



Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas.
Universidad Nacional de La Plata

Tesis para obtener el grado académico de
Licenciatura en Astronomía

**Implicaciones cosmológicas de cambios de fase de
la materia de quarks en el espectro de las ondas
gravitacionales primordiales**

Paula Denise López

Director: Gabriel León

Co-Director: Martín Miguel Gamboa Lerena

La Plata, Argentina

Resumen

El modelo cosmológico estándar supone una expansión acelerada del Universo durante sus primeros momentos conocida como inflación. Durante la etapa inflacionaria, se generan las semillas primordiales que permiten explicar la estructura a gran escala que se observa actualmente. Adicionalmente durante esta etapa se producen las ondas gravitacionales primordiales, las cuales evolucionan hasta la época actual.

Por otra parte, el modelo cosmológico estándar propone que la temperatura del Universo decrece. Utilizando simulaciones numéricas de Lattice QCD (LQCD) se ha medido [1] que los hadrones se desconfinan en un plasma de quarks y gluones a una temperatura del orden de $T \sim 155$ MeV. De esta manera, se supone que el universo temprano está compuesto de un plasma de quarks y gluones (QGP, por sus siglas en inglés) [2], [3] y que a medida que la temperatura del Universo disminuye, la materia de quarks cambia a una fase hadrónica. Se espera [4] que dicha transición de fase tenga un efecto en el espectro asociado a la densidad de energía de las ondas gravitacionales primordiales. En esta tesis se desarrolló un código que calcula la evolución temporal de dicho espectro para una ecuación de estado arbitraria. Dicho código se aplicó a dos ecuaciones de estado: una que describe transiciones de fase abrupta (de primer orden), basada en el modelo de bolsa del MIT. La segunda es una ecuación de estado de un modelo tipo Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio no local (PNJL), el cual genera transiciones de fase suaves o tipo *crossover*.

Se observó que la transición de fase produce una atenuación en el espectro primordial de las ondas gravitacionales para aquellas escalas dentro del radio de Hubble al momento en que ocurre la transición. Además se analizó la diferencia en el espectro comparando ambos modelos, en términos del tipo de transición de fase ocurrida y se encontró que la transición de tipo *crossover* produce una atenuación mucho más suave que la correspondiente a la transición de primer orden.

Índice general

Índice de figuras	III
Índice de cuadros	1
1. Introducción	3
2. Modelo Cosmológico Estándar	7
2.1. La métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker	9
2.2. Ecuaciones de Friedmann	10
2.3. Distancias y horizontes	16
2.4. Tiempo conforme	20
2.5. Solución a los problemas del modelo: Inflación	21
2.5.1. Problema del horizonte	21
2.5.2. Problema de la planitud	22
2.5.3. Inflación Estándar	24
2.6. Evolución del factor de escala	28
3. Historia Térmica del Universo	33
3.1. Equilibrio termodinámico	35
3.1.1. Funciones termodinámicas	35
3.1.2. Grados de libertad efectivos	37
3.1.3. Conservación de la entropía	38
4. Transición de Fase en QCD	39
4.1. Generalidades de cromodinámica cuántica	39
4.2. Modelos Efectivos	41
4.2.1. Modelo de Bolsa del MIT	41
4.2.2. Modelo Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio no local (PNJL)	43
4.2.3. Cálculos numéricos	45
5. Perturbaciones Cosmológicas	47
5.1. Solución a tiempos lejanos de la transición de fase	49

ÍNDICE GENERAL

5.2. Densidad de energía de las ondas gravitacionales	51
6. Métodos de Resolución	53
6.1. Modos que entran después de la transición de fase	54
6.2. Modos que entran antes de la transición de fase	56
7. Resultados	61
8. Conclusiones y trabajo a futuro	67
Bibliografía	71

Índice de figuras

2.1. Problema del horizonte	22
2.2. Solución problema del horizonte	27
2.3. Escalas físicas	27
3.1. Grados de libertad efectivos relativistas	38
4.1. Diagrama de fases de la QCD	41
4.2. EoS y Presión vs. temperatura, MIT	42
4.3. Calor específico, PNJL	44
4.4. EoS y Presión vs. temperatura, PNJL	45
4.5. Densidad de energía, MIT y PNJL	46
4.6. Temperatura vs. tiempo, modelo PNJL	46
7.1. Transición de fase, MIT	62
7.2. Evolución de los modos	63
7.3. Gráfico de $w(a) = P/\rho$, PNJL	65
7.4. Evolución de la densidad en función del factor de escala	65
7.5. Transición de fase, PNJL	66

Índice de cuadros

3.1. Historia térmica	35
---------------------------------	----

Capítulo 1

Introducción

Durante su evolución, el Universo ha pasado por una serie de transiciones de fase [5]. Una de ellas, predicha por la teoría de la cromodinámica cuántica QCD (por *Quantum ChromoDynamics*, en inglés) [6], es la transición de fase en la cual a medida que el Universo se va enfriando, un plasma caliente de quarks y gluones libres QGP (por Quarks Gluon Plasma) se transforma en un plasma de materia confinada. Esta es llamada transición de fase en la QCD.

Este evento sucedió mucho antes del desacople de los fotones, el cual dió origen a lo que se observa como fondo cósmico de radiación (FCR) y representa el momento más lejano del cual tenemos evidencia observacional. Es por esto que, la única forma que se tiene para obtener información acerca de esta transición es mediante las ondas gravitacionales primordiales que fueron generadas en la época inflacionaria. La razón por la cual las ondas gravitacionales poseen información sobre el Universo muy temprano es debido a que cuando las partículas se desacoplan del plasma primordial a cierta temperatura T_{des} , memorizan el estado físico del Universo a temperaturas $T \leq T_{des}$, de igual forma que el desacople de los fotones nos permite obtener información de ese instante y posterior.

Si bien la teoría QCD que rige las interacciones entre quarks y gluones, es una teoría bien establecida, ciertos puntos centrales de su diagrama de fases no están completamente comprendidos. Particularmente, es interesante comprender la naturaleza de la transición de fase entre el QGP y la materia de hadrones (considerados como estados confinados de materia de quarks) a altas temperaturas y bajas densidades (siendo estas las condiciones del Universo temprano), mediante ecuaciones de estado diferentes. Una cantidad que es sensible a la naturaleza de la transición de fase de la QCD es la densidad de energía de las ondas gravitacionales como función de la frecuencia [4]. El estudio del diagrama de fases de la QCD y la comparación entre teoría y experimento ha sido abordado desde múltiples puntos de vista. Existen diversos trabajos que abordan esta temática [4], [7], [8] y referencias allí mencionadas.

Existen diversos modelos efectivos simples, que permiten modelar una gran variedad de aspectos centrales de la teoría completa de la QCD. En particular en este trabajo se utiliza el modelo de bolsa del MIT [9], de donde se deriva una expresión analítica para la ecuación de estado. Este modelo genera transiciones de primer orden (abruptas). Sin embargo, hay trabajos [10], [11] donde se indica que la transición de fase de la QCD en el contexto de Universo temprano, el cual implica altas temperaturas y potencial químico nulo, debió ser de tipo *crossover*. Es por esto que se pretende realizar un estudio de la densidad espectral de energía de las ondas gravitacionales primordiales aplicando una ecuación de estado más realista, como la provista por el modelo de Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio.

Los experimentos desarrollados en los grandes aceleradores de partículas como el Relativistic Heavy Ion Collider (RHIC) o el Large Hadron Collider (LHC) han permitido obtener, desde aproximadamente una década información relacionada con el comportamiento de la materia en condiciones como las de los primeros microsegundos luego del Big Bang. Además en los últimos años, se ha abierto una nueva ventana observacional con los nuevos observatorios de ondas gravitacionales y los primeros resultados en la detección de las mismas [12]. Si bien estas detecciones están asociadas a eventos relacionados con fusiones de agujeros negros, se espera que en los próximos años se puedan detectar ondas gravitacionales primordiales, es decir las generadas en inflación, y así obtener información de cómo fue la transición de fase mencionada. Existen proyectos destinados a tal fin como el nuevo observatorio de ondas gravitacionales eLISA/NGO [13], el observatorio del Big Bang BBO [14] por sus siglas en inglés, y DECIGO [15] la antena espacial de ondas gravitacionales japonesa. De hecho, la próxima generación de experimentos en tierra, conocido como CMB-S4 [16] por sus siglas en inglés, tiene en sus principales objetivos la detección de los modos B de polarización del FCR. Estos modos son producidos por las ondas gravitacionales primordiales. Proveerán gran información sobre los orígenes de las fluctuaciones primordiales, producidas durante inflación o alguna teoría alternativa, y su evolución hacia la estructura a gran escala observada en la actualidad.

Para abordar este trabajo, la tesis se organizó de la siguiente manera:

- En el **Capítulo 2** se introducen los marcos teóricos donde se enmarca la tesis, el modelo cosmológico estándar e Inflación Estándar.
- En el **Capítulo 3** se describe brevemente la historia térmica del Universo, junto con un repaso de las propiedades termodinámicas que permitirá comprender la física a la que responden las partículas que forman el plasma primordial.
- En el **Capítulo 4** se realizará un análisis de la transición de fase de la QCD,

explicando los dos modelos utilizados en esta tesis: el modelo de bolsa del MIT y el modelo de PNJL-nl.

- En el **Capítulo 5** se realizará un análisis sobre cómo se originan las ondas gravitacionales, cuál es la ecuación que las describe, cómo son sus soluciones y también definir cómo es su densidad de energía, cantidad que será de interés en esta tesis.
- En el **Capítulo 6**, una vez definida la densidad de energía de las ondas gravitacionales, se calcularán cuáles son las ecuaciones diferenciales que describen: por un lado un Universo dominado puramente por radiación y por otro el momento donde ocurre la transición de fase.
- En el **Capítulo 7** se explica el funcionamiento del código desarrollado para poder resolver las ecuaciones y se exponen los resultados.
- Finalmente, en el **Capítulo 8** presentamos las conclusiones del trabajo expuesto en esta tesis y el trabajo futuro a realizar.

Capítulo 2

Modelo Cosmológico Estándar

En este Capítulo se presenta una descripción del modelo en el que se enmarca el desarrollo de esta tesis, cuyas secciones están basadas en las notas de D. Baumann “Cosmology, Part III Mathematical Tripos” [17] y el libro "The standard cosmology" de J.A. Frieman [18].

La Cosmología es el estudio físico del Universo como un todo, su estructura, su origen y su evolución. El marco teórico que se adopta en la cosmología tradicional es la teoría de la Relatividad General como descripción de la gravedad, que plantea que la materia (descrita por el tensor momento-energía) y la geometría del espacio-tiempo (descrita por una métrica $g_{\mu\nu}$ con signatura lorentziana) están íntimamente relacionadas. Las ecuaciones que describen esta relación son las *ecuaciones de Einstein*

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (2.0.1)$$

siendo $G_{\mu\nu}$ el tensor de Einstein, $T_{\mu\nu}$ el tensor momento-energía y G la constante de gravitación universal. Trabajaremos en el sistema natural de unidades, donde la velocidad de la luz resulta adimensional e igual a la unidad.

La notación que utilizaremos en este trabajo es la siguiente: los subíndices con letras griegas hacen referencias a coordenadas del espacio-tiempo (corren entre 0 y 3), mientras que los subíndices con letras latinas hacen referencia a coordenadas espaciales (corren entre 1 y 3). En cuanto a las derivadas parciales serán representadas mediante una coma $\partial/\partial x^\alpha \equiv “, \alpha”$ y las derivadas covariantes serán representadas por una semi-coma $\nabla_\alpha \equiv “; \alpha”$.

La materia en el Universo está definida por el tensor de energía momento, y la geometría del espacio por el tensor de Einstein, siendo necesario definir el tensor de Riemman, el tensor de Ricci, el escalar de Ricci y los símbolos de Christoffel junto con sus derivadas. Estos últimos se refieren a la conexión y nos permite definir la derivada covariante, que contiene derivadas primeras de la métrica. Se

definen como:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \equiv \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(g_{\beta\mu,\nu} + g_{\beta\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\beta}). \quad (2.0.2)$$

El tensor de curvatura de Riemman contiene derivadas segundas de la métrica y viene dado por:

$$R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} \equiv \Gamma_{\beta\nu,\mu}^{\alpha} - \Gamma_{\beta\mu,\nu}^{\alpha} + \Gamma_{\sigma\mu}^{\alpha}\Gamma_{\beta\nu}^{\sigma} - \Gamma_{\sigma\nu}^{\alpha}\Gamma_{\beta\mu}^{\sigma}, \quad (2.0.3)$$

es un tensor que describe completamente la curvatura de una variedad Riemanniana (si todos los signos de la métrica son positivos) o de una variedad Lorentziana o pseudo-Riemanniana (si al menos un signo de la métrica es negativo), en cualquier número de dimensiones. Si el espacio-tiempo no posee curvatura, este tensor tendrá todas sus componentes nulas y puede ser descrito por geometría euclídeana.

El tensor de Ricci surge de la contracción del primer y tercer índices del tensor de Riemman:

$$R_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\lambda\nu}^{\lambda}, \quad (2.0.4)$$

es un tensor simétrico (1,3), como consecuencia de la simetría del tensor de Riemman. Para $dim < 4$ define de manera unívoca la curvatura de la variedad, pero como el espacio-tiempo es de 4 dimensiones no determina por completo la curvatura. También se define el escalar de Ricci como la traza del tensor de Ricci: $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$.

Por último definimos el tensor de Einstein como:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}, \quad (2.0.5)$$

que es simétrico debido a la simetría del tensor de Ricci y la métrica.

Por otro lado, el principio en el que se basa este modelo es el Principio Cosmológico, en donde se asume un Universo espacialmente homogéneo e isótropo a escalas cosmológicas (mayores que aproximadamente 100 Mpc).

La homogeneidad hace referencia a propiedades del medio, significa que en todo punto del espacio se tiene las mismas propiedades y se observa lo mismo que en cualquier otro punto, lo cual implica que no existen posiciones preferenciales. En otras palabras, la homogeneidad (espacial) se define como la invarianza bajo translaciones (espaciales). La isotropía hace referencia a direcciones dentro del medio, significa que los resultados que se obtengan de la observación del Universo deben ser independientes de la dirección en que observemos, es decir, que

la métrica espacial debe ser esféricamente simétrica, lo cual implica invarianza bajo rotaciones. Que haya homogeneidad e isotropía significa que el espacio es maximalmente simétrico.

Existen fuertes evidencias observacionales que apoyan estas hipótesis, como las mediciones del FCR. Se han medido las anisotropías en temperatura, esto es pequeñas fluctuaciones en temperatura de una dirección a otra en el cielo, con una alta precisión resultando diferir en una parte en cien mil respecto a su valor medio de 2,7255 K [16, 19]. Esto pareciera sugerir que nuestro Universo es altamente isotrópico desde nuestra posición. Considerando que nuestra posición no se encuentra en el 'centro' del Universo, es decir no estamos en una posición privilegiada, concluimos también una alta homogeneidad.

En resumen, con las evidencias observacionales y el marco teórico dado, este modelo plantea la idea de que el Universo tuvo un evento singular inicial a partir del cual se formó el espacio-tiempo. Inmediatamente después, a los $t \sim 10^{-34}$ segundos¹ [20], se habría producido una breve expansión acelerada, denominada Inflación. A partir de ese instante, y hasta el presente, el Universo se ha encontrado en expansión. De esta manera se logró explicar las diversas observaciones que se han ido realizando.

2.1. La métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

Según vimos, el modelo cosmológico estandar supone un Universo isótropo y homogéneo. La métrica que describe este tipo de Universo es la de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW),

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right], \quad (2.1.1)$$

donde utilizaremos la signatura loretziana $(-, +, +, +)$. Se tiene que $a(t)$ es el factor de escala, una función adimensional dependiente del tiempo que se relaciona con la expansión del Universo. Las coordenadas (t, r, θ, ϕ) son las coordenadas comóviles. Esto es que asignan valores constantes a aquellos observadores que ven al espacio como homogéneo e isotrópico, es decir los observadores comóviles. La coordenada t es llamada tiempo cósmico, es el tiempo propio de los observadores comóviles.

La constante K se relaciona con la curvatura del espacio, y se puede elegir una normalización de manera que tome los valores $-1, 0$ ó 1 .

¹Tiempo medido por observadores comoviles.

Si $K = 0$, se tienen secciones espaciales planas, y la parte espacial de la métrica puede ser descripta como un espacio Euclideo en coordenadas esféricas, quedando la métrica :

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) [dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2], \quad (2.1.2)$$

nos referimos a este como un Universo espacialmente *plano*. Igualmente, el espacio-tiempo tendrá curvatura ya que el factor de escala $a(t)$ depende del tiempo.

Si $K = 1$, se tiene una curvatura espacial positiva y mediante la transformación $r = K^{-1/2} \text{sen } \chi$, con $0 < \chi < \pi$, podemos escribir a la métrica como:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)K^{-1} [d\chi^2 + \sin^2 \chi d\theta^2 + \sin^2 \chi \sin^2 \theta d\phi^2], \quad (2.1.3)$$

la parte espacial de la métrica corresponde a una 3-esfera. A este tipo de Universo se lo llama *cerrado*: finito pero sin frontera.

Finalmente si $K = -1$ se tiene una curvatura espacial negativa. Aquí, análogamente al caso anterior, podemos realizar una transformación $r = |K|^{-1/2} \text{senh } \chi$, con $0 < \chi < \infty$, obteniendo:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)|K|^{-1} [d\chi^2 + \text{sinh}^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)], \quad (2.1.4)$$

la parte espacial representa un hiperboloide en 3 dimensiones, la cual representa a un Universo no-compacto y es llamado un Universo *abierto*.

2.2. Ecuaciones de Friedmann

Una vez que tenemos la métrica que define el tipo de Universo que queremos modelar, podemos empezar a resolver las ecuaciones de Einstein, para eso vamos a modelar el tensor energía momento como un fluido perfecto visto por un observador comóvil:

$$T_{\nu}^{\mu} = (\rho + P)U^{\mu}U_{\nu} - P\delta_{\nu}^{\mu}, \quad (2.2.1)$$

donde U^{μ} es la tetra-velocidad relativa entre el fluido y el observador mientras que ρ es la densidad de energía y P la presión del fluido en reposo. La forma de este tensor es la más general compatible con las hipótesis de homogeneidad e isotropía. La isotropía implica que el fluido permanece en reposo en las coordenadas de la

métrica, es decir $U^\mu = (1, 0, 0, 0)$ y el tensor será diagonal:

$$T_\nu^\mu = \text{diag}(-\rho, P, P, P). \quad (2.2.2)$$

La homogeneidad implica que ρ y P son funciones del tiempo, $\rho = \rho(t)$ y $P = P(t)$. Para conocer cómo la densidad y presión evolucionan en el tiempo debemos considerar que en el espacio de Minkowski, la energía y el momento son conservados. Así la densidad de energía satisface la ecuación de continuidad y de manera similar la densidad de momento satisface la ecuación de Euler. Combinando estas leyes se llega a la ecuación de conservación de las cuatro componentes del tensor momento-energía:

$$\partial_\mu T_\nu^\mu = 0. \quad (2.2.3)$$

Esta es la ecuación de conservación para T_ν^μ en Minkowski. Utilizando el principio de equivalencia, dicha ecuación se puede generalizar a

$$\nabla_\mu T_\nu^\mu = 0, \quad (2.2.4)$$

donde ∇ es derivada covariante, y con la derivada covariante asociada a la métrica de FLRW se obtiene la ecuación de continuidad:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + P) = 0. \quad (2.2.5)$$

El Universo está además conformado por distintas componentes que se clasifican según su contribución a la presión, es decir según su ecuación de estado.

Entonces dada una ecuación de estado $P = \omega\rho$, donde la pendiente de ω es la velocidad del sonido en el fluido, se puede reemplazar en la ecuación de continuidad 2.2.5 y así obtener la relación entre la densidad de energía y el factor de escala

$$\rho \propto a^{-3(1+\omega)}. \quad (2.2.6)$$

A continuación, tomando como referencias el libro de S. Dodelson "Modern Cosmology"[21] y las notas de O.F. Piattella "Lectures Notes in Cosmology"[22], se caracterizarán las distintas componentes según la ecuación de estado por la que están descriptas:

- **Materia ó Polvo:** nos referimos como materia a toda forma cuya presión es mucho menor que la densidad de energía $|P| \ll \rho$, es decir $\omega = 0$. Corresponde al caso de un gas de partículas no relativistas. Considerando

$P = 0$ tenemos $\rho \propto a^{-3}$. Dentro de la materia encontramos dos tipos:

- *Materia Bariónica*. Es todo aquello formado por átomos y sus partículas constituyentes (protones, neutrones, electrones). Dentro de esta materia se incluye a las estrellas, planetas, galaxias y gas entre otros elementos de nuestro Universo. La densidad de esta materia se puede medir mediante su interacción con la radiación.
 - *Materia Oscura*. Hay diversas observaciones que evidencian la existencia de un tipo de materia no ordinaria, esto es que no interactúa electromagnéticamente, si no que su existencia se infiere por sus efectos gravitatorios en la materia que sí es observable, y es llamada materia oscura. Dentro de las pruebas de su existencia se encuentran:
 1. La dinámica de las galaxias en cúmulos de galaxias. Mediante su análisis se encuentra que la masa que tendrían que tener es mucho mayor a la observada [23].
 2. La forma de las curvas de rotación de las galaxias espirales no se explica con la materia que se observa [24, 25].
 3. La luminosidad en rayos x de los cúmulos de galaxias depende del pozo de potencial gravitatorio de estos, los cuales resultan mucho más profundos que los generados solo con materia visible [26].
 4. Permite explicar la formación de estructura del Universo.
 5. Considerando lentes gravitacionales [27, 28], que se forman cuando la radiación proveniente de una fuente distante se curva entorno a un objeto masivo situado en la línea de la visual. Existe técnicas tales que, a partir de la deformación de las fuentes del fondo se puede deducir la distribución de masa del objeto que hace la lente, permitiendo así detectar fuentes no visibles como la materia oscura.
- **Radiación**: nos referimos a radiación a toda aquella forma donde la presión es un tercio de la densidad de energía $P = \frac{1}{3}\rho$, es decir $\omega = 1/3$. Es el caso de un gas de partículas relativistas, donde la densidad de energía está dominada por la energía cinética (el momento es mucho mayor que la masa). Este caso implica $\rho \propto a^{-4}$. Está compuesta por:
- *Fotones*. El Universo temprano estaba dominado por fotones que interactuaban con el plasma primordial mediante dispersión de Thomson. Estos no tienen masa por lo que siempre son relativistas. Actualmente, como consecuencia del desacople de los fotones primordiales de la ma-

teria, se los puede detectar formando lo que se denomina fondo cósmico de radiación (FCR).

El FCR nos ofrece una mirada del Universo cuando tan solo tenía 380,000 años. Estos fotones viajaron libremente a través del espacio, y poseen información de las condiciones físicas del Universo en ese momento. Sus características más importantes son:

1. Su espectro corresponde al de un cuerpo negro a una temperatura media de $T_{FCR} = 2,7255 \text{ K}$ [19].
 2. Su distribución en el cielo es casi isotrópica, con pequeñas fluctuaciones en temperatura de una dirección a otra en el cielo con una precisión de 10^{-5} de su valor medio.
 3. Está polarizado débilmente. Se distinguen dos modos de polarización: los modos E y los modos B.
- *Neutrinos.* Son partículas subatómicas que poseen masas muy pequeñas, de manera que se comportan como partículas relativistas. A diferencia de los fotones y los bariones, los neutrinos primordiales no se han observado debido a la dificultad que conlleva poder detectarlos. Se plantea que en un principio estuvieron en equilibrio con el resto del plasma primordial pero perdieron contacto, formando lo que se conoce como el fondo cósmico de neutrinos (FCN), debido a que su interacción con la materia es extremadamente débil.
- **Energía Oscura:** hay evidencias que señalan que la materia y radiación no son suficientes para describir la evolución del Universo que es compatible con las observaciones actuales. Se espera que la densidad de energía del Universo sea muy cercana a la crítica, pero la densidad de la materia total observada es un tercio de la crítica. De esta forma, los restantes dos tercios de la densidad en el Universo deben corresponder a una forma suave, no agrupada. Por otro lado, observaciones de supernovas tipo Ia muy lejanas [29, 30] sugirieron que el Universo se estaba expandiendo de forma acelerada. De esta forma, el Universo parece estar dominado por un misteriosa componente de presión negativa $P = -\rho$, es decir $\omega = -1$, nada como lo que se ha encontrado en el laboratorio, siendo su densidad de energía constante $\rho \propto a^0$. Se denomina a esta forma como energía oscura.

Una vez caracterizadas las fuentes de materia, se quisiera encontrar cuál es su relación con el factor de escala en la métrica de FLRW. Para esto se tendrá que resolver las ecuaciones de Einstein 2.0.1.

Primero se resolverá la parte geométrica. Dada la métrica 2.1.1, se pueden calcular los símbolos de Christoffel con lo cuál podremos calcular el tensor de Ricci

y luego el escalar de Ricci. Hay algunas componentes que no serán necesarias de calcular, estas son $R_{i0} = R_{0i}$, ya que se anulan debido a la isotropía de la métrica. Por esto, las componentes no nulas del tensor de Ricci serán

$$\begin{aligned} R_{00} &= -3\frac{\ddot{a}}{a}, \\ R_{ij} &= -\left[\frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 2\frac{K}{a^2}\right]g_{ij}. \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

El escalar de Ricci que se obtiene es

$$R = -6\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{K}{a^2}\right]. \quad (2.2.8)$$

Con las ecuaciones 2.2.7 y 2.2.8 calculamos las componentes no nulas del tensor de Einstein 2.0.5,

$$\begin{aligned} G_0^0 &= 3\left[\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{K}{a^2}\right], \\ G_j^i &= \left[2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{K}{a^2}\right]\delta_j^i. \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

Combinando las ecuaciones 2.2.9 con el tensor de momento-energía 2.2.1 obtenemos:

$$\begin{aligned} 3\left[\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{K}{a^2}\right] &= 8\pi G\rho, \\ \left[2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{K}{a^2}\right] &= 8\pi GP. \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

Trabajando algebraicamente estas ecuaciones se obtienen las *ecuaciones de Friedmann*:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{K}{a^2}, \\ \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P), \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

donde ρ y P se entienden como la suma de todas las contribuciones a la densidad de energía y presión en el Universo. Usualmente se hace referencia a la primera de estas dos ecuaciones como la 'ecuación de Friedmann'.

Se va a considerar ρ_r como la contribución de la radiación (con ρ_γ para los

fotones y ρ_ν para los neutrinos), ρ_m a la contribución de la materia (con ρ_c para materia oscura fría y ρ_b para los bariones) y ρ_Λ para la contribución de la energía del vacío. Se suele escribir la ecuación de Friedmann en términos del parámetro de Hubble $H = H(t)$ definido como $H \equiv \dot{a}/a$, que representa la tasa de expansión del Universo,

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{K}{a^2}. \quad (2.2.12)$$

Esta ecuación relaciona la densidad de energía ρ , la curvatura del espacio K/a^2 y la tasa de expansión del Universo H . Es decir que según el valor de la densidad de energía tendremos distinta curvatura espacial y distinta evolución para el factor de escala. Si se despeja la densidad de energía de la ecuación 2.2.12 se obtiene:

$$\rho(t) = \rho_{crit} + \frac{3K}{8\pi G a(t)^2}, \quad \text{con} \quad \rho_{crit}(t) = \frac{3H(t)^2}{8\pi G}, \quad (2.2.13)$$

donde definimos la densidad crítica que depende del parámetro de Hubble $H(t)$. Para la actualidad tiene un valor de $\rho_{crit} = 3H^2/8\pi G$.

Definimos el parámetro densidad, que es una cantidad adimensional, como:

$$\Omega(t) \equiv \frac{\rho(t)}{\rho_{crit}(t)}. \quad (2.2.14)$$

De manera que, si dividimos por ρ_{crit} a la ecuación 2.2.13, utilizando la definición del parámetro de densidad obtenemos otra forma de la ecuación de Friedmann:

$$\Omega(t) = 1 + \frac{K}{H(t)^2 a(t)^2}. \quad (2.2.15)$$

Como la constante de curvatura y el parámetro de densidad dependen de la densidad ρ , se tiene que:

$$\begin{cases} \rho < \rho_{crit} & \leftrightarrow & \Omega < 1 & \leftrightarrow & K < 0 & \text{Universo abierto} \\ \rho = \rho_{crit} & \leftrightarrow & \Omega = 1 & \leftrightarrow & K = 0 & \text{Universo plano} \\ \rho > \rho_{crit} & \leftrightarrow & \Omega > 1 & \leftrightarrow & K > 0 & \text{Universo cerrado} \end{cases}$$

Por otro lado, se puede reescribir la ecuación 2.2.10 utilizando el parámetro densidad y considerando que el Universo está compuesto por radiación, materia

y energía oscura de la siguiente forma:

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_r a^{-4} + \Omega_m a^{-3} + \Omega_k a^{-2} + \Omega_\Lambda. \quad (2.2.16)$$

Donde se definió un parámetro de densidad de curvatura $\Omega_k \equiv -K/(a_0 H_0)^2$. Los parámetros de densidad están normalizados al valor medido hoy, se ha normalizado el factor de escala de manera que $a_0 \equiv 1$.

Podemos escribir entonces la densidad de energía total del Universo como la suma de todas las componentes:

$$\rho = \rho_r + \rho_m + \rho_\Lambda, \quad (2.2.17)$$

y de la misma forma se tiene

$$\Omega = \Omega_r + \Omega_m + \Omega_\Lambda. \quad (2.2.18)$$

De las observaciones del satélite Planck del FCR [19] se sabe que la contribución de la radiación actual es muy pequeña, $\Omega_r \approx 10^{-5}$. Por lo que usualmente se suele escribir:

$$\Omega = \Omega_m + \Omega_\Lambda. \quad (2.2.19)$$

Los valores actuales de los parámetros cosmológicos para el modelo cosmológico estándar, según el satélite Planck [19] son $H_0 = 67,36 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, $\Omega_m h^2 = 0,3166$, $\Omega_\Lambda = 0,6847$ y $\Omega_r h^2 = 2,47 \times 10^{-5}$, lo que nos da un Universo compuesto en su gran mayoría por energía oscura. Del total de materia, la materia bariónica representa menos del 5%. Estas observaciones, también sugieren que la densidad del Universo es muy cercana a la crítica $\Omega_0 \approx 1$ y se tendría $K \approx 0$, es decir que la geometría de nuestro Universo sería muy cercana a la plana. De esta manera tenemos determinado nuestro modelo cosmológico.

2.3. Distancias y horizontes

Toda la información observacional que se obtiene de nuestro Universo viene de las ondas electromagnéticas, y recientemente de las gravitacionales. Por lo tanto es necesario entender cómo viajan estas ondas en un espacio-tiempo en expansión. A continuación se definirán algunos conceptos de Relatividad General necesarios para analizar el modelo utilizado.

Aunque las observaciones son consistentes con un Universo caracterizado por $K = 0$ [19], se va a realizar la descripción más general. Se considerará el caso especial (para luego generalizar) donde, en el espacio-tiempo, los fotones viajan a lo largo de geodésica nulas, es decir que $ds^2 = 0$, y en la métrica de FLRW dada por la ecuación 2.1.1, viajan en la dirección radial, $\theta = \phi = cte$, por lo que seguirán un camino de la forma:

$$\frac{dt}{a(t)} = -\frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}. \quad (2.3.1)$$

Ahora, si se supone que una galaxia distante se encuentra estacionaria en coordenadas comóviles r_1 y emite luz en un tiempo t_1 . Esta señal se observa en r_0 , a un tiempo t_0 , la cual será determinada resolviendo:

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}. \quad (2.3.2)$$

Si la galaxia emite una segunda señal al tiempo $t_1 + \delta t_1$, esta será observada a un tiempo $t_0 + \delta t_0$, de manera que

$$\int_{t_1 + \delta t_1}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}. \quad (2.3.3)$$

Debido a que se utilizan coordenadas comóviles, esto es, el receptor y la fuente permanecen en reposo respecto a un observador comóvil, el lado derecho de las expresiones 2.3.2 y 2.3.3 son iguales, por lo que se tiene

$$\int_{t_1 + \delta t_1}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{a(t)} - \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \longrightarrow \frac{\delta t_1}{a(t_1)} = \frac{\delta t_0}{a(t_0)} = \delta t_0. \quad (2.3.4)$$

En esta última igualdad se ha tenido en cuenta el hecho de que estamos observando la señal hoy $a(t_0) = 1$. Aquí se ve lo que significa la expansión del Universo, que la diferencia temporal entre dos señales emitidas desde el mismo punto es diferente a la diferencia temporal entre la observación de ambas señales.

Mientras que dos crestas de la onda emitida están separadas por un tiempo $\delta t_1 = \lambda_1/c$ siendo λ_1 la longitud de la onda emitida, el intervalo de tiempo entre dos crestas de la onda observada esta dado por $t_0 = \lambda_0/c$.

De esta manera, el resultado en la ecuación 2.3.4 nos dice que la longitud de onda observada difiere de la emitida,

$$\lambda_0 = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} \lambda_1 = \frac{\lambda_1}{a(t_1)}. \quad (2.3.5)$$

Esto es porque la luz, a medida que viaja, es dilatada por la expansión del espacio de manera que la longitud de onda que observamos es mayor que aquella emitida. Esto es conocido como *redshift cosmológico* (por corrimiento al rojo en inglés).

El parámetro utilizado para este redshift es definido como la fracción del incremento en la longitud de onda observada:

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1} = \frac{1 - a(t_1)}{a(t_1)} \quad \longrightarrow \quad 1 + z = \frac{1}{a(t_1)}. \quad (2.3.6)$$

En cosmología es usual referirse a tiempos pasados en función del redshift, siendo hoy $z = 0$. Cuando $z = 1$ el Universo tenía la mitad del tamaño de hoy, a $z = 2$ un tercio, y así.

Es conveniente utilizar esta cantidad ya que es algo que puede ser medido directamente, observando los corrimientos de las líneas espectrales de galaxias.

En cuanto a las distancias, no es fácil medirlas en un espacio en expansión. Se encuentra que hay dos tipos: la *distancia comóvil* que permanece fija a medida que el Universo se expande, es decir que para dos objetos comóviles la distancia comóvil entre ellos no cambia,

$$d_c(r, t) = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}, \quad (2.3.7)$$

y la *distancia física* ó *distancia propia* que va creciendo debido a la expansión,

$$d_p(r, t) = a(t) \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}. \quad (2.3.8)$$

Observamos que ambas distancias difieren una de otra por el factor de escala $a(t)$.

Por otro lado, el tamaño de una parte del espacio está determinada por lo lejos que puede viajar la luz en cierta cantidad de tiempo, es decir que las trayectorias de los fotones permiten determinar horizontes. Como vimos, al ser el espacio isotrópico, siempre podemos definir un sistema de coordenadas en el cual la luz viaje puramente en la dirección radial ($\theta = \phi = cte$), y siendo que los fotones viajan a lo largo de geodésicas nulas, es decir $ds^2 = 0$, obteníamos la ecuación [2.3.1](#).

De esta manera se pueden definir dos tipos de horizontes cosmológicos. Uno que limita las distancias a las cuales eventos pasados pueden ser observados y otro que limita las distancias a las cuales sería posible observar eventos futuros.

Éstos son:

- **Horizonte de Partículas:** es la distancia a la que se encuentra la región más distante de la que hemos recibido luz, por lo que constituye el radio de nuestro Universo observado. Si el Big Bang “comenzó” con la singularidad a $t_i \equiv 0$, entonces las distancias más grandes de las cuales un observador a tiempo t será capaz de recibir señales viajando a la velocidad de la luz está dada por:

$$d_{part}(t) = a(t) \int_0^{r_{part}} \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} = a(t) \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}. \quad (2.3.9)$$

Este es llamado el horizonte de partículas. Sea un observador p , solo partículas cuyas líneas de mundo intersectan con el cono de luz pasado de p pueden enviar señales a este, cada observador tiene su propio horizonte de partículas. El borde de la región que contiene tales líneas de mundo es el horizonte de partículas en p .

- **Horizonte de Eventos:** así como hay eventos pasados que no podemos ver, hay muchos eventos futuros que no seremos capaces de observar nunca. Este tipo de horizonte separa las regiones que somos capaces de observar a algún tiempo t , de aquellas regiones que nunca podremos observar. Si consideramos que el suceso que queremos observar ocurre a un tiempo t tendremos:

$$d_{ev}(t) = a(t) \int_0^{r_{ev}} \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} = a(t) \int_t^{t_f} \frac{dt'}{a(t')}. \quad (2.3.10)$$

Este es el llamado horizonte de eventos, para algún tiempo final t_f . Notar que esto podría ser finito aún si el tiempo físico es infinito, $t_f = +\infty$. Si este es el caso, no depende de la forma de $a(t)$.

Otra distancia que se suele utilizar es el *radio comóvil de Hubble*, $d_H = (aH)^{-1}$. Define la distancia, a partir de la cual, los objetos se están alejando de nosotros a velocidades mayores a la de la luz. Con esta definición, y considerando la ecuación de estado $\omega \equiv P/\rho$ se llega a:

$$(aH)^{-1} = H_0^{-1} a^{-\frac{1}{2}(1+3\omega)}. \quad (2.3.11)$$

Se sabe además, que toda fuente de materia cumple la *condición fuerte de energía* (SEC), es decir que $1 + 3\omega^2 > 0$, por lo que si la utilizamos y observamos la ecuación 2.3.11, podemos asumir que el radio comóvil de Hubble se incrementa mientras el Universo se expande y ocurre que $d_{part}(t) \sim (aH)^{-1}$. Por eso es usual referirse a ambos (el horizonte de partícula y el radio de Hubble) como “horizonte”. Es importante remarcar que el horizonte de partículas y el radio de Hubble son diferentes cantidades: partículas separadas por distancias mayores a d_{part} nunca se podrán comunicar, mientras que si están separadas por una cantidad mayor que $(aH)^{-1}$ significa que no se pueden comunicar a un dado tiempo. En los casos donde la SEC se rompe, ambas distancias pueden llegar a diferir mucho, como ocurre en los casos de expansión acelerada: $\ddot{a} > 0$.

2.4. Tiempo conforme

Las propiedades de los horizontes definidos en la sección anterior pueden ser mejor ilustrados si introducimos una coordenada temporal diferente. Con lo cual, vamos a definir al *tiempo conforme* como:

$$d\eta = \frac{dt}{a(t)} \quad \longrightarrow \quad \eta = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}. \quad (2.4.1)$$

De manera que, recordando la expresión del horizonte de partículas dada por la ecuación 2.3.9 vemos que el tiempo conforme también representa un horizonte, este será un horizonte comóvil.

Luego, si reescribimos la métrica de FLRW, la ecuación 2.1.1, en estas coordenadas obtenemos:

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[-d\eta^2 + d\chi^2 + S_k^2(\chi) (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right], \quad (2.4.2)$$

donde se definió la coordenada radial como $d\chi \equiv dr/\sqrt{1 - Kr^2}$ y la siguiente función:

$$S_k(\chi) = \begin{cases} \sinh\chi & K = -1 \\ \chi & K = 0 \\ \sin\chi & K = 1 \end{cases} \quad (2.4.3)$$

Es de interés un Universo que sea consistente con las observaciones y, como ya se mencionó, esto es consistente con $K = 0$, de manera que la métrica queda:

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[-d\eta^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \right], \quad (2.4.4)$$

que, como se puede observar, está expresada de manera conforme con respecto a la métrica de Minkowski, es decir que queda expresada como un múltiplo de sí misma. De igual forma podemos expresar a las ecuaciones de Friedmann en tiempo conforme:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= \frac{8\pi G}{3}a^2\rho, \\ \frac{\ddot{a}}{a} &= \frac{4\pi G}{3}a^2(\rho - 3P). \end{aligned} \tag{2.4.5}$$

Se tiene entonces que las distancias separadas por una distancia comóvil mayor que η no están conectadas causalmente. Entonces, consideramos cantidades con una longitud de onda característica λ y número de onda k , tal que $k \propto \lambda^{-1}$, se puede saber si se encuentran dentro (sub) o fuera (supra) del horizonte definido mediante la ecuación 2.4.1 según la siguiente relación:

$$\begin{cases} k|\eta| \ll 1 & \implies \text{sub - horizonte,} \\ k|\eta| \gg 1 & \implies \text{supra - horizonte.} \end{cases} \tag{2.4.6}$$

Este es un horizonte comóvil, no es un horizonte físico. Se utilizan las expresiones sub-horizonte y supra-horizonte como es usual en la literatura [21].

2.5. Solución a los problemas del modelo: Inflación

Hasta ahora hemos introducido el marco teórico que nos provee el modelo cosmológico estándar. Se sabe que este modelo logra reproducir la mayoría de los fenómenos observados, como la expansión del Universo, el FCR, las abundancias de elementos livianos entre otros. Sin embargo, es una teoría incompleta ya que existen observaciones que no tienen una explicación natural en este marco, encontrando así varios problemas.

Si bien son varios problemas, aquí mencionaremos dos de los tradicionales: el problema del horizonte y el problema de la planitud, y se explicará brevemente la solución propuesta, es decir la Inflación Estándar. Esta sección fue basada en las notas de D. Baumann [17], de A. Riotto [31] y el trabajo de J-P. Uzan [32].

2.5.1. Problema del horizonte

Aproximadamente 380.000 años luego del Big Bang, el Universo se enfrió lo suficiente como para permitir la formación de átomos de hidrógeno y el desacople de los fotones del plasma primordial. Este evento es observado en la forma de

FCR. Esta radiación habíamos visto que es casi perfectamente isotrópica, con anisotropías en la temperatura menores que una parte en cien mil.

El tiempo que hay entre el inicio (t_i) y la formación del FCR (t_{rec}) implica que muchos de los puntos sobre la hipersuperficie espacial correspondiente al FCR, tienen conos de luz pasados que no se solapan entre si y por lo tanto nunca estuvieron en contacto causal. El diagrama de la Figura 2.1 permite visualizarlo en forma más clara.

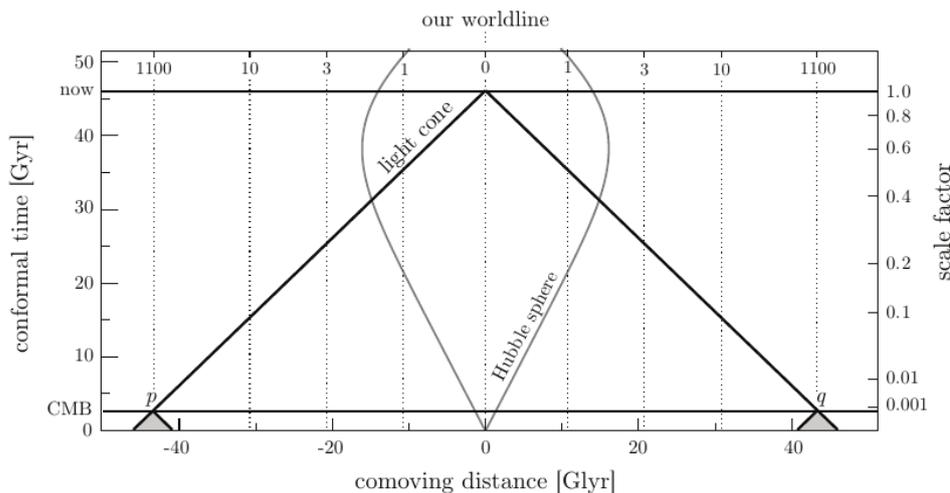


Figura 2.1: Representación del problema del horizonte, donde los conos de luz de dos puntos perteneciente al FCR no se comunican. Esta imagen fue tomadad del libro [17].

Si consideramos dos direcciones opuestas en el cielo, decimos que los fotones del FCR que recibimos de esas direcciones fueron emitidos desde los puntos P y Q respectivamente. Vemos que estos fotones fueron emitidos muy cerca de la singularidad del Big Bang y que los conos de luz pasados no se solapan, es decir que no hay puntos que caigan simultáneamente dentro del horizonte de partícula definidos por P y Q . Por esto, podríamos preguntarnos ¿cómo es que los fotones provenientes de P y Q sabían, por decirlo de alguna manera, que debían estar a, casi exactamente, la misma temperatura? Lo mismo aplica para dos puntos cualquiera en el FCR que estén separados por más de un grado en el cielo. La homogeneidad del FCR se extiende a escalas mucho más grandes que el horizonte de partícula al tiempo en el que el FCR fue formado. Si no hay suficiente tiempo para que esas regiones se comuniquen, ¿por qué se parecen? Esto constituye el problema del horizonte.

2.5.2. Problema de la planitud

Además del problema del horizonte, el modelo cosmológico estándar presenta el problema de la planitud. Surge de la observación de la densidad de materia y energía en el Universo que afectan a la curvatura del espacio-tiempo, que parecen

estar ligadas a valores muy específicos requeridos para la existencia de un Universo plano.

Comencemos suponiendo que las ecuaciones de Einstein son válidas durante la época de Planck, cuando la temperatura del Universo era del orden de $T_P \sim 10^{19}$ GeV. De la expresión de la curvatura dada por la ecuación 2.2.15 se tiene:

$$\Omega - 1 = \frac{K}{H^2 a^2}. \quad (2.5.1)$$

Durante la época de radiación, se tenía que $H^2 \propto \rho_r \propto a^{-4}$ y

$$\Omega - 1 \propto \frac{K}{a^{-4} a^2} \propto a^2, \quad (2.5.2)$$

y durante la época dominada por materia $\rho_m \propto a^{-3}$,

$$\Omega - 1 \propto \frac{K}{a^{-4} a^3} \propto a. \quad (2.5.3)$$

Se puede ver que la cantidad $\Omega - 1$ decrecerá a medida que vayamos atrás en el tiempo, en ambos casos. De las observaciones sabemos que el valor actual (Ω_0) es del orden de la unidad, por lo tanto podremos calcular su valor en el origen del Universo, es decir a la temperatura de Planck. Para el siguiente cálculo consideramos la evolución de esta cantidad en un Universo dominado por radiación, siendo $T_0 \sim 10^{-13}$ GeV la temperatura del FCR:

$$\frac{|\Omega - 1|_{T=T_P}}{|\Omega - 1|_{T=T_0}} \approx \left(\frac{a_P^2}{a_0^2} \right) \approx \left(\frac{T_0^2}{T_P^2} \right) \approx \mathcal{O}(10^{-64}). \quad (2.5.4)$$

Incluso si realizamos este cálculo sin ir tan atrás en el tiempo, considerando la época de nucleosíntesis por ejemplo, donde la temperatura era $T \sim 1$ MeV, vamos a tener

$$\frac{|\Omega - 1|_{T=T_N}}{|\Omega - 1|_{T=T_0}} \approx \left(\frac{a_N^2}{a_0^2} \right) \approx \left(\frac{T_0^2}{T_N^2} \right) \approx \mathcal{O}(10^{-16}). \quad (2.5.5)$$

Así pues, para tener un valor de Ω_0 cercano a uno en el presente, el valor de $\Omega(t)$ en tiempos tempranos debió ser extremadamente cercano a cero, sin serlo precisamente. En consecuencia se requiere que las condiciones iniciales sean muy específicas y deban estar ajustadas muy finamente para obtener un Universo espacialmente plano como se observa actualmente [19].

2.5.3. Inflación Estándar

La Inflación es una teoría que permite dar solución a varios problemas del modelo estándar cosmológico. Es importante remarcar que no es una teoría que reemplaza a la teoría del Big Bang, si no que es una extensión de la misma. Se propone un período de expansión acelerada del Universo posterior al Big Bang, durante el cual la densidad de energía estaba dominada por un tipo de materia con características similares a la de energía oscura, esto es un campo cuántico llamado inflatón. Una vez finalizada esta etapa el Universo se sigue una etapa de recalentamiento, la cual está por fuera de los límites de esta tesis, donde el campo inflatón decae en todas las partículas del modelo estándar [33], [34]. Posteriormente de la etapa de recalentamiento comienza la época dominada por radiación y comienza a evolucionar como explica el modelo cosmológico estándar.

A partir de la ecuación 2.2.11, se puede ver que plantear una época con una expansión acelerada implica:

$$\ddot{a} > 0 \iff (\rho + 3P) < 0. \quad (2.5.6)$$

Es decir que obtenemos un período acelerado si se tiene una presión negativa: $P < -\rho/3$, y sabemos que ni la radiación ni la materia cumplen esta condición. Vamos a considerar en particular que $P = -\rho$. Un período del Universo en el que ocurre esto es llamado una etapa de *de-Sitter*. De las ecuaciones 2.2.5 y 2.2.12, obtenemos que durante la fase de de-Sitter:

$$\begin{aligned} \rho &= \text{constante}, \\ H_I &= \text{constante}. \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

Siendo H_I la constante de Hubble durante Inflación. Resolviendo la ecuación 2.2.12 obtenemos:

$$a = a_i e^{H_I(t-t_i)}, \quad (2.5.8)$$

donde a_i y t_i son correspondientemente el factor de escala y el tiempo en el cual empieza Inflación.

Estrictamente hablando, la etapa inflacionaria no se puede caracterizar por una etapa de de-Sitter exacta, es decir una etapa con un factor de escala definido por la ecuación 2.5.8. Esto es porque una etapa de de-Sitter no terminaría nunca de inflar, y así no se formaría la estructura a gran escala que se observa. Lo que se plantea es suponer que existe un tipo de materia que se puede modelar por un campo escalar: el *inflatón*, que tendrá una ecuación de estado $P \sim -\rho$. Con esta

ecuación y el inflatón, es posible establecer un mecanismo con el cual Inflación va a terminar en algún momento y de esta manera se garantiza la formación de estructura. Sin embargo, las ecuaciones 2.5.7 y 2.5.8 funcionan muy bien como aproximaciones.

Veamos cómo esta etapa puede solucionar los problemas anteriormente planteados. De la definición de $\Omega - 1$, utilizando la definición de $H = \dot{a}/a$, tenemos que

$$1 - \Omega = -\frac{K}{\ddot{a}^2} \quad (2.5.9)$$

Es claro que esta cantidad disminuirá a cero cuando $\ddot{a} > 0$. Por ende el problema de la planitud puede ser resuelto si durante Inflación Ω tiende a 1 suficientemente rápido, para compensar el apartamiento de 0 durante el período de Big Bang caliente, es decir si Inflación dura el tiempo suficiente.

Para cuantificar este tiempo, definimos la siguiente cantidad:

$$N = \ln[H_I(t_f - t_i)] = \ln \left[\frac{a(t_f)}{a(t_i)} \right], \quad (2.5.10)$$

donde $a(t_i)$ y $a(t_f)$ son el factor de escala al comienzo y al final de Inflación. Este número mide el crecimiento del factor de escala durante la fase de aceleración y es llamado en inglés el *número de e-folds*. Para estimar el número de e-folds necesario durante Inflación, podemos utilizar la ecuación 2.5.7 que dice que H_I permanece casi constante en este período, de manera que

$$\left| \frac{\Omega(t_f)}{\Omega(t_i)} \right| = \left(\frac{a_f}{a_i} \right)^{-2} = e^{-2N}. \quad (2.5.11)$$

De esta manera, es posible obtener un valor extremadamente cercano a cero para la cantidad $|\Omega - 1|_{t_f}$ imponiendo condiciones sobre los valores que puede tomar N , sin tener que pedir condiciones de ajuste fino. Calculando cuál es el valor mínimo de e-folds que resolverían el problema del horizonte y de planitud se obtiene $N \gtrsim 60$.

Por otro lado, la ecuación 2.3.9 se puede transformar a tiempo conforme

$$d_{part}(\eta) = \eta - \eta_i = \int_{t_i}^t \frac{dt}{a}, \quad (2.5.12)$$

y luego reescribirla de la siguiente forma

$$d_{part}(\eta) = \int_{t_i}^t \frac{dt}{a} = \int_{a_i}^a \frac{da}{a\dot{a}} = \int_{\ln a_i}^{\ln a} (aH)^{-1} d \ln a, \quad (2.5.13)$$

donde $a_i \equiv 0$ corresponde a la singularidad del Big Bang. El $(aH)^{-1}$ es lo que se

definió como radio comóvil de Hubble. Esta integral está dominada por el límite superior, recibiendo mínimas contribuciones de los primeros instantes del Universo. Para un fluido perfecto, tomando en cuenta la ecuación 2.3.11 se obtiene:

$$d_{part}(a) = \frac{2H_0^{-1}}{(1+3\omega)} \left[a^{\frac{1}{2}(1+3\omega)} - a_i^{\frac{1}{2}(1+3\omega)} \right] \equiv \eta - \eta_i. \quad (2.5.14)$$

El hecho de que la mayor contribución al horizonte comóvil está dada por tiempos más tardíos puede hacerse de manifiesto con los siguientes límites:

$$\eta_i \equiv \frac{2H_0^{-1}}{(1+3\omega)} a_i^{\frac{1}{2}(1+3\omega)} \quad a_i \rightarrow 0, \omega > -1/3 \quad 0, \quad (2.5.15)$$

siendo entonces finito el horizonte comóvil de partículas.

El radio de Hubble juega un rol fundamental para describir el modelo cosmológico estándar. La propuesta de Inflación es incorporar una etapa donde se viola la condición fuerte para la energía ($1+3\omega^2 > 0$) y el radio de Hubble decrece para una etapa finita del Universo temprano, implicando además un período de expansión acelerada del Universo. Derivando respecto al tiempo se obtiene

$$\frac{d}{dt}(aH)^{-1} = \frac{d}{dt}(\dot{a})^{-1} = -\frac{\ddot{a}}{(\dot{a})^2}. \quad (2.5.16)$$

Por lo tanto, si el radio de Hubble decrece entonces $\ddot{a} > 0$. Esto trae como consecuencia que la integral 2.5.13 sea dominada por su límite inferior. Así el inicio del Universo se traslada hacia un tiempo conforme negativo:

$$\eta_i = \frac{2H_0^{-1}}{(1+3\omega)} a_i^{\frac{1}{2}(1+3\omega)} \quad a_i \rightarrow 0, \omega < -1/3 \quad -\infty. \quad (2.5.17)$$

Esto implica un intervalo de tiempo más extenso entre la singularidad del Big Bang y el momento de desacople, permitiendo que puntos más alejados en la superficie correspondiente al FCR puedan estar en contacto causal, como se observa en la figura 2.2.

Los conos de luz de puntos totalmente separados en el CMB ahora tienen tiempo suficiente para intersectar antes del tiempo η_i y la homogeneidad del CMB ya no es un misterio. Aquí vemos con Inflación que $\eta = 0$ no es la singularidad inicial, sino que se convierte en un punto de transición entre la Inflación y la evolución estándar del Big Bang.

El punto es hacer el horizonte de partícula mucho más grande que el radio de Hubble, es decir lograr que $d_{par} \gg (aH)^{-1}$. Esto significa que las partículas no se pueden comunicar ahora (o cuando el CMB fue creado), pero hubo contacto causal tempranamente.

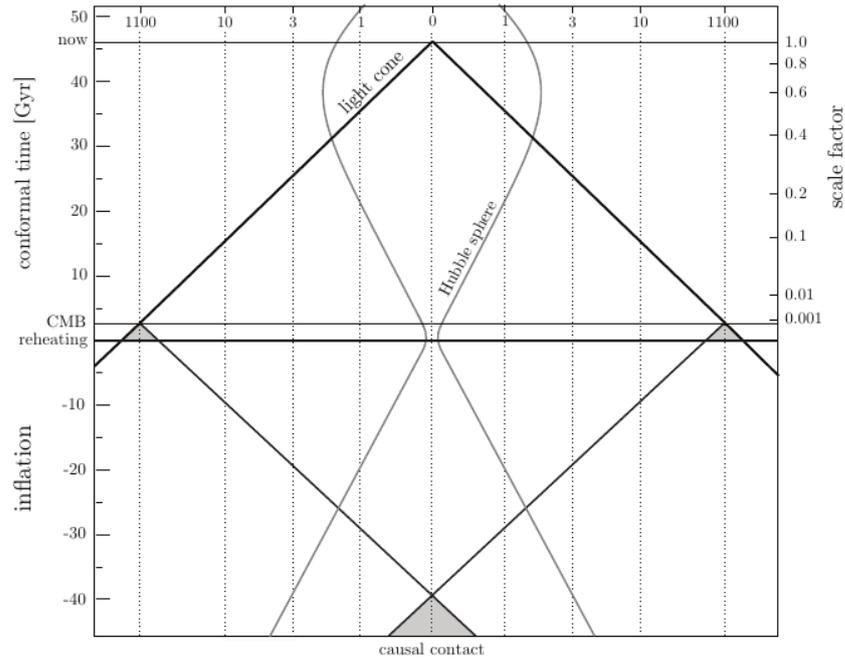


Figura 2.2: Inflación como solución al problema del horizonte, produciendo un decrecimiento en el radio de Hubble permitiendo que haya contacto causal entre puntos que inicialmente parecían desconectados. Esta imagen fue tomada del libro [17].

En la figura 2.3 se puede observar cómo las escalas físicas dejan el radio de Hubble al terminar Inflación y reingresan más tarde. Las escalas con longitudes de onda más grandes, es decir con modos k más pequeños, ingresan más tarde al radio de Hubble.

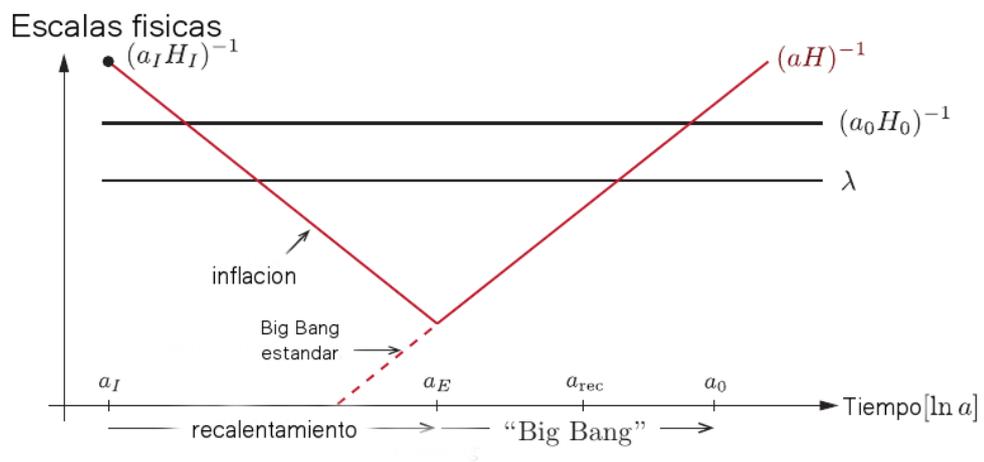


Figura 2.3: Representación de como las escalas físicas que salieron del horizonte durante Inflación vuelven a ingresar. Esta imagen fue tomada del libro [17].

2.6. Evolución del factor de escala

Como ya se mencionó en las secciones anteriores, el factor de escala nos da una idea de la tasa de expansión del Universo. Es un parámetro sin dimensiones que describe cómo el tamaño del Universo está cambiando con respecto a su tamaño en un dado tiempo, es decir la tasa entre la distancia propia 2.3.8 de dos objetos a algún tiempo t con la distancia propia entre dos objetos a un tiempo de referencia t_0 .

Si consideramos que la distancia, a un dado tiempo, entre dos galaxias es $d(t)$, y que la distancia entre ellas ahora es $d(t_0)$, el factor de escala estará dado por: $a(t) = d(t)/d(t_0)$.

Una convención que se utiliza es que el factor de escala ahora, es decir a $t_0 \equiv 0$, es 1: $a(t_0) = 1$. De esta manera representará el cambio del tamaño del Universo, relativo al presente.

Ya que el Universo se está expandiendo, el factor de escala es cada vez más grande, mientras que por el contrario, si vamos a épocas pasadas, este disminuye. Es por esto que el factor de escala no es constante, si no que va cambiando con el tiempo, de manera que sería útil conocer cómo evoluciona en las distintas etapas del Universo, esto es cuando domina radiación, materia y constante cosmológica. Sin embargo, dado el interés de esta tesis, nos restringiremos únicamente a análisis de un Universo temprano dominado por radiación y materia.

Veamos entonces cómo es el procedimiento para calcular la evolución del factor de escala para un Universo dominado por esas características. Con los elementos mencionados en la Sección 2.2, podemos expresar a la ecuación de Friedmann 2.2.11 de la siguiente forma:

$$\frac{\dot{a}}{a} = H_0 \sqrt{\Omega_I} a^{-\frac{3}{2}(1+\omega^2)}, \quad (2.6.1)$$

la cuál se resolverá, como se mencionó, para la época de radiación y para la época de materia en tiempo conforme:

- Radiación $\omega^2 = 1/3$

$$\begin{aligned} \frac{\dot{a}}{a} &= H_0 \sqrt{\Omega_{rad}} a^{-2}, \\ a da &= H_0 \sqrt{\Omega_{rad}} dt, \\ da &= H_0 \sqrt{\Omega_{rad}} d\eta. \end{aligned}$$

Integrando desde que comienza la época de radiación, que corresponde al finalizamiento de la etapa de Inflación, η_r , que vamos a suponer instantánea,

$$\int_{a_r}^a da = H_0 \sqrt{\Omega_{rad}} \int_{\eta_r}^{\eta} d\eta$$

$$\implies a_{rad}(\eta) = H_0 \sqrt{\Omega_{rad}} (\eta - \eta_r) + a_r. \quad (2.6.2)$$

- Materia $\omega^2 = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\dot{a}}{a} &= H_0 \sqrt{\Omega_{mat}} a^{-\frac{3}{2}}, \\ \sqrt{a} da &= H_0 \sqrt{\Omega_{mat}} dt, \\ \frac{da}{\sqrt{a}} &= H_0 \sqrt{\Omega_{mat}} d\eta. \end{aligned}$$

Integrando desde la época de igualdad entre radiación y materia (η_{eq}), ya que luego el Universo estará dominado por materia

$$\int_{a_{eq}}^a \frac{da}{\sqrt{a}} = H_0 \sqrt{\Omega_{mat}} \int_{\eta_{eq}}^{\eta} d\eta$$

$$\implies a_{mat}(\eta) = \left[2H_0 \sqrt{\Omega_{mat}} (\eta - \eta_{eq}) + \sqrt{a_{eq}} \right]^2. \quad (2.6.3)$$

Dadas las ecuaciones 2.6.2 y 2.6.3, necesitamos los valores de η_r , a_r , η_{eq} y a_{eq} , que se encontrarán imponiendo condiciones de continuidad al factor de escala.

En cuanto a η_r y a_r , la continuidad debe darse con el factor de escala correspondiente a la época inflacionaria, para lo cuál realizaremos el siguiente calculo: asumimos que $Ta = \text{constante}$, válida durante la época de Inflación [35]. Vamos a calcular $a(\eta = \eta_r) = a_r$, considerando la normalización del factor de escala al día de hoy $a(\eta = \eta_0) = a_0 = 1$,

$$T_0 a_0 = T_r a_r \implies a_r = \frac{T_0}{T_r}. \quad (2.6.4)$$

Observacionalmente se obtiene $T_0 = 2,7255 \text{ K} = 2,35 \times 10^{-13} \text{ GeV}$, y asumiendo que al final del período inflacionario se tiene la escala energética $T_r = T_p \sim 10^{15} \text{ GeV}$, con T_p la temperatura de Planck, se tiene $a_r = 2,35 \times 10^{-28}$.

Imponiendo continuidad entre la época inflacionaria y la época de radiación

se obtendrá:

$$H_0 \sqrt{\Omega_{rad}} (\eta_r - \eta_r) + a_r = -\frac{1}{H_I \eta_r (1 - \varepsilon)}, \quad \varepsilon \ll 1 \quad (2.6.5)$$

$$\eta_r \sim -\frac{1}{a_r H_I}, \quad (2.6.6)$$

siendo la parte derecha del primer término, el factor de escala en función del tiempo conforme para un Universo dominado por constante cosmológica, correspondiente a la época inflacionaria. El H_I es la constante de Hubble durante Inflación, y para calcular su valor se utiliza que Inflación termina en una escala de energía de $10^{-3} M_p$, por ende $H_I = \frac{10^{-6}}{\sqrt{3}} M_p$, siendo $M_p = 2,43 \times 10^{18}$ GeV la masa reducida de Planck, y así obtenemos $\eta_r = -1,14 \times 10^{-22}$ Mpc.

Por otro lado, utilizando la definición del parámetro de densidad 2.2.14 se tiene:

$$\begin{aligned} H_0^2 \Omega_{rad} &= \frac{8\pi G}{3} \rho_{rad}, \\ H_0^2 \Omega_{mat} &= \frac{8\pi G}{3} \rho_{mat}. \end{aligned} \quad (2.6.7)$$

El subíndice *eq* hace referencia a la época de igualdad entre radiación y materia, aquí ambas componentes tienen la misma densidad: $\rho_{mat} = \rho_{rad}$. De manera que haciendo el cociente de las ecuaciones 2.2.11 se encuentra

$$\frac{H_0^2 \Omega_{rad}}{H_0^2 \Omega_{mat}} = \frac{\frac{8\pi G}{3} \rho_{rad} a_{eq}^4}{\frac{8\pi G}{3} \rho_{mat} a_{eq}^3} = a_{eq} \quad \implies \quad a_{eq} = \frac{\Omega_{rad}}{\Omega_{mat}}. \quad (2.6.8)$$

Imponiendo continuidad, es decir que $a_{rad}(\eta_{eq}) = a_{mat}(\eta_{eq})$, se obtiene

$$\begin{aligned} H_0 \sqrt{\Omega_{rad}} (\eta_{eq} - \eta_r) + a_r &= a_{eq}, \\ \eta_{eq} &= \frac{a_{eq} - a_r}{H_0 \sqrt{\Omega_{rad}}} + \eta_r. \end{aligned} \quad (2.6.9)$$

Con los valores mencionados resolvemos las ecuaciones anteriores, obteniendo $a_{eq} \sim 1,7 \times 10^{-4}$. Para η_{eq} debemos cambiar de unidades a H_0 :

$$H_0 = 67,36 \frac{\text{km}}{\text{s Mpc}} = 1,44 \times 10^{-42} \text{ GeV},$$

donde se utilizaron los siguientes cambios de unidades $1 \text{ GeV}^{-1} \equiv 6,4 \times 10^{-39}$ Mpc, $1 \text{ GeV}^{-1} \equiv 6,5822 \times 10^{-25}$ s, $1 \text{ GeV}^{-1} \equiv 1,9733 \times 10^{-14}$ cm y $1 \text{ GeV} \equiv 1,1605 \times 10^{13}$ K. De esta manera $\eta_{eq} = 232,2$ Mpc.

Finalmente obtuvimos la evolución del factor de escala, en tiempo conforme, para las épocas de radiación y de materia:

$$a(\eta) = \begin{cases} H_0^2 \Omega_{rad} (\eta - \eta_r) + a_r, & \eta_r \leq \eta \leq \eta_{eq} \\ [2H_0 \sqrt{\Omega_{mat}} (\eta - \eta_{eq}) + \sqrt{a_{eq}}]^2, & \eta_{eq} \leq \eta \end{cases} \quad (2.6.10)$$

Siendo los valores: $H_0 = 67,36 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, $\Omega_{rad} h^2 = 2,47 \times 10^{-5}$, $\Omega_{mat} h^2 = 0,1431$, $\eta_r = -1,14 \times 10^{-22} \text{ Mpc}$, $a_r = 2,35 \times 10^{-28}$, $\eta_{eq} = 232,2 \text{ Mpc}$ y $a_{eq} \sim 1,7 \times 10^{-4}$.

Capítulo 3

Historia Térmica del Universo

En este capítulo se dará una descripción de la historia del Universo, en términos de la composición de las distintas etapas que fueron sucediendo y sus propiedades termodinámicas. El contenido de este capítulo está basado en las notas de D. Baumman [17] y el trabajo de L. Husdal [36].

Un aspecto importante a considerar para entender la historia térmica es la comparación entre la tasa de interacciones entre partículas Γ y la tasa de expansión del Universo H . Cuando $\Gamma \gg H$, la escala de tiempo a la que suceden las interacciones es mucho menor a las de expansión, es decir

$$t_c \equiv \frac{1}{\Gamma} \ll t_H \equiv \frac{1}{H}. \quad (3.0.1)$$

Cuando esto sucede se alcanza el equilibrio térmico antes de que los efectos de la expansión sean relevantes. A medida que el Universo se enfría, la tasa de interacciones decrece más rápido que la tasa de expansión. A un tiempo $t_c \sim t_H$ los caminos libres medios comienzan a ser mayores y las partículas se desacoplan de su baño térmico. Diferentes partículas tendrán diferentes tasas de interacción que se desacoplarán en diferentes momentos.

En el capítulo anterior se postula la existencia de una etapa primordial donde el Universo se expandió aceleradamente. Este período, al que se llama Inflación, ocurrió a los 10^{-34} segundos [20] después de la singularidad inicial y fue generado por un campo escalar: *el inflatón*. Cuando esta etapa finaliza, el campo inflatón decae en aquellos campos responsables de generar las partículas del modelo estándar de partículas. Una vez producidas, éstas interactuarán creando otras partículas mediante reacciones, produciendo así una sopa de partículas que eventualmente llegará al equilibrio térmico a una dada temperatura. Todos estos procesos forman parte de un período llamado *recalentamiento* y se considera que, una vez finalizado, comienza el *Big Bang caliente*, es decir que el modelo

cosmológico estándar puede ser aplicado.

Esta sopa de partículas está formada por quarks, leptones, bosones de gauge y el bosón de Higgs, a una temperatura tan alta (del orden de ~ 1000 GeV) que las velocidades con las que se mueven son relativistas, de manera que el Universo temprano estaba dominado por radiación. En este momento los pares partícula-antipartícula son formados continuamente y destruidos en colisiones. En este período ocurre un evento llamado *bariogénesis*, el cual produce que haya un exceso de quarks y leptones por sobre sus correspondientes anti-partículas. De esta manera resulta lo que hoy en día se observa, una prevalencia de materia por sobre anti-materia.

Estas partículas elementales reciben sus masas, mediante el mecanismo de Higgs, a una temperatura de 100 GeV. En este momento se produce la ruptura entre la interacción electromagnética y la fuerza débil. Esta etapa se la define como *transición de fase electrodébil*.

A estas temperaturas, los quarks y gluones se mueven libremente formando el llamado *plasma de quarks-gluones* (QGP). Al alcanzar una temperatura de 180 MeV, como consecuencia de la interacción fuerte descrita por la QCD, estas partículas comienzan a confinarse formando un gas de hadrones, ocurriendo así la *transición de fase de la QCD*. Dentro de los hadrones se encuentran los bariones (combinación de tres quarks) y los mesones (combinación quark-antiquark).

En este momento, los neutrinos están en equilibrio térmico con el plasma primordial e interactúan mediante la interacción débil. A una temperatura del orden de 1 MeV la tasa de interacciones de los neutrinos comienza a ser más lenta que la tasa de expansión del Universo, produciendo de esta manera el desacople de los neutrinos del plasma. Posteriormente, los electrones y positrones se aniquilan mediante la interacción electromagnética y transfieren su energía a los fotones.

Cuando se llega a una temperatura de 0,1 MeV, sucede el proceso de *nucleosíntesis*, donde los protones y neutrones reaccionan para dar lugar a núcleos de átomos: núcleos de hidrógeno en su gran mayoría, seguidos de núcleos de helio y en menor medida núcleos de deuterio y de litio.

La temperatura continúa disminuyendo y en 0,7 eV la densidad de materia y radiación es la misma. Luego la materia no relativista comienza a dominar en el Universo, pasando así de un Universo dominado por radiación a un Universo dominado por materia.

Seguido de la nucleosíntesis, se tiene un plasma dominado por protones, electrones, fotones y algunos núcleos. A una temperatura de aproximadamente 0,3 eV sucede la *recombinación*, donde los electrones se combinan con los protones formando los primeros átomos de hidrógeno neutro. Cuando ocurre esto, los fotones ya no son dispersados por los electrones y protones, así comienzan a viajar li-

brememente sin ser absorbidos por la materia, produciéndose entonces el desacople de los fotones. La energía de estos fotones irá disminuyendo con el transcurso del tiempo, ya que la expansión del espacio produce que su longitud de onda aumente. Este fenómeno se ha observado y es conocido como el FCR.

Evento	Tiempo	Temperatura
Inflación	10^{-34} s	-
Transición de fase electrodébil	10^{-12} s	100 GeV
Transición de fase de la QCD	10^{-6} s	180 MeV
Desacople de los neutrinos	1 s	1 MeV
Aniquilación electrón-positrón	6 s	500 keV
Nucleosíntesis	3 min	100 keV
Igualdad materia y radiación	6×10^4 años	0.7 eV
Recombinación	27×10^4 años	0.3 eV
Desacople de los fotones	38×10^4 años	0.2 eV

Cuadro 3.1: Principales eventos en la historia térmica del Universo. Cuadro sacado de [17]

3.1. Equilibrio termodinámico

Se tiene evidencia observacional, del espectro del FCR, que el Universo temprano se encontraba en equilibrio térmico local.

Si se tiene un sistema en equilibrio térmico, se puede utilizar mecánica estadística para calcular cantidades tales como la densidad de energía, la presión y la densidad de entropía. A continuación se realizará un desarrollo del tema tomado de [17], aplicado a un gas ideal cuántico, para poder derivar las cantidades físicas que se utilizarán a lo largo de este trabajo.

3.1.1. Funciones termodinámicas

Se describirá al sistema, como es usual en mecánica estadística, en el espacio de las fases, es decir que el gas estará descrito por las posiciones y momentos de todas las partículas que lo componen.

Consideremos una caja cúbica de lado L y volumen $V = L^3$. La densidad de estados de una partícula en el espacio de momentos es $V/h^3 = L^3/h^3$, si dividimos por el volumen vamos a tener la densidad de estados en el espacio de las fases: $1/h^3$. Si además la partícula tiene g grados internos de libertad, la densidad de estados será:

$$\frac{g}{h^3} = \frac{g}{(2\pi)^3}, \quad (3.1.1)$$

donde en la segunda igualdad utilizamos unidades naturales $\hbar = h/(2\pi) \equiv 1$. Para poder obtener la densidad numérica de un gas de partículas, es necesario conocer cómo están distribuidas las partículas a lo largo de los autoestados de momento. Esta información está contenida en la función de distribución, que al ser homogénea es independiente de x y la isotropía hace que dependa solo de p , entonces $f(x, p, t) = f(p)$. De esta manera, la densidad de partículas en el espacio de las fases será el producto entre la densidad de estados y la función distribución

$$\frac{g}{(2\pi)^3} \times f(p), \quad (3.1.2)$$

integrando sobre los momentos se obtiene la *densidad numérica* de partículas

$$n = \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3p f(p). \quad (3.1.3)$$

Para obtener la densidad de energía del gas de partículas, debemos pesar cada autoestado por su energía asociada. Si las partículas siguen una relación de dispersión $E(p) = \sqrt{m^2 + p^2}$, integrando sobre los momentos se llega a *densidad de energía*

$$\rho = \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3p f(p) E(p). \quad (3.1.4)$$

De manera similar, se puede obtener la presión

$$P = \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3p f(p) \frac{p^2}{3E}. \quad (3.1.5)$$

En cuanto a la función de distribución, en equilibrio térmico se tiene que la probabilidad de que el estado de una partícula con momento p y energía $E(p)$ sea ocupado, está dada por las funciones de distribución de Fermi-Dirac y Bose-Einstein

$$f(p) = \frac{1}{e^{(E(p)-\mu)/T} \pm 1}, \quad (3.1.6)$$

con el signo $+$ para fermiones y el signo $-$ para bosones. A bajas temperaturas, $T < E - \mu$, ambas funciones de distribución se reducen a la distribución de Maxwell-Boltzmann

$$f(p) \approx e^{-(E(p)-\mu)/T}, \quad (3.1.7)$$

donde se tiene la temperatura T y el potencial químico μ . Este último caracteriza

la respuesta de un sistema ante el cambio en el número de partículas. Se tiene que en el Universo temprano los potenciales químicos de todas las partículas son muy pequeños respecto de la temperatura, por lo que los podemos despreciar.

Una vez definidas las funciones de distribución, estamos en condiciones de poder calcular de una forma precisa las cantidades termodinámicas, en particular la que nos va a interesar es la densidad de energía por lo que reemplazando la ecuación 3.1.6 en la expresión 3.1.4 se obtiene

$$\rho = \frac{g}{2\pi^2} \int_0^\infty dp \frac{p^2 \sqrt{p^2 + m^2}}{\exp[\sqrt{p^2 + m^2}/T] \pm 1}, \quad (3.1.8)$$

resolviendo la integral se llega a:

$$\rho = \frac{\pi^2}{30} g T^4. \quad (3.1.9)$$

3.1.2. Grados de libertad efectivos

Del desarrollo anterior se desprende que la contribución de las diferentes partículas a las cantidades termodinámicas depende de su naturaleza, en particular de sus masas y degeneración. La contribución completa de todas las partículas es el resultado de la suma de todas las especies de partículas:

$$\rho_r = \sum_i \rho_i = \frac{\pi^2}{30} g_\star(T) T^4, \quad (3.1.10)$$

donde $g_\star(T)$ son el número de grados de libertad efectivos relativistas. A una dada temperatura T , habrá dos contribuciones:

$$g_\star(T) = \sum_{i=k} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^4 + \frac{7}{8} \sum_{i=f} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^4, \quad (3.1.11)$$

donde T es la temperatura del gas de fotones que actúa como baño térmico del sistema y el factor $\frac{7}{8}$ viene de la diferencia entre las estadísticas de Fermi y Bose.

A temperaturas $T \gtrsim 100$ GeV, todas las partículas del modelo estándar son relativistas. A medida que la temperatura disminuye, varias especies de partículas se vuelven no relativistas y se aniquilan. Para estimar g_\star a una dada temperatura T lo que se hace es sumar todas las contribuciones de los grados de libertad relativistas y descartar el resto.

Nos interesan aquellos valores correspondientes al momento anterior a la transición de fase de la QCD y al momento posterior. Se tiene, para los quarks, los valores dados en [4]: $g_1 = 61,25$ para antes de la transición de fase y $g_2 = 17,25$ para luego de la transición.

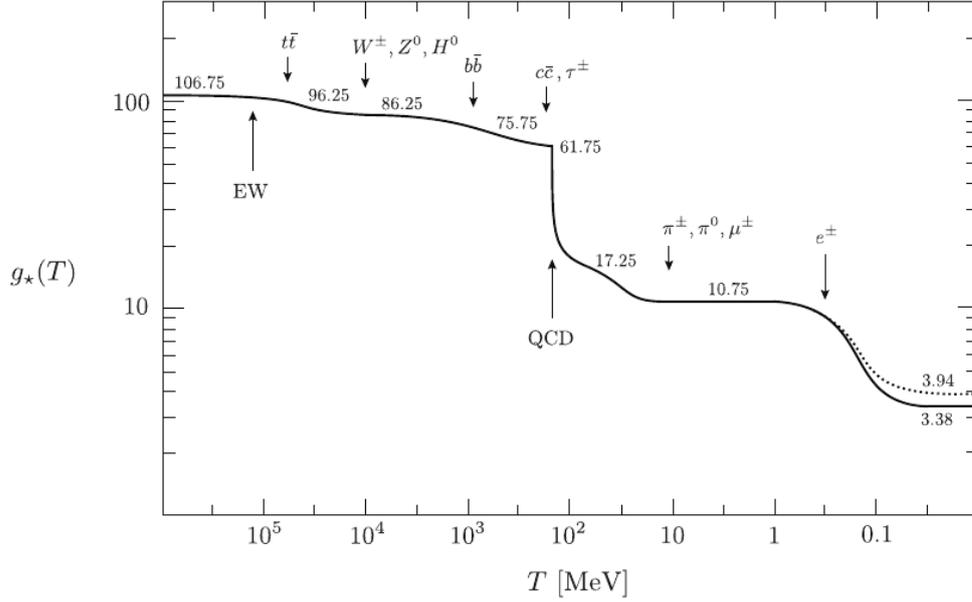


Figura 3.1: Evolución de los grados de libertad relativistas $g_*(T)$, asumiendo el modelo estándar de partículas. Esta imagen fue tomada del libro [17].

3.1.3. Conservación de la entropía

Es una buena aproximación suponer que el Universo se expande adiabáticamente, de manera que la entropía permanece constante en su totalidad. Tomando potencial químico nulo $\mu = 0$, se define a la densidad de entropía $s \equiv S/V$ como

$$s = \frac{\rho + P}{T}. \quad (3.1.12)$$

Si usamos la expresión derivada para la densidad de energía dada por 3.1.9, se encuentra que la densidad de entropía total para un conjunto de partículas de diferentes especies es

$$s = \sum_i \frac{\rho_i + P_i}{T_i} \equiv \frac{2\pi^2}{45} g_{*S}(T) T^3, \quad (3.1.13)$$

siendo g_{*S} el número de grados de libertad efectivos relativistas en entropía:

$$g_{*S}(T) = \sum_{i=k} g_i \left(\frac{T_i}{T} \right)^3 + \frac{7}{8} \sum_{i=f} g_i \left(\frac{T_i}{T} \right)^3. \quad (3.1.14)$$

Realizando cálculos, cuyos detalles se pueden ver en [17], se obtiene que la conservación de la entropía implica:

$$\begin{aligned} S = s(T)a^3 &= g_{*S}(T) \frac{2\pi^2}{45} T^3 a^3 = \text{constante}, \\ &\rightarrow g_{*S}(T) T^3 a^3 = \text{constante}. \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

Capítulo 4

Transición de Fase en QCD

El modelo cosmológico estándar y el modelo estándar de partículas nos proporcionan las bases para intentar explicar la evolución del Universo, tanto en sus orígenes como en el presente, prediciendo una serie de transiciones de fase que ocurren sucesivamente al final de la época inflacionaria, durante la expansión y enfriamiento del Universo.

En este trabajo nos centraremos en una de esas etapas, que corresponde a la transición de fase de desconfinamiento de la QCD, en consecuencia, quisiéramos ver cómo la densidad de energía de las ondas gravitacionales es afectada por esta transición.

Para entender los modelos utilizados vamos a explicar brevemente la teoría en la que se enmarcan, para lo cual se ha tomado como referencia [37].

4.1. Generalidades de cromodinámica cuántica

De acuerdo al modelo estándar de partículas, los hadrones (*mesones* y *barriones*) están formados por fermiones (*quarks*) que interactúan entre sí a través de bosones mediadores de las interacciones fuertes (*gluones*) [38]. La teoría que describe dichas interacciones es una teoría de gauge no abeliana llamada *Cromodinámica Cuántica (QCD)*.

Existen seis sabores de quarks u (up), d (down), s (strange), c (charm), t (top) y b (bottom). Los hadrones estables dentro de los núcleos atómicos, protones (p) y neutrones (n), están formados por quarks u y d . Más precisamente $p = (u, u, d)$ y $n = (u, d, d)$. Existe una hipótesis conocida como "hipótesis de la materia extraña", que dice que en realidad el estado estable de mínima energía de la materia es el formado por hadrones que contengan al quark s . Es por esto, que la mayoría de los modelos de quarks utilizados en la literatura incluyen los tres quarks más livianos. Los hadrones que incluyen a los quarks más pesados en general son inestables y tienen tiempos de decaimiento muy rápidos [39]. Debido

a estos dos argumentos (hipótesis de materia extraña y decaimiento rápido de hadrones formados por quarks pesados), en este estudio utilizaremos modelos de quarks que incluyan los tres sabores de masas más livianas únicamente.

El lagrangiano de la QCD con simetría de color $SU(3)_c$ viene dado por:

$$\mathcal{L}_{QCD} = \bar{\psi}(x) (i\gamma_\mu D^\mu - \hat{m}) \psi(x) - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}, \quad (4.1.1)$$

donde

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ d(x) \\ s(x) \end{pmatrix}, \quad (4.1.2)$$

representa el campo de quarks. Las masas de los mismos están en la matriz diagonal $\hat{m} = \text{diag}(m_u, m_d, m_s)$, el tensor del campo de gluones se define como:

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (4.1.3)$$

y

$$D_\mu = \partial_\mu - ig\lambda^a A_\mu^a, \quad (4.1.4)$$

es la derivada covariante que incluye a los campos de gluones A_μ^a (a por cada color: rojo verde y azul, o rgb por sus siglas en inglés.) y la constante de acoplamiento g .

Esta teoría tiene algunas propiedades importantes, entre ellas encontramos:

- Universalidad: existe solo una constante de acoplamiento g para todas las interacciones entre quarks y gluones.
- Libertad asintótica: a muy altas energías (mayores a ~ 2 GeV), o distancias muy cortas, los quarks se comportan como partículas libres. En este régimen es posible aplicar la teoría de perturbaciones.
- Confinamiento: a bajas energías (menores a ~ 2 GeV), o distancias muy grandes, el acoplamiento se vuelve muy fuerte. De esta manera no es posible aplicar perturbaciones y se hace necesario utilizar teorías efectivas.

Existen dos fases diferentes: una fase hadrónica de quarks y gluones confinados y el llamado *plasma de quarks y gluones* (QGP). La Figura 4.1 es un esquema de un posible diagrama de fases de la QCD.

Dentro del diagrama, el contexto de Universo temprano se encuentra desde altas temperaturas y evoluciona hacia bajas temperaturas, a potencial químico nulo.

CAPÍTULO 4. TRANSICIÓN DE FASE EN QCD

temperatura $T < T_c$ se tiene un gas de hadrones moviéndose libremente, es decir quarks y gluones confinados. A una temperatura $T = T_c$ los quarks, gluones y hadrones coexisten en equilibrio a una presión constante.

Podemos escribir la densidad de entropía como:

$$s(T) = \frac{2\pi^2}{45}g(T)T^3, \quad \text{con} \quad g(T) = \begin{cases} g_1 & \text{si } T \geq T_c \\ g_2 & \text{si } T < T_c \end{cases} \quad (4.2.1)$$

Siendo g_1 y g_2 los grados de libertad efectivos relativistas. Para $g_1 = 51,25$ antes de la transición de fase tenemos en cuenta los gluones, los quarks up y down, fotones, electrones, positrones, (anti-) muones y neutrinos, y $g_2 = 17,25$ luego de la transición de fase, solo incluye piones en lugar de quarks y gluones [4]. Derivando las propiedades termodinámicas se tiene:

$$p(T) = \int s(T)dT = \begin{cases} \frac{\pi^2}{90}g_1T^4 - \mathcal{B} & \text{si } T \geq T_c \\ \frac{\pi^2}{90}g_2T^4 & \text{si } T < T_c \end{cases} \quad (4.2.2)$$

$$\rho(T) = sT - p = \begin{cases} \frac{\pi^2}{30}g_1T^4 + \mathcal{B} & \text{si } T \geq T_c \\ \frac{\pi^2}{30}g_2T^4 & \text{si } T < T_c \end{cases}$$

Donde la constante de la bolsa es fijada por la temperatura a la cual ocurre la transición y los grados de libertad de ambas fases:

$$\mathcal{B} = \frac{\pi^2}{90}(g_1 - g_2)T_c^4. \quad (4.2.3)$$

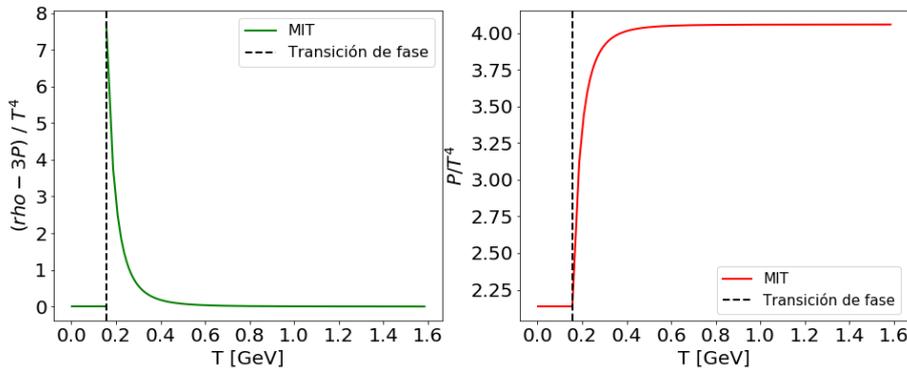


Figura 4.2: A la izquierda representación de la ecuación de estado del modelo de la bolsa del MIT, normalizada por la temperatura. La única contribución proviene de la constante de la bolsa \mathcal{B} . A la derecha se muestra la presión del modelo de la bolsa del MIT en función de la temperatura, normalizada también por la temperatura.

En la gráfica de la derecha de la figura 4.2 se puede ver que la transición da una punta donde la derivada de la presión respecto de la temperatura es distinta a derecha e izquierda, es por esta discontinuidad en la primera derivada que se entiende que el modelo de bolsa del MIT da una transición de fase de primer orden.

4.2.2. Modelo Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio no local (PNJL)

Para describir este modelo, se parte del Lagrangiano correspondiente:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) = & \bar{\psi}(x)(-i\not{D} + \hat{m})\psi(x) - \frac{G_S}{2} [j_a^s(x)j_a^s(x) + j_a^p(x)j_a^p(x)] + \mathcal{U}[\mathcal{A}(x)] \\ & - \frac{H}{4} A_{abc} [j_a^s(x)j_b^s(x)j_c^s(x) - 3j_a^s(x)j_b^p(x)j_c^p(x)], \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

donde \mathcal{U} es corresponde a un potencial efectivo de Polyakov que da cuenta del confinamiento, y el último término (interacción de 6 puntos de 't Hooft) genera mezcla de sabor. Los campos ψ son los campos de quarks, $\psi \equiv (u \ d \ s)^T$, y $\hat{m} = \text{diag}(m_u \ m_d \ m_s)$ son las masas desnudas de cada quark. Por simplicidad se considera $m_u = m_d$. Las cantidades $j_a^s(x)$ y $j_a^p(x)$ son las corrientes escalares y pseudoescalares respectivamente que dan cuenta de la interacción entre las partículas.

Mediante el tratamiento del lagrangiano 4.2.4, aplicando teoría cuántica de campos (que está fuera del alcance de esta tesis, para un análisis detallado ver las siguientes referencias [41, 42]), se puede llegar al gran potencial termodinámico, dado por:

$$\Omega = \Omega^{\text{reg}} + \Omega^{\text{libre}} + \Omega^0 + \mathcal{U}(\Phi, T), \quad (4.2.5)$$

con Ω_0 una constante que se fija de manera que el gran potencial se anule a temperatura y potencial químico nulos. El potencial efectivo $\mathcal{U}(\Phi, T)$ está dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(\Phi, T) = & \left[-\frac{1}{2}a(T, T_0)\Phi^2 \right. \\ & \left. + b(T, T_0) \ln(1 - 6\Phi^2 + 8\Phi^3 - 3\Phi^4) \right] T^4 \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

con $a(T, T_0)$ y $b(T, T_0)$ fijados según los valores de la referencia [43]. El parámetro $T_0 = 195$ MeV para reproducir la temperatura crítica obtenida de Lattice QCD [44, 45].

Las cantidades termodinámicas de interés como la presión P y la densidad de

energía ρ se derivan del gran potencial de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} P &= -\Omega, \quad n_q = \sum_f n_f \\ \rho &= -P + TS + \sum_f \mu_f n_f \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

con $S = \frac{\partial P}{\partial T}$ y $n_f = \frac{\partial P}{\partial \mu_f}$ la entropía y la densidad de número de partículas respectivamente. Las constantes del modelo se fijan de manera de reproducir los valores fenomenológicos de la constante de decaimiento del pión $f_\pi = 92,4$ MeV, y las masas de los mesones $m_\pi = 139,0$ MeV, $m_K = 495$ MeV, $m_{\eta'} = 958$ MeV. Los resultados de estos ajustes llevan al set de parámetros $m_u = m_d = 3,63$ MeV, $\Lambda = 1071,38$ MeV, $G_s \Lambda^2 = 10,78$, y $H \Lambda^5 = -353,29$, con Λ siendo un parámetro que establece el rango de la no-localidad en espacio de momentos. La masa del quark s está fijada a un valor fenomenológico de $m_s = 95,00$ MeV.

Para encontrar la temperatura de la transición de fase que reproduce este modelo, se utiliza el calor específico definido como

$$C_v = T \frac{\partial^2 P}{\partial T^2}, \quad (4.2.8)$$

y será la temperatura tal que el calor específico es máximo, como se observa en la figura 4.3.

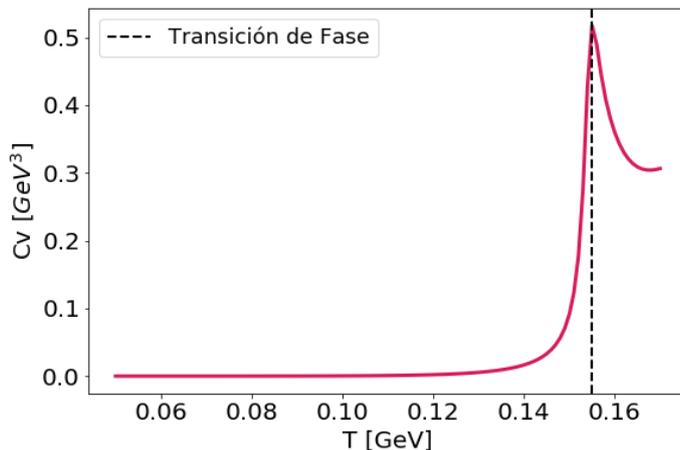


Figura 4.3: Calor específico en función de la temperatura, la temperatura donde ocurre el máximo corresponde a la de la transición de fase.

Este modelo describe transiciones de fase de tipo crossover, es decir que son suaves como se puede observar en los gráficos de la figura 4.4.

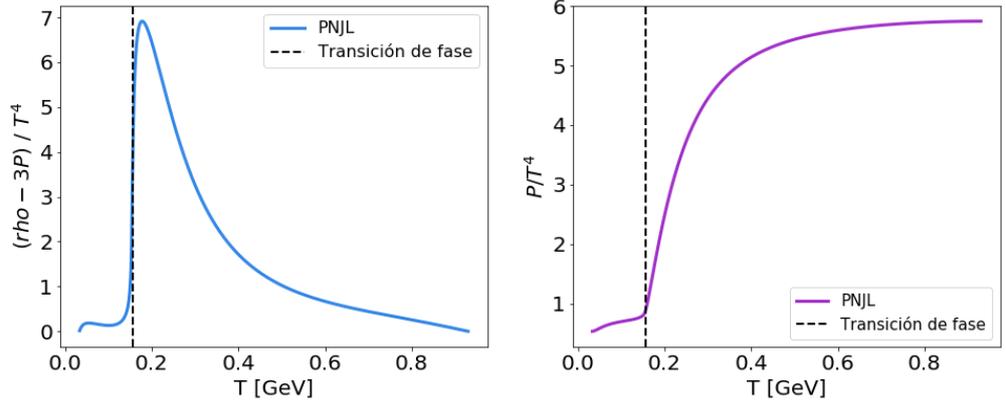


Figura 4.4: A la izquierda representación de la ecuación de estado del PNJL, normalizada por la temperatura. A la derecha gráfico de la presión del PNJL, en función de la temperatura, normalizada también por la temperatura.

4.2.3. Cálculos numéricos

Parte del código desarrollado en este trabajo, permite calcular a partir de una ecuación de estado dada, cómo es la densidad de energía y la temperatura en función del tiempo.

Para ello consideramos la ecuación de Friedmann:

$$-\frac{d\rho}{3\sqrt{\rho}(\rho + P)} = \sqrt{\frac{8\pi G}{3}} dt, \quad (4.2.9)$$

que depende de la presión y la densidad. Para relacionar ambas cantidades se necesita una ecuación de estado, en particular utilizamos la provista por el modelo de bolsa del MIT:

$$p[\rho(t)] = \frac{1}{3}[\rho(t) - 4\mathcal{B}]. \quad (4.2.10)$$

Si bien se tiene la expresión analítica de esta ecuación de estado, a modo de ser lo más general posible, el código permite que el ingreso sea mediante una tabla. De esta manera, se puede aplicar el código a la ecuación de estado de PNJL.

Trabajando con las ecuaciones 4.2.9 y 4.2.10 podemos encontrar la densidad de energía en función del tiempo, la cual se puede observar en las gráficas de la figura 4.5. Para poder realizar la integración necesitamos condiciones iniciales. Se tomaron los valores considerados en el trabajo [8], donde se toma como punto de partida un tiempo posterior a la transición de fase electrodébil $t_i = 10^{-9}$ s con una densidad de energía correspondiente de $\rho_i(t_i) = 10^7$ MeV/fm³, hasta el tiempo estimado donde ocurre la transición de fase de la QCD, $t_f = 10^{-4}$ s. Si bien hay una cierta incerteza en los valores de las condiciones iniciales, nos interesa determinar cómo varía la densidad de energía una vez ocurrida la transición.

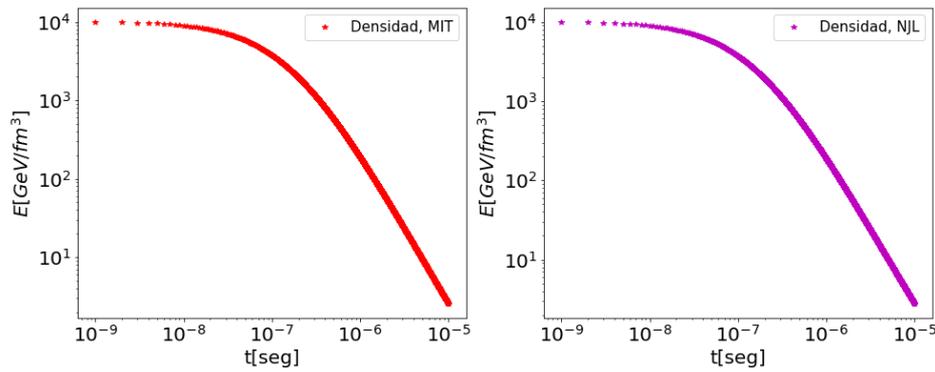


Figura 4.5: Evolución temporal de la densidad de energía, a la izquierda tomando el modelo de bolsa del MIT y a la derecha tomando el modelo de PNJL-nl.

Una vez obtenida la densidad de energía, es posible calcular cómo varía la temperatura en función del tiempo mediante la relación:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{\left(\frac{d\rho}{dT}\right)} \times \frac{d\rho}{dt}. \quad (4.2.11)$$

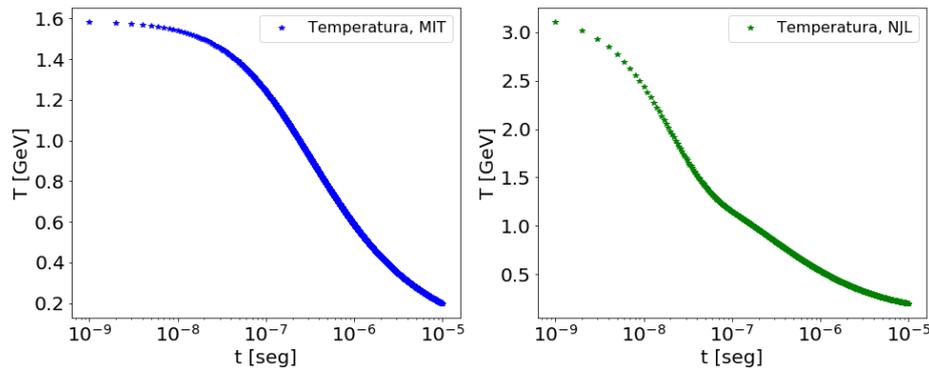


Figura 4.6: Evolución temporal de la temperatura, a la izquierda tomando el modelo de bolsa del MIT y a la derecha tomando el modelo de PNJL-nl.

Obteniendo como resultado los gráficos de la figura 4.6. Se puede observar que la temperatura no evoluciona linealmente a medida que avanza el tiempo. Los gráficos correspondientes al MIT son consistentes con el trabajo [8].

Capítulo 5

Perturbaciones Cosmológicas

En el Capítulo 2, se vio que el modelo cosmológico estándar supone un Universo espacialmente homogéneo e isótropo modelado por la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW). Este modelo logra describir, mediante la teoría de la Relatividad General de Einstein, la tasa de expansión del Universo, la temperatura del fondo cósmico de radiación (FCR), la evolución del Universo desde un estado inicial de alta temperatura y densidad dominado por radiación a un estado más frío y de menor densidad dominado por materia no relativista, entre otras. Sin embargo, al ser un modelo homogéneo, no puede explicar la distribución de materia y energía que se observa hoy en día, como lo es la estructura a gran escala, esto es estrellas, galaxias, cúmulos y supercúmulos de galaxias.

Debido a esto, resulta necesario describir de alguna manera la inhomogeneidad e anisotropía del espacio. Para ello se utiliza la teoría de perturbaciones, comenzando con un espacio de fondo homogéneo e isótropo sin perturbar y luego perturbándolo. Las perturbaciones a la métrica pueden ser escalares, vectoriales ó tensoriales, fueron originadas en la época inflacionaria y son fuente de las fluctuaciones en la densidad que dan origen a la estructura de nuestro Universo. También producen las anisotropías en temperatura observadas en el fondo cósmico de radiación.

Las perturbaciones pueden ser tratadas unas independientes de otras debido al Teorema de Descomposición, que demuestra que las perturbaciones evolucionan independientemente. En particular, nos van a interesar las *perturbaciones tensoriales* que son las que dan origen a las *ondas gravitacionales*.

Tenemos entonces una métrica de FLRW con fondo espacialmente plano g_{ij} , débilmente perturbada $|h_{ij}| \ll 1$:

$$g_{ij} = \eta_{ij} + h_{ij}. \tag{5.0.1}$$

Si elegimos los ejes coordenados de manera que las perturbaciones a la métrica sean en el plano x-y vamos a tener:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2(1+h_+) & a^2 h_\times & 0 \\ 0 & a^2 h_\times & a^2(1-h_+) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.0.2)$$

Es decir que las perturbaciones a la métrica están descritas por dos estados de polarización independientes h_\times y h_+ , que asumimos pequeños, es decir que los términos de mayor orden al primero que aparecen en los cálculos de la ecuación de Einstein 2.0.1, se desprecian. Esta elección de coordenadas corresponde a elegir el eje z en la dirección de propagación del vector de onda \vec{k} . Se ha trabajado en el gauge transverso y sin traza (TT), es decir $h_{ij;j} = 0$ y $h^i_i = 0$, así definimos el tensor de las perturbaciones como:

$$\mathcal{H}_{ij} = \begin{pmatrix} h_+ & h_\times & 0 \\ h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.0.3)$$

Descomponemos h_{ij} en ondas planas con un número de onda comovil $|\vec{k}| \equiv k$:

$$h_{ij}(\eta, \mathbf{x}) = \sum_\lambda \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} h_\lambda(\eta; \mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \epsilon_{ij}^\lambda, \quad (5.0.4)$$

donde ϵ_{ij}^λ es el tensor de polarización. Para obtener la ecuación de la amplitud de la onda $h_\lambda(\eta; \vec{k}) \equiv h_{\lambda, \vec{k}}$ pedimos que la métrica perturbada cumpla la ecuación de Einstein a orden lineal en h , para esto debemos calcular los símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{i}{2} [k_k \mathcal{H}_{ij} + k_j \mathcal{H}_{ik} - k_i \mathcal{H}_{jk}], \quad (5.0.5)$$

el tensor de Ricci

$$R_{ij} = g_{ij} \left(\frac{d^2 a / dt^2}{a} + 2\mathcal{H}^2 \right) + \frac{3}{2} a^2 \mathcal{H} \mathcal{H}_{ij,0} + a^2 \frac{\mathcal{H}_{ij,00}}{2} + \frac{k^2}{2} \mathcal{H}_{ij}, \quad (5.0.6)$$

y el escalar de Ricci

$$R = g^{00} R_{00} + g^{ij} R_{ij}. \quad (5.0.7)$$

Con estos elementos pasamos a calcular el **tensor de Einstein**, del cual vamos a derivar las ecuaciones de evolución para los elementos del tensor \mathcal{H} definido en la expresión 5.0.3: h_\times y h_+ . Obtenemos de esta manera que los modos del tensor

responden a la ecuación:

$$\ddot{h}_{ij} - \left(\frac{\nabla^2}{a^2}\right) h_{ij} + \left(\frac{3\dot{a}}{a}\right) \dot{h}_{ij} = 16\pi G \Pi_{ij}, \quad (5.0.8)$$

con Π_{ij} la parte anisotrópica del tensor de momento-energía, que como estamos trabajando con un fluido ideal $\Pi_{ij} = 0$.

Transformando la ecuación al espacio de Fourier, reemplazando $\nabla^2 = -k^2$ se llega a

$$\ddot{h}_{\lambda,\mathbf{k}} + \left(\frac{3\dot{a}}{a}\right) \dot{h}_{\lambda,\mathbf{k}} + \left(\frac{k^2}{a^2}\right) h_{\lambda,\mathbf{k}} = 0. \quad (5.0.9)$$

Transformando de tiempo físico a tiempo conforme, se obtiene:

$$h''_{\lambda,\mathbf{k}} + \left(\frac{2a'}{a}\right) h'_{\lambda,\mathbf{k}} + k^2 h_{\lambda,\mathbf{k}} = 0. \quad (5.0.10)$$

Esta es una ecuación de una onda plana propagándose en un espacio en expansión. Las soluciones son ondas, como son producidas por la gravedad y son originadas en el inicio del Universo (etapa de Inflación) se llaman *ondas gravitacionales primordiales*. Con las soluciones podemos calcular las amplitudes de esas ondas.

5.1. Solución a tiempos lejanos de la transición de fase

En esta sección se propone resolver la ecuación 5.0.10 sin tener en consideración la transición de fase. Se tendrá en cuenta que luego de Inflación la ecuación de estado que domina es la de un Universo dominado sólo por radiación y la siguiente ecuación de estado será la que se corresponde por un Universo dominado solo por materia. Será conveniente realizar el siguiente cambio de variable

$$h(\eta) = \frac{V(\eta)}{a(\eta)}, \quad (5.1.1)$$

derivando este cambio de variable 5.1.1 y reemplazando en la ecuación 5.0.10 se llega a:

$$\ddot{V}_k + \left(k^2 - \frac{\ddot{a}}{a}\right) V_k = 0, \quad (5.1.2)$$

que vamos a resolver para dos etapas distintas, utilizando la evolución del factor de escala descrita en el Capítulo 2.

■ **Radiación**

El factor de escala para la época dominada por radiación está dado por

$$a_{rad}(\eta) = H_0 \sqrt{\Omega_{rad}} (\eta - \eta_r) + a_r \quad \longrightarrow \quad \frac{\ddot{a}}{a} = 0 \quad (5.1.3)$$

de esta manera,

$$\ddot{V}_k + k^2 V_k = 0, \quad (5.1.4)$$

que corresponde a la ecuación de un oscilador armónico, cuya solución viene dada por:

$$V_k(\eta) = \mathbb{C} e^{ik\eta}. \quad (5.1.5)$$

Luego, reemplazando en el cambio de variable dado por la ecuación 5.1.1 para obtener la ecuación de los modos, considerando cómo es el factor de escala en esta época, se tiene:

$$h(\eta) = A \frac{\sin(k\eta)}{\eta} + B \frac{\cos(k\eta)}{\eta} = A j_0(k\eta) + B y_0(k\eta), \quad (5.1.6)$$

siendo $j_0(k\eta)$ y $y_0(k\eta)$ las ecuaciones de Bessel esféricas.

- **Materia:** En esta etapa $a(\eta) \propto \eta^2 \longrightarrow \frac{\ddot{a}}{a} \propto \frac{2}{\eta^2}$ y se tiene:

$$\ddot{V}_k + \left(k^2 - \frac{2}{\eta^2} \right) V_k = 0, \quad (5.1.7)$$

cuya expresión es la de una ecuación de Bessel. Para obtener la solución, consideramos que la solución para una ecuación de Bessel expresada de la siguiente forma:

$$\ddot{V}_k(x) + \frac{1 - 2\alpha}{x} \dot{V}_k(x) + \left[(\beta \nu x^{\nu-1})^2 + \frac{\alpha^2 - \gamma^2 \nu^2}{x^2} \right] V_k(x) = 0, \quad (5.1.8)$$

está dada por:

$$V_k(x) = x^\alpha [C J_\alpha(\beta x^\nu) + C J_{-\alpha}(\beta x^\nu)]. \quad (5.1.9)$$

Comparando luego con la ecuación que tenemos que resolver, cuya variable independiente es el tiempo conforme η , se puede ver que los distintos parámetros toman los siguientes valores: $\alpha = \frac{1}{2}$, $\nu = 1$, $\beta = k$ y $\gamma = \frac{3}{2}$, entonces la solución para la ecuación de V_k es:

$$V_k(\eta) = C\eta^{\frac{1}{2}}J_{\frac{3}{2}}(k\eta) + D\eta^{\frac{1}{2}}J_{-\frac{3}{2}}(k\eta). \quad (5.1.10)$$

Luego, la solución a la ecuación de los modos en la época donde domina la materia será:

$$h(\eta) = C\eta^{-\frac{3}{2}}J_{\frac{3}{2}}(k\eta) + D\eta^{-\frac{3}{2}}J_{-\frac{3}{2}}(k\eta), \quad (5.1.11)$$

siendo:

$$J_{\frac{3}{2}}(k\eta) = \sqrt{\frac{2}{\pi k\eta}} \left(\frac{\sin(k\eta)}{k\eta} - \cos(k\eta) \right). \quad (5.1.12)$$

5.2. Densidad de energía de las ondas gravitacionales

Una vez que tenemos definidas las ondas gravitacionales y la ecuación diferencial que las describe, se puede calcular, para un dado momento, cómo es su densidad de energía para distintos modos k .

Cuando las perturbaciones salen del horizonte, $k \ll aH$, la ecuación 5.0.10 queda

$$\frac{h''_{\lambda,k}}{h'_{\lambda,k}} \approx -\frac{2a'}{a} \implies h_{\lambda,k}(\eta) = A + B \int^{\eta} \frac{d\tau'}{a^2(\tau')}, \quad (5.2.1)$$

donde A y B son constantes de integración. Despreciando el segundo término que decae, se encuentra que $h_{\lambda,k}$ permanece constante fuera del horizonte. De manera que se puede escribir a la solución general de la onda como:

$$h_{\lambda,k}(\eta) \equiv h_{\lambda,k}^{prim} \mathcal{T}(\eta, k), \quad (5.2.2)$$

siendo $h_{\lambda,k}^{prim}$ la solución de la ecuación cuando el modo sale del radio de Hubble durante la etapa inflacionaria. Esta cantidad, que se toma como condición inicial, se puede obtener de la literatura. El otro término, la función de transferencia

$\mathcal{T}(\eta, k)$, describe la evolución de los modos de las ondas gravitacionales luego de que entren al horizonte y está normalizada de manera que $\mathcal{T}(\eta, k) \rightarrow 1, k \rightarrow 0$.

Por otro lado, el *espectro de potencias* de las ondas gravitacionales, $\Delta_h^2(k)$ puede ser definido como:

$$\langle h_{ij}(\eta, \mathbf{x}) h^{ij}(\eta, \mathbf{x}) \rangle = \int \frac{dk}{k} \Delta_h^2(\eta, k), \quad (5.2.3)$$

lo cual implica que:

$$\Delta_h^2(\eta, k) = \frac{2k^3}{2\pi^2} \sum_{\lambda} \langle |h_{\lambda, \mathbf{k}}(\eta)|^2 \rangle, \quad (5.2.4)$$

y utilizando la ecuación 5.2.2 se puede obtener la evolución temporal del espectro de potencias,

$$\Delta_h^2(\eta, k) \equiv \Delta_{h, prim}^2[\mathcal{T}(\eta, k)]^2, \quad (5.2.5)$$

donde

$$\Delta_{h, prim}^2 = \frac{2k^3}{2\pi^2} \sum_{\lambda} \langle |h_{\lambda, \mathbf{k}}^{prim}|^2 \rangle = \frac{16}{\pi} \left(\frac{H_{inf}}{M_P} \right)^2, \quad (5.2.6)$$

con H_I el parámetro de Hubble durante Inflación y M_P la masa de Planck. Esta expresión viene de resolver la ecuación 5.1.2 para la época inflacionaria [5].

La densidad de energía de las ondas gravitacionales está dada por la componente 0 – 0 del tensor momento-energía

$$\rho_h(\eta) = \frac{\langle h'_{ij}(\eta, \mathbf{x}) h'^{ij}(\eta, \mathbf{x}) \rangle}{32\pi G a^2(\eta)}. \quad (5.2.7)$$

Y la densidad espectral relativa de energía, $\Omega_h(\eta, k)$, está dada por la transformada de Fourier de la densidad de energía, $\tilde{\rho}_h(\eta) \equiv \frac{d\rho_h}{d \ln k}$, dividida por la densidad crítica del Universo, $\rho_{cr}(\eta)$. Para ver una derivación completa se puede ver [5],

$$\Omega_g(\eta, k) = \frac{k^2}{12a^2(\eta)H^2(\eta)} \Delta_{h, prim}^2(k) |\mathcal{T}(\eta, k)|^2. \quad (5.2.8)$$

Capítulo 6

Métodos de Resolución

En el capítulo anterior, derivamos la expresión 5.2.8 para obtener el espectro asociado a la densidad de energía de las ondas gravitacionales. A continuación, se desarrollarán los cálculos necesarios para obtener cómo es afectado este espectro por la transición de fase en QCD, siendo el tema de interés de este trabajo. Se compararán los resultados considerando dos tipos de transiciones de fase diferentes: de primer orden (modelo de bolsa del MIT) y suave (PNJL-nl). En una primera instancia obtenemos las expresiones analíticas, junto con las condiciones iniciales necesarias para poder luego construir el código que nos permitirá obtener los resultados.

Comenzamos nuestro análisis a partir de la ecuación 5.2.8:

$$\Omega_h(\eta, k) = \frac{k^2}{12a^2(\eta)H^2(\eta)} \Delta_{h,prim}^2(k) |\mathcal{T}(\eta, k)|^2, \quad (6.0.1)$$

donde $\mathcal{T}(\eta, k)$ es la función de transferencia y $\Delta_{h,prim}^2(k)$ el espectro de potencias primordial de inflación, mientras que $\Delta_h^2(k)$ es el espectro de potencias en cualquier η . De las ecuaciones 5.2.4, 5.2.5 y 5.2.6 obtenemos:

$$\Delta_h^2(k) = \Delta_{h,prim}^2(k) \frac{|h_k(\eta)|^2}{|h_{k,prim}(\eta)|^2} \implies |\mathcal{T}(k, \eta)|^2 \equiv \frac{|h_k(\eta)|^2}{|h_{k,prim}(\eta)|^2}. \quad (6.0.2)$$

El valor de $\Delta_{h,prim}^2(k)$ lo podemos obtener de la etapa inflacionaria, sabiendo que:

$$\begin{aligned} \Delta_{h,prim}^2(k) &= \frac{8H_I^2}{M_p(2\pi)^2}, = \frac{2k^3}{2\pi^2} |h_{k,prim}(\eta)|^2 \\ &\rightarrow |h_{k,prim}(\eta)|^2 = \frac{2H_I^2}{k^3 M_p^2}. \end{aligned} \quad (6.0.3)$$

Recordando que $H_I = \frac{10^{-6}}{\sqrt{3}} M_p$, siendo $M_p = 2,43 \times 10^{18}$ GeV la masa reducida

de Planck.

Volviendo a la definición de la función de transferencia 6.0.2, se puede despejar:

$$|\mathcal{T}(k, \eta)|^2 = \frac{k^3 M_p^2}{2H_I^2} |h_k(\eta)|^2, \quad (6.0.4)$$

la cantidad que nos interesa calcular es: $\frac{\Omega_h(k, \eta)}{\Omega_h(k_<, \eta)}$, donde $k_<$ es un modo tal que $k_< < k_*$, siendo k_* el modo que cruza el horizonte al tiempo en el que ocurre la transición de fase. Es decir que a la densidad espectral de energía 5.2.8 se la normaliza por los modos que cruzaron el horizonte *después* de la transición de fase, es decir que no serán afectados por ella. De esta manera, dividiendo la expresión por $\Omega_h(k_<, \eta)$ y considerando que $\Delta_{h, prim}^2$ es independiente de k 6.0.3 ya que es resultado de inflación, se tiene:

$$\frac{\Omega_h(k, \eta)}{\Omega_h(k_<, \eta)} = \frac{k^5}{k_<^5} \frac{\mathcal{T}(k, \eta)^2}{\mathcal{T}(k_<, \eta)^2}. \quad (6.0.5)$$

A su vez, por la ecuación 6.0.4, la función de transferencia depende de la perturbación $h_k(\eta)$. Cómo ya se hizo anteriormente, es conveniente para los cálculos realizar el siguiente cambio:

$$h_k(\eta) \equiv \frac{2}{M_p} \frac{V_k(\eta)}{a(\eta)}, \quad (6.0.6)$$

y reemplazando en la ecuación 6.0.4 se obtiene:

$$|\mathcal{T}(k, \eta)|^2 = \frac{2k^3}{H_I^2} \frac{|V_k(\eta)|^2}{|a(\eta)|^2}, \quad (6.0.7)$$

y sustituyendo en la ecuación 6.0.5:

$$\frac{\Omega_h(k, \eta)}{\Omega_h(k_<, \eta)} = \frac{k^2}{k_<^2} \frac{|V_k(\eta)|^2}{|V_{k_<}(\eta)|^2}. \quad (6.0.8)$$

6.1. Modos que entran después de la transición de fase

Veamos ahora cómo calcular la cantidad $|V_{k_<}(\eta)|^2$. Conociendo la ecuación 5.0.10 de la evolución de $h_k(\eta)$, mediante el cambio de variable propuesto llegá-bamos a la ecuación diferencial que cumplía con la ecuación de $V_k(\eta)$ 5.1.2.

Como los modos $k_<$ son los que entran después de la transición de fase, el Universo está dominado por radiación cuya ecuación de estado es $P = \rho/3$. La

solución para esta etapa 5.1.4 es la del oscilador armónico:

$$\begin{aligned} V_{k_{<}}(\eta) &= A_{k_{<}} e^{ik_{<}\eta}, \\ \longrightarrow |V_{k_{<}}(\eta)|^2 &= |A_{k_{<}}|^2. \end{aligned} \quad (6.1.1)$$

Con el fin de encontrar el valor de $A_{k_{<}}$ utilizamos el valor de $|V_{k_{<}}(\eta)|$ al tiempo en el que $k_{<}$ entra al horizonte. De la ecuación 6.0.6 se obtiene:

$$|V_{k_{<}}(\eta_{k_{<}})|^2 = \frac{M_p^2}{4} |h_{k_{<}}(\eta_{k_{<}})|^2 a^2(\eta_{k_{<}}), \quad (6.1.2)$$

donde η depende de los modos $k_{<}$ ya que entran al horizonte a diferentes tiempos. Como $|h_{k_{<}}(\eta_{k_{<}})|^2$ es igual al valor que viene de inflación se tiene:

$$|h_{k_{<}}(\eta_{k_{<}})|^2 = \frac{2H_I^2}{M_p^2 k_{<}^3} = |h_{k_{<},prim}|^2 \quad (6.1.3)$$

y como la condición general para que un modo entre al horizonte es tal que $k = aH$, $a^2(\eta_{k_{<}})$, obtenemos:

$$k_{<} = a^2(\eta_{k_{<}})H(\eta_{k_{<}}). \quad (6.1.4)$$

Por simplicidad de la notación vamos a utilizar: $H(\eta_{k_{<}}) \equiv H_{in}$ y $a^2(\eta_{k_{<}}) \equiv a_{in}^2$. De las ecuaciones de Friedmann 2.2.12 podemos escribir:

$$H_{in} = \frac{\rho^{1/2}}{\sqrt{3}M_p} = \frac{\mathbb{C}_1^{1/2}}{a_{in}^2 \sqrt{3}M_p}, \quad (6.1.5)$$

donde usamos que para radiación $\rho = \mathbb{C}_1 a^{-4}$ y que $8\pi G = M_p^{-2}$. Reemplazando la ecuación 6.1.5 en la expresión 6.1.4 y reemplazando este resultado en ecuación 6.1.2 se llega a:

$$|V_{k_{<}}(\eta_{k_{<}})|^2 = \frac{1}{6} \frac{H_I^2}{M_p^4} \frac{\mathbb{C}_1}{k_{<}^5}, \quad (6.1.6)$$

sustituyendo esto último en la ecuación 6.0.8, se obtiene:

$$\frac{\Omega_h(k, \eta)}{\Omega_h(k_{<}, \eta)} = 6 \frac{M_p^2}{H_I^2} \frac{k^5}{\mathbb{C}_1} |V_k(\eta)|^2. \quad (6.1.7)$$

6.2. Modos que entran antes de la transición de fase

Ahora vamos a resolver la ecuación diferencial para $V_k(\eta)$ desde algún instante inicial η_i hasta que ocurre la transición de fase η_* . Es en esta etapa donde utilizaremos la ecuación de estado que nos provee el modelo de bolsa del MIT descrito en el Capítulo 4, $\rho - 3P = 4\mathcal{B}$, con \mathcal{B} un parámetro del modelo llamado constante de la bolsa.

De la segunda ecuación de Friedmann 2.2.11, expresada en tiempo conforme, se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{a''}{a} &= \frac{4\pi G}{3} a^2 (\rho - 3P) = \frac{16\pi G}{3} a^2 \mathcal{B} \equiv a^2 \tilde{\mathcal{B}}, \\ \rightarrow \frac{a''}{a} &= a^2 \tilde{\mathcal{B}}, \quad \text{con} \quad \tilde{\mathcal{B}} \equiv \frac{16\pi G}{3} \mathcal{B}. \end{aligned} \quad (6.2.1)$$

De manera que la ecuación diferencial a resolver es:

$$V_k'' + (k^2 - a^2 \tilde{\mathcal{B}}) V_k = 0. \quad (6.2.2)$$

En lugar de utilizar $V_k(\eta)$, para simplificar los cálculos será conveniente expresar todo en función del factor de escala: $V_k(a)$. De esta manera, por regla de la cadena tendremos:

$$\begin{aligned} V_k' &= \dot{V}_k a', \\ V_k'' &= \dot{V}_k a'' + \ddot{V}_k a'^2. \end{aligned} \quad (6.2.3)$$

Donde el punto denota derivada respecto a a : $\dot{V}_k \equiv \frac{dV_k}{da}$.

Ahora bien, considerando las ecuaciones de Friedmann en tiempo conforme 2.4.5 y la ecuación de estado del MIT podemos obtener una ecuación que nos de la evolución de la densidad ρ en esta etapa:

$$\frac{d\rho}{dt} + 4\sqrt{\frac{8\pi G}{3}} (\rho^{3/2} - \rho^{1/2} \mathcal{B}) = 0, \quad (6.2.4)$$

tomando al factor de escala a como variable independiente: $\frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{da} \frac{da}{dt}$ y de

Friedmann se tiene:

$$\begin{aligned} H &= \frac{a'}{a} = \sqrt{\frac{8\pi G}{3}} \rho^{1/2} \\ \frac{da}{dt} &= \sqrt{\frac{8\pi G}{3}} a \rho^{1/2} \\ \longrightarrow \frac{d\rho}{dt} &= \frac{d\rho}{da} \sqrt{\frac{8\pi G}{3}} a \rho^{1/2}, \end{aligned} \quad (6.2.5)$$

sustituyendo en la ecuación 6.2.4:

$$\left(\frac{d\rho}{da}\right) \sqrt{\frac{8\pi G}{3}} a \rho^{1/2} + 4\sqrt{\frac{8\pi G}{3}} (\rho^{3/2} - \rho^{1/2} \mathcal{B}) = 0, \quad (6.2.6)$$

luego, dividiendo todo por $\sqrt{\frac{8\pi G}{3}} a \rho^{1/2}$ se obtiene:

$$\dot{\rho} + \frac{4}{a} (\rho - \mathcal{B}) = 0. \quad (6.2.7)$$

Cuya solución estará dada por:

$$\rho(a) = \mathcal{B} + \frac{\mathbb{C}_2}{a^4}, \quad (6.2.8)$$

siendo \mathbb{C}_2 una constante a determinar por las condiciones iniciales.

Ahora, teniendo la densidad, si reemplazamos la ecuación 6.2.3 en la ecuación diferencial para V_k 6.2.2, vamos a obtener todo en función de a como variable independiente

$$\ddot{V}_k a^4 \left(\frac{\tilde{\mathcal{B}}}{2} + \frac{\tilde{\mathcal{C}}_2}{a^4} \right) + \dot{V}_k a^3 \tilde{\mathcal{B}} + (k^2 - a^2 \tilde{\mathcal{B}}) V_k = 0. \quad (6.2.9)$$

Como se comentó al inicio, esta es una ecuación válida para un instante η_i anterior a la transición de fase hasta el tiempo η_* en el cuál se lleva a cabo la transición de fase. Se puede ver que para radiación $\mathcal{B} = \tilde{\mathcal{B}} = 0$ y obtenemos la ecuación conocida para radiación, correspondiente a un oscilador armónico.

Para resolver la ecuación 6.2.9 necesitamos establecer condiciones iniciales, y es conveniente fijarlas al momento a_{in} , es decir al momento en el que el modo entra al horizonte $k = a_{in} H_{in}$. Utilizando la ecuación de Fridmann se tiene:

$$\begin{aligned} H_{in} &= \sqrt{\frac{8\pi G}{3}} \rho_{in}^{1/2}, \\ \longrightarrow k &= a_{in} \sqrt{\frac{8\pi G}{3}} \rho_{in}^{1/2}, \end{aligned} \quad (6.2.10)$$

donde a_{in} se puede obtener de la conservación de la entropía 3.1.15 tomando como referencia los valores de hoy, quedando:

$$a_{in} = \frac{a_0 T_0}{T_{in}} \left(\frac{g_0}{g} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (6.2.11)$$

siendo $a_0 = 1$ el factor de escala hoy, $T_0 = 2,72$ K la temperatura hoy [46] y $g_0 = 3,95$ los grados de libertad efectivos relativistas hoy; ver Figura 3.1.

Y para saber exactamente el valor de ρ_{in} utilizamos las ecuaciones del modelo del MIT 4.2.2. De esta manera la densidad antes de la transición de fase es:

$$\rho_{in} \simeq \frac{\pi^2}{30} g_1 T_{in}^4 + \mathcal{B}, \quad (6.2.12)$$

siendo T_{in} la temperatura inicial que consideraremos para los cálculos, de forma que sea mayor que T_* , la temperatura correspondiente a la transición de fase.

Se obtiene entonces:

$$k = \frac{a_0 T_0}{T_{in}} \left(\frac{g_0}{g} \right)^{\frac{1}{3}} \left[\left(\frac{8\pi G}{3} \right) \left(\frac{\pi^2}{30} g_1 T_{in}^4 + \mathcal{B} \right) \right]^{1/2}. \quad (6.2.13)$$

Así, de esta ecuación, para una dada temperatura podemos conocer los k que nos interesan.

Volviendo al cálculo de las condiciones iniciales, necesitamos los valores: $V_k(a_{in})$, $\dot{V}_k(a_{in})$ y a_{in} . Para obtener los primeros dos, usaremos lo que se sabe de inflación ya que $V_k(a)$ viene evolucionando desde inflación hasta que el modo cruza en el horizonte en a_{in} , antes de a_* .

La solución de inflación, propuesta por [5], es:

$$V_k(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2k}} \left(1 - \frac{i}{k\eta} \right) e^{-ik\eta}. \quad (6.2.14)$$

En inflación se tiene: $a(\eta) = -\frac{1}{H_I \eta}$, de manera que cambiando la variable:

$$V_k(a) = \frac{1}{\sqrt{2k}} \left(1 + i \frac{a H_I}{k} \right) e^{ik/a H_I}. \quad (6.2.15)$$

Los modos que salen del horizonte durante inflación, $k \ll aH$ es decir $aH/k \gg 1$, y que después vuelven a entrar son los que interesan, entonces podemos apro-

ximar:

$$\begin{cases} V_k(a) \simeq \frac{-i}{\sqrt{2k}} \frac{aH_I}{k} e^{-ik/aH_I}, \\ \dot{V}_k(a) \simeq -i \frac{e^{-ik/aH_I}}{\sqrt{2k}} \frac{H_I}{k}. \end{cases} \quad (6.2.16)$$

Y finalmente se pueden despejar las condiciones iniciales necesarias:

$$|V_k(a_{in})|^2 = \frac{a_{in}^2 H_I^2}{2k^3}, \quad |\dot{V}_k(a_{in})|^2 = \frac{H_I^2}{2k^3}. \quad (6.2.17)$$

En resumen, en el capítulo anterior se obtuvo cómo era la densidad de energía de ondas gravitacionales en función del tiempo conforme η y los modos k 5.2.8, la cual además depende de la función de transferencia. En este capítulo, se expresó esta última en términos de V_k que a su vez se relaciona con la perturbación h_k mediante 6.0.6.

Para encontrar la ecuación diferencial que describe V_k se tuvieron en cuenta dos ecuaciones de estado: $P/\rho = 1/3$ para radiación, con lo cual se debe resolver la ecuación diferencial de un oscilador armónico 5.1.4 y $P/\rho = 1/3 - 4\mathcal{B}/3\rho$ para la transición de fase, debiendo resolver la ecuación 6.2.9.

Por último, se establecieron las condiciones iniciales, ecuaciones 6.2.17, necesarias para poder resolver ambas ecuaciones diferenciales.

Capítulo 7

Resultados

En el capítulo anterior se obtuvieron todos los elementos necesarios para calcular cómo es afectada la densidad espectral de energía de las ondas gravitacionales primordiales generadas en inflación, por la transición de fase de la QCD. Aquí se dará un desarrollo del trabajo y los resultados obtenidos.

Para esto se construyó un código en `python`, el cual fue desarrollado en dos etapas:

1. En un primer instante, se generó el código para que pueda ser aplicado a la ecuación de estado provista por el modelo de bolsa del MIT 4.2.2, la cual es analítica.
2. Luego, el código se adaptó de manera que se pueda utilizar una ecuación de estado arbitraria, y así aplicarlo a aquella que provee el modelo de Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio no local, descrito en el capítulo 4.

La etapa 1 permitió testear el código aplicando una ecuación de estado conocida, con la que ya se obtuvieron resultados en otros trabajos. Aquí el código permite calcular, a partir de una dada temperatura inicial $T_i = 1$ GeV, el factor de escala asociado mediante la conservación de la entropía 3.1.15. El valor del factor de escala a una temperatura fija permite caracterizar el modo k que ingresa al radio de Hubble mediante la expresión 6.2.13. Debido a lo anterior, el código evalúa si esa temperatura corresponde a un ingreso del modo k antes o después de que ocurra la transición de fase, la cual corresponde a una $T_* = 180$ MeV [4]. De esta manera, tenemos dos etapas importantes:

- (a) Si el modo ingresa después de la transición de fase, resuelve la ecuación del oscilador armónico 5.1.4 con las condiciones iniciales provenientes de la época inflacionaria 6.2.17, estos modos no serán afectados por la transición y se espera que presenten un comportamiento oscilatorio, propio de la solución de dicha ecuación.

CAPÍTULO 7. RESULTADOS

(b) Por otro lado, si el modo ingresa antes de la transición de fase será la ecuación 6.2.9 la que deba resolver. En esta última se encuentran los parámetros correspondientes al modelo de bolsa del MIT y son estos modos los que serán afectados por la transición.

Una vez obtenida la solución de la correspondiente ecuación diferencial, evaluada en el factor de escala al momento final $V_k(a(T_f))$ para el cual se toma $T_f = 0,011$ GeV, se podrá calcular la densidad de energía dada por la ecuación

$$\Omega_g(k, a) = \frac{k^5 V_k^2(a)}{12\pi^2 a^4 H^2}, \quad (7.0.1)$$

que corresponderá a una dada frecuencia [4]:

$$f_k = 3,53 \frac{T}{180 \text{ MeV}} \left(\frac{g}{17,25} \right)^{1/6} 10^{-9} \text{ Hz}. \quad (7.0.2)$$

El resultado se encuentra en la figura 7.1. Por cómo fue implementado el código, lo que se observa en la gráfica es la solución total de las ecuaciones diferenciales, mientras que la cantidad de interés observacional está definida en términos de la amplitud al cuadrado, es decir $|V_k|^2$.

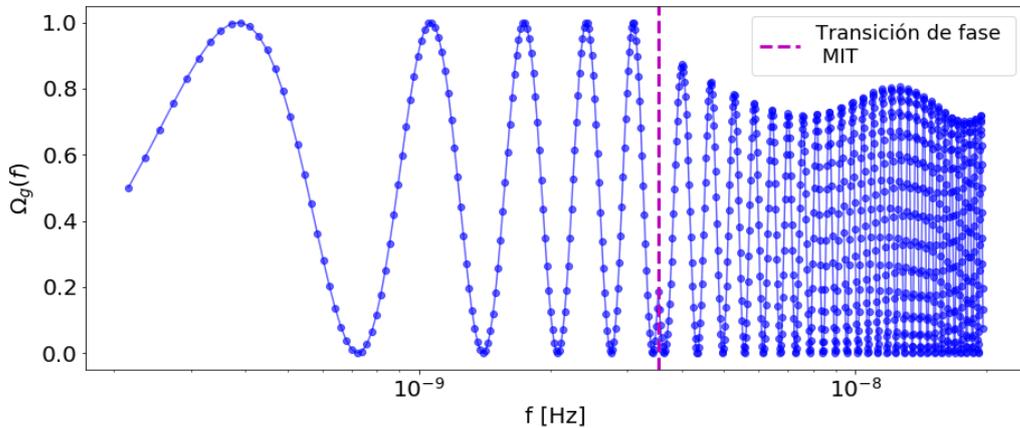


Figura 7.1: Densidad espectral de energía de las ondas gravitacionales primordiales, para el modelo del MIT.

Cada punto azul de la gráfica representa uno de los modos k , que fueron ingresando al radio de Hubble en distintos momentos, es decir con distintos factores de escala. Para ilustrar esto se realizó el gráfico de la figura 7.2.

Para entender este gráfico hay que volver atrás en el cambio de variable realizado en 6.0.6, es decir si el código nos permite calcular las soluciones V_k , aplicando esta ecuación y normalizando por el valor con el que viene de inflación 6.0.3, se obtiene $(h_k/h_k^{prim})^2$. Lo que se tiene es cómo son las soluciones de la cantidad anteriormente mencionada, en función del factor de escala normalizado, para tres

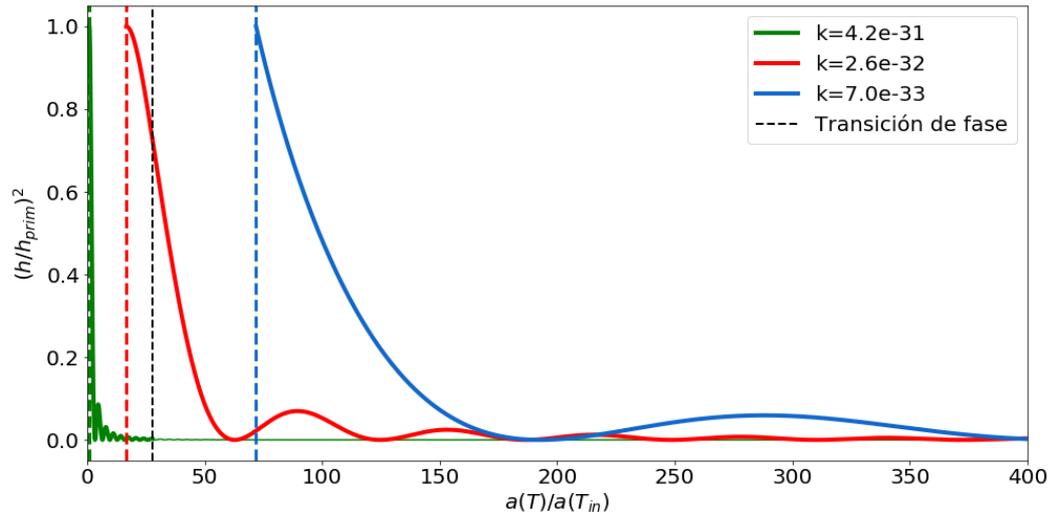


Figura 7.2: Evolución de distintos modos en función del factor de escala.

modos k distintos: dos ingresan al radio de Hubble antes de la transición de fase ($4,2 \times 10^{-31}$ y $2,6 \times 10^{-32}$) y un modo ingresa luego de la transición ($7,0 \times 10^{-33}$). Es útil recordar a esta altura que cuando se habla de ingreso de un modo al radio de Hubble se hace referencia a que la longitud de onda asociada es del orden de su tamaño, es decir: $k \sim aH$.

Se observa que, los modos que entran al horizonte antes (parte izquierda de la gráfica) decaen más rápidamente que los que entran a etapas tardías (parte derecha de la gráfica), de manera que los modos más grandes son los últimos en ingresar. Si bien no se observa información para momentos anteriores al ingreso en el radio, se sabe que estos oscilan con amplitud constante para cada uno de los modos, y una vez ingresados las amplitudes comienzan a decaer oscilando varias veces hasta el presente.

Volviendo a la gráfica 7.1, los resultados que se obtienen del análisis de la misma sirvieron para testear el código construido, siendo consistentes a los esperados según [4]. Así, se puede observar que para las frecuencias más pequeñas que la de la transición de fase $f < f_*$, se tiene la solución de un oscilador armónico para los modos $k < k_*$, lo cuál era esperable ya que corresponden a aquellos modos que ingresaron luego de la transición de fase y no fueron afectados por ella, siguiendo la ecuación 5.1.4.

Para frecuencias mayores a la de la transición de fase $f > f_*$, se ve una disminución en la amplitud de la densidad de energía, seguida de un aumento pero no mayor a la amplitud máxima. En este caso, se tiene la solución de la ecuación 6.2.9 para los modos $k > k_*$ que ingresaron previo a la transición de fase, siendo afectados por ella.

Dado el comportamiento de la gráfica 7.2 donde se grafica h_k normalizada, se observa que h_k decae una vez que el modo cruza el horizonte. El decaimiento es más pronunciado para modos que entran antes de la transición de fase que para los que entran después. En términos de la variable V_k (recordar la definición $V_k = ah_k$), la densidad de energía de las ondas gravitacionales es proporcional a $|V_k|^2$ 7.0.1. En la figura 7.1 se graficó $\Omega(k, a_{eq})$, ahí se observa que para los modos con frecuencia $f > f_*$, esto es los modos que entran antes de la transición de fase, la densidad de energía es menor que para los modos que entran después de la transición de fase. Esto último es consistente con la figura 7.2.

De manera que, por cómo es la evolución de los modos, se espera que haya un decaimiento, y la transición de fase genera que dicho decaimiento sea aún mayor.

Por otro lado en la segunda etapa, una vez testeado, se pudo adaptar el código a un enfoque más general y esto permitió poder aplicar la ecuación de estado provista por el modelo de PNJL-nl. La aplicación de este modelo al contexto de Universo temprano es algo novedoso, por lo cual requiere un análisis más profundo de ciertos detalles que se verán a continuación.

Se consideró cuál es la ecuación de V_k general a resolver, que se obtiene de 5.1.2 realizando el cambio a factor de escala como variable independiente 6.2.3:

$$\ddot{V}_k a'^2 + \dot{V}_k a'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a} \right) = 0, \quad (7.0.3)$$

donde se tiene

$$\begin{aligned} a'^2 &= \frac{8\pi G}{3} a^4 \rho, \\ a'' &= \frac{4\pi G}{3} a^3 (\rho - 3P) = \frac{4\pi G}{3} a^3 \rho (1 - 3w), \end{aligned} \quad (7.0.4)$$

recordando que $w = P/\rho$. De las dependencias de la ecuación 7.0.4 podemos ver que necesitamos conocer la densidad $\rho(a)$ y la cantidad $\omega(a)$ para poder resolver la ecuación 7.0.3. Las entradas del código fueron densidad ρ , presión P y temperatura T . Pero la densidad ingresada viene de la termodinámica, es decir que en principio no se conoce cómo varía con el factor de escala a , para esto deberá cumplir su ecuación de movimiento dada por la relatividad general 2.2.5, que en función del factor de escala como variable independiente está dada por la expresión:

$$\dot{\rho} + \frac{3}{a} \rho(a) [1 + \omega(a)] = 0. \quad (7.0.5)$$

Para poder resolver esta ecuación de continuidad 7.0.5 y de esta forma encontrar $\rho(a)$, cantidad necesaria para resolver la ecuación 7.0.3 de V_k , es necesario conocer la cantidad $w(a) = P/\rho$. Es por esto que se realizaron ajustes para tener una

expresión analítica de la misma.

En la figura 7.3 se muestran los valores de $w(a)$ obtenidos mediante el cociente de la presión P y la densidad ρ de la tabla, y el ajuste numérico obtenido para esos valores de $w(a)$.

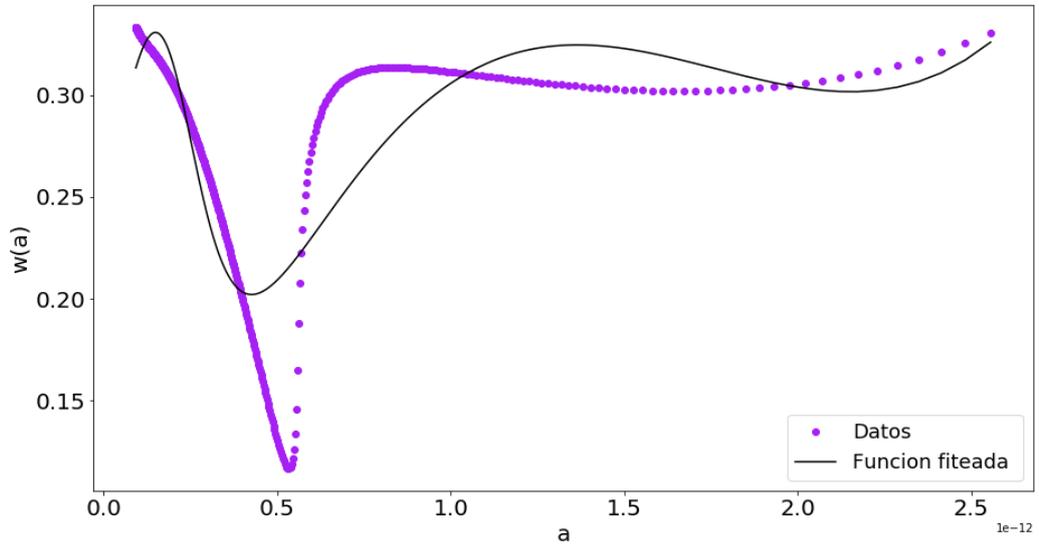


Figura 7.3: Ajuste numérico a la función $w(a) = P/\rho$.

Una vez obtenida una expresión analítica para $w(a)$ se calculó $\rho(a)$ resolviendo la ecuación 7.0.5, obteniendo la gráfica 7.4.

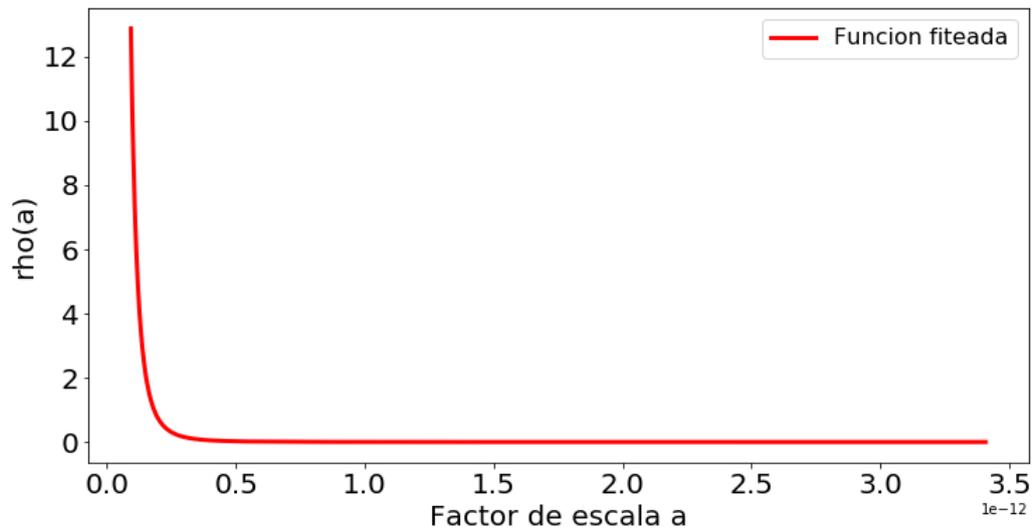


Figura 7.4: Densidad dada por el modelo PNJL-nl en función del factor de escala.

Si bien puede verse que la aproximación a los datos obtenidos en 7.3 es muy grosera, pudo obtenerse el resultado de la gráfica 7.5.

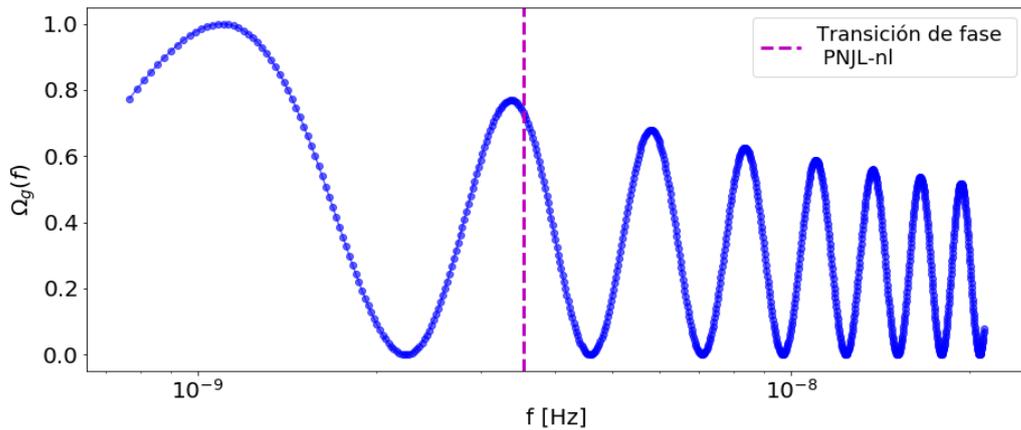


Figura 7.5: Densidad espectral de energía de las ondas gravitacionales primordiales, para el modelo de Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio no local.

Este modelo describe transiciones de fase llamadas de tipo crossover. Se encontró que al ocurrir la transición de fase, como puede observarse en la gráfica 7.5, la disminución en la densidad de energía es mucho más suave en comparación con la que resulta de utilizar una ecuación de estado de primer orden, como la provista por el MIT.

Capítulo 8

Conclusiones y trabajo a futuro

En este último capítulo se expondrá, a modo de resumen, el análisis llevado a cabo en esta tesis y las conclusiones que se pudieron obtener, así como también los aspectos que se podrán trabajar a futuro.

Como se ha mencionado, el objetivo principal de esta tesis fue poder calcular cómo fue afectado el espectro de densidad de energía de las ondas gravitacionales primordiales, al generarse la transición de fase en QCD en el Universo temprano. Esta última fue estudiada a través de una ecuación de estado que genera transiciones de fase de primer orden, dada por el modelo del MIT y la dada por el modelo PNJL-nl que da transiciones de tipo crossover.

Para ello, como primer paso se introdujeron los dos marcos teóricos necesarios para la correcta comprensión del análisis desarrollado: el modelo cosmológico estándar y las transiciones de fase en QCD. Ambos son en sí mismo dos grandes áreas estudiadas dentro de la astronomía y la física, y en este contexto se pueden relacionar mediante el estudio de la historia térmica del Universo. Con todos estos elementos se realizó un análisis completo sobre las ondas gravitacionales. Luego de definir la densidad espectral de energía de estas, siendo la cantidad de interés, se introduce la transición de fase. Esto es, luego de la época inflacionaria y antes de que el Universo esté dominado por radiación caracterizada completamente por una ecuación de estado del tipo $P/\rho = 1/3$ ocurre este suceso. Es necesario aclarar que la ecuación de estado que describe esta época no se aparta mucho de aquella que describe puramente radiación. Por esto, se calcularon cuáles son las ecuaciones diferenciales que describen ambas etapas: Universo dominado puramente por radiación y cuando ocurre la transición de fase. Para realizar todos los cálculos, se construyó un código en `python`, el cual fue desarrollado en dos etapas: **1** y **2**. Concluyendo así el breve resumen del trabajo y de los análisis realizados en el capítulo anterior se podrá llegar a una serie de conclusiones.

La primer etapa permitió testear el código aplicando una ecuación de estado conocida y comparando los resultados con los que se obtuvieron en otros trabajos

[4]. En particular se vio que, los modos que entran al horizonte antes de la transición de fase (parte izquierda de la gráfica 7.2), decaen significativamente más rápido que los que entran después de la transición de fase (parte derecha de la gráfica 7.2).

En cuanto al efecto de la transición de fase, se encontró que hay una atenuación significativa en el espectro primordial de energía de las ondas gravitacionales. Se espera [4] que para altas frecuencias la amplitud tienda a un valor constante de

$$\frac{\Omega_g(f \gg f_*)}{\Omega_g(f \ll f_*)} = \left(\frac{g_2}{g_1}\right)^{1/3} \sim 0,7. \quad (8.0.1)$$

Si se observa la gráfica 7.1 puede verse que se corta entre 0,6 y 0,8, siendo valores muy cercanos al achatamiento en un factor 0,7. Se realizaron una serie de pruebas variando los límites de temperatura, aumentando la temperatura para así obtener un rango mayor de frecuencias pero no se logró reproducir un achatamiento de $\sim 0,7$ para frecuencias más altas, de hecho el gráfico de este último análisis es incorrecto y no tiene ningún sentido físico.

En la segunda etapa, una vez testeado el código se lo pudo adaptar a un enfoque más general y esto permitió poder aplicar la ecuación de estado provista por el modelo de PNJL-nl. Así, se realizaron ajustes de funciones a los valores de $w = P/\rho$ para poder resolver la ecuación de continuidad de ρ y obtener cómo varía con el factor de escala $\rho(a)$, resolver la ecuación de V_k y calcular finalmente la densidad de energía. El análisis de este desarrollo se encuentra explicado con más detalle en el capítulo 7.

Al aplicar el código a la ecuación de estado del modelo PNJL-nl, se encontró por un lado que la cantidad $w(a)$ no permanece constante. Además el ajuste de $w(a)$ no fue muy preciso, como se observa en la figura 7.3, de forma que los resultados en la densidad espectral de energía de las ondas gravitacionales primordiales de la gráfica 7.5 son una primera aproximación a lo que deberíamos obtener mejorando el ajuste. Se obtuvo una atenuación mucho más suave que la obtenida con el MIT 7.1 y no presenta un aumento en la densidad luego de la transición de fase como sí se observa en el MIT.

Del análisis anterior, podemos concluir que mientras una transición de fase de primer orden (como la generada por el modelo del bolsa del MIT) genera una disminución abrupta en la densidad espectral de energía, si aplicamos una transición de fase de tipo crossover (como la generada por el modelo de PNJL-nl) obtenemos una disminución mucho más suave.

Como se ha mencionado, la aplicación del modelo de PNJL-nl al contexto de Universo temprano es algo nuevo, es por esto que en el trabajo a futuro se va a

tener que realizar un análisis más detallado de diversos aspectos del modelo, entre ellos está el estudio de cómo afectan los grados de libertad efectivos relativistas de las partículas presentes a distintas temperaturas.

Se pretende además, mejorar el ajuste para $w(a)$, ya que es sumamente importante para poder obtener el gráfico lo más realista posible, en comparación con los datos de la ecuación de estado con los que se trabaja.

También se agregará más etapas, así como la época de igualdad entre materia y radiación y luego la época dominada por materia, de forma tal que se pueda obtener el espectro al día de hoy.

Por último sería de interés obtener, en lugar de la solución completa a la ecuación de onda 7.0.3, solo la amplitud sin la parte oscilatoria y de esta forma poder relacionarla con el observable asociado a los modos B de polarización de FCR.

Bibliografía

- [1] G. Malfatti, M. G. Orsaria, G. A. Contrera, F. Weber, and I. F. Ranea-Sandoval, “Hot quark matter and (proto-) neutron stars,” *Phys. Rev. C*, vol. 100, p. 015803, Jul 2019.
- [2] A. R. Bodmer, “Collapsed nuclei,” *Phys. Rev. D*, vol. 4, pp. 1601–1606, Sep 1971.
- [3] E. Witten, “Cosmic separation of phases,” *Phys. Rev. D*, vol. 30, pp. 272–285, Jul 1984.
- [4] S. Schettler, T. Boeckel, and J. Schaffner-Bielich, “Imprints of the qcd phase transition on the spectrum of gravitational waves,” *Physical Review D*, vol. 83, Mar 2011.
- [5] Y. Watanabe and E. Komatsu, “Improved calculation of the primordial gravitational wave spectrum in the standard model,” *Physical Review D*, vol. 73, Jun 2006.
- [6] J. C. Collins and M. J. Perry, “Superdense matter: Neutrons or asymptotically free quarks?,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 34, pp. 1353–1356, May 1975.
- [7] T. Boeckel, S. Schettler, and J. Schaffner-Bielich, “The cosmological qcd phase transition revisited,” *Progress in Particle and Nuclear Physics*, vol. 66, no. 2, pp. 266 – 270, 2011. Particle and Nuclear Astrophysics.
- [8] S. Sanches, F. Navarra, and D. Fogaça, “The quark gluon plasma equation of state and the expansion of the early universe,” *Nuclear Physics A*, vol. 937, pp. 1 – 16, 2015.
- [9] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn, and V. F. Weisskopf, “New extended model of hadrons,” *Phys. Rev. D*, vol. 9, pp. 3471–3495, Jun 1974.
- [10] O. Philipsen, “The QCD equation of state from the lattice,” *Prog. Part. Nucl. Phys.*, vol. 70, pp. 55–107, 2013.

- [11] R. Bellwied, S. Borsanyi, Z. Fodor, J. Günther, S. D. Katz, C. Ratti, and K. K. Szabo, “The QCD phase diagram from analytic continuation,” *Phys. Lett.*, vol. B751, pp. 559–564, 2015.
- [12] B. P. Abbott *et al.*, “Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 116, no. 6, p. 061102, 2016.
- [13] T. eLISA Consortium, :, P. A. Seoane, S. Aoudia, H. Audley, G. Auger, S. Babak, J. Baker, E. Barausse, S. Barke, M. Bassan, V. Beckmann, M. Benacquista, P. L. Bender, E. Berti, P. Binétruy, J. Bogenstahl, C. Bonvin, D. Bortoluzzi, N. C. Brause, and *et al.*, “The gravitational universe.”
- [14] V. Corbin and N. J. Cornish, “Detecting the cosmic gravitational wave background with the big bang observer,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 23, p. 2435–2446, Mar 2006.
- [15] S. Sato, S. Kawamura, M. Ando, T. Nakamura, K. Tsubono, A. Araya, I. Funaki, K. Ioka, N. Kanda, S. Moriwaki, M. Musha, K. Nakazawa, K. Numata, S. Sakai, N. Seto, T. Takashima, T. Tanaka, K. Agatsuma, K. Aoyanagi, and T. Yoshino, “Decigo: The japanese space gravitational wave antenna,” *Journal of Physics: Conference Series*, v.154 (2009), vol. 154, 05 2011.
- [16] K. N. Abazajian, P. Adshead, Z. Ahmed, S. W. Allen, D. Alonso, K. S. Arnold, C. Baccigalupi, J. G. Bartlett, N. Battaglia, B. A. Benson, C. A. Bischoff, J. Borrill, V. Buza, E. Calabrese, R. Caldwell, J. E. Carlstrom, and *et al.*, “Cmb-s4 science book, first edition.”
- [17] D. Baumman, *Cosmology. Part III Mathematical Tripos.*
- [18] J. A. FRIEMAN, “The standard cosmology,” *The Building Blocks of Creation*, Oct 1994.
- [19] P. Collaboration, N. Aghanim, Y. Akrami, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi, M. Ballardini, A. J. Banday, R. B. Barreiro, N. Bartolo, and *et al.*, “Planck 2018 results. vi. cosmological parameters.”
- [20] D. Boyanovsky, H. de Vega, and D. Schwarz, “Phase transitions in the early and present universe,” *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, vol. 56, p. 441–500, Nov 2006.
- [21] S. Dodelson, *Modern Cosmology*. Amsterdam: Academic Press, 2003.
- [22] O. Piattella, “Lecture notes in cosmology,” *UNITEXT for Physics*, 2018.

-
- [23] F. Zwicky, “Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln,” *Helvetica Physica Acta*, vol. 6, pp. 110–127, Jan. 1933.
- [24] Y. Sofue, Y. Tutui, M. Honma, A. Tomita, T. Takamiya, J. Koda, and Y. Takeda, “Central rotation curves of spiral galaxies,” *The Astrophysical Journal*, vol. 523, pp. 136–146, sep 1999.
- [25] Y. Sofue and V. Rubin, “Rotation curves of spiral galaxies,” *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, vol. 39, p. 137–174, Sep 2001.
- [26] S. Weinberg, *Cosmology*. 9 2008.
- [27] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. 1972.
- [28] S. Dodelson, *Gravitational Lensing*. Cambridge University Press, 2017.
- [29] A. G. Riess, A. V. Filippenko, P. Challis, A. Clocchiatti, A. Diercks, P. M. Garnavich, R. L. Gilliland, C. J. Hogan, S. Jha, R. P. Kirshner, and et al., “Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant,” *The Astronomical Journal*, vol. 116, p. 1009–1038, Sep 1998.
- [30] S. Perlmutter, G. Aldering, G. Goldhaber, R. A. Knop, P. Nugent, P. G. Castro, S. Deustua, S. Fabbro, A. Goobar, D. E. Groom, and et al., “Measurements of Ω and w from 42 high-redshift supernovae,” *The Astrophysical Journal*, vol. 517, p. 565–586, Jun 1999.
- [31] A. Riotto, “Inflation and the Theory of Cosmological Perturbations,” 2018.
- [32] J.-P. Uzan, “Inflation in the standard cosmological model,” *Comptes Rendus Physique*, vol. 16, no. 10, pp. 875 – 890, 2015. Cosmic inflation / Inflation cosmique.
- [33] A. H. Guth, “Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems,” *Phys. Rev. D*, vol. 23, pp. 347–356, Jan 1981.
- [34] A. Linde, “A new inflationary universe scenario: A possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems,” *Physics Letters B*, vol. 108, no. 6, pp. 389 – 393, 1982.
- [35] G. León, *Caracterizaciones de los estados post-colapso del inflatón en el origen cuántico de las fluctuaciones cosmológicas primordiales*. Phd thesis, Universidad Nacional Autónoma de México, 2011.

- [36] L. Husdal, “On effective degrees of freedom in the early universe,” *Galaxies*, vol. 4, p. 78, Dec 2016.
- [37] G. A. G. Contrera, *Estudio de propiedades hadrónicas y de materia de quarks en modelos efectivos de quarks con interacciones no locales*. Phd thesis, Universidad Nacional de General San Martín, 2011.
- [38] F. J. Yndurain, *The theory of quark and gluon interactions*. 1999.
- [39] M. Tanabashi, K. Hagiwara, K. Hikasa, K. Nakamura, Y. Sumino, F. Takahashi, J. Tanaka, K. Agashe, G. Aielli, C. AMSler, and et al, “Review of particle physics,”
- [40] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, “Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. i,” *Phys. Rev.*, vol. 122, pp. 345–358, Apr 1961.
- [41] M. Buballa, “NJL model analysis of quark matter at large density,” *Phys. Rept.*, vol. 407, pp. 205–376, 2005.
- [42] A. Scarpettini, D. Gomez Dumm, and N. N. Scoccola, “Light pseudoscalar mesons in a nonlocal SU(3) chiral quark model,” *Phys. Rev.*, vol. D69, p. 114018, 2004.
- [43] Rößner, S. and Ratti, C. and Weise, W., “Polyakov loop, diquarks, and the two-flavor phase diagram,” *Phys. Rev. D*, vol. 75, p. 034007, Feb 2007.
- [44] J. P. Carlomagno, “Meson properties and phase diagrams in a SU(3) nonlocal PNJL model with lattice-QCD-inspired form factors,” *Phys. Rev.*, vol. D97, no. 9, p. 094012, 2018.
- [45] Carlomagno, J. P. and Gómez Dumm, D. and Scoccola, N. N., “Deconfinement and chiral restoration in nonlocal SU(3) chiral quark models,” *Phys. Rev. D*, vol. 88, p. 074034, Oct 2013.
- [46] D. J. Fixsen, E. S. Cheng, J. M. Gales, J. C. Mather, R. A. Shafer, and E. L. Wright, “The cosmic microwave background spectrum from the fullcoBEFIRAS data set,” *The Astrophysical Journal*, vol. 473, p. 576–587, Dec 1996.