right) \\
& + (g [w_1^B \psi_1^B + w_1^F \psi_1^F], \psi_1^B) + i\omega (d [w_1^B \psi_1^B + w_1^F \psi_1^F], \psi_1^B) \\
& + B \left( \frac{\partial \left[ u_1^{s,B} \varphi_1^{s,B} + u_1^{s,E} \varphi_1^{s,E} + u_1^{s,W} \varphi_1^{s,W} + u_1^{s,N} \varphi_1^{s,N} + u_1^{s,S} \varphi_1^{s,S} + u_1^{s,F} \varphi_1^{s,F} \right]}{\partial x}, \frac{\partial \psi_1^B}{\partial x} \right) \\
& + B \left( \frac{\partial \left[ u_2^{s,B} \varphi_2^{s,B} + u_2^{s,E} \varphi_2^{s,E} + u_2^{s,W} \varphi_2^{s,W} + u_2^{s,N} \varphi_2^{s,N} + u_2^{s,S} \varphi_2^{s,S} + u_2^{s,F} \varphi_2^{s,F} \right]}{\partial y}, \frac{\partial \psi_1^B}{\partial x} \right) \\
& + B \left( \frac{\partial \left[ u_3^{s,B} \varphi_3^{s,B} + u_3^{s,E} \varphi_3^{s,E} + u_3^{s,W} \varphi_3^{s,W} + u_3^{s,N} \varphi_3^{s,N} + u_3^{s,S} \varphi_3^{s,S} + u_3^{s,F} \varphi_3^{s,F} \right]}{\partial z}, \frac{\partial \psi_1^B}{\partial x} \right) \\
& + M \left( \frac{\partial [w_1^B \psi_1^B + w_1^F \psi_1^F]}{\partial x}, \frac{\partial \psi_1^B}{\partial x} \right) + M \left( \frac{\partial [w_2^E \psi_2^E + w_2^W \psi_2^W]}{\partial y}, \frac{\partial \psi_1^B}{\partial x} \right) \\
& + M \left( \frac{\partial [w_3^N \psi_3^N + w_3^S \psi_3^S]}{\partial z}, \frac{\partial \psi_1^B}{\partial x} \right)
\end{aligned}$$

$$+ \left\langle P_f(u_j), \frac{\partial \psi_1^B}{\partial x} \right\rangle_{\Gamma^B} = (F^f, \psi_1^B)_{\Omega_j}. \quad (7.5)$$

Sacando los factores comunes para cada variable, en la ecuación (7.5), se obtienen los coeficientes  $a_{4,1}$  al  $a_{4,24}$ .

$$\begin{aligned} & \left[ (-\omega^2 \rho_f \varphi_1^{s,B}, \psi_1^B) + \left( B \frac{\partial \varphi_1^{s,B}}{\partial x}, \frac{\partial \psi_1^B}{\partial x} \right) \right] u_1^B + \left[ \left( B \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial y}, \frac{\partial \psi_1^B}{\partial x} \right) \right] u_2^B + \left[ \left( B \frac{\partial \varphi_3^{s,B}}{\partial z}, \frac{\partial \psi_1^B}{\partial x} \right) \right] u_3^B + \\ & \left[ (-\omega^2 \rho_f \varphi_1^{s,E}, \psi_1^B) + \left( B \frac{\partial \varphi_1^{s,E}}{\partial x}, \frac{\partial \psi_1^B}{\partial x} \right) \right] u_1^E + \left[ \left( B \frac{\partial \varphi_2^{s,E}}{\partial y}, \frac{\partial \psi_1^B}{\partial x} \right) \right] u_2^E + \left[ \left( B \frac{\partial \varphi_3^{s,E}}{\partial z}, \frac{\partial \psi_1^B}{\partial x} \right) \right] u_3^E + \\ & \left[ (-\omega^2 \rho_f \varphi_1^{s,W}, \psi_1^B) + \left( B \frac{\partial \varphi_1^{s,W}}{\partial x}, \frac{\partial \psi_1^B}{\partial x} \right) \right] u_1^W + \left[ \left( B \frac{\partial \varphi_2^{s,W}}{\partial y}, \frac{\partial \psi_1^B}{\partial x} \right) \right] u_2^W + \left[ \left( B \frac{\partial \varphi_3^{s,W}}{\partial z}, \frac{\partial \psi_1^B}{\partial x} \right) \right] u_3^W + \\ & \left[ (-\omega^2 \rho_f \varphi_1^{s,N}, \psi_1^B) + \left( B \frac{\partial \varphi_1^{s,N}}{\partial x}, \frac{\partial \psi_1^B}{\partial x} \right) \right] u_1^N + \left[ \left( B \frac{\partial \varphi_2^{s,N}}{\partial y}, \frac{\partial \psi_1^B}{\partial x} \right) \right] u_2^N + \left[ \left( B \frac{\partial \varphi_3^{s,N}}{\partial z}, \frac{\partial \psi_1^B}{\partial x} \right) \right] u_3^N + \\ & \left[ (-\omega^2 \rho_f \varphi_1^{s,S}, \psi_1^B) + \left( B \frac{\partial \varphi_1^{s,S}}{\partial x}, \frac{\partial \psi_1^B}{\partial x} \right) \right] u_1^S + \left[ \left( B \frac{\partial \varphi_2^{s,S}}{\partial y}, \frac{\partial \psi_1^B}{\partial x} \right) \right] u_2^S + \left[ \left( B \frac{\partial \varphi_3^{s,S}}{\partial z}, \frac{\partial \psi_1^B}{\partial x} \right) \right] u_3^S + \\ & \left[ (-\omega^2 \rho_f \varphi_1^{s,F}, \psi_1^B) + \left( B \frac{\partial \varphi_1^{s,F}}{\partial x}, \frac{\partial \psi_1^B}{\partial x} \right) \right] u_1^F + \left[ \left( B \frac{\partial \varphi_2^{s,F}}{\partial y}, \frac{\partial \psi_1^B}{\partial x} \right) \right] u_2^F + \left[ \left( B \frac{\partial \varphi_3^{s,F}}{\partial z}, \frac{\partial \psi_1^B}{\partial x} \right) \right] u_3^F + \\ & \left[ (g\psi_1^B, \psi_1^B) + (i\omega d \psi_1^B, \psi_1^B) + \left( M \frac{\partial \psi_1^B}{\partial x}, \frac{\partial \psi_1^B}{\partial x} \right) \right] w_1^B + \left[ \left( M \frac{\partial \psi_2^E}{\partial y}, \frac{\partial \psi_1^B}{\partial x} \right) \right] w_2^E \\ & + \left[ \left( M \frac{\partial \psi_2^W}{\partial y}, \frac{\partial \psi_1^B}{\partial x} \right) \right] w_2^W + \left[ \left( M \frac{\partial \psi_3^N}{\partial z}, \frac{\partial \psi_1^B}{\partial x} \right) \right] w_3^N + \left[ \left( M \frac{\partial \psi_3^S}{\partial z}, \frac{\partial \psi_1^B}{\partial x} \right) \right] w_3^S \\ & \left[ (g\psi_1^F, \psi_1^B) + (i\omega d \psi_1^F, \psi_1^B) + \left( M \frac{\partial \psi_1^F}{\partial x}, \frac{\partial \psi_1^B}{\partial x} \right) \right] w_1^F + \left\langle P_f(u_j), \frac{\partial \psi_1^B}{\partial x} \right\rangle_{\Gamma^B} = (F^f, \psi_1^B)_{\Omega_j}. \end{aligned}$$

Testeando con la quinta función de prueba,  $v^s = (v_1^s, v_2^s, v_3^s) = (\varphi_1^{s,E}(x, y, z), 0, 0)$  y  $v^f = (0, 0, 0)$  es lo mismo a la ecuación (7.1) pero cambiando los valores de  $\varphi_1^{s,B}$  por  $\varphi_1^{s,E}$ , obtenemos los coeficientes  $a_{5,1}$  al  $a_{5,24}$ .

$$\begin{aligned} & \left[ (-\omega^2 \rho \varphi_1^{s,B}, \varphi_1^{s,E}) + \left( (\lambda_c + 2\mu) \frac{\partial \varphi_1^{s,B}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_1^{s,E}}{\partial x} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_1^{s,B}}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_1^{s,E}}{\partial y} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_1^{s,B}}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_1^{s,E}}{\partial z} \right) \right] u_1^B + \\ & \left[ \left( \lambda_c \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_1^{s,E}}{\partial x} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_1^{s,E}}{\partial y} \right) \right] u_2^B + \left[ \left( \lambda_c \frac{\partial \varphi_3^{s,B}}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_1^{s,E}}{\partial x} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_3^{s,B}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_1^{s,E}}{\partial z} \right) \right] u_3^B \\ & \left[ (-\omega^2 \rho \varphi_1^{s,E}, \varphi_1^{s,E}) + \left( (\lambda_c + 2\mu) \frac{\partial \varphi_1^{s,E}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_1^{s,E}}{\partial x} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_1^{s,E}}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_1^{s,E}}{\partial y} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_1^{s,E}}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_1^{s,E}}{\partial z} \right) \right] u_1^E + \\ & \left[ \left( \lambda_c \frac{\partial \varphi_2^{s,E}}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_1^{s,E}}{\partial x} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_2^{s,E}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_1^{s,E}}{\partial y} \right) \right] u_2^E + \left[ \left( \lambda_c \frac{\partial \varphi_3^{s,E}}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_1^{s,E}}{\partial x} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_3^{s,E}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_1^{s,E}}{\partial z} \right) \right] u_3^E + \\ & \left[ (-\omega^2 \rho \varphi_1^{s,W}, \varphi_1^{s,E}) + \left( (\lambda_c + 2\mu) \frac{\partial \varphi_1^{s,W}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_1^{s,E}}{\partial x} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_1^{s,W}}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_1^{s,E}}{\partial y} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_1^{s,W}}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_1^{s,E}}{\partial z} \right) \right] u_1^W + \\ & \left[ \left( \lambda_c \frac{\partial \varphi_2^{s,W}}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_1^{s,E}}{\partial x} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_2^{s,W}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_1^{s,E}}{\partial y} \right) \right] u_2^W + \left[ \left( \lambda_c \frac{\partial \varphi_3^{s,W}}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_1^{s,E}}{\partial x} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_3^{s,W}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_1^{s,E}}{\partial z} \right) \right] u_3^W + \\ & \left[ (-\omega^2 \rho \varphi_1^{s,N}, \varphi_1^{s,E}) + \left( (\lambda_c + 2\mu) \frac{\partial \varphi_1^{s,N}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_1^{s,E}}{\partial x} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_1^{s,N}}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_1^{s,E}}{\partial y} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_1^{s,N}}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_1^{s,E}}{\partial z} \right) \right] u_1^N + \\ & \left[ \left( \lambda_c \frac{\partial \varphi_2^{s,N}}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_1^{s,E}}{\partial x} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_2^{s,N}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_1^{s,E}}{\partial y} \right) \right] u_2^N + \left[ \left( \lambda_c \frac{\partial \varphi_3^{s,N}}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_1^{s,E}}{\partial x} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_3^{s,N}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_1^{s,E}}{\partial z} \right) \right] u_3^N + \end{aligned}$$







$$\left[ \left( -\omega^2 \rho_f \psi^N, \varphi_3^{s,E} \right) + \left( B \frac{\partial \psi^N}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_3^{s,E}}{\partial z} \right) \right] w_3^N + \left[ \left( -\omega^2 \rho_f \psi^S, \varphi_3^{s,E} \right) + \left( B \frac{\partial \psi^S}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_3^{s,E}}{\partial z} \right) \right] w_3^S + \left[ \left( B \frac{\partial \psi^F}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_3^{s,E}}{\partial z} \right) \right] w_1^F - \left\langle \tau(u_j), \varphi_3^{s,E} \right\rangle_{\Gamma^B} = \left( F^s, \varphi_3^{s,E} \right)_{\Omega_j}.$$

Para las funciones de prueba del fluido, se prueba con  $v^s = (0, 0, 0)$  y  $v^f = (0, \psi^E(x, y, z), 0)$ , resultando la ecuación (7.6).

$$\begin{aligned} & \left( -\omega^2 \rho_f \left[ u_2^{s,B} \varphi_2^{s,B} + u_2^{s,E} \varphi_2^{s,E} + u_2^{s,W} \varphi_2^{s,W} + u_2^{s,N} \varphi_2^{s,N} + u_2^{s,S} \varphi_2^{s,S} + u_2^{s,F} \varphi_2^{s,F} \right], \psi_2^E \right) \\ & \quad + \left( g \left[ w_2^E \psi_2^E + w_2^W \psi_2^W \right], \psi_2^E \right) + i\omega \left( d \left[ w_2^E \psi_2^E + w_2^W \psi_2^W \right], \psi_2^E \right) \\ & + B \left( \frac{\partial \left[ u_1^{s,B} \varphi_1^{s,B} + u_1^{s,E} \varphi_1^{s,E} + u_1^{s,W} \varphi_1^{s,W} + u_1^{s,N} \varphi_1^{s,N} + u_1^{s,S} \varphi_1^{s,S} + u_1^{s,F} \varphi_1^{s,F} \right]}{\partial x}, \frac{\partial \psi_2^E}{\partial y} \right) \\ & + B \left( \frac{\partial \left[ u_2^{s,B} \varphi_2^{s,B} + u_2^{s,E} \varphi_2^{s,E} + u_2^{s,W} \varphi_2^{s,W} + u_2^{s,N} \varphi_2^{s,N} + u_2^{s,S} \varphi_2^{s,S} + u_2^{s,F} \varphi_2^{s,F} \right]}{\partial y}, \frac{\partial \psi_2^E}{\partial y} \right) \\ & + B \left( \frac{\partial \left[ u_3^{s,B} \varphi_3^{s,B} + u_3^{s,E} \varphi_3^{s,E} + u_3^{s,W} \varphi_3^{s,W} + u_3^{s,N} \varphi_3^{s,N} + u_3^{s,S} \varphi_3^{s,S} + u_3^{s,F} \varphi_3^{s,F} \right]}{\partial z}, \frac{\partial \psi_2^E}{\partial y} \right) \\ & \quad + M \left( \frac{\partial \left[ w_1^B \psi_1^B + w_1^F \psi_1^F \right]}{\partial x}, \frac{\partial \psi_2^E}{\partial y} \right) + M \left( \frac{\partial \left[ w_2^E \psi_2^E + w_2^W \psi_2^W \right]}{\partial y}, \frac{\partial \psi_2^E}{\partial y} \right) \\ & \quad \quad \quad + M \left( \frac{\partial \left[ w_3^N \psi_3^N + w_3^S \psi_3^S \right]}{\partial z}, \frac{\partial \psi_2^E}{\partial y} \right) \\ & \quad \quad \quad + \left\langle P_f(u_j), \frac{\partial \psi_2^E}{\partial y} \right\rangle_{\Gamma^B} = \left( F^f, \psi_2^E \right)_{\Omega_j}. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Sacando los factores comunes para cada variable, para la ecuación (7.6), se obtienen los coeficientes  $a_{8,1}$  al  $a_{8,24}$ .

$$\begin{aligned} & \left[ \left( B \frac{\partial \varphi_1^{s,B}}{\partial x}, \frac{\partial \psi_2^E}{\partial y} \right) \right] u_1^B + \left[ \left( -\omega^2 \rho_f \varphi_2^{s,B}, \psi_2^E \right) + \left( B \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial y}, \frac{\partial \psi_2^E}{\partial y} \right) \right] u_2^B + \left[ \left( B \frac{\partial \varphi_3^{s,B}}{\partial z}, \frac{\partial \psi_2^E}{\partial y} \right) \right] u_3^B + \\ & \left[ \left( B \frac{\partial \varphi_1^{s,E}}{\partial x}, \frac{\partial \psi_2^E}{\partial y} \right) \right] u_1^E + \left[ \left( -\omega^2 \rho_f \varphi_2^{s,E}, \psi_2^E \right) + \left( B \frac{\partial \varphi_2^{s,E}}{\partial y}, \frac{\partial \psi_2^E}{\partial y} \right) \right] u_2^E + \left[ \left( B \frac{\partial \varphi_3^{s,E}}{\partial z}, \frac{\partial \psi_2^E}{\partial y} \right) \right] u_3^E + \\ & \left[ \left( B \frac{\partial \varphi_1^{s,W}}{\partial x}, \frac{\partial \psi_2^E}{\partial y} \right) \right] u_1^W + \left[ \left( -\omega^2 \rho_f \varphi_2^{s,W}, \psi_2^E \right) + \left( B \frac{\partial \varphi_2^{s,W}}{\partial y}, \frac{\partial \psi_2^E}{\partial y} \right) \right] u_2^W + \left[ \left( B \frac{\partial \varphi_3^{s,W}}{\partial z}, \frac{\partial \psi_2^E}{\partial y} \right) \right] u_3^W + \\ & \left[ \left( B \frac{\partial \varphi_1^{s,N}}{\partial x}, \frac{\partial \psi_2^E}{\partial y} \right) \right] u_1^N + \left[ \left( -\omega^2 \rho_f \varphi_2^{s,N}, \psi_2^E \right) + \left( B \frac{\partial \varphi_2^{s,N}}{\partial y}, \frac{\partial \psi_2^E}{\partial y} \right) \right] u_2^N + \left[ \left( B \frac{\partial \varphi_3^{s,N}}{\partial z}, \frac{\partial \psi_2^E}{\partial y} \right) \right] u_3^N + \\ & \left[ \left( B \frac{\partial \varphi_1^{s,S}}{\partial x}, \frac{\partial \psi_2^E}{\partial y} \right) \right] u_1^S + \left[ \left( -\omega^2 \rho_f \varphi_2^{s,S}, \psi_2^E \right) + \left( B \frac{\partial \varphi_2^{s,S}}{\partial y}, \frac{\partial \psi_2^E}{\partial y} \right) \right] u_2^S + \left[ \left( B \frac{\partial \varphi_3^{s,S}}{\partial z}, \frac{\partial \psi_2^E}{\partial y} \right) \right] u_3^S + \\ & \left[ \left( B \frac{\partial \varphi_1^{s,F}}{\partial x}, \frac{\partial \psi_2^E}{\partial y} \right) \right] u_1^F + \left[ \left( -\omega^2 \rho_f \varphi_2^{s,F}, \psi_2^E \right) + \left( B \frac{\partial \varphi_2^{s,F}}{\partial y}, \frac{\partial \psi_2^E}{\partial y} \right) \right] u_2^F + \left[ \left( B \frac{\partial \varphi_3^{s,F}}{\partial z}, \frac{\partial \psi_2^E}{\partial y} \right) \right] u_3^F + \\ & \quad \left[ \left( M \frac{\partial \psi_1^B}{\partial x}, \frac{\partial \psi_2^E}{\partial y} \right) \right] w_1^B + \left[ \left( g \psi_2^E, \psi_2^E \right) + \left( i\omega d \psi_2^E, \psi_2^E \right) + \left( M \frac{\partial \psi_2^E}{\partial y}, \frac{\partial \psi_2^E}{\partial y} \right) \right] w_2^E \\ & \quad + \left[ \left( g \psi_2^W, \psi_2^E \right) + \left( i\omega d \psi_2^W, \psi_2^E \right) + \left( M \frac{\partial \psi_2^W}{\partial y}, \frac{\partial \psi_2^E}{\partial y} \right) \right] w_2^W + \left[ \left( M \frac{\partial \psi_3^N}{\partial z}, \frac{\partial \psi_2^E}{\partial y} \right) \right] w_3^N \\ & \quad + \left[ \left( M \frac{\partial \psi_3^S}{\partial z}, \frac{\partial \psi_2^E}{\partial y} \right) \right] w_3^S + \left[ \left( M \frac{\partial \psi_1^F}{\partial x}, \frac{\partial \psi_2^E}{\partial y} \right) \right] w_1^F + \left\langle P_f(u_j), \frac{\partial \psi_2^E}{\partial y} \right\rangle_{\Gamma^B} = \left( F^f, \psi_2^E \right)_{\Omega_j}. \end{aligned}$$







$$\begin{aligned}
& + \left[ (g\psi_2^W, \psi_2^W) + (i\omega d \psi_2^W, \psi_2^W) + \left( M \frac{\partial \psi_2^W}{\partial y}, \frac{\partial \psi_2^W}{\partial y} \right) \right] w_2^W + \left[ \left( M \frac{\partial \psi_3^N}{\partial z}, \frac{\partial \psi_2^W}{\partial y} \right) \right] w_3^N \\
& + \left[ \left( M \frac{\partial \psi_3^S}{\partial z}, \frac{\partial \psi_2^W}{\partial y} \right) \right] w_3^S + \left[ \left( M \frac{\partial \psi_1^F}{\partial x}, \frac{\partial \psi_2^W}{\partial y} \right) \right] w_1^F + \left\langle P_f(u_j), \frac{\partial \psi_2^W}{\partial y} \right\rangle_{\Gamma^B} = (F^f, \psi_2^W)_{\Omega_j}.
\end{aligned}$$

Testeando con la la décima tercera función de prueba,  $v^s = (v_1^s, v_2^s, v_3^s) = (\varphi^{s,N}(x, y, z), 0, 0)$  y  $v^f = (0, 0, 0)$  es lo mismo a la ecuación (7.1) pero cambiando los valores de  $\varphi_1^{s,B}$  por  $\varphi_1^{s,N}$ , obtenemos los coeficientes  $a_{13,1}$  al  $a_{13,24}$

$$\begin{aligned}
& \left[ (-\omega^2 \rho \varphi_1^{s,B}, \varphi_1^{s,N}) + \left( (\lambda_c + 2\mu) \frac{\partial \varphi_1^{s,B}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_1^{s,N}}{\partial x} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_1^{s,B}}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_1^{s,N}}{\partial y} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_1^{s,B}}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_1^{s,N}}{\partial z} \right) \right] u_1^B + \\
& \left[ \left( \lambda_c \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_1^{s,N}}{\partial x} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_1^{s,N}}{\partial y} \right) \right] u_2^B + \left[ \left( \lambda_c \frac{\partial \varphi_3^{s,B}}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_1^{s,N}}{\partial x} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_3^{s,B}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_1^{s,N}}{\partial z} \right) \right] u_3^B \\
& \left[ (-\omega^2 \rho \varphi_1^{s,E}, \varphi_1^{s,N}) + \left( (\lambda_c + 2\mu) \frac{\partial \varphi_1^{s,E}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_1^{s,N}}{\partial x} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_1^{s,E}}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_1^{s,N}}{\partial y} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_1^{s,E}}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_1^{s,N}}{\partial z} \right) \right] u_1^E + \\
& \left[ \left( \lambda_c \frac{\partial \varphi_2^{s,E}}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_1^{s,N}}{\partial x} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_2^{s,E}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_1^{s,N}}{\partial y} \right) \right] u_2^E + \left[ \left( \lambda_c \frac{\partial \varphi_3^{s,E}}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_1^{s,N}}{\partial x} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_3^{s,E}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_1^{s,N}}{\partial z} \right) \right] u_3^E + \\
& \left[ (-\omega^2 \rho \varphi_1^{s,W}, \varphi_1^{s,N}) + \left( (\lambda_c + 2\mu) \frac{\partial \varphi_1^{s,W}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_1^{s,N}}{\partial x} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_1^{s,W}}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_1^{s,N}}{\partial y} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_1^{s,W}}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_1^{s,N}}{\partial z} \right) \right] u_1^W + \\
& \left[ \left( \lambda_c \frac{\partial \varphi_2^{s,W}}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_1^{s,N}}{\partial x} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_2^{s,W}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_1^{s,N}}{\partial y} \right) \right] u_2^W + \left[ \left( \lambda_c \frac{\partial \varphi_3^{s,W}}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_1^{s,N}}{\partial x} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_3^{s,W}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_1^{s,N}}{\partial z} \right) \right] u_3^W + \\
& \left[ (-\omega^2 \rho \varphi_1^{s,N}, \varphi_1^{s,N}) + \left( (\lambda_c + 2\mu) \frac{\partial \varphi_1^{s,N}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_1^{s,N}}{\partial x} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_1^{s,N}}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_1^{s,N}}{\partial y} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_1^{s,N}}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_1^{s,N}}{\partial z} \right) \right] u_1^N + \\
& \left[ \left( \lambda_c \frac{\partial \varphi_2^{s,N}}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_1^{s,N}}{\partial x} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_2^{s,N}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_1^{s,N}}{\partial y} \right) \right] u_2^N + \left[ \left( \lambda_c \frac{\partial \varphi_3^{s,N}}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_1^{s,N}}{\partial x} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_3^{s,N}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_1^{s,N}}{\partial z} \right) \right] u_3^N + \\
& \left[ (-\omega^2 \rho \varphi_1^{s,S}, \varphi_1^{s,N}) + \left( (\lambda_c + 2\mu) \frac{\partial \varphi_1^{s,S}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_1^{s,N}}{\partial x} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_1^{s,S}}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_1^{s,N}}{\partial y} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_1^{s,S}}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_1^{s,N}}{\partial z} \right) \right] u_1^S + \\
& \left[ \left( \lambda_c \frac{\partial \varphi_2^{s,S}}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_1^{s,N}}{\partial x} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_2^{s,S}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_1^{s,N}}{\partial y} \right) \right] u_2^S + \left[ \left( \lambda_c \frac{\partial \varphi_3^{s,S}}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_1^{s,N}}{\partial x} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_3^{s,S}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_1^{s,N}}{\partial z} \right) \right] u_3^S + \\
& \left[ (-\omega^2 \rho \varphi_1^{s,F}, \varphi_1^{s,N}) + \left( (\lambda_c + 2\mu) \frac{\partial \varphi_1^{s,F}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_1^{s,N}}{\partial x} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_1^{s,F}}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_1^{s,N}}{\partial y} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_1^{s,F}}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_1^{s,N}}{\partial z} \right) \right] u_1^F + \\
& \left[ \left( \lambda_c \frac{\partial \varphi_2^{s,F}}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_1^{s,N}}{\partial x} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_2^{s,F}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_1^{s,N}}{\partial y} \right) \right] u_2^F + \left[ \left( \lambda_c \frac{\partial \varphi_3^{s,F}}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_1^{s,N}}{\partial x} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_3^{s,F}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_1^{s,N}}{\partial z} \right) \right] u_3^F + \\
& \left[ (-\omega^2 \rho_f \psi^B, \varphi_1^{s,N}) + \left( B \frac{\partial \psi^B}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_1^{s,N}}{\partial x} \right) \right] w_1^B + \left[ B \frac{\partial \psi^E}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_1^{s,N}}{\partial x} \right] w_2^E + \left[ B \frac{\partial \psi^W}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_1^{s,N}}{\partial x} \right] w_2^W + \\
& \left[ B \frac{\partial \psi^N}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_1^{s,N}}{\partial x} \right] w_3^N + \left[ B \frac{\partial \psi^S}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_1^{s,N}}{\partial x} \right] w_3^S + \left[ (-\omega^2 \rho_f \psi^F, \varphi_1^{s,N}) + \left( B \frac{\partial \psi^F}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_1^{s,N}}{\partial x} \right) \right] w_1^F + \\
& - \left\langle \tau(u_j), \varphi_1^{s,N} \right\rangle_{\Gamma^B} = (F^s, \varphi_1^{s,N})_{\Omega_j}.
\end{aligned}$$

Testeando con la la décima cuarta función de prueba,  $v^s = (v_1^s, v_2^s, v_3^s) = (0, \varphi^{s,N}(x, y, z), 0)$  y  $v^f = (0, 0, 0)$  es lo mismo a la ecuación (7.3) pero cambiando los valores de  $\varphi_2^{s,B}$  por



$$\begin{aligned}
& \left[ \left( \lambda_c \frac{\partial \varphi_1^{s,E}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_3^{s,N}}{\partial z} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_1^{s,E}}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_3^{s,N}}{\partial x} \right) \right] u_1^E + \left[ \left( \lambda_c \frac{\partial \varphi_2^{s,E}}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_3^{s,N}}{\partial z} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_2^{s,E}}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_3^{s,N}}{\partial y} \right) \right] u_2^E + \\
& \left[ \left( -\omega^2 \rho \varphi_3^{s,E}, \varphi_3^{s,N} \right) + \left( (\lambda_c + 2\mu) \frac{\partial \varphi_3^{s,E}}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_3^{s,N}}{\partial z} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_3^{s,E}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_3^{s,N}}{\partial x} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_3^{s,E}}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_3^{s,N}}{\partial y} \right) \right] u_3^E + \\
& \left[ \left( \lambda_c \frac{\partial \varphi_1^{s,W}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_3^{s,N}}{\partial z} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_1^{s,W}}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_3^{s,N}}{\partial x} \right) \right] u_1^W + \left[ \left( \lambda_c \frac{\partial \varphi_2^{s,W}}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_3^{s,N}}{\partial z} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_2^{s,W}}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_3^{s,N}}{\partial y} \right) \right] u_2^W + \\
& \left[ \left( -\omega^2 \rho \varphi_3^{s,W}, \varphi_3^{s,N} \right) + \left( (\lambda_c + 2\mu) \frac{\partial \varphi_3^{s,W}}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_3^{s,N}}{\partial z} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_3^{s,W}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_3^{s,N}}{\partial x} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_3^{s,W}}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_3^{s,N}}{\partial y} \right) \right] u_3^W + \\
& \left[ \left( \lambda_c \frac{\partial \varphi_1^{s,N}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_3^{s,N}}{\partial z} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_1^{s,N}}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_3^{s,N}}{\partial x} \right) \right] u_1^N + \left[ \left( \lambda_c \frac{\partial \varphi_2^{s,N}}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_3^{s,N}}{\partial z} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_2^{s,N}}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_3^{s,N}}{\partial y} \right) \right] u_2^N + \\
& \left[ \left( -\omega^2 \rho \varphi_3^{s,N}, \varphi_3^{s,N} \right) + \left( (\lambda_c + 2\mu) \frac{\partial \varphi_3^{s,N}}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_3^{s,N}}{\partial z} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_3^{s,N}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_3^{s,N}}{\partial x} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_3^{s,N}}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_3^{s,N}}{\partial y} \right) \right] u_3^N + \\
& \left[ \left( \lambda_c \frac{\partial \varphi_1^{s,S}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_3^{s,N}}{\partial z} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_1^{s,S}}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_3^{s,N}}{\partial x} \right) \right] u_1^S + \left[ \left( \lambda_c \frac{\partial \varphi_2^{s,S}}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_3^{s,N}}{\partial z} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_2^{s,S}}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_3^{s,N}}{\partial y} \right) \right] u_2^S + \\
& \left[ \left( -\omega^2 \rho \varphi_3^{s,S}, \varphi_3^{s,N} \right) + \left( (\lambda_c + 2\mu) \frac{\partial \varphi_3^{s,S}}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_3^{s,N}}{\partial z} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_3^{s,S}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_3^{s,N}}{\partial x} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_3^{s,S}}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_3^{s,N}}{\partial y} \right) \right] u_3^S + \\
& \left[ \left( \lambda_c \frac{\partial \varphi_1^{s,F}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_3^{s,N}}{\partial z} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_1^{s,F}}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_3^{s,N}}{\partial x} \right) \right] u_1^F + \left[ \left( \lambda_c \frac{\partial \varphi_2^{s,F}}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_3^{s,N}}{\partial z} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_2^{s,F}}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_3^{s,N}}{\partial y} \right) \right] u_2^F + \\
& \left[ \left( -\omega^2 \rho \varphi_3^{s,F}, \varphi_3^{s,N} \right) + \left( (\lambda_c + 2\mu) \frac{\partial \varphi_3^{s,F}}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_3^{s,N}}{\partial z} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_3^{s,F}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_3^{s,N}}{\partial x} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_3^{s,F}}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_3^{s,N}}{\partial y} \right) \right] u_3^F + \\
& \left[ \left( B \frac{\partial \psi^B}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_3^{s,N}}{\partial z} \right) \right] w_1^B + \left[ \left( B \frac{\partial \psi^E}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_3^{s,N}}{\partial z} \right) \right] w_2^E + \left[ \left( B \frac{\partial \psi^W}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_3^{s,N}}{\partial z} \right) \right] w_2^W + \\
& \left[ \left( -\omega^2 \rho_f \psi^N, \varphi_3^{s,N} \right) + \left( B \frac{\partial \psi^N}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_3^{s,N}}{\partial z} \right) \right] w_3^N + \left[ \left( -\omega^2 \rho_f \psi^S, \varphi_3^{s,N} \right) + \left( B \frac{\partial \psi^S}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_3^{s,N}}{\partial z} \right) \right] w_3^S + \\
& \left[ \left( B \frac{\partial \psi^F}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_3^{s,N}}{\partial z} \right) \right] w_1^F - \langle \tau(u_j), \varphi_3^{s,N} \rangle_{\Gamma^B} = (F^s, \varphi_3^{s,N})_{\Omega_j}.
\end{aligned}$$

Testeando con la la décimo sexta función de prueba, se prueba con  $v^s = (0, 0, 0)$  y  $v^f = (0, 0, \psi^N(x, y, z))$ , resultando la ecuación (7.7).

$$\begin{aligned}
& \left( -\omega^2 \rho_f \left[ u_3^{s,B} \varphi_3^{s,B} + u_3^{s,E} \varphi_3^{s,E} + u_3^{s,W} \varphi_3^{s,W} + u_3^{s,N} \varphi_3^{s,N} + u_3^{s,S} \varphi_3^{s,S} + u_3^{s,F} \varphi_3^{s,F} \right], \psi_3^N \right) \\
& + (g [w_3^N \psi_3^N + w_3^S \psi_3^S], \psi_3^N) + i\omega (d [w_3^N \psi_3^N + w_3^S \psi_3^S], \psi_3^N) \\
& + B \left( \frac{\partial \left[ u_1^{s,B} \varphi_1^{s,B} + u_1^{s,E} \varphi_1^{s,E} + u_1^{s,W} \varphi_1^{s,W} + u_1^{s,N} \varphi_1^{s,N} + u_1^{s,S} \varphi_1^{s,S} + u_1^{s,F} \varphi_1^{s,F} \right]}{\partial x}, \frac{\partial \psi_3^N}{\partial z} \right) \\
& + B \left( \frac{\partial \left[ u_2^{s,B} \varphi_2^{s,B} + u_2^{s,E} \varphi_2^{s,E} + u_2^{s,W} \varphi_2^{s,W} + u_2^{s,N} \varphi_2^{s,N} + u_2^{s,S} \varphi_2^{s,S} + u_2^{s,F} \varphi_2^{s,F} \right]}{\partial y}, \frac{\partial \psi_3^N}{\partial z} \right) \\
& + B \left( \frac{\partial \left[ u_3^{s,B} \varphi_3^{s,B} + u_3^{s,E} \varphi_3^{s,E} + u_3^{s,W} \varphi_3^{s,W} + u_3^{s,N} \varphi_3^{s,N} + u_3^{s,S} \varphi_3^{s,S} + u_3^{s,F} \varphi_3^{s,F} \right]}{\partial z}, \frac{\partial \psi_3^N}{\partial z} \right) \\
& + M \left( \frac{\partial [w_1^B \psi_1^B + w_1^F \psi_1^F]}{\partial x}, \frac{\partial \psi_3^N}{\partial z} \right) + M \left( \frac{\partial [w_2^E \psi_2^E + w_2^W \psi_2^W]}{\partial y}, \frac{\partial \psi_3^N}{\partial z} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + M \left( \frac{\partial [w_3^N \psi_3^N + w_3^S \psi_1^S]}{\partial z}, \frac{\partial \psi_3^N}{\partial z} \right) \\
& + \left\langle P_f(u_j), \frac{\partial \psi_3^N}{\partial z} \right\rangle_{\Gamma_B} = (F^f, \psi_3^N)_{\Omega_j}. \quad (7.7)
\end{aligned}$$

Sacando los factores comunes para cada variable, se obtienen los coeficientes  $a_{16,1}$  al  $a_{16,24}$ .

$$\begin{aligned}
& \left[ \left( B \frac{\partial \varphi_1^{s,B}}{\partial x}, \frac{\partial \psi_3^N}{\partial z} \right) \right] u_1^B + \left[ \left( B \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial y}, \frac{\partial \psi_3^N}{\partial z} \right) \right] u_2^B + \left[ \left( -\omega^2 \rho_f \varphi_3^{s,B}, \psi_3^N \right) + \left( B \frac{\partial \varphi_3^{s,B}}{\partial z}, \frac{\partial \psi_3^N}{\partial z} \right) \right] u_3^B + \\
& \left[ \left( B \frac{\partial \varphi_1^{s,E}}{\partial x}, \frac{\partial \psi_3^N}{\partial z} \right) \right] u_1^E + \left[ \left( B \frac{\partial \varphi_2^{s,E}}{\partial y}, \frac{\partial \psi_3^N}{\partial z} \right) \right] u_2^E + \left[ \left( -\omega^2 \rho_f \varphi_3^{s,E}, \psi_3^N \right) + \left( B \frac{\partial \varphi_3^{s,E}}{\partial z}, \frac{\partial \psi_3^N}{\partial z} \right) \right] u_3^E + \\
& \left[ \left( B \frac{\partial \varphi_1^{s,W}}{\partial x}, \frac{\partial \psi_3^N}{\partial z} \right) \right] u_1^W + \left[ \left( B \frac{\partial \varphi_2^{s,W}}{\partial y}, \frac{\partial \psi_3^N}{\partial z} \right) \right] u_2^W + \left[ \left( -\omega^2 \rho_f \varphi_3^{s,W}, \psi_3^N \right) + \left( B \frac{\partial \varphi_3^{s,W}}{\partial z}, \frac{\partial \psi_3^N}{\partial z} \right) \right] u_3^W + \\
& \left[ \left( B \frac{\partial \varphi_1^{s,N}}{\partial x}, \frac{\partial \psi_3^N}{\partial z} \right) \right] u_1^N + \left[ \left( B \frac{\partial \varphi_2^{s,N}}{\partial y}, \frac{\partial \psi_3^N}{\partial z} \right) \right] u_2^N + \left[ \left( -\omega^2 \rho_f \varphi_3^{s,N}, \psi_3^N \right) + \left( B \frac{\partial \varphi_3^{s,N}}{\partial z}, \frac{\partial \psi_3^N}{\partial z} \right) \right] u_3^N + \\
& \left[ \left( B \frac{\partial \varphi_1^{s,S}}{\partial x}, \frac{\partial \psi_3^N}{\partial z} \right) \right] u_1^S + \left[ \left( B \frac{\partial \varphi_2^{s,S}}{\partial y}, \frac{\partial \psi_3^N}{\partial z} \right) \right] u_2^S + \left[ \left( -\omega^2 \rho_f \varphi_3^{s,S}, \psi_3^N \right) + \left( B \frac{\partial \varphi_3^{s,S}}{\partial z}, \frac{\partial \psi_3^N}{\partial z} \right) \right] u_3^S + \\
\text{hyphenat} & \left[ \left( B \frac{\partial \varphi_1^{s,F}}{\partial x}, \frac{\partial \psi_3^N}{\partial z} \right) \right] u_1^F + \left[ \left( B \frac{\partial \varphi_2^{s,F}}{\partial y}, \frac{\partial \psi_3^N}{\partial z} \right) \right] u_2^F + \left[ \left( -\omega^2 \rho_f \varphi_3^{s,F}, \psi_3^N \right) + \left( B \frac{\partial \varphi_3^{s,F}}{\partial z}, \frac{\partial \psi_3^N}{\partial z} \right) \right] u_3^F + \\
& \left[ \left( M \frac{\partial \psi_1^B}{\partial x}, \frac{\partial \psi_3^N}{\partial z} \right) \right] w_1^B + \left[ \left( M \frac{\partial \psi_2^E}{\partial y}, \frac{\partial \psi_3^N}{\partial z} \right) \right] w_2^E + \left[ \left( M \frac{\partial \psi_2^W}{\partial y}, \frac{\partial \psi_3^N}{\partial z} \right) \right] w_2^W + \\
& + \left[ \left( g \psi_3^N, \psi_3^N \right) + \left( i \omega d \psi_3^N, \psi_3^N \right) + \left( M \frac{\partial \psi_3^N}{\partial z}, \frac{\partial \psi_3^N}{\partial z} \right) \right] w_3^N + \\
& + \left[ \left( g \psi_3^S, \psi_3^N \right) + \left( i \omega d \psi_3^S, \psi_3^N \right) + \left( M \frac{\partial \psi_3^S}{\partial z}, \frac{\partial \psi_3^N}{\partial z} \right) \right] w_3^S + \\
& + \left[ \left( M \frac{\partial \psi_1^F}{\partial x}, \frac{\partial \psi_3^N}{\partial z} \right) \right] w_1^F + \left\langle P_f(u_j), \frac{\partial \psi_3^N}{\partial z} \right\rangle_{\Gamma_B} = (F^f, \psi_3^N)_{\Omega_j}.
\end{aligned}$$

Testeando con la la décima séptima función de prueba,  $v^s = (v_1^s, v_2^s, v_3^s) = (\varphi_1^{s,S}(x, y, z), 0, 0)$  y  $v^f = (0, 0, 0)$  es lo mismo a la ecuación (7.1) pero cambiando los valores de  $\varphi_1^{s,B}$  por  $\varphi_1^{s,S}$ , obtenemos los coeficientes  $a_{17,1}$  al  $a_{17,24}$ .

$$\begin{aligned}
& \left[ \left( -\omega^2 \rho \varphi_1^{s,B}, \varphi_1^{s,S} \right) + \left( (\lambda_c + 2\mu) \frac{\partial \varphi_1^{s,B}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_1^{s,S}}{\partial x} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_1^{s,B}}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_1^{s,S}}{\partial y} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_1^{s,B}}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_1^{s,S}}{\partial z} \right) \right] u_1^B + \\
& \left[ \left( \lambda_c \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_1^{s,S}}{\partial x} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_1^{s,S}}{\partial y} \right) \right] u_2^B + \left[ \left( \lambda_c \frac{\partial \varphi_3^{s,B}}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_1^{s,S}}{\partial x} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_3^{s,B}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_1^{s,S}}{\partial z} \right) \right] u_3^B + \\
& \left[ \left( -\omega^2 \rho \varphi_1^{s,E}, \varphi_1^{s,S} \right) + \left( (\lambda_c + 2\mu) \frac{\partial \varphi_1^{s,E}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_1^{s,S}}{\partial x} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_1^{s,E}}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_1^{s,S}}{\partial y} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_1^{s,E}}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_1^{s,S}}{\partial z} \right) \right] u_1^E + \\
& \left[ \left( \lambda_c \frac{\partial \varphi_2^{s,E}}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_1^{s,S}}{\partial x} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_2^{s,E}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_1^{s,S}}{\partial y} \right) \right] u_2^E + \left[ \left( \lambda_c \frac{\partial \varphi_3^{s,E}}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_1^{s,S}}{\partial x} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_3^{s,E}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_1^{s,S}}{\partial z} \right) \right] u_3^E + \\
& \left[ \left( -\omega^2 \rho \varphi_1^{s,W}, \varphi_1^{s,S} \right) + \left( (\lambda_c + 2\mu) \frac{\partial \varphi_1^{s,W}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_1^{s,S}}{\partial x} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_1^{s,W}}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_1^{s,S}}{\partial y} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_1^{s,W}}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_1^{s,S}}{\partial z} \right) \right] u_1^W + \\
& \left[ \left( \lambda_c \frac{\partial \varphi_2^{s,W}}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_1^{s,S}}{\partial x} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_2^{s,W}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_1^{s,S}}{\partial y} \right) \right] u_2^W + \left[ \left( \lambda_c \frac{\partial \varphi_3^{s,W}}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_1^{s,S}}{\partial x} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_3^{s,W}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_1^{s,S}}{\partial z} \right) \right] u_3^W +
\end{aligned}$$







$$\begin{aligned}
& \left[ (-\omega^2 \rho \varphi_3^{s,F}, \varphi_3^{s,S}) + \left( (\lambda_c + 2\mu) \frac{\partial \varphi_3^{s,F}}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_3^{s,S}}{\partial z} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_3^{s,F}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_3^{s,S}}{\partial x} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_3^{s,F}}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_3^{s,S}}{\partial y} \right) \right] u_3^F + \\
& \quad \left[ \left( B \frac{\partial \psi^B}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_3^{s,S}}{\partial z} \right) \right] w_1^B + \left[ \left( B \frac{\partial \psi^E}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_3^{s,S}}{\partial z} \right) \right] w_2^E + \left[ \left( B \frac{\partial \psi^W}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_3^{s,S}}{\partial z} \right) \right] w_2^W + \\
& \quad \left[ (-\omega^2 \rho_f \psi^N, \varphi_3^{s,S}) + \left( B \frac{\partial \psi^N}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_3^{s,S}}{\partial z} \right) \right] w_3^N + \left[ (-\omega^2 \rho_f \psi^S, \varphi_3^{s,S}) + \left( B \frac{\partial \psi^S}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_3^{s,S}}{\partial z} \right) \right] w_3^S + \\
& \quad \left[ \left( B \frac{\partial \psi^F}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_3^{s,S}}{\partial z} \right) \right] w_1^F - \langle \tau(u_j), \varphi_3^{s,S} \rangle_{\Gamma^B} = (F^s, \varphi_3^{s,S})_{\Omega_j}.
\end{aligned}$$

Testeando con la la vigésima función de prueba,  $v^s = (0, 0, 0)$  y  $v^f = (0, 0, \psi_3^S(x, y, z))$  es lo mismo a la ecuación (7.7) pero cambiando los valores de  $\psi_3^N$  por  $\psi_3^S$ , obtenemos los coeficientes  $a_{20,1}$  al  $a_{20,24}$ .

$$\begin{aligned}
& \left[ \left( B \frac{\partial \varphi_1^{s,B}}{\partial x}, \frac{\partial \psi_3^S}{\partial z} \right) \right] u_1^B + \left[ \left( B \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial y}, \frac{\partial \psi_3^S}{\partial z} \right) \right] u_2^B + \left[ (-\omega^2 \rho_f \varphi_3^{s,B}, \psi_3^S) + \left( B \frac{\partial \varphi_3^{s,B}}{\partial z}, \frac{\partial \psi_3^S}{\partial z} \right) \right] u_3^B + \\
& \quad \left[ \left( B \frac{\partial \varphi_1^{s,E}}{\partial x}, \frac{\partial \psi_3^S}{\partial z} \right) \right] u_1^E + \left[ \left( B \frac{\partial \varphi_2^{s,E}}{\partial y}, \frac{\partial \psi_3^S}{\partial z} \right) \right] u_2^E + \left[ (-\omega^2 \rho_f \varphi_3^{s,E}, \psi_3^S) + \left( B \frac{\partial \varphi_3^{s,E}}{\partial z}, \frac{\partial \psi_3^S}{\partial z} \right) \right] u_3^E + \\
& \quad \left[ \left( B \frac{\partial \varphi_1^{s,W}}{\partial x}, \frac{\partial \psi_3^S}{\partial z} \right) \right] u_1^W + \left[ \left( B \frac{\partial \varphi_2^{s,W}}{\partial y}, \frac{\partial \psi_3^S}{\partial z} \right) \right] u_2^W + \left[ (-\omega^2 \rho_f \varphi_3^{s,W}, \psi_3^S) + \left( B \frac{\partial \varphi_3^{s,W}}{\partial z}, \frac{\partial \psi_3^S}{\partial z} \right) \right] u_3^W + \\
& \quad \left[ \left( B \frac{\partial \varphi_1^{s,N}}{\partial x}, \frac{\partial \psi_3^S}{\partial z} \right) \right] u_1^N + \left[ \left( B \frac{\partial \varphi_2^{s,N}}{\partial y}, \frac{\partial \psi_3^S}{\partial z} \right) \right] u_2^N + \left[ (-\omega^2 \rho_f \varphi_3^{s,N}, \psi_3^S) + \left( B \frac{\partial \varphi_3^{s,N}}{\partial z}, \frac{\partial \psi_3^S}{\partial z} \right) \right] u_3^N + \\
& \quad \left[ \left( B \frac{\partial \varphi_1^{s,S}}{\partial x}, \frac{\partial \psi_3^S}{\partial z} \right) \right] u_1^S + \left[ \left( B \frac{\partial \varphi_2^{s,S}}{\partial y}, \frac{\partial \psi_3^S}{\partial z} \right) \right] u_2^S + \left[ (-\omega^2 \rho_f \varphi_3^{s,S}, \psi_3^S) + \left( B \frac{\partial \varphi_3^{s,S}}{\partial z}, \frac{\partial \psi_3^S}{\partial z} \right) \right] u_3^S + \\
& \quad \left[ \left( B \frac{\partial \varphi_1^{s,F}}{\partial x}, \frac{\partial \psi_3^S}{\partial z} \right) \right] u_1^F + \left[ \left( B \frac{\partial \varphi_2^{s,F}}{\partial y}, \frac{\partial \psi_3^S}{\partial z} \right) \right] u_2^F + \left[ (-\omega^2 \rho_f \varphi_3^{s,F}, \psi_3^S) + \left( B \frac{\partial \varphi_3^{s,F}}{\partial z}, \frac{\partial \psi_3^S}{\partial z} \right) \right] u_3^F + \\
& \quad \left[ \left( M \frac{\partial \psi_1^B}{\partial x}, \frac{\partial \psi_3^S}{\partial z} \right) \right] w_1^B + \left[ \left( M \frac{\partial \psi_2^E}{\partial y}, \frac{\partial \psi_3^S}{\partial z} \right) \right] w_2^E + \left[ \left( M \frac{\partial \psi_2^W}{\partial y}, \frac{\partial \psi_3^S}{\partial z} \right) \right] w_2^W \\
& \quad + \left[ (g \psi_3^N, \psi_3^S) + (i \omega d \psi_3^N, \psi_3^S) + \left( M \frac{\partial \psi_3^N}{\partial z}, \frac{\partial \psi_3^S}{\partial z} \right) \right] w_3^N \\
& \quad + \left[ (g \psi_3^S, \psi_3^S) + (i \omega d \psi_3^S, \psi_3^S) + \left( M \frac{\partial \psi_3^S}{\partial z}, \frac{\partial \psi_3^S}{\partial z} \right) \right] w_3^S \\
& \quad + \left[ \left( M \frac{\partial \psi_1^F}{\partial x}, \frac{\partial \psi_3^S}{\partial z} \right) \right] w_1^F + \langle P_f(u_j), \frac{\partial \psi_3^S}{\partial z} \rangle_{\Gamma^B} = (F^f, \psi_3^S)_{\Omega_j}.
\end{aligned}$$

Testeando con la la vigésima primera función de prueba,  $v^s = (v_1^s, v_2^s, v_3^s) = (\varphi_1^{s,F}(x, y, z), 0, 0)$  y  $v^f = (0, 0, 0)$  es lo mismo a la ecuación (7.1) pero cambiando los valores de  $\varphi_1^{s,B}$  por  $\varphi_1^{s,F}$ , obtenemos los coeficientes  $a_{21,1}$  al  $a_{21,24}$ .

$$\begin{aligned}
& \left[ (-\omega^2 \rho \varphi_1^{s,B}, \varphi_1^{s,F}) + \left( (\lambda_c + 2\mu) \frac{\partial \varphi_1^{s,B}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_1^{s,F}}{\partial x} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_1^{s,B}}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_1^{s,F}}{\partial y} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_1^{s,B}}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_1^{s,F}}{\partial z} \right) \right] u_1^B + \\
& \quad \left[ \left( \lambda_c \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_1^{s,F}}{\partial x} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_1^{s,F}}{\partial y} \right) \right] u_2^B + \left[ \left( \lambda_c \frac{\partial \varphi_3^{s,B}}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_1^{s,F}}{\partial x} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_3^{s,B}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_1^{s,F}}{\partial z} \right) \right] u_3^B \\
& \quad \left[ (-\omega^2 \rho \varphi_1^{s,E}, \varphi_1^{s,F}) + \left( (\lambda_c + 2\mu) \frac{\partial \varphi_1^{s,E}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_1^{s,F}}{\partial x} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_1^{s,E}}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_1^{s,F}}{\partial y} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_1^{s,E}}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_1^{s,F}}{\partial z} \right) \right] u_1^E + \\
& \quad \left[ \left( \lambda_c \frac{\partial \varphi_2^{s,E}}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_1^{s,F}}{\partial x} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_2^{s,E}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_1^{s,F}}{\partial y} \right) \right] u_2^E + \left[ \left( \lambda_c \frac{\partial \varphi_3^{s,E}}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_1^{s,F}}{\partial x} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_3^{s,E}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_1^{s,F}}{\partial z} \right) \right] u_3^E +
\end{aligned}$$





$$\begin{aligned}
& \left[ \left( -\omega^2 \rho \varphi_3^{s,S}, \varphi_3^{s,F} \right) + \left( (\lambda_c + 2\mu) \frac{\partial \varphi_3^{s,S}}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_3^{s,F}}{\partial z} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_3^{s,S}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_3^{s,F}}{\partial x} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_3^{s,S}}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_3^{s,F}}{\partial y} \right) \right] u_3^S + \\
& \left[ \left( \lambda_c \frac{\partial \varphi_1^{s,F}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_3^{s,F}}{\partial z} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_1^{s,F}}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_3^{s,F}}{\partial x} \right) \right] u_1^F + \left[ \left( \lambda_c \frac{\partial \varphi_2^{s,F}}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_3^{s,F}}{\partial z} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_2^{s,F}}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_3^{s,F}}{\partial y} \right) \right] u_2^F + \\
& \left[ \left( -\omega^2 \rho \varphi_3^{s,F}, \varphi_3^{s,F} \right) + \left( (\lambda_c + 2\mu) \frac{\partial \varphi_3^{s,F}}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_3^{s,F}}{\partial z} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_3^{s,F}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_3^{s,F}}{\partial x} \right) + \left( \mu \frac{\partial \varphi_3^{s,F}}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_3^{s,F}}{\partial y} \right) \right] u_3^F + \\
& \left[ \left( B \frac{\partial \psi^B}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_3^{s,F}}{\partial z} \right) \right] w_1^B + \left[ \left( B \frac{\partial \psi^E}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_3^{s,F}}{\partial z} \right) \right] w_2^E + \left[ \left( B \frac{\partial \psi^W}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_3^{s,F}}{\partial z} \right) \right] w_2^W + \\
& \left[ \left( -\omega^2 \rho_f \psi^N, \varphi_3^{s,F} \right) + \left( B \frac{\partial \psi^N}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_3^{s,F}}{\partial z} \right) \right] w_3^N + \left[ \left( -\omega^2 \rho_f \psi^S, \varphi_3^{s,F} \right) + \left( B \frac{\partial \psi^S}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_3^{s,F}}{\partial z} \right) \right] w_3^S + \\
& \left[ \left( B \frac{\partial \psi^F}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_3^{s,F}}{\partial z} \right) \right] w_1^F - \left\langle \tau(u_j), \varphi_3^{s,F} \right\rangle_{\Gamma_B} = \left( F^s, \varphi_3^{s,F} \right)_{\Omega_j}.
\end{aligned}$$

Testeando con la la vigésimo cuarta y última función de prueba,  $v^s = (0, 0, 0)$  y  $v^f = (\psi_1^F(x, y, z), 0, 0)$  es lo mismo a la ecuación (7.5) pero cambiando los valores de  $\psi_1^B$  por  $\psi_1^F$ , obtenemos los coeficientes  $a_{24,1}$  al  $a_{24,24}$ .

$$\begin{aligned}
& \left[ \left( -\omega^2 \rho_f \varphi_1^{s,B}, \psi_1^F \right) + \left( B \frac{\partial \varphi_1^{s,B}}{\partial x}, \frac{\partial \psi_1^F}{\partial x} \right) \right] u_1^B + \left[ \left( B \frac{\partial \varphi_2^{s,B}}{\partial y}, \frac{\partial \psi_1^F}{\partial x} \right) \right] u_2^B + \left[ \left( B \frac{\partial \varphi_3^{s,B}}{\partial z}, \frac{\partial \psi_1^F}{\partial x} \right) \right] u_3^B + \\
& \left[ \left( -\omega^2 \rho_f \varphi_1^{s,E}, \psi_1^F \right) + \left( B \frac{\partial \varphi_1^{s,E}}{\partial x}, \frac{\partial \psi_1^F}{\partial x} \right) \right] u_1^E + \left[ \left( B \frac{\partial \varphi_2^{s,E}}{\partial y}, \frac{\partial \psi_1^F}{\partial x} \right) \right] u_2^E + \left[ \left( B \frac{\partial \varphi_3^{s,E}}{\partial z}, \frac{\partial \psi_1^F}{\partial x} \right) \right] u_3^E + \\
& \left[ \left( -\omega^2 \rho_f \varphi_1^{s,W}, \psi_1^F \right) + \left( B \frac{\partial \varphi_1^{s,W}}{\partial x}, \frac{\partial \psi_1^F}{\partial x} \right) \right] u_1^W + \left[ \left( B \frac{\partial \varphi_2^{s,W}}{\partial y}, \frac{\partial \psi_1^F}{\partial x} \right) \right] u_2^W + \left[ \left( B \frac{\partial \varphi_3^{s,W}}{\partial z}, \frac{\partial \psi_1^F}{\partial x} \right) \right] u_3^W + \\
& \left[ \left( -\omega^2 \rho_f \varphi_1^{s,N}, \psi_1^F \right) + \left( B \frac{\partial \varphi_1^{s,N}}{\partial x}, \frac{\partial \psi_1^F}{\partial x} \right) \right] u_1^N + \left[ \left( B \frac{\partial \varphi_2^{s,N}}{\partial y}, \frac{\partial \psi_1^F}{\partial x} \right) \right] u_2^N + \left[ \left( B \frac{\partial \varphi_3^{s,N}}{\partial z}, \frac{\partial \psi_1^F}{\partial x} \right) \right] u_3^N + \\
& \left[ \left( -\omega^2 \rho_f \varphi_1^{s,S}, \psi_1^F \right) + \left( B \frac{\partial \varphi_1^{s,S}}{\partial x}, \frac{\partial \psi_1^F}{\partial x} \right) \right] u_1^S + \left[ \left( B \frac{\partial \varphi_2^{s,S}}{\partial y}, \frac{\partial \psi_1^F}{\partial x} \right) \right] u_2^S + \left[ \left( B \frac{\partial \varphi_3^{s,S}}{\partial z}, \frac{\partial \psi_1^F}{\partial x} \right) \right] u_3^S + \\
& \left[ \left( -\omega^2 \rho_f \varphi_1^{s,F}, \psi_1^F \right) + \left( B \frac{\partial \varphi_1^{s,F}}{\partial x}, \frac{\partial \psi_1^F}{\partial x} \right) \right] u_1^F + \left[ \left( B \frac{\partial \varphi_2^{s,F}}{\partial y}, \frac{\partial \psi_1^F}{\partial x} \right) \right] u_2^F + \left[ \left( B \frac{\partial \varphi_3^{s,F}}{\partial z}, \frac{\partial \psi_1^F}{\partial x} \right) \right] u_3^F + \\
& \left[ \left( g \psi_1^B, \psi_1^F \right) + \left( i\omega d \psi_1^B, \psi_1^F \right) + \left( M \frac{\partial \psi_1^B}{\partial x}, \frac{\partial \psi_1^F}{\partial x} \right) \right] w_1^B + \left[ \left( M \frac{\partial \psi_2^E}{\partial y}, \frac{\partial \psi_1^F}{\partial x} \right) \right] w_2^E \\
& + \left[ \left( M \frac{\partial \psi_2^W}{\partial y}, \frac{\partial \psi_1^F}{\partial x} \right) \right] w_2^W + \left[ \left( M \frac{\partial \psi_3^N}{\partial z}, \frac{\partial \psi_1^F}{\partial x} \right) \right] w_3^N + \left[ \left( M \frac{\partial \psi_3^S}{\partial z}, \frac{\partial \psi_1^F}{\partial x} \right) \right] w_3^S \\
& \left[ \left( g \psi_1^F, \psi_1^F \right) + \left( i\omega d \psi_1^F, \psi_1^F \right) + \left( M \frac{\partial \psi_1^F}{\partial x}, \frac{\partial \psi_1^F}{\partial x} \right) \right] w_1^F + \left\langle P_f(u_j), \frac{\partial \psi_1^F}{\partial x} \right\rangle_{\Gamma_B} = \left( F^f, \psi_1^F \right)_{\Omega_j}.
\end{aligned}$$

## 7.2. Actualización de los Multiplicadores de Lagrange

En esta sección, partiendo de la ecuación (5.29), se expresarán las actualizaciones de los multiplicadores de Lagrange para cada cara de un cubo. Recordando,

$$\begin{aligned}
& \left( \lambda_{jk}^{s,\nu,n}, \lambda_{jk}^{s,\chi^{(1),n}}, \lambda_{jk}^{s,\chi^{(2),n}}, -\lambda_{jk}^{f,\nu,n} \right) \\
&= \left( \lambda_{kj}^{s,\nu,n-1}, \lambda_{kj}^{s,\chi^{(1),n-1}}, \lambda_{kj}^{s,\chi^{(2),n-1}}, -\lambda_{kj}^{f,\nu,n-1} \right) \\
& -i\omega\beta \left( u_j^n \cdot \nu_{jk} + u_k^{n-1} \cdot \nu_{kj}, \right. \\
& u_j^n \cdot \chi_{jk}^{(1)} + u_k^{n-1} \cdot \chi_{kj}^{(1)}, \\
& u_j^n \cdot \chi_{jk}^{(2)} + u_k^{n-1} \cdot \chi_{kj}^{(2)}, \\
& \left. w_j^n \cdot \nu_{jk} + w_k^{n-1} \cdot \nu_{kj} \right) \tag{7.8}
\end{aligned}$$

Comenzando con la *cara norte*, la terna en esta cara está formada por los versores

$$\nu_{j,k,l}^N = (0, 0, 1); \quad \chi_{j,k,l}^{(1),N} = (1, 0, 0); \quad \chi_{j,k,l}^{(2),N} = (0, 1, 0), \tag{7.9}$$

y para la misma cara, pero para el cubo siguiente,

$$\nu_{j,k,l+1}^S = (0, 0, -1); \quad \chi_{j,k,l+1}^{(1),S} = (-1, 0, 0); \quad \chi_{j,k,l+1}^{(2),S} = (0, -1, 0). \tag{7.10}$$

Tomando  $u_j^n \cdot \nu_{jk} - u_k^{n-1} \cdot \nu_{kj}$ ,

$$\begin{aligned}
& \left( u_{j,k,l}^{N,n} \cdot \nu_{j,k,l}^N + u_{j,k,l+1}^{S,n-1} \cdot \nu_{j,k,l+1}^S \right) \\
&= \left( u_{j,k,l}^{N,n} \cdot (0, 0, 1) + u_{j,k,l+1}^{S,n-1} \cdot (0, 0, -1) \right) \\
&= \left( u_{3,j,k,l}^{N,n} \varphi_{j,k,l}^N - u_{3,j,k,l+1}^{S,n-1} \varphi_{j,k,l+1}^S \right) \\
&= u_{3,j,k,l}^{N,n} - u_{3,j,k,l+1}^{S,n-1}.
\end{aligned}$$

Tomando  $u_j^n \cdot \chi_{jk}^{(1)} - u_k^{n-1} \cdot \chi_{kj}^{(1)}$ ,

$$\begin{aligned}
& \left( u_{j,k,l}^{N,n} \cdot \chi_{j,k,l}^{(1),N} + u_{j,k,l+1}^{S,n-1} \cdot \chi_{j,k,l+1}^{(1),S} \right) \\
&= \left( u_{j,k,l}^{N,n} \cdot (1, 0, 0) + u_{j,k,l+1}^{S,n-1} \cdot (-1, 0, 0) \right) \\
&= \left( u_{1,j,k,l}^{N,n} \varphi_{j,k,l}^N - u_{1,j,k,l+1}^{S,n-1} \varphi_{j,k,l+1}^S \right) \\
&= u_{1,j,k,l}^{N,n} - u_{1,j,k,l+1}^{S,n-1}.
\end{aligned}$$

Tomando  $u_j^n \cdot \chi_{jk}^{(2)} - u_k^{n-1} \cdot \chi_{kj}^{(2)}$ ,

$$\begin{aligned}
& \left( u_{j,k,l}^{N,n} \cdot \chi_{j,k,l}^{(2),N} + u_{j,k,l+1}^{S,n-1} \cdot \chi_{j,k,l+1}^{(2),S} \right) \\
&= \left( u_{j,k,l}^{N,n} \cdot (0, 1, 0) + u_{j,k,l+1}^{S,n-1} \cdot (0, 1, 0) \right) \\
&= \left( u_{2,j,k,l}^{N,n} \varphi_{j,k,l}^N - u_{2,j,k,l+1}^{S,n-1} \varphi_{j,k,l+1}^S \right) \\
&= u_{2,j,k,l}^{N,n} - u_{2,j,k,l+1}^{S,n-1}.
\end{aligned}$$

Por último, tomando  $w_j^n \cdot \nu_{jk} - w_k^{n-1} \cdot \nu_{kj}$ ,

$$\begin{aligned} & \left( w_{j,k,l}^{N,n} \cdot \nu_{j,k,l}^N + w_{j,k,l+1}^{S,n-1} \cdot \nu_{j,k,l+1}^S \right) \\ &= \left( w_{j,k,l}^{N,n} \cdot (0, 0, 1) + w_{j,k,l+1}^{S,n-1} \cdot (0, 0, -1) \right) \\ &= \left( w_{3,j,k,l}^{N,n} \psi_{j,k,l}^N + w_{3,j,k,l+1}^{S,n-1} \psi_{j,k,l+1}^S \right) \\ &= w_{3,j,k,l}^{N,n} + w_{3,j,k,l+1}^{S,n-1}. \end{aligned}$$

Reemplazando en (7.8),

$$\begin{aligned} & \left( \lambda_{\nu,j,k,l}^{s,N,n}, \lambda_{\chi^{(1)},j,k,l}^{s,N,n}, \lambda_{\chi^{(2)},j,k,l}^{s,N,n}, -\lambda_{\nu,j,k,l}^{f,N,n} \right) \\ &= \left( \lambda_{\nu,j,k,l+1}^{s,S,n}, \lambda_{\chi^{(1)},j,k,l+1}^{s,S,n}, \lambda_{\chi^{(2)},j,k,l+1}^{s,S,n}, -\lambda_{\nu,j,k,l+1}^{f,S,n} \right) \\ & - i\omega\beta \left( u_{3,j,k,l}^{N,n} - u_{3,j,k,l+1}^{S,n-1}, u_{1,j,k,l}^{N,n} - u_{1,j,k,l+1}^{S,n-1}, u_{2,j,k,l}^{N,n} - u_{2,j,k,l+1}^{S,n-1}, \right. \\ & \left. w_{3,j,k,l}^{N,n} + w_{3,j,k,l+1}^{S,n-1} \right). \end{aligned} \quad (7.11)$$

El desarrollo es análogo para las caras restantes. Para la *cara sur*, los versores que indican la dirección de la terna sobre ella son

$$\nu_{j,k,l}^S = (0, 0, -1); \chi_{j,k,l}^{(1),S} = (-1, 0, 0); \chi_{j,k,l}^{(2),S} = (0, -1, 0), \quad (7.12)$$

y para la misma cara, pero para el cubo siguiente,

$$\nu_{j,k,l-1}^N = (0, 0, 1); \chi_{j,k,l-1}^{(1),N} = (1, 0, 0); \chi_{j,k,l-1}^{(2),N} = (0, 1, 0). \quad (7.13)$$

La actualización de los multiplicadores de Lagrange, para esta cara, toma la forma de

$$\begin{aligned} & \left( \lambda_{\nu,j,k,l}^{s,S,n}, \lambda_{\chi^{(1)},j,k,l}^{s,S,n}, \lambda_{\chi^{(2)},j,k,l}^{s,S,n}, -\lambda_{\nu,j,k,l}^{f,S,n} \right) \\ &= \left( \lambda_{\nu,j,k,l-1}^{s,N,n-1}, \lambda_{\chi^{(1)},j,k,l-1}^{s,N,n-1}, \lambda_{\chi^{(2)},j,k,l-1}^{s,N,n-1}, -\lambda_{\nu,j,k,l-1}^{f,N,n-1} \right) \\ & - i\omega\beta \left( u_{3,j,k,l-1}^{N,n-1} - u_{3,j,k,l}^{S,n}, u_{1,j,k,l-1}^{N,n-1} - u_{1,j,k,l}^{S,n}, u_{2,j,k,l-1}^{N,n-1} - u_{2,j,k,l}^{S,n}, \right. \\ & \left. w_{3,j,k,l-1}^{N,n-1} + w_{3,j,k,l}^{S,n} \right). \end{aligned} \quad (7.14)$$

Para la *cara este*, los versores que indican la dirección de la terna sobre ella son

$$\nu_{j,k,l}^E = (0, 1, 0); \chi_{j,k,l}^{(1),E} = (1, 0, 0); \chi_{j,k,l}^{(2),E} = (0, 0, 1), \quad (7.15)$$

y para la misma cara, pero para el cubo siguiente,

$$\nu_{j,k-1,l}^W = (0, -1, 0); \chi_{j,k-1,l}^{(1),W} = (-1, 0, 0); \chi_{j,k-1,l}^{(2),W} = (0, 0, -1). \quad (7.16)$$

La actualización de los multiplicadores de Lagrange, para esta cara, toma la forma de

$$\begin{aligned} & \left( \lambda_{\nu,j,k,l}^{s,E,n}, \lambda_{\chi^{(1)},j,k,l}^{s,E,n}, \lambda_{\chi^{(2)},j,k,l}^{s,E,n}, -\lambda_{\nu,j,k,l}^{f,E,n} \right) \\ &= \left( \lambda_{\nu,j,k+1,l}^{s,W,n-1}, \lambda_{\chi^{(1)},j,k+1,l}^{s,W,n-1}, \lambda_{\chi^{(2)},j,k+1,l}^{s,W,n-1}, -\lambda_{\nu,j,k+1,l}^{f,W,n-1} \right) \end{aligned}$$



$$-i\omega\beta \left( u_{2,j,k,l}^{E,n} - u_{2,j,k+1,l}^{W,n-1}, u_{1,j,k,l}^{E,n} - u_{1,j,k+1,l}^{W,n-1}, u_{3,j,k,l}^{E,n} - u_{3,j,k+1,l}^{W,n-1}, \right. \\ \left. w_{2,j,k,l}^{E,n} + w_{2,j,k+1,l}^{W,n-1} \right). \quad (7.17)$$

Para la *cara oeste*, los versores que indican la dirección de la terna sobre ella son

$$\nu_{j,k,l}^W = (0, -1, 0); \quad \chi_{j,k,l}^{(1),W} = (-1, 0, 0); \quad \chi_{j,k,l}^{(2),W} = (0, 0, -1), \quad (7.18)$$

y para la misma cara, pero para el cubo siguiente,

$$\nu_{j,k-1,l}^E = (0, 1, 0); \quad \chi_{j,k-1,l}^{(1),E} = (1, 0, 0); \quad \chi_{j,k-1,l}^{(2),E} = (0, 0, 1). \quad (7.19)$$

La actualización de los multiplicadores de Lagrange, para esta cara, toma la forma de

$$\left( \lambda_{\nu,j,k,l}^{s,W,n}, \lambda_{\chi^{(1)},j,k,l}^{s,W,n}, \lambda_{\chi^{(2)},j,k,l}^{s,W,n}, -\lambda_{\nu,j,k,l}^{f,W,n} \right) \\ = \left( \lambda_{\nu,j,k-1,l}^{s,E,n-1}, \lambda_{\chi^{(1)},j,k-1,l}^{s,E,n-1}, \lambda_{\chi^{(2)},j,k-1,l}^{s,E,n-1}, -\lambda_{\nu,j,k-1,l}^{f,E,n-1} \right) \\ -i\omega\beta \left( u_{2,j,k-1,l}^{E,n-1} - u_{2,j,k,l}^{W,n}, u_{1,j,k-1,l}^{E,n-1} - u_{1,j,k,l}^{W,n}, u_{3,j,k-1,l}^{E,n-1} - u_{3,j,k,l}^{W,n}, \right. \\ \left. w_{2,j,k-1,l}^{E,n-1} + w_{2,j,k,l}^{W,n} \right). \quad (7.20)$$

Para la *cara front*, los versores que indican la dirección de la terna sobre ella son

$$\nu_{j,k,l}^F = (1, 0, 0); \quad \chi_{j,k,l}^{(1),F} = (0, 1, 0); \quad \chi_{j,k,l}^{(2),F} = (0, 0, 1), \quad (7.21)$$

y para la misma cara, pero para el cubo siguiente,

$$\nu_{j+1,k,l}^B = (-1, 0, 0); \quad \chi_{j+1,k,l}^{(1),B} = (0, -1, 0); \quad \chi_{j+1,k,l}^{(2),B} = (0, 0, -1). \quad (7.22)$$

La actualización de los multiplicadores de Lagrange, para esta cara, toma la forma de

$$\left( \lambda_{\nu,j,k,l}^{s,F,n}, \lambda_{\chi^{(1)},j,k,l}^{s,F,n}, \lambda_{\chi^{(2)},j,k,l}^{s,F,n}, -\lambda_{\nu,j,k,l}^{f,F,n} \right) \\ = \left( \lambda_{\nu,j+1,k,l}^{s,B,n-1}, \lambda_{\chi^{(1)},j+1,k,l}^{s,B,n-1}, \lambda_{\chi^{(2)},j+1,k,l}^{s,B,n-1}, -\lambda_{\nu,j+1,k,l}^{f,B,n-1} \right) \\ -i\omega\beta \left( u_{1,j,k,l}^{F,n} - u_{1,j+1,k,l}^{B,n-1}, u_{2,j,k,l}^{F,n} - u_{2,j+1,k,l}^{B,n-1}, u_{3,j+1,k,l}^{F,n} - u_{3,j+1,k,l}^{B,n-1}, \right. \\ \left. w_{1,j,k,l}^{F,n} + w_{1,j+1,k,l}^{B,n-1} \right). \quad (7.23)$$

Para la *cara back*, los versores que indican la dirección de la terna sobre ella son

$$\nu_{j,k,l}^B = (-1, 0, 0); \quad \chi_{j,k,l}^{(1),B} = (0, 0, -1); \quad \chi_{j,k,l}^{(2),B} = (0, -1, 0), \quad (7.24)$$

y para la misma cara, pero para el cubo siguiente,

$$\nu_{j-1,k,l}^F = (1, 0, 0); \quad \chi_{j-1,k,l}^{(1),F} = (0, 0, 1); \quad \chi_{j-1,k,l}^{(2),F} = (0, 1, 0). \quad (7.25)$$

La actualización de los multiplicadores de Lagrange, para esta cara, toma la forma de

$$\left( \lambda_{\nu,j,k,l}^{s,B,n}, \lambda_{\chi^{(1)},j,k,l}^{s,B,n}, \lambda_{\chi^{(2)},j,k,l}^{s,B,n}, -\lambda_{\nu,j,k,l}^{f,B,n} \right) \\ = \left( \lambda_{\nu,j-1,k,l}^{s,F,n-1}, \lambda_{\chi^{(1)},j-1,k,l}^{s,F,n-1}, \lambda_{\chi^{(2)},j-1,k,l}^{s,F,n-1}, -\lambda_{\nu,j-1,k,l}^{f,F,n-1} \right) \\ -i\omega\beta \left( u_{1,j-1,k,l}^{F,n-1} - u_{1,j,k,l}^{B,n}, u_{3,j-1,k,l}^{F,n-1} - u_{3,j,k,l}^{B,n}, u_{2,j-1,k,l}^{F,n-1} - u_{2,j,k,l}^{B,n}, \right. \\ \left. w_{1,j-1,k,l}^{F,n-1} + w_{1,j,k,l}^{B,n} \right). \quad (7.26)$$

### 7.3. Coeficientes de la matriz

En la sección 7.1 se plantearon las 24 ecuaciones para obtener los 24 coeficientes de la matriz del sistema de ecuaciones. Una vez reemplazadas las funciones de prueba y resolviendo se obtiene los coeficientes detallados a continuación. Se tiene en cuenta el conjunto de ecuaciones (7.2),

$$\begin{aligned}
 l &= \frac{41h_x h_y h_z}{1890} & l_1 &= \frac{233h_x h_y h_z}{1890} \\
 m &= \frac{37h_y h_z}{63h_x} & m_1 &= \frac{211h_y h_z}{63h_x} & m_2 &= \frac{85h_y h_z}{63h_x} \\
 n &= \frac{37h_x h_z}{63h_y} & n_1 &= \frac{211h_x h_z}{63h_y} & n_2 &= \frac{85h_x h_z}{63h_y} \\
 o &= \frac{37h_x h_y}{63h_z} & o_1 &= \frac{211h_x h_y}{63h_z} & o_2 &= \frac{85h_x h_y}{63h_z} \\
 q &= \frac{h_x h_y h_z}{12} \\
 r &= \frac{h_y h_z}{h_x} & s &= \frac{h_x h_z}{h_y} & t &= \frac{h_x h_y}{h_z}
 \end{aligned}$$

y se toma  $\tilde{K} = \lambda_c + 2\mu$  para mayor simplicidad. A continuación, se detallan los siguientes coeficientes de la matriz simétrica.

$$\begin{aligned}
 a_{1,1} &= -\omega^2 \rho l_1 + \tilde{K} m_1 + \mu(n + e) & a_{1,13} &= -\omega^2 \rho l + \tilde{K}(-2m) + \mu(n - 2o) \\
 a_{1,2} &= 0 & a_{1,14} &= 0 \\
 a_{1,3} &= 0 & a_{1,15} &= -\lambda_c h_y \\
 a_{1,4} &= -\omega^2 \rho_f(-2q) - Br & a_{1,16} &= -Bh_y \\
 a_{1,5} &= -\omega^2 \rho l + \tilde{K}(-2m) + \mu(-2n + e) & a_{1,17} &= -\omega^2 \rho l + \tilde{K}(-2m) + \mu(n - 2o) \\
 a_{1,6} &= -\lambda_c h_z & a_{1,18} &= 0 \\
 a_{1,7} &= 0 & a_{1,19} &= \lambda_c h_y \\
 a_{1,8} &= -Bh_z & a_{1,20} &= -Bh_y \\
 a_{1,9} &= -\omega^2 \rho l + \tilde{K}(-2m) + \mu(-2n + e) & a_{1,21} &= -\omega^2 \rho(-2l) + \tilde{K} m_2 + \mu(n + e) \\
 a_{1,10} &= \lambda_c h_z & a_{1,22} &= 0 \\
 a_{1,11} &= 0 & a_{1,23} &= 0 \\
 a_{1,12} &= Bh_z & a_{1,24} &= -Br
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{2,2} &= -\omega^2 \rho l_1 + \tilde{K} n + \mu(m_1 + e) & a_{2,14} &= -\omega^2 \rho l + \tilde{K} n + \mu(-2m - 2o) \\
 a_{2,3} &= 0 & a_{2,15} &= 0 \\
 a_{2,4} &= 0 & a_{2,16} &= 0 \\
 a_{2,5} &= -\mu h_z & a_{2,17} &= 0 \\
 a_{2,6} &= -\omega^2 \rho l + \tilde{K}(-2n) + \mu(-2m + e) & a_{2,18} &= -\omega^2 \rho l + \tilde{K} n + \mu(-2m - 2o) \\
 a_{2,7} &= 0 & a_{2,19} &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{2,8} &= -\omega^2 \rho_f q & a_{2,20} &= 0 \\
a_{2,9} &= \mu h_z & a_{2,21} &= 0 \\
a_{2,10} &= -\omega^2 \rho l + \tilde{K}(-2n) + \mu(-2m + e) & a_{2,22} &= -\omega^2 \rho(-2l) + \tilde{K}n + \mu(m_2 + e) \\
a_{2,11} &= 0 & a_{2,23} &= 0 \\
a_{2,12} &= -\omega^2 \rho_f(-q) & a_{2,24} &= 0 \\
a_{2,13} &= 0 & & \\
\\
a_{3,3} &= -\omega^2 \rho l_1 + \tilde{K}e + \mu(m_1 + n) & a_{3,15} &= -\omega^2 \rho l + \tilde{K}(-2o) + \mu(-2m + n) \\
a_{3,4} &= 0 & a_{3,16} &= -\omega^2 \rho_f q \\
a_{3,5} &= 0 & a_{3,17} &= \mu h_y \\
a_{3,6} &= 0 & a_{3,18} &= 0 \\
a_{3,7} &= -\omega^2 \rho l + \tilde{K}e + \mu(-2m - 2n) & a_{3,19} &= -\omega^2 \rho l + \tilde{K}(-2o) + \mu(-2m + n) \\
a_{3,8} &= 0 & a_{3,20} &= -\omega^2 \rho_f(-q) \\
a_{3,9} &= 0 & a_{3,21} &= 0 \\
a_{3,10} &= 0 & a_{3,22} &= 0 \\
a_{3,11} &= -\omega^2 \rho l + \tilde{K}e + \mu(-2m - 2n) & a_{3,23} &= -\omega^2 \rho(-2l) + \tilde{K}e + \mu(m_2 + n) \\
a_{3,12} &= 0 & a_{3,24} &= 0 \\
a_{3,13} &= -\mu h_y & & \\
a_{3,14} &= 0 & & \\
\\
a_{4,4} &= (-\omega^2 g + i\omega d)4q + Mr & a_{4,16} &= Mh_y \\
a_{4,5} &= -\omega^2 \rho_f(-q) & a_{4,17} &= -\omega^2 \rho_f q \\
a_{4,6} &= Bh_z & a_{4,18} &= 0 \\
a_{4,7} &= 0 & a_{4,19} &= -Bh_y \\
a_{4,8} &= Mh_z & a_{4,20} &= Mh_y \\
a_{4,9} &= -\omega^2 \rho_f(-q) & a_{4,21} &= Br \\
a_{4,10} &= B(-h_z) & a_{4,22} &= 0 \\
a_{4,11} &= 0 & a_{4,23} &= 0 \\
a_{4,12} &= Mh_z & a_{4,24} &= (-\omega^2 g + i\omega d)(-2q) + Mr \\
a_{4,13} &= -\omega^2 \rho_f(-q) & & \\
a_{4,14} &= 0 & & \\
a_{4,15} &= Bh_y & & \\
\\
a_{5,5} &= -\omega^2 \rho l_1 + \tilde{K}m + \mu(n_1 + e) & a_{5,15} &= 0 \\
a_{5,6} &= 0 & a_{5,16} &= 0 \\
a_{5,7} &= 0 & a_{5,17} &= -\omega^2 \rho l + \tilde{K}m + \mu(-2n - 2o) \\
a_{5,8} &= 0 & a_{5,18} &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{5,9} &= -\omega^2 \rho(-2l) + \tilde{K}m + \mu(n_2 + e) \\
a_{5,10} &= 0 \\
a_{5,11} &= 0 \\
a_{5,12} &= 0 \\
a_{5,13} &= -\omega^2 \rho l + \tilde{K}m + \mu(-2n - 2o) \\
a_{5,14} &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{5,19} &= 0 \\
a_{5,20} &= 0 \\
a_{5,21} &= -\omega^2 \rho l + \tilde{K}(-2m) + \mu(-2n + e) \\
a_{5,22} &= \mu h_z \\
a_{5,23} &= 0 \\
a_{5,24} &= -\omega^2 \rho_f q
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{6,6} &= -\omega^2 \rho l_1 + \tilde{K}n_1 + \mu(m + e) \\
a_{6,7} &= 0 \\
a_{6,8} &= -\omega^2 \rho_f(2q) + Bs \\
a_{6,9} &= 0 \\
a_{6,10} &= -\omega^2 \rho(-2l) + \tilde{K}n_2 + \mu(m + e) \\
a_{6,11} &= 0 \\
a_{6,12} &= Bs \\
a_{6,13} &= 0 \\
a_{6,14} &= -\omega^2 \rho l + \tilde{K}(-2n) + \mu(m - 2o) \\
a_{6,15} &= \lambda_x h_x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{6,16} &= Bh_x \\
a_{6,17} &= 0 \\
a_{6,18} &= -\omega^2 \rho l + \tilde{K}(-2n) + \mu(m - 2o) \\
a_{6,19} &= -\lambda_c h_x \\
a_{6,20} &= Bh_x \\
a_{6,21} &= \lambda_c h_z \\
a_{6,22} &= -\omega^2 \rho l + \tilde{K}(-2n) + \mu(-2m + e) \\
a_{6,23} &= 0 \\
a_{6,24} &= Bh_z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{7,7} &= -\omega^2 \rho l_1 + \tilde{K}e + \mu(m + n_1) \\
a_{7,8} &= 0 \\
a_{7,9} &= 0 \\
a_{7,10} &= 0 \\
a_{7,11} &= -\omega^2 \rho(-2l) + \tilde{K}e + \mu(m + n_2) \\
a_{7,12} &= 0 \\
a_{7,13} &= 0 \\
a_{7,14} &= \mu h_x \\
a_{7,15} &= -\omega^2 \rho l + \tilde{K}(-2o) + \mu(m - 2n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{7,16} &= -\omega^2 \rho_f q \\
a_{7,17} &= 0 \\
a_{7,18} &= -\mu h_x \\
a_{7,19} &= -\omega^2 \rho l + \tilde{K}(-2o) + \mu(m - 2n) \\
a_{7,20} &= -\omega^2 \rho_f(-q) \\
a_{7,21} &= 0 \\
a_{7,22} &= 0 \\
a_{7,23} &= -\omega^2 \rho l + \tilde{K}e + \mu(-2m - 2n) \\
a_{7,24} &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{8,8} &= (-\omega^2 g + i\omega d)4q + Ms \\
a_{8,9} &= 0 \\
a_{8,10} &= -Bs \\
a_{8,11} &= 0 \\
a_{8,12} &= (-\omega^2 g + i\omega d)(-2q) + Ms \\
a_{8,13} &= 0 \\
a_{8,14} &= -\omega^2 \rho_f q \\
a_{8,15} &= Bh_x \\
a_{8,16} &= Mh_x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{8,17} &= 0 \\
a_{8,18} &= -\omega^2 \rho_f q \\
a_{8,19} &= -Bh_x \\
a_{8,20} &= Mh_x \\
a_{8,21} &= Bh_z \\
a_{8,22} &= -\omega^2 \rho_f q \\
a_{8,23} &= 0 \\
a_{8,24} &= Mh_z
\end{aligned}$$

$$a_{9,9} = -\omega^2 \rho(l_1) + \tilde{K}m + \mu(n_1 + e)$$

$$a_{9,10} = 0$$

$$a_{9,11} = 0$$

$$a_{9,12} = 0$$

$$a_{9,13} = -\omega^2 \rho l + \tilde{K}m + \mu(-2n - 2o)$$

$$a_{9,14} = 0$$

$$a_{9,15} = 0$$

$$a_{9,16} = 0$$

$$a_{9,17} = -\omega^2 \rho l + \tilde{K}m + \mu(-2n - 2o)$$

$$a_{9,18} = 0$$

$$a_{9,19} = 0$$

$$a_{9,20} = 0$$

$$a_{9,21} = -\omega^2 \rho l + \tilde{K}(-2m) + \mu(-2n + e)$$

$$a_{9,22} = -\mu h_z$$

$$a_{9,23} = 0$$

$$a_{9,24} = -\omega^2 \rho_f q$$

$$a_{10,10} = -\omega^2 \rho(l_1) + \tilde{K}n_1 + \mu(m + e)$$

$$a_{10,11} = 0$$

$$a_{10,12} = -\omega^2 \rho_f(2q) - Bs$$

$$a_{10,13} = 0$$

$$a_{10,14} = -\omega^2 \rho l + \tilde{K}(-2n) + \mu(m - 2o)$$

$$a_{10,15} = -\lambda_x h_x$$

$$a_{10,16} = -Bh_x$$

$$a_{10,17} = 0$$

$$a_{10,18} = -\omega^2 \rho l + \tilde{K}(-2n) + \mu(m - 2o)$$

$$a_{10,19} = \lambda_c h_x$$

$$a_{10,20} = -Bh_x$$

$$a_{10,21} = -\lambda_c h_z$$

$$a_{10,22} = -\omega^2 \rho l + \tilde{K}(-2n) + \mu(-2m + e)$$

$$a_{10,23} = 0$$

$$a_{10,24} = -Bh_z$$

$$a_{11,11} = -\omega^2 \rho(l_1) + \tilde{K}e + \mu(m + n_1)$$

$$a_{11,12} = 0$$

$$a_{11,13} = 0$$

$$a_{11,14} = -\mu h_x$$

$$a_{11,15} = -\omega^2 \rho l + \tilde{K}(-2o) + \mu(m - 2n)$$

$$a_{11,16} = -\omega^2 \rho_f q$$

$$a_{11,17} = 0$$

$$a_{11,18} = \mu h_x$$

$$a_{11,19} = -\omega^2 \rho l + \tilde{K}(-2o) + \mu(m - 2n)$$

$$a_{11,20} = -\omega^2 \rho_f(-q)$$

$$a_{11,21} = 0$$

$$a_{11,22} = 0$$

$$a_{11,23} = -\omega^2 \rho l + \tilde{K}e + \mu(-2m - 2n)$$

$$a_{11,24} = 0$$

$$a_{12,12} = (-\omega^2 g + i\omega d)4q + Ms$$

$$a_{12,13} = 0$$

$$a_{12,14} = -\omega^2 \rho_f(-q)$$

$$a_{12,15} = Bh_x$$

$$a_{12,16} = Mh_x$$

$$a_{12,17} = 0$$

$$a_{12,18} = -\omega^2 \rho_f(-q)$$

$$a_{12,19} = -Bh_x$$

$$a_{12,20} = Mh_x$$

$$a_{12,21} = Bh_z$$

$$a_{12,22} = -\omega^2 \rho_f(-q)$$

$$a_{12,23} = 0$$

$$a_{12,24} = Mh_z$$

$$a_{13,13} = -\omega^2 \rho l_1 + \tilde{K}m + \mu(n + e_1)$$

$$a_{14,14} = -\omega^2 \rho l_1 + \tilde{K}n + \mu(m + e_1)$$

$$\begin{aligned}
a_{13,14} &= 0 & a_{14,15} &= 0 \\
a_{13,15} &= 0 & a_{14,16} &= 0 \\
a_{13,16} &= 0 & a_{14,17} &= 0 \\
a_{13,17} &= -\omega^2 \rho(-2l) + \tilde{K}m + \mu(n + e_2) & a_{14,18} &= -\omega^2 \rho(-2l) + \tilde{K}n + \mu(m + e_2) \\
a_{13,18} &= 0 & a_{14,19} &= 0 \\
a_{13,19} &= 0 & a_{14,20} &= 0 \\
a_{13,20} &= 0 & a_{14,21} &= 0 \\
a_{13,21} &= -\omega^2 \rho l + \tilde{K}(-2m) + \mu(n - 2o) & a_{14,22} &= -\omega^2 \rho l + \tilde{K}n + \mu(-2m - 2o) \\
a_{13,22} &= 0 & a_{14,23} &= 0 \\
a_{13,23} &= \mu h_y & a_{14,24} &= 0 \\
a_{13,24} &= -\omega^2 \rho_f q
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{15,15} &= -\omega^2 \rho l_1 + \tilde{K}e_1 + \mu(m + n) & a_{16,16} &= (-\omega^2 g + i\omega d)4q + Mt \\
a_{15,16} &= -\omega^2 \rho_f(2q) + Bt & a_{16,17} &= 0 \\
a_{15,17} &= 0 & a_{16,18} &= 0 \\
a_{15,18} &= 0 & a_{16,19} &= - - Bt \\
a_{15,19} &= -\omega^2 \rho(-2l) + \tilde{K}e_2 + \mu(m + n) & a_{16,20} &= (-\omega^2 g + i\omega d)(-2q) + Ms \\
a_{15,20} &= Bt & a_{16,21} &= Bh_y \\
a_{15,21} &= \lambda_c h_y & a_{16,22} &= 0 \\
a_{15,22} &= 0 & a_{16,23} &= -\omega^2 \rho_f q \\
a_{15,23} &= -\omega^2 \rho l + \tilde{K}(-2o) + \mu(-2m + n) & a_{16,24} &= Mh_y \\
a_{15,24} &= Bh_y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{17,17} &= -\omega^2 \rho l_1 + \tilde{K}m + \mu(n + e_1) & a_{18,18} &= -\omega^2 \rho l_1 + \tilde{K}n + \mu(m + e_1) \\
a_{17,18} &= 0 & a_{18,19} &= 0 \\
a_{17,19} &= 0 & a_{18,20} &= 0 \\
a_{17,20} &= 0 & a_{18,21} &= 0 \\
a_{17,21} &= -\omega^2 \rho l + \tilde{K}(-2m) + \mu(n - 2o) & a_{18,22} &= -\omega^2 \rho l + \tilde{K}n + \mu(-2m - 2o) \\
a_{17,22} &= 0 & a_{18,23} &= 0 \\
a_{17,23} &= -\mu h_y & a_{18,24} &= 0 \\
a_{17,24} &= -\omega^2 \rho_f q
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{19,19} &= -\omega^2 \rho l_1 + \tilde{K}e_1 + \mu(m + n) & a_{20,20} &= (-\omega^2 g + i\omega d)4q + Mt \\
a_{19,20} &= -\omega^2 \rho_f(-2q) - Bt & a_{20,21} &= Bh_y \\
a_{19,21} &= -\lambda_c h_y & a_{20,22} &= 0 \\
a_{19,22} &= 0 & a_{20,23} &= -\omega^2 \rho_f(-q) \\
a_{19,23} &= -\omega^2 \rho l + \tilde{K}(-2o) + \mu(-2m + n) & a_{20,24} &= Mh_y
\end{aligned}$$

$$a_{19,24} = -Bh_y$$

$$\begin{aligned} a_{21,21} &= -\omega^2 \rho l_1 + \tilde{K} m_1 + \mu(n + e) & a_{22,22} &= -\omega^2 \rho l_1 + \tilde{K} n + \mu(m_1 + e) \\ a_{21,22} &= 0 & a_{22,23} &= 0 \\ a_{21,23} &= 0 & a_{22,24} &= 0 \\ a_{21,24} &= -\omega^2 \rho_f(2q) + Br \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{23,23} &= -\omega^2 \rho l_1 + \tilde{K} e + \mu(m_1 + n) & a_{24,24} &= (-\omega^2 g + i\omega d)4q + Mr \\ a_{23,24} &= 0 \end{aligned}$$

#### 7.4. Incorporación de las Condiciones de Borde.

Para concluir con el armado de la matriz de coeficientes es necesario incorporar las condiciones de borde, que se obtienen de manera análoga a la actualización de los multiplicadores de Lagrange. Éstas solo están presentes en ciertos coeficientes, detallados a continuación.  $\Gamma_{jk}$  indica los bordes internos y  $\Gamma_j$  los bordes externos.

$$\begin{aligned} a_{1,1} &= -\omega^2 \rho l_1 + \tilde{K} m_1 + \mu(n + e) + [i\omega h^2 \mathcal{B}_p(1, 1)]_{\Gamma_j} + [i\omega h^2 \beta_B(1, 1)]_{\Gamma_{jk}} \\ a_{1,2} &= + [i\omega h^2 \mathcal{B}_p(1, 2)]_{\Gamma_j} + [i\omega h^2 \beta_B(1, 2)]_{\Gamma_{jk}} \\ a_{1,3} &= + [i\omega h^2 \mathcal{B}_p(1, 3)]_{\Gamma_j} + [i\omega h^2 \beta_B(1, 3)]_{\Gamma_{jk}} \\ a_{1,4} &= -\omega^2 \rho_f(-2q) - Br - [i\omega h^2 \mathcal{B}_p(1, 4)]_{\Gamma_j} - [i\omega h^2 \beta_B(1, 4)]_{\Gamma_{jk}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{2,2} &= -\omega^2 \rho l_1 + \tilde{K} n + \mu(m_1 + e) + [i\omega h^2 \mathcal{B}_p(3, 3)]_{\Gamma_j} + [i\omega h^2 \beta_B(3, 3)]_{\Gamma_{jk}} \\ a_{2,3} &= + [i\omega h^2 \mathcal{B}_p(3, 2)]_{\Gamma_j} + [i\omega h^2 \beta_B(3, 2)]_{\Gamma_{jk}} \\ a_{2,4} &= + [i\omega h^2 \mathcal{B}_p(3, 4)]_{\Gamma_j} + [i\omega h^2 \beta_B(3, 4)]_{\Gamma_{jk}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{3,3} &= -\omega^2 \rho l_1 + \tilde{K} e + \mu(m_1 + n) + [i\omega h^2 \mathcal{B}_p(2, 2)]_{\Gamma_j} + [i\omega h^2 \beta_B(2, 2)]_{\Gamma_{jk}} \\ a_{3,4} &= + [i\omega h^2 \mathcal{B}_p(2, 4)]_{\Gamma_j} + [i\omega h^2 \beta_B(2, 4)]_{\Gamma_{jk}} \end{aligned}$$

$$a_{4,4} = (-\omega^2 g + i\omega d)4q + Mr + [i\omega h^2 \mathcal{B}_p(4, 4)]_{\Gamma_j} + [i\omega h^2 \beta_B(4, 4)]_{\Gamma_{jk}}$$

$$\begin{aligned} a_{5,5} &= -\omega^2 \rho l_1 + \tilde{K} m + \mu(n_1 + e) + [i\omega h^2 \mathcal{B}_p(2, 2)]_{\Gamma_j} + [i\omega h^2 \beta_E(2, 2)]_{\Gamma_{jk}} \\ a_{5,6} &= + [i\omega h^2 \mathcal{B}_p(2, 1)]_{\Gamma_j} + [i\omega h^2 \beta_E(2, 1)]_{\Gamma_{jk}} \\ a_{5,7} &= + [i\omega h^2 \mathcal{B}_p(2, 3)]_{\Gamma_j} + [i\omega h^2 \beta_E(2, 3)]_{\Gamma_{jk}} \end{aligned}$$

$$a_{5,8} = + [i\omega h^2 \mathcal{B}_p(2, 4)]_{\Gamma_j} + [i\omega h^2 \beta_E(2, 4)]_{\Gamma_{jk}}$$

$$a_{6,6} = -\omega^2 \rho l_1 + \tilde{K} n_1 + \mu(m + e) + [i\omega h^2 \mathcal{B}_p(1, 1)]_{\Gamma_j} + [i\omega h^2 \beta_E(1, 1)]_{\Gamma_{jk}}$$

$$a_{6,7} = + [i\omega h^2 \mathcal{B}_p(1, 3)]_{\Gamma_j} + [i\omega h^2 \beta_E(1, 3)]_{\Gamma_{jk}}$$

$$a_{6,8} = -\omega^2 \rho_f(2q) + Bs + [i\omega h^2 \mathcal{B}_p(1, 4)]_{\Gamma_j} + [i\omega h^2 \beta_E(1, 4)]_{\Gamma_{jk}}$$

$$a_{7,7} = -\omega^2 \rho l_1 + \tilde{K} e + \mu(m + n_1) + [i\omega h^2 \mathcal{B}_p(3, 3)]_{\Gamma_j} + [i\omega h^2 \beta_E(3, 3)]_{\Gamma_{jk}}$$

$$a_{7,8} = + [i\omega h^2 \mathcal{B}_p(3, 4)]_{\Gamma_j} + [i\omega h^2 \beta_E(3, 4)]_{\Gamma_{jk}}$$

$$a_{8,8} = (-\omega^2 g + i\omega d)4q + Ms + [i\omega h^2 \mathcal{B}_p(4, 4)]_{\Gamma_j} + [i\omega h^2 \beta_E(4, 4)]_{\Gamma_{jk}}$$

$$a_{9,9} = -\omega^2 \rho(l_1) + \tilde{K} m + \mu(n_1 + e) + [i\omega h^2 \mathcal{B}_p(3, 3)]_{\Gamma_j} + [i\omega h^2 \beta_W(3, 3)]_{\Gamma_{jk}}$$

$$a_{9,10} = + [i\omega h^2 \mathcal{B}_p(3, 1)]_{\Gamma_j} + [i\omega h^2 \beta_W(3, 2)]_{\Gamma_{jk}}$$

$$a_{9,11} = + [i\omega h^2 \mathcal{B}_p(3, 2)]_{\Gamma_j} + [i\omega h^2 \beta_W(3, 1)]_{\Gamma_{jk}}$$

$$a_{9,12} = + [i\omega h^2 \mathcal{B}_p(3, 4)]_{\Gamma_j} + [i\omega h^2 \beta_W(3, 4)]_{\Gamma_{jk}}$$

$$a_{10,10} = -\omega^2 \rho(l_1) + \tilde{K} n_1 + \mu(m + e) + [i\omega h^2 \mathcal{B}_p(1, 1)]_{\Gamma_j} + [i\omega h^2 \beta_W(1, 1)]_{\Gamma_{jk}}$$

$$a_{10,11} = + [i\omega h^2 \mathcal{B}_p(1, 2)]_{\Gamma_j} + [i\omega h^2 \beta_W(1, 2)]_{\Gamma_{jk}}$$

$$a_{10,12} = -\omega^2 \rho_f(2q) - Bs + [i\omega h^2 \mathcal{B}_p(1, 4)]_{\Gamma_j} + [i\omega h^2 \beta_W(1, 4)]_{\Gamma_{jk}}$$

$$a_{11,11} = -\omega^2 \rho(l_1) + \tilde{K} e + \mu(m + n_1) + [i\omega h^2 \mathcal{B}_p(2, 2)]_{\Gamma_j} + [i\omega h^2 \beta_W(2, 2)]_{\Gamma_{jk}}$$

$$a_{11,12} = + [i\omega h^2 \mathcal{B}_p(2, 4)]_{\Gamma_j} + [i\omega h^2 \beta_W(2, 4)]_{\Gamma_{jk}}$$

$$a_{12,12} = (-\omega^2 g + i\omega d)4q + Ms + [i\omega h^2 \mathcal{B}_p(4, 4)]_{\Gamma_j} + [i\omega h^2 \beta_W(4, 4)]_{\Gamma_{jk}}$$

$$a_{13,13} = -\omega^2 \rho l_1 + \tilde{K} m + \mu(n + e_1) + [i\omega h^2 \mathcal{B}_p(2, 2)]_{\Gamma_j} + [i\omega h^2 \beta_N(2, 2)]_{\Gamma_{jk}}$$

$$a_{13,14} = + [i\omega h^2 \mathcal{B}_p(2, 3)]_{\Gamma_j} + [i\omega h^2 \beta_N(2, 3)]_{\Gamma_{jk}}$$

$$a_{13,15} = + [i\omega h^2 \mathcal{B}_p(2, 1)]_{\Gamma_j} + [i\omega h^2 \beta_N(2, 1)]_{\Gamma_{jk}}$$

$$a_{13,16} = + [i\omega h^2 \mathcal{B}_p(2, 4)]_{\Gamma_j} + [i\omega h^2 \beta_N(2, 4)]_{\Gamma_{jk}}$$

$$a_{14,14} = -\omega^2 \rho l_1 + \tilde{K} n + \mu(m + e_1) + [i\omega h^2 \mathcal{B}_p(3, 3)]_{\Gamma_j} + [i\omega h^2 \beta_N(3, 3)]_{\Gamma_{jk}}$$

$$a_{14,15} = + [i\omega h^2 \mathcal{B}_p(3, 1)]_{\Gamma_j} + [i\omega h^2 \beta_N(3, 1)]_{\Gamma_{jk}}$$

$$a_{14,16} = + [i\omega h^2 \mathcal{B}_p(3, 4)]_{\Gamma_j} + [i\omega h^2 \beta_N(3, 4)]_{\Gamma_{jk}}$$



$$a_{15,15} = -\omega^2 \rho l_1 + \tilde{K} e_1 + \mu(m+n) + [i\omega h^2 \mathcal{B}_p(1,1)]_{\Gamma_j} + [i\omega h^2 \beta_N(1,1)]_{\Gamma_{jk}}$$

$$a_{15,16} = -\omega^2 \rho_f(2q) + Bt + [i\omega h^2 \mathcal{B}_p(1,4)]_{\Gamma_j} + [i\omega h^2 \beta_N(1,4)]_{\Gamma_{jk}}$$

$$a_{16,16} = (-\omega^2 g + i\omega d)4q + Mt + [i\omega h^2 \mathcal{B}_p(4,4)]_{\Gamma_j} + [i\omega h^2 \beta_N(4,4)]_{\Gamma_{jk}}$$

$$a_{17,17} = -\omega^2 \rho l_1 + \tilde{K} m + \mu(n+e_1) + [i\omega h^2 \mathcal{B}_p(3,3)]_{\Gamma_j} + [i\omega h^2 \beta_S(3,3)]_{\Gamma_{jk}}$$

$$a_{17,18} = + [i\omega h^2 \mathcal{B}_p(3,2)]_{\Gamma_j} + [i\omega h^2 \beta_S(3,2)]_{\Gamma_{jk}}$$

$$a_{17,19} = + [i\omega h^2 \mathcal{B}_p(3,1)]_{\Gamma_j} + [i\omega h^2 \beta_S(3,1)]_{\Gamma_{jk}}$$

$$a_{17,20} = + [i\omega h^2 \mathcal{B}_p(3,4)]_{\Gamma_j} + [i\omega h^2 \beta_S(3,4)]_{\Gamma_{jk}}$$

$$a_{18,18} = -\omega^2 \rho l_1 + \tilde{K} n + \mu(m+e_1) + [i\omega h^2 \mathcal{B}_p(2,2)]_{\Gamma_j} + [i\omega h^2 \beta_S(2,2)]_{\Gamma_{jk}}$$

$$a_{18,19} = + [i\omega h^2 \mathcal{B}_p(2,1)]_{\Gamma_j} + [i\omega h^2 \beta_S(2,1)]_{\Gamma_{jk}}$$

$$a_{18,20} = + [i\omega h^2 \mathcal{B}_p(2,4)]_{\Gamma_j} + [i\omega h^2 \beta_S(2,4)]_{\Gamma_{jk}}$$

$$a_{19,19} = -\omega^2 \rho l_1 + \tilde{K} e_1 + \mu(m+n) + [i\omega h^2 \mathcal{B}_p(1,1)]_{\Gamma_j} + [i\omega h^2 \beta_S(1,1)]_{\Gamma_{jk}}$$

$$a_{19,20} = -\omega^2 \rho_f(-2q) - Bt + [i\omega h^2 \mathcal{B}_p(1,4)]_{\Gamma_j} + [i\omega h^2 \beta_S(1,4)]_{\Gamma_{jk}}$$

$$a_{20,20} = (-\omega^2 g + i\omega d)4q + Mt + [i\omega h^2 \mathcal{B}_p(4,4)]_{\Gamma_j} + [i\omega h^2 \beta_S(4,4)]_{\Gamma_{jk}}$$

$$a_{21,21} = -\omega^2 \rho l_1 + \tilde{K} m_1 + \mu(n+e) + [i\omega h^2 \mathcal{B}_p(1,1)]_{\Gamma_j} + [i\omega h^2 \beta_F(1,1)]_{\Gamma_{jk}}$$

$$a_{21,22} = + [i\omega h^2 \mathcal{B}_p(1,2)]_{\Gamma_j} + [i\omega h^2 \beta_F(1,2)]_{\Gamma_{jk}}$$

$$a_{21,23} = + [i\omega h^2 \mathcal{B}_p(1,3)]_{\Gamma_j} + [i\omega h^2 \beta_F(1,3)]_{\Gamma_{jk}}$$

$$a_{21,24} = -\omega^2 \rho_f(2q) + Br + [i\omega h^2 \mathcal{B}_p(1,4)]_{\Gamma_j} + [i\omega h^2 \beta_F(1,4)]_{\Gamma_{jk}}$$

$$a_{22,22} = -\omega^2 \rho l_1 + \tilde{K} n + \mu(m_1+e) + [i\omega h^2 \mathcal{B}_p(2,2)]_{\Gamma_j} + [i\omega h^2 \beta_F(2,2)]_{\Gamma_{jk}}$$

$$a_{22,23} = + [i\omega h^2 \mathcal{B}_p(2,3)]_{\Gamma_j} + [i\omega h^2 \beta_F(2,3)]_{\Gamma_{jk}}$$

$$a_{22,24} = + [i\omega h^2 \mathcal{B}_p(2,4)]_{\Gamma_j} + [i\omega h^2 \beta_F(2,4)]_{\Gamma_{jk}}$$

$$a_{23,23} = -\omega^2 \rho l_1 + \tilde{K} e + \mu(m_1+n) + [i\omega h^2 \mathcal{B}_p(3,3)]_{\Gamma_j} + [i\omega h^2 \beta_F(3,3)]_{\Gamma_{jk}}$$

$$a_{23,24} = + [i\omega h^2 \mathcal{B}_p(3,4)]_{\Gamma_j} + [i\omega h^2 \beta_F(3,4)]_{\Gamma_{jk}}$$

$$a_{24,24} = (-\omega^2 g + i\omega d)4q + Mr + [i\omega h^2 \mathcal{B}_p(4,4)]_{\Gamma_j} + [i\omega h^2 \beta_F(4,4)]_{\Gamma_{jk}}$$

De manera análoga se procede para generar el término del lado derecho.



## Referencias

- [Becker, 1981] Becker, E. B., Carey, G.F., Oden, T.: Finite Elements. An introduction. Volume I. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1981)
- [Biot, 1956 a] Biot, M. A.: Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low frequency range. Journal of applied physics, Vol. 28, No. 2. 168-178 (1956)
- [Biot, 1956 b] Biot, M. A.: Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. High frequency range. Journal of applied physics, Vol. 28, No. 2. 179-191 (1956)
- [Biot, 1962] Biot, M. A.: Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media. Journal of applied physics, Vol. 33, No. 4. 1482-1498 (1962)
- [Carcione, 2014] Carcione, J. M.: Wave fields in real media: wave propagation in anisotropic, anelastic, porous and electromagnetic media. 3rd. ed., Elsevier (2014)
- [Douglas et.al., 1999] J. Douglas, Jr., J. E. Santos, D. Sheen, and X. Ye. "Nonconforming Galerkin methods based on quadrilateral elements for second order elliptic problems," Mathematical Modelling and Numerical Analysis (M 2 AN) 33, 747 (1999).
- [Douglas et. el., 2001] J. Jr. Douglas, J. E. Santos, and D. Sheen, "Nonconforming Galerkin methods for the Helmholtz equation," Numerical Methods for Partial Differential Equations 17(5), 427-543 (2001).
- [Gauzellino y Santos, 2001] Gauzellino, F. I., Santos, J. E.: Frequency domain wave propagation modeling in exploration seismology. Journal of Computational Acoustics. Vol 9. No. 3. 941-955 (2001)
- [Gauzellino et. al., 2009] Gauzellino, P. M., Zyserman, F. I., Santos, J. E.: Nonconforming finite element methods for the three-dimensional helmholtz equation: iterative domain decomposition or global solution? Journal of Computational Acoustics. Vol 17. No. 2, 159-173 (2009)
- [Liu et al., 1976] Liu, H.P., Anderson, D.L., Kanamori, H.: Velocity dispersion due to anelasticity; implications for seismology and mantle composition. Geophys. J. R. Astr. Soc., Vol 47, 41-58 (1976)
- [Mavko et.al., 2009] Mavko, G., Mukerji, T., y Dvorkin, J. :The Rock Physics Handbook: Tools for Seismic Analysis of Porous Media. Cambridge University Press (2009)
- [Santos y Gauzellino, 2016] Santos, J. E., Gauzellino, P. M.: Numerical Simulation in Applied Geophysics. Springer International Publishing (2016)
- [Solazzi, 2018] Solazzi, S. G.: Modelado y análisis de la respuesta sísmica de rocas heterogéneas saturadas por fluidos inmiscibles. Tesis de Doctorado (2018)