



Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas.  
Universidad Nacional de La Plata.

Tesis para obtener el grado académico de  
Licenciada en Astronomía

**Estrellas híbridas con transiciones de fase  
secuenciales y sus efectos en las frecuencias de  
oscilación**

M. Camila Rodríguez

**Director:** Ignacio Francisco Ranea Sandoval

**Co-Director:** Mauro Mariani

La Plata, Argentina

Febrero 2020



# Agradecimientos

Quiero agradecer a la universidad pública por darme la posibilidad de estudiar lo que elegí. A mis directores, Nacho y Mauro, y a aquellas personas que hicieron aportes a esta tesis como Octavio y Milva por su ayuda, paciencia y generosidad.

A la gente del Observatorio, Charo, Pau, Bruno, Lu, Iván, Marcos, Tati, Toña, Tomi y Val. Gracias por hacer que la Facultad no sea solo una institución educativa sino un espacio ameno y de formación personal.

A las chicas del colegio que siempre están, Jose, Tati, Mili, Juli, Debi, Vicky, Nadia, Dani, Lula, Sol, Cami, Mori, Jaz y Flor. Gracias por la amistad de tantos años que sigue intacta.

A mis papás, por apoyarme siempre y darme la posibilidad de dedicarme sólo al estudio facilitándome este camino. A mis hermanos, Lisi y Pato. A mi hermana, Juli, por su amor sincero. A mi sobrino, Joaco, y mi sobrina, Martina, porque con ellos la vida es más alegre.

Y, por último, a Nico por ser un sol, siempre dispuesto y apoyando todas mis decisiones. Por su paciencia y amor.

**M. Camila Rodríguez**

La Plata, Febrero 2020

# Resumen

Las estrellas de neutrones son los objetos más densos del Universo con masas de  $M \sim 1,4M_{\odot}$  y radios de  $R \sim 12$  km. En su interior la ecuación de estado que describe la materia es todavía desconocida ya que se encuentra en condiciones extremas, difícilmente alcanzables en experimentos en laboratorios terrestres. Por este motivo la realización conjunta de estudios teóricos y observacionales vinculada a estos objetos pueden permitirnos obtener información detallada del comportamiento de la materia sometida a condiciones extremas. La observación de sistemas binarios con púlsares (PSR J1614-2230, PSR J0343+0432 y PSR 0740+6620) de  $2M_{\odot}$  impone fuertes restricciones a la ecuación de estado que describe el interior de estos objetos. La detección de ondas gravitacionales emitidas durante la fusión de dos estrellas de neutrones (GW170817) y su contraparte electromagnética (GRB170817A) imponen, además, un límite superior a la deformabilidad de marea del sistema binario.

En este trabajo estudiamos estrellas de neutrones modeladas con un núcleo de materia de quarks y una envoltura de materia hadrónica. Para esto, consideramos dos transiciones de fase abruptas de primer orden, una correspondiente a una transición entre materia hadrónica y materia de quarks, y otra correspondiente a una transición de materia de quark en dos estados diferentes.

El objetivo central de esta tesis es estudiar el efecto que genera la existencia de dos transiciones de fase secuenciales en el interior de una estrella de neutrones sobre los modos normales de oscilación  $f$  y  $g$  bajo la aproximación relativista de Cowling. Veremos que el hecho de introducir una segunda transición de fase se ve reflejado en el cambio de las frecuencias de oscilación tanto  $f$  como  $g$  y en la aparición de un nuevo modo  $g$  asociado con las estrellas de neutrones que tienen dos transiciones de fase en su interior.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Estrellas de Neutrones e Híbridas</b>	<b>6</b>
2.1. Ecuaciones de Estado . . . . .	10
2.2. Ecuaciones TOV . . . . .	16
2.2.1. Deformabilidad de marea . . . . .	20
2.2.2. Criterio de estabilidad . . . . .	21
<b>3. Ondas gravitacionales y Oscilaciones no radiales</b>	<b>24</b>
3.1. Ondas gravitacionales . . . . .	24
3.1.1. Fuentes de emisión de ondas gravitacionales . . . . .	25
3.2. Oscilaciones no radiales . . . . .	27
3.2.1. Aproximación Relativista de Cowling . . . . .	30
3.3. Astrosismología de Estrellas de Neutrones . . . . .	32
<b>4. Resultados</b>	<b>35</b>
4.1. Ecuaciones de Estado . . . . .	35
4.2. Ecuaciones TOV . . . . .	37
4.2.1. Selección de parámetros . . . . .	40
4.3. Modos de oscilación $f$ y $g$ . . . . .	44
<b>5. Conclusiones</b>	<b>50</b>
<b>A. Sistema de unidades geométricas</b>	<b>54</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>56</b>

# Índice de figuras

1.1. Mediciones de masas de ENs . . . . .	2
2.1. Esquema evolutivo de las estrellas . . . . .	7
2.2. Diagrama esquemático de la formación y evolución de una estrella de neutrones . . . . .	9
2.3. Representación de la estructura interna de una estrella híbrida . .	10
2.4. Diagrama de fases de la QCD . . . . .	13
2.5. Ecuación de estado con fase mixta y sin fase mixta . . . . .	14
2.6. Ecuación de estado con doble transición de fase . . . . .	16
2.7. Gráfico $M(R)$ de análisis de estabilidad de modos. . . . .	23
3.1. Representación del acoplamiento de una estrella relativista con las ondas gravitacionales. . . . .	27
3.2. Gráfico de la frecuencia en función de cantidades macroscópicas. .	33
3.3. Gráfico del tiempo de amortiguación en función de cantidades ma- croscópicas. . . . .	33
3.4. Gráfico $M(R)$ de numerosas EdEs . . . . .	34
4.1. Gráfico con todas las EdEs construidas. . . . .	36
4.2. Gráfico $M(R)$ para el caso 1 . . . . .	38
4.3. Gráfico $M(R)$ para el caso 2 . . . . .	39
4.4. Gráfico $M(\epsilon_c)$ para el caso 1. . . . .	39
4.5. Gráfico $M(\epsilon_c)$ para el caso 2. . . . .	40
4.6. Gráfico de las EdEs híbridas seleccionadas para el cálculo de las frecuencias de los modos normales de oscilación $f$ y $g$ . . . . .	42
4.7. Gráfico $M(R)$ para las EdEs híbridas seleccionadas . . . . .	42
4.8. Gráfico $M(\epsilon_c)$ para las EdEs híbridas seleccionadas . . . . .	43
4.9. Perfiles de densidad de energía $\epsilon(r)$ y presión, $P$ . . . . .	43
4.10. Gráfico $\Lambda(M)$ para las EdEs híbridas seleccionadas. . . . .	44
4.11. Gráfico $\omega(M)$ para las EdEs híbridas con EdE hadrónica $DD2$ . . .	46
4.12. Gráfico $\omega(M)$ para las EdE híbridas con EdE hadrónica $GM1L$ . .	47
4.13. Gráficos $Log(\omega)$ en función de $\frac{\Delta\epsilon}{\epsilon_{trans}}$ para el modo $g$ y $g_2$ . . . . .	48

# Índice de cuadros

4.1. Cuadro de parámetros de las EdEs . . . . .	36
4.2. Cuadro de parámetros de las EdEs seleccionadas. . . . .	41
A.1. Cuadro de conversión a unidades geométricas. . . . .	54

# Capítulo 1

## Introducción

Las estrellas de neutrones (ENs) son uno de los posibles remanentes compactos que pueden producirse como resultado del colapso gravitacional de una estrella supergigante masiva. Como muestra la figura 1.1, las observaciones realizadas en gran parte del espectro electromagnético indican que son objetos con masas entre 1 y  $2M_{\odot}$  y radios de  $\sim 12$  km. En su interior, teniendo en cuenta una EN fría, la materia está sujeta a condiciones extremas: densidades centrales mayores que la de los núcleos atómicos  $\epsilon_c \gtrsim \epsilon_{nuc} = 2,3 \times 10^{14}$  g/cm<sup>3</sup>, campos magnéticos superficiales que pueden alcanzar los  $10^{15}$  Gauss y temperaturas de hasta  $10^8$  K en el núcleo.

La materia en las condiciones extremas mencionadas anteriormente se denomina materia densa. Para la materia densa aún no se ha encontrado la ecuación de estado (EdE) a través de la cual describir la relación entre la presión y la densidad que posee un fluido,  $P(\epsilon)$ . En estos objetos compactos, la EdE es fundamental para modelar su interior. En este sentido, el desarrollo de modelos que permitan describir la EdE de la materia en el interior de las ENs es un área de investigación muy activa dentro de la astrofísica teórica. Cada modelo teórico predice un valor máximo para la masa que puede tener una EN. En conjunto con las observaciones astronómicas, nos permitirán dar una idea de cuál es la naturaleza de su interior, es decir cuál es la naturaleza de la materia densa. Por este motivo, las ENs son laboratorios astrofísicos naturales, objetos que tienden puentes entre la física nuclear y la astrofísica.

Recientemente, se obtuvieron resultados de la observación de una EN cuya masa se estimó con gran precisión en  $\sim 2M_{\odot}$  (Demorest et al., 2010; Antoniadis y et al., 2013; Cromartie y t al., 2019). Si bien es un gran avance ya que impone fuertes restricciones a la EdE y elimina un gran número de ellas que no satisfacen esta condición, todavía existen muchos modelos capaces de reproducir estas observaciones (ver, por ejemplo, Lattimer y Prakash, 2004).

Como la estructura de la materia a escala nuclear depende de la interac-

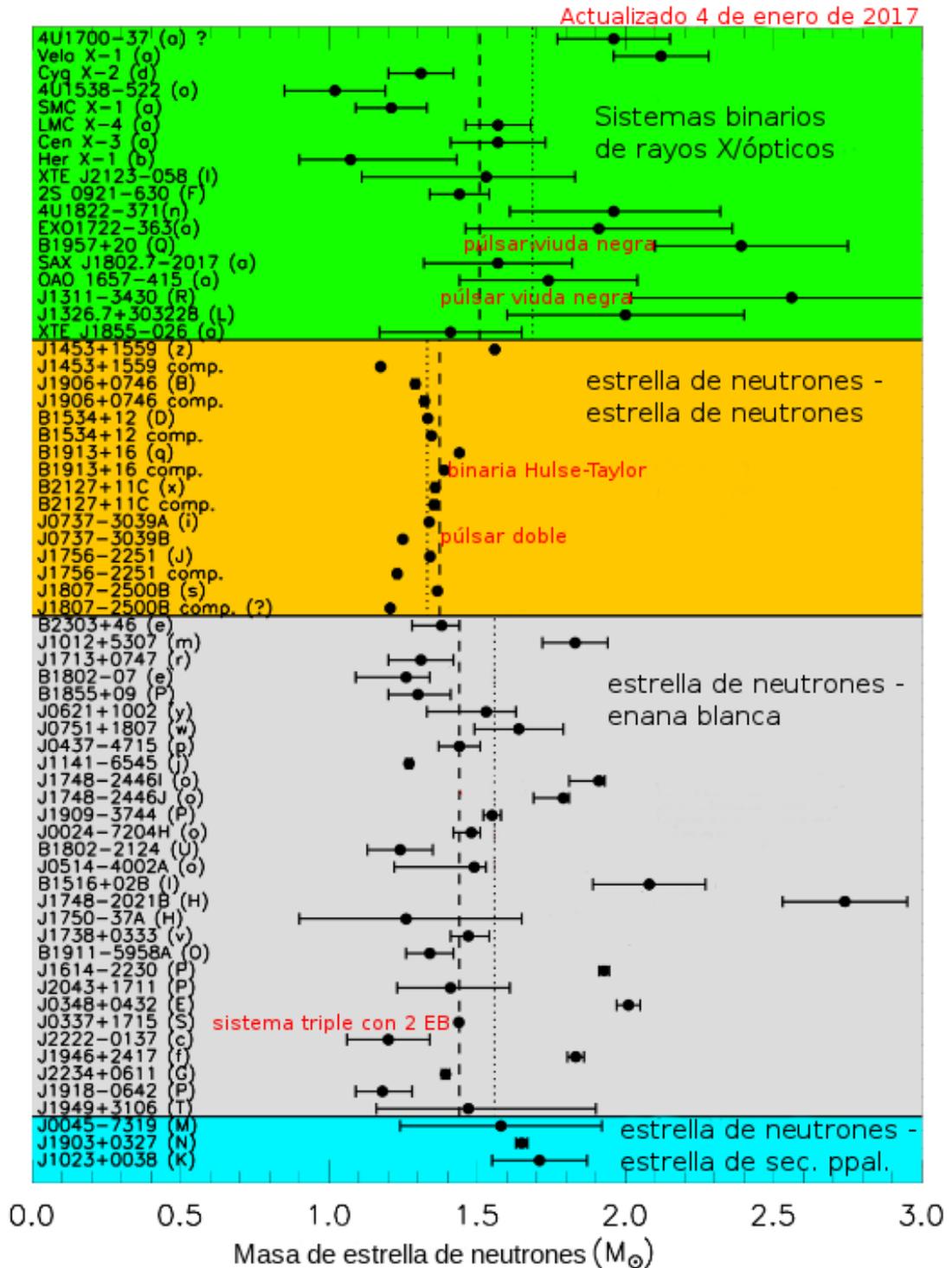


Figura 1.1: Mediciones de masas de ENs. La figura muestra que las masas promedio ponderadas por error están cerca de  $1,4M_{\odot}$  para todas las categorías de medidas, pero la dispersión en masas es especialmente pequeña en la categoría de sistemas binarios de dos ENs. Imagen traducida de la original de Lattimer (2019).

ción fuerte, resulta necesario recurrir a la Cromodinámica Cuántica (QCD) para realizar su descripción. Esta es una teoría cuántica de campos que describe el comportamiento de quarks y gluones. Fue propuesta a comienzos de los años 70 como una teoría para entender la estructura de bariones (colectivos de tres quarks, como protones y neutrones) y mesones (pares quark-antiquark, como los piones). A densidades altas, la QCD predice una transición de fase de la materia bariónica a un estado de la materia donde los hadrones se descomponen en sus partículas constituyentes, los quarks, y se forma un plasma de quarks y gluones libres<sup>1</sup> (ver, por ejemplo, Orsaria et al., 2019, y referencias allí mencionadas).

En este contexto, sumado a la conjetura de Bodmer y Witten (Bodmer, 1971; Witten, 1984) sobre la estabilidad absoluta de la materia de quarks extraña, un modelo alternativo que se ha propuesto son los modelos de Estrellas Híbridas (EHs): estrellas con núcleo de quarks cubierta por materia hadrónica<sup>2</sup>. En este modelo de estrella existe una transición de fase y en ellas se distinguen capas de materia en distintos estados.

Si bien la mayor parte de los modelos de EHs suelen considerar solo una transición de fase, de materia hadrónica a materia de quarks desconfiada, recientemente se estudiaron EdEs donde ocurren, de forma secuencial, dos transiciones de fase. En este escenario, se considera que primero ocurre una transición de fase de materia hadrónica a materia de quarks libre o alguna fase superconductora de color no CFL (*color-flavor-locked*) como la 2SC (*two-flavor color-superconducting*) y luego ocurre una segunda transición, entre esta fase y la fase superconductora de color CFL (ver, por ejemplo, Alford et al., 2008).

Para realizar este estudio, Alford y Sedrakian (2017) generalizaron la parametrización CSS para la materia de quarks (ver, por ejemplo, Alford et al., 2013; Ranea-Sandoval et al., 2016). En este contexto, pueden obtenerse, para las EHs, no solo configuraciones gemelas, es decir, estrellas estables con la misma masa pero radios diferentes, sino también configuraciones trillizas.

Estos resultados teóricos acrecientan la necesidad de contar con mediciones precisas de las masas y los radios de este tipo de objetos. Estas observaciones permitirían comprender el comportamiento de la materia en el interior de estos objetos (ver el reciente trabajo de Sieniawska et al., 2018) ya que cada EdE predice una familia particular de ENs estacionarias. Teniendo en cuenta que la determinación de los radios de las ENs no es simple (ver Lattimer y Steiner (2014), y referencias allí mencionadas), la búsqueda de otros observables que permitan extraer información relacionada con la física de la materia en el interior de estos objetos resulta fundamental. Un nuevo estándar de calidad en la búsqueda de

---

<sup>1</sup>Para más detalles respecto a física de partículas ver Sección 2.1

<sup>2</sup>Hadrones: partículas formadas por quarks. Para más detalles ver sección 2.1.

explorar las propiedades de la EdE de la materia densa se conseguirá cuando el experimento NICER colocado en la Estación Espacial Internacional consiga estimar, con un error de medio kilómetro, el radio de PSR J0437-4715 cuya masa es  $1,44 \pm 0,07 M_{\odot}$  (Bogdanov y et al., 2019).

Es en este punto que la detección de ondas gravitacionales (OG) provenientes de ENs adquiere una importancia central (ver, por ejemplo, Andersson et al., 2011; Lasky, 2015; Orsaria et al., 2019). En los últimos años, se han realizado las primeras detecciones directas de OG provenientes de la fusión de agujeros negros de masas estelares (ver, por ejemplo, Abbott y et al., 2016) y de la fusión de ENs con el evento GW170817 (Abbott y et al., 2017b). En este último caso, se cuenta, además, con información proveniente de la contraparte electromagnética (ver, por ejemplo, Abbott y et al., 2017a). Estas detecciones abrieron una nueva ventana observacional: la astronomía multimensajera con detecciones electromagnéticas y OG<sup>3</sup>.

Además de la fusión de objetos compactos, las pulsaciones no radiales de ENs aisladas son otro mecanismo que genera emisión de OG. En este escenario, las oscilaciones de la materia son la fuente de las OG, por lo que estudiar las primeras permite extraer conclusiones acerca de las segundas. Además, las propiedades y características de los modos de emisión de OG están vinculadas, de forma íntima, con particularidades de la EdE con la que se describe la materia dentro de una EN. De esta forma la astrosismología de ENs permitirá comprender el interior de las mismas.

Con lo mencionado anteriormente, esta tesis tiene por objetivo estudiar el efecto que genera la existencia de dos transiciones de fase secuenciales en el interior de una EH aislada sobre los modos de oscilación y la consecuente emisión de OG. Para ello, en principio, se construirán EdEs híbridas con dos transiciones de fase secuenciales. Luego, se resolverán las ecuaciones de equilibrio hidrostático relativistas, las conocidas ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV). De esta manera, se podrá estudiar las familias de estrellas estables y la existencia o no de estrellas gemelas o trillizas. Una vez obtenidas las familias de estrellas en equilibrio hidrostático, se estudiarán, utilizando la aproximación relativista de Cowling los modos  $f$  y  $g$  de oscilación de las mismas.

La tesis se desarrolla a lo largo de cinco capítulos de la siguiente manera:

- En el **Capítulo 2** describiremos de forma resumida la historia del estudio de las ENs. Además, presentaremos características generales de estos objetos. Luego veremos aspectos globales de la materia hadrónica y de quarks y de la

---

<sup>3</sup>El evento GW190425 es la segunda detección interpretada con una probabilidad mayor al 99% como emisión de OG provenientes de la fusión de ENs. Sin embargo, no se ha detectado su contraparte electromagnética hasta la fecha (Abbott y et al., 2020).

transición de fase entre estos dos estados de la materia, y presentaremos el modelo de EdE que será utilizado. Por último, se deducirán las ecuaciones TOV y se expondrá el criterio de estabilidad utilizado a lo largo de esta tesis.

- En el **Capítulo 3** presentaremos conceptos generales de las OG y veremos las posibles fuentes de emisión. Daremos un resumen histórico de algunos hitos centrales en la astronomía de OG. En particular analizaremos las EHs aisladas para las cuales presentaremos las ecuaciones de perturbación y las dos diferentes familias de modos. Describiremos la aproximación relativista de Cowling utilizada para hallar los modos de oscilación y, por último, veremos cómo determinarlos.
- En el **Capítulo 4** presentaremos los resultados obtenidos de resolver tanto las ecuaciones TOV como las frecuencias de los modos  $f$  y  $g$  para un conjunto de estrellas utilizando la aproximación relativista de Cowling. Realizaremos un breve análisis de los mismos y contrastaremos con las restricciones provenientes de observaciones de los tres pulsares de  $2M_{\odot}$  y de GW170817.
- En el **Capítulo 5** realizaremos un resumen del trabajo realizado y presentaremos nuestras conclusiones.
- Por último, en el **Apéndice A** describiremos el sistema de unidades geométrico utilizado a lo largo de toda la tesis.

## Capítulo 2

# Estrellas de Neutrones e Híbridas

Las ENs fueron propuestas como objetos hipotéticos por primera vez en 1932 por Landau (Haar, 2013), poco después del descubrimiento de los propios neutrones.<sup>1</sup> Landau sugería que, en analogía con las enanas blancas, en las que la estrella se sostiene por la presión de los electrones degenerados, las ENs podrían ser objetos que mantienen el equilibrio por la presión que realizan los neutrones degenerados. En 1934, Baade y Zwicky (Baade y Zwicky, 1934) propusieron que las ENs eran remanentes de supernovas. En 1939, Tolman (Tolman, 1939), Oppenheimer y Volkoff (Oppenheimer y Volkoff, 1939) desarrollaron, teóricamente y de forma independiente, las ecuaciones que describen la estructura de este tipo de objetos. Para ello, emplearon las ecuaciones relativistas de estructura estelar siguiendo las ecuaciones de la teoría de la relatividad general de Einstein para espacio-tiempos estacionarios y esféricamente simétricos. En estos trabajos se demostró que las ENs no pueden tener un valor arbitrario de masa sino que se introduce el concepto de masa máxima de ENs. Posteriormente, Pacini predijo que una EN rotante y con campos magnéticos intensos emite ondas de radio (Pacini, 1967), pero no fue hasta 1967 que Bell y Hewish (Hewish et al., 1968) descubrieron un radio-pulsar que confirmó la existencia de las EN.

Más allá de estos aspectos históricos, los modelos teóricos actuales predicen que la evolución que tiene una estrella aislada depende principalmente de su masa inicial. Aquellas estrellas aisladas que comiencen con una masa en la Secuencia Principal  $M < 10M_{\odot}$ , dependiendo de su metalicidad inicial, terminarán sus vidas como enanas blancas (Córscico et al., 2019). Las ENs son producto del colapso gravitacional de estrellas con masas entre  $10M_{\odot} \lesssim M \lesssim 12M_{\odot}$ . Para estrellas cuyas masas se encuentran por encima de este valor y hasta  $M \sim 25M_{\odot}$ , si es que queda algún remanente compacto luego de la explosión como supernova

---

<sup>1</sup>Sin embargo, esto todavía está en discusión. Hay quienes argumentan que las ideas de Landau son inclusive anteriores al descubrimiento de los neutrones realizado por Chadwick (Yakovlev et al., 2013).

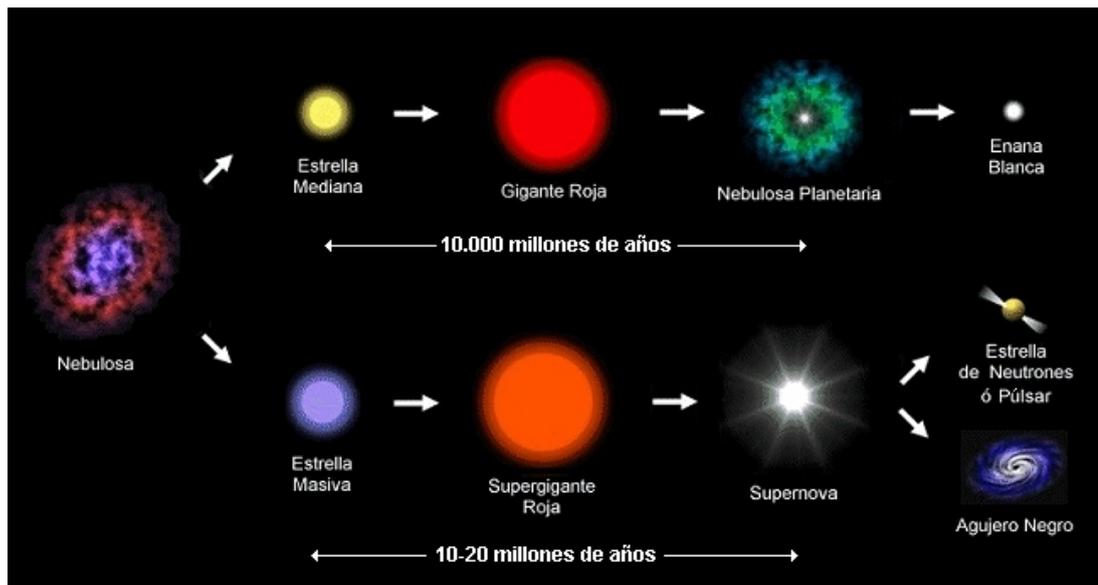


Figura 2.1: Esquema simplificado en el que se muestran los distintos caminos evolutivos que pueden tomar las estrellas dependiendo de su masa inicial. Imagen tomada de Wikipedia (url: [https://es.wikipedia.org/wiki/Evoluci%C3%B3n\\_estelar](https://es.wikipedia.org/wiki/Evoluci%C3%B3n_estelar)).

de la gigante roja, se formará una EN o un agujero negro, dependiendo de la metalicidad y velocidad de rotación del objeto inicial (Athem Alsabti, 2015). Sin embargo, los mecanismos que determinan la formación de uno u otro objeto no son aún del todo claros y, por lo tanto, estos valores están en discusión (ver, por ejemplo, O'Connor y Ott, 2011; Sukhbold et al., 2016). En la figura 2.1 se muestra un esquema simplificado de la evolución estelar para diferentes estrellas.

Las temperaturas en el interior de estrellas que comienzan sus vidas con más de  $10M_{\odot}$  y terminan como ENs son lo suficientemente altas como para quemar los elementos resultantes del proceso triple-alfa en fases sucesivas hasta llegar al hierro. Estas estrellas atravesarán fases sucesivas de quema de hidrógeno, helio, carbono, neón, oxígeno y silicio. Al final de dicho proceso, la estrella acabará con una estructura interna similar a la de una cebolla, con diversas capas, cada una de ellas con una composición distinta. En esta etapa la estrella tiene un núcleo de hierro que es inerte pero sus capas más externas continúan quemando elementos. Esto provoca que el núcleo de hierro vaya aumentando su masa hasta que la fuerza de gravedad comprime el núcleo de la estrella y se desencadena una supernova tipo II de colapso gravitatorio, dando lugar a una proto-estrella de neutrones (PEN). Según la evolución esquemática presentada por Prakash et al. (2001), inicialmente, el núcleo está rodeado de una envoltura de baja densidad que acreta materia del colapso y, a su vez, esta pierde energía debido a la captura de electrones. En este proceso los electrones y protones de los núcleos atómicos se combinan para formar neutrones emitiendo neutrinos y, de esta forma, liberando

energía

$$p + e \longrightarrow n + \nu_e . \quad (2.1)$$

Las PEN son ricas en leptones, principalmente electrones  $e$  y neutrinos electrónicos  $\nu_e$ . En esta etapa, la PEN es opaca a neutrinos, motivo por el cual se ven atrapados temporalmente adentro de la misma. El escape de neutrinos del interior ocurre posteriormente. En su periferia la emisión de neutrinos genera disminución de presión por lo que la PEN se contrae rápidamente. Luego la emisión constante de neutrinos comienza a enfriar el interior. La estrella se vuelve transparente a los neutrinos y el proceso de enfriamiento se acelera. Dicho proceso ocurre hasta que la estrella se enfría.

Una vez que la EN se encuentra en equilibrio hidrostático (ocurre luego de unos 50 segundos de formada la PEN), la temperatura es del orden de

$$T \sim 6 \times 10^5 \text{K} \sim 60 \text{eV} = 6 \cdot 10^{-5} \text{MeV} \ll \epsilon_{Fermi} , \quad (2.2)$$

donde  $\epsilon_{Fermi}$  es la energía de Fermi que corresponde al nivel de energía para el cual las partículas ocupan los estados de menor energía posible, y por lo tanto van llenando los niveles inferiores hasta alcanzar un valor finito  $\epsilon_{Fermi}$ . Por esta razón, es posible considerar la aproximación  $T = 0$  para describir el comportamiento de la materia dentro de una EN. Estos neutrones, como son fermiones, obedecen el principio de exclusión de Pauli y junto con las interacciones nucleares, generan la presión suficiente para sostener a la estructura en equilibrio dando lugar a lo que conocemos como estrella de neutrones, cuyo nombre se debe a que los mismos predominan en la estrella. En la figura 2.2 se muestra un esquema de las etapas evolutivas de una EN.

Un posible resultado del colapso gravitacional, en lugar de una EN tradicional, es un tipo de estrella exótica en la cual, debido a la alta densidad, la materia existe en forma de quarks desconfiados. Este estado de la materia podría encontrarse en regiones internas de objetos compactos, dando lugar a lo que se denomina una estrella híbrida (EH) o bien componer la totalidad de la estrella conformando lo que conocemos como estrella de quarks. En el primer caso, en las regiones de menor densidad, la materia estará confinada, en forma de hadrones. A medida que nos acercamos al centro de la estrella tanto la densidad como la presión van aumentando. Existen teorías (ver, por ejemplo, Orsaria et al., 2019, y referencias allí mencionadas) que sugieren que cuando la densidad en el interior de una estrella de neutrones supera varias veces la densidad de saturación nuclear ocurre una transición de fase a partir de la cual comienzan a aparecer partículas exóticas como condensados de mesones, quarks desconfiados o incluso fases donde los quarks exhiben superconductividad. Por lo tanto, a diferencia de las ENs en las

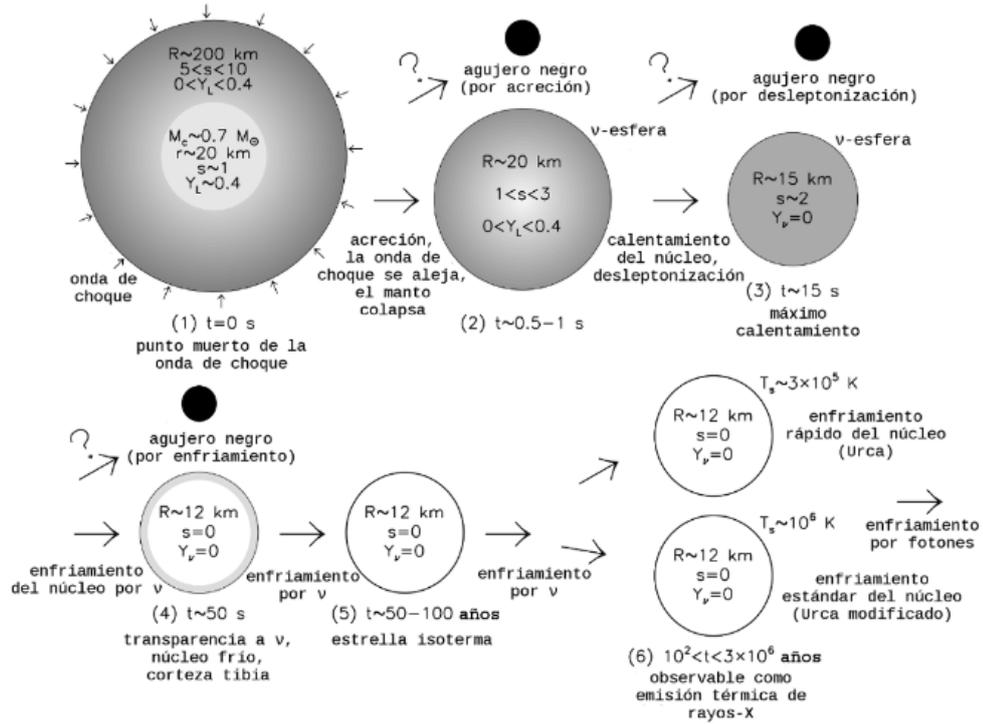


Figura 2.2: Principales etapas de la evolución desde el colapso gravitacional hasta la formación de una EN estable o agujero negro. Diagrama traducido del original en Prakash et al. (2001).

cuales no hay transiciones de fase sino que son estrellas puramente hadrónicas, en las EHs existe al menos una transición de fase. En este trabajo analizamos EHs como un caso particular de ENs. Se pueden identificar una serie de capas dentro de la estrella que varían según el estado en que se encuentra la materia. En la figura 2.3 se presenta, esquemáticamente, la estructura de una EH. Esta se compone de una superficie formada por plasma de hidrógeno y/o helio y núcleos de hierro. Sigue una corteza externa, formada por núcleos atómicos sumergidos en un gas de electrones relativistas. Luego la corteza interna, compuesta por núcleos pesados en un gas de electrones relativistas y neutrones superfluidos. Posteriormente, aparece un núcleo externo con protones, neutrones, electrones y muones. Y, por último, un núcleo interno donde la incertidumbre asociada con su composición es mayor, y que podría estar compuesto de neutrones, protones superconductores, electrones, muones, hiperones, condensado de bosones y quarks desconfiados.

Además, como los objetos compactos tienen grandes potenciales gravitatorios superficiales es necesario incorporar la relatividad general para poder determinar su estructura. Para eso es necesario saber cuál es la EdE que describe la materia en un régimen de muy altas densidades y bajas temperaturas.

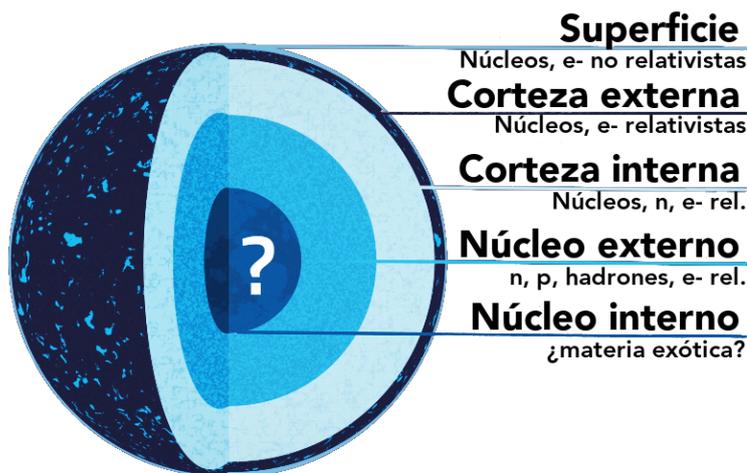


Figura 2.3: Estructura interna de una EH en la que se indican las distintas capas de la misma y las partículas que las componen. Imagen editada extraída de un video tomado de NASA Nicer (2017).

## 2.1. Ecuaciones de Estado

La EdE se expresa como una relación funcional entre los diversos parámetros termodinámicos (temperatura,  $T$ , volumen,  $V$ , presión,  $P$ , densidad,  $\rho$ , potencial químico,  $\mu$ , entre otros) necesarios para especificar el estado del sistema termodinámico. Esto hace posible la aplicación de los principios generales de la termodinámica y la hidrodinámica a objetos físicos particulares. Las EdEs no pueden derivarse solo de las relaciones termodinámicas, sino que también se basan en mediciones experimentales o en cálculos teóricos por los métodos de la mecánica estadística, utilizando varios modelos de interacciones entre partículas en un sistema.

El modelo utilizado para describir el comportamiento de las partículas subatómicas y sus interacciones es el Modelo Estándar, según el cual hay 12 partículas elementales (y sus correspondientes antipartículas): 6 quarks (up (u), down (d), strange (s), charm (c), bottom (b) y top (t)) y 6 leptones (electrón ( $e$ ), neutrino electrónico ( $\nu_e$ ), muón ( $\mu$ ), neutrino muónico ( $\nu_\mu$ ), tau ( $\tau$ ) y neutrino tau ( $\nu_\tau$ )) cuya interacción está regida por las 4 fuerzas fundamentales con sus respectivos mediadores o transmisores:

- Fuerza gravitatoria  $\rightarrow$  gravitón (teórico).
- Fuerza electromagnética  $\rightarrow$  fotones.
- Fuerza débil  $\rightarrow$  bosones  $W^\pm$  y  $Z$ .
- Fuerza fuerte  $\rightarrow$  gluones.

Todas estas interacciones tienen distinto alcance. La fuerza gravitatoria tiene alcance infinito pero es muy débil de modo que a escalas nucleares es despreciable. La fuerza electromagnética también tiene alcance infinito, pero es mucho más fuerte que la gravedad ( $10^{36}$  veces más fuerte) y actúa sobre aquellas partículas que poseen carga eléctrica. La fuerza fuerte ( $10^{38}$  veces más fuerte que la fuerza de gravedad) es de corto alcance ( $\sim 10^{-15}$  m  $\equiv$  1 Fermi), sólo actúa entre los quarks y gluones, y por lo tanto es la fuerza que mantiene los núcleos atómicos unidos. La fuerza débil ( $10^{25}$  veces más fuerte que la fuerza de gravedad) es de rango aun más corto ( $\sim 10^{-18}$  m) y actúa en ambos tipos de partículas aunque con ciertas limitaciones.

Para analizar algunas características del comportamiento de la materia, es necesario conocer el diagrama de fases. En termodinámica, un diagrama de fases tiene por objetivo describir el comportamiento de la materia sujeta a diferentes condiciones de, por ejemplo, temperatura y presión. Un caso muy estudiado es el diagrama de fases para el agua, donde existen regiones donde la misma se encuentra en estado sólido, líquido y gaseoso. Cada una de estas regiones se encuentra separada por líneas que definen las diferentes transiciones de fase. Una característica de dicho diagrama de fase es la existencia de un punto triple donde todas las fases pueden existir. A su vez, dicho diagrama de fases posee un punto crítico, caracterizado por una temperatura y presión crítica que define la condición en la que el agua puede coexistir en estado líquido y gaseoso.

En el caso de ENs, donde la estructura de la materia a escala nuclear depende de la interacción fuerte, para analizar la materia utilizamos el diagrama de fases de la QCD. Las dificultades inherentes a la QCD hicieron que se propongieran modelos fenomenológicos -bolsa del MIT (Chodos et al., 1974), Nambu Jona-Lasino, local y no local (ver, por ejemplo, Contrera et al., 2010; Orsaria et al., 2013; Ranea-Sandoval et al., 2019), Field Correlator Method (ver, por ejemplo, Nefediev et al., 2009; Mariani et al., 2017, 2019), entre otros-. Estos modelos permiten reproducir algunas de las propiedades fundamentales de dicha teoría e incluir la contribución de la materia de quarks en la EdE híbrida. No obstante, antes de introducir estas teorías efectivas realizaremos un breve repaso sobre las características generales de partículas elementales y familia de partículas elementales. Del Modelo Estándar descrito anteriormente, los fermiones elementales son los quarks y los leptones. Los quarks interactúan fuertemente formando, no solo protones, sino toda una serie de familias de otras partículas. Combinaciones de tres quarks forman los *bariones* (como el protón y el neutrón) y combinaciones de un quark y un anti-quark forman la familia de los *mesones* (como el *pion*). Toda partícula formada por quarks ya sean bariones o mesones son denominados *hadrones*. Los quarks no se encuentran libres en condiciones normales, sino que siempre están en estados

ligados con otros quarks, ya sea en un barión o en un mesón. Por otro lado, los leptones son partículas que interactúan por medio de la fuerza nuclear débil y que, si tienen carga, sienten la interacción electromagnética, pero nunca sienten la interacción nuclear fuerte.

En este contexto, el diagrama de fases de QCD no está completamente comprendido. Pero existe cierto nivel de acuerdo en ciertas características generales. Presentamos en la figura 2.4 un diagrama esquemático de dicho diagrama de fases. A bajas temperaturas y bajos potenciales químicos (que cuantifica el cambio en la energía interna del sistema cuando se introducen partículas) la materia se encuentra formando un gas de hadrones. Si se mantiene baja la temperatura (situación necesaria para describir a las ENs) y se aumenta el potencial químico (que es equivalente a aumentar la presión) y se superan los 310 MeV aparecen los núcleos atómicos. Si se aumenta aún más la presión, ocurre una transición de fase de primer orden, los hadrones se disuelven y liberan los quarks que los componen. Dependiendo el modelo particular que se utilice dicha fase puede ser una en la que los quarks están libres o en una fase superconductora de color como la 2SC. Si la densidad sigue aumentando ocurre otra transición de fase y la materia de quarks estaría en una fase superconductora de color conocida como CFL. En el otro extremo del diagrama, bajas densidades y altas temperaturas (situación del Universo temprano) la materia hadrónica también sufre una transición de fase a materia de quarks, pero no está clara la naturaleza de la misma. La mayoría de los modelos predicen la existencia de un punto crítico (como el caso del agua) por lo que la transición de fase sería del tipo *crossover*. La materia a altas temperaturas y densidades está en una fase conocida como plasma de quarks y gluones.

El modelo de EH que se utiliza en este trabajo consiste en un núcleo de quarks a muy altas densidades rodeado por una envoltura de hadrones que en principio podrá modelarse con una sola transición de fase de primer orden. Sin embargo, en el contexto de estos nuevos resultados del diagrama de fases de la QCD, se estima que el núcleo de quarks puede contener capas de distintas fases que presentan superconductividad de color. Este es un fenómeno que ocurre en la materia de quarks si la densidad es lo suficientemente alta y la temperatura baja. Una fase obtenida del diagrama QCD es la llamada fase *two-flavor color-superconducting* (2SC), donde aparecen condensados de quarks up y down apareados que podría ocurrir a densidades intermedias. Y otra fase de quarks diferente, es la fase *color-flavor-locked* (CFL) donde se producen condensados de quarks strange, up y down que ocurriría en el diagrama QCD a densidades suficientemente altas (potenciales químicos suficientemente grandes). De acuerdo con el Modelo Estándar de física de partículas, la fase CFL es la fase de mayor densidad de la materia de color de tres sabores.

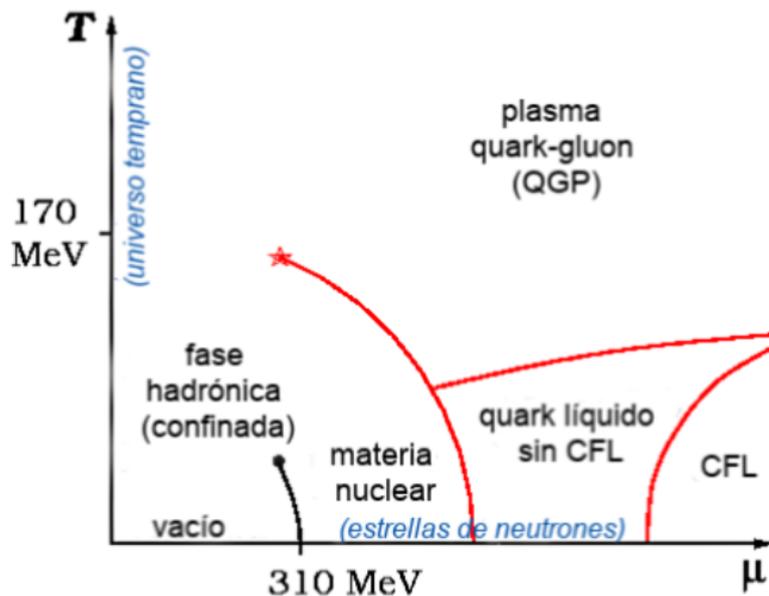


Figura 2.4: Diagrama de fases de la QCD. Gráfico del potencial químico,  $\mu$ , en función de la temperatura,  $T$ . La temperatura en el interior de una EH se considera  $T = 0$  por lo que la materia vive esencialmente sobre el eje del potencial químico. A medida que aumenta la densidad, la materia cambia de estado termodinámico pasando por una o más transiciones de fase. Imagen traducida y tomada de Wikipedia (url: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:QCD\\_phase\\_diagram.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:QCD_phase_diagram.png)).

En una EH la transición de fase puede darse de dos maneras, como se muestra en la figura 2.5, dependiendo del valor de la tensión superficial entre la materia hadrónica y la de quarks. Si esta es mayor que cierto valor crítico, estimado entre 5 a 40 MeV/fm<sup>2</sup>, entonces habrá una transición de fase abrupta llamada *construcción de Maxwell* (Alford et al., 2001; Endo, 2011). Esta transición de fase es isobárica y ocurre sobre un rango de densidad definida por

$$P^H(\mu_B^H, \mu_e^H) = P^Q(\mu^Q, \mu_e^Q) \quad , \quad \mu_B^H = 3\mu^Q \quad (2.3)$$

donde  $\mu_B^H$  y  $\mu^Q$  son los potenciales químicos bariónicos y de quarks, respectivamente. Para la construcción de Maxwell el potencial químico bariónico es continuo mientras que el potencial químico electrónico,  $\mu_e$ , sufre un salto en la interfase entre hadrones y quarks. La transición de fase es abrupta y la presión es constante en la transición. Cuando la transición de fase se construye con el formalismo de Maxwell, la neutralidad de carga eléctrica se cumple localmente, es decir, se exige que la componente hadrónica y la de quarks sean individualmente eléctricamente neutras. Por este motivo se genera una transición de fase hadrón-quark abrupta ya que las cargas eléctricas están bien apantalladas dentro de cada volumen microscópico y tanto la materia de quarks como materia hadrónica son neutras de carga local. Como consecuencia existe una discontinuidad en la densidad de

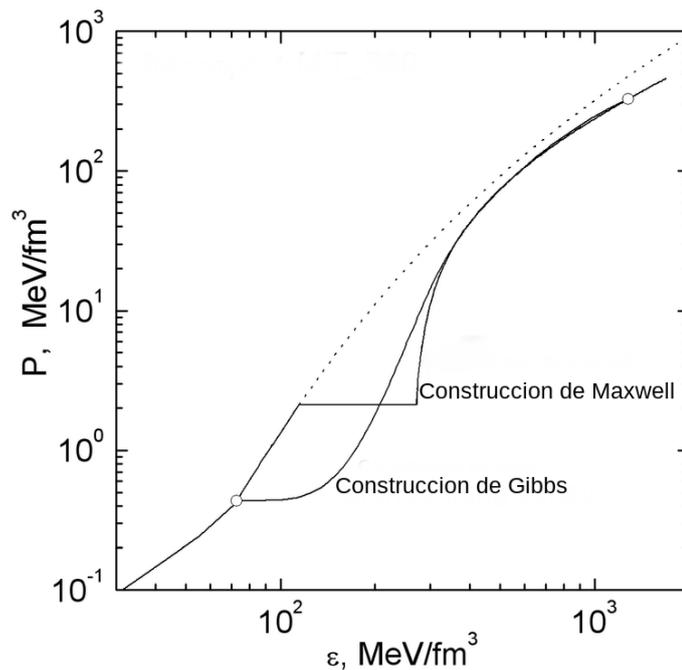


Figura 2.5: Gráfico de  $P$  como función de  $\epsilon$  donde se muestran tres EdEs. La línea punteada corresponde a la EdE hadrónica sin transición de fase. Las líneas sólidas corresponden a EdEs híbridas con una transición de fase. Aquella discontinua corresponden a la construcciones de Maxwell y aquella continuas (fase mixta) corresponden a la construcción de Gibbs. Los pequeños círculos blancos representan los puntos donde comienza y finaliza la transición de fase en la construcción de Gibbs. Imagen tomada y traducida de Alaverdyan (2009).

energía en la interfase que separa materia de quark confinada y materia de quark desconfinada.

De lo contrario, si la tensión superficial es menor a la crítica, entonces habrá una fase mixta donde hadrones y quarks libres coexisten y su estudio debe realizarse utilizando la llamada *construcción de Gibbs*. De esta manera, se puede obtener una región extendida de materia mixta, el potencial químico electrónico,  $\mu_e$ , es continuo y la presión varía monótonamente con la densidad. Para esta construcción la neutralidad de carga es impuesta como una restricción global ya que dentro de cada elemento de volumen, puede ocurrir que la componente de hadrones y la quarks no tengan individualmente carga eléctrica nula y cumplan con la condición de neutralidad de carga en conjunto. Esto hace que al utilizar este formalismo la transición de fase hadrón-quark no ocurra de manera abrupta sino que se forme una fase mixta en la que materia hadrónica y de quarks coexisten. La densidad de hadrones y quarks y sus cargas eléctricas son diferentes para cumplir las condiciones de igualdad de presión y potencial químico bariónico en

la región mixta. La condición de equilibrio para la fase mixta esta dada por

$$P^H(\mu_B^H, \mu_e^H) = P^Q(\mu_B^Q, \mu_e^Q) \quad , \quad \mu_B^H = 3\mu_B^Q \quad , \quad \mu_e^H = 3\mu_e^Q \quad (2.4)$$

con el potencial químico bariónico y electrónico continuos a lo largo de la fase mixta.

Dada la gran dispersión de resultados teóricos vinculados al valor numérico de la tensión superficial (ver, por ejemplo, Voskresensky et al., 2003; Pinto et al., 2012), en esta tesis asumimos que la tensión superficial es lo suficientemente grande como para asegurar que la transición de fase es abrupta.

En este contexto, vamos a presentar el modelo de EH que utilizamos para la realización de esta tesis. Construimos distintas EdEs híbridas utilizando las EdEs *GM1L* y *DD2* para la materia nuclear donde las densidades son del orden de la densidad de saturación nuclear o menores. En ambas EdEs las interacciones son las mismas, pero la diferencia entre las dos parametrizaciones está dada por las constantes de acoplamiento dependientes de la densidad que afectan la interacción de los mesones ( $\sigma$ ,  $\rho$  y  $\omega$ ) con todas las partículas que se incluyen en el modelo ( 2 nucleones que son el protón y el neutrón, 6 bariones mas pesados que se denominan hiperones e incluyen al menos un quark extraño en su composición, y 4 resonancias deltas, que están formadas solo por quarks u y d). Para el caso GM1L, las constantes de acoplamiento del mesón  $\rho$  con las otras partículas del modelo, dependen de la densidad. Las constantes de acoplamiento de los mesones  $\sigma$  y  $\omega$  están fijas y se ajustan a los experimentos de la física nuclear. En cambio, para el caso DD2, no solo las constantes de acoplamiento del mesón  $\rho$  con las otras partículas del modelo dependen de la densidad, sino que en esta parametrización, los mesones  $\sigma$  y  $\omega$  también se acoplan a las otras partículas. La dependencia de la densidad en este acoplamiento es diferente a la Gausseana que hay para las constantes de acoplamiento del mesón  $\rho$ . Esta elección de EdEs hadrónicas se debe a que cumplen las restricciones impuestas hasta el momento y con las que se vino investigando en el *Grupo de Gravitación, Astrofísica y Cosmología* (Ranea-Sandoval et al., 2017; Malfatti et al., 2019; Mariani et al., 2019). Para la materia de quarks utilizaremos una generalización de la parametrización CSS (“Constant Speed of Sound”) en la cual la velocidad del sonido es constante en cada fase (Alford et al., 2013; Ranea-Sandoval et al., 2016; Contrera et al., 2017).

La generalización de la parametrización CSS asume que la transición de fase se describe utilizando el formalismo de Maxwell. Esta parametrización describe dos transiciones de fase secuenciales en término de 6 parámetros (Alford y Sedrakian, 2017). La EdE para la materia de quarks utilizada en este modelo tiene el siguiente

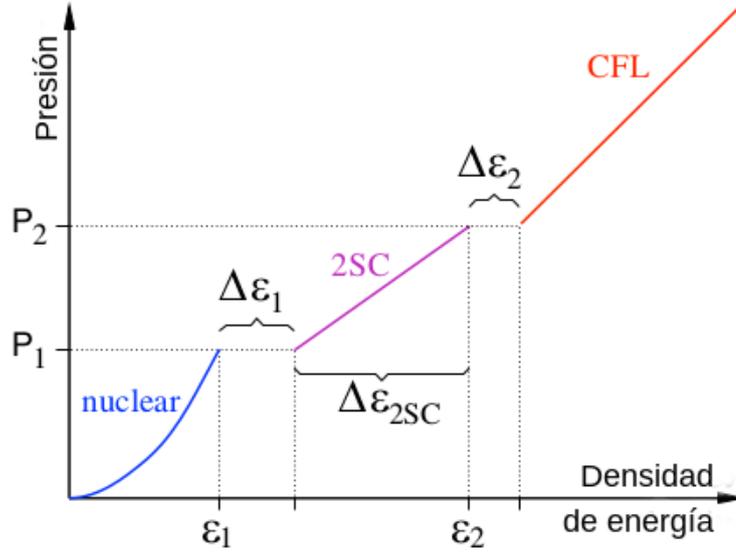


Figura 2.6: Gráfico de la presión,  $P$ , en función de la densidad de energía,  $\epsilon$ , con dos transiciones de fase abruptas. Las líneas en color refieren a las distintas EdE separadas por las transiciones de fase con saltos  $\Delta\epsilon_1$  y  $\Delta\epsilon_2$  en la densidad de energía. Imagen traducida de la original presentada en Alford y Sedrakian (2017).

comportamiento

$$P(\epsilon) = \begin{cases} P_1 & \epsilon_1 < \epsilon < \epsilon_1 + \Delta\epsilon_1 \\ P_1 + s_1[\epsilon - (\epsilon_1 + \Delta\epsilon_1)] & \epsilon_1 + \Delta\epsilon_1 < \epsilon < \epsilon_2 \\ P_2 & \epsilon_2 < \epsilon < \epsilon_2 + \Delta\epsilon_2 \\ P_2 + s_2[\epsilon - (\epsilon_2 + \Delta\epsilon_2)] & \epsilon < \epsilon_2 + \Delta\epsilon_2 \end{cases} \quad (2.5)$$

donde  $P_1$  es la presión a la que ocurre la primera transición de fase entre materia hadrónica y materia de quarks,  $P_2$  es la presión de la segunda transición de fase entre 2 estados de la materia de quarks ( $2SC$  y  $CFL$ ),  $\Delta\epsilon_1$  es el salto en la densidad de energía cuando ocurre la primera transición,  $\Delta\epsilon_2$  es el salto en la densidad de energía cuando ocurre la segunda transición de fase,  $s_1$  y  $s_2$  son las velocidades del sonido al cuadrado correspondiente a la fase  $2SC$  y  $CFL$  respectivamente. En la figura 2.6 se muestra gráficamente el tipo de EdE que genera esta parametrización.

## 2.2. Ecuaciones TOV

En una EN la relatividad general produce efectos importantes sobre la estructura estelar. Para obtener dicha estructura se requiere resolver las ecuaciones de Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} , \quad (2.6)$$

donde  $G_{\mu\nu}$  es el tensor de curvatura de Einstein,  $R_{\mu\nu}$  es el tensor de curvatura de Ricci,  $R$  es el escalar de curvatura de Ricci,  $g_{\mu\nu}$  es el tensor métrico y  $T_{\mu\nu}$  es el tensor momento-energía. El escalar de Ricci surge de la contracción del tensor de Ricci

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} , \quad (2.7)$$

donde las componentes del tensor de Ricci son la contracción en un índice covariante y otro contravariante del tensor de curvatura de Riemann ( $R_{\mu\beta\nu}^{\alpha}$ ),

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}^{\alpha} = \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^{\alpha} + \Gamma_{\beta\alpha}^{\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^{\beta} - \Gamma_{\beta\mu}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\nu}^{\beta} , \quad (2.8)$$

donde  $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$  son los símbolos de Christoffel que vienen dados por

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} [g_{\alpha\nu,\beta} + g_{\beta\nu,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu}] , \quad (2.9)$$

donde la coma (,) indica la derivada parcial respecto del índice a su derecha ( $_{,\beta} \equiv \frac{\partial}{\partial\beta}$ ) y utilizamos el convenio de suma de Einstein.

Según el teorema de Birkhoff, la descripción más general fuera de una estrella no rotante con simetría esférica está dada por la solución de Schwarzschild que es una solución exacta de las ecuaciones de Einstein del campo gravitatorio cuyo elemento de línea está caracterizado por:

$$ds^2 = -e^{2\phi(r)} dt^2 + e^{2\lambda(r)} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 , \quad (2.10)$$

siendo

$$e^{2\phi(r)} = e^{-2\lambda(r)} = 1 - \frac{2M}{r} , \quad (2.11)$$

donde  $M$  es la masa de la fuente.

Sin embargo, dentro de una estrella se debe considerar una métrica más general que describa un perfil de presión y densidad estática. La métrica independiente del tiempo mas general para el interior estelar está dada por:

$$ds^2 = -e^{2\phi(r)} dt^2 + e^{2\lambda(r)} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 , \quad (2.12)$$

siendo

$$e^{2\phi(r)} = e^{-2\lambda(r)} = 1 - \frac{2m(r)}{r} , \quad (2.13)$$

donde hemos usado el sistema de unidades geométrico descrito en el apéndice A en el que  $G = 1$  y  $c = 1$ .

Si consideramos que la materia en la estrella es un fluido perfecto, el tensor

de momento-energía viene dado por:

$$T_{\mu\nu} = (\epsilon(r) + P(r))U_\mu U_\nu + P(r)g_{\mu\nu} , \quad (2.14)$$

donde  $P$ ,  $\epsilon$  y  $U_\mu$  son la presión, densidad de energía y tetravelocidad respectivamente.

Dada la métrica (2.12) podemos calcular los símbolos de Christoffel,  $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ , el tensor de Ricci,  $R_{\mu\nu}$ , el tensor de Einstein,  $G_{\mu\nu}$ , y el tensor momento-energía,  $T_{\mu\nu}$ .

Los símbolos de Christoffel no nulos independientes son

$$\Gamma_{tr}^t = \phi'(r) , \quad \Gamma_{tt}^r = \phi'(r) \left( 1 - \frac{2m(r)}{r} \right) , \quad \Gamma_{rr}^r = \frac{rm'(r) - m(r)}{r^2 - 2rm(r)} , \quad \Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{r\phi}^\phi = \frac{1}{r} ,$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = \csc^2 \theta , \quad \Gamma_{\phi\phi}^r = 2m - r , \quad \Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\csc^2 \theta , \quad \Gamma_{\theta\phi}^\phi = -\sen \theta \cos \theta ,$$

donde las variables primadas indicas derivadas respecto de  $r$  ( $\phi' \equiv \frac{d\phi}{dr}$ ). De la ecuación (2.2) las componentes no nulas del tensor de Ricci son

$$R_{tt} = e^{2\phi(r)} \left[ (\phi''(r) + \phi'(r)^2) \left( 1 - \frac{2m(r)}{r} \right) + \phi'(r) \left( \frac{2r - 3m(r) - rm'(r)}{r^2} \right) \right] ,$$

$$R_{rr} = \left( 1 - \frac{2m(r)}{r} \right)^{-1} \left[ \frac{(rm'(r) - m(r))(2 + r\phi'(r))}{r^3} \right] - \phi''(r) - \phi'(r)^2 ,$$

$$R_{\theta\theta} = \csc^2 \theta , \quad R_{\phi\phi} = (2m(r) - r)\phi'(r) + m'(r) + \frac{m(r)}{r} .$$

Por lo tanto el escalar de Ricci es

$$R = 2 \left[ \frac{2m'(r)}{r^2} + \phi'(r)(3m(r) - 2r + rm'(r)) - \left( 1 - \frac{2m(r)}{r} \right) (\phi''(r) + \phi'(r)^2) \right]$$

Como  $U_\mu = (e^{-\phi(r)}, 0, 0, 0)$  en equilibrio entonces la componente  $tt$  del tensor momento-energía es

$$T_{tt} = \epsilon(r)e^{2\phi(r)} . \quad (2.15)$$

Por lo tanto, la componente  $tt$  del tensor de Einstein es

$$G_{tt} = \frac{2m'(r)e^{2\phi(r)}}{r^2} = 8\pi\epsilon(r)e^{2\phi(r)} \quad \rightarrow \quad m'(r) = 4\pi r^2 \epsilon(r) . \quad (2.16)$$

La componente  $rr$  del tensor momento-energía es

$$T_{rr} = \left( 1 - \frac{2m(r)}{r} \right)^{-1} P(r) . \quad (2.17)$$

Por lo tanto, la componente  $rr$  del tensor de Einstein es

$$G_{rr} = \frac{2}{r} \left( \phi'(r) - \frac{m(r)}{1 - 2m(r)/r} \right) = \frac{8\pi P(r)}{1 - 2m(r)/r} , \quad (2.18)$$

$$\rightarrow \phi'(r) = \frac{m(r) + 4\pi r^3 P(r)}{r(r - 2m(r))} . \quad (2.19)$$

Para utilizar la aproximación relativista de Cowling es necesario tener calculada la función  $\phi(r)$  de manera correcta<sup>2</sup>. Por último, utilizamos la ley de conservación del tensor momento-energía  $T_{\mu\nu}$ . La derivada covariante representada con el símbolo  $\nabla$  son funciones de las derivadas parciales pero de manera independiente de las coordenadas. De este modo, la invarianza del tensor momento-energía implica que  $\nabla_\nu T^{r\nu} = T_{;\nu}^{\mu\nu} = 0$ , y calculando la componente  $r$  obtenemos una ecuación diferencial para la presión

$$\begin{aligned} 0 = \nabla_\nu T^{r\nu} &= \frac{\partial T^{r\nu}}{\partial x^\nu} + T^{\sigma\nu} \Gamma_{\sigma\nu}^r + T^{r\sigma} \Gamma_{\sigma\nu}^\nu \\ &= \frac{\partial T^{rr}}{\partial r} + T^{tt} \Gamma_{tt}^r + T^{rr} \Gamma_{rr}^r + T^{\theta\theta} \Gamma_{\theta\theta}^r + T^{\phi\phi} \Gamma_{\phi\phi}^r + T^{r\nu} \Gamma_{r\nu}^\nu \\ &= \left( 1 - \frac{2m(r)}{r} \right) [P'(r) + (P(r) + \epsilon(r))\phi'(r)] , \\ &\rightarrow P'(r) = -(\epsilon(r) + P(r))\phi'(r) . \end{aligned} \quad (2.20)$$

A partir de estos cálculos deducimos que las ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) son

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \epsilon(r) , \quad (2.21)$$

$$\frac{dP(r)}{dr} = -[\epsilon(r) + P(r)] \frac{m(r) + 4\pi r^3 P(r)}{r(r - 2m(r))} . \quad (2.22)$$

La ecuación 2.21 describe la ley de continuidad de la masa y la ecuación 2.22 representa el equilibrio hidrostático entre la atracción gravitatoria y la presión de la materia. Junto con la EdE y las condiciones de contorno

$$P(R) = 0 , \quad (2.23)$$

$$m(0) = 0 , \quad (2.24)$$

---

<sup>2</sup>Esto quiere decir que cumpla la condición de borde en  $r = R$  de modo que  $\phi(R) = 1 - \frac{2M}{R}$

nos permiten resolver el sistema de ecuaciones diferenciales acopladas y obtener, para una dada densidad de energía central, la estructura de la estrella y, por lo tanto, relaciones tales como Masa-Radius. Es importante volver a remarcar que el sistema de ecuaciones diferenciales acopladas solo puede resolverse si se conoce la relación entre la presión y la densidad de energía,  $P(\epsilon)$ , es decir, la EdE.

### 2.2.1. Deformabilidad de marea

Por otro lado, también se estudió otro parámetro interesante en EHs denominado deformabilidad de marea,  $\lambda$ . La deformabilidad de marea describe cuanto puede deformarse un cuerpo por fuerzas de marea producidas por un campo gravitatorio externo. Esta magnitud determina, en gran medida, la señal de la OG antes de la colisión, en el proceso de fusión de dos ENs. Por eso resulta de especial importancia en la astronomía de OG de ENs. A primer orden,  $\lambda$  es proporcional al número de Love adimensional,  $k_2$ , asociado con la perturbación cuadrupolar  $l = 2$

$$\lambda = \frac{2}{3}k_2R^5 . \quad (2.25)$$

La deformabilidad de marea adimensional,  $\Lambda$  se define como

$$\Lambda = \lambda/M^5 , \quad (2.26)$$

donde  $R$  y  $M$  son el radio y la masa de la estrella. El número  $k_2$  puede ser expresado en términos de la compacticidad ( $\beta = M/R$ ) y una cantidad  $y$ , que se define como  $y \equiv y(r)|_{r=R}$ , por medio de la relación

$$\begin{aligned} k_2 = & \frac{8\beta^5}{5}(1 - 2\beta)^2[2 + 2\beta(y - 1) - y] \times \{2\beta[6 - 3y + 3\beta(5y - 8)] + \\ & + 4\beta^3[13 - 11y + \beta(3y - 2) + 2\beta^2(1 + y)] + 3(1 - 2\beta)^2[2 - y + \\ & + 2\beta(y - 1)] \ln(1 - 2\beta)\}^{-1} . \end{aligned} \quad (2.27)$$

La función  $y(r)$  es solución de la ecuación diferencial de primer orden

$$ry'(r) + y(r)^2 + y(r)e^{\lambda(r)}[1 + 4\pi r^2[P(r) - \epsilon(r)]] + r^2Q(r) = 0 , \quad (2.28)$$

donde  $Q(r)$  está dado por

$$Q(r) = 4\pi e^{\lambda(r)} \left[ 5\epsilon(r) + 9P(r) + \frac{\epsilon(r) + P(r)}{dP/d\epsilon} \right] - 6\frac{e^{\lambda(r)}}{r^2} - \left( \frac{d\phi(r)}{dr} \right)^2 . \quad (2.29)$$

Cuando existen transiciones de fase de primer orden dentro de las estrellas, es decir, EdEs discontinuas en  $r = r_t$ , tenemos que pegar adecuadamente la solución

$y(r)$  en  $r_t^+$  y  $r_t^-$ . La condición de borde adicional viene dada por

$$y(r_t^+) = y(r_t^-) - \frac{4\pi r_t^3 [\epsilon(r_t^+) - \epsilon(r_t^-)]}{m(r_t)}. \quad (2.30)$$

Para configuraciones esféricamente simétricas, eligiendo la EdE,  $P(\epsilon)$ , y el valor de la presión central,  $P_{cent}$ , se puede obtener  $k_2$  y la deformabilidad de marea resolviendo, simultáneamente, la ecuación (2.28) y las TOV.

Los resultados obtenidos podrán ser comparados con aquellos provenientes de analizar la señal del evento GW170817 que han puesto fuertes restricciones en la deformabilidad de marea adimensional,  $\Lambda$ , para una EN de  $1,4M_\odot$ ,  $\Lambda_{1,4} \leq 800$  (Abbott y et al., 2017a; Annala et al., 2018; Most et al., 2018; Raithel et al., 2018).

### 2.2.2. Criterio de estabilidad

Para estudiar la estabilidad de las ENs debemos analizar la respuesta de las mismas a las perturbaciones radiales. Las oscilaciones radiales preservan la simetría esférica de la estrella, mientras que las oscilaciones no radiales deforman la estrella alejándola de la simetría esférica y emitiendo así OG (Chandrasekhar, 1964).

Para obtener el límite de estabilidad, se perturba la solución de la estrella en el equilibrio estelar. Para eso, la componente radial de la tetra-velocidad del fluido debe ser no nula. Además  $\lambda$ ,  $\phi$ ,  $P$  y  $\epsilon$  son perturbadas por lo que, a primer orden

$$\lambda(r, t) = \lambda_0(r) + \delta\lambda(r, t) , \quad (2.31)$$

$$\phi(r, t) = \phi_0(r) + \delta\phi(r, t) , \quad (2.32)$$

$$P(r, t) = P_0(r) + \delta P(r, t) , \quad (2.33)$$

$$\epsilon(r, t) = \epsilon_0(r) + \delta\epsilon(r, t) , \quad (2.34)$$

donde el subíndice 0 refiere al parámetro no perturbado y  $\lambda_0$ ,  $\phi_0$ ,  $P_0$  y  $\epsilon_0$  son calculados a partir de las ecuaciones TOV. Se calculan las componentes del tensor momento-energía y al reemplazar en la ecuación de Einstein se obtienen las expresiones para todas las perturbaciones excepto para  $\delta P$ . El cálculo de esta última en función del vector desplazamiento Lagrangiano se obtiene utilizando la conservación del número bariónico. Supongamos, ahora, que todas las perturbaciones dependen de  $t$  de la forma  $e^{i\omega t}$  donde  $w$  es una frecuencia característica a

determinar. Luego de operar algebraicamente se llega a la ecuación de pulsación

$$w^2 e^{\lambda_0 - \phi_0} (P_0 + \epsilon_0) \xi = \frac{4}{r} \frac{dP_0}{dr} \xi - e^{-(\lambda_0 + 2\phi_0)/2} \frac{d}{dr} \left[ e^{(\lambda_0 + 3\phi_0)/2} \frac{\gamma P_0}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 e^{-\phi_0/2} \xi) \right] + \frac{8\pi G}{c^4} e^{\lambda_0} P_0 (P_0 + \epsilon_0) \xi - \frac{1}{P_0 + \epsilon_0} \left( \frac{dP_0}{dr} \right)^2 \xi, \quad (2.35)$$

cuyas soluciones deber satisfacer las condiciones de borde

$$\xi(r = 0) = 0, \quad (2.36)$$

$$\delta P(r = R) = 0. \quad (2.37)$$

La idea es hallar los valores de  $w^2$  para los cuales la ecuación 2.35 tenga solución no trivial. Esto es un problema de autovalores de Sturm-Liouville en el cual:

- Todas las frecuencias ( $w_0, w_1, w_2, \dots$ ) son reales.
- Los autovalores forman una secuencia infinita y discreta  $w_0^2 < w_1^2 < w_2^2 < \dots$
- $w_0$  es la frecuencia del modo fundamental.
- $w_1, w_2, \dots$  son las frecuencias del primer sobretono, segundo sobretono,....

Si alguno de los autovalores  $w_n^2$  es negativo entonces la frecuencia es imaginaria y cualquier perturbación a la estrella crece exponencialmente con  $e^{|w|t}$  y, por lo tanto, es inestable. En cambio, si todos los autovalores son positivos, la frecuencia es real y frente a una perturbación la estrella oscila con  $e^{iwt}$  y dicha estrella es estable. Notar que si la frecuencia del modo fundamental es positivo  $w_0^2 > 0$ , y por lo tanto estable, entonces todos los modos son estables.

Las estrellas modeladas como fluido perfecto pueden pasar de la estabilidad a la inestabilidad con respecto a cualquier modo radial de oscilación solo cuando  $\partial M(\epsilon_c)/\partial \epsilon_c = 0$ . Se puede demostrar que cuando  $w_0^2 > 0 \Rightarrow dM(\epsilon_c)/d\epsilon_c > 0$ .

Sin embargo, existe un método para determinar el número de modos inestables analizando la forma de las curvas  $M(R)$  (Harrison et al., 1965).

- A cada punto crítico en la curva  $M(R)$ , uno y solo un modo radial cambia su estabilidad, ya sea de estable a inestable o viceversa.
- No hay cambios de estabilidad asociados a pulsaciones radiales en otros puntos de la curva  $M(R)$ .
- Un modo se vuelve inestable sí y solo sí la curva  $M(R)$  gira en sentido antihorario en un punto crítico.

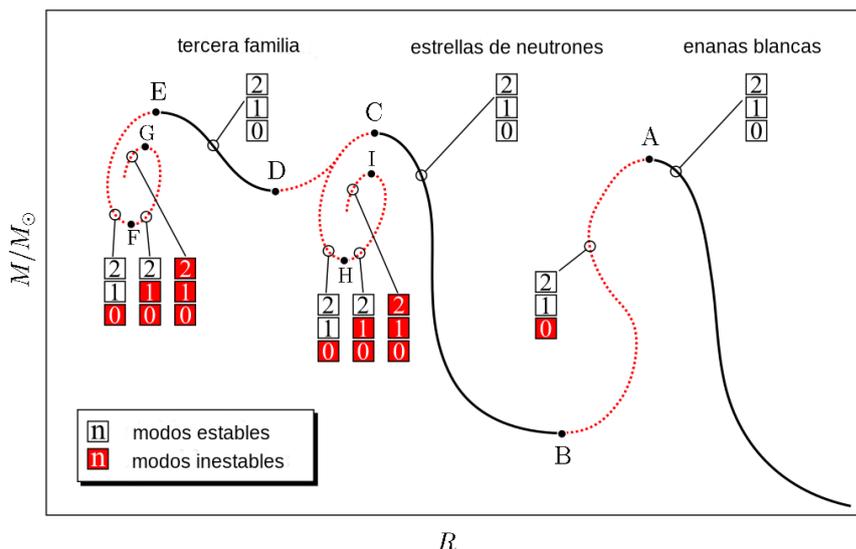


Figura 2.7: Gráfico  $M(R)$  de análisis de estabilidad de modos. Las líneas sólidas refieren a ramas estables mientras que las líneas punteadas refieren a ramas inestables. Una rama estable corresponde a las enanas blancas, otra a las ENs y otra a una tercera familia de objetos compactos todavía en discusión. En cada punto crítico se estabiliza un modo si la curva gira en sentido antihorario y se estabiliza si gira en sentido horario. El 0, 1 y 2 son el modo fundamental, primer modo y segundo modo excitado respectivamente. Cuando son blanco son estables y cuando son rojos son inestables. Imagen extraída y traducida de las notas del curso de posgrado “Astrofísica de Estrella de Neutrones” dictado por el Dr. Germán Lugones.

- Un modo se vuelve estable sí y solo sí la curva  $M(R)$  gira en sentido horario en un punto crítico.

Esto puede observarse en la figura 2.7 donde existen tres ramas estables, una correspondiente a las enanas blancas, otra correspondiente a las ENs y podría existir una tercera familia de objetos compactos de la que aun no hay certeza de su existencia. En este caso haremos un análisis correspondiente a la rama de las ENs aunque es análogo para las otras dos ramas. Dejamos que los segmentos de menor densidad sean estables para todos los modos radiales. En el punto crítico C, el modo fundamental se vuelve inestable ya que la curva  $M(R)$  gira en sentido antihorario y entonces las estrellas en esa rama se vuelven inestables. Si la curva  $M(R)$  sigue hacia el punto crítico H, la curva  $M(R)$  gira en sentido antihorario y, no solo el modo fundamental no recupera la estabilidad, sino que además se vuelve inestable el primer sobretono. Luego, en el punto crítico I, el segundo sobretono se inestabiliza. Por el contrario, si la curva  $M(R)$  sigue hacia el punto crítico D, como la curva gira en sentido horario, el modo fundamental recupera la estabilidad y la estrella vuelve a ser estable.

# Capítulo 3

## Ondas gravitacionales y Oscilaciones no radiales

### 3.1. Ondas gravitacionales

La teoría de la relatividad general de Einstein es una teoría de campos en la que el espacio-tiempo determina el movimiento de la materia/energía; y la materia/energía determina la curvatura del espacio-tiempo. Para definir distancias dentro del espacio-tiempo se utilizan tensores métricos que varían dependiendo de la curvatura del mismo. La métrica de Minkowski representa un espacio-tiempo con curvatura nula y puede expresarse matricialmente como

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

En este caso, el tensor de curvatura de Riemann del espacio-tiempo de Minkowski es idénticamente nulo, razón por la cual se dice que el espacio-tiempo es plano. Así, el resto de tensores (ecuación 2.2) y escalares de curvatura (ecuación 2.7) resultan nulos, siendo también nulo el tensor de Einstein que es igual al tensor momento-energía (ecuación 2.6). Por tanto, el espacio-tiempo de Minkowski representa un universo vacío.

En presencia de un campo gravitatorio, pero en el límite de campo débil, la métrica puede ser expresada como una descomposición en una métrica de fondo plana (Minkowski) y una pequeña perturbación (Carroll, 2019)

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad , \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1 . \quad (3.1)$$

Con esta métrica dada, al resolver las ecuaciones de campo de Einstein descriptas en la sección 2.2

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} , \quad (3.2)$$

se encuentra que las soluciones en el vacío son ondas gravitatorias (OG) que se interpretan como ondas que viajan a través de la curvatura del espacio-tiempo a la velocidad de la luz y cuya amplitud decae con la distancia, volviéndose muy débiles a medida que atraviesan el Universo. Por ejemplo, la fusión de dos ENs o agujeros negros, generan cambios en la curvatura del espacio-tiempo por lo que son una de las posibles fuentes de OG, las cuales se llevan la energía de estos sistemas. Al observar OG directamente se puede obtener información relacionada con parámetros del objeto emisor, tales como su masa y radio, entre otros. Esto ofrece oportunidades con un gran potencial para determinar restricciones en la EdE en el interior de este tipo de objetos compactos.

### 3.1.1. Fuentes de emisión de OG

Una gran variedad de objetos y eventos astronómicos producen OG. Dependerá de la precisión del equipo para poder detectarlas. Algunas de las fuentes de emisión de OG son (Schutz, 1996):

- La fusión de objetos compactos:
  - EN - EN.
  - EN - agujero negro.
  - agujero negro - agujero negro.
- EN aislada pulsantes.
- La explosión de una supernova y colapso gravitacional.
- Cuerpos masivos no homogéneos rotando a gran velocidad.
- Radiación gravitacional remanente del Big Bang.
- Enanas blancas aisladas pulsantes (García-Berro et al., 2006).

Actualmente solo se ha logrado detectar de modo directo aquellas emitidas como consecuencia de sucesos que disipan una cantidad muy elevada de energía. Por esto, solo se ha podido detectar radiación gravitacional que sea producto de la fusión de ENs y agujeros negros.

La primera observación directa de OG se logró el 14 de septiembre de 2015 por el detector de OG LIGO. Tras un análisis minucioso de los resultados, se

anunció el descubrimiento al público el 11 de febrero de 2016, cien años después de que Einstein predijera la existencia de las OG (Abbott y et al., 2016). La detección de OG constituye una nueva e importante validación de la teoría de la relatividad general. Sin embargo, la primera evidencia observacional indirecta de su existencia se obtuvo en 1974, a partir de observaciones del pulsar binario de Hulse-Taylor (Hulse y Taylor, 1975), cuya órbita evoluciona exactamente como se esperaría si emitiera OG (Taylor et al., 1979).

No solo se detectaron OG provenientes de la fusión de agujeros negros, sino que además el 17 de agosto de 2017 se detectó la primer señal de OG proveniente de la fusión de dos ENs. Este evento denominado GW170817 fue observado por los detectores LIGO y Virgo (Abbott y et al., 2017b). Al ocurrir la colisión, se emitió un destello de luz en forma de rayos gama que se detectó en la Tierra  $\sim 2$  segundos después de la detección de las OG (Abbott y et al., 2017a). Esto sirvió para restringir la diferencia entre la velocidad de la luz en el vacío,  $c$ , y la velocidad de la gravedad,  $c_g$ , una diferencia determinada entre  $-3 \times 10^{-15} < (1 - c_g/c) < 7 \times 10^{-16}$  (Abbott y R. Abbott et al., 2017). Es la primera vez que se ha visto un evento cósmico tanto en OG como electromagnéticas, marcando el inicio de la astronomía multimensajera con ondas de gravedad.

Una posible fuente de OG que hemos nombrado son las ENs aisladas, que se ven perturbadas por innumerables factores y por este motivo comienzan a oscilar. En este trabajo, nos enfocamos en EHs no rotantes, con doble transición de fase y estudiamos los modos de oscilación no radiales bajo la aproximación relativista de Cowling.

Si bien las frecuencias de oscilación halladas se encuentran dentro de la región de la sensibilidad de LIGO (de  $\sim 10\text{Hz}$  a  $\sim 1000\text{Hz}$ ), las mismas no pueden detectarse actualmente debido a que la intensidad de la onda es mas baja que la que se puede detectar. Teniendo en cuenta el contexto astrofísico, por ejemplo, un evento típico de supernova de colapso del núcleo libera alrededor de  $10^{53}$  erg. Para el detector de ondas gravitacionales LIGO, la energía mínima necesaria para que las ondas gravitacionales provenientes de oscilaciones no radiales de ENs puedan ser detectadas es, para el modo  $g$ , del 90% del total de la energía liberada en un evento de supernova. Sin embargo, cuando el telescopio Einstein se ponga en funcionamiento, al tener mayor sensibilidad, la energía mínima necesaria para detectarlo será del 10% del total de la energía, por lo que esta situación resulta mucho más alentadora. Si bien no se conoce qué porcentaje de la energía disipada en OG se canaliza en cada modo, se espera que con la próxima generación de detectores de ondas gravitacionales se puedan observar y, de este modo, obtener restricciones a la EdE que describe el interior de una estrella compacta.

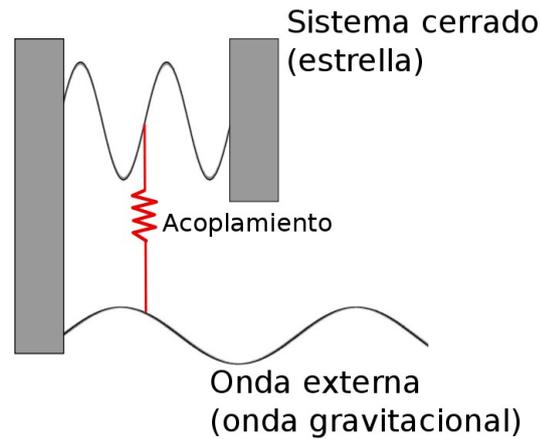


Figura 3.1: Representación del acoplamiento de una estrella relativista con las OG. La cuerda de longitud finita representa una estrella, el resorte representa el acoplamiento y la cuerda de longitud infinita representa las oscilaciones del espacio-tiempo. Imagen basada en la presentada en Schutz (2008).

### 3.2. Oscilaciones no radiales

Las oscilaciones no radiales de estrellas no rotantes emiten OG siempre y cuando tengan momentos cuadrupolares gravitacionales no nulos, es decir cuando la perturbación asociada con  $l \geq 2$  (siendo  $l$  el índice del armónico esférico en los que se descompone a la perturbación) no sea nula. El caso  $l = 2$  se corresponde con modos cuadrupolares. En general, la emisión mas fuerte se da con  $l = 2$ , por lo que concentraremos nuestra atención a este caso. En este contexto, no solo la estrella “vibra”, sino que también lo hace el espacio-tiempo por lo que se puede pensar que existen dos sistemas dinámicos acoplados. Por esto, las frecuencias propias de los modos habituales (modos de fluido) son modificadas frente a aquellas en las que no se da este acoplamiento a OG. Y este acoplamiento incluso crea nuevas familias de modos (modos  $w$ ). Para entender el efecto principal de este acoplamiento y el motivo por el cual las frecuencias de los modos de oscilación son frecuencias complejas, es útil considerar un sistema con una dinámica simple como el que se ilustra en la figura 3.1, que comparte algunas de las propiedades centrales de una EN emitiendo OG.

Este análogo mecánico consiste en dos cuerdas, una de longitud finita (la estrella) y el otra de longitud semi-infinita (el espacio-tiempo externo). Estos están unidos por un resorte, cuya rigidez representa cuán relativista es el sistema: cuanto más fuerte es el resorte, más eficaz es la transmisión de la perturbación de la cuerda finita a la cuerda infinita). Para describir emisión de OG, debe imponerse, en la cuerda semi-infinita la condición de borde de onda saliente, como dicha condición no es simétrica en el tiempo se obtiene que sus autovalores no pueden ser reales. Para este sistema mecánico existen un conjunto de frecuencias que no

excitan la onda semi-infinita dado que poseen un nodo en el punto donde está el acoplamiento. Si se consideran los demás casos, existe una familia cuya parte imaginaria decrece si lo hace la constante del resorte y otra -que da origen a modos completamente nuevos llamados modos  $w$  o espaciotemporales- donde el comportamiento de la parte imaginaria es el contrario. En ausencia del acoplamiento, la cuerda finita tiene los modos habituales, y si el acoplamiento es débil, el sistema gana una clase de modos completamente nueva (modos  $w$ ). Estos modos, tanto los de fluido como los  $w$ , se denominan ‘Quasinormal modes’ (QNMs) y son modos de disipación de energía. Describen perturbaciones de un campo que decae con el tiempo y las frecuencias propias de estos modos son cantidades complejas cuya parte real,  $\omega$ , corresponde a la frecuencia de oscilación y la parte imaginaria,  $\tau$ , a la tasa de amortiguación.

Los modos de fluido ( $f, p, g$ , etc.) (Kokkotas y Schmidt, 1999), están relacionados principalmente con perturbaciones en el fluido y los modos  $w$  o espaciotemporales ( $w$ ,  $wII$ , etc.) (Kokkotas y Schutz, 1992), son oscilaciones de la métrica del espacio-tiempo. Es importante mencionar que en los modos espaciotemporales las perturbaciones al fluido son pequeñas y viceversa.

Los modos de fluido más importantes relacionados con la emisión de ondas gravitacionales son los modos de presión ( $p$ ), el modo fundamental ( $f$ ) y los modos de gravedad ( $g$ ). Los modos  $p$  tienen mayores frecuencias que los modos  $g$ , y sus familias son separadas por el modo  $f$ . Además, existe sólo un modo  $f$  para cada índice  $l$  del armónico esférico, mientras que existen infinitos modos  $p$  y  $g$  (Kokkotas y Schmidt, 1999). Es importante mencionar que la frecuencia del modo  $g$  puede ser real, imaginaria o cero, dependiendo de la estabilidad convectiva del modelo estelar utilizado (Miniutti et al., 2003). Analizando el cuadrado de la frecuencia de Brunt-Väisälä se pueden distinguir diferentes regímenes.

$$N^2 = \frac{1}{2} e^{\nu-\lambda} \nu' \frac{p'}{p} \left( \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma_0} \right), \quad \text{con} \quad \gamma_0 = \frac{\rho + p p'}{p \rho'} \quad (3.3)$$

donde  $\gamma$  es el índice adiabático y  $\gamma_0$  es índice de equilibrio. Un valor de  $N$  real, imaginario o cero corresponde a estabilidad convectiva, inestabilidad e inestabilidad marginal, respectivamente. Si la estrella es isoentrópica y químicamente homogénea,  $\gamma = \gamma_0$  y entonces  $N^2 = 0$ , por lo que la frecuencia del modo  $g$  es cero. Por eso, en el caso de temperatura cero y potencial químico homogéneo, como es el caso de la EN,  $N$  es cero en todos lados excepto cuando la densidad cambia abruptamente en  $r = r_t$ . En ese punto, el índice adiabático  $\gamma$  se vuelve finito, y el índice de equilibrio  $\gamma_0$  se hace cero,  $N$  es diferente de cero y el modo  $g$  aparece. Por esta razón, en estrellas frías y sin rotación, la aparición del modo  $g$  es un indicador inequívoco de la existencia de una transición de fase abrupta

en el interior de la EN, ya que dichos modos resultan completamente inhibidos si en la EdE no hay discontinuidades (Finn, 1987). En este sentido, si bien existen otros efectos que excitan diferentes familias de modos  $g$ , debemos remarcar que los mismos podrían diferenciarse observacionalmente de aquellos producidos por discontinuidades en la EdE. Ver, por ejemplo, Miniutti et al. (2003) y Lugones (2016) donde se analizan los modos  $g$  generados al considerar efectos como la superfluidez, la rotación y la existencia de campos magnéticos intensos en el interior de la EN.

Para poder estudiar los modos de oscilación de un cuerpo esféricamente simétrico en reposo necesitamos introducir perturbaciones a la métrica y al fluido. Se utiliza la misma idea que en la ecuación 3.1 pero sin considerar el espacio-tiempo plano sino que ahora consideramos el espacio-tiempo en presencia de una estrella. La métrica perturbada estará dada por

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(F)} + h_{\mu\nu} \quad , \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1 \quad , \quad (3.4)$$

donde  $g_{\mu\nu}^{(F)}$  es la métrica de fondo correspondiente a la métrica de Schwarzschild descrita en la sección 2.2 y  $h_{\mu\nu}$  es la perturbación. Sus expresiones matriciales vienen dadas por

$$g_{\mu\nu}^{(B)} = \begin{pmatrix} -e^{2\phi(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\lambda(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \text{sen}^2 \theta \end{pmatrix} y$$

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} H_0 e^{2\phi(r)} & H_1 & 0 & 0 \\ H_1 & H_2 e^{2\lambda(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 K \text{sen}^2 \theta \end{pmatrix} Y_{lm}(\theta, \phi) \quad ,$$

donde  $H_0$ ,  $H_1$ ,  $H_2$  y  $K$  son funciones de  $t$  y de  $r$  y  $Y_{lm}$  son los armónicos esféricos. Las ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento de dichas funciones pueden escribirse como

$$\begin{aligned}
 H_1' &= -r^{-1} [l + 1 + 2Me^\lambda r^{-1} + 4\pi r^2 e^\lambda (P - \epsilon)] H_1 + r^{-1} e^\lambda [H_0 + K \\
 &\quad - 16\pi(\epsilon + P)V(r)] , \\
 K' &= r^{-1} H_0 + \frac{1}{2} l(l+1) r^{-1} H_1 - \left[ (l+1)r^{-1} - \frac{1}{2} \phi' \right] K - 8\pi(\epsilon + P) e^{\lambda/2} r^{-1} W(r) , \\
 W' &= - (l+1)r^{-1} W(r) + r e^{\lambda/2} \left[ \gamma^{-1} P^{-1} e^{-\phi/2} X - l(l+1)r^{-2} V(r) + \frac{1}{2} H_0 + K \right] , \\
 X' &= -lr^{-1} X + (\epsilon + p) e^{\phi/2} \left\{ \frac{1}{2} \left( r^{-1} - \frac{1}{2} \phi' \right) H_0 + \frac{1}{2} \left[ r\omega^2 e^{-\phi} + \frac{1}{2} l(l+1)r^{-1} \right] H_1 \right. \\
 &\quad + \frac{1}{2} (2\phi' - r^{-1}) K - \frac{1}{2} l(l+1) \phi' r^{-2} V - r^{-1} \left[ 4\pi(\epsilon + P) e^{\lambda/2} + \omega^2 e^{\lambda/2 - \phi} \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{1}{2r^2} (r^{-2} e^{-\lambda/2} \phi') \right] W \right\}
 \end{aligned}$$

donde  $\gamma$  es el índice adiabático y donde  $W(r)$  y  $V(r)$  son funciones de  $r$  que caracterizan la perturbación al fluido (para más detalles, ver Detweiler y Lindblom, 1985). La perturbación al fluido está descrita por el vector desplazamiento Lagrangiano:

$$\begin{aligned}
 \xi^r &= \frac{1}{r^2} e^{-\lambda(r)} W(r) Y_{lm}(\theta, \phi) , \\
 \xi^\theta &= -\frac{1}{r^2} V(r) \frac{\partial}{\partial \theta} Y_{lm}(\theta, \phi) , \\
 \xi^\phi &= -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} V(r) \frac{\partial}{\partial \theta} Y_{lm}(\theta, \phi) ,
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

donde  $\xi^r$ ,  $\xi^\theta$  y  $\xi^\phi$  son las componentes del vector desplazamiento (Thorne y Campolattaro, 1967).

### 3.2.1. Aproximación Relativista de Cowling

Para estudiar los modos no radiales de oscilación del fluido en el interior de las EHs se puede utilizar la aproximación relativista de Cowling (ver, por ejemplo, Finn, 1988). Con esta aproximación, que desprecia las perturbaciones al espacio-tiempo de fondo, se obtienen valores para las frecuencias de oscilación que difieren en menos de un 20 % de los valores obtenidos utilizando las ecuaciones linealizadas de la relatividad general (ver Vásquez Flores y Lugones (2014); Chirenti et al. (2015); Ranea-Sandoval et al. (2018), y referencias allí mencionadas). Analizando, en particular, los errores obtenidos para el modo fundamental,  $f$ , Chirenti et al. (2015) muestran que los mismos se reducen a medida que aumenta la compacticidad de la EN. Además, si nos concentramos en los errores relacionados a los modos  $g$ , o de gravedad, dichas diferencias son menores al 5 % (Sotani et al., 2002). Por lo tanto, para los modos  $g$ , los resultados obtenidos, en el marco de la

aproximación relativista de Cowling, son cualitativa y cuantitativamente buenos, mientras que en el caso del modo fundamental, los resultados son, únicamente cualitativamente buenos.

En los casos donde las perturbaciones a la métrica son despreciables, el conjunto de ecuaciones diferenciales que son necesarias para resolver el estudio de los modos de oscilación se simplifica enormemente. Es importante remarcar que en la aproximación relativista de Cowling las ondas gravitacionales no son emitidas porque las perturbaciones a la métrica de fondo no son tenidas en cuenta. Con esta aproximación, los modos puramente gravitacionales (modos  $w$ ) no pueden ser estudiados y solo los modos del fluido pueden ser analizados. En la figura 3.1, la aproximación de Cowling implicaría ausencia del resorte, es decir que no hay acoplamiento con las OG. Por lo tanto, al no tener disipación de energía por emisión de OG, es decir que no hay perturbaciones de un campo que decae con el tiempo, no se pueden estudiar los QNMs sino que nuestro análisis se restringe a estudiar las oscilaciones estelares en las que se analizan los modos normales de oscilación.

Bajo esta aproximación, las ecuaciones necesarias para encontrar las frecuencias surgen de considerar la ley de conservación del tensor momento-energía,  $\nabla_\nu T_\mu^\nu = T_{\mu;\nu}^\nu = 0$ , con lo que se obtiene (Sotani et al., 2011):

$$\frac{dW(r)}{dr} = \frac{d\epsilon}{dP} \left[ \omega^2 r^2 e^{\lambda(r)-2\phi(r)} V(r) + \frac{d\phi(r)}{dr} W(r) \right] - l(l+1)e^{\lambda(r)} V(r) , \quad (3.6)$$

$$\frac{dV(r)}{dr} = 2 \frac{d\phi(r)}{dr} V(r) - \frac{1}{r^2} e^{\lambda(r)} W(r) , \quad (3.7)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia de oscilación.

Para resolver este sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas, con una métrica de fondo fija, debemos imponer condiciones de borde en dos puntos dentro de la estrella:

- En el origen ( $r \sim 0$ ), el comportamiento de las soluciones es de la forma

$$W(r) \sim Ar^{l+1} , \quad V(r) \sim -\frac{A}{l} r^l , \quad (3.8)$$

donde  $A$  es una constante arbitraria.

- En la superficie estelar se requiere que la perturbación Lagrangiana a la presión se anule

$$\Delta P(R) = 0 . \quad (3.9)$$

Con esto se llega a la siguiente ecuación (Sotani et al., 2011)

$$\omega^2 e^{\Lambda(R)-2\phi(R)} V(R) + \frac{1}{R^2} W(R) = 0 . \quad (3.10)$$

en la que el valor de  $w^2$  que satisfaga la ecuación es la raíz. Esta expresión puede ser generalizada al caso en el que la EdE tenga una discontinuidad en  $r = r_t$ , donde el subíndice  $t$  refiere al radio de transición. Para eso se debe considerar la condición de pegado adicional en la superficie de discontinuidad, que son las condiciones de continuidad para  $W$  y  $\Delta P$ . Estas condiciones de pegado pueden reescribirse en términos de las variables  $W$  y  $V$  del siguiente modo (Sotani et al., 2011)

$$W_+ = W_- , \quad (3.11)$$

$$V_+ = \frac{e^{2\phi}}{\omega^2 r_t^2} e^{-\lambda} \times \left( \frac{\epsilon_- + P}{\epsilon_+ + P} [\omega^2 r_t^2 e^{\lambda-2\phi} V_- + \phi' W_-] - \phi' W_+ \right) , \quad (3.12)$$

donde el subíndice  $-$  ( $+$ ) corresponde a las cantidades antes (después) de la transición de fase. Notar que cuando no hay discontinuidad en la función  $V(r)$ , resulta continua y  $V_+ = V_-$ .

### 3.3. Astrosismología de Estrellas de Neutrones

El propósito central detrás de la rama de investigación denominada astrosismología de estrellas de neutrones es lograr parametrizar la frecuencia ( $w$ ) y tiempo de amortiguación ( $\tau$ ) de los modos de oscilación en función de cantidades macroscópicas de la EN (por ejemplo, masa o radio). Más aún, buscar combinaciones de dichas cantidades que hagan que dichas parametrizaciones resulten “universales”. Es decir, independientes de la EdE utilizada para describir la materia dentro del objeto compacto. De esta forma, busca lograr restringir la parametrización de la frecuencia y el tiempo de amortiguación a una banda muy angosta para todas las EdE que se propongan, como se ilustra en las figuras 3.2 y 3.3.

Esta rama de estudio vio sus inicios hace más de dos décadas. Andersson y Kokkotas (1998) centraron su atención en el modo  $f$ . El motivo central es que dicho modo es uno de los más fácilmente excitables en los procesos de formación de una PEN en un evento supernova de colapso.

Si pudiésemos detectar la frecuencia y el tiempo de amortiguación del modo  $f$  de una EN, el ajuste de banda angosta en ambas figuras nos permitiría inferir la masa,  $M$ , y el radio,  $R$ , de la estrella con un error del 10 % o menor (Chirenti et al., 2015)<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Además, existe una propuesta de ajuste que involucra al momento de inercia,  $I$ , con el que podremos restringir el radio con error de  $\pm 1$  km. Se espera poder medir el momento de inercia

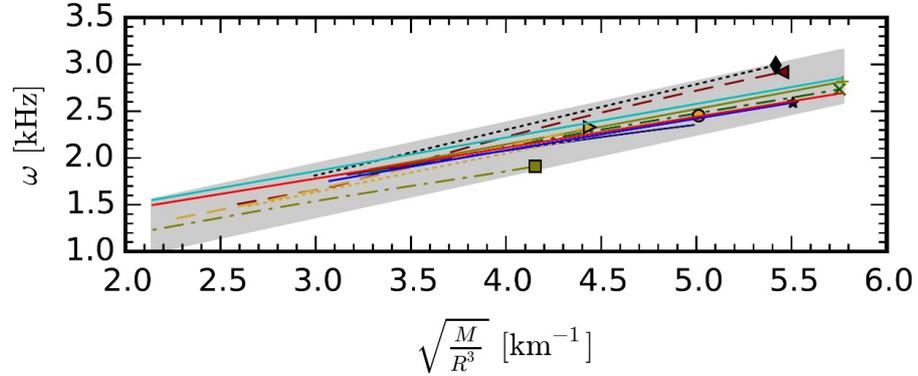


Figura 3.2: Gráfico de la frecuencia en función de cantidades macroscópicas. La parametrización utilizada restringe a todas las curvas, cada una representada por una EdE diferente, a una banda angosta. Se dice que la parametrización es universal ya que es independiente de la EdE. Imagen adaptada de Chirenti et al. (2015).

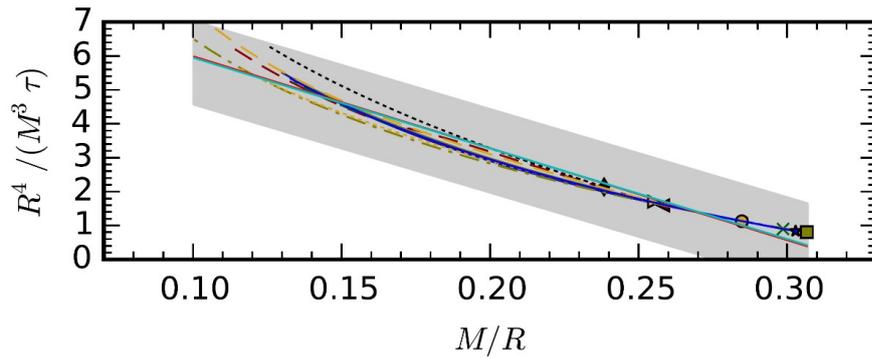


Figura 3.3: Gráfico del tiempo de amortiguación en función de cantidades macroscópicas. La parametrización utilizada restringe a todas las curvas, cada una representada por una EdE diferente, a una banda angosta. Se dice que la parametrización es universal ya que es independiente de la EdE. Imagen adaptada de Chirenti et al. (2015).

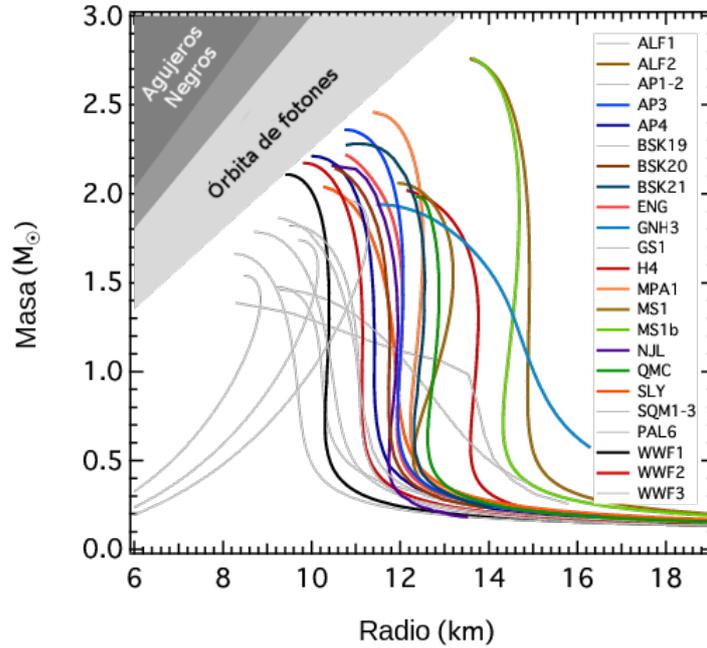


Figura 3.4: Gráfico  $M(R)$  de numerosas EdEs listadas a la derecha. Las propuestas de EdEs abarcan la gran parte del gráfico por lo que se vuelve de gran utilidad hallar parametrizaciones universales independientes de las mismas. Imagen extraída y traducida de Özel y Freire (2016).

La importancia de la astrosismología de estrellas de neutrones radica en que estimando la masa y el radio de la estrella a través de la detección del modo de oscilación podemos determinar con suficiente precisión cual es la correspondiente EdE. Como la principal incerteza es la EdE y existen una gran variedad propuestas hasta el día de hoy, algunas de las cuales se muestran en la figura 3.4, estas mediciones son de gran importancia para poder entender el comportamiento de la materia en condiciones extremas.

---

para PSR J0737-3039A en el sistema de púlsar doble dentro de los próximos cinco años (Raithel et al., 2016).

# Capítulo 4

## Resultados

Para llevar a cabo lo desarrollado anteriormente, primero se construyeron una cantidad considerable de EdEs híbridas. Luego se resolvieron las ecuaciones TOV. Como resultado de la integración se obtienen, en un archivo de salida, los valores de la masa  $M$  expresada en  $M_{\odot}$ , radio  $R$  expresado en km, el número de Love adimensional  $k_2$  y la deformabilidad de marea adimensional  $\Lambda$ . Luego, se graficaron estos parámetros utilizando el software `Gnuplot`. Después se analizaron los gráficos  $M(R)$  y  $M(\epsilon_c)$  y se seleccionaron aquellas EdEs híbridas que representaran cualitativamente el comportamiento del total de las EdEs calculadas. Para estos casos seleccionados se determinaron la frecuencia de oscilación tanto del modo  $f$  como del modo  $g$  bajo la aproximación de Cowling. Por último, se realizaron gráficos de las frecuencias como función de la masa total de la estrella,  $\omega(M)$ , que fueron analizados y comparados entre sí y con resultados previos de otros trabajos. Con estos resultados podremos ver qué efectos genera considerar la segunda transición de fase sobre las frecuencias de oscilación de los modos  $f$  y  $g$ .

### 4.1. Ecuaciones de Estado

Para la construcción de las EdEs con doble transición de fase como la que se muestra en la ecuación 2.5, se realizó un código en el que se ingresan 6 parámetros ( $P_1$ ,  $P_2$ ,  $\Delta e_1$ ,  $\Delta e_2$ ,  $s_1$  y  $s_2$ ) y con los cuales se construye la EdE híbrida. Dichos parámetros se hicieron variar sobre una lista de valores presentada en el cuadro 4.1. La elección de estos valores se realizó de tal forma de abarcar un amplio rango de posibilidades y a su vez se analizaron dos casos diferentes:

- Caso 1: Se toma de referencia el trabajo de Alford y Sedrakian (2017) y se amplía el rango de parámetros utilizado en dicho trabajo.
- Caso 2: Se toman valores para los parámetros comparables con los que se

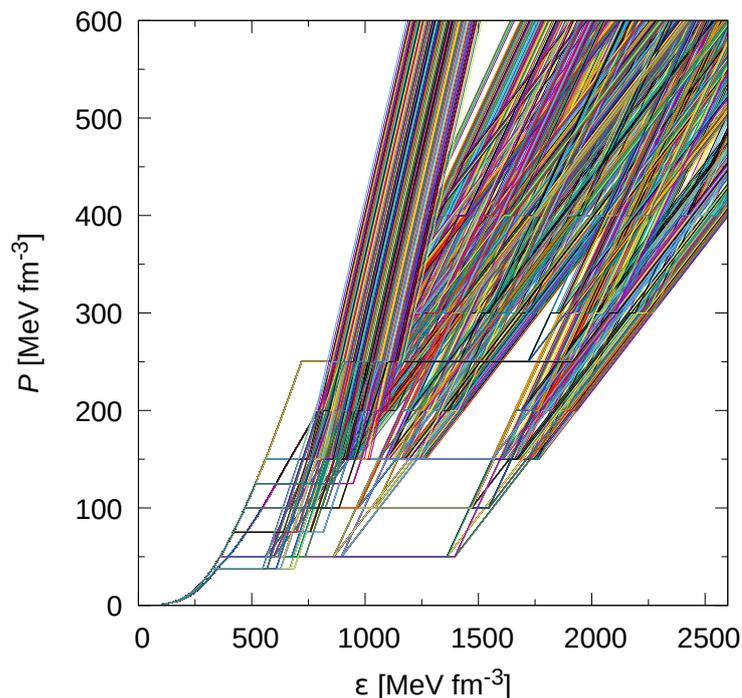


Figura 4.1: Gráfico de la presión,  $P$ , en función de la densidad de energía,  $\epsilon$ , donde se encuentran todas las EdEs híbridas construidas para ambos Casos.

obtienen de EdEs no paramétricas realistas (Ranea-Sandoval et al., 2019; Mariani et al., 2019).

Este conjunto de parámetros permite comparar nuestros resultados con el trabajo previamente citado, sin embargo los valores que adopta para las velocidades del sonido al cuadrado,  $s_1$  y  $s_2$ , no resultan razonables si se los compara con los que arrojan los resultados de EdE no paramétricas realistas (Ranea-Sandoval et al., 2019; Mariani et al., 2019). Se realizaron todas las combinaciones posibles

Parámetro	Alford	Caso 1	Caso 2
$P_1$ [MeV/fm <sup>3</sup> ]	$\sim 106$	38, 50, 75, 100, 125	50, 100, 150, 250
$P_2$ [MeV/fm <sup>3</sup> ]	$\sim 194$	150, 200, 250	150 200 300, 400
$\Delta e_1$ [MeV/fm <sup>3</sup> ]	$\sim 280$	220 280 340	200 500 1000
$\Delta e_2$ [MeV/fm <sup>3</sup> ]	$\sim 28$	22 30 38	22 30 38
$s_1$	0.7	0.7	0.3, 0.5
$s_2$	1.0	1.0	0.3, 0.5

Cuadro 4.1: Cuadro en la que se detallan los valores de los parámetros de las EdEs utilizadas en el trabajo de Alford y Sedrakian (2017) y los utilizados en esta tesis distinguiendo dos casos, el primero siguiendo la línea de Alford y Sedrakian (2017) y el segundo consideramos valores consistentes con los obtenidos con modelos realistas.

para cada caso entre los valores de los parámetros que se detallan en el Cuadro

4.1 considerando las EdEs tanto *GM1L* como *DD2* para la parte de materia hadrónica. Para llevar a cabo el procesamiento, organización y análisis de semejante cantidad de datos y archivos se armó un código en *bash* en el que se indica como varían los parámetros. Por cada conjunto de parámetros, *bash* ejecuta el código que construye la EdE híbrida. De esta manera, se generaron una serie de EdEs híbridas teniendo en cuenta todas las combinaciones consideradas para ambos casos. De esta forma, se obtuvieron, aproximadamente, 1500 EdEs híbridas que son las que se muestran en la figura 4.1.

## 4.2. Ecuaciones TOV

Para calcular las ecuaciones TOV se realizó un código numérico en el se resuelven las ecuaciones diferenciales 2.21 y 2.22. En este código, la EdE puede ser ingresada en formato de aproximación analítica o de tabla de datos y existe la opción de utilizar dos sistemas de unidades diferentes:  $\text{MeV}/\text{fm}^3$  o  $\text{g}/\text{cm}^3$ . En este caso, se ingresa una tabla de entrada con los valores de presión,  $P$ , y densidad de energía,  $\epsilon$ , obtenidos de la sección 4.1. Luego, se comienza con una presión baja dada en la tabla de entrada que corresponde a la presión central de la primera estrella. Se procede a la integración de las ecuaciones 2.21 y 2.22 desde el centro hacia la superficie, hasta que se cumple la condición 2.23. Luego, de la misma manera, se continúa con la siguiente estrella cuya presión central será mayor a la anterior. Y así sucesivamente hasta la última estrella cuya presión central es la mayor en la EdE ingresada. De esta manera, al final del proceso, se obtiene toda la familia de modelos estelares para una EdE particular.

Dicha integración se realiza utilizando método de Runge-Kutta-Fehlberg. Como resultado se obtiene, en un archivo de salida, los valores de la masa,  $M$ , y el radio,  $R$ . Luego, se realiza el mismo procedimiento para los distintos valores de presión ingresados, y así se obtienen masas y radios de cierta cantidad de estrellas. En este mismo código, también se calculan el número de Love adimensional,  $k_2$ , y la deformabilidad de marea adimensional,  $\Lambda$ . Para eso, se resuelven las ecuaciones TOV sumando una nueva ecuación diferencial a resolver, la ecuación 2.28 con la condición inicial  $y(0) = 2$ . De esta forma se calcula  $y(r)|_{r=R}$ , luego  $k_2$  (ecuación 2.27) y con esto se obtiene  $\Lambda$  (ecuación 2.26). Estos resultados, son impresos en el archivo de salida junto con la masa y el radio. Para llevarlo a cabo con 1500 EdE híbridas, el código en *bash* mencionado anteriormente, ejecuta, posteriormente a la construcción de las EdEs, el código que resuelve las TOV. A su vez, clasifica los resultados en distintas carpetas según si cumplen la restricción de  $M \geq 2M_\odot$  y, si es así, según si tienen ramas estables o inestables luego de las transiciones de fase.

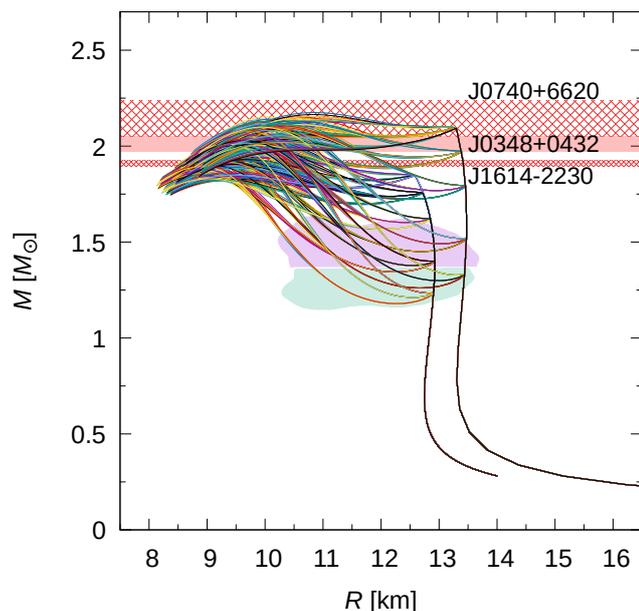


Figura 4.2: Gráfico  $M(R)$  para el caso 1 con EdEs hadrónicas  $GM1L$  y  $DD2$  junto con 4 observaciones donde las regiones en color corresponden a las restricciones impuestas por el evento GW170817 y las barras horizontales corresponden a las restricciones impuestas por J0740 + 6620, J0348 + 0432 y J1614 – 2230. Cada curva representa una familia de modelos estelares para una EdE particular.

En este contexto, se resolvieron las ecuaciones TOV para cada conjunto de parámetros. Con estos resultados se realizaron dos tipos de gráficos. Uno que relaciona la masa,  $M$ , con el radio,  $R$ , junto con observaciones recientes y otro que relaciona la masa,  $M$ , con la densidad central de energía,  $\epsilon_c$ . A su vez, se distinguen, de acuerdo al caso que corresponda, el conjunto de parámetros, ya sea el caso 1 (“Alford”) correspondiente a la figura 4.2, de acuerdo con el conjunto de parámetros utilizado en Alford y Sedrakian (2017), y caso 2 (“realista”) correspondiente a la figura 4.3, de acuerdo a las EdEs que se desarrollaron previamente en el *Grupo de Gravitación, Astrofísica y Cosmología* (Ranea-Sandoval et al., 2019; Mariani et al., 2019).

Como se muestra ambas figuras, todas las EdEs construidas cumplen con las restricciones en la masa y el radio del evento GW170817 que se representa con regiones de colores en el gráfico. Sin embargo, hay un porcentaje de ellas que no alcanza las  $2M_\odot$ , por lo tanto, no cumplen con las restricciones de J0740 + 6620, J0348+0432 y J1614–2230. Todas las curvas presentan ramas estables e inestables y en algunas de ellas se encuentran estrellas mellizas, no así trillizas como las obtenidas en Alford y Sedrakian (2017).

Por otro lado, las figuras 4.4 y 4.5 muestran las relaciones entre la masa,  $M$ , y la densidad central de energía,  $\epsilon_c$ , para ambos casos. En estas figuras se pueden

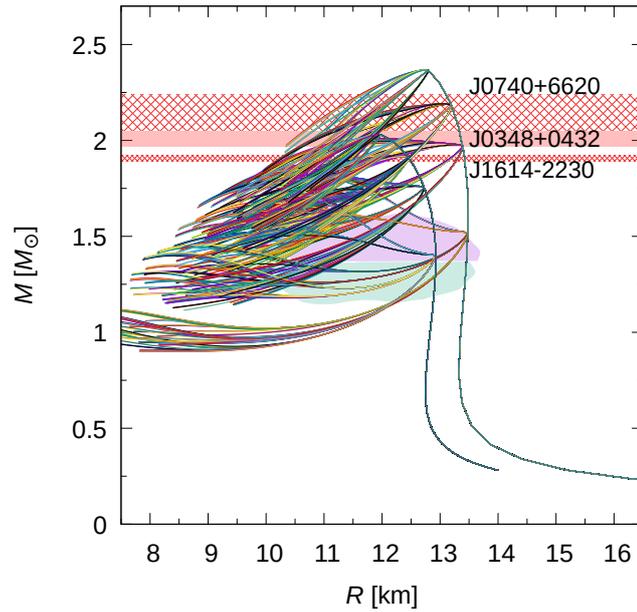


Figura 4.3: Gráfico  $M(R)$  para el caso 2 con EdEs hadrónicas  $GM1L$  y  $DD2$  junto con 4 observaciones donde las regiones en color corresponden al evento GW170817. Cada curva representa una familia de modelos estelares para una EdE particular.

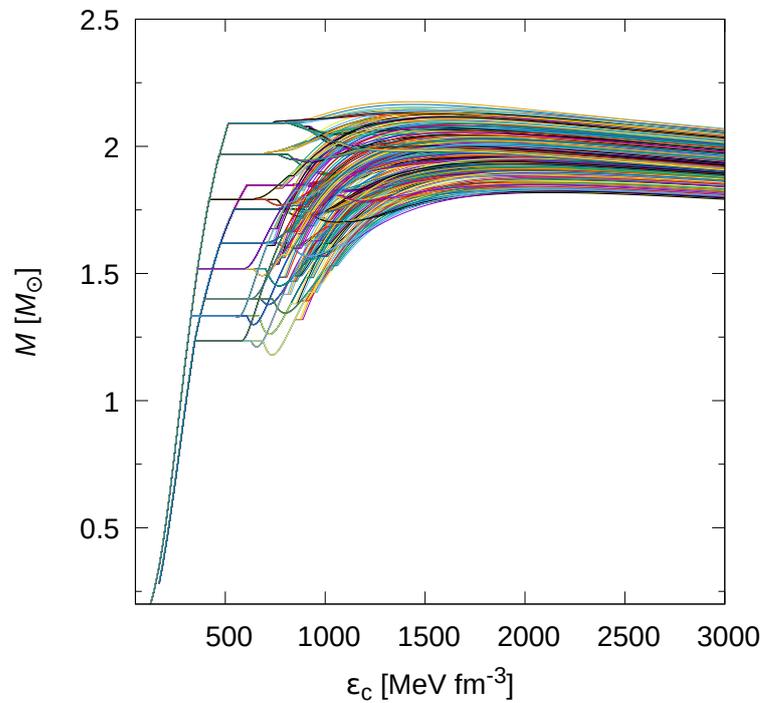


Figura 4.4: Gráfico  $M(\epsilon_c)$  para el caso 1 con EdEs hadrónicas  $GM1L$  y  $DD2$ . Cada curva representa una familia de modelos estelares para una EdE particular.

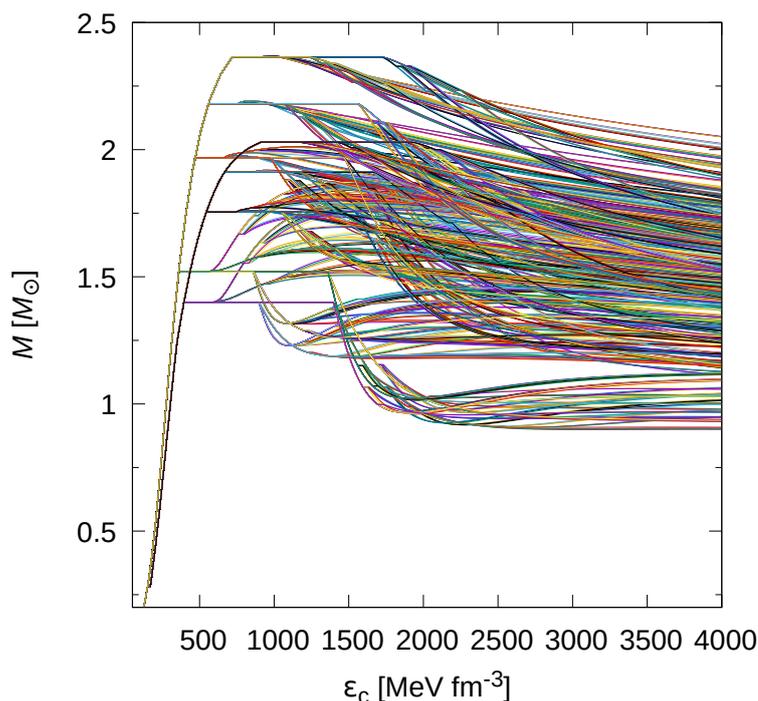


Figura 4.5: Gráfico  $M(\epsilon_c)$  para el caso 2 con EdEs hadrónicas *GM1L* y *DD2*. Cada curva representa una familia de modelos estelares para una EdE particular.

distinguir dónde ocurren las transiciones de fase. La primera corresponde a las líneas horizontales de igual masa y menor densidad de energía central. A medida que aumenta la densidad de energía central, la estrella se verá cada vez más comprimida hasta que ocurre la segunda transición de fase. En esta, los saltos en la densidad central de energía son más pequeños que la primera. Notemos que las estrellas que se ubican antes de la primera transición de fase son estrellas puramente hadrónicas. Aquellas ubicadas entre la primera y segunda transición de fase son EHs con una transición de fase. Aquellas ubicadas luego de que ocurra la segunda transición de fase son EHs con dos transiciones de fase en su interior.

Con el criterio de estabilidad descrito en la sección 2.2.2, se puede ver que todas las estrellas hadrónicas son estables mientras las EHs ya sea con una o dos transiciones de fase varían su estabilidad dependiendo de la EdE híbrida considerada. A grandes rasgos vemos que la cantidad de EHs estables es notablemente mayor para el caso 1 que para el caso 2.

#### 4.2.1. Selección de parámetros

Como próximo paso se seleccionaron un conjunto de EdEs híbridas que representan toda la muestra, es decir, tomando todas las variantes posibles. De esta forma se eligieron EdEs híbridas cuya masa máxima supere las  $2M_\odot$ , con

configuraciones mellizas o trillizas, si existen, y que tengan ramas conectadas y desconectadas de la primera y segunda transición de fase con las dos EdEs hadrónicas consideradas. La clasificación del tipo de estrella a partir del código en *bash*, facilitó notablemente la tarea de selección, que fue realizada manualmente. De este modo, nos quedamos con 9 de las 1500 EdEs híbridas construidas inicialmente con las cuales vamos a realizar el cálculo de los modo de oscilación  $f$  y  $g$ . En el cuadro 4.2 se detallan los parámetros de las EdEs híbridas elegidas y sus respectivas referencias, que serán utilizadas en los gráficos posteriores. En la

EdE	EdE hadrónica	$P_1$	$P_2$	$\Delta e_1$	$\Delta e_2$	$s_1$	$s_2$
1	DD2	38	150	280	22	0.7	1.0
2	DD2	50	150	220	38	0.7	1.0
3	DD2	100	200	200	22	0.5	0.5
4	DD2	125	150	220	38	0.7	1.0
5	DD2	125	250	340	38	0.7	1.0
6	DD2	250	400	200	30	0.3	0.3
7	GM1L	300	400	200	38	0.5	0.5
8	GM1L	38	150	220	22	0.7	1.0
9	GM1L	38	150	280	22	0.7	1.0

Cuadro 4.2: Cuadro en la que se detallan los valores de los parámetros de las EdEs seleccionadas junto con la EdE hadrónica correspondiente y el valor de referencia asociado en los gráficos.

figura 4.6 se pueden ver las EdEs híbridas elegidas representadas con distintos colores y con su respectiva referencia a la derecha.

En lo que sigue, se muestran los gráficos  $M(R)$  en la figura 4.7, junto con las restricciones impuestas por las observaciones actuales, y  $M(\epsilon_c)$  en la figura 4.8 para el conjunto EdEs híbridas seleccionadas. En ellos, cada color representa una EdE híbrida distinta, las líneas punteadas corresponde a ramas inestables y las líneas sólidas corresponden a ramas estables. Notar que para las EdEs 1, 4 y 8 existen estrellas con configuraciones gemelas. En la figura 4.9 se muestra los perfiles de densidad y presión de los tipos de estrellas analizadas, obtenidos a partir del código que resuelve las TOV. En ella, se ve que en estrellas completamente hadrónica, tanto la presión como la densidad de energía en el interior son menores que en EHs. A medida que la estrella sea más compacta, la presión en el interior aumenta y la densidad de energía, además de aumentar, tiene una discontinuidad debido a la aparición de la transición de fase.

Además, se realizaron gráficos de la deformabilidad de marea para este conjunto de EdEs híbridas en particular. En la figura 4.10a se encuentra graficada la deformabilidad de marea adimensional,  $\Lambda$  (ec. 2.26), en función de la masa de la estrella,  $M$ , junto con la cota observacional obtenida a partir del análisis de los datos de GW170817 indicada con una flecha. Las líneas sólidas indican ramas

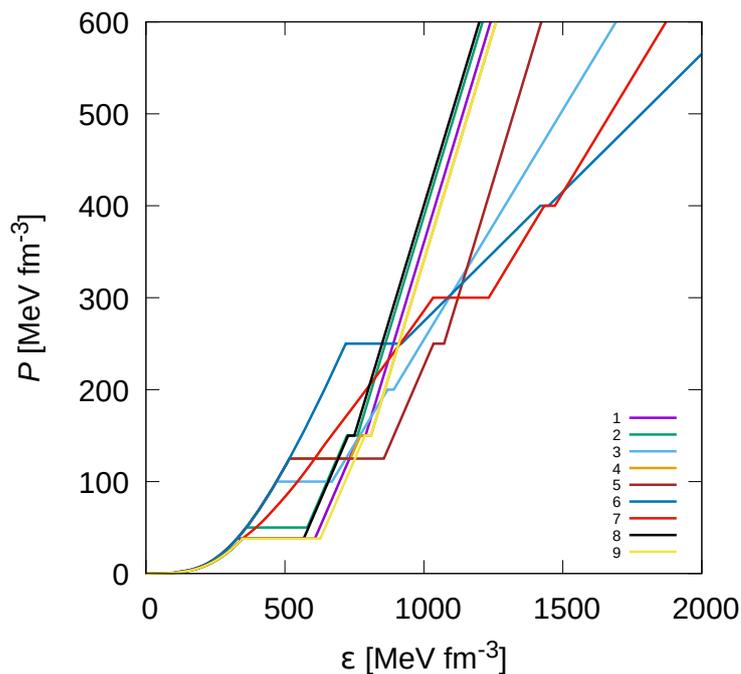


Figura 4.6: Gráfico de las EdEs híbridas elegidas para el cálculo de las frecuencias de los modos normales de oscilación  $f$  y  $g$ . Cada color representa una EdE híbrida cuya referencia se encuentra en el cuadro 4.2.

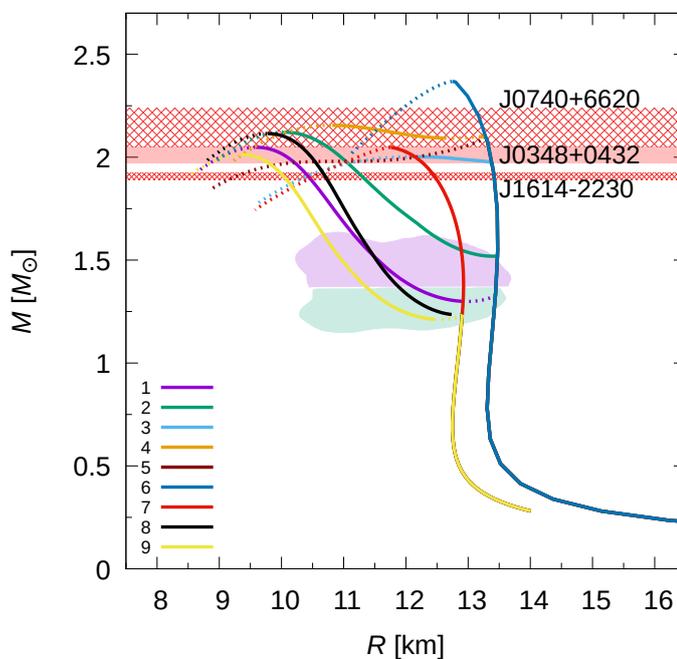


Figura 4.7: Gráfico  $M(R)$  para las EdEs seleccionadas de ambos casos junto con las observaciones, donde las regiones en colores corresponde al evento GW170817. Las líneas sólidas corresponden a ramas estables, mientras que las líneas punteadas corresponden a ramas inestables. Cada color representa una EdE cuya referencia se encuentra en el cuadro 4.2.

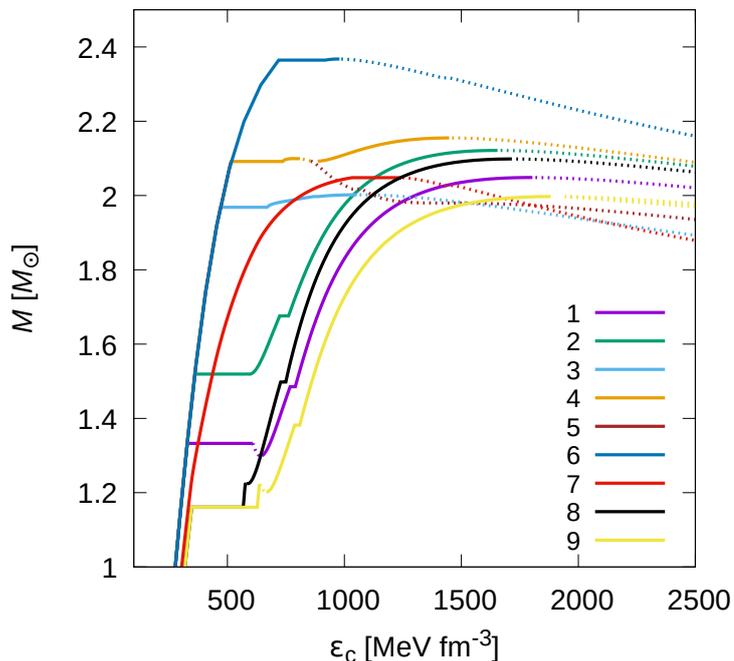


Figura 4.8: Gráfico  $M(\epsilon_c)$  para las EdEs seleccionadas de ambos casos. Las líneas sólidas corresponden a ramas estables, mientras que las líneas punteadas corresponden a ramas inestables. Cada color representa una EdE cuya referencia se encuentra en el cuadro 4.2.

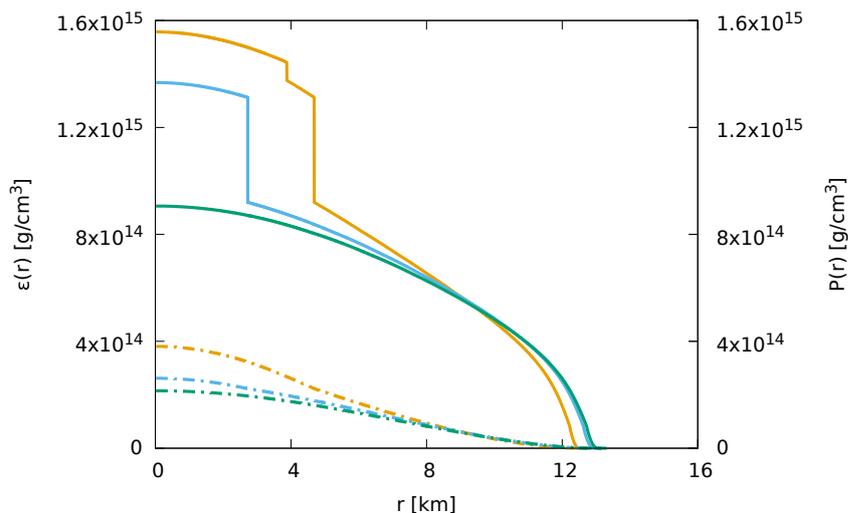


Figura 4.9: En líneas continuas, perfiles de densidad de energía,  $\epsilon(r)$ , para estrellas construidas con EdEs continua (verde), con una discontinuidad (celeste) y con dos (naranja). Con los mismos colores, pero presentados utilizando línea y punto, los perfiles de presión,  $P(r)$ , continuos en todos los casos.

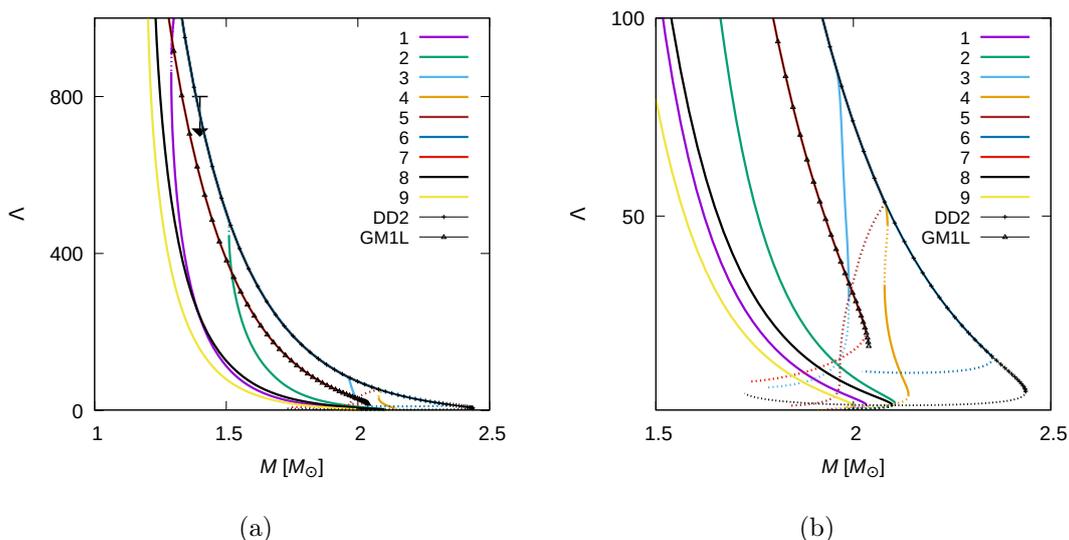


Figura 4.10: Gráfico  $\Lambda(M)$  para las EdEs híbridas elegidas. Cada curva de color tiene asociada una EdE cuyas referencias se encuentran en el cuadro 4.1. Las líneas sólidas refieren a ramas estables y las líneas punteadas a ramas inestables. A su vez, se graficaron con otro formato las EdEs hadrónicas *GM1L* y *DD2*. La flecha representa la cota observacional de  $\Lambda_{1,4} \leq 800$ . En este caso, todas la EdEs híbridas consideradas cumplen la cota.

estables y las líneas punteadas ramas inestables.

En la figura 4.10b se muestra el mismo gráfico pero sobre un rango más pequeño en el que se pueden observar con mayor claridad los efectos de la segunda transición de fase. Notar que las EHs muestran -para una dada masa- valores más pequeños de  $\Lambda$  que las estrellas hadrónicas.

### 4.3. Modos de oscilación $f$ y $g$

Para calcular los modos normales de oscilación  $f$  y  $g$  para una EH en la que existen dos transiciones de fases se adaptó un código desarrollado por el *Grupo de Gravitación, Astrofísica y Cosmología* de la *Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas, UNLP*. Dicho código, en el que se resuelven las dos ecuaciones diferenciales 3.6 y 3.7, consideraba una transición de fase por lo que se adaptó para el caso de dos transiciones de fase. Para empezar se lee una tabla de entrada con cuatro variables: radio,  $r$ , presión,  $P(r)$ , densidad de energía,  $\epsilon(r)$ , y masa,  $M(r)$ , luego se calculan las siguientes cantidades que serán necesarias en el desarrollo del código,

$$e^\lambda, e^\phi, \frac{d\phi}{dr}, \frac{d\epsilon}{dp}, \quad (4.1)$$

donde las primeras dos se calculan según las ecuaciones 2.13. Junto con las condiciones de borde 3.8, se comienza el cálculo para obtener la frecuencia de la primer

estrella de la tabla utilizando un método de *shooting* para lo que se propone una frecuencia inicial,  $w_0^2$ . Para eso se utiliza una subrutina que integra las ecuaciones 3.6 y 3.7, empleando el método Runge-Kutta-Felbehrig con las condiciones de pegado 3.11 y 3.12 (si las hay) para calcular  $W$  y  $V$  respectivamente y, luego, se calculan las condiciones de borde 3.10 para la frecuencia inicial. Después se calcula una nueva frecuencia más próxima a la raíz para lo cual, en principio, se utiliza un método iterativo tipo Newton-Raphson que se va acercando a la raíz de la condición de borde 3.10 y, en caso que que la condición de borde cambie de signo, se utiliza el método iterativo Ridders, considerando una cierta tolerancia. Una vez obtenida la frecuencia para una estrella, comienza la búsqueda de la frecuencia de la próxima estrella de modo que la frecuencia inicial sea levemente menor que la anterior para evitar que se calcule otro modo que no sea el que estamos estudiando y con esta nueva frecuencia se vuelve a calcular  $W$  y  $V$  y la nueva condición de borde. Luego comienza la búsqueda a de la solución hasta que,

$$\frac{|(w_i^2 - w_{i-1}^2)|}{w_i^2} < 10^{-10} \quad \text{y} \quad \frac{|\text{condición de borde}|}{R^2} < 10^{-5}, \quad (4.2)$$

donde  $w_i^2$  es la frecuencia calculada,  $w_{i-1}^2$  es la frecuencia previa, ‘condición de borde’ corresponde la la ecuación 3.10 y  $R$  es el radio total de la estrella. Una vez que se cumplen estas condiciones, obtenemos para la estrella de masa  $M_j$  la frecuencia de un dado modo. Se realiza el mismo procedimiento para el resto de las estrellas teniendo en cuenta que la frecuencia inicial utilizada para obtener los modos de oscilación  $f$  y  $g$  depende de cada estrella.

Con esto, se obtuvieron, para cada EdE híbrida seleccionada, las frecuencias de los modos  $f$  y  $g$  tanto para el caso de estrellas sin transición de fase, con una transición de fase y con dos transiciones de fase. En las figuras 4.11 y 4.12 se muestran los resultados obtenidos. Los colores indican la EdE utilizada según el cuadro 4.2. Con líneas y puntos se representan las frecuencias del modo  $f$ , con línea continua se representan las frecuencias del modo  $g$  y con línea punteada se representan las frecuencias de modo  $g_2$ . Los círculos y triángulos sobre las líneas corresponden a estrellas con una y dos transiciones de fase abruptas en el núcleo respectivamente. Mientras que la ausencia de símbolos sobre la línea corresponde a estrellas puramente hadrónicas, ya sea  $DD2$  o  $GM1L$ . Las estrellas de menor masa no tienen transición de fase en su interior y por lo tanto solo hay modo  $f$  cuya frecuencia es la correspondiente al de una estrella hadrónica. A medida que aumenta la masa comienzan a aparecer estrellas con una transición de fase en su interior lo que provoca que aparezca el modo  $g$  asociado con la aparición de una discontinuidad en la densidad de energía (debido a la transición de fase)

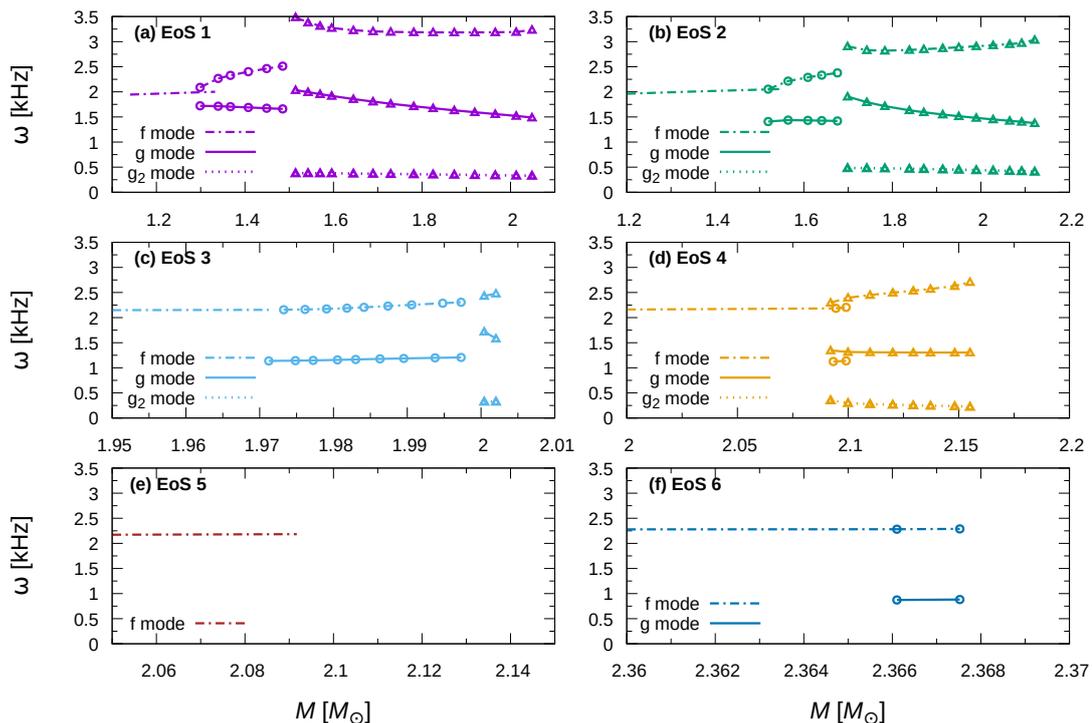


Figura 4.11: Frecuencia de los modos  $f$ ,  $g$  y  $g_2$  como función la masa estelar para las EdEs híbridas 1, 2, 3, y 4. Con línea punteada presentamos el nuevo modo  $g_2$ , con línea continua el modo  $g$  y con línea y punto la frecuencia del modo  $f$ . Los círculos (triángulos) sobre las líneas son utilizados para indicar estrellas con una (dos) transición(es) de fase(s) abrupta(s) en el núcleo. Para mas detalles ver tabla 4.2.

dentro de la estrella. Luego a masas más altas encontramos estrellas con doble transición de fase en las que la frecuencia tanto del modo  $f$  como del modo  $g$  dan un salto a frecuencias más elevadas aunque luego, en algunos casos, disminuyen. Además aparece un nuevo modo  $g$ , al que denominamos modo  $g_2$ , con frecuencias menores que las del modo  $g$ . No todas las EdEs híbridas a las que se les calculo las frecuencias de oscilación tienen EHs estables ya sea con una o dos transiciones de fase. Por ejemplo, las EdEs 5, 6 y 9 no tienen EHs con doble transición de fase estable. Es más, la EdE 5 solo tiene estrellas hadrónicas estables.

A diferencia del análisis realizado para el modo  $g$  con una transición de fase, se obtuvo, por primera vez, que para todos los caso en que las estrellas híbridas estables tengan dos transiciones de fase se obtuvieron dos modos  $g$ . Uno asociado al de una transición de fase (modo  $g$ ) y uno nuevo que surge de considerar la segunda transición (modo  $g_2$ ). Además, el modo  $g_2$  aparece con frecuencias significativamente más bajas respecto del modo  $g$  asociado a una transición de fase.

Además, se observa que hay un rango de frecuencias en los que se encuentra cada modo. Las frecuencias calculadas para los modos  $f$ ,  $g$  y  $g_2$  se ubican dentro

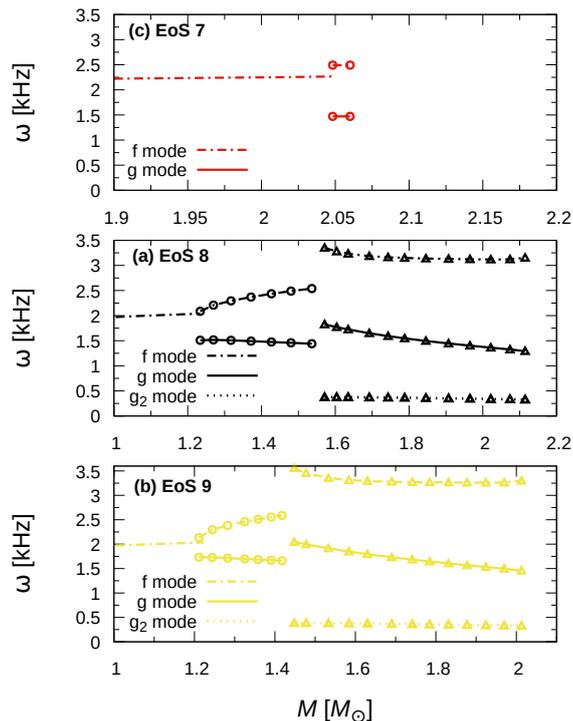


Figura 4.12: Frecuencia de los modos  $f$ ,  $g$  y  $g_2$  como función la masa estelar para las EdEs híbridas 7, 8 y 9 con EdE hadrónica  $GM1L$ . Con línea punteada presentamos el nuevo modo  $g_2$ , con línea continua el modo  $g$  y con línea y punto la frecuencia del modo  $f$ . Los círculos (triángulos) sobre las líneas son utilizados para indicar estrellas con una (dos) transición(es) de fase(s) abrupta(s) en el núcleo.

de un rango entre 2 a 3,5 kHz, 1 a 2 kHz y 0,2 a 0,5 kHz, respectivamente.

Para las EdEs híbridas 1, 4 y 8 con configuraciones mellizas se observa que existe una degeneración en la masa, es decir que existen dos EHs con la misma masa pero distinta estructura interna. Estas diferencias en la estructura interna hacen que la frecuencia del modo  $f$  sea diferente. En una no hay transición de fase mientras que en la otra existe una transición de fase. Parte de la región continua se solapa con la región discontinua. Aquella de radio menor tiene una transición de fase en su interior mientras que aquella con radio mayor no presenta transiciones de fase.

Por otra parte, según el trabajo de Ranea-Sandoval et al. (2018) podría existir una relación entre la frecuencia del modo  $g$  con el primer salto en la densidad de energía y la densidad a la que ocurre la primer transición de fase. A los datos ya calculados se sumaron los nuevos puntos obtenidos en esta tesis, tanto para el modo  $g$  como para el modo  $g_2$  ya que el mecanismo de excitación es el mismo, y se reajustó la curva al gráfico de  $\text{Log}(\omega)$  en función de  $\frac{\Delta\epsilon}{\epsilon_{trans}}$  como se muestra en la figura 4.13. El ajuste se realizó con la siguiente función,

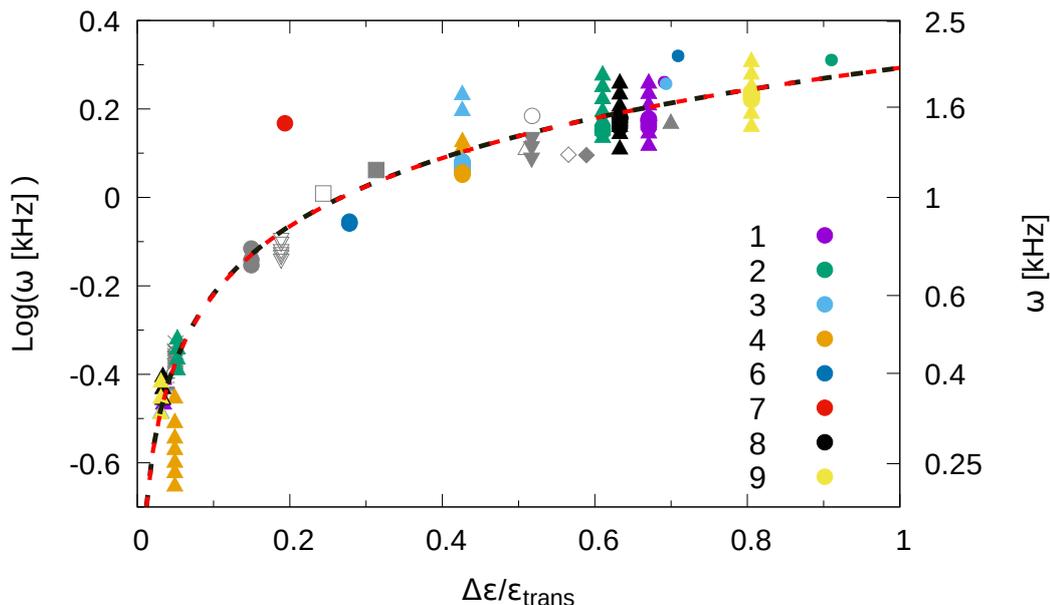


Figura 4.13: Gráficos  $\text{Log}(\omega)$  en función de  $\frac{\Delta\epsilon}{\epsilon_{trans}}$  para el modo  $g$  y  $g_2$ . Los puntos en color gris y el respectivo ajuste representado con la curva de trazos negra corresponden a los resultados presentados en el trabajo de Ranea-Sandoval et al. (2018). En colores, se agregaron los puntos obtenidos de en este trabajo y la línea de trazos en color rojo es el nuevo ajuste, el cual incluye tanto los puntos negros como los coloreados. Los círculos corresponden a los modos  $g$  de estrella con una discontinuidad y los triángulos corresponden a los modos  $g$  y  $g_2$  de estrellas con doble discontinuidad. Los datos agrupados en la esquina inferior izquierda corresponden a las frecuencias del modo  $g_2$ .

Notar que la EdE 5 no se encuentra en este gráfico ya que no tiene EHs estables. El hecho de que se obtenga un ajuste tan bueno usando una función simple es un resultado interesante. La amplia gama de EdEs híbridas utilizadas sugiere que la relación obtenida es de naturaleza universal.

$$\omega \left( \frac{\Delta\epsilon}{\epsilon_{trans}} \right) = a \text{Log} \left( \frac{\Delta\epsilon}{\epsilon_{trans}} \right) + b, \quad (4.3)$$

donde los valores de los parámetros  $a$  y  $b$  obtenidos luego del ajuste realizado con `Gnuplot` son

$$a = 0,51257 \pm 0,02306 \quad (4,499 \%) \quad (4.4)$$

$$b = 0,29288 \pm 0,01758 \quad (6,003 \%) \quad (4.5)$$

Siguiendo el criterio utilizado en las figuras anteriores, con círculos de colores representamos las frecuencias del modo  $g$  para estrellas con una discontinuidad en el interior, y con triángulos de colores representamos las frecuencias de los modos  $g$  y  $g_2$  correspondiente a estrellas con dos discontinuidades. Cada color hace referencia a una EdE diferente especificada en la tabla 4.2. Con los nuevos datos representados con colores se obtiene que sigue existiendo una fuerte correlación entre la frecuencia de los modos  $g$  y  $g_2$  con el valor de  $\frac{\Delta\epsilon}{\epsilon_{trans}}$ . Esto fortalece la idea de que las frecuencias de oscilación de los modos  $g$  y  $g_2$  tienen una fuerte relación con el salto en la densidad de energía y la densidad a la que ocurre la transición de fase. Este resultado coincide con el caso Newtoniano, donde el cuadrado de la frecuencia de Brunt Väisälä depende directamente de la diferencia en la densidad (McDermott, 1990). Esta relación podría resultar útil para obtener información vinculada con la EdE a partir de la medición de dicho modo y tratar de vincularlo con la astrosismología de modo  $f$  que permite obtener masa y radio a partir de  $\omega$  y  $\tau$ .

# Capítulo 5

## Conclusiones y trabajo a futuro

El objetivo central de este trabajo fue analizar el efecto que genera la existencia de una segunda transición de fase en el interior de una EH sobre los modos normales de oscilación  $f$  y  $g$  bajo la aproximación relativista de Cowling. A modo de resumen, se construyó una gran variedad de EdE híbridas cuyos parámetros se hicieron variar siguiendo dos casos. En el primero (“Alford”) se amplía el rango de valores utilizados en el trabajo de Alford y Sedrakian (2017). Sin embargo, en el trabajo mencionado anteriormente los valores utilizados para las velocidades del sonido al cuadrado,  $s_1$  y  $s_2$ , no son razonables si se los compara con los que arrojan los resultados de EdE no paramétricas realistas (ver, por ejemplo, Ranea-Sandoval et al., 2019; Mariani et al., 2019, y referencias allí mencionadas). Por esto, en el segundo caso (“Realista”), se toman distintos valores que son comparables con dichos resultados. De este procesos se obtuvo un conjunto de 1500 EdEs híbridas construidas considerando todas las combinaciones posibles entre los parámetros del cuadro 4.1. Luego, se resolvieron las ecuaciones TOV para todas las EdEs híbridas y se obtuvieron parámetros de las estrellas tales como la masa,  $M$ , el radio,  $R$ , el número de Love,  $k_2$  y la deformabilidad de marea,  $\Lambda$ . Con estos resultados, se realizaron gráficos  $M(R)$  y  $M(\epsilon_c)$  a partir de los cuales se seleccionaron un conjunto de 9 EdEs cualitativamente distintas. Para este conjunto reducido de EdEs híbridas se realizaron gráficos  $\Lambda(M)$  y se calcularon las frecuencias de los modos normales de oscilación  $f$  y  $g$  con los que se hicieron gráficos de  $\omega$  en función de  $M$  y  $\text{Log}(\omega)$  como función de  $\frac{\Delta\epsilon_1}{\epsilon_1}$ .

Con los resultados obtenidos de este trabajo concluimos que con el amplio rango de parámetros usados, al resolver la ecuaciones TOV, no conseguimos obtener configuraciones trillizas de estrellas como obtuvieron Alford y Sedrakian (2017). Sin embargo, sí fue posible obtener configuraciones gemelas tanto de estrellas hadrónicas e híbridas con una transición de fase como de estrellas hadrónicas e híbridas con dos transiciones de fase. Podemos pensar que la aparición de configuraciones trillizas obtenidas por Alford y Sedrakian (2017) ocurre para elecciones

muy particulares de los parámetros de las EdEs mientras que la existencia de configuraciones gemelas no se da como consecuencia de un ajuste fino de los parámetros sino que es un resultado general de considerar EdEs con transiciones de fase abruptas.

Dado que los valores que adopta Alford y Sedrakian (2017) para las velocidades del sonido al cuadrado,  $s_1$  y  $s_2$ , no resultan razonables, se decidió hacer una distinción en dos casos. Esto permite comparar nuestros resultados con el trabajo mencionado anteriormente. En el caso 1, las curvas correspondientes a EHs contienen ramas estables considerablemente más extendidas que para el caso 2 donde, en líneas generales, luego de la transición de fase, las estrellas se desestabilizan y luego se vuelve más difícil recuperar la estabilidad. En resumen, si bien la propuesta de Alford y Sedrakian (2017) resulta poco realista, favorece la existencia de estrellas híbridas estables respecto al caso 2.

Por otro lado, todas las EdEs construidas satisfacen la restricción del evento GW170817. Sin embargo, las restricciones impuestas por J0740 + 6620, J0348 + 0432 y J1614 – 2230 son más difíciles de alcanzar en ambos casos. Por lo tanto, aquellas EdEs que no cumplan las restricciones impuestas se descartan ya que no describen la materia en el interior de una EH.

Los resultados obtenidos de calcular la deformabilidad de marea adimensional  $\Lambda$ , cumplen la cota proveniente de analizar la señal del evento GW170817 que han puesto fuertes restricciones para una EN de  $1,4M_{\odot}$ ,  $\Lambda_{1,4} \leq 800$ . (Abbott y et al., 2017a; Annala et al., 2018; Most et al., 2018; Raithel et al., 2018). Por lo que, las EdEs a partir de las cuales se calcularon estos resultados, son válidas ya que satisfacen todas las restricciones impuestas hasta el momento.

Además, a partir del cálculo de las frecuencias de los modos normales de oscilación, se observa que el hecho de introducir una segunda transición de fase abrupta en una EH implica la aparición de un nuevo modo  $g$ , al que denominamos modo  $g_2$ , el cual no había sido calculado previamente. Dicho modo aparece con frecuencias considerablemente más bajas que los ya conocidos modos  $g$ . Por esto, es interesante analizar este efecto ya que con los nuevos detectores de OG podremos obtener información del nuevo modo, y por lo tanto inferir propiedades de la materia en el interior de estos objetos. Sin embargo, en el rango de frecuencias en los que aparece el modo  $g_2$  por discontinuidades en la EdE, existen modos  $g$  vinculados con otros efectos mencionados anteriormente en la sección 3.2 (Ranea-Sandoval et al., 2018).

Así mismo, también se observó que en algunos casos la frecuencia del modo  $f$  de una estrella puramente hadrónica y la frecuencia del modo  $g$  para una estrella con doble transición de fase son muy similares. Por lo que se vuelve complejo el análisis de las frecuencias ya que sus rangos de valores se superponen y no sería

tan simple determinarse si dicha frecuencia corresponde a una estrella hadrónica o a una EH con doble transición de fase.

En este contexto, se pone de manifiesto la importancia de la astronomía multimensajera con OG. No resulta suficiente ser capaces de realizar una detección de un modo de oscilación proveniente de un objeto compacto, sino que será necesario contar con información proveniente de observaciones electromagnéticas para tener caracterizado al objeto emisor. De esta forma, se puede aspirar a poder discernir entre diferentes modos de oscilación cuyas frecuencias sean coincidentes.

Es importante remarcar que la detección de OG vinculadas con un modo de oscilación con una frecuencia en el rango de  $1 - 1,5$  kHz tendría grandes implicaciones astrofísicas. Sería no solo una prueba de la existencia de materia de quarks en el interior de una estrella compacta, sino que indicaría que la transición de fase hadrón-quarks sería abrupta, imponiendo restricciones al valor de la tensión superficial hadrón-quark. Reforzando, de esta forma, una de las conclusiones obtenidas por Ranea-Sandoval et al. (2018).

La relación presentada en la figura 4.13, es interesante de estudiar ya que se obtiene un ajuste muy bueno con una función simple. Esto refuerza la idea de que la frecuencia de los modos  $g$  y  $g_2$  están relacionadas con los saltos en la densidad de energía para las estrellas con transiciones de fase en su interior. Dicha relación podría usarse para comprender mejor el comportamiento de la materia dentro de los objetos compactos. Con la detección del modo  $g$ , podría ser posible inferir la existencia de una transición de fase abrupta dentro de la estrella. Esta información se usaría para restringir los EdEs híbridas. Por lo tanto, al lograr parametrizar la frecuencia de los modos  $g$  y  $g_2$  de modo que la relación sea universal, podemos comenzar a investigar y analizar lo que denominamos *astrosismología del modo  $g$*

Como trabajo a futuro, se propone realizar el cálculo de las frecuencias de los modos de oscilación sin utilizar la aproximación relativista de Cowling y de esta forma comparar con los resultados obtenidos de esta tesis. Por otro lado, se propone construir EHs utilizando otras EdEs hadrónicas que estén vigentes actualmente.

Otro aspecto que puede ser abordado en el futuro es un análisis más detallado sobre el criterio de estabilidad de los modelos estelares. Más allá del criterio de estabilidad tradicional desarrollado en la sección 2.2.2, en el trabajo de Pereira et al. (2018) se muestra que, en los casos donde existen transiciones de fase abruptas, la estabilidad de los modelos estelares depende fuertemente de los tiempos característicos asociados a la transición de fase hadrón-quark. Al igual que con el valor de la tensión superficial en la interfase hadrón-quark, en la actualidad no se conoce con certeza el valor de este tiempo característico. Por lo tanto, en estos escenarios el criterio de estabilidad aún no está completamente determinado y

resultaría de interés aplicar este análisis sobre las EdEs con transiciones de fase secuenciales.

Por último, se propone realizar cálculos del momento de inercia de los modelos estelares (Lourenço et al., 2019). De esta forma podríamos analizar la validez de las relaciones del momento de inercia con el número de Love,  $I - Love$ .

# Apéndice A

## Sistema de unidades geométricas

El sistema de unidades geométricas es un sistema de unidades naturales en el que las unidades físicas básicas se eligen de modo que la velocidad de la luz en el vacío,  $c$ , y la constante gravitacional,  $G$ , se establezcan iguales a la unidad.

$$c = 1$$

$$G = 1$$

Este sistema es útil en física, especialmente en las teorías de la relatividad especial y general. Muchas ecuaciones en la física relativista aparecen más simple cuando se expresa en unidades geométricas, ya que de esta forma  $G$  y  $c$  desaparecen. Por esta razón, muchos libros y artículos sobre física relativista usan unidades geométricas. En unidades geométricas, cada intervalo de tiempo se interpreta como la distancia recorrida por la luz durante ese intervalo de tiempo dado. Es decir, un segundo se interpreta como un segundo de luz, por lo que el tiempo tiene las unidades geométricas de longitud. Esto es consistente con la noción de que, de acuerdo con la relatividad especial, el tiempo y la distancia están en pie de igualdad. La energía y el momento se interpretan como compo-

Cantidad	Dimensiones en el SI	Dimensión en UG	Factor multiplicativo
$t$	$[T]$	$[L]$	$c$
$R$	$[L]$	$[L]$	1
$M$	$[M]$	$[L]$	$Gc^{-2}$
$\epsilon$	$[ML^{-1}T^{-2}]$	$[L^{-2}]$	$Gc^{-4}$
$P$	$[ML^{-1}T^{-2}]$	$[L^{-2}]$	$Gc^{-4}$

Cuadro A.1: Cuadro de conversión a unidades geométricas. En la primer columna se detallan las cantidades físicas. En la segunda columna se presentan las unidades de cada una en el Sistema Internacional (SI) de unidades. En la tercer columna se indican las unidades geométricas (UG) de cada cantidad física. Y, en la última columna se muestra el factor de conversión de del SI a UG.

nentes del tetra-momento, y la masa es la magnitud de este vector, por lo que en unidades geométricas todos deben tener la dimensión de longitud. Podemos convertir una masa expresada en kilogramos a la masa equivalente expresada en metros multiplicando por el factor de conversión  $G/c^2$ .

En el cuadro A.1 se encuentran las cantidades físicas, utilizadas en este trabajo, en unidades correspondientes al Sistema Internacional (SI), en unidades geométricas (UG) y su correspondiente factor de conversión.

# Bibliografía

- Abbott, B. P. y et al. (2016). Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. *Phys. Rev. Lett.*, 116:061102.
- Abbott, B. P. y et al. (2017a). GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral. *Phys. Rev. Lett.*, 119:161101.
- Abbott, B. P. y et al. (2017b). Multi-messenger Observations of a Binary Neutron Star Merger. *The Astrophysical Journal, Letters*, 848(2):L12.
- Abbott, B. P. y et al. (2020). GW190425: Observation of a Compact Binary Coalescence with Total Mass  $\sim 3,4M_{\odot}$ . *arXiv e-prints*, page arXiv:2001.01761.
- Abbott, B. P. y R. Abbott et al. (2017). Gravitational waves and gamma-rays from a binary neutron star merger: GW170817 and GRB 170817a. *The Astrophysical Journal*, 848(2):L13.
- Alaverdyan, G. (2009). Nuclear matter equation of state in relativistic mean-field theory and mixed phase structure in compact stars.
- Alford, M., Rajagopal, K., Reddy, S., y Wilczek, F. (2001). Minimal color-flavor-locked-nuclear interface. *Physical Review D: Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*, 64(7):074017.
- Alford, M. y Sedrakian, A. (2017). Compact Stars with Sequential QCD Phase Transitions. *Physical Review Letters*, 119(16):161104.
- Alford, M. G., Han, S., y Prakash, M. (2013). Generic conditions for stable hybrid stars. *Physical Review D: Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*, 88(8):083013.
- Alford, M. G., Schmitt, A., Rajagopal, K., y Schäfer, T. (2008). Color superconductivity in dense quark matter. *Reviews of Modern Physics*, 80(4):1455–1515.
- Andersson, N., Ferrari, V., Jones, D. I., Kokkotas, K. D., Krishnan, B., Read, J. S., Rezzolla, L., y Zink, B. (2011). Gravitational waves from neutron stars: promises and challenges. *General Relativity and Gravitation*, 43(2):409–436.

- Andersson, N. y Kokkotas, K. D. (1998). Towards gravitational wave asteroseismology. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 299(4):1059–1068.
- Annala, E., Gorda, T., Kurkela, A., y Vuorinen, A. (2018). Gravitational-Wave Constraints on the Neutron-Star-Matter Equation of State. *Physical Review Letters*, 120(17):172703.
- Antoniadis, J. y et al. (2013). A Massive Pulsar in a Compact Relativistic Binary. *Science*, 340(6131):448.
- Athem Alsabti, A. (2015). Handbook of Supernovae. In *IAU General Assembly*, volume 29, page 2253696.
- Baade, W. y Zwicky, F. (1934). Remarks on super-novae and cosmic rays. *Phys. Rev.*, 46:76–77.
- Bodmer, A. R. (1971). Collapsed nuclei. *Phys. Rev. D*, 4:1601–1606.
- Bogdanov, S. y et al. (2019). Constraining the Neutron Star Mass - Radius Relation and Dense Matter Equation of State with NICER. I. The Millisecond Pulsar X-Ray Data Set. *The Astrophysical Journal, Letters*, 887(1):L25.
- Carroll, S. M. (2019). *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Cambridge University Press.
- Chandrasekhar, S. (1964). The Dynamical Instability of Gaseous Masses Approaching the Schwarzschild Limit in General Relativity. *The Astrophysical Journal*, 140:417.
- Chirenti, C., de Souza, G. H., y Kastaun, W. (2015). Fundamental oscillation modes of neutron stars: Validity of universal relations. *Physical Review D: Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*, 91(4):044034.
- Chodos, A., Jaffe, R. L., Johnson, K., Thorn, C. B., y Weisskopf, V. F. (1974). New extended model of hadrons. *Physical Review D: Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*, 9(12):3471–3495.
- Contrera, G. A., Orsaria, M., Ranea-Sandoval, I. F., y Weber, F. (2017). Hybrid stars in the framework of njl models. *International Journal of Modern Physics: Conference Series*, 45:1760026.
- Contrera, G. A., Orsaria, M., y Scoccola, N. N. (2010). Nonlocal Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio model with wave function renormalization at finite temperature and chemical potential. *Physical Review D: Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*, 82(5):054026.

- Córsico, A. H., Althaus, L. G., Miller Bertolami, M. M., y Kepler, S. O. (2019). Pulsating white dwarfs: new insights. *Astronomy & Astrophysics Reviews*, 27(1):7.
- Cromartie, H. T. y t al. (2019). Relativistic Shapiro delay measurements of an extremely massive millisecond pulsar. *Nature Astronomy*, page 439.
- Demorest, P. B., Pennucci, T., Ransom, S. M., Roberts, M. S. E., y Hessels, J. W. T. (2010). A two-solar-mass neutron star measured using Shapiro delay. *Nature*, 467(7319):1081–1083.
- Detweiler, S. y Lindblom, L. (1985). On the nonradial pulsations of general relativistic stellar models. *The Astrophysical Journal*, 292:12–15.
- Endo, T. (2011). Region of a hadron-quark mixed phase in hybrid stars. *Physical Review C: Nuclear Physics*, 83(6):068801.
- Finn, L. S. (1987). G-modes in zero-temperature neutron stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 227:265–293.
- Finn, L. S. (1988). Relativistic stellar pulsations in the Cowling approximation. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 232:259–275.
- García-Berro, E., Lorén-Aguilar, P., Córsico, A. H., Althaus, L. G., Lobo, J. A., y Isern, J. (2006). The gravitational wave radiation of pulsating white dwarfs revisited: the case of BPM 37093 and PG 1159-035. , 446(1):259–266.
- Haar, D. (2013). *Collected Papers of L.D. Landau*. Elsevier Science.
- Harrison, B. K., Thorne, K. S., Wakano, M., y Wheeler, J. A. (1965). *Gravitation Theory and Gravitational Collapse*.
- Hewish, A., Bell, S. J., Pilkington, J. D. H., Scott, P. F., y Collins, R. A. (1968). Observation of a Rapidly Pulsating Radio Source. *Nature*, 217(5130):709–713.
- Hulse, R. A. y Taylor, J. H. (1975). Discovery of a pulsar in a binary system. *The Astrophysical Journal, Letters*, 195:L51–L53.
- Kokkotas, K. D. y Schmidt, B. G. (1999). Quasi-Normal Modes of Stars and Black Holes. *Living Reviews in Relativity*, 2(1):2.
- Kokkotas, K. D. y Schutz, B. F. (1992).  $w$ -modes - A new family of normal modes of pulsating relativistic stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 255:119–128.

- Lasky, P. D. (2015). Gravitational Waves from Neutron Stars: A Review. *Publications of the Astron. Soc. of Australia*, 32:e034.
- Lattimer, J. M. (2019). Neutron Star Mass and Radius Measurements. *Universe*, 5(7):159.
- Lattimer, J. M. y Prakash, M. (2004). The Physics of Neutron Stars. *Science*, 304(5670):536–542.
- Lattimer, J. M. y Steiner, A. W. (2014). Neutron Star Masses and Radii from Quiescent Low-mass X-Ray Binaries. *The Astrophysical Journal*, 784(2):123.
- Lourenço, O., Dutra, M., Lenzi, C. H., Biswal, S. K., Bhuyan, M., y Menezes, D. P. (2019). Consistent Skyrme parametrizations constrained by GW170817. *arXiv e-prints*, page arXiv:1901.04529.
- Lugones, G. (2016). From quark drops to quark stars. Some aspects of the role of quark matter in compact stars. *European Physical Journal A*, 52:53.
- Malfatti, G., Orsaria, M. G., Contrera, G. A., Weber, F., y Ranea-Sandoval, I. F. (2019). Hot quark matter and (proto-) neutron stars. *Physical Review C: Nuclear Physics*, 100(1):015803.
- Mariani, M., Orsaria, M., y Vucetich, H. (2017). Constant entropy hybrid stars: a first approximation of cooling evolution. *Astronomy & Astrophysics*, 601:A21.
- Mariani, M., Orsaria, M. G., Ranea-Sandoval, I. F., y Guilera, O. M. (2019). Hybrid magnetized stars within the Field Correlator Method. *Boletín de la Asociación Argentina de Astronomía La Plata Argentina*, 61:231–233.
- McDermott, P. N. (1990). Density Discontinuity G-Modes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 245:508.
- Miniutti, G., Pons, J. A., Berti, E., Gualtieri, L., y Ferrari, V. (2003). Non-radial oscillation modes as a probe of density discontinuities in neutron stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 338(2):389–400.
- Most, E. R., Weih, L. R., Rezzolla, L., y Schaffner-Bielich, J. (2018). New Constraints on Radii and Tidal Deformabilities of Neutron Stars from GW170817. *Physical Review Letters*, 120(26):261103.
- Nefediev, A. V., Simonov, Y. A., y Trusov, M. A. (2009). Deconfinement and Quark-Gluon Plasma. *International Journal of Modern Physics E*, 18(3):549–599.

- O'Connor, E. y Ott, C. D. (2011). Black hole formation in failing core-collapse supernovae. *The Astrophysical Journal*, 730(2):70.
- Oppenheimer, J. R. y Volkoff, G. M. (1939). On massive neutron cores. *Phys. Rev.*, 55:374–381.
- Orsaria, M., Rodrigues, H., Weber, F., y Contrera, G. A. (2013). Quark-hybrid matter in the cores of massive neutron stars. *Physical Review D: Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*, 87(2):023001.
- Orsaria, M. G., Malfatti, G., Mariani, M., Ranea-Sandoval, I. F., García, F., Spinella, W. M., Contrera, G. A., Lugones, G., y Weber, F. (2019). Phase transitions in neutron stars and their links to gravitational waves. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 46(7):073002.
- Özel, F. y Freire, P. (2016). Masses, Radii, and the Equation of State of Neutron Stars. *Annual Review of Astronomy & Astrophysics*, 54:401–440.
- Pacini, F. (1967). Energy Emission from a Neutron Star. *Nature*, 216(5115):567–568.
- Pereira, J. P., Flores, C. V., y Lugones, G. (2018). Phase Transition Effects on the Dynamical Stability of Hybrid Neutron Stars. *The Astrophysical Journal*, 860(1):12.
- Pinto, M. B., Koch, V., y Randrup, J. (2012). Surface tension of quark matter in a geometrical approach. *Physical Review C: Nuclear Physics*, 86(2):025203.
- Prakash, M., Lattimer, J. M., Pons, J. A., Steiner, A. W., y Reddy, S. (2001). *Evolution of a Neutron Star from Its Birth to Old Age*, volume 578, page 364.
- Raithel, C. A., Özel, F., y Psaltis, D. (2016). Model-independent inference of neutron star radii from moment of inertia measurements. *Physical Review C: Nuclear Physics*, 93(3):032801.
- Raithel, C. A., Özel, F., y Psaltis, D. (2018). Tidal Deformability from GW170817 as a Direct Probe of the Neutron Star Radius. *The Astrophysical Journal, Letters*, 857(2):L23.
- Ranea-Sandoval, I. F., Guilera, O. M., Mariani, M., y Orsaria, M. G. (2018). Oscillation modes of hybrid stars within the relativistic Cowling approximation. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2018(12):031.

- Ranea-Sandoval, I. F., Han, S., Orsaria, M. G., Contrera, G. A., Weber, F., y Alford, M. G. (2016). Constant-sound-speed parametrization for Nambu-Jona-Lasinio models of quark matter in hybrid stars. *Physical Review C: Nuclear Physics*, 93(4):045812.
- Ranea-Sandoval, I. F., Orsaria, M. G., Han, S., Weber, F., y Spinella, W. M. (2017). Color superconductivity in compact stellar hybrid configurations. *Physical Review C: Nuclear Physics*, 96(6):065807.
- Ranea-Sandoval, I. F., Orsaria, M. G., Malfatti, G., Curin, D., Mariani, M., Aníbal Contrera, G., y Guilera, O. M. (2019). Effects of Hadron-Quark Phase Transitions in Hybrid Stars within the NJL Model. *Symmetry*, 11(3):425.
- Schutz, B. F. (1996). Gravitational-wave sources. *Classical and Quantum Gravity*, 13(11A):A219–A238.
- Schutz, B. F. (2008). Asteroseismology of neutron stars and black holes. In *Journal of Physics Conference Series*, volume 118 of *Journal of Physics Conference Series*, page 012005.
- Sieniawska, M., Bejger, M., y Haskell, B. (2018). Estimating the EOS from the measurement of NS radii with 5% accuracy. *arXiv e-prints*, page arXiv:1803.08813.
- Sotani, H., Tominaga, K., y Maeda, K.-I. (2002). Density discontinuity of a neutron star and gravitational waves. *Physical Review D: Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*, 65(2):024010.
- Sotani, H., Yasutake, N., Maruyama, T., y Tatsumi, T. (2011). Signatures of hadron-quark mixed phase in gravitational waves. *Physical Review D: Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*, 83(2):024014.
- Sukhbold, T., Ertl, T., Woosley, S. E., Brown, J. M., y Janka, H.-T. (2016). Core-collapse supernovae from 9 to 120 solar masses based on neutrino-powered explosions. *The Astrophysical Journal*, 821(1):38.
- Taylor, J. H., Fowler, L. A., y McCulloch, P. M. (1979). Measurements of general relativistic effects in the binary pulsar PSR1913 + 16. *Nature*, 277(5696):437–440.
- Thorne, K. S. y Campolattaro, A. (1967). Non-Radial Pulsation of General-Relativistic Stellar Models. I. Analytic Analysis for  $L \gg 2$ . *The Astrophysical Journal*, 149:591.

- Tolman, R. C. (1939). Static solutions of einstein's field equations for spheres of fluid. *Phys. Rev.*, 55:364–373.
- Vásquez Flores, C. y Lugones, G. (2014). Discriminating hadronic and quark stars through gravitational waves of fluid pulsation modes. *Classical and Quantum Gravity*, 31(15):155002.
- Voskresensky, D. N., Yasuhira, M., y Tatsumi, T. (2003). Charge screening at first order phase transitions and hadron-quark mixed phase. *Nuclear Physics A*, 723(1-2):291–339.
- Witten, E. (1984). Cosmic separation of phases. *Phys. Rev. D*, 30:272–285.
- Yakovlev, D. G., Haensel, P., Baym, G., y Pethick, C. (2013). Lev landau and the concept of neutron stars. *Physics-Uspekhi*, 56(3):289–295.