



Facultad de Ciencias
**Astronómicas
y Geofísicas**
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA



Evolución y Astrosismología de Enanas Blancas de Masa Extremadamente Baja

Lic. Leila Magdalena Calcaferro

Director: Dr. Alejandro H. Córscico
Codirector: Dr. Leandro G. Althaus

Tesis presentada para optar por el título de
Doctora en Astronomía

Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas,
Universidad Nacional de La Plata.

La Plata,
Abril de 2020

Evolución y astrosismología de enanas blancas de masa extremadamente baja

Autora

Firma y aclaración

Directores

Director de tesis
Firma y aclaración

Codirector de tesis
Firma y aclaración

Miembros del jurado

Dra. María Alejandra De Vito

Dra. Andrea Costa

Dra. Maja Vučković

Presidenta del Jurado
Firma y aclaración

Agradecimientos

Cuesta tener presente, al momento de escribir los agradecimientos, a todas aquellas personas que acompañaron estos cinco años de doctorado. Es emocionante pensar en todos los que estuvieron en algún momento de este camino, y en todos los acontecimientos que han ocurrido hasta llegar a este momento... y cómo finalmente se terminó dando de forma tan particular. Programada inicialmente para defender el 25 de marzo de 2020, menos de una semana antes, se impuso una cuarentena estricta debido a la pandemia de COVID-19. La incertidumbre generalizada de esos primeros días sumado a, en mi caso, la ansiedad que de por sí se pone en juego en momentos previos a una defensa, fueron bastante difíciles de sobrellevar. Sin embargo, la tecnología y la buena voluntad de todos permitieron que esta Tesis pudiese ser defendida de forma virtual pocos días después. Debo agradecer a las autoridades de la Facultad por haber hecho posible que el 6 de abril pudiera finalmente llevarse a cabo la defensa de manera virtual.

No he podido compartir este momento como deseé por tanto tiempo. No obstante, mis seres queridos estuvieron ahí, acompañándome a través de alguna plataforma. Y algo que para mí fue muy lindo, hasta Fotón pudo estar presente en mi defensa, hecho que no habría sido posible de otro modo.

También quiero agradecer al Obser por ese espacio tan único y bello para llevar a cabo el doctorado. Y, desde luego, al CONICET por el financiamiento de la beca que me permitió su desarrollo.

Quiero agradecer al Jurado por haber aceptado evaluar mi defensa de forma virtual, y también por las sugerencias que han realizado a fin de mejorar este trabajo. Agradezco la buena predisposición que han tenido siempre y, además, los lindos comentarios sobre el mismo. En especial, agradezco las sugerencias y las palabras de Alejandra.

A Alejandro y Leandro les agradezco mucho por estos años en que me formaron y ayudaron. Encontré en ellos más que directores, sintiendo gran cariño y amistad. Siempre me han brindado oportunidades y apoyo, y les estoy muy agradecida por ello. En especial, recuerdo las charlas profundas con Ale, compartiendo el viaje al EuroWD, y las anécdotas imborrables.

Al Grupo de Evolución Estelar y Pulsaciones particularmente le agradezco las discusiones semanales, que me han enseñado y hecho crecer. Y las charlas no tan académicas, que también son necesarias.

A las amistades sin las cuales un camino como este, no sería tolerable: Tiari, Lour, Pau, Juli S., Juli J., Fati, Mari, Gastón... y otros tantos que han pasado por este sendero y seguramente estoy olvidando. En particular, tengo que agradecerle a Tiari, amiga del alma, con la que he compartido viajes y tantas experiencias. El apoyo, la comprensión y los consejos me han hecho muy bien, sobre todo en momentos clave. En la última etapa del doctorado, poder hablar de trabajo cuando estaba flaqueando, me ayudó mucho. También agradezco por esas tardes en Tunguska, con mates (lavados jaja) y lindas charlas con Juli y, un poco antes que eso, con Mariela. Entre las cuatro hemos compartido momentos inolvidables en la ofi.

A la familia de Diego, principalmente a Nora, mi segunda mamá, a quien quiero mucho. Siempre me ha apoyado, y me ha brindado su oído muchas veces. Asimismo, no puedo dejar de recordar a Hugo y dedicarle también a él un lugar en este agradecimiento.

A mis papás y hermana, que desde que tengo memoria me apoyan, aún cuando muchas veces eso significó no poder estar presente en momentos importantes. Esos mensajes y mails tan emotivos siempre me dieron un empujoncito cuando lo necesitaba. A mi papá y mi mamá, particularmente, quienes siempre me consultan sobre alguna curiosidad de astronomía, y me bancan cuando estoy entusiasmada o nerviosa. A ellos, que me regalaron de chica un telescopio; que se quedaban conmigo hasta la madrugada viendo un eclipse de Luna en la terraza... y tantos otros gestos de amor.

Y a Diego, a quien agradezco por su paciencia y apoyo; el que me acompañó, día a día, a lo largo de este camino. No alcanzan las palabras... Tu amor y consejos me ayudaron en etapas críticas. Me has ayudado siempre que tuve algún problema, desde lo informático (haciendo posible la misma defensa) hasta lo anímico (organizando un mini festejo en casa para poder disfrutar del momento post-defensa). Agradezco hasta lo simple de esas tardes de mate, jugando con Fotón para distraerme, y que me hicieron tan bien... ¡Te amo!

*"Looking up at the stars, I know quite well
That, for all they care, I can go to hell,
But on earth indifference is the least
We have to dread from man or beast.*

*How should we like it were stars to burn
With a passion for us we could not return?
If equal affection cannot be,
Let the more loving one be me.*

*Admirer as I think I am
Of stars that do not give a damn,
I cannot, now I see them, say
I missed one terribly all day.*

*Were all stars to disappear or die,
I should learn to look at an empty sky
And feel its total dark sublime,
Though this might take me a little time."*

The More Loving One,
W. H. Auden (1960)

Resumen

Las enanas blancas constituyen el destino final más común de las estrellas. En efecto, se espera que ese sea el final evolutivo de la gran mayoría de las estrellas que pueblan el Universo. La mayor parte de las enanas blancas posee envolturas de hidrógeno (H), tiene una masa promedio de $\sim 0.6 M_{\odot}$, y núcleo de carbono y oxígeno. Además, existe una población de enanas blancas con masa $\lesssim 0.45 M_{\odot}$, y se espera que sus núcleos sean de helio (He). Se cree que estas estrellas se originan en sistemas binarios de estrellas de baja masa que experimentan episodios intensos de pérdida de masa cuando atraviesan la rama de las gigantes rojas, antes de que se produzca el flash de He. El escenario de evolución binaria es fundamental para poder explicar que, dentro de la edad del Universo, logren alcanzar la etapa de enana blanca. Dentro de la población de enanas blancas de baja masa se distinguen a las enanas blancas de masa extremadamente baja (ELM, por sus siglas en inglés), con $M_{\star} \lesssim 0.18 - 0.20 M_{\odot}$, de aquellas con masa en el rango de $0.18 - 0.20 \lesssim M_{\star} \lesssim 0.45 M_{\odot}$, principalmente por presentar diferencias muy importantes en sus tiempos evolutivos y propiedades pulsacionales. En los últimos años se ha detectado un gran número de enanas blancas de baja masa, y en particular, de ELMs. La detección de variaciones periódicas de brillo en algunas enanas blancas de baja masa, compatibles con modos de gravedad (g) no radiales, define una nueva clase de estrellas variables (genéricamente denominada ELMV) y abre la posibilidad única de investigar sus interiores mediante la astrosismología. Basándose en la comparación entre los períodos observados en la estrella bajo estudio y los períodos teóricos calculados para modelos estelares representativos de enanas blancas, esta técnica permite obtener información de la estructura interna, que de otro modo no podría conocerse, a la vez que posibilita estimar parámetros fundamentales como la masa estelar. Recientemente se han detectado también pulsaciones en estrellas que se cree son precursoras de las ELMVs, y que se denominan pre-ELMVs.

Esta Tesis está enfocada al estudio de estrellas enanas blancas ELMV, fundamentalmente mediante la astrosismología, sobre la base de los modelos evolutivos representativos de las enanas blancas de baja masa con núcleo de He generados por Althaus et al. (2013), caracterizados por una envoltura de H gruesa. En primer lugar, hemos realizado un análisis de las tasas teóricas de cambio de períodos para ELMVs y pre-ELMVs, explorando su dependencia con la masa estelar y la temperatura efectiva (Calcaferro et al. 2017a). Para ello, estudiamos el valor que adoptan las tasas teóricas de cambio de períodos en las etapas evolutivas donde es viable observar estos objetos, y encontramos que la magnitud esperada de esta cantidad toma distintos valores para cada etapa, y además, es diferente para enanas blancas de baja masa pulsantes con $0.18 - 0.20 \lesssim M_{\star} \lesssim 0.45 M_{\odot}$ y ELMs ($M_{\star} \lesssim 0.18 - 0.20 M_{\odot}$). Así, una eventual medición de la tasa de cambio de períodos permitiría situar evolutivamente a una estrella pulsante de este tipo, a la vez que podría ayudar a distinguir si se trata de una ELM. A continuación, hemos realizado el primer análisis astrosismológico aplicado a todas las ELMVs conocidas hasta el momento, lo cual ha permitido estimar cantidades como la masa estelar, la gravedad superficial y la temperatura efectiva (Calcaferro et al. 2017b). En la mayoría de los casos las soluciones encontradas están en buen acuerdo con las dadas por otras determinaciones aunque, al no resultar unívocas, hemos tenido que emplear restricciones externas al método para poder elegir una solución. Esto puede deberse en parte al número bajo de períodos detec-

tados en estas estrellas, pero también al hecho de que solo hemos considerado modelos caracterizados por una envoltura gruesa de H. Debido a la incerteza que existe respecto al espesor de la envoltura de H en estas estrellas, heredada de una incerteza en el canal de formación (particularmente, la forma en que ocurre la transferencia de masa en el sistema binario), es posible que algunas estén caracterizadas por envolturas delgadas de H. Con esta motivación, hemos generado un amplio conjunto de secuencias adicionales variando artificialmente el espesor de la envoltura de H. Al repetir los ajustes astrosismológicos con este conjunto más amplio, encontramos mejores soluciones para algunas de las ELMVs, dando un indicio de que las ELMVs observadas son compatibles con distintos espesores de la envoltura (Kilic et al. 2018; Calcaferro et al. 2018b). Finalmente, hemos estudiado las diferencias entre los tiempos de enfriamiento de secuencias de ELM con envoltura gruesa y delgada. Al no poder mantener quema residual, la evolución de ELMs con envoltura delgada es mucho más rápida que en el caso de ELMs con envoltura gruesa, haciendo posible hallar ELMs a temperaturas efectivas considerablemente más bajas. La detección de ELMs frías, entonces, podría indicar que estas estrellas se habrían formado con envoltura de H delgada, abriendo la posibilidad de poner cotas sobre los mecanismos posibles para su formación (Calcaferro et al. 2018a).

Índice general

Lista de figuras	XI
Lista de tablas	XVII
1. Introducción	1
1.1. Evolución estelar	1
1.1.1. Evolución estelar aislada	1
1.1.2. Estrellas enanas blancas	4
1.1.3. Evolución estelar binaria	4
1.2. Estrellas pulsantes y pulsaciones	7
1.2.1. Propiedades de las pulsaciones no radiales	11
1.2.2. Algunas características de los modos de pulsación	13
1.2.3. Análisis local y diagrama de propagación	16
1.2.4. Aproximación asintótica	17
1.2.5. Efectos de la rotación lenta y campos magnéticos débiles	19
1.2.6. Mecanismos de excitación	20
1.2.7. Identificación de modos	22
1.3. Astrosismología	23
1.3.1. Astrosismología de enanas blancas	24
1.4. Enanas blancas de baja masa: ELMs	29
1.5. Motivación y contexto de esta Tesis	32
2. Herramientas numéricas y propiedades de los modelos	37
2.1. Código evolutivo: LPCODE	37
2.2. Código de pulsaciones: LP-PUL	39
2.3. Secuencias evolutivas	41
3. La tasa secular de cambio de períodos	49
3.1. Introducción	49
3.2. Determinación de las tasas teóricas de cambio de períodos	52
3.2.1. Fase de enana blanca: ELMVs	53
3.2.2. Fase pre-enana blanca: pre-ELMVs	59
3.2.3. Etapas previas a los flashes de CNO ($M_{\star} \gtrsim 0.18 M_{\odot}$)	64
3.3. Conclusiones	66

4. Primer análisis astrosismológico de enanas blancas ELMV	71
4.1. Introducción	71
4.2. Estrellas bajo estudio	72
4.3. Búsqueda de un espaciamiento de períodos constante	73
4.4. Determinación de la masa estelar de J1518 y J1735 empleando el espaciamiento de períodos observado	77
4.5. Ajustes de períodos individuales	81
4.5.1. El caso de J1840	82
4.5.2. El caso de J1112	83
4.5.3. El caso de J1518	86
4.5.4. El caso de J1614	87
4.5.5. El caso de J2228	90
4.5.6. El caso de J1738	92
4.5.7. El caso de J1618	94
4.5.8. El caso de J1735	96
4.5.9. El caso de J2139	98
4.6. Conclusiones	100
5. Secuencias de ELM con envolturas delgadas y nuevos ajustes a ELMVs	107
5.1. Introducción	107
5.2. Secuencias con diferente espesor de la envoltura de H	108
5.2.1. Estructura química de las envolturas de H	109
5.2.2. Impacto sobre las propiedades pulsacionales	113
5.3. Nuevos ajustes de períodos individuales	116
5.3.1. El caso de J1840	118
5.3.2. El caso de J1112	120
5.3.3. El caso de J1518	121
5.3.4. El caso de J1614	121
5.3.5. El caso de J2228	122
5.3.6. El caso de J1738	125
5.3.7. El caso de J1618	128
5.3.8. El caso de J1735	131
5.3.9. El caso de J2139	132
5.4. Conclusiones	133
6. Las ELMs más frías	137
6.1. Introducción	137
6.2. Estimación de la menor T_{eff} posible alcanzada por una ELM	139
6.3. Conclusiones	144
7. Conclusiones	147
7.1. Trabajo a futuro	153
A. Ecuaciones de pulsación	157

Índice de figuras

1.1. Evolución y composición química esquemáticas de una estrella de masa solar en algunas etapas	2
1.2. Intersecciones de las superficies equipotenciales con el plano de la órbita para un sistema binario interactuante	6
1.3. <i>Panel izquierdo:</i> Esquema básico de transferencia de masa estable a través del punto de Lagrange L_1 . <i>Panel derecho:</i> Esquema básico de transferencia inestable a través de una envoltura común	8
1.4. Distintos tipos de objetos variables.	9
1.5. Estrellas variables en el diagrama H-R	10
1.6. Esquema de contornos de los armónicos esféricos sobre la superficie de una estrella	14
1.7. Esquema coloreado de contornos de los armónicos esféricos sobre la superficie estelar	15
1.8. Diagramas de propagación ($\log(N^2)$, $\log(L_\ell^2)$) en términos de $-\log(1-M_r/M_\star)$ correspondientes a algunos modelos estelares de pre-enanas blancas y enanas blancas, para modos con $\ell = 1$	18
1.9. Estructura química interna de los modelos representados en la Figura 1.8	18
1.10. Ubicación de las distintas clases de enanas blancas y pre-enanas blancas pulsantes en el diagrama $\log T_{\text{eff}} - \log g$	25
1.11. Espaciamiento de períodos en términos de los períodos para un caso arbitrario, con el fin de esquematizar el régimen asintótico	27
1.12. Espaciamiento promedio de períodos en términos de los períodos para un caso arbitrario, con el fin de esquematizar el régimen asintótico	28
1.13. Distribución de masa de las enanas blancas	29
2.1. Diagrama $\log T_{\text{eff}} - \log g$ mostrando los tracks evolutivos de enanas blancas con núcleo de He calculadas por Althaus et al. (2013)	44
2.2. Diagrama $\log T_{\text{eff}} - \log g$ mostrando las secuencias de enanas blancas ELM, junto con la secuencia de enana blanca con núcleo de He de masa más baja que experimenta flashes de CNO	45
2.3. <i>Panel superior:</i> Abundancias fraccionales de H y He en términos del radio normalizado para un modelo de ELM con $M_\star = 0.1554 M_\odot$ y $T_{\text{eff}} \sim 9600$ K. <i>Panel inferior:</i> Diagrama de propagación correspondiente al mismo modelo de ELM.	47
2.4. Como para la Figura 2.3 pero para un modelo de enana blanca con $M_\star = 0.2389 M_\odot$ y $T_{\text{eff}} \sim 9600$ K	47

2.5. Densidad de energía cinética, dE_{kin}/dr , para modos radiales y dipolares g y p , correspondientes al modelo de ELM caracterizado por $M_{\star} = 0.1554 M_{\odot}$ y $T_{\text{eff}} \sim 9600$ K.	48
3.1. Diagrama $T_{\text{eff}} - \log g$ mostrando los tracks evolutivos de enanas blancas de baja masa con núcleo de He (ramas finales de enfriamiento) de Althaus et al. (2013)	54
3.2. <i>Panel superior izquierdo</i> : Tasas de cambio de períodos de modos g con $\ell = 1$ contra los períodos de pulsación correspondientes a modelos de enanas blancas caracterizadas por $T_{\text{eff}} \sim 9000$ K y distintas masas estelares ($0.1554 \leq M_{\star}/M_{\odot} \leq 0.4352$). <i>Panel superior derecho</i> : Igual que para el panel superior izquierdo, pero para modos p con $\ell = 1$. <i>Panel inferior</i> : Igual que para el panel superior izquierdo, pero para modos radiales ($\ell = 0$).	55
3.3. <i>Panel superior izquierdo</i> : Tasas de cambio de períodos de modos g con $\ell = 1$ contra los períodos de pulsación, correspondientes a modelos de enanas blancas caracterizadas por $M_{\star} = 0.1762 M_{\odot}$ y distintas temperaturas efectivas. <i>Panel superior derecho</i> : Igual que para el panel superior izquierdo, pero para modos p con $\ell = 1$. <i>Panel inferior</i> : Igual que para el panel superior izquierdo, pero para modos radiales ($\ell = 0$).	57
3.4. <i>Panel superior izquierdo</i> : Tasas de cambio de períodos de modos g con $\ell = 1$ contra los períodos de pulsación, correspondientes a modelos de enana blanca caracterizados por $M_{\star} = 0.1863 M_{\odot}$ y distintas temperaturas efectivas. <i>Panel superior derecho</i> : Igual que para el panel superior izquierdo, pero para modos p con $\ell = 1$. <i>Panel inferior</i> : Igual que para el panel superior izquierdo, pero para modos radiales ($\ell = 0$).	58
3.5. <i>Panel superior izquierdo</i> : Valor absoluto de la tasa máxima de cambio de períodos en términos de la masa estelar, correspondiente a modos g con $\ell = 1$, para órdenes radiales k seleccionados, para modelos de enana blanca con $8000 \lesssim T_{\text{eff}} \lesssim 10000$ K. <i>Panel superior derecho</i> : Igual que para el panel superior izquierdo, pero para modos p con $\ell = 1$. <i>Panel inferior</i> : Igual que para el panel superior izquierdo, pero para modos radiales ($\ell = 0$).	60
3.6. Diagrama $T_{\text{eff}} - \log g$ mostrando nuestros tracks evolutivos de pre-enana blanca de baja masa con núcleo de He computadas despreciando la difusión de elementos	62
3.7. Evolución de los períodos de pulsación de modos p , g y mixed modes $p - g$ con $\ell = 1$ para un rango amplio de T_{eff} para modelos de pre-enanas blancas con $M_{\star} = 0.1762 M_{\odot}$	63
3.8. $\dot{\Pi}$ contra Π para modos con $\ell = 1$, para un modelo de pre-enana blanca con $0.1762 M_{\odot}$ y $T_{\text{eff}} = 11\,000$ K	64
3.9. <i>Panel izquierdo</i> : Tasas de cambio de períodos contra los períodos de pulsación de modos g , p , y mixed modes $p - g$ con $\ell = 1$, correspondientes a modelos de pre-enanas blancas de baja masa con $T_{\text{eff}} \sim 10\,500$ K y diferentes masas estelares ($0.1554 \leq M_{\star}/M_{\odot} \leq 0.2390$). <i>Panel derecho</i> : Igual que para el panel izquierdo, pero para modos radiales ($\ell = 0$).	65

3.10.	<i>Panel izquierdo:</i> Tasas de cambio de períodos en términos de los períodos de pulsación de modos g , p y mixed modes $p - g$ con $\ell = 1$, correspondientes a modelos de pre-enana blanca de baja masa caracterizados por una masa estelar de $M_{\star} = 0.1762 M_{\odot}$ y diferentes temperaturas efectivas. <i>Panel derecho:</i> Igual que para el panel izquierdo, pero para modos radiales ($\ell = 0$).	66
3.11.	<i>Panel izquierdo:</i> Track evolutivo de la secuencia con $0.1821 M_{\odot}$ en el diagrama $\log T_{\text{eff}} - \log g$. <i>Panel derecho:</i> Igual que para el panel izquierdo, pero para la secuencia con $0.2724 M_{\odot}$	67
3.12.	<i>Panel izquierdo:</i> Abundancias químicas internas de H y He, y logaritmo del cuadrado de las frecuencias de Brunt-Väisälä y Lamb en términos de la coordenada masa ($-\log(1 - M_r/M_{\star})$) correspondiente a modelos seleccionados antes del flash de CNO, con $M_{\star} = 0.1821 M_{\odot}$ y $T_{\text{eff}} = 13\,446$ K. <i>Panel derecho:</i> Igual que para el panel izquierdo, pero para el modelo seleccionado previo al flash de CNO con $0.2724 M_{\odot}$ y $T_{\text{eff}} = 16\,481$ K.	68
3.13.	<i>Panel superior izquierdo:</i> Tasas de cambio de períodos (en unidades de 10^{-15} s/s) de modos g con $\ell = 1$ correspondientes al modelo seleccionado previo al flash de CNO con $M_{\star} = 0.1821 M_{\odot}$ y $T_{\text{eff}} = 13\,446$ K. <i>Panel superior derecho:</i> Igual que para el panel superior izquierdo, pero para modos p con $\ell = 1$. <i>Panel inferior:</i> Igual que para el panel superior izquierdo, pero para modos radiales ($\ell = 0$).	69
3.14.	<i>Panel superior izquierdo:</i> Tasas de cambio de períodos de modos g con $\ell = 1$ correspondientes al modelo seleccionado previo al flash de CNO con $M_{\star} = 0.2724 M_{\odot}$ y $T_{\text{eff}} = 16\,481$ K. <i>Panel superior derecho:</i> Igual que para el panel superior izquierdo, pero para modos p con $\ell = 1$. <i>Panel inferior:</i> Igual que para el panel superior izquierdo, pero para modos radiales ($\ell = 0$).	70
4.1.	Tests de significancia I-V (panel superior), K-S (panel medio), y F-T (panel inferior) aplicados al espectro de períodos de J1518 con el fin de buscar un espaciamiento de períodos constante	78
4.2.	Igual que en la Figura 4.1, pero para J1735	79
4.3.	Espaciamiento promedio de períodos dipolares ($\overline{\Delta\Pi}_{\ell}$, con $\ell = 1$) computados en el rango de períodos observado para J1518, correspondiente a cada secuencia de modelos de enana blanca considerada en este análisis, en términos del logaritmo de la temperatura efectiva.	80
4.4.	Igual que en la Figura 4.3, pero para J1735.	80
4.5.	Inversa de la función de calidad del ajuste de períodos considerando $\ell = 1$ (panel superior), $\ell = 2$ (panel medio), y $\ell = 1, 2$ (panel inferior) contra la T_{eff} para J1840	83
4.6.	Igual que en la Figura 4.5, pero para J1112 en el caso de los cinco períodos más largos	85
4.7.	Igual que en la Figura 4.6, para el caso de los siete períodos observados en J1112. En el panel superior se ve el caso de modos radiales ($\ell = 0$) y p y g ($\ell = 1, 2$), mientras que en el panel inferior, se ve el caso de modos p y g con $\ell = 1$	87
4.8.	Igual que en la Figura 4.5, pero para J1518	88
4.9.	Igual que en la Figura 4.5, pero para J1614	89

4.10. Igual que en la Figura 4.5, pero para J2228	91
4.11. Igual que en la Figura 4.5, pero para J1738.	93
4.12. Igual que en la Figura 4.5, pero para J1618	95
4.13. Igual que en la Figura 4.5, pero para J1735	97
4.14. Igual que en la Figura 4.5, pero para J2139	99
4.15. Ubicación en el plano $\log T_{\text{eff}} - \log g$ de las nueve estrellas analizadas, de acuerdo con los parámetros espectroscópicos del modelo de atmósfera 3D y el correspondiente modelo astrosismológico adoptado para cada estrella, junto con nuestros tracks evolutivos de enanas blancas de núcleo de He de baja masa	104
5.1. Grilla de secuencias evolutivas de enanas blancas de baja masa con núcleo de He en el plano $M_{\star}/M_{\odot} - \log(M_{\text{H}}/M_{\star})$	109
5.2. <i>Panel superior:</i> Perfiles químicos del H para los modelos de enanas blancas con $M_{\star} = 0.1554 M_{\odot}$, $T_{\text{eff}} \sim 8000$ K y diversos espesores de la envoltura de H. <i>Panel inferior:</i> Logaritmo de la frecuencia de Brunt-Väisälä al cuadrado para cada modelo representado.	110
5.3. Igual que en la Figura 5.2, pero para modelos con $M_{\star} = 0.2390 M_{\odot}$	111
5.4. Abundancia fraccional de H (X_{H}) contra la coordenada de la fracción de masa externa, para modelos de ELM con $M_{\star} = 0.1554 M_{\odot}$ y $T_{\text{eff}} = 8000$ K	112
5.5. <i>Paneles izquierdos:</i> Espaciamiento de períodos, $\Delta\Pi_k$, en función de los períodos de pulsación, Π_k , para modelos de enana blanca con $M_{\star} = 0.1554 M_{\odot}$, $T_{\text{eff}} \sim 8000$ K y diferentes espesores de la envoltura de H. <i>Paneles derechos:</i> Energía cinética de oscilación en función de los períodos para los mismos modelos de enana blanca mostrados en los paneles izquierdos.	114
5.6. Igual que en la Figura 5.5, pero para modelos con $M_{\star} = 0.2390 M_{\odot}$ (ver Tabla 5.1 y Figura 5.3).	115
5.7. Proyección sobre el plano $T_{\text{eff}}-M_{\star}$ de la inversa de la función de calidad, considerando $\ell = 1, 2$ para los tres conjuntos diferentes de períodos de J1840, sin considerar la incerteza para ningún período (panel b), y los conjuntos con $-\sigma_i$ (panel a) y $+\sigma_i$ (panel c) solamente para el caso particular del período $\Pi_i^{\text{O}} = 3930.0$ s	119
5.8. Igual que en la Figura 5.7(b) pero para el caso de J1112. La cruz negra marca el modelo elegido.	120
5.9. Igual que en la Figura 5.7(b), pero para el caso de J1518.	122
5.10. Igual que en la Figura 5.7(b), pero para el caso de J1614.	123
5.11. Igual que en la Figura 5.7, pero para el caso de J2228.	124
5.12. Transformada de Fourier de los datos obtenidos para J1738 usando las observaciones de 2014 (panel superior), las observaciones individuales de 2017 (panel medio) y las de 2017 combinadas (panel inferior). Adaptado de Kilic et al. (2018).	126
5.13. Igual que en la Figura 5.7(b) pero para el caso de J1738, considerando los períodos del conjunto de datos de 2014, suponiendo que están asociados con $\ell = 1$	128
5.14. Igual que en la Figura 5.7 pero para el caso de J1738, considerando el conjunto de períodos correspondientes a 2014, 2017 y 2014 + 2017.	129

5.15. Igual que en la Figura 5.7 pero para el caso de J1618, para los tres conjuntos diferentes de períodos.	131
5.16. Igual que en la Figura 5.7, pero para el caso de J1735.	132
5.17. Igual que en la Figura 5.7, pero para el caso de J2139.	133
6.1. Curvas de enfriamiento para las ELM con $M_{\star} = 0.1554 M_{\odot}$ con envolturas tanto canónica como delgada de H.	140
6.2. Igual que en la Figura 6.1 pero para las secuencias evolutivas con $M_{\star} = 0.1822 M_{\odot}$	140
6.3. Secuencias evolutivas de enanas blancas de baja masa con diferentes espesores de la envoltura de H (canónica y delgada) en el plano $\log(g) - T_{\text{eff}}$. La línea negra vertical a la izquierda (derecha) conecta puntos de igual edad, 13.7 Gyr, para los tracks canónicos (envolturas delgadas de H). El progenitor considerado tiene $M_{\star} = 1.5 M_{\odot}$	143
6.4. Igual que en la Figura 6.3 pero para diferentes masas de la estrella progenitora (1.0, 1.3 y $1.5 M_{\odot}$).	145
7.1. Línea de tiempo de las distintas misiones	153
7.2. <i>Panel superior</i> : Comparación entre las masas de las envolturas de los modelos de Driebe et al. (1998) y las de Althaus et al. (2013) para cada masa de la enana blanca. <i>Panel inferior</i> : Comparación entre las masas de las envolturas de los modelos de Istrate et al. (2016b) y de Althaus et al. (2013).	156

Índice de tablas

1.1.	Principales propiedades de los distintos tipos de enanas blancas pulsantes ordenadas por temperatura efectiva creciente	26
1.2.	Lista de las ELMVs conocidas hasta el momento (confirmadas y no) con sus principales características. Adaptado de Córscico et al. (2019)	35
1.3.	Lista de las pre-ELMV s conocidas hasta el momento (confirmadas y no) con sus principales características. Adaptado de Córscico et al. (2019)	36
3.1.	Valor absoluto del límite superior de las tasas teóricas de cambio de períodos, $ \dot{\Gamma}_{\max} $ (en unidades de 10^{-15} s/s), de modos g seleccionados con $\ell = 1$, correspondientes a modelos de enanas blancas de baja masa con temperatura efectiva en el rango $8\,000 \lesssim T_{\text{eff}} \lesssim 10\,000$ K. Una representación gráfica de estos valores se muestra en el panel izquierdo de la Figura 3.5.	61
3.2.	Valor absoluto de la tasa de cambio de períodos máxima esperada, $ \dot{\Gamma}_{\max} $ [s/s], y su signo, para modos no radiales g y p con $\ell = 1$ (y mixed modes $p - g$ en el caso de pre-ELMV s), y para modos radiales ($\ell = 0$) correspondientes a modelos de pre-enanas blancas y enanas blancas de baja masa, así como también para estrellas evolucionando poco antes de los flashes de CNO.	68
4.1.	Parámetros estelares (derivados usando modelos de atmósferas 1D y 3D) y propiedades pulsacionales observadas de las ELMVs analizadas	73
4.2.	Lista de los cinco períodos independientes de J1840	74
4.3.	Lista de los siete períodos independientes de J1112	74
4.4.	Lista de los siete períodos independientes de J1518	75
4.5.	Lista de los dos períodos independientes de J1614	75
4.6.	Lista de los tres períodos independientes de J2228	76
4.7.	Lista de los tres períodos independientes de J1738	76
4.8.	Lista de los tres períodos independientes de J1618	77
4.9.	Lista de los cuatro períodos independientes de J1735	77
4.10.	Lista de los tres períodos independientes de J2139	78
4.11.	Comparación entre los períodos observados y teóricos para J1840, correspondientes al modelo astrosismológico con $M_{\star} = 0.2389 M_{\odot}$ y $T_{\text{eff}} = 9\,529$ K ($\ell = 1$)	84
4.12.	Igual que en la Tabla 4.11, pero para el modelo adoptado para J1840 con $M_{\star} = 0.1805 M_{\odot}$ y $T_{\text{eff}} = 9\,007$ K ($\ell = 1, 2$)	84

4.13. Igual que en la Tabla 4.11, pero para J1112 (en el caso de los cinco períodos más largos), correspondiente el modelo con $M_{\star} = 0.3205 M_{\odot}$ y $T_{\text{eff}} = 9\,253\text{ K}$ ($\ell = 1$)	86
4.14. Igual que en la Tabla 4.13 para J1112 (en el caso de los cinco períodos más largos), para el modelo con $M_{\star} = 0.2389 M_{\odot}$ y $T_{\text{eff}} = 9\,300\text{ K}$ ($\ell = 1, 2$)	86
4.15. Igual que en la Tabla 4.13 para J1112 (considerando el conjunto completo de períodos), pero para el modelo con $M_{\star} = 0.1612 M_{\odot}$ y $T_{\text{eff}} = 9\,709\text{ K}$, en el caso de modos p , g ($\ell = 1, 2$), y radiales ($\ell = 0$).	90
4.16. Igual que en la Tabla 4.11, pero para el modelo de J1518 con $M_{\star} = 0.3205 M_{\odot}$ y $T_{\text{eff}} = 9\,625\text{ K}$ en el caso de $\ell = 1$	90
4.17. Igual que en la Tabla 4.16, para el modelo adoptado para J1518 con $M_{\star} = 0.2707 M_{\odot}$ y $T_{\text{eff}} = 9\,789\text{ K}$ en el caso de $\ell = 1, 2$	92
4.18. Igual que en la Tabla 4.11, pero para el modelo adoptado para J1614 con $M_{\star} = 0.1762 M_{\odot}$ y $T_{\text{eff}} = 8\,862\text{ K}$ en el caso de $\ell = 1$	92
4.19. Igual que en la Tabla 4.18 para J1614, pero para el modelo con $M_{\star} = 0.3205 M_{\odot}$ y $T_{\text{eff}} = 8\,610\text{ K}$ en el caso de $\ell = 1, 2$	94
4.20. Igual que en la Tabla 4.11, pero para J2228, para el modelo con $M_{\star} = 0.1650 M_{\odot}$ y $T_{\text{eff}} = 7\,828\text{ K}$ en el caso de $\ell = 1$	94
4.21. Igual que en la Tabla 4.20 para J2228, pero para el modelo adoptado con $M_{\star} = 0.1554 M_{\odot}$ y $T_{\text{eff}} = 7\,710\text{ K}$, en el caso de $\ell = 1, 2$	96
4.22. Igual que en la Tabla 4.11, pero para el modelo adoptado para J1738 con $M_{\star} = 0.4352 M_{\odot}$ y $T_{\text{eff}} = 9\,177\text{ K}$ en el caso de $\ell = 1$	96
4.23. Igual que en la Tabla 4.22 para J1738, pero para el modelo con $M_{\star} = 0.4352 M_{\odot}$ y $T_{\text{eff}} = 9\,192\text{ K}$ en el caso de $\ell = 1, 2$	98
4.24. Igual que en la Tabla 4.11, pero para J1618, para el modelo con $M_{\star} = 0.2019 M_{\odot}$ y $T_{\text{eff}} = 8\,863\text{ K}$, en el caso de $\ell = 1$	98
4.25. Igual que en la Tabla 4.24, pero para el modelo adoptado para J1618 con $M_{\star} = 0.1706 M_{\odot}$ y $T_{\text{eff}} = 9\,076\text{ K}$, en el caso de $\ell = 1, 2$	100
4.26. Igual que en la Tabla 4.11, pero para J1735, para el modelo con $M_{\star} = 0.3624 M_{\odot}$ y $T_{\text{eff}} = 7\,991\text{ K}$, en el caso de $\ell = 1$	100
4.27. Igual que en la Tabla 4.26, pero para el modelo adoptado para J1735 con $M_{\star} = 0.1612 M_{\odot}$ y $T_{\text{eff}} = 8\,075\text{ K}$ en el caso de $\ell = 1, 2$	101
4.28. Igual que en la Tabla 4.11, pero para el modelo adoptado para J2139 con $M_{\star} = 0.1863 M_{\odot}$ y $T_{\text{eff}} = 8\,221\text{ K}$ en el caso de $\ell = 1$	101
4.29. Masas estelares para todas las estrellas ELMV estudiadas	102
4.30. Principales características de los modelos astrosismológicos adoptados para cada ELMV	103
5.1. Masas estelares de nuestro conjunto de modelos de enanas blancas de baja masa con núcleo de He y cantidad de H asociada a los diferentes espesores de la envoltura adoptada para cada masa estelar	110
5.2. Comparación entre los períodos observados y teóricos ($\ell = 1, 2$) para J1112, correspondientes al modelo astrosismológico con $M_{\star} = 0.1612 M_{\odot}$, en $T_{\text{eff}} \sim 9\,301\text{ K}$, con $\log(M_{\text{H}}/M_{\star}) = -1.76$ (canónico)	121
5.3. Igual que en la Tabla 5.2, pero para el modelo adoptado para J1518 con $M_{\star} = 0.2390 M_{\odot}$, $T_{\text{eff}} \sim 9\,487\text{ K}$ y $\log(M_{\text{H}}/M_{\star}) = -3.67$	122

5.4.	Igual que en la Tabla 5.2, pero para el modelo adoptado para J1614 con $M_{\star} = 0.1612 M_{\odot}$, $T_{\text{eff}} \sim 8\,989$ K y $\log(M_{\text{H}}/M_{\star}) = -4.35$	123
5.5.	Igual que en la Tabla 5.2, pero para el modelo adoptado para J2228 con $M_{\star} = 0.1554 M_{\odot}$, $T_{\text{eff}} \sim 7\,710$ K y $\log(M_{\text{H}}/M_{\star}) = -1.69$ (canónica).	125
5.6.	Lista de los conjuntos de períodos de J1738 del año 2014 y 2017	127
5.7.	Lista de dos conjuntos posibles de períodos alternativos para J1618	130
5.8.	Igual que en la Tabla 5.2, pero para el modelo adoptado para J1735 con $M_{\star} = 0.1612 M_{\odot}$, $T_{\text{eff}} = 8\,075$ K y $\log(M_{\text{H}}/M_{\star}) = -1.76$ (canónica).	132
5.9.	Igual que en la Tabla 5.2, pero para el modelo adoptado para J2139 con $M_{\star} = 0.1612 M_{\odot}$, $T_{\text{eff}} = 8\,173$ K y $\log(M_{\text{H}}/M_{\star}) = -2.49$	133
5.10.	Principales características de los modelos astrosismológicos adoptados y de los rangos de soluciones posibles para cada ELMV conocida.	135
6.1.	Características principales de tres modelos elegidos con envoltura canónica y delgada.	141

1 | Introducción

“-Je me demande si les étoiles sont éclairées afin que chacun puisse un jour retrouver la sienne.”

Le petit prince, Antoine de Saint-Exupéry (1943)

Iniciamos este Capítulo haciendo un repaso de las nociones teóricas en las que se fundamenta esta Tesis, comenzando por una introducción a la evolución estelar, incluyendo un resumen sobre evolución aislada y binaria. Luego, proporcionamos detalles de la teoría de las estrellas pulsantes y las propiedades de las pulsaciones. Posteriormente, definimos la astrosismología y describimos algunas de sus herramientas. A continuación, damos detalles sobre las enanas blancas de baja masa, haciendo hincapié en las de masa extremadamente baja y, finalmente, expondremos las motivaciones para la realización de este trabajo.

1.1. Evolución estelar

1.1.1. Evolución estelar aislada

A partir de una nube de gas y polvo, homogénea y autogravitante, que recibe una perturbación que se propaga exponencialmente en el tiempo, comienza el colapso gravitacional que va a dar lugar a la formación de una protoestrella. La densidad (ρ) aumenta por el colapso así como también la opacidad (κ). Cuando la densidad aumenta lo suficiente, el material que inicialmente era ópticamente delgado, se vuelve opaco y empieza a aumentar la temperatura (T). Con el aumento de opacidad, la evolución se vuelve adiabática, y así, el gradiente de presión frena la caída libre. El objeto se vuelve convectivo, y tiene una envoltura radiativa que se empezará a disipar, formándose la protoestrella. Este objeto, frío y luminoso, emite por contracción gravitatoria (según el Teorema del Virial) y se ubica en el *diagrama de Hertzsprung-Russell* (H-R), sobre la *línea de Hayashi* correspondiente a su masa. Este es un diagrama teórico, en cuyos ejes se representan $\log(L/L_{\odot})$ y $\log(T_{\text{eff}})$, donde L representa la luminosidad del objeto, L_{\odot} la luminosidad solar, y T_{eff} , la temperatura efectiva. La contracción del objeto continúa y produce un aumento de la temperatura en la región central, volviéndose más transparente (disminuye la opacidad). Así, la parte central se vuelve radiativa y en el diagrama H-R se mueve hacia la izquierda, es decir, a mayores T_{eff} . En la evolución siguiente, esencialmente, se seguirá contrayendo y calentando; la parte radiativa irá avanzando hacia afuera y en un dado momento la temperatura interna será lo suficientemente alta como para hacer posible la ocurrencia de

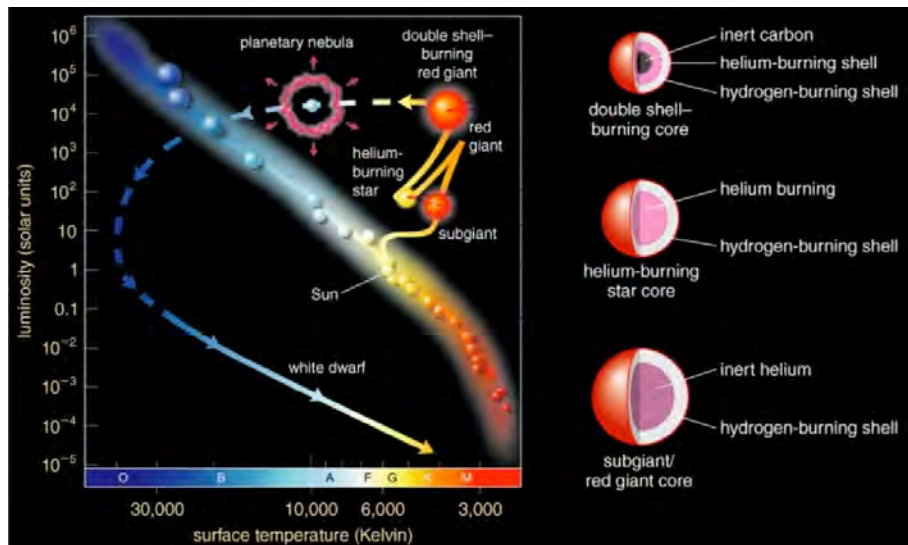


Figura 1.1: Evolución esquemática de una estrella de masa solar (izquierda) y composición química en algunas de las etapas representadas (derecha). (Adaptado de Carroll & Ostlie 2007).

las primeras reacciones nucleares. Finalmente, el objeto alcanza la Secuencia Principal de Edad Cero (*Zero Age Main Sequence*, o ZAMS). Si este objeto tiene una masa superior a $\sim 0.08 M_{\odot}$, se lo considera *estrella*.

Durante la secuencia principal, etapa muy importante y la más duradera en la vida de una estrella, esta se encuentra quemando en el núcleo H en He, y su estructura es estable. Si su masa es inferior a $\sim 1.2 M_{\odot}$, la quema del H se produce principalmente a través del ciclo protón-protón (pp)¹. La estrella está caracterizada por una envoltura convectiva y un núcleo radiativo. Si su masa es superior a $\sim 1.2 M_{\odot}$, la combustión dominante ocurre mediante el ciclo CNO². En este caso, su envoltura es radiativa y el núcleo convectivo. En general ambos ciclos de quema de H están presentes, aunque uno de ellos suele ser más relevante. La quema de H en He en condiciones convectivas hace que dicha región esté completamente mezclada, de modo que el gradiente químico va a ser distinto que en el caso de las estrellas menos masivas, haciendo que las condiciones iniciales para las etapas posteriores sean marcadamente diferentes.

La evolución siguiente, y con ello el tipo de objeto estelar resultante, dependerá fuertemente de la masa. Se suele clasificar a las estrellas, en función de este parámetro, siendo de baja masa aquellas con $0.5 M_{\odot} \lesssim M_{\star} \lesssim 2.3 M_{\odot}$, masa intermedia aquellas con $2.3 M_{\odot} \lesssim M_{\star} \lesssim 9 - 10 M_{\odot}$ y si tienen $M_{\star} \gtrsim 9 - 10 M_{\odot}$, se las denomina de masa alta.

Las estrellas que evolucionarán hasta convertirse en enanas blancas pertenecen a los dos primeros grupos. Como las de baja masa son las de interés para esta Tesis, a continuación nos enfocaremos en ese tipo de estrellas. Consideremos, por ejemplo, el caso de una estrella aislada de $1 M_{\odot}$, cuya evolución está representada en forma esquemática en la Figura 1.1.

¹Hay tres caminos posibles para el ciclo pp, dependiendo de la temperatura. En esencia, reaccionan átomos de ¹H para dar lugar a uno o dos átomos de ⁴He.

²En el ciclo CNO se transforman cuatro átomos de ¹H en uno de ⁴He, donde el catalizador es el ¹²C. Tiene un canal adicional posible, menos probable, y emplea como catalizador al ¹⁴N.

A la derecha del diagrama se muestra un esquema de la composición interna en algunas de las etapas representadas. Según los cálculos evolutivos, una estrella de baja masa típica permanecerá en la secuencia principal unos 10^{10} años (Salaris et al. 2010). Mientras se consume el H central, el núcleo se contrae y aumenta la degeneración electrónica. Agotado el H central, comienza la quema de H en capa, haciendo crecer la masa del núcleo de He. La capa de quema de H se va moviendo hacia afuera, y la temperatura del núcleo crece lentamente mientras su masa sigue aumentando. El aumento de la degeneración electrónica da lugar a una disminución de las opacidades conductivas del núcleo y el transporte conductivo se vuelve muy eficiente. En el diagrama H-R, la estrella se mueve hacia la derecha, hacia temperaturas efectivas menores, y se encuentra ascendiendo por la *rama de las gigantes rojas* (RGB, por su sigla en inglés), puesto que la luminosidad aumenta también. Durante esta etapa una estrella pierde masa debido a que por el aumento del radio estelar, las capas más externas se vuelven poco ligadas.

A pesar de que hay pérdida de energía debido a la conducción electrónica y a un flujo de neutrinos, la temperatura aumenta de forma monótona hasta que alcanza unos $\sim 10^8$ K, cuando la masa de He en el núcleo llega a alcanzar unos $0.45 M_{\odot}$. La estrella tiene entonces suficiente temperatura como para encender el He, mediante el proceso *triple- α* ³. La quema en condiciones degeneradas⁴ resulta muy inestable y tiene lugar el denominado *flash de He*, donde la luminosidad alcanza unos $\sim 10^{10} L_{\odot}$ en pocos segundos. Esto no ocurre en la parte central, sino un poco más afuera, puesto que allí la emisión de neutrinos produce un efecto de refrigeración importante, y por ende no se alcanza tan elevada temperatura. El flash es un proceso interno y de muy poca duración en la estrella, que no se manifiesta externamente. La energía liberada durante este proceso sirve para calentar el núcleo a densidad aproximadamente constante. Como consecuencia, la degeneración es removida, y la liberación de energía sirve para aumentar la presión del gas, ahora ideal, causando la expansión del núcleo. Comienza la quema estable de He y en el diagrama, la estrella se sitúa en algún lugar de la *Rama Horizontal de Edad Cero*, (ZAHB, por su sigla en inglés) dependiendo de su masa y de su metalicidad. La masa del núcleo para estas estrellas en la rama horizontal es de aproximadamente unos $0.45 M_{\odot}$, independientemente de la masa inicial, de modo que en dicha rama se encuentran objetos con la misma masa en el núcleo y con envolturas que diferirán en la cantidad de H. La estructura que tiene es la de un núcleo (convectivo) que quema He en C y O; una capa de He inerte; una capa que quema H en He y una envoltura de H y He. La quema de He central dura unos $\sim 10^7$ años. Cuando el He central se agota, el núcleo de C y O vuelve a contraerse, comienza la quema de He en capa, y la estrella sube en el diagrama H-R a través de la *Rama Asintótica de las Gigantes* (AGB, por su sigla en inglés). La evolución en esta etapa es rápida, de unos $\sim 10^3 - 10^4$ años. Lo que ocurre a continuación depende de la interacción de las cáscaras que quemar H y He, que da lugar a los llamados *pulsos térmicos* que producen una oscilación en la luminosidad⁵. La evolución prosigue, y la masa del núcleo de C y O (degenerado) continúa aumentando debido a que la capa de quema de He se mueve hacia regiones externas. En esta etapa

³En este proceso participan tres átomos de ^4He , produciendo ^{12}C . La reacción $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$, a su vez, produce ^{16}O y ^{20}Ne .

⁴La quema en condiciones no degeneradas, que es el caso para estrellas de masa intermedia, hace que el núcleo empiece a quemar He de manera estable, sin la ocurrencia de un flash.

⁵A la etapa en la que tiene lugar la ocurrencia de los pulsos térmicos en la AGB se la llama *TP-AGB*, por sus siglas en inglés.

también ocurre pérdida de masa a través de vientos, más intensos que en la RGB, lo cual limita la cantidad de pulsos térmicos. Cuando la envoltura se reduce considerablemente, la quema de H no logra mantener la estructura de la estrella y como consecuencia la estrella se contrae, volviéndose azul, es decir, se mueve hacia T_{eff} mayores, a luminosidad aproximadamente constante. El material que fue perdiendo es ionizado por los fotones de la estrella, haciéndose visible la *Nebulosa Planetaria*. Este fenómeno dura unos miles de años, hasta que la nebulosa es dispersada en el medio interestelar. Cuando llega a esta condición, suele considerarse que el objeto es una pre-enana blanca. La estrella va aumentando su degeneración. Cuando la T_{eff} de la estrella alcanza unos $\sim 10^5$ K, la cáscara de H en combustión comienza a extinguirse, y la luminosidad desciende a medida que la estrella se empieza a enfriar. De esta forma, evoluciona hacia la etapa de *Enana Blanca* por una línea de radio constante del diagrama H-R.

1.1.2. Estrellas enanas blancas

De acuerdo al principal constituyente químico superficial, las enanas blancas están clasificadas en dos categorías. Las enanas blancas *DA*, que constituyen alrededor del 80% de las observadas (Kepler et al. 2016) muestran una composición superficial casi enteramente de H con trazas de otros elementos. El escenario que hemos planteado en la Sección anterior predice la formación de este tipo de enana blanca, caracterizada por una atmósfera pura de H con una masa de $M_H \sim 10^{-3} - 10^{-5} M_{\odot}$, dependiendo de la masa estelar. Al restante 20% de las enanas blancas, se las denomina *no DA*, y tienen atmósferas ricas en He. A su vez, esta clase se divide en diferentes subclases: las *DO*, con las mayores T_{eff} , en el rango entre 45 000 K y 200 000 K, y con líneas relativamente intensas de He II; las *DB*, con temperaturas entre 11 000 y 30 000 K, y líneas intensas de HeI; y los tipos *DC*, *DQ* y *DZ* con temperaturas efectivas menores a 11 000 K y con trazas de C y metales en su espectro. El contexto evolutivo descrito arriba no puede dar cuenta de enanas blancas con envolturas ricas en He, requiriendo para su explicación de escenarios más complejos (como por ejemplo, flashes tardíos posteriores a la AGB que consumen el H).

El interior de una enana blanca queda determinado por los procesos experimentados en las etapas previas, como hemos descrito. Una enana blanca típica será un objeto con una masa promedio de $0.6 M_{\odot}$ y una estructura químicamente estratificada: un núcleo de C y O degenerado (con densidades en el rango de $10^5 - 10^8$ gr/cm³), formado por las quemas central y en capa del He, rodeado por una delgada capa rica de He (de a lo sumo $0.01 M_{\odot}$), a su vez rodeado por una capa delgada de H (de $\sim 10^{-4} M_{\odot}$). Estas capas externas son delgadas pero muy opacas a la radiación, y regulan el flujo de energía de la estrella, jugando un rol muy importante en la evolución de la enana blanca (Althaus et al. 2010).

1.1.3. Evolución estelar binaria

En la Sección 1.1.1 hemos dado un breve repaso sobre evolución aislada para el caso particular de una estrella de baja masa. Sin embargo, se espera que el tipo de estrellas de interés en este trabajo tenga origen en un sistema binario. En esta Sección daremos una breve descripción de dicho escenario. El estudio de sistemas binarios es intrínsecamente interesante, puesto que la gran mayoría de las estrellas se encuentran en tales sistemas,

y además eventos astronómicos muy interesantes y diversos ocurren en tales contextos. Entre ellos, podemos mencionar los fenómenos relacionados con altas energías, que tienen lugar en sistemas binarios compactos (donde alguna de las componentes es el remanente compacto de una estrella), como ser púlsares de rayos X, novas, SN Ia, entre muchos otros.

En los casos en que las componentes de un sistema binario se encuentran relativamente alejadas, que es la mayoría de los casos, la evolución transcurre como si estuviesen aisladas. Sin embargo, si están lo suficientemente cerca entre sí, van a interactuar en uno o más momentos de su evolución. Como resultado de esas interacciones, donde tanto la masa como el momento angular son transferidos de una de las estrellas hacia la otra, las propiedades estructurales y la evolución subsiguiente se verán afectadas.

Para estudiar la interacción en sistemas binarios se suele definir el *potencial de Roche*. Este define el potencial efectivo, ϕ , de la atracción que experimentan las estrellas, incluyendo un término debido al potencial gravitacional de cada estrella además de un término que da cuenta de la fuerza centrífuga. En el modelo sencillo que se usa para este tratamiento se considera a las estrellas en órbitas circulares, corrotando con el sistema binario, y el campo gravitacional generado por ambas estrellas es aproximado por el campo generado por dos masas puntuales. La función potencial ϕ , combinada con la tercera ley de Kepler, es una función de las coordenadas escaladas con el semieje mayor de la órbita, a , y del cociente de masas, q . Las superficies de ϕ constante, llamadas *equipotenciales de Roche* serán funciones de esas cantidades. En la Figura 1.2 vemos una representación de la proyección de las superficies equipotenciales en el plano de la órbita para un caso arbitrario. Cerca de cada estrella, el potencial es dominado por la gravedad de la misma y, por consiguiente, las superficies son casi esféricas. Al alejarse de ellas, comienza a hacerse importante la influencia de ambas estrellas, distorsionando las superficies equipotenciales, hasta que se intersecan en el *punto de Lagrange* interior. La superficie equipotencial más interna, que las encierra a ambas, define el *lóbulo de Roche* de cada estrella, que representa la región del espacio alrededor de una estrella en un sistema binario dentro del cual el material que se encuentra orbitando está gravitacionalmente ligado a la misma. En particular, el punto de Lagrange L_1 es la ubicación donde una partícula, corrotando con la binaria, no experimenta fuerza neta alguna: la gravedad de las estrellas se cancela con la fuerza centrífuga. Si una estrella llena su lóbulo de Roche, el gas puede escapar libremente de la superficie a través de este punto, y ser capturado por la otra. La forma precisa del lóbulo de Roche debe evaluarse de forma numérica, sin embargo, se puede usar la expresión que da el radio efectivo, R_L :

$$R_L = \frac{0.49q^{2/3}}{0.6q^{2/3} + \ln(1 + q^{1/3})}a, \quad (1.1)$$

donde a es el semieje mayor de la órbita y $q = M_1/M_2$, es el cociente de las masas de las estrellas. Esta expresión resulta válida dentro del 1 %, para todos los valores de q (Eggleton 1983).

Las estrellas en un sistema binario pueden interactuar de varias formas⁶, por ejem-

⁶Los sistemas binarios interactuantes son también denominados *close binary systems*, según su término en inglés.

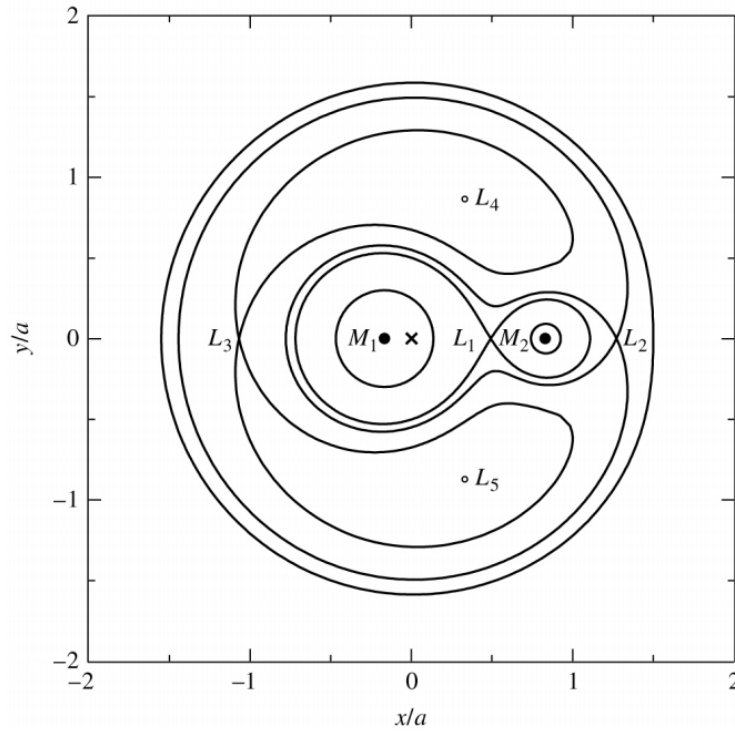


Figura 1.2: Intersecciones de las superficies equipotenciales con el plano de la órbita para un sistema binario interactuante arbitrario (con $M_1 = 0.85 M_\odot$, $M_2 = 0.17 M_\odot$, y $a = 0.718 R_\odot$). El símbolo \times señala el centro de masa del sistema. Tomado de Carroll & Ostlie (2007).

plo, mediante vientos estelares, fuerzas de marea, acreción o transferencia de masa. En particular, la transferencia de masa empieza cuando una de las estrellas, denominada *donante* (con masa M_d), alcanza el radio de Roche. De este modo, la masa es transferida a la compañera, llamada *acretora* (con M_a), a través del punto de Lagrange L_1 . Se define un parámetro β tal que:

$$\dot{M}_a = -\beta \dot{M}_d, \quad (1.2)$$

siendo $0 \leq \beta \leq 1$. De este modo, β da una medida de cuánta masa acretaría una estrella (\dot{M}_a) con respecto a lo que pierde la donante (\dot{M}_d), por lo cual el resto $(1 - \beta)$ se perdería del sistema. De esta expresión se tiene que cuando $\beta = 1$, la transferencia de masa es conservativa. Por otro lado, en una órbita circular⁷ el momento angular total (respecto al centro de masa) se puede escribir como:

$$J = \sqrt{\frac{Ga}{(M_a + M_d)}} \quad (1.3)$$

Se tiene entonces que la evolución temporal del semieje orbital está gobernada por la siguiente expresión general:

⁷Las binarias con período orbital menor a ~ 10 d tienden a tener órbitas circulares debido a las interacciones de marea que circularizan eficientemente las órbitas (Podsiadlowski 2014).

$$\frac{1}{2} \frac{\dot{a}}{a} = \frac{\dot{J}}{J} - \left(\frac{1}{M_d} - \frac{\beta}{M_a} + \frac{\beta - 1}{2(M_d + M_a)} \right) \dot{M}_d \quad (1.4)$$

donde entonces consideramos $\dot{M}_d < 0$. En este caso, \dot{J} representa la pérdida de momento angular de la binaria. Esto puede deberse a procesos espontáneos (como radiación de ondas gravitacionales) o estar asociado con la pérdida de masa del sistema binario o de alguna de las componentes. En el siguiente Capítulo veremos qué expresión toma \dot{J} en el caso de interés para este trabajo. Por el momento, consideremos cualitativamente el caso de una transferencia de masa conservativa, y supongamos que no hay pérdida de momento angular (en general, cuando la masa total y el momento angular total se conservan, al escenario evolutivo se lo llama *conservativo* en la literatura), se tiene entonces:

$$\frac{\dot{a}}{a} = 2 \left(\frac{M_d}{M_a} - 1 \right) \frac{\dot{M}_d}{M_d} \quad (1.5)$$

Si $M_d/M_a < 1$ entonces $\dot{a} > 0$, es decir, la separación orbital y R_L crecen. La donante se separa del lóbulo de Roche pero la expansión nuclear hace que la donante siga llenando su lóbulo. La transferencia de masa tiende a ser *estable*, a través del punto de Lagrange L_1 , y a este escenario se lo conoce con el término en inglés *stable Roche lobe overflow (RLOF) channel*. Si, por el contrario, la donante es más masiva que la acretora ($M_d/M_a > 1$) resulta $\dot{a} < 0$, entonces la separación orbital y R_L decrecen, y la transferencia de masa se volvería *inestable* ya que la estrella acretora no logra acretar todo el material proveniente de la donante. Este se apila sobre la acretora, y comienza a expandirse, eventualmente llenando y superando su propio lóbulo de Roche. Esto lleva a la formación de una envoltura común, donde el núcleo de la donante y la compañera forman una binaria inmersa en la envoltura de la donante. Esto suele pasar cuando la donante es una estrella gigante puesto que su envoltura convectiva tiende a expandirse, en vez de encogerse, cuando pierde masa de forma rápida (adiabáticamente) mientras que R_L se achica (Podsiadlowski et al. 2008). Posteriormente, podría ser que la envoltura sea eyectada del sistema (si la fricción entre las componentes, que las hace espiralar entre sí, libera suficiente energía orbital) y como consecuencia la estrella donante, que perdió su envoltura, se contraiga dentro de su lóbulo de Roche y la pérdida de masa cese, quedando un sistema binario con un período muy corto. O bien, podría ocurrir una fusión (fenómeno conocido como *merger*) entre las estrellas cuando la energía no alcance para eyectar la envoltura, de modo que las componentes continúan acercándose y disipando más energía orbital hasta fusionarse (Podsiadlowski et al. 2008; Ivanova et al. 2013). En la Figura 1.3 puede encontrarse una representación gráfica básica de las transferencias de masa estable e inestable descriptas.

1.2. Estrellas pulsantes y pulsaciones

Comenzando con una breve introducción sobre estrellas variables, en esta Sección haremos una reseña sobre las estrellas pulsantes, y las propiedades del tipo más general de pulsaciones experimentada por una estrella, esto es, las *pulsaciones no radiales*. Daremos algunas características de los modos de pulsación e introduciremos ciertas herramientas para poder analizar la propagación de los mismos.

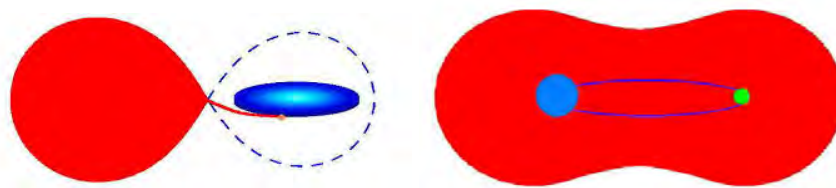


Figura 1.3: *Panel izquierdo*: Esquema básico de transferencia de masa estable a través del punto de Lagrange L_1 . *Panel derecho*: Esquema básico de transferencia inestable a través de una envoltura común. Tomado de Podsiadlowski et al. (2008).

Como hemos visto, las estrellas atraviesan diversos procesos a lo largo de su evolución, que las hacen experimentar cambios. Algunos de ellos ocurren en escalas de tiempo cortas, comparables con la vida humana y por ende, es posible medirlos. Las estrellas que experimentan cambios de brillo de este tipo se denominan *estrellas variables*. El estudio de las variaciones de brillo de las estrellas es de suma importancia para conocer la composición interna de las estrellas, detectar exoplanetas, e incluso, estudiar la estructura de las galaxias. Las estrellas variables se suelen distinguir dependiendo del fenómeno físico que produzca la variabilidad. Se las denomina:

- extrínsecas cuando la variación se debe a procesos externos. Tal es el caso de las variables eclipsantes (una estrella que, en su órbita, eclipsa a otra),
- intrínsecas cuando la variación es causada por cambios en el interior y la superficie de la estrella. En este grupo se encuentran las variables pulsantes, por ejemplo.

En la Figura 1.4 podemos ver un esquema con los distintos tipos de cuerpos celestes variables. En la Figura 1.5 se aprecian, particularmente, los distintos tipos de estrellas variables pulsantes en el diagrama H-R.

Las variables pulsantes, que son las de interés en este trabajo, son aquellas que en algún momento durante su evolución modifican su brillo con un cierto período, debido a cambios producidos en el volumen, y en escalas de tiempo relativamente cortas. Si bien la característica que las hace detectables es la variación en su luz, también se pueden observar cambios en el tipo espectral, variaciones en la velocidad radial, entre otros fenómenos.

Las pulsaciones (también llamadas oscilaciones⁸) más generales que experimentan las estrellas son las *no radiales*. En estas, la estrella se aparta de su configuración de equilibrio y oscila de forma tal que se desvía de su forma esférica, y así, un desplazamiento de un elemento de masa puede tener una dirección arbitraria. En estos apartamientos, tanto la gravedad (a través de la flotación) como la presión (en realidad, el gradiente de presión proveniente de la compresibilidad del gas) pueden actuar como fuerzas restauradoras. Como veremos más adelante, esto dará lugar a dos clases de modos no radiales. El caso más simple es el de *pulsaciones radiales*: la estrella oscila alrededor de su configuración de equilibrio expandiéndose y contrayéndose sin perder su simetría esférica. En este caso,

⁸A lo largo de este trabajo, los términos pulsaciones y oscilaciones se usarán como sinónimos.

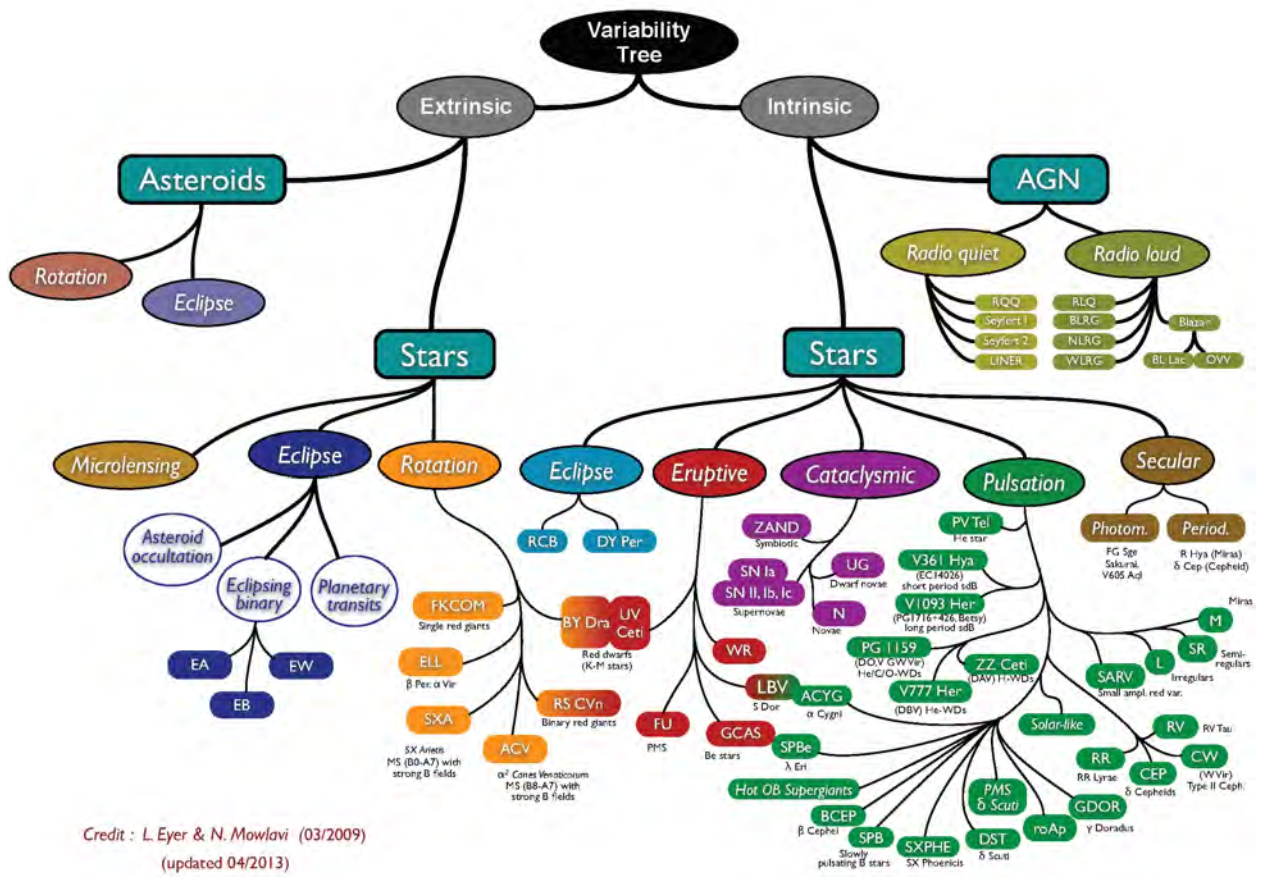


Figura 1.4: Distintos tipos de objetos variables.

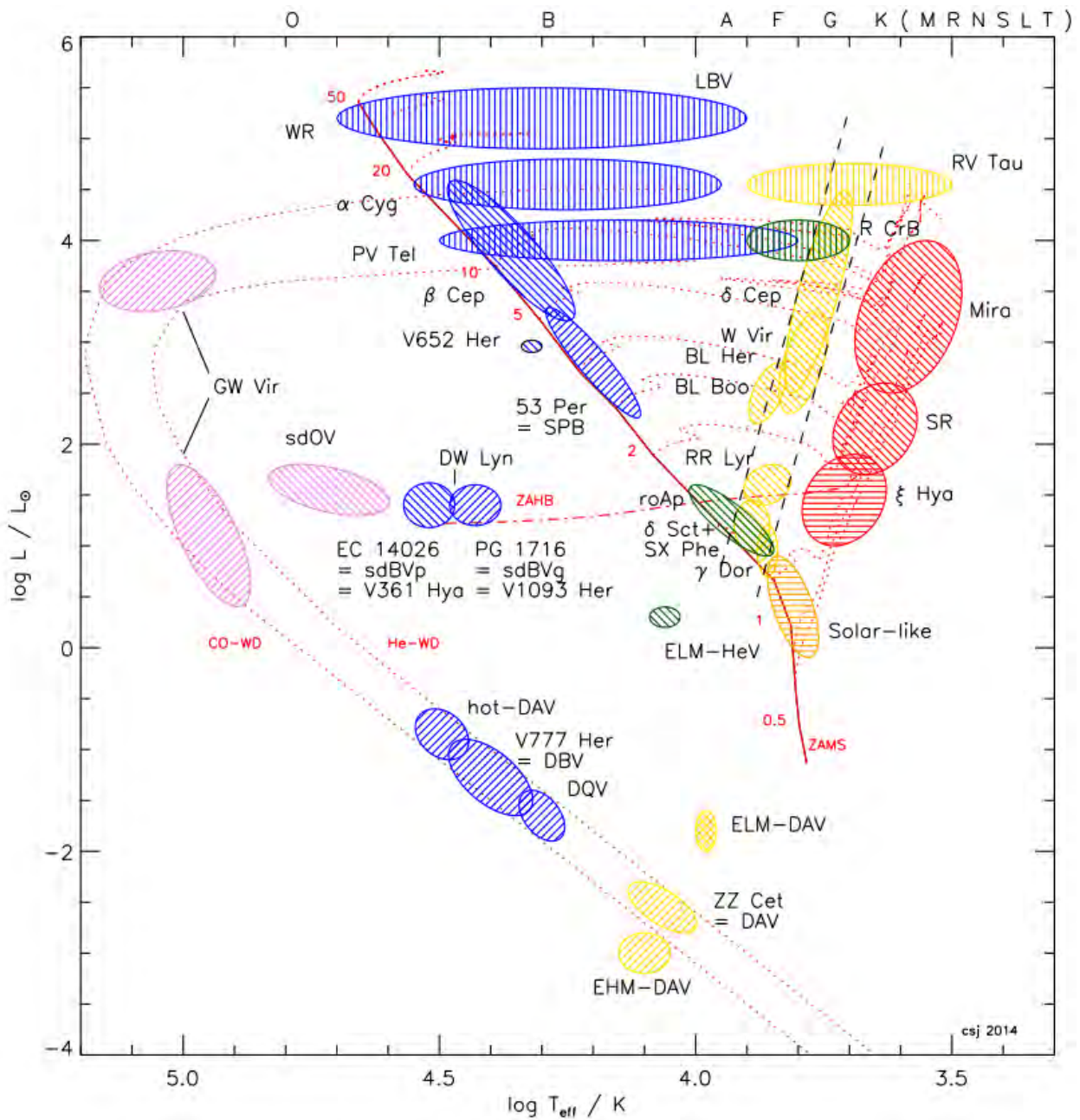


Figura 1.5: Ubicación de las principales clases de estrellas variables en el diagrama H-R. Se muestran coloreadas de forma aproximada según su tipo espectral, la ZAMS y la rama horizontal, la banda de inestabilidad de las Cefeidas a la vez que se muestran tracks evolutivos para modelos de varias masas, indicadas con números pequeños (en términos de M_{\odot}). Se distinguen por el sombreado los tipos de modos de pulsación. Tomado de Jeffery & Saio (2016).

un desplazamiento de un elemento de masa ocurre solo en dirección radial, y la fuerza restauradora viene dada por los gradientes de presión.

La teoría de pulsaciones estelares fue desarrollada originalmente para poder explicar las oscilaciones observadas en estrellas variables como las Cefeidas, que experimentan pulsaciones radiales. Más tarde, se descubrieron pulsaciones en estrellas que, hasta ese entonces, se creía que no pulsaban: el Sol, las enanas blancas, estrellas O de tipo temprano, entre otras. La característica más importante es que las oscilaciones observadas son de tipo no radial, además de ser de multiperiodicas. Mediante el uso de estas oscilaciones es posible sondear el interior estelar de manera similar a la forma en que se emplean las ondas sísmicas para analizar la estructura del interior terrestre. En el caso del Sol, la disciplina es llamada *heliosismología*, y para el resto de las estrellas, *astrosismología*. En términos sencillos, se podría pensar que las estrellas se comportan como instrumentos musicales, pudiendo oscilar en distintos modos que son diferentes para cada estrella y que varían a medida que la misma evoluciona (Unno et al. 1989). El estudio de las estrellas mediante la astrosismología es relativamente reciente, y ha experimentado un crecimiento muy importante en los últimos años debido a los grandes avances tecnológicos que han hecho posible obtener datos con una precisión sin precedentes, lo cual ha permitido, a su vez, intensificar el estudio y la detección de pulsaciones de las estrellas.

1.2.1. Propiedades de las pulsaciones no radiales

A continuación, veremos las propiedades básicas de las oscilaciones no radiales. En estas, el desplazamiento respecto a la posición de equilibrio de un elemento de masa estelar puede estar en cualquier dirección. Por este motivo, los desplazamientos son descritos mediante vectores tridimensionales. En el Apéndice A proporcionamos una deducción de las ecuaciones que modelan este tipo de oscilaciones, mientras que el desarrollo completo de la teoría de pulsaciones no radiales se puede encontrar en las monografías de Cox (1980); Unno et al. (1989).

Consideremos una estrella aislada y con simetría esférica, como un estado sin perturbar (en equilibrio), sobre el cual aplicaremos pequeñas perturbaciones⁹. Con el fin de facilitar el tratamiento, supondremos que las perturbaciones sobre las variables físicas son pequeñas respecto a sus valores en el equilibrio. De este modo, al poder desprestigiar los términos de segundo orden y mayores, será posible adoptar un tratamiento lineal. Asimismo, trabajaremos dentro de la aproximación adiabática, desprestigiar el calor ganado o cedido entre los elementos de masa del fluido estelar. En general, cada variable física f podrá escribirse como la suma de su valor en equilibrio, f_0 , dependiente solo de la coordenada radial debido a la simetría esférica, más una perturbación que dependerá tanto de la coordenada radial como también de los ángulos polar, θ , y acimutal, ϕ , y del tiempo, t . Así, podemos expresar:

$$f(r, \theta, \phi, t) = f_0(r) + f'(r, \theta, \phi, t), \quad (1.6)$$

o bien,

$$f(r, \theta, \phi, t) = f_0(r) + \delta f(r, \theta, \phi, t), \quad (1.7)$$

⁹No consideraremos los efectos de rotación y de campo magnético.

siendo f' , $\delta f \ll f_0$, donde f' representa un tipo de perturbación Euleriana y δf , Lagrangiana, que a su vez están relacionadas mediante:

$$\delta f(\vec{r}, t) \sim f'(\vec{r}, t) + \vec{\xi} \cdot \vec{\nabla} f_0(\vec{r}). \quad (1.8)$$

Una perturbación de tipo Euleriana f' es la variación de f medida por un observador que se encuentra en un punto fijo del espacio. Una perturbación Lagrangiana δf es la variación de f medida por un observador fijo a un dado elemento de fluido en movimiento. Luego de linealizar las ecuaciones diferenciales, estas adquieren una forma que permite describir la parte angular de las perturbaciones como función de los *armónicos esféricos* $Y_\ell^m(\theta, \phi)$, de grado ℓ ($= 0, 1, 2, \dots$) y orden m ($= -\ell, -\ell + 1, \dots, 0, \dots, \ell - 1, \ell$). Si consideramos, además, que las perturbaciones tienen una dependencia oscilatoria con el tiempo, de tipo $e^{i\sigma t}$, con σ la frecuencia angular o *autofrecuencia*, y teniendo en cuenta que en el equilibrio el estado dependería únicamente de la coordenada radial, tendremos entonces que las perturbaciones se pueden escribir como:

$$f'(r, \theta, \phi, t) = f'(r) Y_\ell^m(\theta, \phi) e^{i\sigma t}, \quad (1.9)$$

$$\delta f(r, \theta, \phi, t) = \delta f(r) Y_\ell^m(\theta, \phi) e^{i\sigma t}. \quad (1.10)$$

donde las funciones que solo dependen del radio, llamadas *autofunciones*, proporcionan la amplitud *relativa* de las pulsaciones dentro de la estrella y son obtenidas junto con σ , el *autovalor*, como solución de las ecuaciones de pulsación (ver Apéndice A). En las expresiones la letra f representa la magnitud física que está siendo perturbada, como por ejemplo, presión, temperatura, densidad, potencial gravitatorio, etc. Podemos expresar el desplazamiento (Lagrangiano) del fluido como:

$$\vec{\xi}(r, \theta, \phi, t) = \delta \vec{r}(r, \theta, \phi, t) = \left[\xi_r(r) \hat{e}_r + \xi_t(r) \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \xi_t(r) \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{e}_\phi \right] Y_\ell^m(\theta, \phi) e^{i\sigma t}, \quad (1.11)$$

donde $\xi_r(r)$ y $\xi_t(r)$ son las componentes radial y tangencial, respectivamente (solo dependientes de r) asociadas con un modo de oscilación de frecuencia σ .

Existen infinitos modos propios en los cuales una estrella con una dada estructura puede oscilar¹⁰. Dadas las expresiones obtenidas, es posible asociar cada modo con un conjunto de números: el grado armónico ℓ , el orden acimutal m y el orden radial k . Podemos interpretar geoméricamente estos parámetros: el valor de ℓ ($= 0, 1, 2, \dots$) corresponde al número de líneas nodales (sobre las cuales el movimiento es nulo) en la superficie estelar; m ($= 0, \pm 1, \dots, \pm \ell$) es el número de tales líneas nodales en longitud. Es interesante notar que si $\ell = 0$ (por ende, $m = 0$) recuperamos las pulsaciones radiales. A su vez, si para cualquier valor de ℓ , $m = 0$, todas las líneas nodales constituyen paralelos sobre la superficie estelar, y a estos modos se los llama *zonales*. El caso $\ell = |m|$, nos da líneas nodales meridianas: son los modos *sectoriales*. En los casos intermedios, la superficie

¹⁰En este trabajo, nos limitaremos a los modos no radiales *esferoidales* que cumplen $(\vec{\nabla} \times \vec{\xi})_r = 0$. En cuanto a los modos no radiales llamados *toroidales*, que cumplen con $\vec{\nabla} \cdot \vec{\xi} = \xi_r = p' = \rho' = \Phi' = 0$, solo diremos que tienen $\sigma = 0$ en ausencia de, por ejemplo, rotación, y en presencia de rotación, adquieren carácter oscilatorio. Estos modos se denominan *modos r* (Rossby).

queda dividida en $\ell - |m|$ paralelos y m meridianos, y los modos son llamados *teserales*. De este modo la superficie queda dividida mediante dichas líneas, en zonas que están en fase opuesta en brillo (temperatura) y velocidad del material, como puede apreciarse en las Figuras 1.6 y 1.7. Como resultado, diferentes zonas del disco estelar tienen diferentes brillos, dando lugar a las variaciones en la curva de luz de la estrella que está experimentando pulsaciones no radiales. Como puede apreciarse, cuanto mayor el valor de ℓ , mayor el número de zonas alternadas en brillo en que queda dividida la superficie, y menores los cambios de brillo aparentes en la curva de luz. Esto produce una cancelación geométrica, y como consecuencia, un efecto de selección: son observados, preferencialmente, aquellos modos de bajo grado armónico ℓ . De este modo, a excepción del Sol, no es posible observar valores de ℓ mayores a 3 para el resto de las estrellas. Al ser tan distantes y verse como objetos puntuales, los modos de oscilación que pueden ser observados están promediados a través de la superficie completa.

Por su parte, el índice k en modelos estelares sencillos, nos indica el número de nodos radiales ubicados en posiciones internas de la estrella r_i ($i = 1, \dots, k$), donde $\xi_r(r_i) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, k$). Estos nodos son superficies esféricas donde el movimiento radial del fluido es nulo. Es interesante notar que el orden acimutal m no aparece en las ecuaciones de pulsación (ver Apéndice A). En ausencia de cualquier agente físico capaz de remover la simetría esférica (como campos magnéticos o rotación), las autofrecuencias $\sigma_{k,\ell,m}$ dependen de ℓ pero están $(2\ell + 1)$ veces degeneradas en m . Así, los modos caracterizados por el mismo valor de k y de ℓ correspondientes, oscilan todos con la misma frecuencia.

1.2.2. Algunas características de los modos de pulsación

Es posible hacer un análisis cualitativo de los modos no radiales estudiando el caso adiabático. En esta aproximación se considera que no hay intercambio de calor en la etapa en que ocurren las pulsaciones en las distintas regiones de la estrella. Resolver este problema (de autovalores de cuarto orden) implica un tratamiento numérico. Para un dado valor de $\ell > 0$, el espectro de modos no radiales se divide en los *modos p*, o de presión, y los *modos g*, o de gravedad. Además, si $\ell > 1$, hay una tercera clase de modos, los *modos f*.

En el caso de los modos p , el gradiente de presión es la fuerza restauradora principal al haber apartado del equilibrio a la estrella, de forma similar a lo que ocurre con las ondas acústicas. Se caracterizan por variaciones Eulerianas de presión relativamente grandes y movimientos principalmente en dirección radial ($\xi_r > \xi_t$), especialmente cerca de la superficie estelar. Estos modos están asociados a frecuencias de oscilación altas, las cuales aumentan con k y ℓ , y son de la misma naturaleza que los modos radiales.

En el caso de los modos g , por su parte, la flotación (*buoyancy*) es la fuerza restauradora. Estos modos están caracterizados por pequeñas variaciones Eulerianas de la presión y desplazamientos mayormente tangenciales ($\xi_r < \xi_t$), y se propagan generalmente en zonas internas de la estrella. Estos modos están en la región de frecuencias de oscilación bajas, que decrecen con k y ℓ . Los modos g resultan similares a las ondas de gravedad, y a diferencia de los modos p , no tienen contrapartida en las oscilaciones radiales.

Para el caso de los modos f , solo mencionaremos que es un modo único, dado un valor de $\ell > 1$, y que en general, para modelos estelares relativamente sencillos, no presentan nodos en la dirección radial. Sus autofrecuencias toman valores intermedios entre los

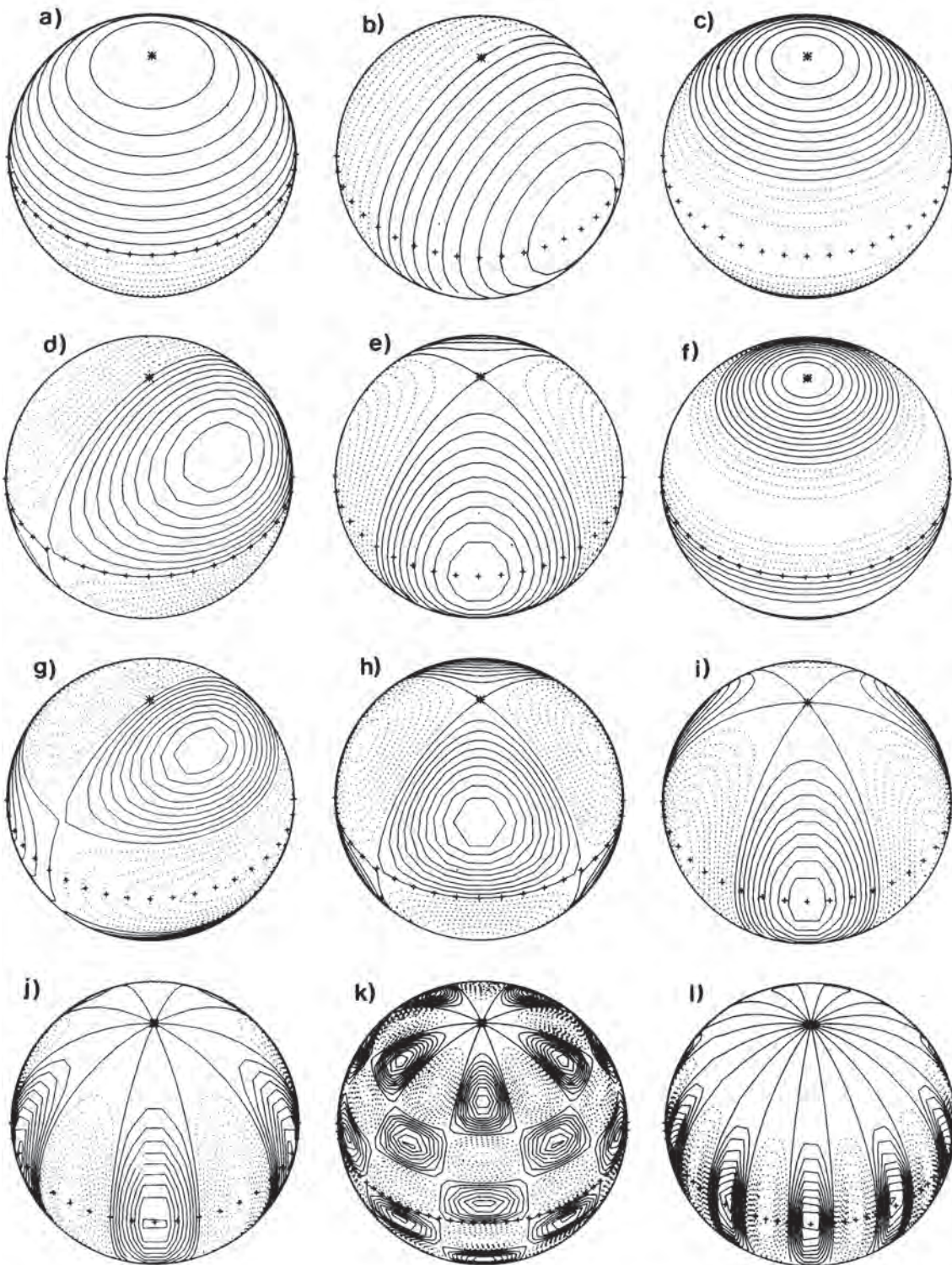


Figura 1.6: Esquema de contornos de los armónicos esféricos sobre la superficie de una estrella. El ecuador se indica con una línea de "+". Los casos ilustrados son: a) $\ell = 1, m = 0$; b) $\ell = 1, m = 1$; c) $\ell = 2, m = 0$; d) $\ell = 2, m = 1$; e) $\ell = 2, m = 2$; f) $\ell = 3, m = 0$; g) $\ell = 3, m = 1$; h) $\ell = 3, m = 2$; i) $\ell = 3, m = 3$; j) $\ell = 5, m = 5$; k) $\ell = 10, m = 5$; l) $\ell = 10, m = 10$. Adaptado de Christensen-Dalsgaard (1997).

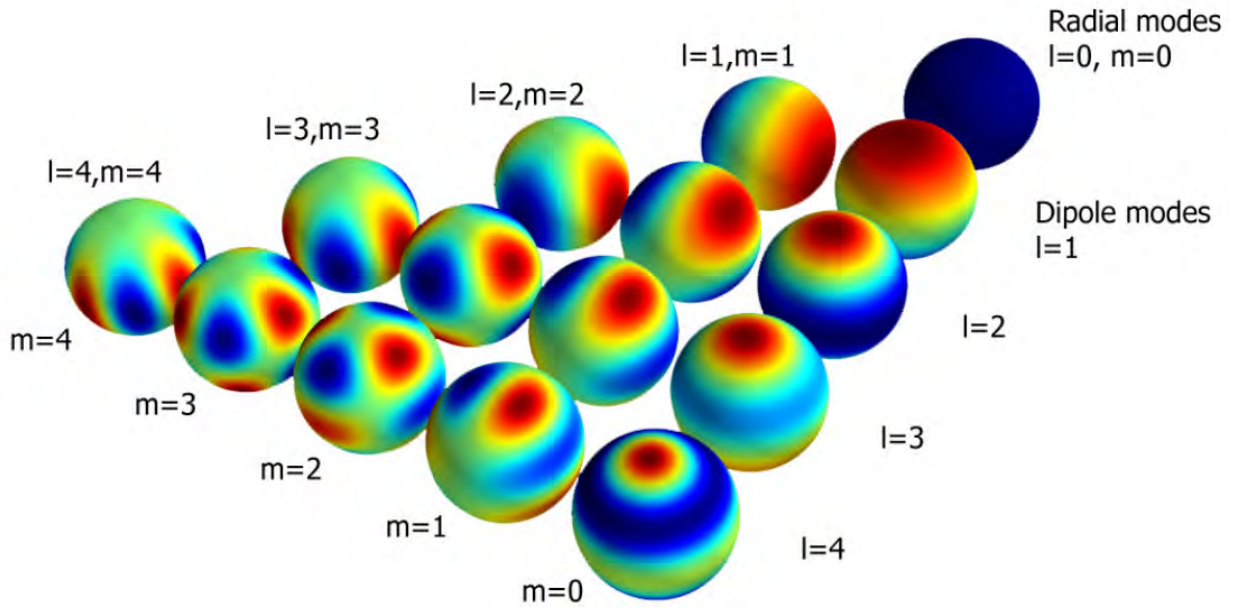


Figura 1.7: Esquema coloreado de contornos de los armónicos esféricos sobre la superficie estelar. Adaptado de Beck & Kallinger (2013).

modos g y p de orden radial más bajo ($k = 1$) y en general, aumentan con ℓ (Unno et al. 1989; Córscico 2003).

Las propiedades de los modos p y g están gobernadas por sus frecuencias características. Para los modos p , la *frecuencia de Lamb* viene dada por:

$$L_\ell^2 = \frac{(\ell + 1)\ell}{r^2} c_s^2, \quad (1.12)$$

siendo c_s la velocidad del sonido adiabática, cuya expresión es:

$$c_s = \sqrt{\frac{\Gamma_1 p}{\rho}}, \quad (1.13)$$

donde p es la presión, ρ la densidad y Γ_1 , el exponente adiabático ($\Gamma_1 = (d \ln p / d \ln \rho)_{ad}$). Una onda de sonido viaja una distancia aproximada de $2\pi r / \ell$ en un intervalo de tiempo de aproximadamente $2\pi / L_\ell$.

En cuanto a los modos g , están relacionados con la llamada *frecuencia de Brunt-Väisälä*, N , dada por:

$$N^2 = g \left(\frac{1}{\Gamma_1} \frac{d \ln p}{dr} - \frac{d \ln \rho}{dr} \right), \quad (1.14)$$

donde g es la aceleración de la gravedad local. Si $N^2 > 0$, entonces N es la frecuencia (real) de oscilación de un elemento del fluido alrededor del equilibrio bajo la acción de la gravedad.

1.2.3. Análisis local y diagrama de propagación

Las ondas acústicas y de gravedad, responsables de las oscilaciones no radiales, se propagan en la dirección radial solo en regiones restringidas dependiendo de las propiedades de las ondas. Las oscilaciones no radiales globales son ondas estacionarias que se forman por reflexión de las ondas en ambos bordes de la región de propagación, es decir, las oscilaciones están atrapadas en dicha región (Unno et al. 1989). Para entender de forma cualitativa las oscilaciones no radiales, suele hacerse un *análisis local*. Consideraremos, para tal fin, que es posible despreciar la perturbación Euleriana del potencial gravitatorio ($\Phi' = 0$), es decir, trabajaremos dentro de la *aproximación de Cowling* (Cowling 1941). En este contexto, desde un punto de vista local, los coeficientes en las ecuaciones de pulsación se pueden considerar como lentamente variables (en comparación con la variación espacial de las perturbaciones), es decir, casi constantes y así, es posible suponer una dependencia de la coordenada radial de la forma $e^{ik_r r}$ (siendo k_r la componente radial del número de onda). De esto resulta una relación de dispersión:

$$k_r^2 = \frac{1}{\sigma^2 c_s^2} (\sigma^2 - L_\ell^2) (\sigma^2 - N^2) \quad (1.15)$$

que vincula el número de onda con la frecuencia, y que permite ver el papel que juegan las frecuencias características N y L_ℓ . Podemos ver que si $\sigma^2 > L_\ell^2, N^2$ o bien $\sigma^2 < L_\ell^2, N^2$, entonces $k_r^2 > 0$, y el número de onda k_r es real y así, ese modo se propaga localmente. Si en cambio $L_\ell^2 < \sigma^2 < N^2$ o $L_\ell^2 > \sigma^2 > N^2$, entonces k_r es imaginario puro, y las soluciones son conocidas como evanescentes. Mediante esto es posible ver que el interior estelar queda dividido en zonas de propagación y evanescentes, que están determinadas por las frecuencias de Brunt-Väisälä y Lamb. Este comportamiento local de los modos se puede ver al graficar ambas frecuencias en términos de la coordenada radial, en un tipo de diagrama conocido como *diagrama de propagación* (Cox 1980; Unno et al. 1989). En la Figura 1.8 se muestran varios ejemplos de este diagrama para cuatro casos distintos, donde se grafican en particular $\log(N^2)$ y $\log(L_\ell^2)$ en términos de $-\log(1 - M_r/M_\star)$. En el panel (a) se aprecia un modelo de estrella GW Virginis (GW Vir, pre-enana blanca PG 1159¹¹ pulsante) antes del codo evolutivo¹² del diagrama HR. En el (b), un modelo de GW Vir que se encuentra más evolucionado, en particular, después de dicho codo. En el (c) se muestra un modelo de enana blanca DB pulsante y, por último, en el panel (d), una enana blanca DA pulsante (con núcleo de C y O). En todos los casos se identifican claramente las diferentes zonas de propagación de modos (o *cavidades resonantes*) marcadas con color gris: la correspondiente a los modos p (P -region, donde $\sigma^2 > L_\ell^2, N^2$) y la de los modos g (G -region, donde $\sigma^2 < L_\ell^2, N^2$).

Al analizar las figuras, es claro que la frecuencia de Lamb se comporta de forma similar en todos los modelos y, por el contrario, la frecuencia de Brunt-Väisälä exhibe diferencias muy importantes. Estas se deben fundamentalmente a cambios en la degeneración electrónica para las distintas etapas evolutivas consideradas (Althaus et al. 2010). Los cambios en la frecuencia de Brunt-Väisälä conducen a cambios importantes en la extensión y ubi-

¹¹Estas estrellas están caracterizadas por tener atmósferas que son ricas en He, C y O y deficientes en H, y por ser muy calientes y luminosas.

¹²El codo evolutivo se trata del punto de la evolución, en el diagrama HR, en que la estrella alcanza la temperatura efectiva máxima, antes de comenzar a enfriarse como enana blanca.

cación de las cavidades de propagación. Se puede ver que para los dos primeros modelos (paneles (a) y (b)) los modos g se propagan principalmente en las regiones profundas del núcleo por los valores grandes que allí toma N^2 , y esto se debe a que la degeneración electrónica no es importante en estas etapas evolutivas. Por otro lado, los modos p se propagan en regiones más externas. También puede verse que en el caso del modelo del panel (a) hay un rango de frecuencias en el cual los modos se propagan tanto en la región P como la G , y son llamados *modos mixtos*. En el modelo de DAV, el más degenerado de los mostrados, la frecuencia de Brunt-Väisälä es bastante más pequeña en el núcleo forzando a los modos g a propagarse principalmente en la envoltura. Por el contrario, los modos p están restringidos a las regiones internas. Así, en las GW Vir antes y después del codo, los modos g sondan principalmente las regiones centrales, y en DBVs y DAVs, regiones más externas. Sin embargo debe destacarse que algunos modos g de bajo orden radial k son capaces de sondear el núcleo de C y O en DAVs y DBVs.

Otra característica muy importante de estos diagramas es la presencia de protuberancias, conocidas con el término en inglés, *bumps*, y picos en la frecuencia de Brunt-Väisälä. Estos están asociados a gradientes abruptos de la densidad en el interior estelar, inducidos por regiones de transición química. De manera que para poder explicar los cambios en la curva de esta frecuencia se estudian las abundancias químicas internas, como se muestra en la Figura 1.9 para los casos representados en la Figura 1.8. En la Figura 1.9, se muestran las abundancias fraccionales de las principales especies químicas. La frecuencia de Brunt-Väisälä, que debe obtenerse numéricamente, es expresada de una forma diferente a la dada por la Ecuación (1.14), en términos de los gradientes de temperatura real y adiabático, y de las abundancias por masa de cada especie como veremos en el próximo Capítulo, en el llamado *tratamiento modificado de Ledoux*.

1.2.4. Aproximación asintótica

Antes de continuar, cabe mencionar brevemente que para obtener el espectro de modos de pulsación de un modelo dado, debe resolverse de forma numérica las ecuaciones que gobiernan las oscilaciones no radiales. Cuando el orden radial es lo suficientemente alto ($k \gg 1$) y si ℓ es pequeño, se puede trabajar dentro de la aproximación asintótica. La frecuencia de los modos p viene dada, aproximadamente, por (Tassoul 1980):

$$\sigma_{k\ell} \simeq \frac{\pi}{2} \left(2k + \ell + n + \frac{1}{2} \right) \left[\int_0^{R_*} \frac{1}{c_s(r)} dr \right]^{-1} \quad (1.16)$$

donde n es el índice politrópico que caracteriza la estructura de las capas superficiales del modelo estelar. Por otro lado, para modelos estelares completamente radiativos o completamente convectivos, y químicamente homogéneos, la frecuencia de los modos g , siendo $k \gg 1$, viene dada por:

$$\frac{1}{\sigma_{k\ell}} \simeq \frac{\pi}{2} \left(2k + \ell + n + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \left[\int_0^{R_*} \frac{N(r)}{r} dr \right]^{-1} \quad (1.17)$$

Para modos p con ℓ fijo, a partir de la ecuación (1.16), se tiene que:

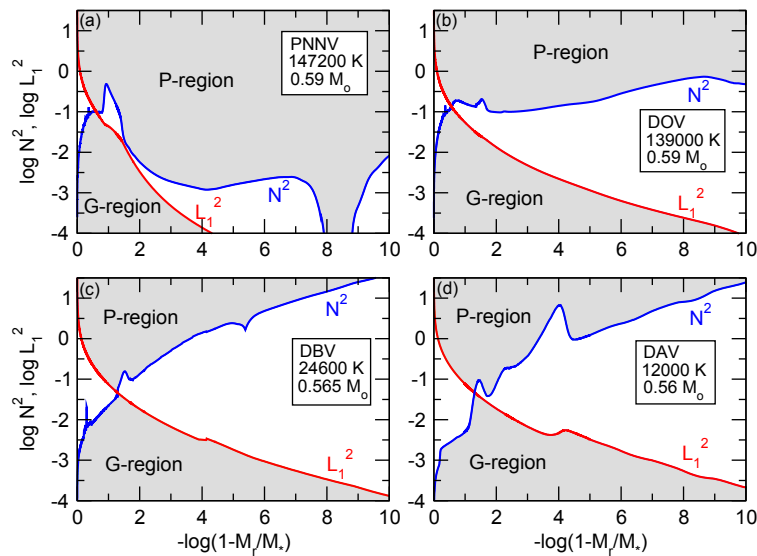


Figura 1.8: Diagramas de propagación ($\log(N^2)$, $\log(L_1^2)$) en términos de $-\log(1 - M_r/M_\star)$ correspondientes a algunos modelos estelares de pre-enanas blancas y enanas blancas (con $\ell = 1$). Se muestran: (a) modelo de GW Vir antes del codo evolutivo; (b) GW Vir después del codo; (c) enana blanca DB; y (d), enana blanca DA. Las zonas grises representan las regiones de propagación de modos, mientras que las blancas, regiones evanescentes. Tomado de Althaus et al. (2010).

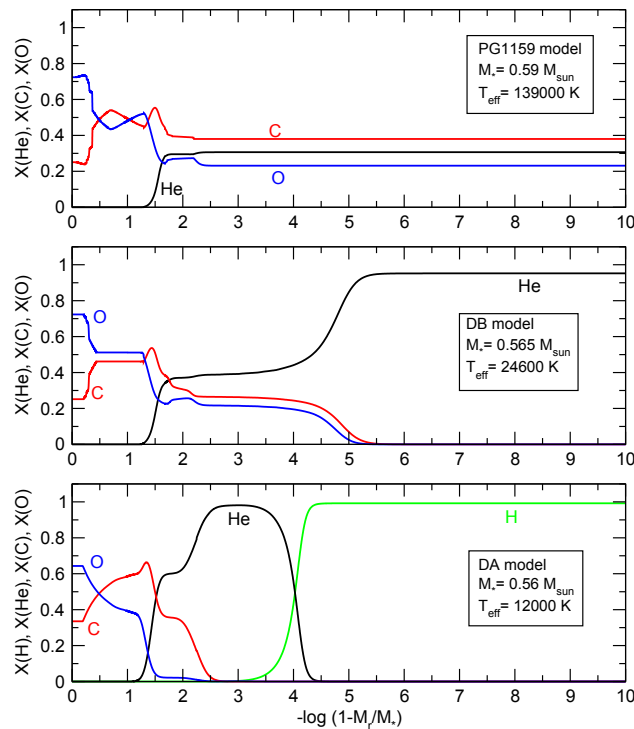


Figura 1.9: Estructura química interna de los modelos representados en la Figura 1.8. Tomado de Althaus et al. (2010).

$$\Delta\sigma^a = \sigma_{k+1\ell} - \sigma_{k\ell} = \pi \left[\int_0^{R_*} \frac{1}{c_s(r)} dr \right]^{-1} = cte, \quad (1.18)$$

es decir, el espaciamento asintótico de frecuencia de modos p es constante en el límite de alto orden radial, y no depende de ℓ . El valor de la constante depende solo de la velocidad del sonido adiabática en el interior de la estrella. Similarmente, a partir de la ecuación (1.17), se obtiene para modos g con ℓ fijo:

$$\Delta\Pi_\ell^a = \Pi_{k+1\ell} - \Pi_{k\ell} = \frac{2\pi^2}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \left[\int_0^{R_*} \frac{N(r)}{r} dr \right]^{-1} = cte, \quad (1.19)$$

donde $\Pi_{k\ell} = 2\pi/\sigma_{k\ell}$ es el período de pulsación. Por lo tanto, el espaciamento de períodos de modos g es un valor constante en el límite de alto orden radial y, a diferencia del caso anterior, sí depende de ℓ . Esta constante depende de la frecuencia de Brunt-Väisälä (Althaus et al. 2010), y se lo conoce como *espaciamento asintótico de períodos*. Esta cantidad es muy importante en las determinaciones astrosismológicas, por ejemplo, en aquellas enfocadas a determinar la masa estelar (ver Sección 4.3).

1.2.5. Efectos de la rotación lenta y campos magnéticos débiles

Previamente, al analizar las pulsaciones, supusimos la ausencia de agentes físicos que pudiesen remover la simetría esférica del problema, como la rotación o un campo magnético. De esa manera, las autofrecuencias $\sigma_{k\ell m}$ resultaban $(2\ell+1)$ veces degeneradas en m . En presencia de rotación, ya no se tiene un eje de simetría preferencial para las oscilaciones. Si la rotación es lenta (es decir, si la velocidad angular de rotación, Ω , es mucho menor que la frecuencia de oscilación de los modos normales $\Omega \ll \sigma_{k\ell m}$), se puede llevar a cabo un tratamiento perturbativo (a primer orden). De este, se obtiene que la rotación remueve por completo la degeneración, donde cada frecuencia es dividida en $(2\ell+1)$ componentes equiespaciadas. Cada componente del multiplete viene dada por:

$$\sigma_{k\ell m}(\Omega) = \sigma_{k\ell}(\Omega = 0) + \delta\sigma_{k\ell m}. \quad (1.20)$$

Si suponemos que la rotación es rígida (Ω constante), se puede expresar la corrección a las autofrecuencias según:

$$\delta\sigma_{k\ell m} = -m\Omega(1 - C_{k\ell}), \quad (1.21)$$

donde $m = 0, \pm 1, \dots, \pm\ell$ y $C_{k\ell}$ son coeficientes dependientes de los detalles de la estructura estelar, y sus autofunciones son obtenidas del caso sin rotación. Estos coeficientes vienen dados por (Cowling & Newing 1949; Ledoux 1951):

$$C_{k\ell} = \frac{\int_0^{R_*} \rho r^2 [2\xi_r \xi_t + \xi_t^2] dr}{\int_0^{R_*} \rho r^2 [\xi_r^2 + \ell(\ell+1)\xi_t^2] dr}, \quad (1.22)$$

donde ξ_r y ξ_t son las autofrecuencias radial y tangencial, respectivamente. Notemos que, en el caso de modos g , cuando k es grande, resulta que $\xi_r \ll \xi_t$, de tal forma que $C_{k\ell} \rightarrow 1/\ell(\ell+1)$ (Althaus et al. 2010).

Con respecto a la presencia de campos magnéticos, la degeneración es removida parcialmente. Del análisis perturbativo se obtiene que cada autofrecuencia queda dividida en $(\ell + 1)$ componentes, según:

$$\sigma_{k\ell m}(B) = \sigma_{k\ell}(B = 0) + \sigma'_{k\ell}(B), \quad (1.23)$$

donde la corrección depende de B^2 y m^2 .

1.2.6. Mecanismos de excitación

Hasta el momento, hemos considerado el fenómeno de las pulsaciones estelares, sin mencionar las razones por las cuales estas pulsaciones se producen. En primer lugar, no todas las estrellas presentan pulsaciones, al menos dentro de los límites de precisión actuales de las mediciones (unas μmag en fotometría y unos cm/seg para velocidades radiales) podemos decir que algunas estrellas no pulsan. Para aquellas que sí lo hacen, debe haber algún mecanismo que excita las oscilaciones dentro de la estrella. Es posible distinguir entre oscilaciones autoexcitadas y estocásticas, de acuerdo al mecanismo que las excita. En el primer caso, en el cual nos concentraremos, proviene de una perturbación al flujo de energía que resulta en un mecanismo que convierte energía térmica en mecánica. Por su parte, en la excitación estocástica, que por ejemplo tiene lugar en el Sol y osciladores de tipo solar, las pulsaciones son excitadas y amortiguadas por la convección. En este caso, los modos son intrínsecamente estables (Aerts et al. 2010; Córscico et al. 2019).

Dentro del primer tipo de mecanismo solo detallaremos tres de ellos, por ser los más relevantes para el tipo de estrella bajo estudio.

Mecanismo $\kappa - \gamma$

Este es el mecanismo dominante en pre-enanas blancas y enanas blancas. Para empezar, se definen la *región de driving* o excitación de la estrella y la *región de damping* o amortiguamiento, analizando el comportamiento de un elemento de fluido bajo una pequeña perturbación, es decir, si el movimiento resulta inestable o estable, respectivamente.

En general, en los procesos que tienen lugar en las estrellas es importante el rol de la temperatura y de la opacidad (sus derivadas). Consideremos que un dado elemento de fluido es comprimido: normalmente su temperatura tiende a aumentar y su opacidad, a disminuir. Esto facilita la salida de la radiación en comparación con el caso en que no es comprimido. Cuando posteriormente el elemento se expanda, lo hará con menor impulso y en la expansión tendrá menor amplitud que en la compresión. Así, la perturbación inicial se verá amortiguada (movimiento estable), por lo que se habla de una región de damping: una pequeña perturbación aplicada en esa zona, tendrá amplitud decreciente y tenderá a desaparecer. Este comportamiento ocurre en regiones donde el transporte es radiativo y los átomos de la especie química dominante son neutros, o bien, completamente ionizados. Ahora bien, puede darse la situación en que, durante la compresión, la temperatura y la presión aumentan pero por el contrario, la opacidad crece en lugar de disminuir (mecanismo denominado κ). De esta forma la radiación queda *atrapada* en la región, y así,

si se produce una expansión, será un proceso más violento ya que la región cuenta con una energía adicional. Cuando sea liberada, promoverá la inestabilidad, debido a que la amplitud de la perturbación crecerá con el tiempo. Es por eso que a tal región se la llama de driving. Las condiciones para que esto ocurra se dan particularmente en aquellas zonas en donde hay ionización parcial de la especie química dominante (presencia de átomos neutros y ionizados). En esas regiones donde parte de la radiación queda almacenada, una fracción de la misma es empleada para ionizar átomos (mecanismo denominado γ). Luego, cuando ocurra la expansión, será liberada cuando los átomos se recombinen. Se habla en conjunto del mecanismo $\kappa - \gamma$, para referirse a esta inestabilidad causada por el efecto conjunto de la opacidad (aumento) y la ionización.

Mecanismo ε

Este mecanismo se debe a inestabilidades producidas debido a reacciones nucleares, que dependen fuertemente de la temperatura. La temperatura, durante una compresión, aumenta, y así la tasa de generación de energía nuclear crece considerablemente, ya que depende de la temperatura con una potencia alta. Ese aumento en temperatura, nuevamente, hace crecer la tasa de generación de energía nuclear, y el proceso se re-alimenta, conduciendo a un crecimiento gradual de las amplitudes de las perturbaciones, y una consecuente inestabilidad. Se encuentra que el mecanismo ε excita modos con períodos muy cortos (valores muy bajos de k).

Driving convectivo

En este mecanismo, la base de una zona convectiva bloquea el flujo de energía del interior, liberando en una fase siguiente de expansión la energía almacenada durante la compresión. En sus cálculos, Brickhill (1991) encontró que esto produce una excitación de muchos modos de forma simultánea hasta cierto período máximo y que este crece a medida que la enana blanca se enfría, algo que está de acuerdo con las observaciones (Van Horn 2015). En particular, se cree que las pulsaciones en enanas blancas DA y DB, y también γ Doradus son excitadas, al menos en parte, por este mecanismo. También podría actuar en estrellas Cefeidas y Mira (Handler 2013).

Entonces, alguno de estos mecanismos hacen que la estrella pulse, y dado que no todos los modos son observados, debe de haber un mecanismo de selección que decide en cuál o cuáles modos lo hace. Los modos de pulsación pueden ser excitados en ciertas partes del interior estelar y propagarse o bien ser amortiguados. La posición de la zona de driving y la forma de las autofunciones de un dado modo determinan cuáles resultan excitados. Si se entregara energía en un nodo, no puede esperarse excitación ya que allí el modo no oscila. De manera tal que si la región de driving de una estrella yace cerca de un nodo para algunos modos, estos difícilmente sean excitados. Además, es necesario que no haya amortiguamiento (o damping) en regiones fuera de la zona de driving que terminen por superar al driving. El balance neto total entre driving y damping debe ser el óptimo a lo largo de la estrella para que el modo termine siendo globalmente excitado (Aerts et al. 2010). En el contexto del mecanismo κ , el requerimiento para que los modos sean excitados está relacionado con la *escala de tiempo térmica local*, en la zona de driving,

definida como:

$$\tau_{th} = \int_r^R \frac{c_p T dm}{L} \quad (1.24)$$

El período de oscilación debe ser similar a la escala de tiempo térmica en la zona de driving. Si el período de oscilación fuese mucho más largo que τ_{th} , la capa de driving permanecerá en equilibrio térmico y no podrá excitar el modo (Aerts et al. 2010).

1.2.7. Identificación de modos

En el estudio de las pulsaciones estelares, y cuando es posible, resulta valioso poder identificar el orden radial k , el grado armónico ℓ y el orden azimutal m de los períodos de oscilación detectados en el espectro de períodos de una dada estrella pulsante, antes de llevar a cabo un estudio astrosismológico, de modo de poder conectar las observaciones con el modelado. Esta tarea es difícil, más aún considerando que k no es un observable (recordemos que representa el número de superficies nodales concéntricas donde el desplazamiento radial es nulo en el interior estelar) el cual, en cambio, suele asignarse mediante un ajuste astrosismológico.

En enanas blancas, los valores de ℓ y m suelen determinarse a partir de, por ejemplo, multipletes existentes en el espectro de pulsaciones. Recordemos que en presencia de rotación, se remueve la degeneración en las frecuencias: cada una se divide en $(2\ell + 1)$ componentes. De esta manera, si en el espectro de potencia de una curva de luz se halla algún triplete, implicaría que $\ell = 1$ (y un quintuplete, $\ell = 2$). Asimismo, dentro de cada multiplete es posible identificar el valor de m . No obstante, no todos los modos presentes suelen mostrar estos desdoblamientos así como tampoco, aquellos que sí están desdoblados, suelen tener todas sus componentes. Adicionalmente, a veces se utiliza el espaciamiento de períodos para identificar el valor de ℓ : se compara el espaciamiento de períodos asintótico $\Delta\Pi_\ell^a$ (dependiente de ℓ) proveniente de cálculos teóricos con el espaciamiento medio proveniente del conjunto de períodos observado. Para buscar el valor del espaciamiento medio, suelen utilizarse los tests de Kolmogorov-Smirnov, Varianza Inversa o un método basado en la transformada de Fourier (ver Sección 4.3). El inconveniente es que para el tipo de estrellas bajo estudio el número de modos detectado es tan bajo que el método no resulta del todo útil (no así en el caso de estrellas GW Vir o DBVs, donde se suelen detectar más modos). Por último, para DAVs hay una técnica de identificación de modos basada en el oscurecimiento al limbo (Robinson et al. 1995, "Time resolved UV spectroscopy"), que utiliza la sensibilidad de las amplitudes de pulsación con el oscurecimiento al limbo (es decir, la disminución gradual del brillo estelar hacia el borde). Hay una alternativa a este método (van Kerkwijk et al. 2000; Clemens et al. 2000, "Time resolved optical spectroscopy") que explota la dependencia de las amplitudes de los modos dentro de las líneas de Balmer.

1.3. Astrosismología

La *astrosismología* consiste en el estudio de la estructura interna de una estrella a partir de las variaciones de brillo que se observan. Puesto que estas pulsaciones se hacen visibles en la fotosfera, producidas a partir de las ondas estacionarias que viajan en el interior como hemos mencionado previamente, un análisis fotométrico hace posible el estudio de los modos de pulsación de forma análoga al estudio del interior terrestre mediante las técnicas de la sismología. En las técnicas astrosismológicas, los períodos observados se comparan con un conjunto de modelos teóricos apropiados para la estrella bajo estudio, haciendo posible conocer ciertos aspectos del interior estelar que de otra manera no podrían estudiarse, además de permitir obtener estimaciones de la masa, tasa de rotación, temperatura efectiva y radio, entre otros parámetros, sobre la base de que los modos de pulsación sean correctamente identificados. Cada modo de oscilación individual se propaga en una región específica de la estrella, dando información sobre esa zona particular del interior estelar, es decir, la zona en que dicho modo oscila. Así, cuanto mayor sea el número de frecuencias observadas, mayor la información que puede extraerse a través de esta técnica. El principal observable de la astrosismología, las frecuencias de oscilación, es una de las cantidades que puede medirse con mayor precisión para una estrella, con lo cual el estudio astrosismológico resulta viable (Aerts et al. 2010).

Para detectar un número considerable y confiable de períodos (o frecuencias) de pulsación es necesario realizar mediciones de forma continua. El hecho de no poder mantener la observación de una dada estrella durante el día genera huecos (*gaps*) en los datos que dan lugar a ambigüedades en la identificación de las frecuencias intrínsecas de la estrella. Esto representa un problema especialmente cuando se están observando variaciones que están muy cerca del nivel del ruido, por tener amplitudes tan bajas. La solución para este problema es la observación satelital, aunque también es posible llevar a cabo observaciones desde tierra, siempre que se empleen múltiples sitios. Esto último requiere de una colaboración a nivel global de observadores en distintos puntos geográficos estratégicos, y es el tipo de acercamiento que ha dado lugar a las primeras campañas exitosas en este aspecto, remontándose a mediados de la década del '80 en el caso de *Delta Scuti Network* (Breger et al. 1987), y principios del '90 en el caso del *Whole Earth Telescope* (Nather et al. 1990). Este último ha sido particularmente importante para la observación de enanas blancas pulsantes (Van Horn 2015). Por su parte el SDSS (*Sloan Digital Sky Survey*) es un telescopio terrestre, que se encuentra observando desde el año 2000 y que también ha dado un gran aporte en el descubrimiento de objetos estelares desde entonces, en especial para objetos compactos. Observa un gran porcentaje del cielo y realiza al mismo tiempo espectroscopía (Aerts et al. 2010). Por otra parte, SPY (*ESO SN Ia Progenitor survey*), desarrollado para identificar posibles progenitores candidatos a supernova tipo Ia (SN Ia), y WASP (*Wide Angle Search for Planet*), para detectar exoplanetas, también han sido de gran utilidad en la observación de estrellas variables, y particularmente, de enanas blancas variables. No podemos dejar de mencionar a GEMINI (conformado por varios países, entre los cuales se encuentra la Argentina), que contando con un telescopio en cada hemisferio, ha tenido un rol muy importante en el descubrimiento de estrellas pulsantes. Con respecto a las misiones satelitales, vale la pena mencionar que el satélite de la Agencia Espacial Europea, HIPPARCOS (*High Precision PARallax Collecting Satellite*) ha sido uno de los surveys más

importantes en el campo de las estrellas variables. Desde 1989, este satélite ha provisto de un número considerable de curvas de luz de estrellas variables de la vecindad solar con períodos mayores a 1 h, libre de los efectos indeseados de la observación en tierra. Además, ha permitido descubrir un gran número de variables nuevas con períodos del orden de días. Las misiones espaciales *CoRoT* (*Convection, Rotation and planetary Transits*, a cargo de la Agencia Espacial Francesa (CNES) y la Agencia Espacial Europea (ESA)), que funcionó entre los años 2006 y 2014, y por su parte, *Kepler* (satélite de la NASA) que estuvo activa entre 2009 y 2018, han tenido como objetivo principal la detección de exoplanetas, pero han resultado muy útiles para el estudio y detección de las pulsaciones estelares, produciendo una revolución en este campo. Los satélites Gaia y TESS merecen una mención especial. En cuanto al primero (Gaia Collaboration et al. 2018a,b), se encuentra observando desde el año 2014 y desde entonces, ha ampliado nuestro entendimiento de la Vía Láctea, midiendo posición, movimientos propios y distancias de un gran número de estrellas. En particular, las mediciones con gran precisión de las distancias a las estrellas hace posible tener una estimación de sus radios. Respecto a TESS (*Transiting Exoplanet Survey Satellite*, Ricker et al. 2015), se encuentra monitoreando el cielo desde el 2018, principalmente buscando planetas de estrellas cercanas (*exoplanetas*). La gran sensibilidad de su instrumental ha hecho posible la detección de un gran número de nuevas estrellas pulsantes al tiempo que ha observado nuevamente variables ya conocidas. En comparación con la misión Kepler, que sondeara un 0.25 % del cielo (aunque alcanzando distancias muy grandes), TESS tiene como objetivo observar un 85 % del cielo tan solo en la primera parte de su programa. El éxito ya logrado, ha generado que recientemente se aprobara una extensión de dos años para esta misión (para más información, ver <https://heasarc.gsfc.nasa.gov/>).

1.3.1. Astrosismología de enanas blancas

Se cree que la mayoría de las enanas blancas atraviesan al menos una etapa de inestabilidad durante su evolución, exhibiendo variaciones multiperiódicas de brillo, convirtiéndose así en objetivos para el uso de las técnicas astrosismológicas. Los períodos suelen manifestarse en el óptico o en la región UV del espectro electromagnético, con amplitudes que, en el óptico, oscilan entre 0.1 mag y 0.4 mag (Córscico et al. 2019). En la Tabla 1.1 se muestra un resumen de las propiedades de las distintas familias de enanas blancas y pre-enanas blancas pulsantes, entre ellas, el rango de períodos en que pulsan. Asimismo, en la Figura 1.10 se puede ver la ubicación de las distintas clases de enanas blancas y pre-enanas blancas pulsantes en el diagrama $\log T_{\text{eff}} - \log g$.

La astrosismología ha demostrado ser una técnica muy útil para estudiar el interior de numerosas enanas blancas pulsantes (Winget & Kepler 2008a; Fontaine & Brassard 2008a; Althaus et al. 2010), y ha sido aplicada empleando dos métodos diferentes. Uno de ellos considera modelos estelares con perfiles de composición química parametrizados, mientras que el otro involucra modelos completamente evolutivos caracterizados por una estructura química que es el resultado de todos los procesos que experimentan los progenitores de las enanas blancas. El primero tiene la ventaja de permitir una exploración completa del espacio de parámetros (la masa total, la masa de la envoltura de H, la estructura y composición química del núcleo, el grosor de las regiones de transición química, entre otros) con el fin de encontrar un modelo astrosismológico óptimo. Como

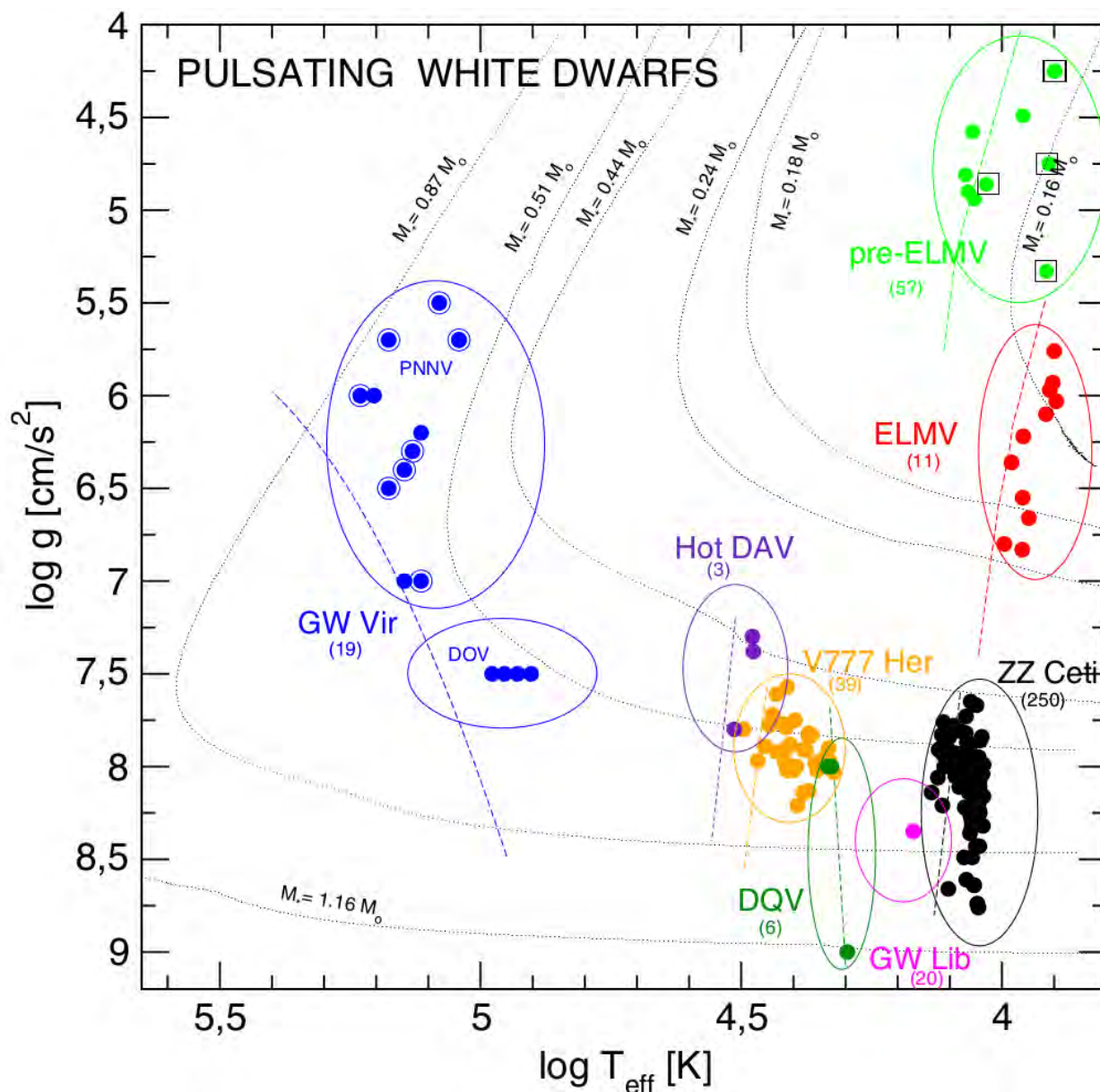


Figura 1.10: Ubicación de las distintas clases de enanas blancas y pre-enanas blancas pulsantes (representadas mediante círculos de distintos colores), tanto confirmadas como posibles, en el diagrama $\log T_{\text{eff}} - \log g$. Las estrellas señaladas con rectángulos rodeando los círculos verdes claro pueden identificarse como pre-ELMVs o como estrellas SX Phe y/o δ Scuti. También se muestran algunas estrellas GW Vir con círculos azules, de las cuales las que están rodeadas por circunferencias azules son PNNVs (es decir, rodeadas por nebulosa planetaria). Para las estrellas GW Lib, solo se muestra la ubicación del objeto prototípico, GW Librae (punto magenta). Asimismo se incluyen tracks evolutivos post-VLTP (*Very Late Thermal Pulse*, último pulso muy tardío) de enanas blancas deficientes en H (con 0.51 y $0.87 M_{\odot}$; Miller Bertolami & Althaus (2006)), cuatro tracks evolutivos de enanas blancas de baja masa con núcleo de He (0.16 , 0.18 , 0.24 , and $0.44 M_{\odot}$; Althaus et al. (2013)), y un track evolutivo de enana blanca ultramasiva rica en H ($1.16 M_{\odot}$; Camisassa et al. (2019)). Las líneas a trozos indican el borde azul del dominio de inestabilidad teórico para distintas clases de enanas blancas pulsantes. Adaptado de Córscico et al. (2019).

Tabla 1.1: Principales propiedades de los distintos tipos de enanas blancas pulsantes ordenadas por temperatura efectiva creciente. El símbolo de pregunta indica que la clase de pulsantes no ha sido completamente confirmada. Adaptado de Córscico et al. (2019).

Tipo	Rango de períodos[s]	T_{eff} [kK]	$\log(g)$ [cgs]
ELMV	[100- 6 200]	[7.8- 10]	[6- 6.8]
pre-ELMV	[300- 5 000]	[8- 13]	[4- 5]
ZZ Ceti (DAV)	[100- 1 400]	[10.4- 12.4]	[7.5- 9.1]
GW Lib	[100- 1 900]	[10.5- 16]	[8.35- 8.7]
DQV (?)	[240- 1 100]	[19- 22]	[8- 9]
V777 Her (DBV)	[120- 1 080]	[22.4- 32]	[7.5- 8.3]
Hot DAV (?)	[160- 705]	[30- 32.6]	[7.3- 7.8]
GW Vir	[300- 6 000]	[80- 180]	[5.5- 7.7]

ejemplo de este enfoque se encuentran los trabajos pioneros de Bradley (1998, 2001). Trabajos más recientes fueron realizados por Pech et al. (2006); Pech & Vauclair (2006); Bischoff-Kim et al. (2008a); Castanheira & Kepler (2008, 2009); Paparó et al. (2013); Bognár et al. (2016); Giammichele et al. (2016, 2017a,b, 2018). Este enfoque tiene un punto débil y tiene que ver con que, a falta de un gran número de períodos de pulsación observados, puede conducir a soluciones astrosismológicas caracterizadas por estructuras químicas que no son predichas por ningún escenario evolutivo de enanas blancas. Para citar un ejemplo de esto, en el caso de las estrellas ZZ Ceti, los modelos astrosismológicos obtenidos por este método podrían tener un *buffer* de C (que es difícil de predecir por los canales aceptados de formación de enanas blancas) o bien abundancias irreales de C y O en el núcleo que están en conflicto con la incerteza actual que tiene la tasa de reacción $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$. El segundo enfoque, llevado a cabo en el Grupo de Evolución estelar y Pulsaciones, es diferente aunque complementario, ya que emplea modelos completamente evolutivos que son resultado de la evolución completa de las estrellas progenitoras, desde la ZAMS hasta la fase de enana blanca. Ejemplos de la aplicación de este método a estrellas GW Virginis (estrellas pulsantes PG 1159) son los trabajos de Córscico et al. (2007a,b, 2008, 2009); Kepler et al. (2014) y Calcaferro et al. (2016). Este método también ha sido aplicado en enanas blancas DBV (con atmósferas ricas en He) por Córscico et al. (2012a); Bognár et al. (2014); Córscico et al. (2014). En estrellas ZZ Ceti, este enfoque ha sido satisfactoriamente empleado por Kepler et al. (2012); Romero et al. (2012, 2013, 2017). En particular, este método tiene el valor agregado de que la estructura química de los modelos de base es consistente con la evolución de la pre-enana blanca. La desventaja de este enfoque es la existencia de numerosas incertezas relacionadas con los procesos evolutivos que tienen lugar durante la evolución de las estrellas progenitoras, como ser la cantidad exacta de *overshooting*, la cantidad precisa de pulsos térmicos durante la fase *TP-AGB*, el valor de la tasa de reacción nuclear $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$, que es relevante durante la etapa de quema central de He, las tasas de pérdida de masa, etc. Recientemente, De Gerónimo et al. (2015, 2017, 2018) han llevado a cabo cálculos específicos para estimar el impacto de estas incertezas sobre las propiedades astrosismológicas de modelos de ZZ Ceti derivadas con este método. Los resultados indican que dicho impacto es cuantificable y está acotado.

Algunas de las herramientas astrosismológicas aplicadas exitosamente en enanas blancas pulsantes se exponen brevemente a continuación:

Comparación del espaciamiento asintótico de períodos con el espaciamiento observado

Basado en la dependencia del espaciamiento asintótico de períodos con la frecuencia de Brunt-Väisälä, este método permite estimar la masa estelar a través de la comparación de estas dos cantidades. De la Ecuación (1.14) (aunque resulta más visible al usar la Ecuación (2.12) del siguiente Capítulo) puede verse que dicha frecuencia es directamente proporcional a la gravedad, y así, el espaciamiento de períodos resulta inversamente proporcional a la gravedad según la Ecuación (1.19) y, entonces, a la masa estelar. De esta manera, midiendo el espaciamiento de períodos de una estrella, es posible estimar su masa. Esta técnica es útil cuando dicha frecuencia depende más fuertemente de uno solo de sus términos (ver la Ecuación (1.14) o (2.12)), y supone que la estrella se encuentra oscilando en el régimen asintótico de períodos (órdenes radiales k grandes). Este método ha sido ampliamente utilizado, por ejemplo, para determinar la masa en estrellas PG 1159 (Córscico et al. 2007a,b, 2008, 2009; Calcaferro et al. 2016) ya que en esas estrellas tanto los períodos como los espaciamientos de períodos dependen casi exclusivamente de la masa estelar. Esta estimación es de muy bajo costo computacional, ya que no involucra cálculos de pulsación. Sin embargo, la derivación que usa el espaciamiento asintótico de períodos puede no ser muy realista en los casos en que las estrellas analizadas no pulsen con modos caracterizados por órdenes radiales altos (tal es el caso de DBVs y DAVs, puesto que los períodos y los espaciamientos de períodos en ellas, dependen adicionalmente del espesor de las envolturas; Althaus et al. 2010). A modo de ejemplo, en la Figura 1.11 se ilustra el espaciamiento medio de períodos en términos de los períodos de pulsación para un caso arbitrario. Si esta estrella pulsara con períodos $\gtrsim 1700$ s, se encontraría pulsando en el régimen asintótico y el valor de masa obtenido con esta determinación, sería más aceptable. Emplear esta determinación si la estrella no se encuentra en dicho régimen, generalmente, lleva a una sobreestimación del valor de la masa estelar. Cabe mencionar que este método es estrictamente válido en el caso de estrellas químicamente homogéneas (algo que no ocurre en las enanas blancas). La inhomogeneidad química implica la existencia de gradientes de densidad, que a su vez producen el efecto de atrapamiento de modos y consecuentemente, el espaciamiento de períodos no es uniforme.

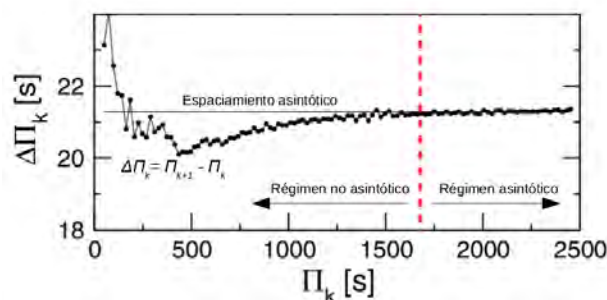


Figura 1.11: Espaciamiento de períodos $\Delta\Pi_k$ en términos de los períodos Π_k para un caso genérico (cortesía de A. H. Córscico).

Comparación del espaciamiento promedio de períodos con el espaciamiento observado

Cuando la estrella no se encuentra oscilando en el régimen asintótico de períodos, se emplea este método para estimar la masa estelar. Este método alternativo es más realista que el anterior: resulta apropiado para regímenes de períodos cortos, intermedios y largos, mientras el promedio sea evaluado sobre un rango adecuado de períodos (Althaus et al. 2010). En la Figura 1.12 se muestra un caso a modo de ejemplo, donde se ve que si la estrella oscila con períodos situados entre las líneas rojas discontinuas, el espaciamiento promedio resulta más representativo que el asintótico, dando entonces lugar a una mejor estimación de la masa estelar. La desventaja de este método es que resulta computacionalmente demandante ya que requiere de cálculos detallados de los períodos de oscilación, a diferencia del enfoque anterior. Veremos en el Capítulo 4 cómo se emplea este método.

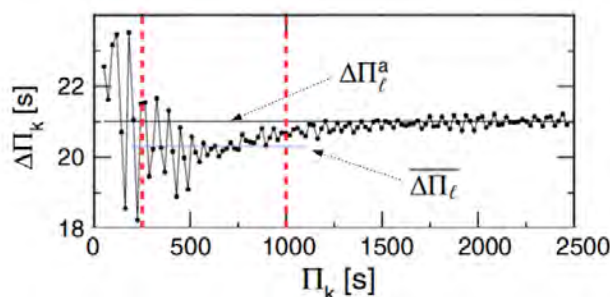


Figura 1.12: Espaciamiento promedio de períodos en términos de los períodos para un caso arbitrario, con el fin de esquematizar el régimen asintótico (cortesía de A. H. Córscico).

Es importante mencionar que ambos métodos para estimar la masa estelar dependen fuertemente del valor de la temperatura efectiva de la estrella, y por lo tanto, los resultados se verán afectados por los errores asociados a dicha determinación (Althaus et al. 2010).

Ajuste de períodos individuales Esta técnica consiste en buscar modelos estelares cuyos períodos sean lo más próximos posible a los períodos individuales observados para la estrella. Esto se implementa mediante el cálculo de una función de calidad, χ , que definiremos más adelante (Capítulo 4) y que se trata simplemente de una desviación estándar entre los períodos de pulsación teóricos de los modelos y los individuales observados. Algunas veces es posible encontrar un mínimo único de esta función, indicando la existencia de una única solución astrosismológica (tal es el caso de los estudios astrosismológicos sobre PG 1159 realizados por Córscico et al. (2007a,b, 2008, 2009)). Otras veces, sin embargo, la función posee múltiples mínimos locales, y es necesario emplear restricciones externas al método. Generalmente se utiliza la temperatura efectiva, con sus respectivos márgenes de error. Lo relevante de esta técnica es que permite estimar valores teóricos adicionales a la masa, como ser la luminosidad, el radio, la gravedad superficial, entre muchas otras cantidades relevantes. Esta es la técnica más empleada en el presente trabajo y veremos más detalles en los Capítulos 4 y 5.

1.4. Enanas blancas de baja masa: ELMs

Como hemos mencionado, la mayoría de las enanas blancas tienen envolturas principalmente de H y están caracterizadas por una masa promedio de $\sim 0.6 M_{\odot}$, con núcleos compuestos de C y O. Asimismo, como puede verse en la Figura 1.13, en la distribución de masa de las enanas blancas existe una población con masa por debajo de $\sim 0.45 M_{\odot}$, denominadas *enanas blancas de baja masa* (Kleinman et al. 2013; Kepler et al. 2015), que se espera se encuentren en sistemas binarios y que, a diferencia de las enanas blancas promedio, se cree que sus núcleos son de He. Dentro de esa población se diferencia a las *enanas blancas de masa extremadamente baja* (ELM, por su sigla en inglés), con $M_{\star} \lesssim 0.18 - 0.20 M_{\odot}$, de las enanas blancas con masa en el intervalo $0.18 - 0.20 \lesssim M_{\star} \lesssim 0.45 M_{\odot}$, dado que presentan diferencias sustanciales en sus tiempos evolutivos y sus propiedades pulsacionales (Althaus et al. 2013; Córscico & Althaus 2014a). Desde el punto de vista evolutivo, los progenitores de enanas blancas con masas $\gtrsim 0.18 - 0.20 M_{\odot}$, experimentan múltiples flashes termonucleares de CNO, inducidos por la difusión de elementos, que consumen la mayor parte del contenido de H de la envoltura. Como resultado, la estrella entra a la fase final de enfriamiento con una envoltura de H muy delgada (Althaus et al. 2001; Panei et al. 2007; Althaus et al. 2013). Consecuentemente, la estrella no puede mantener una quema estable mientras se enfría y evoluciona en escalas de tiempo relativamente cortas ($\sim 10^7$ años). Esto está en claro contraste con las ELMs ($M_{\star} \lesssim 0.18 - 0.20 M_{\odot}$) cuyos progenitores no experimentan dichos flashes, y entran en la etapa final de enfriamiento con una envoltura de H gruesa que les permite sostener una quema estable de H como su principal fuente de energía, dilatando así los tiempos de enfriamiento ($\sim 10^9$ años). Vale la pena enfatizar que dicho valor umbral depende de la metalicidad (0.01 en nuestro caso) de los progenitores de estas estrellas, siendo mayor para menor metalicidad (Serenelli et al. 2002; Nelson et al. 2004; Istrate et al. 2016b). Algunos autores adoptan un valor de $\sim 0.3 M_{\odot}$ como límite superior para las ELMs (ver, por ejemplo, Brown et al. 2016b).

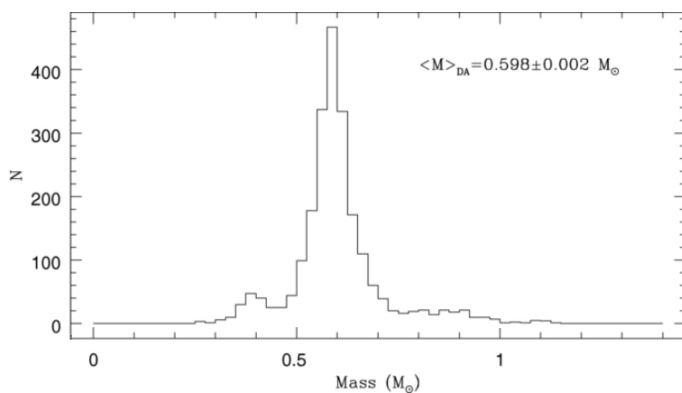


Figura 1.13: Distribución de masa de las enanas blancas ricas en H, con $T_{\text{eff}} \gtrsim 12\,000$ K. El máximo está ubicado en $M_{\star} \sim 0.6 M_{\odot}$. Tomado de Kleinman et al. (2013).

La existencia de enanas blancas de baja masa solo puede ser explicada si se incluye algún episodio de transferencia de masa en sistemas binarios. Esto se debe a que, si bien una estrella con masa inicial $M_{\star} < 0.45 M_{\odot}$ ($= M_{\text{flashHe}}$) podría formar una enana blanca

de baja masa, el tiempo requerido para terminar la quema de H central sería superior a la edad del Universo. La masa inicial entonces debe ser mayor, pero en ese caso, tendría que haber algún mecanismo de pérdida de masa durante la evolución para que termine convirtiéndose en una enana blanca de baja masa. En particular, debe perder su envoltura antes del encendido del He, por lo cual el flash de He no tiene lugar, y la estrella evoluciona hacia la rama de enfriamiento de las enanas blancas dentro de la edad del Universo (Althaus et al. 2013). Debido a que no llega a encender el He, su núcleo queda compuesto por este elemento, a diferencia de las enanas blancas promedio, con núcleos de C y O. Dado que la pérdida de masa durante la RGB de estrellas aisladas no es suficiente, se propone la transferencia de masa en un sistema binario¹³. Esto, además, se ve apoyado por las observaciones: la mayoría de las enanas blancas de baja masa se encuentran en sistemas binarios (Marsh et al. 1995). Como vimos, esta transferencia de masa, en principio, puede transcurrir de forma estable vía RLOF (tal es el caso de las secuencias evolutivas de Althaus et al. (2013); Istrate et al. (2016b)) o bien de forma inestable, por ejemplo, a través de algún episodio de envoltura común (Woods et al. 2012; Ivanova et al. 2013; Ivanova & Nandez 2016) (ver Capítulo 6).

En los últimos años, distintos surveys han encontrado un gran número de enanas blancas de baja masa, en particular ELMs, entre los cuales podemos nombrar a las campañas SDSS, ELM, SPY y WASP (ver Koester et al. 2009; Brown et al. 2010, 2012; Maxted et al. 2011; Kilic et al. 2011, 2012; Brown et al. 2013; Gianninas et al. 2014; Kilic et al. 2015; Gianninas et al. 2015; Brown et al. 2016a,b, 2017b; Pelisoli & Vos 2019). En general, en el contexto del *ELM survey* (que se trata de un muestreo espectroscópico de candidatas a enanas blancas de baja masa, en un determinado rango de magnitudes, seleccionadas por color), se define de forma empírica a una ELM como una enana blanca con gravedad superficial en el rango $5 \lesssim \log g \lesssim 7$ y temperatura efectiva en el intervalo $8000 \lesssim T_{\text{eff}} \lesssim 22000$ K (Brown et al. 2016a). Estas estrellas son identificadas¹⁴ empleando sus espectros, en particular, las líneas de H de Balmer, ya que proporcionan una medida sensible de la gravedad superficial en ese rango de T_{eff} . Posteriormente, es necesario analizar su naturaleza binaria a fin de confirmar que se encuentran en el contexto que se entiende preciso para su formación. Esto se hace mediante la medición de las variaciones de velocidad radial (RV) (Brown et al. 2016a). Vale la pena destacar que el rol del ELM survey ha sido muy importante en el terreno de las ELMs, en cuyo contexto se han encontrado cerca de 90 ELMs, donde alrededor de 80 están en sistemas binarios (Brown et al. 2010; Kilic et al. 2011; Brown et al. 2012; Kilic et al. 2012; Brown et al. 2013; Gianninas et al. 2015; Brown et al. 2016a; Pelisoli

¹³Algunos autores plantean la posibilidad de encontrar enanas blancas de baja masa en evolución aislada provenientes de progenitores de muy alta metalicidad. En un estudio sobre la población estelar del cúmulo NGC6791 viejo y rico en metales, Kilic et al. (2007) concluyen que hay cierto porcentaje de sus estrellas que serían enanas blancas de baja masa y núcleo de He, para las cuales no se detecta binaridad. Esto lleva a pensar que podrían haber experimentado procesos de pérdida de masa considerables, superiores a los que sufrirían estrellas con menor metalicidad. No obstante, las masas más bajas que podrían formarse por este camino son superiores a los $0.20 M_{\odot}$.

¹⁴Cabe mencionar que las ELMs son difíciles de identificar. Como las enanas blancas cumplen con una relación inversa entre su masa y radio, estas estrellas tienen mayor radio y por ende, son más brillantes que las enanas blancas promedio. Sin embargo, como su masa baja implica gravedades superficiales y colores fuera de la región donde se encuentran las enanas blancas promedio, su detección ha sido esquivada durante largo tiempo (Pelisoli & Vos 2019).

et al. 2018b).

Las enanas blancas ELM detectadas hasta el momento tienen compañeras de diversos tipos de poblaciones. La mayoría se encuentran en sistemas binarios con enanas blancas de núcleo de C y O, sistemas conocidos como *doble degenerados* (Brown et al. 2016b). Asimismo, se hallan como compañeras de *púlsares de milisegundos* (MSP, por su sigla en inglés)¹⁵ (ver por ejemplo, van Kerkwijk et al. (2005); Kaplan et al. (2013); Antoniadis et al. (2013) y para una lista de todas las ELM compañeras de MSP, ver la Tabla A1 de Pelisoli & Vos (2019)). De hecho, la primera ELM confirmada espectroscópicamente es compañera del púlsar PSR J1012+5307 (van Kerkwijk et al. 1996). La presencia de ELMs en distintos tipos de poblaciones, desde el plano galáctico hasta cúmulos globulares y abiertos, indica que provienen de progenitores con un amplio rango de metalicidades.

Desde el punto de vista pulsacional, Steinfadt et al. (2010) fueron los primeros en predecir la posible existencia de pulsaciones en ELMs. Estos autores encontraron que, a diferencia de lo que ocurre en el caso de las enanas blancas pulsantes promedio (con núcleos de C y O), los modos g en ELMs deberían sondear las regiones del núcleo debido a que las autofunciones no se ven excluidas de dicha región a causa de la relativamente baja degeneración de las ELMs. Como las escalas de tiempo de las enanas blancas ELM a bajas temperaturas efectivas ($\lesssim 14\,000$ K) son muy largas (por estar caracterizadas por envolturas gruesas de H) Steinfadt et al. (2012) han podido llevar a cabo una búsqueda detallada de estrellas pulsantes con masa por debajo de los $\sim 0.20 M_{\odot}$, aunque esta no fue fructífera. Muy poco después, Hermes et al. (2012) pudieron detectar la primera ELMV, SDSS J184037.78+642312.3, que se encuentra en un sistema binario de 4.6 h con una enana blanca como compañera, exhibiendo períodos en el rango de los 2 000 a 4 000 s, compatibles con modos g de órdenes intermedio y alto (Córscico et al. 2019). A ese descubrimiento, le siguieron otros (Hermes et al. 2012, 2013c,a; Kilic et al. 2015; Bell et al. 2015, 2017a; Pelisoli et al. 2018b; Kilic et al. 2018; Bell et al. 2018; Pelisoli et al. 2018b) (ver Sección 1.5). De esta manera, la detección de variaciones multiperiódicas de brillo compatibles con modos g , ha dado lugar a una nueva clase de estrellas variables denominada genéricamente ELMV, caracterizadas por $7\,800 \lesssim T_{\text{eff}} \lesssim 10\,000$ K y $6 \lesssim \log g \lesssim 6.8$, y que se encuentran representadas con círculos de color rojo en la Figura 1.10. La existencia de ELMVs ha motivado el desarrollo de trabajos teóricos para estudiar sus propiedades pulsacionales. Entre los más relevantes se encuentran los cálculos de Córscico et al. (2012d); Córscico & Althaus (2014a) que, en línea con lo encontrado por Steinfadt et al. (2010), muestran que los modos g en ELMs están principalmente confinados a las regiones del núcleo, mientras que los modos p y radiales, a las regiones de la envoltura estelar. Esto permite el estudio de la estructura química tanto del núcleo como de la envoltura, si se detectan ambos modos de pulsación (ver Capítulo 2). Es importante destacar que la difusión de elementos dependiente del tiempo modifica considerablemente la región de transición química de He/H, algo que impacta en el espectro de pulsaciones de modos g (Córscico et al. 2012d; Córscico & Althaus 2014a). Por otra parte, los cálculos de estabilidad de Córscico et al.

¹⁵Los MSPs están caracterizados por períodos rotacionales cortos ($P < 30$ ms), campos magnéticos relativamente pequeños ($B \sim 10^8 - 10^{10}$ G) y tasas de desaceleración angular bajas ($\dot{P} \sim 10^{-20} - 10^{-19}$ s/s). Los períodos tan cortos se cree que son debidos a la acreción de material de una estrella donante, lo cual es consistente con el hecho de encontrarlos, en su mayoría, en sistemas binarios. Aquellos con $P < 10$ ms suelen estar acompañados de enanas blancas con núcleo de He (ver Karpova et al. 2018, y referencias allí).

(2012d); Van Grootel et al. (2013); Córscico & Althaus (2016) muestran que son los mecanismos $\kappa - \gamma$ y de driving convectivo, ambos actuando en la zona de ionización del H los que excitan las pulsaciones en estas estrellas. Además, se cree que el mecanismo ε debido a quema estable de H, podría excitar modos g de período corto (Córscico & Althaus 2014b).

Adicionalmente, se ha encontrado una población de estrellas que se cree son precursoras de las enanas blancas de baja masa, llamadas *pre-ELM*. Algunas exhiben pulsaciones y entonces definen la clase de variables *pre-ELMV* (Maxted et al. 2013, 2014; Gianninas et al. 2016; Zhang et al. 2016; Corti et al. 2016; Bell et al. 2018; Pelisoli et al. 2018b)¹⁶. Estas estrellas, que se representan en la Figura 1.10 mediante círculos de color verde claro, están caracterizadas por $8\,000 \lesssim T_{\text{eff}} \lesssim 13\,000$ K y $4 \lesssim \log g \lesssim 5$, y tienen una composición superficial con una mezcla de H y He. La primera detectada, WASP J0247-25B (Maxted et al. 2013) es parte de un sistema binario eclipsante, y tiene parámetros $T_{\text{eff}} = 11\,380 \pm 400$ K, $\log g = 4.576 \pm 0.011$ y $M_{\star} = 0.186 M_{\odot}$. Sus períodos están en el rango de 380 – 420 s y se cree que son una mezcla de modos radiales ($\ell = 0$) y p no radiales ($\ell \geq 1$) (Maxted et al. 2013). Los estudios teóricos que se han llevado a cabo sobre estos objetos, enfocados en explorar la estabilidad pulsacional de los modos radiales (Jeffery & Saio 2013), y no radiales p y g (Córscico et al. 2016a; Gianninas et al. 2016) revelan que el mecanismo $\kappa - \gamma$ actuando principalmente en la segunda zona de ionización del He ($\text{He}^+ - \text{He}^{++}$), junto con una pequeña contribución de la región de la primera ionización parcial del He y la ionización parcial de H, es lo que produce la excitación de los modos en estas estrellas. De esta manera, la abundancia del He en sus envolturas es crucial para desestabilizar los modos de pulsación (Córscico et al. 2016a; Istrate et al. 2016b), lo cual sugiere que debe haber algún mecanismo retardando o inhibiendo los efectos de la difusión química de elementos. En algún momento de la evolución posterior de las *pre-ELMVs*, se espera que el efecto del asentamiento gravitacional finalmente domine, dando lugar a enanas blancas con atmósferas de H puro, tal como se observa en las *ELMVs*.

1.5. Motivación y contexto de esta Tesis

El destino final de la gran mayoría de las estrellas del Universo es el de enana blanca. En efecto, según las teorías de evolución actual, se espera que este sea el final evolutivo de las estrellas con masa por debajo de $\sim 9 - 10 M_{\odot}$, que corresponde a alrededor del 95 % de las estrellas de secuencia principal (Winget & Kepler 2008a; Fontaine & Brassard 2008a; Althaus et al. 2010; Woosley & Heger 2015). Dado que son objetos tan antiguos y numerosos, su estudio nos da información de la evolución de estrellas individuales y de la historia de nuestra Galaxia. En este sentido, las enanas blancas son consideradas relojes cósmicos precisos, empleándose para determinar la edad de diversas poblaciones estelares, por ejemplo, a través de la función de luminosidad que permite poner cotas sobre la edad y procesos de formación de las distintas poblaciones galácticas (ver, por ejemplo García-Berro et al. 2010; Bedin et al. 2015; Torres et al. 2018, entre otros). Asimismo, son empleadas en el estudio de la evolución de sistemas planetarios, a lo largo de las diferentes

¹⁶Las *pre-ELMV* detectadas por Zhang et al. (2016); Corti et al. (2016); Bell et al. (2018); Pelisoli et al. (2018b) en realidad tienen una identificación ambigua, pues también podrían tratarse de estrellas δ Scuti/SX Phoenicis.

fases de la evolución estelar (ver Farihi 2016, por ejemplo). Además, son empleadas como laboratorios cósmicos, en el sentido de que es posible estudiar ciertos procesos físicos que suceden bajo condiciones extremas y que por ende, son irreproducibles en un laboratorio terrestre. Por citar algunos casos, podemos nombrar los estudios sobre las propiedades fundamentales de axiones y neutrinos de Córscico et al. (2012b); Miller Bertolami et al. (2014), sobre la variación de las constantes fundamentales de Althaus et al. (2011); Córscico et al. (2013) y sobre física del estado sólido, particularmente, la cristalización (Tremblay et al. 2019). Para más información, se recomienda al lector la lectura del reciente artículo de revisión de Córscico et al. (2019).

El caso particular de las enanas blancas de baja masa con núcleo de He tiene numerosos aspectos que las convierten en objetivos dignos de estudio. Por un lado, como hemos mencionado, estas estrellas tienen un interés intrínseco por provenir de un escenario evolutivo que se cree debe ser binario. En general, la evolución de un sistema binario es de sumo interés dado que es responsable de diversos fenómenos astrofísicos, a la vez que tiene muchas incertezas que hacen necesario su estudio. Como expusimos en la Sección anterior, se espera que las estrellas progenitoras de las enanas blancas de baja masa y núcleo de He se encuentren en un sistema binario interactuante, gracias a lo cual experimentan una pérdida de masa intensa (que inhibe el flash de He) mientras evolucionan en la RGB. Una de las mayores incertezas en la evolución de estas estrellas está relacionada precisamente con la forma en que transcurre la transferencia de masa. Si la misma ocurre de forma estable (a través del desbordamiento del lóbulo de Roche), se espera que la envoltura de H que caracteriza a una ELM sea gruesa (Althaus et al. 2013; Istrate et al. 2016b). Sin embargo, se cree que si la transferencia ocurriera de forma inestable, su envoltura de H resultaría delgada (Woods et al. 2012; Ivanova et al. 2013; Ivanova & Nandez 2016). Debido a que es de esperar que esto modifique la evolución posterior, y dado que es posible la existencia de este tipo de estrellas, es importante investigar las consecuencias de que las mismas tengan envolturas delgadas de H sobre los tiempos de enfriamiento y sobre las propiedades pulsacionales.

Adicionalmente, el hecho de detectar ELMs como compañeras de MSP ofrece la posibilidad de restringir las edades de los MSP (Driebe et al. 1998; Althaus et al. 2001; Benvenuto & De Vito 2005). El tiempo de desaceleración rotacional, comúnmente conocido por el término en inglés *spin-down age*, no necesariamente representa la edad real de estos objetos¹⁷ (Tauris 2012). De modo que la determinación de la edad de enfriamiento de la enana blanca que se encuentra en el sistema provee de una medición más confiable de esta cantidad (Istrate et al. 2014; Kilic et al. 2018). Además, existen problemas a la hora de diferenciar a las enanas blancas de baja masa pulsantes con una población de estrellas pulsantes de secuencia principal pobres en metales (denominadas *subenanas A* o *sdA*, en inglés, Kepler et al. 2015, 2016) que tienen valores similares de gravedad superficial (Brown et al. 2017a; Pelisoli et al. 2018a). Al ser difícil diferenciarlas basándose solo en la espectroscopía, el hecho de detectar enanas blancas de baja masa compañeras de MSP resulta en una forma

¹⁷Se cree que los MSP son reciclados durante la fase de transferencia de masa. Cuando esta finaliza, el púlsar comienza a desacelerarse, y a partir de ese momento, las edades del púlsar y la enana blanca inferidos a través de la tasa de variación de sus períodos, debería de ser la misma (van Kerkwijk et al. 2005; Tauris 2012).

más confiable para identificarlas. Esto se debe a que como las estrellas de neutrones son aceleradas hasta alcanzar períodos del orden de los milisegundos (a través de la acreción en un sistema binario compacto), si se encuentra una estrella pulsante acompañando a un MSP, debería tratarse de una enana blanca (Kilic et al. 2018).

El aspecto más relevante para el contexto de esta Tesis es la detección de pulsaciones en las enanas blancas de baja masa. Este hallazgo ha servido para impulsar enormemente la búsqueda de este tipo de estrellas, ya que ha posibilitado el estudio de sus interiores mediante las técnicas de la astrosismología, algo que no es posible por otros métodos. Al contar con períodos compatibles con modos g (que en ELMs sondan la región del núcleo) es posible inferir detalles de los interiores estelares, a la vez que permite caracterizarlas mediante la determinación de sus parámetros fundamentales. Al día de la fecha, se conocen once (Hermes et al. 2012, 2013c,a; Kilic et al. 2015; Bell et al. 2015, 2017a; Kilic et al. 2018; Bell et al. 2018; Pelisoli et al. 2018b), cinco de las cuales no cuentan con la confirmación de estar en sistemas binarios. Se pueden encontrar en la Tabla ??, donde se detallan sus principales características.

La presencia de pulsaciones en estrellas pre-ELMVs también ha aumentado el interés en este tipo de objetos, y no solo por su potencial astrosismológico. Siendo que las pre-ELMVs evolucionarían hasta convertirse en ELMVs (Fontaine et al. 2017), su estudio es importante para entender los procesos que eventualmente dan lugar a las ELMVs. Actualmente, se conocen unas diez pre-ELMVs, consignadas en la Tabla ?? (Maxted et al. 2013, 2014; Gianninas et al. 2016; Zhang et al. 2016; Corti et al. 2016; Bell et al. 2018; Pelisoli et al. 2018b), aunque cinco de ellas no han sido aún confirmadas.

Otra ventaja que ofrece la astrosismología de ELMVs y pre-ELMVs está relacionada con la posibilidad de, a través de la medición de la tasa de cambio de períodos, inferir el estado evolutivo de estas estrellas. Gracias a que los períodos de pulsación de modos g en enanas blancas cambian con la evolución, esta cantidad toma distintos valores dependiendo de la fase evolutiva en la que se encuentre la estrella. En particular, hay tres etapas donde es viable la observación de estas estrellas, por ser su evolución relativamente lenta (Althaus et al. 2013). Además, considerando los problemas existentes en la clasificación espectroscópica de estrellas provenientes del ELM Survey, conocer este valor permitiría discernir si una dada estrella pulsante se trata de una enana blanca de baja masa o si, por el contrario, pertenece a otra población estelar. Aunque por el momento no se ha podido medir esta cantidad para este tipo de enanas blancas, es muy probable su medición en un futuro próximo.

La mejora sustancial de las técnicas de observación y del instrumental, ha sido fundamental, en general, en el terreno de las enanas blancas de nuestra galaxia. Los últimos avances en este campo, proporcionados principalmente por las misiones Gaia (ver Gaia Collaboration et al. 2018a,b, por ejemplo) y TESS (Ricker et al. 2015), han dado pruebas vastas de su gran utilidad para el estudio de las estrellas enanas blancas pulsantes. Merced a la gran cobertura del cielo y la sensibilidad sin precedentes de TESS, es inminente la detección de nuevas ELMs, y de enanas blancas de baja masa en general, y de un mayor número de períodos de pulsación de estas estrellas (ver los trabajos realizados para enanas blancas pulsantes de Bognár et al. 2018; Bell et al. 2019, por ejemplo). Por su parte, Gaia ha ampliado enormemente el número de enanas blancas, llegando a detectar cerca de

Tabla 1.2: Lista de las ELMVs conocidas hasta el momento (confirmadas y no) con sus principales características. Adaptado de Córscico et al. (2019).

Estrella	T_{eff}^{3D} [K]	$\log(g)^{3D}$ [cgs]	Rango períodos [s]	Magnitud
SDSS J184037.78+642312.3	9 120	6.34	[1 164 – 4 445]	18.91 (g)
SDSS J111215.82+111745.0	9 240	6.17	[108 – 2 856]	16.35 (g)
SDSS J151826.68+065813.2	9 650	6.68	[1 335 – 3 848]	17.54 (g)
SDSS J161412.28+191219.4*	8 700	6.32	[1 184 – 1 263]	16.40 (g)
SDSS J222859.93+362359.6*	7 890	5.78	[3 255 – 6 235]	16.83 (g)
PSR J173853.96+033310.8	8 910	6.30	[1 788 – 3 057]	21.30 (V)
SDSS J161831.69+385415.2	8 965	6.54	[2 543 – 6 126]	19.84 (g)
SDSS J173521.69+213440.6*	7 940	5.76	[3 363 – 4 961]	16.12 (g)
SDSS J213907.42+222708.9*	7 990	5.93	[2 119 – 3 303]	15.92 (g)
SDSS J134336.44+082639.4	8 100	5.97	3 600	16.27 (g)
SDSS J222009.74-092709.9*	8 230	6.10	[2 169 – 3 591]	15.84 (g)

Notas: El supraíndice 3D indica que el parámetro ha sido corregido empleando los valores dados por modelos de atmósferas 3D (Tremblay et al. 2015).

La letra entre paréntesis en la última columna indica el filtro de la magnitud consignada.

* Estrella con binaridad no confirmada.

260 000 (Gentile Fusillo et al. 2019). Además, gracias a la gran precisión de los datos de Gaia, ahora resulta posible contar con determinaciones más precisas de la distancia y a partir de ella, del radio de estos objetos, lo cual proporciona una herramienta para diferenciar estas estrellas de otras poblaciones estelares. Asimismo, los satélites de la Agencia Espacial Europea, *Cheops* (CHaracterising ExOPlanets Satellite), *Plato* (PLAnetary Transits and Oscillations) y *Ariel* (Atmospheric Remote-sensing Infrared Exoplanet Large-survey), cuyos lanzamientos se programan para los próximos años, representan un futuro muy prometedor en este campo.

El gran progreso a nivel observacional requiere del esfuerzo conjunto con la parte teórica. En este sentido, en el Grupo de Evolución Estelar y Pulsaciones del cual formo parte, se han realizado algunos trabajos que han sido pioneros en la interpretación teórica de las enanas blancas de baja masa pulsantes (Althaus et al. 2013; Córscico & Althaus 2014a, 2016; Córscico et al. 2016a). Los trabajos presentados en el marco de la presente Tesis (Calcaferro et al. 2017a,b, 2018a; Kilic et al. 2018; Calcaferro et al. 2018b) representan la continuación natural de dichos proyectos de investigación. De esta manera, esta Tesis está enfocada al estudio evolutivo y, principalmente, astrosismológico de las enanas blancas de baja masa y núcleo de He. El estudio se basa en los modelos completamente evolutivos representativos de estas estrellas, caracterizados por una envoltura de H gruesa, generados por Althaus et al. (2013). En este trabajo, entonces, llevamos a cabo una exploración de la evolución temporal de los períodos de pulsación adiabáticos de las secuencias desarrolladas por Althaus et al. (2013), en distintas etapas de su evolución (Capítulo 3). Posteriormente, realizamos un estudio astrosismológico aplicado a todas las enanas blancas de baja masa pulsantes conocidas hasta el momento (Capítulo 4). Con la evidencia reciente de la posible existencia de enanas blancas de baja masa con envoltura delgada de H, extendimos

Tabla 1.3: Lista de las pre-ELMVs conocidas hasta el momento (confirmadas y no) con sus principales características. Adaptado de Córscico et al. (2019).

Estrella	T_{eff}^{3D} [K]	$\log(g)^{3D}$ [cgs]	Rango períodos [s]	Magnitud
SDSS J115734.46+054645.6	11 870	4.81	364	19.9 (g)
SDSS J075610.71+670424.7	11 640	4.90	[521 – 587]	16.3 (g)
WASP J024743.37-251549.2	11 380	4.576	[380 – 420]	12.1 (g)
SDSS J114155.56+385003.0	11 290	4.94	[325 – 368]	19.1 (g)
KIC 9164561*	10 650	4.86	[3 018 – 4 668]	13.7 (g)
WASP J162842.31+101416.7	9 200	4.49	[668 – 755]	13.0 (g)
SDSS J173001.94+070600.25*	7 972	4.25	3 367	16.4 (g)
SDSS J145847.02+070754.46*	7 925	4.25	[1 634 – 3 279]	15.2 (g)
SDSS J131011.61-014233.0*	8 224	5.33	[2 100 – 3 100]	16.6 (g)
SDSS J075738.94+144827.50*	8 180	4.75	[803 – 2 982]	15.0 (g)

Notas: El supraíndice 3D indica que el parámetro ha sido corregido empleando los valores dados por modelos de atmósferas 3D (Tremblay et al. 2015).

La letra entre paréntesis en la última columna indica el filtro de la magnitud consignada.

* Estrella identificada con ambigüedad como pre-ELMV o δ Scuti/SX Phe.

el análisis evolutivo y astrosismológico para enanas blancas de baja masa con envolturas más delgadas (Capítulos 5 y 6).

2 | Herramientas numéricas y propiedades de los modelos

“For me, it is far better to grasp the Universe as it really is than to persist in delusion, however satisfying and reassuring.”

The Demon-Haunted World: Science as a Candle in the Dark,
Carl Sagan (1997)

En este Capítulo, expondremos de forma breve los códigos numéricos con los cuales se generaron tanto las secuencias evolutivas previamente mencionadas así como los cálculos pulsacionales, cuyos resultados fueron empleados para esta Tesis y los trabajos publicados.

Por un lado se trata de un código evolutivo, LP-CODE, desarrollado completamente en la Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas. Para una descripción completa y actualizada del mismo, remitirse a Althaus et al. (2005b, 2015); Miller Bertolami (2016). En cuanto al código de pulsaciones, la versión actualizada del código LP-PUL también fue desarrollado en la Facultad (Córscico & Althaus 2006, y referencias allí). Ambos fueron y son ampliamente utilizados para el desarrollo de numerosas Tesis de Licenciatura y Doctorales (por ejemplo, Córscico 2003; Romero 2012; Camisassa 2019; De Gerónimo 2018), así como también de numerosas publicaciones en revistas internacionales prestigiosas (ver García-Berro et al. 2010; Miller Bertolami et al. 2019, por ejemplo).

2.1. Código evolutivo: LPCODE

El código evolutivo LPCODE resuelve las ecuaciones que caracterizan al interior estelar, con las condiciones de borde apropiadas, y esto lo hace bajo un conjunto de hipótesis. Se considera que la estrella tiene simetría esférica, y se desprecian los efectos de campos magnéticos y de rotación. Adicionalmente, se considera que cada capa se encuentra cercana al equilibrio termodinámico local, y así cada una puede representarse como un cuerpo negro. Además, en cada paso temporal el modelo está en equilibrio hidrostático, de modo que todas las fuerzas actuando sobre un elemento de masa se compensan entre sí.

El sistema de ecuaciones de estructura y evolución de una configuración con simetría esférica que debe resolverse es:

$$\frac{\partial r}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial m} = -\frac{Gm}{4\pi r^4} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial l}{\partial m} = \epsilon_n - \epsilon_\nu - c_P \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\delta}{\rho} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial m} = -\frac{GmT}{4\pi r^4 P} \nabla \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} = -\sum_j \langle v\sigma \rangle_{ij} n_i n_j + \sum_{kl} \langle v\sigma \rangle_{kl} n_k n_l + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 D_{mix} \frac{\partial n_i}{\partial r} \right) \quad (2.5)$$

En estas expresiones G es la constante de gravitación universal, $l(m, t)$ la luminosidad (que es la diferencia entre el flujo total a través de una capa esférica y el flujo de energía debida a los neutrinos), ϵ_n es la energía nuclear liberada por unidad de masa y de tiempo, ϵ_ν la energía perdida por neutrinos por unidad de masa y de tiempo, c_P es el calor específico a presión constante por unidad de masa, δ es el coeficiente de expansión térmica tal que: $\delta = -\left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T}\right)_P$, $T(m, t)$ la temperatura, $P(m, t)$ la presión, ∇ es el gradiente de temperatura definido como: $\nabla = \frac{\partial \ln T}{\partial \ln P}$. Además, n_i es el número de partículas por unidad de volumen de la especie i , con $i = 1, \dots, I$, donde I representa el número total de especies químicas que se consideran, $\langle v\sigma \rangle_{ij}$ representa la tasa de reacciones nucleares por par de partículas entre las especies i y j , y D_{mix} es el coeficiente de difusión que describe el proceso de mezcla. Notar que la variable independiente en las ecuaciones anteriores es la masa fraccional m , que representa la masa interna a un radio r , ya que resulta más conveniente como variable independiente que el radio.

Cuando el transporte sea radiativo, $\nabla = \nabla_{rad}$ toma el valor (en la aproximación de difusión):

$$\nabla_{rad} = \frac{3}{16\pi a c G} \frac{\kappa l P}{m T^4} \quad (2.6)$$

siendo a la constante de densidad de radiación y κ la opacidad (radiativa o conductiva). En presencia de movimientos macroscópicos del material, en particular de convección, el valor de ∇ dependerá de la teoría de convección que se adopte. En nuestro caso se considera la teoría de longitud de mezcla estándar (*MLT*, por su sigla en inglés) en su versión ML2 (Córscico & Althaus 2014a) con $\alpha = 1.0$.

El LPCODE está basado en un esquema tipo Henyey para el cálculo de evolución estelar. La implementación se lleva a cabo a través de una linealización implícita del sistema de ecuaciones de estructura y evolución enumerados anteriormente. El sistema algebraico resultante de la linealización es resuelto a través de un método iterativo de Newton-Raphson. Además, se emplean ciertos cambios de variables con el fin de lograr estabilidad computacional:

$$\xi = \ln(1 - m/M_*), \quad (2.7)$$

que pasa a ser la variable independiente (M_* es la masa total de la estrella), y:

$$\theta = \ln(T/T_0) \quad (T_0 \equiv 10^6 \text{ K}), \quad (2.8)$$

$$p = \ln(P/P_0) \quad (P_0 \equiv 10^{15} \text{ din cm}^{-2}), \quad (2.9)$$

$$x = \ln(r/r_0) \quad (r_0 \equiv 10^{10} \text{ K}), \quad (2.10)$$

$$\lambda = l/(\Lambda l_0) \quad (l_0 \equiv 10^{33} \text{ erg seg}^{-1}). \quad (2.11)$$

Las variables θ , p , x y λ son dependientes. Las constantes T_0 , P_0 , r_0 , l_0 y Λ son factores de escala. Las condiciones de borde vienen dadas por integraciones de la envoltura, desde la fotosfera hacia el interior del modelo. Notar que con este cambio, las variables dependientes son logaritmos de las cantidades físicas que resultan importantes, a excepción de l donde el tamaño de la variable λ es regulado de forma automática para que λ permanezca siempre menor a 10. Esto último se hace con el objetivo de que la luminosidad pueda hacerse negativa, algo que ocurre, dado que el gradiente de temperatura puede tomar valores negativos y dar lugar a un flujo de energía neto hacia el interior estelar. Lo mencionado puede deberse al enfriamiento que producen los neutrinos, por ejemplo, u ocurrir cuando tienen lugar combustiones violentas en alguna de las capas de la estrella. Otro punto a destacar es que, en general, los códigos evolutivos trabajan de forma iterativa obteniendo las variables T , P , r y l en un dado tiempo t_n , calculando la composición química en un tiempo t_{n+1} , que posteriormente se usa para calcular las variables de estructura, que a su vez, luego se usan para conocer la composición química en t_{n+2} , y así sucesivamente. Si esto se hace con un paso de tiempo suficientemente pequeño, de forma tal que no cambien las variables significativamente (es decir, para poder trabajar con las ecuaciones de forma lineal), se pueden evitar los costos computacionales que implicaría resolver de forma simultánea las ecuaciones que involucran los cambios químicos junto con los cambios en la estructura. La implementación se hace exigiendo que los cambios en dichas variables entre modelos sucesivos se mantengan por debajo de cierto valor.

2.2. Código de pulsaciones: LP-PUL

Este código fue desarrollado para estudiar las propiedades pulsacionales en estrellas enanas blancas variables, y en particular, para calcular los modos no radiales de estrellas con simetría esférica. Desarrollado por el Dr. Alejandro H. Córscico como parte de su tesis doctoral (Córscico 2003), ha sido utilizado en un amplia variedad de enanas blancas pulsantes.

Inicialmente, se orientó a la resolución de las ecuaciones que modelan las oscilaciones no radiales, lineales y adiabáticas para estrellas con simetría esférica (en el Apéndice A puede encontrarse el desarrollo de dichas ecuaciones). A pesar de que los cálculos adiabáticos constituyen una aproximación matemática al problema original, las diferencias relativas en los períodos calculados de forma no adiabática serían de unos 10^{-4} (Bradley 1998). Para resolver estas ecuaciones diferenciales junto con las condiciones de borde en

el centro y la superficie estelar, que es un problema lineal de autovalores de cuarto orden, se emplea una modificación de la técnica de Newton-Raphson presentada en Kippenhahn et al. (1967). El método que se utiliza es el de diferencias finitas, que se lleva a cabo dividiendo el modelo de equilibrio en un número finito de capas concéntricas. Se comienza con una solución aproximada y se va mejorando de forma iterativa. En Córscico (2003) y Córscico & Benvenuto (2002) se encuentran todos los detalles de la resolución numérica.

Cabe mencionar que la frecuencia de Brunt-Väisälä es obtenida empleando el *tratamiento de Ledoux modificado* (Tassoul et al. 1990; Brassard et al. 1991), que incluye las variaciones en abundancia de las especies nucleares más abundantes en los interiores de estas estrellas (H, He, C y O). Con el fin de evitar mayores errores numéricos se implementa mediante la expresión:

$$N^2 = \frac{g^2 \rho}{p} \frac{\chi_T}{\chi_\rho} (\nabla_{ad} - \nabla + B), \quad (2.12)$$

donde $\chi_T = (\partial \ln p / \partial \ln T)_\rho$ y $\chi_\rho = (\partial \ln p / \partial \ln \rho)_T$, ∇ y ∇_{ad} son los gradientes de temperatura real y adiabático, respectivamente, y B , es el término de Ledoux, dado por:

$$B = -\frac{1}{\chi_T} \sum_{i=1}^{n-1} \chi_{X_i} \frac{d \ln X_i}{d \ln P}, \quad (2.13)$$

donde X_i es la abundancia por masa de la especie i , n es el número total de especies consideradas, y:

$$\chi_{X_i} = \left(\frac{d \ln P}{d \ln X_i} \right)_{\rho, T, \{X_{j \neq i}\}} \quad (2.14)$$

De este modo, el término de Ledoux tiene la contribución a la frecuencia de Brunt-Väisälä debido a los cambios de composición química. El código de pulsaciones calcula, para cada modo, las autofunciones adimensionales y_i ($i = 1, \dots, 4$) y las autofrecuencias $\omega_{k,\ell}$, siendo k el orden radial del modo y ℓ el grado armónico. Luego, calcula los períodos de pulsación $P_{k,\ell}$, la energía cinética de oscilación $K_{k,\ell}$, las funciones de peso (que miden la contribución relativa de una dada zona del modelo en la formación de los períodos) $W_{k,\ell}$, y los coeficientes de splitting rotacional $C_{k,\ell}$, entre otras cantidades.

Por último, los cálculos de pulsaciones no adiabáticos fueron realizados utilizando la versión no adiabática del código LP-PUL (Córscico et al. 2006). Este, emplea como soluciones iniciales aproximadas (de entrada) a las soluciones adiabáticas obtenidas por el código adiabático LP-PUL. De esta manera, partiendo de los modos adiabáticos dados para un modelo evolutivo, el código no adiabático procede iterando para hallar las soluciones no adiabáticas mediante un método de tipo Henyey. Terminada la iteración de todos los modos no adiabáticos para un dado modelo estelar, pasa al siguiente modelo y lo hace hasta completar el intervalo de temperatura efectiva considerado. Con las autofrecuencias y las autofunciones, el código calcula los períodos no adiabáticos, y a fin de establecer cuáles modos resultan pulsacionalmente inestables, calcula el *coeficiente de estabilidad normalizado*, η , dado por:

$$\eta \equiv -\Im(\sigma) / \Re(\sigma) \quad (2.15)$$

donde $\Re(\sigma)$ y $\Im(\sigma)$ son las partes reales e imaginaria, respectivamente, de la autofrecuencia compleja σ . Si este coeficiente es positivo, el modo resulta inestable; de lo contrario, el modo se considera estable.

2.3. Secuencias evolutivas

A continuación presentamos los lineamientos que Althaus et al. (2013) siguieron para producir las secuencias evolutivas, con los ingredientes físicos que consideraron, y algunos de los resultados presentados por Córscico & Althaus (2014a). Al ser esta Tesis parte de la serie de trabajos que caracterizan al tipo de estrella bajo estudio (Althaus et al. 2013; Córscico & Althaus 2014a, 2016; Córscico et al. 2016a), y dado que se fundamenta en los resultados arribados por los mismos, es importante mostrar algunas de sus principales conclusiones.

Los modelos evolutivos empleados en este trabajo han sido generados por Althaus et al. (2013), usando el código LPCODE, y teniendo en cuenta las siguientes consideraciones. La metalicidad de las estrellas progenitoras es $Z = 0.01$; las opacidades radiativas son extraídas del proyecto *OPAL* (para una metalicidad arbitraria en el rango de 0 a 0.1, Iglesias & Rogers 1996), mientras que las opacidades conductivas, de Cassisi et al. (2007). La ecuación de estado durante la evolución en la secuencia principal es la de *OPAL* para composiciones ricas en H y He. La red nuclear toma en cuenta los elementos: ^1H , ^2H , ^3He , ^4He , ^7Li , ^7Be , ^{12}C , ^{13}C , ^{14}N , ^{15}N , ^{16}O , ^{17}O , ^{18}O , ^{19}F , ^{20}Ne y ^{22}Ne , junto con 34 tasas de reacciones termonucleares para las cadenas pp, el ciclo CNO, la quema de He y la ignición de C como se describe Althaus et al. (2005a). La tasas de emisión de neutrinos (foto, pares y bremsstrahlung) fueron extraídas de Itoh et al. (1996). Para las etapas evolutivas que siguen luego del final de la pérdida de masa y para el régimen de enana blanca se emplea la ecuación de estado de Magni & Mazzitelli (1979). Se consideró la difusión de elementos químicos dependiente del tiempo, que incluye el asentamiento gravitacional y las difusiones térmica y química de las especies nucleares (^1H , ^3He , ^4He , ^{12}C , ^{13}C , ^{14}N y ^{16}O) implementadas en el tratamiento de gas multicomponente de Burgers (1969) (ver detalles en Althaus et al. 2003). Adicionalmente, se tuvieron en cuenta los cambios en las abundancias de acuerdo a las reacciones nucleares y a la mezcla convectiva. Esto es relevante cuando se trata de evaluar la importancia de la quema residual nuclear durante la etapa de enfriamiento de las enanas blancas de baja masa (Althaus et al. 2013). Finalmente, para la etapa de enana blanca y para $T_{\text{eff}} \lesssim 10\,000$ K, las condiciones de borde para los modelos fueron derivadas de modelos de atmósfera no gris (Rohrman et al. 2012).

Con el fin de derivar configuraciones realistas de las enanas blancas de baja masa y núcleo de He, Althaus et al. (2013) han simulado la evolución binaria de las estrellas progenitoras. Debido a que para una ELM la quema de H en capa es la principal fuente de luminosidad de la estrella durante la mayor parte de su evolución como enana blanca, es fundamental calcular estructuras iniciales realistas de las enanas blancas, particularmente, para poder estimar de forma correcta la masa de la envoltura de H que queda luego de la evolución del progenitor (Sarna et al. 2000). Althaus et al. (2013) consideran la evolución no conservativa de un sistema binario consistente en una componente que

inicialmente tiene $1 M_{\odot}$ en la ZAMS junto con una estrella de neutrones de $1.4 M_{\odot}$. En particular, las secuencias de enanas blancas comienzan poco después de finalizada la fase de desbordamiento del lóbulo de Roche. La evolución considerada del sistema binario es completamente no conservativa, es decir, la masa total y el momento angular del sistema no se conservan (ver Sección 1.1.3). Los cambios en la separación orbital debidos a los cambios en la masa, que se supone que se pierde del sistema, son pequeños (ver en Sarna et al. 2000, más detalles).

El tratamiento llevado a cabo para obtener las secuencias se basa en el formalismo de Sarna et al. (2000). Siendo M_1 la masa de la estrella donante, y M_2 la masa de la estrella acretora, el cambio temporal en el momento angular orbital total (J) del sistema binario puede escribirse como:

$$\frac{\dot{J}}{J} = \frac{\dot{J}_{ML}}{J} + \frac{\dot{J}_{GR}}{J} + \frac{\dot{J}_{MB}}{J}, \quad (2.16)$$

donde \dot{J}_{ML} , \dot{J}_{GR} y \dot{J}_{MB} son la pérdida de momento angular del sistema debido a la pérdida de masa (la materia que deja el sistema remueve momento angular intrínseco), radiación por ondas gravitacionales (la emisión de radiación gravitacional para sistemas con períodos orbitales muy cortos contribuye a la remoción de momento angular) y frenado magnético (frenado de la rotación de la estrella debido a un viento estelar magnético), respectivamente. Este último es relevante cuando la estrella secundaria tiene una zona convectiva externa. Para calcular estas cantidades se consideran (Sarna et al. 2000; Muslimov & Sarna 1993):

$$\frac{\dot{J}_{ML}}{J} = \frac{M_2}{M_1(M_1 + M_2)} \dot{M}_1 \text{ yr}^{-1}, \quad (2.17)$$

$$\frac{\dot{J}_{GR}}{J} = -8.5 \times 10^{-10} \frac{M_1 M_2 (M_1 + M_2)}{a^4} \text{ yr}^{-1}, \quad (2.18)$$

$$\frac{\dot{J}_{MB}}{J} = -3 \times 10^{-7} \frac{(M_1 + M_2)^2 R_1^4}{M_1 M_2 a^5} \text{ yr}^{-1}, \quad (2.19)$$

donde a es el semieje de la órbita y R_1 el radio de la estrella donante. Todas las cantidades están en unidades solares. La tasa de pérdida de masa de la secundaria se calcula como en Chen & Han (2002):

$$\dot{M}_d = C \max \left[0, \left(\frac{R_{\star}}{R_L} - 1 \right)^3 \right], \quad (2.20)$$

donde $C = -0.001 M_{\odot}/\text{yr}$. La pérdida de masa es tenida en cuenta mientras la estrella donante llena su lóbulo de Roche (Ecuación (1.1)).

El semieje de la órbita se encuentra al integrar la ecuación para la tasa de cambio de a , empleando la expresión (1.4). Si la masa de la estrella secundaria se pierde completamente del sistema, es decir, no es acretaada por su compañera, entonces se obtiene:

$$\frac{1}{2} \frac{\dot{a}}{a} = \frac{\dot{J}}{J} - \left(\frac{1}{M_1} - \frac{1}{2(M_1 + M_2)} \right) \dot{M}_1. \quad (2.21)$$

La pérdida de masa prosigue hasta que la estrella secundaria se encoge dentro de su lóbulo de Roche. Como consecuencia de un flash termonuclear de H, que tiene lugar sobre la rama de enfriamiento temprana, la secundaria podría volver a llenar su lóbulo de Roche. En ese caso, vuelve a tener lugar la pérdida de masa aunque en escalas evolutivas muy cortas. Cabe mencionar que en este tratamiento, sin embargo, la pérdida de masa no se calcula de manera autoconsistente en el sentido de que la tasa de pérdida de masa no es considerada como una cantidad desconocida durante el procedimiento iterativo para resolver las ecuaciones de estructura estelar. En lugar de ello, se fija de antemano para cada modelo. Aún así, este procedimiento constituye una mejor aproximación para derivar modelos de enanas blancas de baja masa físicamente realistas que remover masa arbitrariamente a una estrella de baja masa evolucionando. Es suficiente para los propósitos de este y los trabajos de la serie, enfocados en las propiedades de enfriamiento y estructurales de ELMs.

Siguiendo los lineamientos anteriores, todos los modelos iniciales de enana blanca con núcleo de He han sido derivados de cálculos evolutivos para sistemas binarios formados por una estrella de baja masa evolucionando, que inicialmente (en la ZAMS) tiene $1M_{\odot}$ junto con una estrella de neutrones de $1.4 M_{\odot}$. Considerando períodos orbitales iniciales en el rango entre 0.9 a 300 d al comienzo de la fase del desbordamiento del lóbulo de Roche, Althaus et al. (2013) han obtenido un conjunto de 14 modelos iniciales de enanas blancas con núcleo de He con masas estelares de 0.1554, 0.1612, 0.1650, 0.1706, 0.1762, 0.1805, 0.1863, 0.1921, 0.2025, 0.2390, 0.2707, 0.3205, 0.3624, y $0.4352 M_{\odot}$. Vale la pena aclarar que la masa de la envoltura de la enana blanca resultante, que es un factor determinante en el tiempo de enfriamiento, es tan solo débilmente dependiente de la masa inicial de la estrella donante (Nelson et al. 2004). En la Figura 2.1 se muestra la evolución en el plano de la gravedad superficial contra la temperatura efectiva de todas las secuencias de enanas blancas con núcleo de He. Como puede verse por los bucles que describen en los diagramas, las secuencias con masa en el rango $0.18 - 0.20 \lesssim M_{\star}/M_{\odot} \lesssim 0.45$ experimentan flashes debidos al ciclo CNO durante la fase temprana de enfriamiento.

Por otra parte, en la Figura 2.2 (Althaus et al. 2013) puede verse el diagrama $\log T_{\text{eff}} - \log g$ para las secuencias de ELM que no experimentan flashes de CNO en la rama de enfriamiento junto con la secuencia de enana blanca con núcleo de He menos masiva que sí experimenta flashes de CNO, con $0.1821 M_{\odot}$. En particular, se encuentran representados los primeros 7 Gyr de la evolución luego de finalizada la pérdida de masa (cuando la estrella donante se achica dentro de su lóbulo de Roche). Como puede verse, las secuencias que no experimentan flashes evolucionan lentamente, y esto es debido a que pueden mantener la quema de H en capa como fuente principal de luminosidad de la estrella, aún en etapas muy avanzadas de la evolución. En cambio, la evolución en la rama de enfriamiento final para la secuencia que atraviesa los flashes resulta más rápida que para secuencias con masa menor a $0.18 M_{\odot}$ debido a que los sucesivos flashes de CNO reducen considerablemente la cantidad de H en la estrella. Por este motivo, la quema residual de H es casi despreciable para cuando la secuencia alcanza la rama final de enfriamiento. Asimismo, cabe mencionar que la evolución se ralentiza antes de los flashes (Althaus et al. 2013). El hecho de que en algunas etapas la evolución sea más lenta tiene consecuencias desde el punto de vista observacional, ya que hace más viable la detección de estas estrellas. Por lo expuesto, esto es particularmente cierto para la etapa de enana blanca, para los instantes previos a los flashes de CNO y para las etapas de pre-enana blanca.

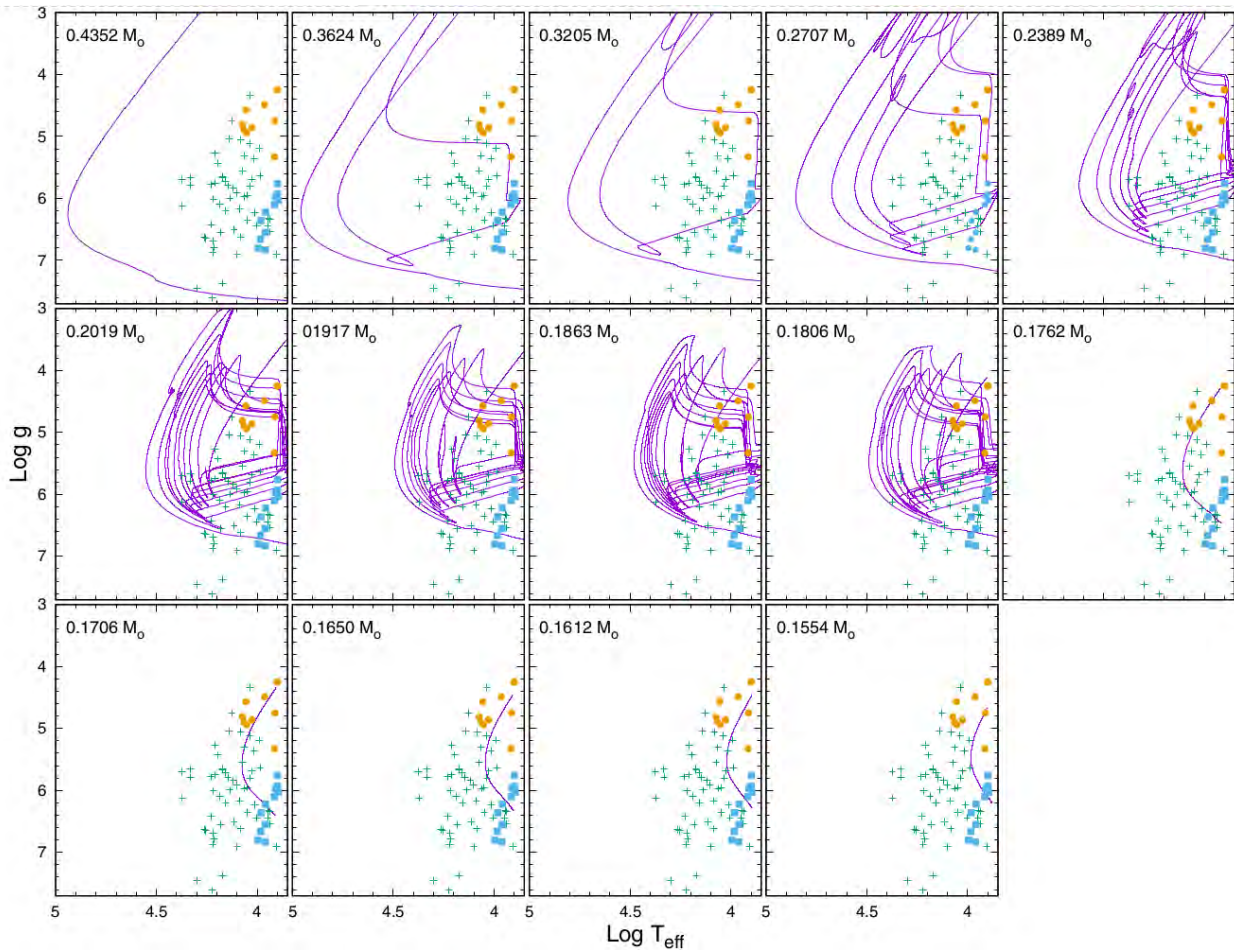


Figura 2.1: Diagrama $\log T_{\text{eff}} - \log g$ mostrando los tracks evolutivos de enanas blancas con núcleo de He calculadas por Althaus et al. (2013) (curvas violeta). Las cruces verdes corresponden a las enanas blancas de baja masa (incluyendo ELMs) de Silvotti et al. (2012) y Brown et al. (2013). Los rectángulos azules corresponden a ELMVs y los naranjas a pre-ELMVs. Los números en la parte superior izquierda de cada panel corresponden a la masa estelar en la etapa de enana blanca. Tomado de Córscico et al. (2019).

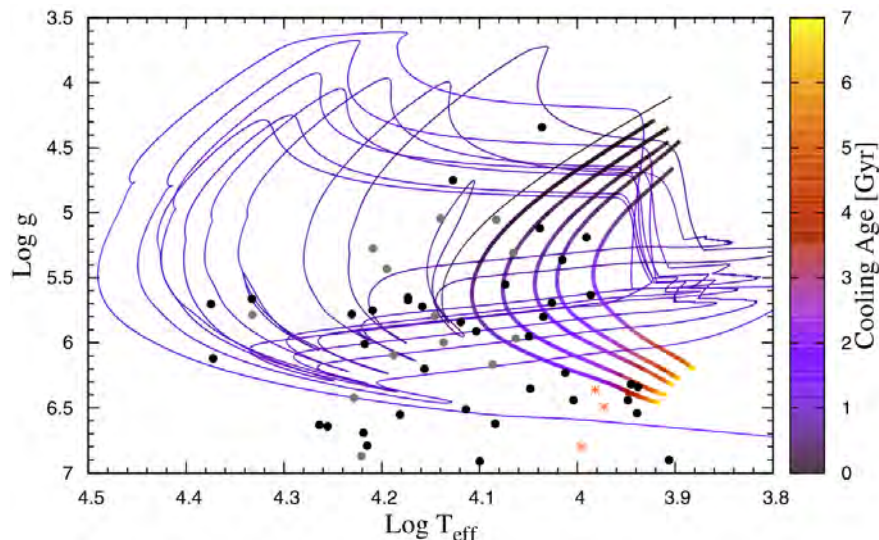


Figura 2.2: Diagrama $\log T_{\text{eff}} - \log g$ mostrando las secuencias de enanas blancas ELM con 0.1554 , 0.1612 , 0.165 , 0.1706 y $0.1762 M_{\odot}$ (líneas gruesas de derecha a izquierda), junto con la secuencia de enana blanca con núcleo de He de masa más baja que experimenta flashes de CNO ($0.1821 M_{\odot}$, línea delgada). El código de colores a la derecha muestra la edad de enfriamiento en Gyr. Los círculos negros y grises representan algunas ELM no pulsantes mientras que con los asteriscos rojos se marcan algunas de las ELMVs. Tomado de Althaus et al. (2013).

Por otra parte, Córscico & Althaus (2014a) han presentado un estudio detallado de las propiedades pulsacionales adiabáticas de estos modelos. En los paneles superiores de las Figuras 2.3 y 2.4 se muestran los perfiles químicos de H y He de un modelo de enana blanca ELM con $M_{\star} = 0.1554 M_{\odot}$ y $T_{\text{eff}} \sim 9600 \text{ K}$, y un modelo de enana blanca de baja masa con $M_{\star} = 0.2389 M_{\odot}$ y $T_{\text{eff}} \sim 9600 \text{ K}$, respectivamente. Podemos ver las diferencias en los tamaños de las envolturas debidas a las diferencias evolutivas que mencionamos anteriormente, y que la región de transición de He/H resulta ser mucho más ancha para el modelo de ELM. Además, la ELM presenta una estructura química de doble capa, producida por la acción de la difusión de elementos. Adicionalmente, en los paneles inferiores se muestran los correspondientes diagramas de propagación. En particular, puede notarse el impacto de la transición química sobre la frecuencia de Brunt-Väisälä. El hecho de que el *bump* esté ubicado en diferentes lugares, además de que la curva de N^2 tenga distinto comportamiento, da lugar a diferencias sustanciales en las propiedades de propagación de los modos. Por ser mayor en el núcleo que en la envoltura, la cavidad resonante de modos g para las ELM queda circunscripta al núcleo y lo opuesto ocurre para los modos p , mientras que para los modelos de enana blanca de baja masa la región de propagación de modos g y p se extiende casi a lo largo de todo el modelo. En resumen, los modos g en modelos de ELM sondan principalmente las regiones del núcleo mientras que los p , la envoltura, haciendo posible estudiar la estructura química del núcleo y la envoltura a través del estudio de los modos de pulsación. Por último, en la Figura 2.5 se muestra la densidad de energía cinética de oscilación, dE_{kin}/dr (normalizada a 1), para modos radiales y no radiales dipolares ($\ell = 1$) de modos g y p con distintos valores del

orden radial k , para el mismo modelo de ELM (Córscico & Althaus 2014a). Podemos notar que la mayor parte de la energía cinética de los modos g se halla concentrada en las regiones por debajo de la interfase He/H, es decir, las autofunciones de modos g penetran a regiones muy internas de la estrella. En contraste, la energía cinética de los modos p y radiales está prácticamente dispersa en toda la estrella, aunque casi ausente en el núcleo, y más concentrada hacia la superficie.

Por lo expuesto a lo largo de la serie de trabajos y en esta Tesis, distinguimos a las enanas blancas ELM con $M_{\star} \lesssim 0.18M_{\odot}$, de las demás enanas blancas de baja masa $M_{\star} \gtrsim 0.18M_{\odot}$ debido a que una ELM no ha experimentado flashes de CNO durante su evolución previa, está caracterizada por tiempos de enfriamiento muy largos, y tiene propiedades pulsacionales muy diferentes en comparación con aquellas estrellas que sí los ha experimentado. Nuevamente, este valor límite de $0.18M_{\odot}$ depende de la metalicidad de las estrellas progenitoras, siendo mayor para menor metalicidad (Serenelli et al. 2002; Nelson et al. 2004; Istrate et al. 2016b).

Finalmente, cabe destacar que la difusión de elementos dependiente del tiempo debe ser tenida en cuenta en cualquier estudio de ELMVs (Córscico et al. 2012d; Córscico & Althaus 2014a). Este fenómeno modifica sustancialmente la transición química He/H, impactando sobre el espectro de pulsaciones de modos g de enanas blancas ELM. Los efectos son menos relevantes, aunque existentes, en enanas blancas con masa $\gtrsim 0.18 M_{\odot}$ (Córscico et al. 2012d; Córscico & Althaus 2014a).

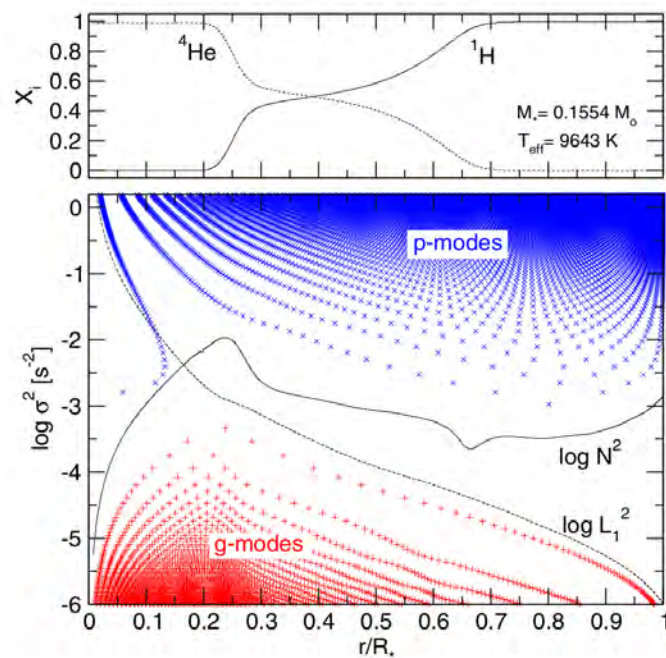


Figura 2.3: *Panel superior:* Abundancias fraccionales de H y He en términos del radio normalizado para un modelo de ELM con $M_{\star} = 0.1554 M_{\odot}$ y $T_{\text{eff}} \sim 9600 \text{ K}$. *Panel inferior:* Diagrama de propagación correspondiente al mismo modelo. Los símbolos “+” en rojo representan la ubicación de los nodos de la autofunción radial de modos g con $\ell = 1$, mientras que los símbolos “x” en azul corresponden a los nodos de los modos p dipolares. La curva negra sólida corresponde al $\log(N^2)$ y la curva negra a trozos al $\log(L_{\ell})$. Tomado de Córscico & Althaus (2014a).

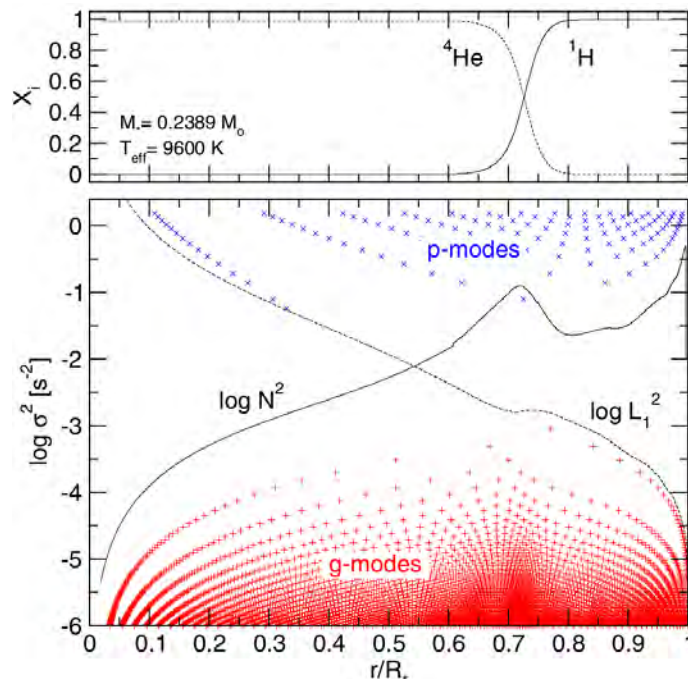


Figura 2.4: Como para la Figura 2.3 pero para un modelo de enana blanca con $M_{\star} = 0.2389 M_{\odot}$ y $T_{\text{eff}} \sim 9600 \text{ K}$. Tomado de Córscico & Althaus (2014a).

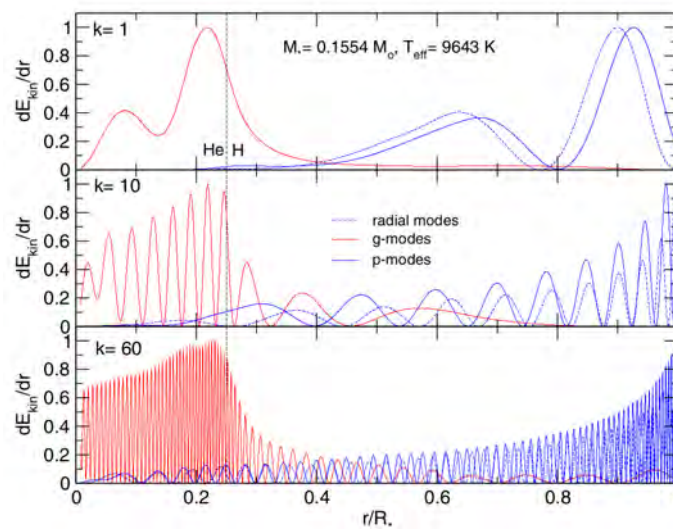


Figura 2.5: Densidad de energía cinética dE_{kin}/dr (normalizada a 1) para modos radiales (curvas discontinuas azules) y dipolares g (curvas sólidas rojas) y p (azules) para modos con $k = 1$ en el panel superior, $k = 10$, en el medio y $k = 60$ en el inferior, correspondientes al modelo de ELM con $M_\star = 0.1554 M_\odot$ y $T_{\text{eff}} \sim 9600 \text{ K}$. Tomado de Córscico & Althaus (2014a).

3 | La tasa secular de cambio de períodos

“Imagination will often carry us to worlds that never were, but without it we go nowhere.”

Cosmos, Carl Sagan (1980)

Los resultados de este Capítulo han sido publicados en el artículo **“Pulsating low-mass white dwarfs in the frame of new evolutionary sequences IV. The secular rate of period change”**, Leila M. Calcaferro, Alejandro H. Córscico, and Leandro G. Althaus. *Astronomy & Astrophysics*, 600, A73 (2017a).

3.1. Introducción

Los períodos de pulsación (Π) de modos g de las estrellas enanas blancas experimentan un cambio secular mientras se enfrían, dando lugar a una tasa de cambio de períodos detectable, que denotaremos $\dot{\Pi} \equiv d\Pi/dt$. Específicamente, mientras la temperatura del núcleo de una enana blanca decrece, el plasma aumenta su grado de degeneración de modo que la frecuencia de Brunt-Väisälä (ver Sección 1.2.2) decrece, y el espectro pulsacional de la estrella se mueve hacia períodos más largos. Por otro lado, la contracción gravitacional (si está presente) actúa en dirección opuesta, favoreciendo el acortamiento de los períodos de pulsación. La competencia entre la degeneración que aumenta y la contracción gravitacional da lugar a un $\dot{\Pi}$ detectable. En particular, ha sido mostrado por Winget et al. (1983) que la tasa de cambio de los períodos de pulsación de modos g está relacionada con la tasa de cambio de la temperatura en la región de formación de períodos, \dot{T} , y la tasa de cambio del radio estelar, \dot{R}_\star , de acuerdo a la siguiente expresión:

$$\frac{\dot{\Pi}}{\Pi} \approx -a \frac{\dot{T}}{T} + b \frac{\dot{R}_\star}{R_\star}, \quad (3.1)$$

que indica un orden de magnitud para $\dot{\Pi}/\Pi$, y donde a y b son constantes cuyos valores dependen de los detalles del modelado de la enana blanca, aunque $a, b \approx 1$. El primer término en la Ecuación (3.1) corresponde a la tasa de cambio de los períodos inducida por el enfriamiento de la enana blanca, y como $\dot{T} < 0$, es una contribución positiva. El segundo término representa la tasa de cambio debido a la contracción gravitacional ($\dot{R}_\star < 0$), y es una contribución negativa.

En aquellos casos en que se han podido obtener mediciones robustas de los cambios de períodos seculares (*drifts*) de enanas blancas pulsantes, se pueden llevar a cabo (en principio) un número importante de aplicaciones (Mukadam et al. 2003). En particular, los valores derivados de \dot{P} podrían ayudar a calibrar las curvas de enfriamiento de enanas blancas, reduciendo así las incertezas teóricas de la cosmocronología de enanas blancas para poder poner cotas a la edad del disco galáctico (e.g., Harris et al. 2006), halo (e.g., Isern et al. 1998) y cúmulos globulares galácticos (e.g., Hansen et al. 2013) y abiertos (García-Berro et al. 2010). La medición de \dot{P} también podría ayudar a inferir la composición química del núcleo de una enana blanca (Kepler et al. 2005). Esto se debe a que las tasas de enfriamiento de las enanas blancas, y por ende, las tasas de cambio de los períodos de un dado modo de pulsación, dependen principalmente de la composición del núcleo y de la masa estelar. A masa fija, \dot{P} es mayor cuando el peso atómico medio del núcleo es más alto. Esto permite poner cotas a la composición química del núcleo. Otra aplicación posible de la medición de \dot{P} es la detección de planetas. El movimiento orbital de una enana blanca pulsante alrededor del centro de masa del sistema debido a la posible presencia de un planeta modifica el tiempo que emplean los pulsos de luz en viajar. Como resultado, el tiempo en que se observa que llegan a la Tierra cambia, proveyendo así de un método alternativo para detectar un planeta (Mullally et al. 2008). Finalmente, las tasas de cambio de períodos en enanas blancas permiten, en principio, estudiar las propiedades de axiones (Isern et al. 1992; Córscico et al. 2001; Bischoff-Kim et al. 2008b; Córscico et al. 2012b,c, 2016b; Battich et al. 2016), neutrinos (Winget et al. 2004; Córscico et al. 2014), y poner cotas a la posible tasa de variación secular de la constante gravitacional (Córscico et al. 2013).

La tasa de cambio de períodos puede ser medida, en principio, si se monitorea una enana blanca pulsante a lo largo de un amplio intervalo de tiempo cuando existen uno o más períodos muy estables en el espectro de pulsaciones¹. En el caso de las enanas blancas pulsantes DA y DB (DAVs y DBVs, respectivamente, ver Sección 1.1.2) el enfriamiento domina sobre la contracción gravitacional, de modo que el segundo término de la Ecuación (3.1) es generalmente despreciable, y solo se espera observar valores positivos de las tasas de cambio de períodos (Winget & Kepler 2008b; Fontaine & Brassard 2008b; Althaus et al. 2010). Para DAVs con núcleo de C/O, las tasas esperadas de cambio de períodos están en el rango $10^{-15} - 10^{-16}$ s/s (Bradley et al. 1992; Bradley 1996), en excelente acuerdo con los valores medidos para G117–B15A ($\dot{P} = 4.19 \pm 0.73 \times 10^{-15}$ s/s, Kepler 2012), R548 ($\dot{P} = 3.3 \pm 1.1 \times 10^{-15}$ s/s, Mukadam et al. 2013) y L19–2 ($\dot{P} = 3.0 \pm 0.6 \times 10^{-15}$ s/s, Sullivan & Chote 2015), aunque en importante conflicto con el valor derivado para la enana blanca WD 0111+0018 ($\dot{P} > 10^{-12}$ s/s, Hermes et al. 2013b). Para DBVs, una estimación de la tasa de cambio de períodos ha sido obtenida para PG 1351+489 ($\dot{P} = 2.0 \pm 0.9 \times 10^{-13}$ s/s, Redaelli et al. 2011), en línea con las expectativas teóricas ($\dot{P} \sim 10^{-13} - 10^{-14}$ s/s; Winget et al. 2004; Córscico & Althaus 2004). En el caso de las enanas blancas pulsantes calientes y pre-enanas blancas GW Vir (o pulsantes PG 1159), los modelos teóricos predicen tasas de cambio de períodos en el rango $10^{-11} - 10^{-12}$ s/s (Kawaler & Bradley 1994; Córscico & Althaus 2006; Córscico et al. 2008). Para las temperaturas efectivas altas que caracterizan a

¹Para llevar a cabo una medición que requiere de tanta sensibilidad, toda la información (que se suele coleccionar durante años, incluso décadas) debe estar dada en una base temporal uniforme. Además, los períodos (y sus amplitudes) deben medirse con la mayor precisión posible y deben ser suficientemente estables como para que no haya gaps en los datos (ver en Winget & Kepler 2008b, por ejemplo, los detalles de este procedimiento).

la banda de inestabilidad de las GW Vir, la contracción gravitacional sigue siendo significativa, a un grado tal que su influencia en $\dot{\Pi}$ puede superar los efectos del enfriamiento. En este caso, el segundo término en la Ecuación (3.1) no es despreciable y así, es posible que $\dot{\Pi}$ adopte tanto valores positivos como negativos. Asimismo, el valor de $\dot{\Pi}$ de varios modos g han sido medidos en el caso de la estrella GW Vir prototípica, PG 1159–035 (Costa & Kepler 2008). La misma exhibe una mezcla de valores de $\dot{\Pi}$ positivos y negativos de magnitud elevada, superior a $\sim 4 \times 10^{-10}$ s/s. En particular, la tasa de cambio de períodos del modo con período $\Pi = 517.1$ s es $\dot{\Pi} = 1.52 \pm 0.05 \times 10^{-10}$ s/s, un orden de magnitud mayor que las predicciones teóricas (Kawaler & Bradley 1994; Córscico & Althaus 2006; Córscico et al. 2008). Althaus et al. (2008) han encontrado que esta discrepancia podría ser aliviada si PG 1159–035 estuviese caracterizada por una envoltura delgada rica en He, conduciendo a magnitudes marcadamente mayores de la tasa de cambio de períodos. Una medición de $\dot{\Pi}$ para otra estrella GW Vir, PG0112+200, ha sido llevada a cabo por Vauclair et al. (2011). Las tasas de cambio de períodos derivadas son mucho mayores que las predichas por los modelos teóricos (Córscico et al. 2007b), indicando la presencia de otro(s) mecanismo(s), además del enfriamiento por neutrinos, para poder explicar este desacuerdo. En particular, un mecanismo que podría estar jugando un rol dominante es el acoplamiento de modos resonantes inducido por la rotación (Vauclair et al. 2011). En este punto, es necesario destacar que debe tenerse cierta precaución en la interpretación de las tasas de cambio de períodos en enanas blancas pulsantes. Los estudios hechos por Hermes et al. (2013b) para la enana blanca DAV WD 0111+0018, y por Vauclair et al. (2011) para la estrella GW Vir PG 0112+200 (entre otros), indican que nuestro entendimiento de las tasas de cambio de períodos en enanas blancas está lejos de ser completo, algo que debe tenerse presente al momento de utilizar el valor de $\dot{\Pi}$ para las aplicaciones mencionadas.

En este trabajo, que está enmarcado dentro de la serie de trabajos hechos por el grupo (Althaus et al. 2013; Córscico & Althaus 2014a, 2016; Córscico et al. 2016a), presentamos por primera vez una estimación detallada de las tasas teóricas de cambio de períodos de estrellas ELMVs y pre-ELMVs. De acuerdo con las tasas teóricas de enfriamiento estimadas para estas estrellas (Althaus et al. 2013), como hemos mostrado brevemente en el Capítulo anterior, las enanas blancas de baja masa se enfrían más lentamente que las pre-enanas blancas de baja masa. Por este motivo, se espera que las ELMVs tengan valores menores de tasas de cambio de períodos que las pre-ELMVs. Por lo tanto, la medición eventual de la tasa de cambio de períodos para una dada estrella pulsante podría ser potencialmente usada para distinguir en qué estado evolutivo se encuentra la estrella. Además, una futura medición de $\dot{\Pi}$ podría en principio ayudar a distinguir enanas blancas ELM, con $M_{\star} \lesssim 0.18 - 0.20 M_{\odot}$, de enanas blancas de baja masa con $M_{\star} \gtrsim 0.18 - 0.20 M_{\odot}$, caracterizadas por envolturas de H más delgadas y tiempos de enfriamiento más cortos. Sin embargo, debemos tener en cuenta que las velocidades de enfriamiento de este tipo de estrellas podrían ser tan lentas que sería muy difícil de detectar cualquier cambio secular de los períodos. A pesar de ello, algunas de estas estrellas podrían no estar en sus curvas de enfriamiento terminales sino en la etapa de pre-enana blanca, o incluso atravesando un flash de CNO, y así tener valores mucho más altos (y mucho más fácilmente medibles) de $\dot{\Pi}$. En otras palabras, la detección de cualquier cambio secular de períodos significativo sería una fuerte evidencia de que el objeto no está en su curva final de enfriamiento como estrella ELMV. Aunque aún no se ha medido el valor de $\dot{\Pi}$ para estas estrellas, esto podría

lograrse en los próximos años gracias a los monitoreos fotométricos continuos de estos objetos, más aún considerando los últimos avances en este terreno (por ejemplo, el satélite TESS).

En este Capítulo presentamos los resultados de las tasas teóricas de cambio de períodos para modelos de ELMV y pre-ELMV, sobre la base de los modelos de Althaus et al. (2013) que hemos presentado en el Capítulo 2. En particular, estudiamos la dependencia de las tasas de cambio de períodos de modos no radiales g y p dipolares ($\ell = 1$) y radiales ($\ell = 0$) con la masa estelar y la temperatura efectiva. Luego, expandimos nuestro análisis al incluir la estimación de $\dot{\Pi}$ para modelos estelares que están evolucionando en etapas previas al desarrollo de los flashes termonucleares de CNO durante la etapa temprana de enfriamiento.

3.2. Determinación de las tasas teóricas de cambio de períodos

A lo largo de este trabajo estimamos las tasas de cambio de períodos simplemente diferenciando los períodos de modelos sucesivos en cada secuencia evolutiva. Específicamente, la tasa de cambio de períodos Π_k a tiempo τ_i es estimada según:

$$\dot{\Pi}_k(\tau_i) = \frac{\Pi_k(\tau_i) - \Pi_k(\tau_{i-1})}{\Delta\tau_i}, \quad (3.2)$$

donde $\Delta\tau_i = \tau_i - \tau_{i-1}$ es el paso del tiempo evolutivo, y $\Pi_k(\tau_i)$ y $\Pi_k(\tau_{i-1})$ son los períodos de pulsación del modo con orden radial k evaluados en los tiempos τ_i y τ_{i-1} , respectivamente. En nuestros cálculos, el paso de tiempo $\Delta\tau_i$ es lo suficientemente pequeño como para asegurar que esta receta numérica simple conduzca a resultados muy precisos para $\dot{\Pi}$. Computamos las tasas de cambio de períodos para modos g y p no radiales con $\ell = 1, 2$, y también para modos radiales ($\ell = 0$). El conjunto de modos de pulsación considerado en este trabajo cubre un rango muy amplio de períodos (hasta ~ 7000 s), de modo de abarcar todas las periodicidades detectadas en ELMV y pre-ELMV hasta el momento.

Como ya mencionamos en la Sección 2.3, las enanas blancas de baja masa tienen posibilidad real de ser observadas en tres etapas (Althaus et al. 2013): la rama final de enfriamiento (fase de enana blanca), la etapa donde evolucionan a luminosidad constante, posterior al desbordamiento del lóbulo de Roche (fase de pre-enana blanca) y, para el caso de estrellas con masa $M_\star \gtrsim 0.18 M_\odot$, las etapas evolutivas previas a la ocurrencia de flashes de CNO, en las ramas de enfriamiento tempranas (estadios pre-flash). Cabe mencionar que en las rápidas incursiones de las estrellas en el diagrama $\log T_{\text{eff}} - \log g$ mientras están atravesando los bucles entre flashes de CNO, la evolución es tan rápida que la probabilidad de encontrar una estrella en tales estadios es muy baja (Althaus et al. 2013). Por esta razón, en este trabajo no consideramos dichas etapas.

A continuación, exploramos la magnitud y el signo de las tasas de cambio de períodos de las enanas blancas de baja masa en cada etapa evolutiva mencionada. En todos los regímenes considerados en este Capítulo, los valores de las tasas de cambio de períodos

para $\ell = 2$ son del mismo orden de magnitud que para $\ell = 1$. Así, nos concentramos en mostrar los resultados solo para el caso de $\ell = 1$, aunque debemos tener en cuenta que también pueden observarse modos con $\ell = 2$ en este tipo de estrellas pulsantes.

3.2.1. Fase de enana blanca: ELMVs

En esta Sección examinamos el efecto que produce cambiar la masa estelar y la temperatura efectiva sobre las tasas de cambio de períodos de modelos de ELMV, es decir, modelos de enana blanca de baja masa que ya se encuentran evolucionando sobre la rama de enfriamiento final. Las propiedades adiabáticas y no adiabáticas de las pulsaciones en ELMVs han sido exploradas en detalle en Córscico et al. (2012d); Van Grootel et al. (2013); Córscico & Althaus (2014a, 2016). En la Figura 3.1 mostramos un diagrama $T_{\text{eff}} - \log g$ con los tracks evolutivos de las enanas blancas de baja masa y núcleo de He de Althaus et al. (2013), donde las masas estelares se hallan indicadas por números pequeños. Con fines ilustrativos, también incluimos con círculos rojos la ubicación de las ELMV conocidas (Hermes et al. 2012, 2013a,c; Kilic et al. 2015; Bell et al. 2015, 2017a), y de estrellas para las cuales no se observa variación, representadas por círculos negros pequeños (Steinfadt et al. 2012; Hermes et al. 2012, 2013c,a). Los cuadrados (triángulos) grises sobre los tracks evolutivos indican la ubicación de los modelos seleccionados, que serán analizados en la Figura 3.2 (3.3 y 3.4) a continuación.

Al estimar la dependencia de $\dot{\Pi}$ con M_{\star} y T_{eff} para modos g en enanas blancas, es usual considerar las predicciones del modelo de enfriamiento simple de Mestel (1952) a fin de poder comparar con los resultados numéricos. Dentro del marco de la ley de enfriamiento de Mestel, Kawaler et al. (1986) han derivado una relación entre $\dot{\Pi}$, M_{\star} y T_{eff} (su Ecuación (3)), que predice que $\dot{\Pi}$ es mayor para masas estelares más pequeñas y para temperaturas efectivas más altas. La dependencia con la masa puede ser entendida al advertir que cuanto más baja la masa, mayor la superficie irradiando y menor la capacidad calorífica total. Para un valor fijo de T_{eff} , los modelos menos masivos tienen luminosidades más altas y, por ende, se enfrían más rápidamente teniendo así un valor mayor de $\dot{\Pi}$. En cuanto a la dependencia de $\dot{\Pi}$ con la temperatura efectiva, para M_{\star} fija, los modelos con mayor T_{eff} se enfrían más rápido, con la consecuencia de que $\dot{\Pi}$ es mayor. Esta descripción simple se vuelve más complicada cuando existe otra fuente de energía, como ser la quema nuclear, además del reservorio de calor almacenado en los iones durante las fases de evolución previas. Este es el caso de las ELMs (con $M_{\star} \lesssim 0.18 - 0.20 M_{\odot}$) para las cuales, al estar caracterizadas por una quema de H intensa, no es posible aplicar las predicciones simples basadas en la teoría de Mestel.

En la Figura 3.2 representamos las tasas de cambio de períodos en términos de los períodos de modos g con $\ell = 1$ (panel superior izquierdo), modos p con $\ell = 1$ (panel superior derecho) y modos radiales con $\ell = 0$ (panel inferior), para modelos de enanas blancas de baja masa con $T_{\text{eff}} \sim 9000$ K y diversas masas estelares ($0.1554 \leq M_{\star}/M_{\odot} \leq 0.4352$). La ubicación de estos modelos estelares en el diagrama $T_{\text{eff}} - \log g$ está marcada con cuadrados grises en la Figura 3.1. Para modos g (panel superior izquierdo de la Figura 3.2), $\dot{\Pi}$ crece linealmente con el orden radial k y así, con el período, lo cual refleja el aumento de Π con k . Se pueden distinguir fácilmente dos ramas en la relación entre $\dot{\Pi}$ vs Π , una de ellas correspondiente a modelos con $M_{\star} \gtrsim 0.18 M_{\odot}$, y la otra asociada a modelos con $M_{\star} \lesssim 0.18 M_{\odot}$. En el primer grupo de modelos la quema nuclear no es relevante, y así, las

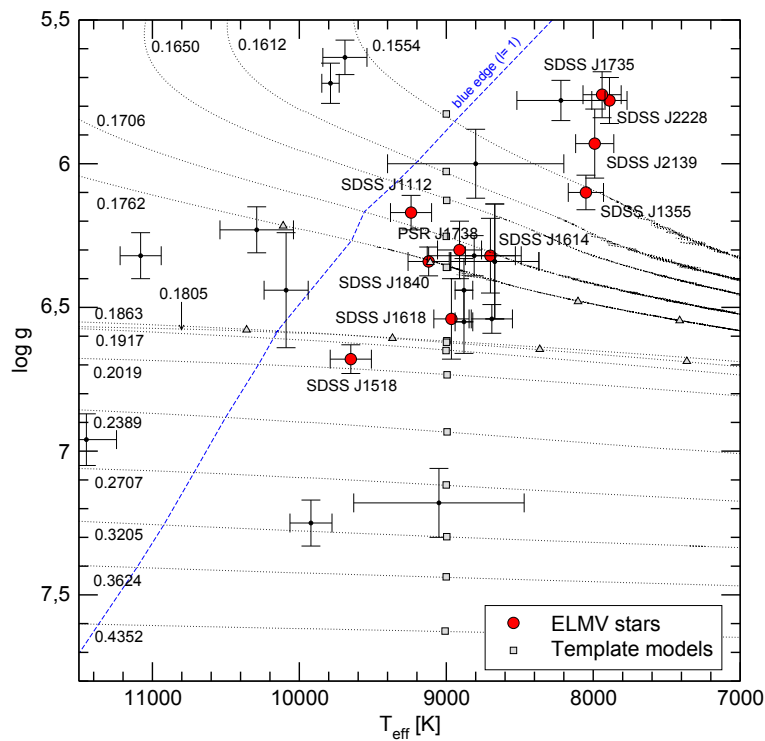


Figura 3.1: Diagrama $T_{\text{eff}} - \log g$ mostrando los tracks evolutivos de enanas blancas de baja masa con núcleo de He (ramas finales de enfriamiento) de Althaus et al. (2013). Los números corresponden a la masa estelar de cada secuencia (en masas solares). La ubicación de las ELMVs conocidas hasta el momento (Hermes et al. 2012, 2013a,c; Kilic et al. 2015; Bell et al. 2015, 2017a) está marcada con círculos rojos grandes (los valores de T_{eff} y $\log g$ considerados corresponden a los dados por las correcciones de modelos de atmósferas 3D). Las estrellas de las que no se observa variación (Steinfadt et al. 2012; Hermes et al. 2012, 2013a,c) son representadas con círculos negros pequeños. Los cuadrados y los triángulos grises sobre los tracks evolutivos indican la ubicación de los modelos elegidos para ser analizados en el texto. La línea azul a trazos corresponde al borde azul del dominio de inestabilidad de modos g con $\ell = 1$, de acuerdo con los cálculos no adiabáticos de Córscico & Althaus (2016), determinada usando la versión ML2 ($\alpha = 1.0$) de la teoría de convección MLT.

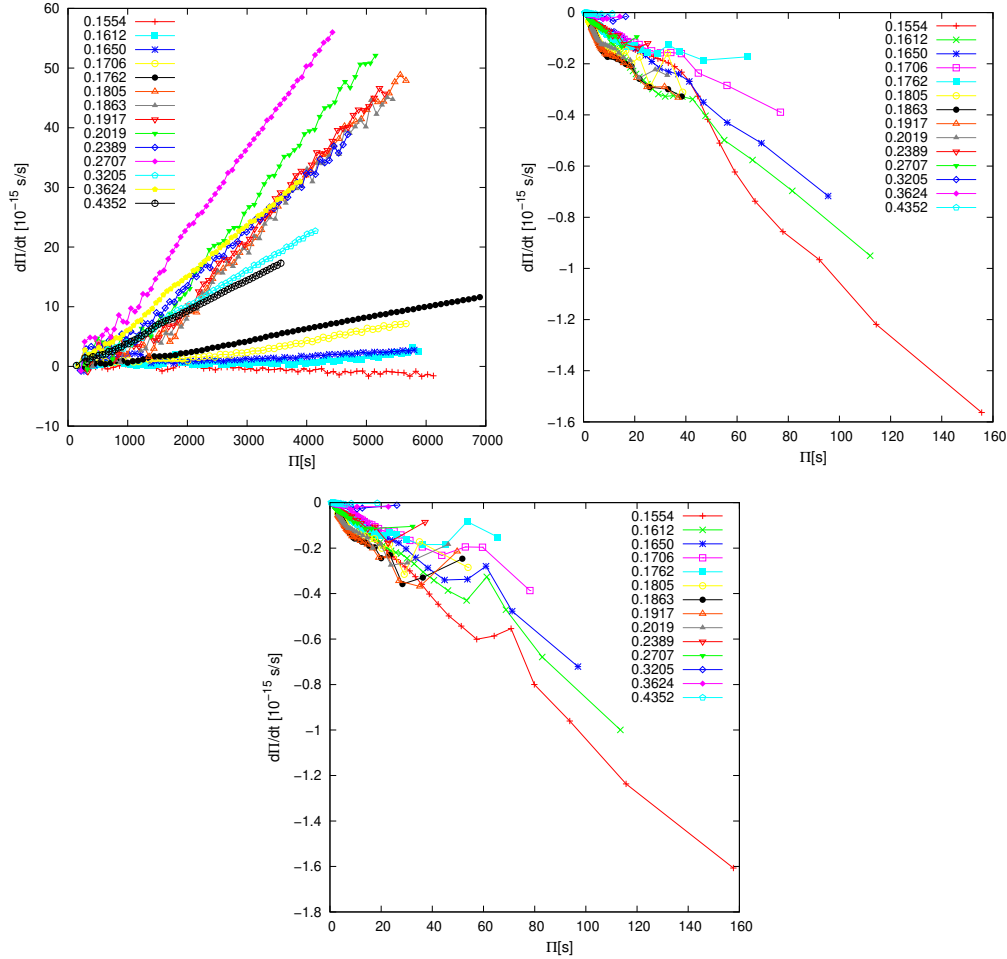


Figura 3.2: *Panel superior izquierdo*: Tasas de cambio de períodos de modos g con $\ell = 1$ contra los períodos de pulsación correspondientes a modelos de enanas blancas caracterizadas por $T_{\text{eff}} \sim 9000$ K y distintas masas estelares ($0.1554 \leq M_\star/M_\odot \leq 0.4352$). *Panel superior derecho*: Igual que para el panel superior izquierdo, pero para modos p con $\ell = 1$. *Panel inferior*: Igual que para el panel superior izquierdo, pero para modos radiales ($\ell = 0$).

tasas de cambio de períodos son, de forma general, mayores para masas estelares menores (a $T_{\text{eff}} \sim 9000$ K) y además, todos los valores de $\dot{\Pi}$ son positivos. Recordemos que, para este conjunto de modelos, los modos g son muy sensibles al gradiente de composición química (Córscico & Althaus 2014a). El hecho de que $\dot{\Pi} > 0$ implica que las tasas de cambio de períodos en modelos con $M_\star \gtrsim 0.18 M_\odot$ están dominadas por el enfriamiento (primer término en la Ecuación (3.1)). Las tasas de cambio de períodos para este conjunto de modelos varía entre $\sim 10^{-15}$ s/s para los períodos más cortos² de modos g hasta unos $\sim 7 \times 10^{-14}$ s/s para $\Pi \sim 6000$ s.

Los valores de $\dot{\Pi}$ para el grupo de modelos con $M_\star \lesssim 0.18 M_\odot$, por otro lado, son menores a $\sim 10^{-14}$ s/s, y son de hecho sustancialmente menores que para el primer grupo

²Notamos que el valor de $\dot{\Pi}$ para algunos modos de bajo orden es muy cercano a cero, o más aún, negativos.

de modelos. Esto se debe a que, para modelos con masas estelares menores al umbral de masa de $\sim 0.18 M_{\odot}$, la evolución está dominada por quema nuclear. Como resultado, el enfriamiento de la enana blanca se ve marcadamente demorado, de tal forma que las tasas de cambio de períodos son menores en magnitud en comparación con el caso en que la quema nuclear es despreciable ($M_{\star} \gtrsim 0.18 M_{\odot}$). Los modos g en este rango de masas sondan principalmente las regiones del núcleo (Córscico & Althaus 2014a), como hemos mencionado en el Capítulo anterior. Los valores de $\dot{\Pi}$ para modelos con $M_{\star} \lesssim 0.18 M_{\odot}$ son más bajos para masa estelar menor, como puede verse en el panel superior izquierdo de la Figura 3.2. Esta tendencia es opuesta a la predicha por la fórmula simple de Kawaler et al. (1986) (ver arriba). El hecho de que en este rango de masas ($0.15 \lesssim M_{\star}/M_{\odot} \lesssim 0.18$) los modelos menos masivos estén caracterizados por valores inferiores de $\dot{\Pi}$ es debido a que estos tienen quema nuclear más intensa, lo cual implica escalas de tiempo de enfriamiento mayores. En este contexto, se espera que el primer término en la Ecuación (3.1) (enfriamiento) para estas secuencias sea pequeño, y que el segundo término (contracción gravitacional) sea elevado, en comparación con el caso de las secuencias de enanas blancas más masivas ($M_{\star} \gtrsim 0.18 M_{\odot}$). Esto es precisamente lo que encontramos al examinar la evolución del radio estelar en nuestras secuencias evolutivas. Cabe destacar que para el modelo menos masivo ($M_{\star} = 0.1554 M_{\odot}$), la mayoría de los valores de $\dot{\Pi}$ son negativos. Esto significa que los períodos de pulsación de modos g para este modelo generalmente se acortan mientras se enfría la enana blanca. Este hallazgo puede entenderse al advertirse que, para esta secuencia de enana blanca, la contracción gravitacional es tan elevada que el término $\dot{R}_{\star}/R_{\star}$ de la Ecuación (3.1) supera al término \dot{T}/T y así, las tasas de cambio de períodos son negativas.

A continuación, examinemos la tendencia de las tasas de cambio de períodos con los períodos de pulsación para modos p y radiales, correspondientes a los mismos modelos que consideramos como ejemplo (con $T_{\text{eff}} \sim 9000$ K). De acuerdo con los resultados de Córscico & Althaus (2014a), los períodos de modos p y radiales decrecen con T_{eff} decreciente (ver su Figura 19). Entonces, esperamos que los valores de $\dot{\Pi}$ para este tipo de modos sean todos negativos. Esta expectativa es confirmada al examinar el panel superior derecho y el panel inferior de la Figura 3.2. En el caso de modos p , este comportamiento se debe al hecho de que la frecuencia de Lamb (que, según vimos, es la frecuencia crítica de los modos p no radiales) aumenta cuando la temperatura efectiva decrece (Córscico & Althaus 2014a), de modo tal que todo el espectro de frecuencias de modos p se corre hacia frecuencias más altas, y así, a períodos más cortos, mientras se enfría la enana blanca. Los modos radiales exhiben el mismo comportamiento que los modos p . En relación a la dependencia de $\dot{\Pi}$ con la masa estelar, de acuerdo a nuestros resultados numéricos, la magnitud de las tasas de cambio de períodos es mayor para un valor inferior de M_{\star} , como se ve en la Figura 3.2. Notamos que, en este caso, no hay una diferencia obvia en el comportamiento de $\dot{\Pi}$ entre los modelos con quema nuclear intensa ($M_{\star} \lesssim 0.18 M_{\odot}$) y los modelos caracterizados por quema nuclear despreciable ($M_{\star} \gtrsim 0.18 M_{\odot}$). En definitiva, las magnitudes de las tasas de cambio de períodos son menores que $\sim 1.6 \times 10^{-15}$ s/s para el rango de períodos de modos radiales y p analizados. Estos valores de $\dot{\Pi}$ son un orden de magnitud menores a aquellos de los modos g y, entonces, sería muy difícil de medir en el caso eventual en el que se detectaran modos p y/o radiales en enanas blancas de baja masa. Vale la pena mencionar que Hermes et al. (2013c) han encontrado períodos cortos ($\sim 100 - 140$ s) en la curva de luz de la estrella ELMV SDSS J111215.82+111745.0, que podrían estar asociados

a modos p , o incluso radiales, sin embargo estas observaciones necesitan confirmación.

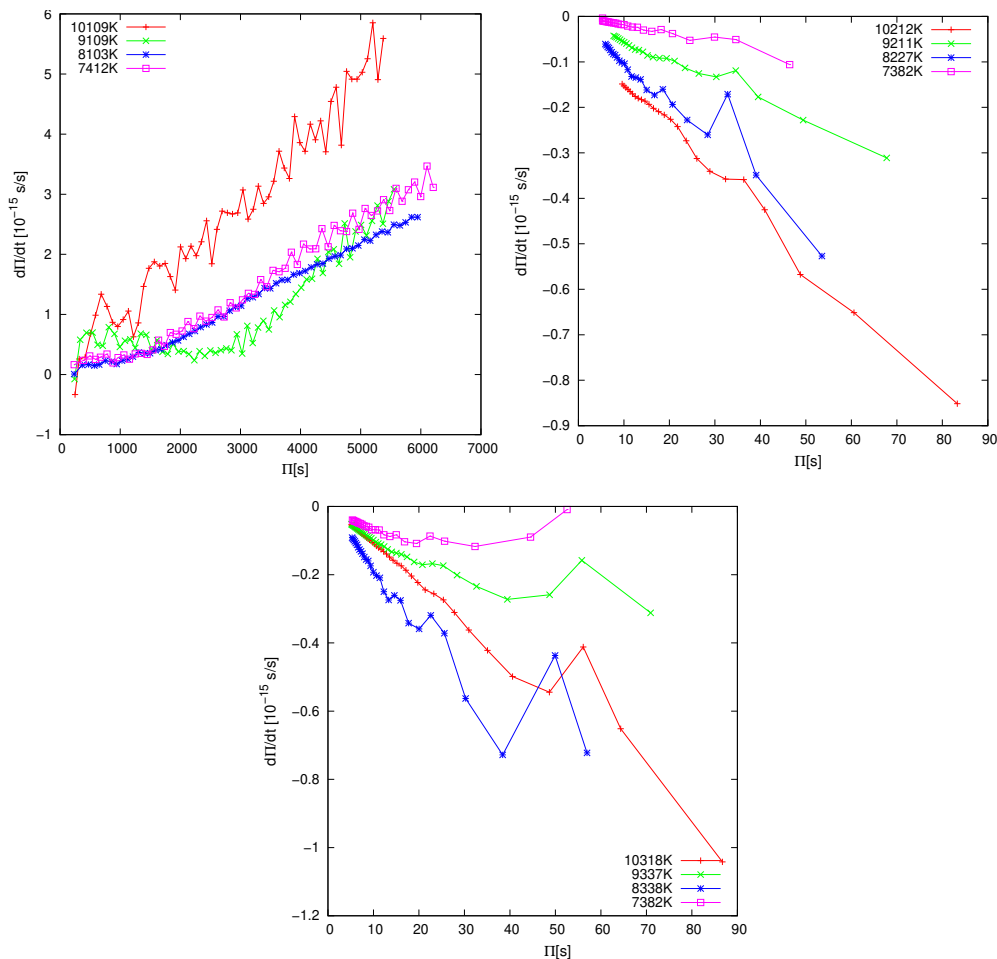


Figura 3.3: *Panel superior izquierdo*: Tasas de cambio de períodos de modos g con $\ell = 1$ contra los períodos de pulsación, correspondientes a modelos de enanas blancas caracterizadas por $M_{\star} = 0.1762 M_{\odot}$ y distintas temperaturas efectivas. *Panel superior derecho*: Igual que para el panel superior izquierdo, pero para modos p con $\ell = 1$. *Panel inferior*: Igual que para el panel superior izquierdo, pero para modos radiales ($\ell = 0$).

Seguidamente, analizaremos el comportamiento de $\dot{\Pi}$ con la temperatura efectiva para valores fijos de la masa estelar. En particular, en los paneles superiores izquierdos de las Figuras 3.3 y 3.4 mostramos la tasa de cambio de períodos de modos g (con $\ell = 1$) contra los períodos de pulsación, correspondientes a modelos seleccionados de enanas blancas caracterizados por $M_{\star} = 0.1762 M_{\odot}$ y $M_{\star} = 0.1863 M_{\odot}$, respectivamente, a distintas temperaturas efectivas. El panel superior derecho y el panel inferior de la misma Figura corresponden a períodos de modos p y radiales, respectivamente. La ubicación de los modelos seleccionados en el plano $T_{\text{eff}} - \log g$ se indica en la Figura 3.1 con símbolos triangulares grises en los tracks evolutivos pertinentes. Primero, nos enfocamos en los resultados para modos g de la secuencia con $0.1762 M_{\odot}$ a $T_{\text{eff}} \sim 10\,100, 9\,100, 8\,100$ y $7\,400$ K (panel superior izquierdo de la Figura 3.3). A diferencia de lo que podría esperarse,

los valores de $\dot{\Pi}$ no varían monótonamente con la temperatura efectiva, al menos para períodos largos ($\gtrsim 1500$ s). De hecho, $\dot{\Pi}$ primero decrece de $T_{\text{eff}} \sim 10100$ K a $T_{\text{eff}} \sim 9100$ K, y luego crece para T_{eff} inferiores. Las tasas de cambio de períodos son todas positivas para el rango completo de temperaturas efectivas considerado, excepto en el caso del modo g con $k = 1$, que tiene $\dot{\Pi} < 0$ para el modelo seleccionado más caliente. Para esta secuencia de modelos y para el rango completo de T_{eff} , encontramos que $\dot{\Pi} \lesssim 6 \times 10^{-15}$ s/s. Para modos p y radiales, las tasas de cambio de períodos son todas negativas, y sus valores absolutos son tales que $\dot{\Pi} \lesssim 9 \times 10^{-16}$ s/s (panel superior derecho y panel inferior de la Figura 3.3). De forma similar a lo que ocurre para modos g , para modos radiales y p la magnitud de las tasas de cambio de períodos no cambian de forma monótona con T_{eff} aunque, en promedio, $|\dot{\Pi}|$ decrece con temperatura efectiva decreciente.

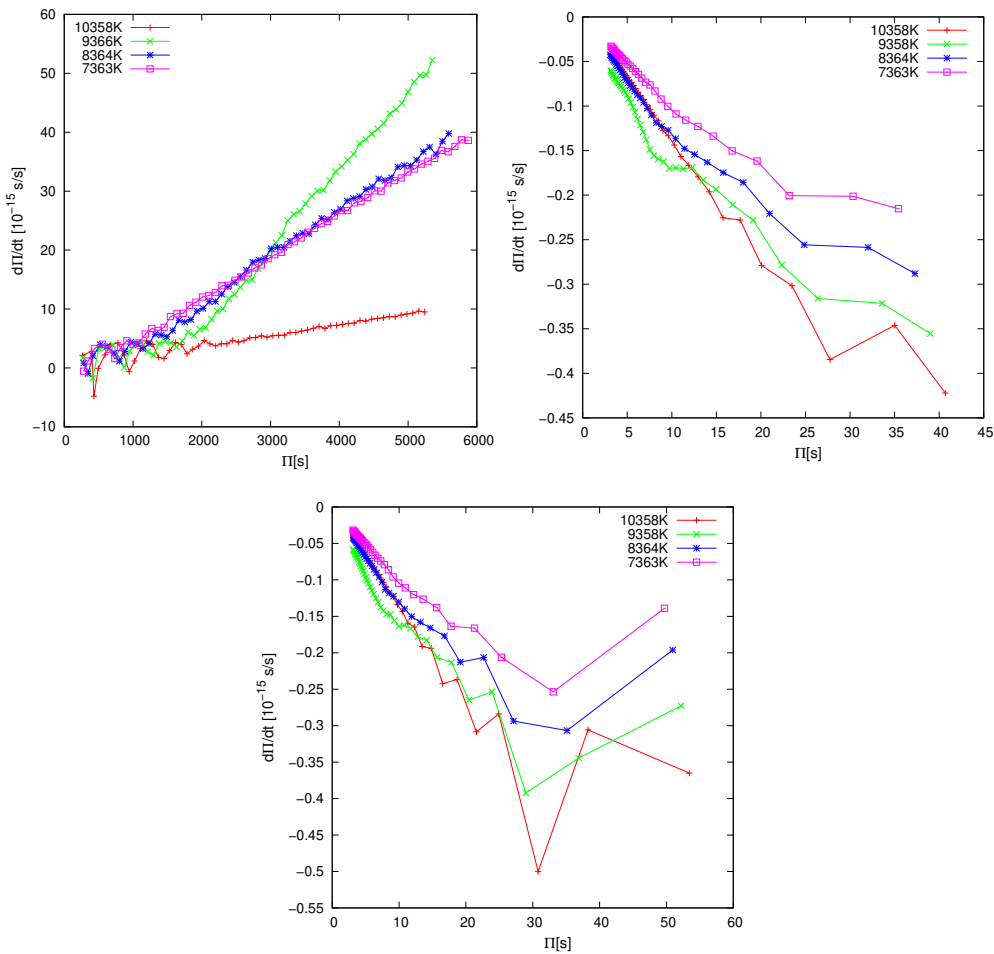


Figura 3.4: *Panel superior izquierdo:* Tasas de cambio de períodos de modos g con $\ell = 1$ contra los períodos de pulsación, correspondientes a modelos de enana blanca caracterizados por $M_{\star} = 0.1863 M_{\odot}$ y distintas temperaturas efectivas. *Panel superior derecho:* Igual que para el panel superior izquierdo, pero para modos p con $\ell = 1$. *Panel inferior:* Igual que para el panel superior izquierdo, pero para modos radiales ($\ell = 0$).

El comportamiento de $\dot{\Pi}$ vs Π encontrado para los modelos con $M_{\star} = 0.1863 M_{\odot}$,

como puede verse en la Figura 3.4, es cualitativamente similar al descrito para modelos con $M_\star = 0.1762 M_\odot$. La única diferencia relevante es que la magnitud de la tasa de cambio de períodos para modos g (panel superior izquierdo) es notablemente mayor que para $M_\star = 0.1762 M_\odot$. Esto es de esperarse porque, como ya mencionamos, los modelos con $M_\star \gtrsim 0.18 M_\odot$ no experimentan quema nuclear apreciable y evolucionan mucho más rápidamente que aquellos modelos con $M_\star \lesssim 0.18 M_\odot$. Por otro lado, los valores de $|\dot{\Pi}|$ para modos p y radiales para los modelos con $M_\star = 0.1863 M_\odot$ son más pequeños (alrededor de la mitad) que aquellos correspondientes a modelos con $M_\star = 0.1762 M_\odot$. De acuerdo a nuestros resultados, para $M_\star = 0.1863 M_\odot$, $\dot{\Pi} \lesssim 6 \times 10^{-14}$ s/s para modos g , y $|\dot{\Pi}| \lesssim 5 \times 10^{-16}$ s/s para modos p y radiales (Figura 3.4) en el rango de períodos considerado ($\Pi \lesssim 6000$ s).

Cerramos esta Sección considerando la tasa teórica de cambio de períodos máxima que se espera en ELMVs para el intervalo completo de temperaturas efectivas y de masas consideradas en este trabajo. Representamos en la Figura 3.5 el valor absoluto de la tasa teórica de cambio de períodos máxima ($|\dot{\Pi}|_{\max}$) en términos de M_\star , para modos g con $\ell = 1$ (panel superior izquierdo), modos p con $\ell = 1$ (panel superior derecho) y modos radiales (panel inferior), para valores seleccionados del orden radial k , cubriendo el rango de períodos observado en estrellas ELMVs. Para el caso de modos g , hay una clara distinción en la magnitud de $|\dot{\Pi}|_{\max}$ dependiendo de si $M_\star \gtrsim 0.18 M_\odot$ o $M_\star \lesssim 0.18 M_\odot$. En efecto, esperamos medir valores considerablemente mayores de $\dot{\Pi}$ (hasta 8×10^{-14} s/s) en enanas blancas con $M_\star \gtrsim 0.18 M_\odot$, que en aquellas con $M_\star \lesssim 0.18 M_\odot$ (en cuyo caso $\dot{\Pi} \sim 8 \times 10^{-15}$ s/s, a lo sumo). En la Tabla 3.1 mostramos el valor absoluto máximo de las tasas de cambio de períodos de modos g , para ciertos valores seleccionados del orden radial k correspondiente a cada masa estelar considerada en este trabajo (panel superior izquierdo de la Figura 3.5). Para el caso de modos p y radiales (panel superior derecho y panel inferior de la Figura 3.5), nuestros modelos predicen magnitudes de las tasas de cambio de períodos mucho más pequeñas, hasta $\sim 8 \times 10^{-15}$ s/s, correspondiente a los modos de más bajo orden y a las enanas blancas menos masivas ($M_\star \sim 0.15 M_\odot$). Notamos que este rango de $\dot{\Pi}$ es similar al de los modos g para $M_\star \lesssim 0.18 M_\odot$, aunque para modos p y radiales se espera que $\dot{\Pi} < 0$, para todos los modos.

3.2.2. Fase pre-enana blanca: pre-ELMVs

En esta Sección nos concentramos en determinar las tasas teóricas de cambio de períodos para modelos estelares en estados evolutivos previos a la etapa de enana blanca, es decir, antes de que las estrellas alcancen el máximo de temperatura efectiva al comienzo de la primera rama de enfriamiento. Como se describe en Althaus et al. (2013) (y como comentamos en la Sección 2.3), los modelos con masas por encima de $\sim 0.18 M_\odot$ experimentan múltiples flashes de CNO después de la etapa de pre-enana blanca y antes de entrar en sus tracks de enfriamiento finales. Las propiedades no adiabáticas de las estrellas pre-enanas blancas de baja masa pulsantes (pre-ELMVs), han sido exploradas extensamente en Córscico et al. (2016a); Gianninas et al. (2016); Istrate et al. (2016a). En la Figura 3.6 presentamos un diagrama $T_{\text{eff}} - \log g$ con los tracks evolutivos de pre-enanas blancas de baja masa con núcleo de He (líneas negras punteadas finas) sin difusión de elementos. Hemos elegido explorar el caso en que la difusión de elementos no opera, debido a que los estudios no adiabáticos recientes indican que para que las pulsaciones

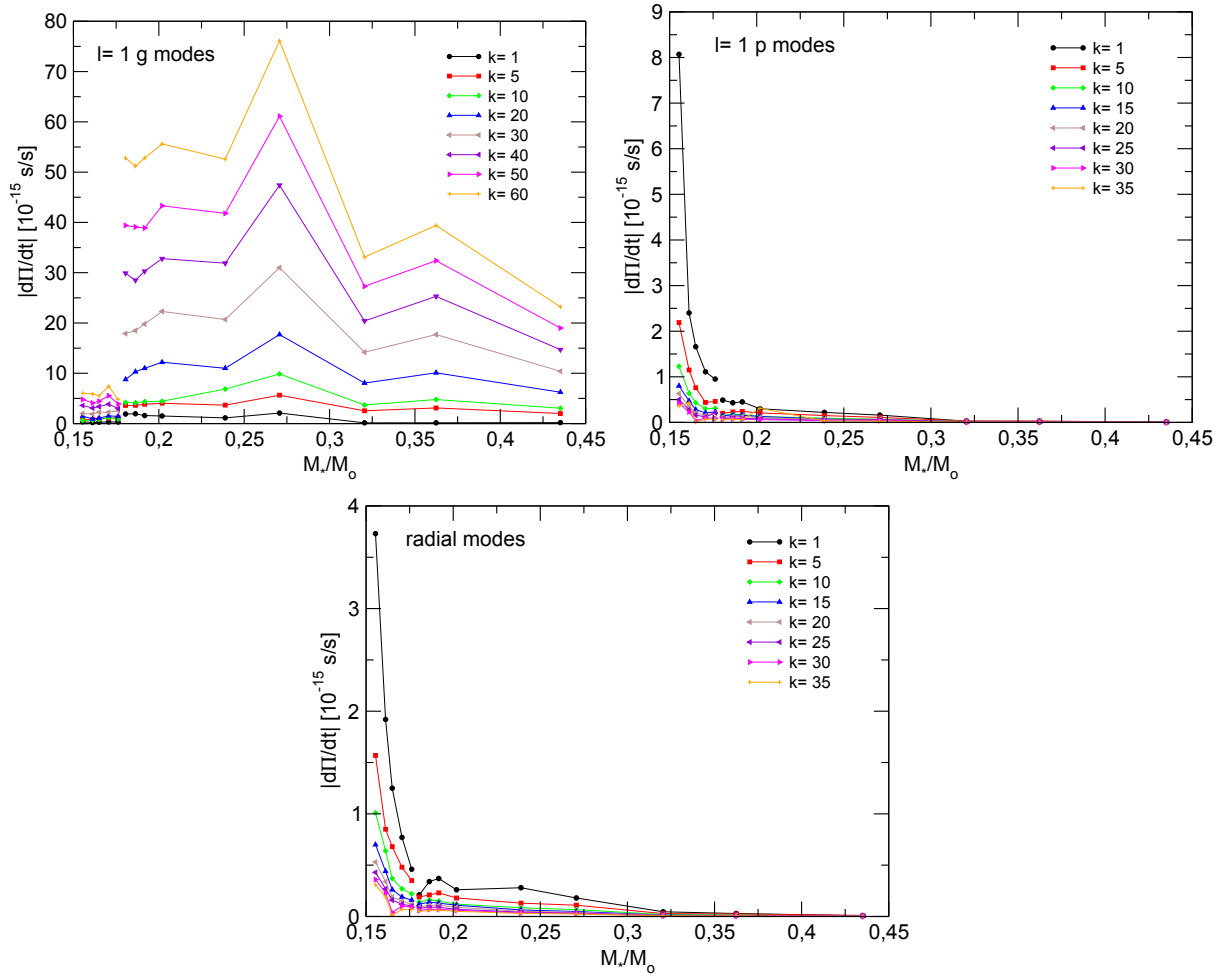


Figura 3.5: *Panel superior izquierdo*: Valor absoluto de la tasa máxima de cambio de períodos en términos de la masa estelar, correspondiente a modos g con $\ell = 1$, para órdenes radiales k seleccionados, para modelos de enana blanca con $8000 \lesssim T_{\text{eff}} \lesssim 10000$ K. *Panel superior derecho*: Igual que para el panel superior izquierdo, pero para modos p con $\ell = 1$. *Panel inferior*: Igual que para el panel superior izquierdo, pero para modos radiales ($\ell = 0$).

de las estrellas pre-ELMVs sean excitadas por el mecanismo κ actuando en la zona de la segunda ionización parcial del He es necesario que haya abundancias de He apreciables en la zona de excitación, lo cual demanda que la difusión de elementos no actúe o su efecto se vea fuertemente disminuido (Córscico et al. 2016a). Los cálculos exploratorios en los que la difusión de elementos es considerada, no muestran diferencias sustanciales en los valores de $\dot{\Pi}$ reportados en este trabajo. Con fines ilustrativos, mostramos la ubicación de las pre-ELMVs conocidas hasta el momento (tanto confirmadas como no, Maxted et al. 2013, 2014; Corti et al. 2016; Gianninas et al. 2016; Zhang et al. 2016), y de aquellas estrellas para las cuales no se ha observado variación. En particular, los cuadrados y triángulos grises indican la ubicación de los modelos seleccionados que serán analizados debajo.

La frecuencia de Brunt-Väisälä en las regiones internas de nuestros modelos de pre-

Tabla 3.1: Valor absoluto del límite superior de las tasas teóricas de cambio de períodos, $|\dot{\Pi}_{\max}|$ (en unidades de 10^{-15} s/s), de modos g seleccionados con $\ell = 1$, correspondientes a modelos de enanas blancas de baja masa con temperatura efectiva en el rango $8\,000 \lesssim T_{\text{eff}} \lesssim 10\,000$ K. Una representación gráfica de estos valores se muestra en el panel izquierdo de la Figura 3.5.

M_{\star}/M_{\odot}	$k = 1$	$k = 5$	$k = 10$	$k = 20$	$k = 30$	$k = 40$	$k = 50$	$k = 60$
0.1554	0.35	0.75	0.63	1.50	2.00	3.60	4.80	6.05
0.1612	0.20	0.85	0.69	0.91	1.90	3.10	4.10	5.90
0.1650	0.28	0.93	0.81	1.08	2.27	3.39	4.45	5.52
0.1706	0.32	1.07	1.18	1.54	2.25	3.85	5.56	7.42
0.1762	0.30	1.17	0.88	1.43	2.58	3.00	3.90	4.82
0.1805	1.90	3.61	4.20	8.77	17.9	29.9	39.4	52.8
0.1863	1.95	3.63	4.14	10.3	18.5	28.5	39.1	51.2
0.1917	1.60	3.84	4.37	11.0	19.8	30.3	38.9	52.8
0.2019	1.51	4.05	4.45	12.2	22.3	32.8	43.3	55.6
0.2389	1.13	3.67	6.87	11.0	20.7	31.9	41.8	52.6
0.2707	2.10	5.65	9.86	17.7	31.0	47.4	61.1	76.1
0.3205	0.15	2.55	3.70	8.06	14.2	20.4	27.3	33.1
0.3624	0.16	3.11	4.78	10.1	17.7	25.3	32.4	39.4
0.4352	0.19	2.00	3.05	6.24	10.4	14.7	19.0	23.2

enana blanca de baja masa adopta valores muy altos (ver las Figuras 2 y 3 de Córscico et al. 2016a). Como consecuencia, para estos modelos hay un rango considerable de frecuencias intermedias para las cuales los modos se comportan como g en las partes interiores de la estrella y como modos p en las partes exteriores. Una situación similar se encuentra para modelos de pre-enanas blancas deficientes en H representativos de las estrellas GW Vir, antes del codo evolutivo (Córscico & Althaus 2006). Estos modos de frecuencia intermedia, que son conocidos como *mixed modes* $p - g$ (Scuflaire 1974; Osaki 1975; Aizenman et al. 1977), están caracterizados por períodos de pulsación entre los períodos cortos de modos p puros y los períodos largos de los modos g . Los *mixed modes* y el fenómeno asociado de *avoided crossing*, en el cual los períodos se aproximan mucho entre sí pero sin realmente cruzarse (Aizenman et al. 1977; Christensen-Dalsgaard 1981), han sido investigados extensamente en el contexto de subgigantes y gigantes rojas pulsantes (ver, por ejemplo, Christensen-Dalsgaard & Houdek 2010; Deheuvels & Michel 2010). En la Figura 3.7 mostramos los períodos de pulsación de modos no radiales p , g y los *mixed modes* $p - g$ con $\ell = 1$, como función de T_{eff} para modelos de pre-enana blanca de baja masa con núcleo de He, caracterizados por $M_{\star} = 0.1762 M_{\odot}$. La evolución temporal procede desde temperaturas efectivas bajas a altas, es decir, de derecha a izquierda en el gráfico. Notamos que todos los períodos de pulsación decrecen con T_{eff} creciente. Como el primer término en la Ecuación (3.1) es negativo y como los modelos se están contrayendo mientras evolucionan hacia temperaturas efectivas superiores (ver Figura 3.6), las tasas de cambio de períodos $\dot{\Pi}$ resultan negativas para todos los modos de pulsación. La existencia de múltiples *avoi-*

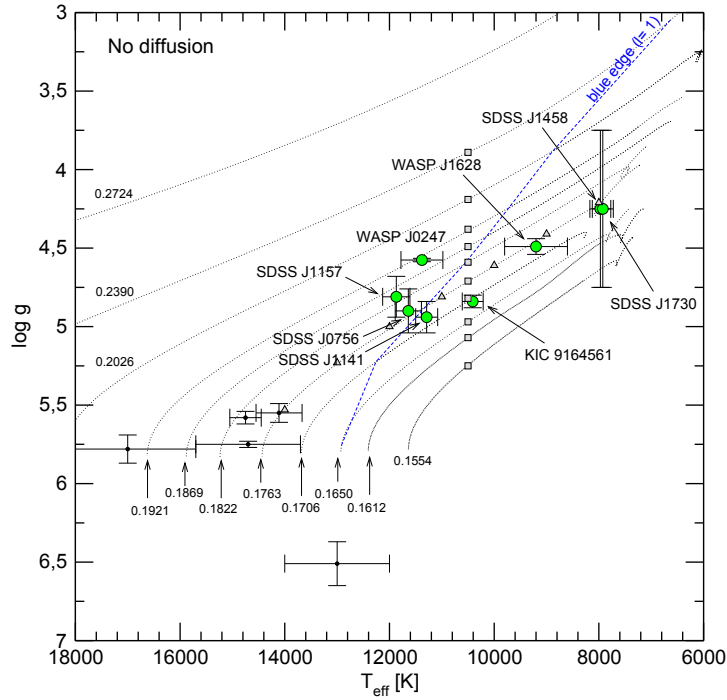


Figura 3.6: Diagrama $T_{\text{eff}} - \log g$ mostrando nuestros tracks evolutivos de pre-enana blanca de baja masa con núcleo de He (líneas negras punteadas finas) computadas despreciando la difusión de elementos. Los números corresponden a la masa estelar de cada secuencia (en masas solares). Los círculos verdes con barras de error corresponden a las estrellas pre-ELMVs conocidas (confirmadas y no, Maxted et al. 2013, 2014; Corti et al. 2016; Gianninas et al. 2016; Zhang et al. 2016), y los círculos negros pequeños representan la ubicación de las pre-ELM (no variables) observadas en el campo de la misión *Kepler* (Rappaport et al. 2015; van Kerkwijk et al. 2010; Carter et al. 2011; Breton et al. 2012). La línea punteada azul indica el borde azul del dipolo no radial ($\ell = 1$) del dominio de inestabilidad de las pre-ELMVs debido al mecanismo $\kappa - \gamma$ actuando en la región de ionización parcial de $\text{He}^+ - \text{He}^{++}$, según Córscico et al. (2016a). Los cuadrados y triángulos grises en los tracks marcan la ubicación de los modelos analizados en el texto.

ded crossings es evidente de la Figura 3.7³. El principal efecto del *avoided crossing* es que mientras los períodos se aproximan, estos cambian fuertemente en magnitud de modo tal que esperaríamos que $\dot{\Pi}$ muestre cambios pronunciados durante un *avoided crossing*. En la Figura 3.8 mostramos las tasas de cambio de períodos como función de los períodos de modos con $\ell = 1$, para un modelo de pre-enana blanca con $0.1762 M_{\odot}$ con $T_{\text{eff}} = 11\,000$ K. Los modos involucrados en *avoided crossings* están señalados con puntos rojos. Es claro que algunos mixed modes $p - g$, que participan en *avoided crossings*, exhiben valores mayores (en módulo) que los modos p y g puros que no participan de estos.

Ahora veamos brevemente la dependencia de los valores de $\dot{\Pi}$ con la masa estelar y la temperatura efectiva para nuestros modelos de pre-enana blanca de baja masa. Como ya hemos mencionado, el conjunto completo de modos de pulsación radiales y no radiales

³En el caso de modos radiales, lo cual no es mostrado, no se encuentran *avoided crossings*.

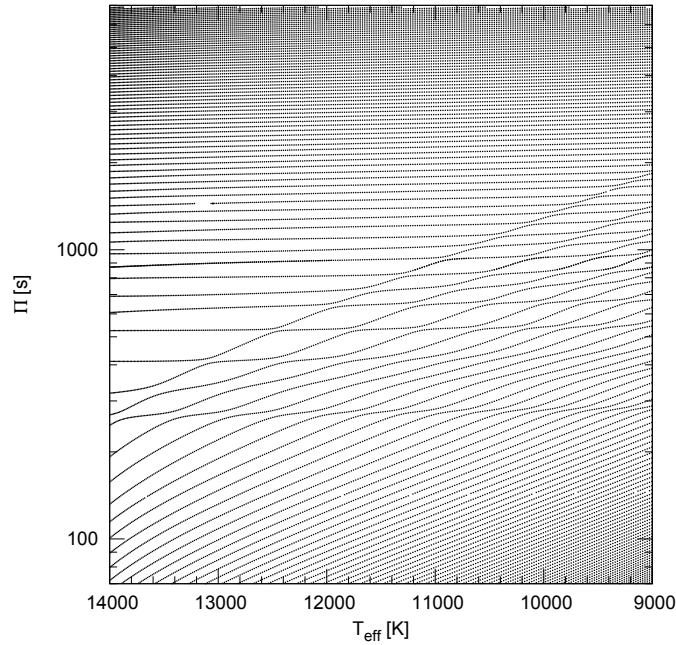


Figura 3.7: Evolución de los períodos de pulsación de modos p , g y mixed modes $p - g$ con $\ell = 1$, desde valores bajos hacia valores altos de T_{eff} , para modelos de pre-enanas blancas con $M_{\star} = 0.1762 M_{\odot}$. Notamos los múltiples *avoided crossings* experimentados para los modos con períodos en el rango 250 – 2 000 s.

considerado para todos nuestros modelos de pre-enanas blancas está caracterizado por valores negativos de las tasas de cambio de períodos. En el panel izquierdo de la Figura 3.9 representamos la tasa de cambio de períodos como una función de los períodos de pulsación de modos g , p , y mixed modes $p - g$, correspondientes a modelos de pre-enanas blancas de baja masa con $T_{\text{eff}} \sim 10500$ K y $0.1554 \leq M_{\star}/M_{\odot} \leq 0.2390$, mientras que en el panel derecho mostramos los resultados para modos radiales. Nuestros cálculos indican que la magnitud de la tasa de cambio de períodos es mayor cuando la masa estelar es mayor. Específicamente, para modos no radiales, $|\dot{\Pi}|$ puede tomar un valor tan alto como $\sim 1.75 \times 10^{-12}$ s/s para el modelo con $M_{\star} = 0.2390 M_{\odot}$. En comparación con los valores máximos de $\dot{\Pi}$ predichos para estrellas ELMV (Figura 3.5 y Tabla 3.1), la magnitud de la tasa de cambio de períodos para modos no radiales en el caso de estrellas pre-ELMV es aproximadamente unas 20 veces superior. En el caso de modos radiales, por otro lado, la tasa de cambio de períodos para pre-ELMVs (panel derecho de la Figura 3.9) resulta alrededor de unos 3 – 4 órdenes de magnitud mayor que para ELMVs (panel derecho de la Figura 3.5).

En la Figura 3.10 mostramos los valores de $\dot{\Pi}$ en términos de Π para modos g , p , y mixed modes $p - g$ con $\ell = 1$ (panel izquierdo), correspondientes a modelos de pre-enana blanca de baja masa caracterizados por una masa estelar de $M_{\star} = 0.1762 M_{\odot}$ y diferentes valores de temperatura efectiva ($8000 \lesssim T_{\text{eff}} \lesssim 14000$ K). El panel derecho corresponde a modos radiales. La magnitud de la tasa de cambio de períodos para modos no radiales es mayor para valores menores de la temperatura efectiva. Es interesante notar que para el

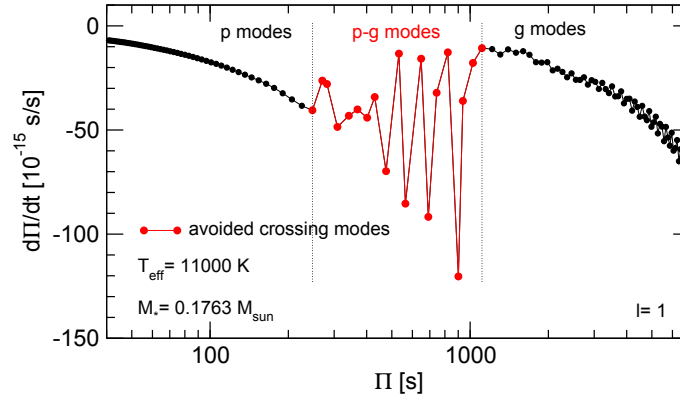


Figura 3.8: $\dot{\Pi}$ contra Π de modos con $\ell = 1$ para un modelo de pre-enana blanca con $0.1762M_{\odot}$ y $T_{\text{eff}} = 11\,000$ K. Los mixed modes $p - g$ que participan en *avoided crossings* están señalados con puntos rojos.

caso de modos radiales se da la situación contraria.

Concluimos esta Sección notando que, en general, las tasas de cambio de períodos (tanto para modos radiales como no radiales) esperadas para estrellas pre-ELMV resulta considerablemente mayor ($\sim 1\,000 - 10\,000$ veces) que para estrellas ELMV. En la práctica, esto indica que sería más factible la medición de $\dot{\Pi}$ para pre-ELMVs que para ELMVs.

3.2.3. Etapas previas a los flashes de CNO ($M_{\star} \gtrsim 0.18 M_{\odot}$)

Habiendo explorado en detalle las propiedades teóricas esperadas de la tasa de cambio de períodos para estrellas ELMV y pre-ELMV, ahora nos enfocamos en los valores esperados para modelos estelares en etapas previas a los flashes de CNO, sobre las ramas tempranas de enfriamiento (es decir, estadíos pre-flash). Como ya mencionamos, las etapas previas a la ocurrencia de flashes de CNO están caracterizadas por una evolución relativamente lenta, implicando que hay posibilidades de observar a la estrella mientras atraviesa estas etapas evolutivas (Figura 4 de Althaus et al. 2013). En números, el tiempo que una estrella tarda en evolucionar entre el máximo de T_{eff} y el final del último flash de CNO en el caso de la secuencia con $0.1821 M_{\odot}$ (es decir, la porción coloreada del track en el panel inferior de la Figura 4 de Althaus et al. 2013) es de unos 8×10^7 yr. Es necesario enfatizar que, al momento de escribir este trabajo, no se conoce una enana blanca de masa baja pulsante que pudiera asociarse con la etapa previa a un flash de CNO, de acuerdo con sus valores de T_{eff} y $\log g$. Aún así, creemos que vale la pena explorar cuál debería ser el límite superior de las tasas de cambio de períodos para una estrella en esta etapa evolutiva. En los cálculos de Althaus et al. (2013), solo las secuencias de los modelos con masa en el rango $0.182 - 0.363 M_{\odot}$ experimentan flashes. De este modo, restringimos nuestro análisis a modelos en ese rango de masas. En la Figura 3.11 mostramos los tracks evolutivos de las secuencias con $0.1821 M_{\odot}$ (izquierda) y $0.2724 M_{\odot}$ (derecha) en el diagrama $\log T_{\text{eff}} - \log g$. Los cuadrados grises corresponden a modelos representativos localizados poco antes de que ocurra el último flash de CNO para estas secuencias. Los perfiles químicos y el diagrama de propagación (ver Sección 1.2.3) para los modelos seleccionados se muestran en la Figura 3.12. A diferencia del caso de modelos estelares ubicados en la

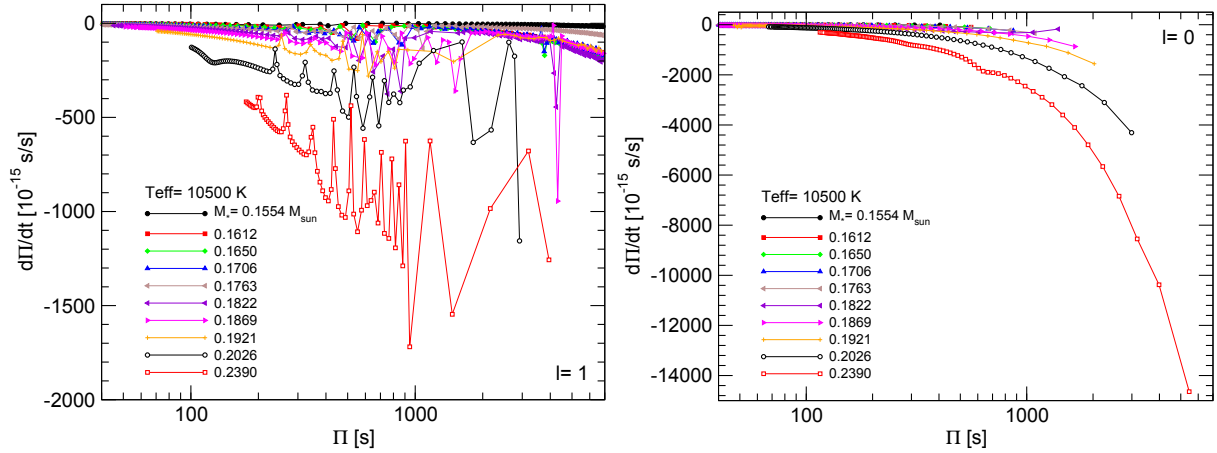


Figura 3.9: *Panel izquierdo:* Tasas de cambio de períodos contra los períodos de pulsación de modos g , p , y mixed modes $p - g$ con $\ell = 1$, correspondientes a modelos de pre-enanas blancas de baja masa con $T_{\text{eff}} \sim 10\,500$ K y diferentes masas estelares ($0.1554 \leq M_\star/M_\odot \leq 0.2390$). *Panel derecho:* Igual que para el panel izquierdo, pero para modos radiales ($\ell = 0$).

etapa de pre-ELMV (Sección 3.2.2), en este caso las regiones de propagación de modos g y p están bien delimitadas, de modo que no hay mixed modes $p - g$, sino solo modos p y g puros.

Las Figuras 3.13 y 3.14 representan las tasas de cambio de períodos en términos de los períodos correspondientes a modelos seleccionados con $M_\star = 0.1821 M_\odot$ y $T_{\text{eff}} = 13\,446$ K, y $M_\star = 0.2724 M_\odot$ y $T_{\text{eff}} = 16\,481$ K, respectivamente. Los paneles superiores izquierdos muestran los resultados para modos g , mientras que los paneles superiores derechos e inferiores muestran los resultados para modos p y radiales, respectivamente. Los valores de $\dot{\Pi}$ para modos g son todos negativos, mientras que para modos p y radiales son todos positivos. Para los tres tipos de modos, la magnitud de $\dot{\Pi}$ aumenta para órdenes radiales mayores. Es interesante notar que la magnitud de $\dot{\Pi}$ para los modos g es considerablemente mayor a la de los modos p y radiales. En particular, para el rango de períodos considerado en este trabajo ($\Pi \lesssim 7\,000$ s), obtenemos que $|\dot{\Pi}|_{\text{max}} \sim 5 \times 10^{-12}$ s/s para modos g en el caso del modelo con $0.1821 M_\odot$, y $|\dot{\Pi}|_{\text{max}} \sim 2.5 \times 10^{-11}$ s/s para el modelo con $0.2724 M_\odot$. En contraste, en el caso de modos p y radiales, $\dot{\Pi}$ adopta un valor de $\sim 2 \times 10^{-13}$ s/s como máximo.

Concluimos que, si una estrella pulsante estuviese evolucionando en etapas previas al flash de CNO, la tasa de cambio de períodos medida (si pudiese ser medida) sería del orden de unos $10^{-10} - 10^{-11}$ s/s como máximo. Por otro lado, si la tasa de cambio de períodos detectada fuese mayor a estos valores, la estrella estaría evolucionando extremadamente rápido a través de cualquiera de los bucles entre flashes observados en la Figura 3.11 (Althaus et al. 2013). Sin embargo, en ese caso la evolución sería extremadamente rápida y, por lo tanto, la probabilidad de detectar una estrella en esa etapa evolutiva debería ser muy baja.

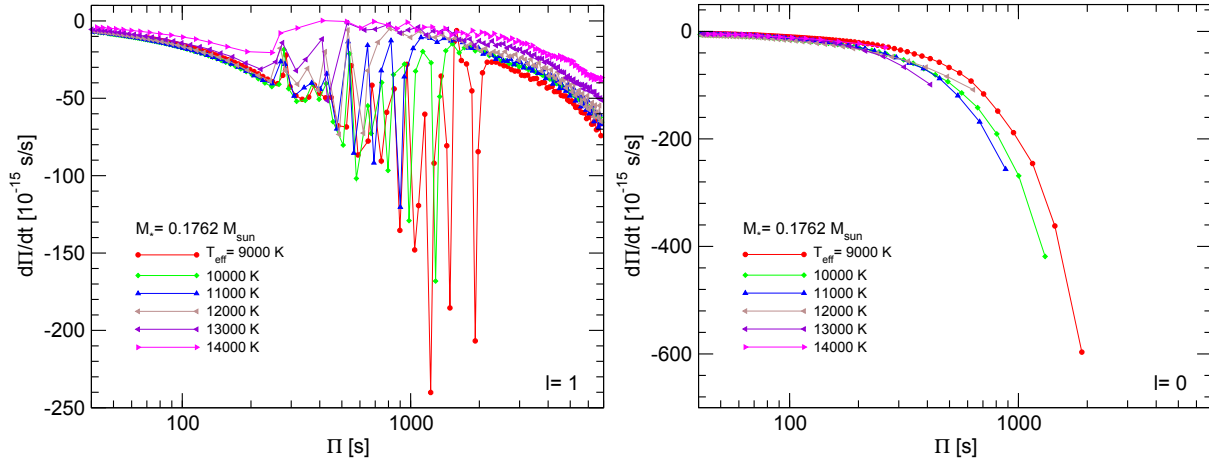


Figura 3.10: *Panel izquierdo*: Tasas de cambio de períodos en términos de los períodos de pulsación de modos g , p y mixed modes $p - g$ con $\ell = 1$, correspondientes a modelos de pre-enana blanca de baja masa caracterizados por una masa estelar de $M_{\star} = 0.1762 M_{\odot}$ y diferentes temperaturas efectivas. *Panel derecho*: Igual que para el panel izquierdo, pero para modos radiales ($\ell = 0$).

3.3. Conclusiones

En este trabajo hemos presentado por primera vez una estimación detallada de la tasa teórica de cambio de períodos de estrellas ELMV y pre-ELMV. Específicamente, hemos computado las tasas de cambio de períodos para modos no radiales g y p dipolares ($\ell = 1$) y radiales ($\ell = 0$). Hemos considerado períodos hasta ~ 7000 s, cubriendo así el rango de períodos detectado en las estrellas enanas blancas pulsantes de baja masa conocidas. Hemos considerado las etapas evolutivas en las ramas finales de enfriamiento (fase de enana blanca), fases evolutivas previas a la ocurrencia de flashes de CNO sobre las ramas de enfriamiento tempranas (etapas pre-flash), y las etapas a luminosidad constante posteriores a la finalización del desbordamiento del lóbulo de Roche (fase de pre-enana blanca). El estudio está basado en los modelos evolutivos de enanas blancas de baja masa con núcleo de He de Althaus et al. (2013).

En la Tabla 3.2 sintetizamos nuestros resultados principales con respecto al *máximo*⁴ valor de $\dot{\Pi}$ (en valor absoluto) que se espera para los diferentes tipos de modos (no radiales g y p y radiales) para estrellas en las distintas etapas evolutivas consideradas. También incluimos el signo de la tasa de cambio de períodos para cada caso. Encontramos que, en general, la magnitud teórica esperada de la tasa de cambio de períodos de modos g puros para pre-ELMVs ($\sim 3 \times 10^{-13}$) es mayor que para ELMVs ($\sim 8 \times 10^{-14}$). Notamos que, para pre-ELMVs, el valor máximo de la tasa de cambio de períodos ($\sim 5 \times 10^{-12}$) está asociado a mixed modes $p - g$ involucrados en *avoided crossings*. A su vez, los valores de $\dot{\Pi}$ de modos g para modelos evolucionando poco antes de la ocurrencia de los flashes de

⁴Es decir, considerando los valores máximos posibles de $|\dot{\Pi}|$, no solo para los modelos específicos analizados en Secciones previas, sino globalmente para modelos estelares con todas las masas y temperaturas efectivas consideradas en este trabajo.

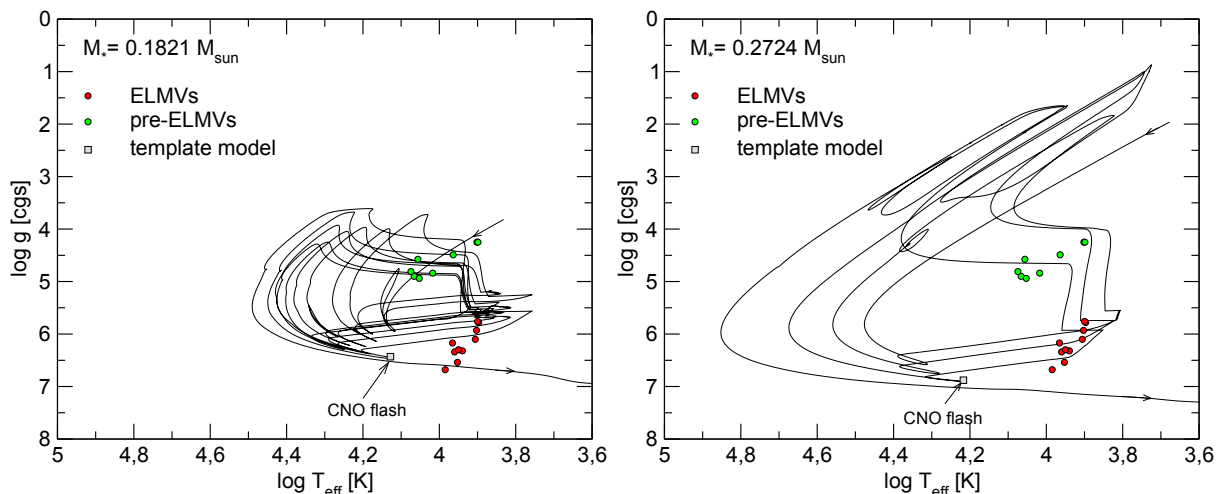


Figura 3.11: *Panel izquierdo*: Track evolutivo de la secuencia con $0.1821 M_{\odot}$ en el diagrama $\log T_{\text{eff}} - \log g$. Los círculos rojos (verdes) marcan la ubicación de las estrellas ELMVs conocidas (pre-ELMVs). El cuadrado gris corresponde a un modelo seleccionado localizado poco antes de que ocurra el último flash de CNO. Las flechas en el track indican el sentido de la evolución temporal. *Panel derecho*: Igual que para el panel izquierdo, pero para la secuencia con $0.2724 M_{\odot}$.

CNO ($\sim 3 \times 10^{-11}$) son mucho mayores que los valores máximos predichos para modos g puros en estrellas pre-ELMV. Si nos enfocamos en los modelos de ELMVs, encontramos que la tasa de cambio de períodos para $M_{\star} \lesssim 0.18 M_{\odot}$ es diez veces más pequeña que para modelos más masivos. En el caso de modos p y radiales, encontramos que los mayores valores absolutos corresponden a modelos de pre-ELMVs, seguidos por los $\dot{\Pi}$ asociados a fases previas a flashes de CNO. Los valores más pequeños de $\dot{\Pi}$ para estas clases de modos corresponden a modelos de ELMVs.

Basados en los valores predichos teóricamente de $\dot{\Pi}$ presentados en este trabajo concluimos que cualquier medición futura de una tasa de cambio de períodos para una dada estrella pre-enana blanca o enana blanca de baja masa pulsante podría arrojar luz sobre su estado evolutivo. En particular, podría ser posible distinguir si una estrella está en su fase de pre-enana blanca, si está evolucionando en etapas previas a un flash de H, o si ya está establecida sobre su etapa de enfriamiento final como enana blanca. Eventualmente, podría ser incluso posible (aunque menos probable) distinguir si una estrella que está en su rama final de enfriamiento tiene una masa extremadamente baja ($M_{\star} \lesssim 0.18 M_{\odot}$). Finalmente, un valor medido de $\dot{\Pi}$ que resulte ser superior a $\sim 10^{-10}$ s/s implicaría que la estrella se encuentra aún evolucionando rápidamente entre flashes de CNO.

Cerramos este trabajo notando que los resultados de Bell et al. (2017a) arrojan cierta duda sobre la clasificación de algunas ELMV en el ELM Survey. Estos autores encuentran que hay una sobreabundancia de estrellas pulsantes con espectros similares a las ELM, a $T_{\text{eff}} \lesssim 9000$ K, que no muestran variaciones de velocidad radial y, entonces, no puede ser confirmado que se encuentran en sistemas binarios como se espera según los canales evolutivos aceptados actualmente para estas estrellas (ver Sección 1.4). Por lo tanto, en vista de las dificultades sistemáticas en las clasificaciones espectrales, una medición del

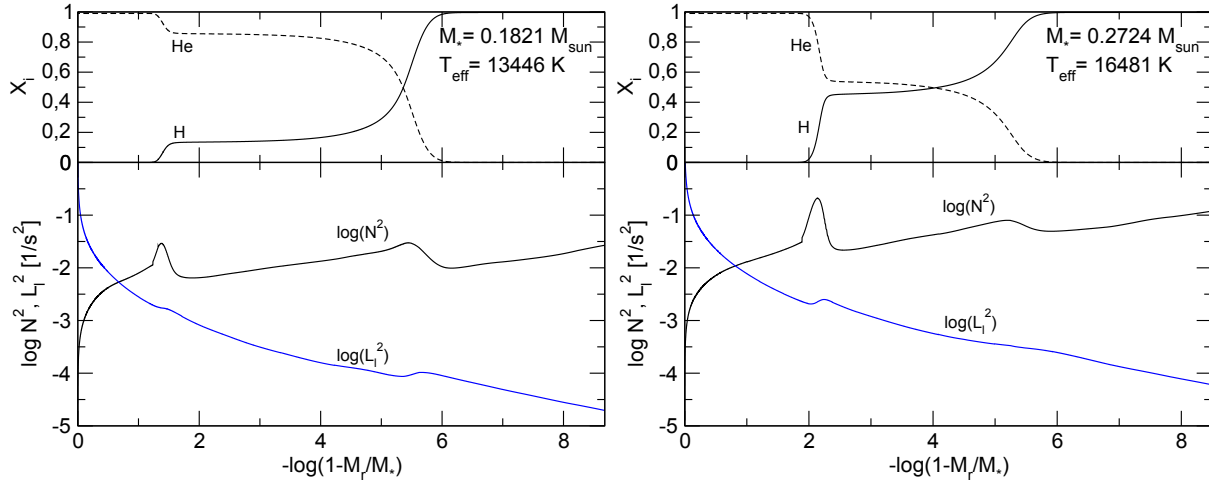


Figura 3.12: *Panel izquierdo:* Abundancias químicas internas de H y He (panel superior) y logaritmo del cuadrado de las frecuencias de Brunt-Väisälä y Lamb (panel inferior) en términos de la coordenada masa ($-\log(1 - M_r/M_\star)$) correspondiente a modelos seleccionados antes del flash de CNO, con $M_\star = 0.1821 M_\odot$ y $T_{\text{eff}} = 13446$ K, cuya ubicación en el diagrama $\log T_{\text{eff}} - \log g$ es indicada en el panel izquierdo de la Figura 3.11. *Panel derecho:* Igual que para el panel izquierdo, pero para el modelo seleccionado previo al flash de CNO, con $0.2724 M_\odot$ y $T_{\text{eff}} = 16481$ K. Su ubicación en el diagrama $\log T_{\text{eff}} - \log g$ es indicada en el panel derecho de la Figura 3.11.

valor de $\dot{\Pi}$ podría ayudar a confirmar que una dada estrella pulsante es una enana blanca genuina. Con las amplias mejoras observacionales en el terreno de las enanas blancas pulsantes, es inminente la medición de $\dot{\Pi}$ para estas estrellas. Cabe mencionar, finalmente, que es posible que se haya podido obtener la primera medición de $\dot{\Pi}$ en estrellas ELMVs, particularmente, para SDSS J151826.68+065813.2 (J. J. Hermes, comunicación privada).

Tabla 3.2: Valor absoluto de la tasa de cambio de períodos máxima esperada, $|\dot{\Pi}_{\text{max}}|$ [s/s], y su signo, para modos no radiales g y p con $\ell = 1$ (y mixed modes $p - g$ en el caso de pre-ELMVs), y para modos radiales ($\ell = 0$) correspondientes a modelos de pre-enanas blancas y enanas blancas de baja masa, así como también para estrellas evolucionando poco antes de los flashes de CNO.

Fase Evolutiva	$ \dot{\Pi}_{\text{max}} $ (g)	$ \dot{\Pi}_{\text{max}} $ ($p-g$)	$ \dot{\Pi}_{\text{max}} $ (p)	$ \dot{\Pi}_{\text{max}} $ (radial)
pre-WD	$\sim 3 \times 10^{-13}$ (< 0)	$\sim 5 \times 10^{-12}$ (< 0)	$\sim 3 \times 10^{-12}$ (< 0)	$\sim 5 \times 10^{-11}$ (< 0)
pre-flashes CNO	$\sim 3 \times 10^{-11}$ (< 0)	...	$\sim 2 \times 10^{-13}$ (> 0)	$\sim 2 \times 10^{-13}$ (> 0)
WD	$\sim 8 \times 10^{-14}$ (> 0)	...	$\sim 8 \times 10^{-15}$ (< 0)	$\sim 3 \times 10^{-15}$ (< 0)

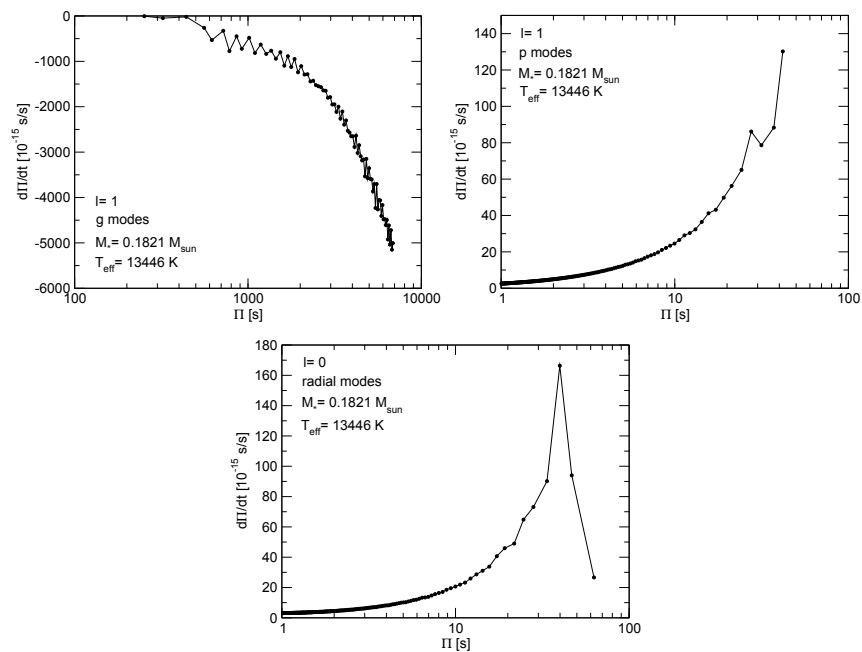


Figura 3.13: *Panel superior izquierdo*: Tasas de cambio de períodos (en unidades de 10^{-15} s/s) de modos g con $\ell = 1$ correspondientes al modelo seleccionado previo al flash de CNO con $M_{\star} = 0.1821 M_{\odot}$ y $T_{\text{eff}} = 13446$ K (ver los paneles izquierdos de la Figura 3.12). *Panel superior derecho*: Igual que para el panel superior izquierdo, pero para modos p con $\ell = 1$. *Panel inferior*: Igual que para el panel superior izquierdo, pero para modos radiales ($\ell = 0$).

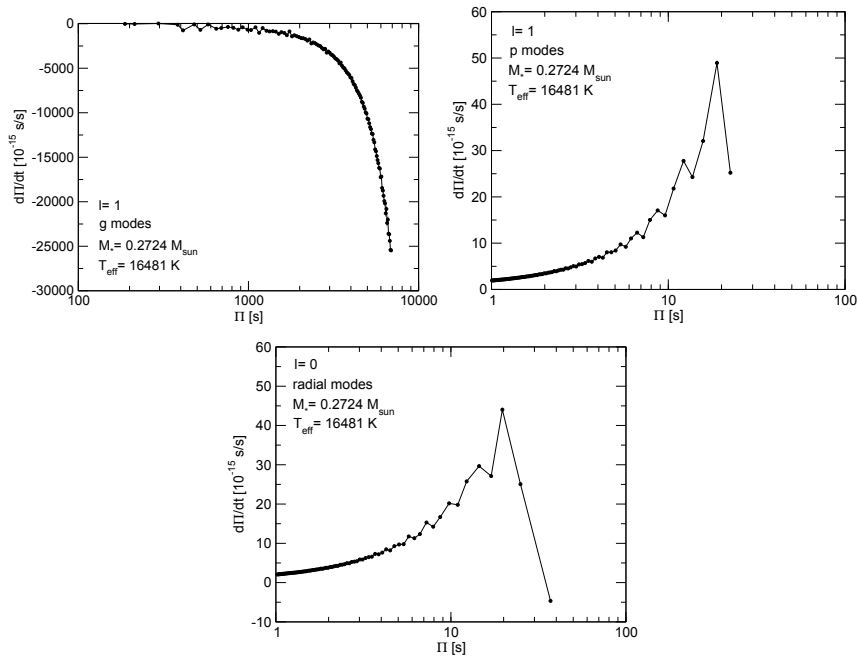


Figura 3.14: *Panel superior izquierdo*: Tasas de cambio de períodos (en unidades de 10^{-15} s/s) de modos g con $\ell = 1$ correspondientes al modelo seleccionado previo al flash de CNO con $M_{\star} = 0.2724 M_{\odot}$ y $T_{\text{eff}} = 16481 \text{ K}$ (ver los paneles derechos de la Figura 3.12). *Panel superior derecho*: Como para el panel superior izquierdo, pero para modos p con $\ell = 1$. *Panel inferior*: Como para el panel superior izquierdo, pero para modos radiales ($\ell = 0$).

4 | Primer análisis astrosismológico de enanas blancas ELMV

*“Friendship ... is born at the moment when one man says to another
“What! You too? I thought that no one but myself...”*

The Four Loves, C.S. Lewis

Los resultados de este Capítulo han sido publicados en el artículo **“Pulsating low-mass white dwarfs in the frame of new evolutionary sequences V. Asteroseismology of ELMV white dwarf stars”**, Leila M. Calcaferro, Alejandro H. Córscico, and Leandro G. Althaus. *Astronomy & Astrophysics*, 607, A33 (2017b).

4.1. Introducción

En este Capítulo presentamos un análisis astrosismológico aplicado a todas las enanas blancas ELMV conocidas hasta el momento, el primero realizado para este tipo de estrellas, con el fin de encontrar un modelo adecuado para caracterizar a cada una de ellas. Como hemos introducido en la Sección 1.3.1, la astrosismología de enanas blancas ha dado vastas pruebas de ser una técnica de suma utilidad para el estudio del interior de un gran número de enanas blancas pulsantes.

Para este estudio, enmarcado en la serie de trabajos realizados por nuestro grupo enfocados en el estudio de este tipo de estrellas (Sección 1.5), utilizamos un conjunto de modelos representativos de las enanas blancas de baja masa con núcleo de He. Estos modelos fueron derivados por Althaus et al. (2013) y como ya hemos mencionado, han sido obtenidos como resultado de simular la evolución de un sistema binario inicialmente consistente de una estrella de $1 M_{\odot}$ en la ZAMS y una estrella de neutrones con $1.4 M_{\odot}$ como compañera (ver Sección 2.3). Por lo tanto, de los dos enfoques posibles para llevar a cabo un estudio astrosismológico, tal como hemos referido en la Sección 1.3.1, el que seguimos es el que emplea modelos resultantes de la evolución completa de las estrellas progenitoras, desde la ZAMS hasta la fase de enana blanca.

Antes de comenzar, veremos en la siguiente Sección una breve reseña de las estrellas analizadas. Luego, llevaremos a cabo un análisis para estimar el espaciamiento medio de períodos observado para las estrellas bajo estudio (en los casos en que esto es posible). Posteriormente, usaremos la comparación entre el espaciamiento de períodos observado con el espaciamiento promedio de períodos computados para nuestra grilla de modelos, con el fin de poner cotas sobre la masa estelar. Finalmente, emplearemos los períodos

individuales observados para cada ELMV en busca de un modelo astrosismológico representativo.

4.2. Estrellas bajo estudio

La detección de la primera ELM pulsante denominada SDSS J184037.78+642312.3 (de ahora en más, J1840) y reportada en Hermes et al. (2012), ha ofrecido la primera oportunidad de estudiar el interior de este tipo de estrellas mediante las técnicas de la astrosismología. Esta estrella se encuentra en un sistema binario cercano, y exhibe cinco períodos de pulsación independientes (Hermes et al. 2012, 2013a) tal como puede verse en la Tabla 4.2. La segunda ELMV descubierta, SDSS J111215.82+111745.0 (de ahora en más J1112), fue reportada por Hermes et al. (2013c). Este caso es particularmente interesante puesto que esta estrella exhibe siete períodos (detallados en la Tabla 4.3), dos de los cuales son muy cortos, y a diferencia del resto de los períodos detectados hasta ahora para estas estrellas, probablemente estén asociados a modos p o radiales. SDSS J151826.68+065813.2, en adelante J1518, es la ELMV más caliente conocida hasta el momento de acuerdo a Hermes et al. (2013c). Esta estrella muestra siete períodos independientes (ver Tabla 4.4), lo cual permite llevar a cabo un análisis astrosismológico más detallado. SDSS J161431.28+191219.4, de ahora en más J1614, solo exhibe dos períodos que se encuentran en la Tabla 4.5, según reportan Hermes et al. (2013a). SDSS J222859.93+362359.6, en adelante J2228, es la ELMV más fría detectada hasta el momento, de acuerdo a Hermes et al. (2013a). Esta estrella exhibe tres períodos independientes (detallados en la Tabla 4.6) en el rango de $\sim [3255 - 6235]$ s, de modo que estos períodos parecen estar aproximadamente en el régimen asintótico (ver Córscico & Althaus 2014a). En particular, el período 6234.9 s es el más largo medido hasta el momento en una enana blanca pulsante. Por su parte, PSR J1738+0333 es un púlsar de milisegundos (5.85 ms), en una órbita de 8.5 h con una compañera ELMV (a la cual llamaremos J1738 para abreviar) de acuerdo con Kilic et al. (2015). Este caso es particularmente interesante porque, por el momento, es el único sistema binario con un púlsar de milisegundos y una enana blanca pulsante. Esta estrella exhibe tres períodos independientes, detallados en la Tabla 4.7. SDSS J161831.69+385415.15, en adelante J1618, es una ELMV que exhibe tres períodos (ver Tabla 4.8), de acuerdo a Bell et al. (2015). Finalmente, SDSS J1735+2134 (en adelante J1735) y SDSS J2139+2227 (en adelante J2139) son las últimas dos ELMV descubiertas (al momento de realizar el presente análisis). En particular, J1735 tiene cuatro períodos (Bell et al. 2017a) que resultan ser muy largos (ver Tabla 4.9) lo cual parece indicar que se encuentran en el régimen asintótico de modos g no radiales (Córscico & Althaus 2014a). Los tres períodos exhibidos por J2139 (Bell et al. 2017a) se encuentran en la Tabla 4.10. Es necesario señalar que las estrellas J1738 y J1618 han sido reobservadas y/o reanalizadas posteriormente a la realización de este trabajo. El nuevo conjunto de períodos se encuentra detallado en el siguiente Capítulo.

Considerando lo expuesto, el número total de ELMVs que hemos considerado para el presente estudio es de nueve¹, ya que no tomamos en cuenta la estrella SDSS J1355+1956 (Bell et al. 2017a). Esta estrella, caracterizada por $T_{\text{eff}} = 8050 \pm 120$ K y $\log g = 6.10 \pm 0.06$, exhibe un período de pulsación dominante de 4.3 h según Bell et al. (2017a), que excede

¹Al momento de realizar este trabajo, no se conocía la existencia de las últimas dos estrellas consignadas en la Tabla ?? (Sección 1.5).

Tabla 4.1: Parámetros estelares (derivados usando modelos de atmósferas 1D y 3D) y propiedades pulsacionales observadas de las enanas blancas ELMV analizadas.

Estrella	T_{eff}^{1D} [K]	$\log(g)^{1D}$ [cgs]	M_{\star}^{1D} [M_{\odot}]	T_{eff}^{3D} [K]	$\log(g)^{3D}$ [cgs]	M_{\star}^{3D} [M_{\odot}]	Rango períodos [s]
J1840	9390 ± 140	6.49 ± 0.06	$0.183^{a,b}$	9120 ± 140	6.34 ± 0.05	0.177^c	[1164-4445]
J1112	9590 ± 140	6.36 ± 0.06	0.179^d	9240 ± 140	6.17 ± 0.06	0.169^c	[108-2856]
J1518	9900 ± 140	6.80 ± 0.05	0.220^d	9650 ± 140	6.68 ± 0.05	0.197^c	[1335-3848]
J1614	8800 ± 170	6.66 ± 0.14	0.192^b	8700 ± 170	6.32 ± 0.13	0.172^c	[1184-1263]
J2228	7870 ± 120	6.03 ± 0.08	0.152^b	7890 ± 120	5.78 ± 0.08	0.142^c	[3255-6235]
J1738	9130 ± 140	6.55 ± 0.06	0.181^e	8910 ± 150	6.30 ± 0.10	0.172^c	[1788-3057]
J1618	9144 ± 120	6.83 ± 0.14	0.220^f	8965 ± 120	6.54 ± 0.14	0.179^c	[2543-6126]
J1735	—	—	—	7940 ± 130	5.76 ± 0.08	0.142^g	[3363-4961]
J2139	—	—	—	7990 ± 130	5.93 ± 0.12	0.149^g	[2119-3303]

Notas: ^aHermes et al. (2012). ^bHermes et al. (2013a). ^cDeterminada usando las correcciones por efectos 3D según Tremblay et al. (2015). ^dHermes et al. (2013c). ^eKilic et al. (2015). ^fBell et al. (2015). ^gBell et al. (2017a).

largamente los límites teóricos de inestabilidad para ELMs (Córscico & Althaus 2016). Por lo tanto, la naturaleza de esta estrella pulsante aún no es del todo entendida, aunque los autores señalan la posibilidad de que se trate de una estrella pulsante δ Scuti o SX Phe. En este punto es importante aclarar que solo cuatro de estas estrellas variables (J1840, J1112, J1518 y J1738) están confirmadas como enanas blancas ELM en binarias de período corto, según el análisis reportado por Brown et al. (2017a). A esto deben sumarse las discusiones presentadas por Bell et al. (2015, 2017a), donde se sugiere que las estrellas J1618, J1735 y J2139 podrían no ser enanas blancas ELM. Como hemos visto en el Capítulo 3, una medición de la tasa de cambio de períodos de dichas estrellas podría esclarecer esta cuestión. A pesar de esto, dada la naturaleza exploratoria de este trabajo, hemos decidido considerar estas estrellas como ELMVs genuinas y las incluimos en nuestro análisis.

Los parámetros espectroscópicos del conjunto de ELMVs mencionado en el párrafo anterior se encuentran descritos en la Tabla 4.1, mientras que en la Figura 1.10 de la Sección 1.3.1 se encuentra señalada la ubicación de las ELMVs (círculos rojos) en el contexto de las distintas familias de enanas blancas pulsantes. Antes de continuar, vale la pena mencionar que según Brown et al. (2017a) (para la misma metalicidad de las estrellas progenitoras) las masas espectroscópicas para las ELMs difieren en un 15%, para los mismos parámetros de $\log(g)$ y T_{eff} , usando los track evolutivos de Althaus et al. (2013) o los de Istrate et al. (2016b). Es posible entonces adoptar esta diferencia como la incerteza verdadera en la determinación espectroscópica de las masas de las ELMs.

4.3. Búsqueda de un espaciamiento de períodos constante

Según lo expuesto en la Sección 1.2.4, en el límite asintótico se espera que los modos g no radiales de alto orden radial k , del mismo grado armónico ℓ , estén equiespaciados en período (Tassoul 1980):

Tabla 4.2: Lista de los cinco períodos independientes de J1840, con sus frecuencias correspondientes y amplitudes, según Hermes et al. (2012).

Π [s]	Frec. [μ Hz]	Ampl. [mmag]
1164.15 ± 0.38	859.0 ± 0.29	1.78 ± 0.29
1578.7 ± 0.65	633.43 ± 0.26	2.831 ± 0.41
2376.07 ± 0.74	420.86 ± 0.13	4.817 ± 0.46
3930.0 ± 300	254.0 ± 19	2.7 ± 2.0
4445.3 ± 2.4	224.96 ± 0.12	7.6 ± 1.6

Tabla 4.3: Lista de los siete períodos independientes de J1112, con sus frecuencias correspondientes y amplitudes, según Hermes et al. (2013c).

Π [s]	Frec. [μ Hz]	Ampl. [mmag]
107.56 ± 0.04	9297.4 ± 3.6	0.38 ± 0.14
134.275 ± 0.001	7447.388 ± 0.0100	0.44 ± 0.08
1792.905 ± 0.005	557.7542 ± 0.0017	3.31 ± 0.08
1884.599 ± 0.004	530.6170 ± 0.0011	4.73 ± 0.08
2258.528 ± 0.003	442.7662 ± 0.0007	7.49 ± 0.08
2539.695 ± 0.005	393.7480 ± 0.0007	6.77 ± 0.09
2855.728 ± 0.010	350.1734 ± 0.0013	3.63 ± 0.09

$$\Delta\Pi_{\ell}^a = \Pi_{k+1,\ell} - \Pi_{k,\ell} = \frac{2\pi^2}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \left[\int_0^{R_{\star}} \frac{N(r)}{r} dr \right]^{-1} = cte, \quad (4.1)$$

donde N es la frecuencia de Brunt-Väisälä. Recordando las herramientas astrosismológicas descritas en la Sección 1.3.1, el espaciamiento de períodos asintótico o el espaciamiento promedio de períodos calculados a partir de una grilla de modelos (con diferentes masas y temperaturas efectivas) puede ser comparado con el espaciamiento de períodos medio exhibido por una estrella enana blanca pulsante, y luego usarse para inferir un valor de la masa estelar. Con este fin buscamos un espaciamiento de períodos medio, si es que existe, subyacente a las periodicidades observadas de las estrellas bajo estudio. Hemos llevado adelante esta búsqueda empleando los períodos de estas estrellas, usando los siguientes tests de significancia:

- Kolmogorov-Smirnov (K-S; ver Kawaler 1988),
- varianza inversa (I-V; ver O'Donoghue 1994),
- transformada de Fourier (F-T; ver Handler et al. 1997)

Veamos brevemente en qué consiste cada uno de estos métodos:

Kolmogorov-Smirnov

Para emplear este test nos basamos en el método presentado por Kawaler (1988), que testea la significancia de un espaciamiento de períodos uniforme. Para implementarlo, se

Tabla 4.4: Lista de los siete períodos independientes de J1518, con sus frecuencias correspondientes y amplitudes, de J1518 según Hermes et al. (2013c).

Π [s]	Frec. [μ Hz]	Ampl. [mmag]
1335,318 \pm 0.003	748.8855 \pm 0.0015	13.6 \pm 0.6
1956,361 \pm 0.003	511.1532 \pm 0.0007	18.1 \pm 0.3
2134,027 \pm 0.004	468.5976 \pm 0.0008	14.2 \pm 0.4
2268,203 \pm 0.004	440.8777 \pm 0.0007	21.6 \pm 0.2
2714,306 \pm 0.003	368.4183 \pm 0.0005	21.6 \pm 0.9
2799.087 \pm 0.005	357.2593 \pm 0.0007	35.4 \pm 0.6
3848.201 \pm 0.009	259.8617 \pm 0.0006	15.7 \pm 0.3

Tabla 4.5: Lista de los dos períodos independientes de J1614, con sus frecuencias correspondientes y amplitudes, según Hermes et al. (2013a).

Π [s]	Frec. [μ Hz]	Ampl. [mmag]
1184.106 \pm 0.064	844.519 \pm 0.045	3.20 \pm 0.10
1262.668 \pm 0.041	791.974 \pm 0.026	5.94 \pm 0.11

genera un conjunto grande de números aleatorios con distribución uniforme en el intervalo $[0,1]$. Luego, empleando el conjunto de períodos observados, se genera un conjunto de números distribuidos en ese mismo rango haciendo la diferencia: $r_i(\Delta\Pi) = n_i - \text{int}(n_i)$, donde $\text{int}(x)$ es el mayor número entero menor que x , y $n_i = (\Pi_i - \Pi_s)$. En esta expresión, Π_i es cada uno de los períodos de la lista de períodos observados y Π_s se elige como el período más corto. Si todos los períodos tienen el mismo valor de ℓ , entonces la cantidad $r_i(\Delta\Pi)$ será cero para un valor de $\Delta\Pi$ adecuado. Si el valor que se adoptó para $\Delta\Pi$ fuese incorrecto, o si los períodos no pudiesen ser representados por la relación asintótica (Ecuación (4.1)) entonces, en general, no será cero. Para una distribución aleatoria de períodos, los valores $r_i(\Delta\Pi)$ estarán distribuidos uniformemente entre 0 y 1.

Este método proporciona una medida de la probabilidad de que cierto conjunto de datos proceda de una dada distribución. En este caso, es empleado con el objetivo de determinar la probabilidad de que los $r_i(\Delta\Pi)$ provengan de una distribución uniforme, para un dado $\Delta\Pi$. Entonces, se calcula la probabilidad de que los números asociados a los períodos observados tengan alguna correlación con la distribución aleatoria generada. Cualquier espaciamiento de períodos presente en los datos (que entonces indicaría que siguen una distribución no aleatoria), se manifestará como un mínimo de esa probabilidad.

Varianza Inversa

Basado en el método presentado por O'Donoghue (1994), el test de la varianza inversa (I.V.) consiste en ajustar un conjunto de períodos equiespaciados a los períodos observados, y elegir el espaciamiento de forma tal que la varianza inversa de los residuos del modelo ajustado sea maximizada. Concretamente, a partir de un conjunto de períodos observados, $\Pi_i, i=1, \dots, N$, se construye otro conjunto de períodos, $C(i)$. Esto se hace usando la relación: $C(i) = \Pi_0 + k(i)\Delta\Pi$, donde los $k(i)$ son números enteros y $\Delta\Pi$ es un espaciamiento de períodos de prueba y que será el paso considerado para la generación del conjunto. Para

Tabla 4.6: Lista de los tres períodos independientes de J2228, con sus frecuencias correspondientes y amplitudes, según Hermes et al. (2013a).

Π [s]	Frec. [μ Hz]	Ampl. [mmag]
3254.5 ± 2.1	307.27 ± 0.20	2.34 ± 0.14
4178.3 ± 2.8	239.33 ± 0.16	6.26 ± 0.14
6234.9 ± 6.0	160.39 ± 0.15	1.94 ± 0.23

Tabla 4.7: Lista de los tres períodos independientes de J1738, con sus frecuencias correspondientes y amplitudes, según Kilic et al. (2015).

Π [s]	Frec. [μ Hz]	Ampl. [mmag]
1788 ± 33	559 ± 10	1.27 ± 0.47
2656 ± 80	376 ± 11	1.15 ± 0.47
3057 ± 99	327 ± 11	1.22 ± 0.47

nuestro estudio elegimos Π_0 como el período más corto. Luego, se determinan los valores de los $k(i)$ que minimizan la diferencia entre $C(i)$ y Π_i . A continuación se mejora el valor de Π_0 haciendo $\Pi_0 = \sum_i [\Pi_i - k(i)\Delta\Pi] / N$. Teniendo ahora todos los parámetros del modelo, pueden obtenerse los residuos ya que: $R(i) = [\Pi_i - C(i)] / \Delta\Pi$. Finalmente, se calcula la varianza de los N residuos y se grafica su inversa para un rango adecuado de $\Delta\Pi$.

Transformada de Fourier

La transformación del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia de una señal se logra mediante el uso de la *transformada de Fourier* y se hace para obtener información que no resulta evidente en el dominio temporal. En nuestro caso, dentro de una lista de períodos observados a los cuales les atribuimos altura unidad en un gráfico $f(t)$ vs t , se analiza si subyace algún tipo de periodicidad, ya que buscamos un $\Delta\Pi$. Construimos entonces una función tipo peine o *Delta Comb*, que es una distribución construida a partir de funciones de tipo *delta de Dirac*. Cada delta estará ubicada en uno de los períodos y tendrá altura (amplitud) igual a 1, mientras que el resto de los puntos tendrá amplitud nula (debido a esta construcción, las deltas no van a estar equiespaciadas). A continuación, se calcula la transformada de Fourier de esta función, pasando así del dominio de períodos (en segundos) a frecuencia (inversa de segundos). Adicionalmente, como del gráfico obtenido no es fácil distinguir espaciamiento alguno, se grafica la amplitud al cuadrado contra la inversa de la frecuencia. Si hay un espaciamiento $\Delta\Pi$ oculto, de esta forma será visible en forma de pico (así como los picos presentes en los gráficos de los otros dos métodos).

Resultados

Como puede verse de las Tablas 4.2 a 4.10, el número de períodos exhibido por las ELMV conocidas varía entre dos y siete. En particular, debido a los pocos períodos exhibidos por J1614, J2228, J1738, J1618 y J2139, no es posible buscar un espaciamiento de períodos constante en estos casos. Para J1840, J1112, J1518 y J1735, sin embargo, hemos

Tabla 4.8: Lista de los tres períodos independientes de J1618, con sus frecuencias correspondientes y amplitudes, según Bell et al. (2015).

Π [s]	Frec. [μ Hz]	Ampl. [mmag]
2543.0 ± 10	393.2 ± 1.6	16 ± 3
4935.21 ± 0.07	202.605 ± 0.003	56.3 ± 1.3
6125.9 ± 0.2	163.240 ± 0.006	25.5 ± 1.4

Tabla 4.9: Lista de los cuatro períodos independientes de J1735, con sus frecuencias correspondientes y amplitudes, según Bell et al. (2017a).

Π [s]	Frec. [μ Hz]	Ampl. [mmag]
3362.76 ± 0.54	297.38 ± 0.05	2.04 ± 0.11
3834.54 ± 0.42	260.79 ± 0.03	3.64 ± 0.11
4541.88 ± 0.24	220.172 ± 0.013	7.60 ± 0.11
4961.22 ± 0.72	201.56 ± 0.03	3.38 ± 0.11

podido llevar a cabo este procedimiento. Desafortunadamente, para J1840 y J1112 no hemos podido encontrar un único espaciamento de períodos constante, además de no haber podido encontrar acuerdo entre los tres tests. Esto podría deberse a que los períodos exhibidos por estas estrellas no están completamente en el régimen asintótico y/o al hecho de que no haya tantos períodos como sería necesario para determinar un espaciamento de períodos medio.

No obstante, para J1518 y J1735, como mostramos en las Figuras 4.1 y 4.2 respectivamente, encontramos una clara indicación de un espaciamento de períodos constante para los tres tests de significancia independientes, para ambas estrellas. Para J1518, yace aproximadamente en $\Delta\Pi \sim 44$ s, aunque también hay otro valor posible en ~ 22.2 s, ambos valores dados por los tres tests. Sin embargo, el último valor es demasiado pequeño y, probablemente, represente un armónico del espaciamento de períodos principal ($\frac{1}{2}\Delta\Pi$). Además, no es probable que una separación de períodos de ~ 22 s se trate del espaciamento de períodos asintótico, porque la masa estelar resultante sería prohibitivamente alta (Córscico & Althaus 2014a). Por este motivo, suponemos que el espaciamento de períodos asociado a J1518 es $\Delta\Pi^O \sim 44$ s. En el caso de J1735, hay un valor posible para el espaciamento de períodos en ~ 26 s, pero una vez más, este valor es demasiado chico y lo descartamos. Hay otras dos posibilidades en ~ 47 s y ~ 59 s, siendo el último un valor más esperable para dicha cantidad, de acuerdo a las predicciones asintóticas. Por lo tanto, adoptamos $\Delta\Pi^O \sim 59$ s como el espaciamento de períodos para esta estrella.

4.4. Determinación de la masa estelar de J1518 y J1735 empleando el espaciamento de períodos observado

En esta Sección, el objetivo es estimar la masa estelar de J1518 y J1735 mediante la comparación del espaciamento promedio de los períodos ($\overline{\Delta\Pi_\ell}$) computados para nuestra grilla de modelos, con el espaciamento de períodos observado ($\Delta\Pi_\ell^O$) determinado en

Tabla 4.10: Lista de los tres períodos independientes de J2139, con sus frecuencias correspondientes y amplitudes, según Bell et al. (2017a).

Π [s]	Frec. [μHz]	Ampl. [mmag]
2119.44 ± 0.24	471.82 ± 0.06	1.52 ± 0.08
2482.32 ± 0.54	402.85 ± 0.09	1.02 ± 0.08
3303.30 ± 0.96	302.73 ± 0.09	0.99 ± 0.08

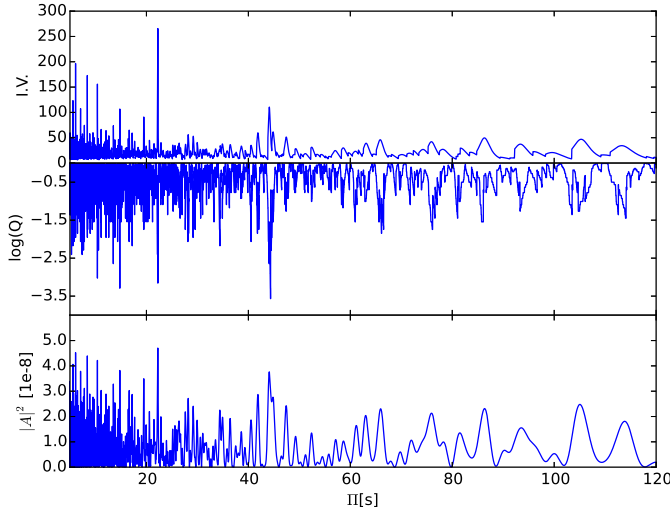


Figura 4.1: Tests de significancia I-V (panel superior), K-S (panel medio), y F-T (panel inferior) aplicados al espectro de períodos de J1518 con el fin de buscar un espaciamiento de períodos constante. Los períodos empleados son los que figuran en la Tabla 4.4.

la Sección anterior para cada estrella. Este enfoque tiene el inconveniente de que, como ya hemos mencionado (ver Sección 1.3.1), el espaciamiento de períodos para este tipo de estrellas, que es sensible a la masa estelar, también podría depender del espesor de la envoltura de H (Tassoul et al. 1990; Fontaine & Brassard 2008a). Cabe destacar que en una exploración que realizamos posteriormente (Calcaferro et al. 2018b), hemos encontrado que, en efecto, tal dependencia existe (ver Sección 5.2.2).

El espaciamiento promedio de los períodos es estimado mediante la expresión:

$$\overline{\Delta\Pi_\ell} = \frac{1}{(n-1)} \sum_k \Delta\Pi_k, \quad (4.2)$$

donde el espaciamiento de períodos hacia adelante (*forward period spacing*), $\Delta\Pi_k$, se define como $\Delta\Pi_k = \Pi_{k+1} - \Pi_k$, siendo k el orden radial y n el número de períodos teóricos dentro del rango de períodos observado para la estrella objetivo. Para J1518, $\Pi_k \in [1330, 3900]$ s, mientras que para J1735, $\Pi_k \in [3350, 5000]$ s.

En la Figura 4.3 mostramos la curva del espaciamiento promedio de los períodos (para $\ell = 1$) calculados para J1518 en términos del logaritmo de la temperatura efectiva para

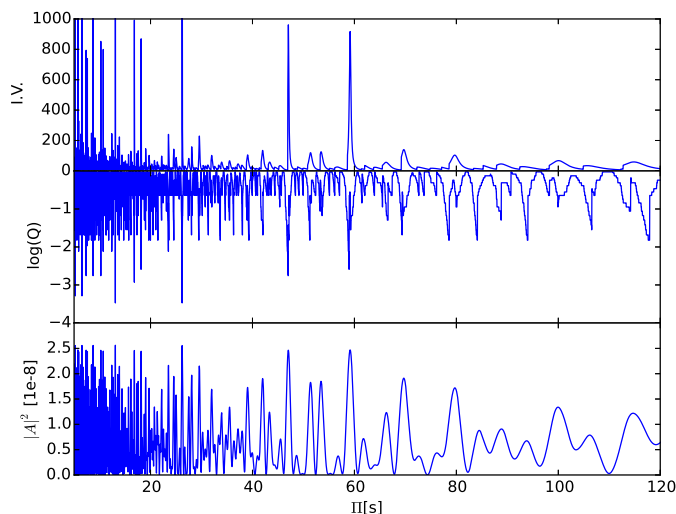


Figura 4.2: Igual que en la Figura 4.1, pero para J1735. Los períodos usados son aquellos indicados en Tabla 4.9.

todas las secuencias evolutivas de enanas blancas ELM, junto con el espaciamiento de períodos observado para J1518. La Figura muestra que cuanto menor es el valor de $\overline{\Delta\Pi_\ell}$, mayor es la masa estelar. En este caso, está mostrando con claridad que un valor tan pequeño del espaciamiento de períodos observado (~ 44 s) conduciría a una masa estelar mayor a $0.4352 M_\odot$, superior a lo esperado para este tipo de estrellas. Por lo tanto, este análisis no parece conducir a un valor apropiado para la masa de J1518. Una de las razones puede estar relacionada con el hecho de que esta estrella no esté pulsando en el régimen asintótico (ver Córscico & Althaus 2014a).

A continuación, en la Figura 4.4 mostramos la curva del espaciamiento promedio de los períodos (con $\ell = 1$) computados para el caso de J1735 en términos del logaritmo de la temperatura efectiva para todas las secuencias evolutivas de enanas blancas ELM, junto con el espaciamiento de períodos observado para J1735. Nuevamente, el valor que obtenemos para la masa estelar es mayor al esperado ($\gtrsim 0.43 M_\odot$), aunque en este caso sí parece ser posible que la estrella esté pulsando en el régimen asintótico. Alternativamente, si el valor que hemos obtenido para el espaciamiento de períodos observado es real, en el sentido de que puede asociarse con el comportamiento de modos g de orden radial alto, entonces podría indicar que sus parámetros espectroscópicos (T_{eff} , $\log g$) serían incorrectos.

En la siguiente Sección aplicaremos otra de las técnicas astrosismológicas presentadas en la Sección 1.3.1, con el fin de estimar la masa estelar además de otras características de las ELMVs, mediante la búsqueda de modelos teóricos que ajusten de la mejor manera posible los períodos individuales observados. Nuevamente, una vez que se halla un modelo, mediante este procedimiento se tiene acceso a información de la estrella (en particular, de su interior) que de otro modo sería muy difícil (sino imposible) de obtener.

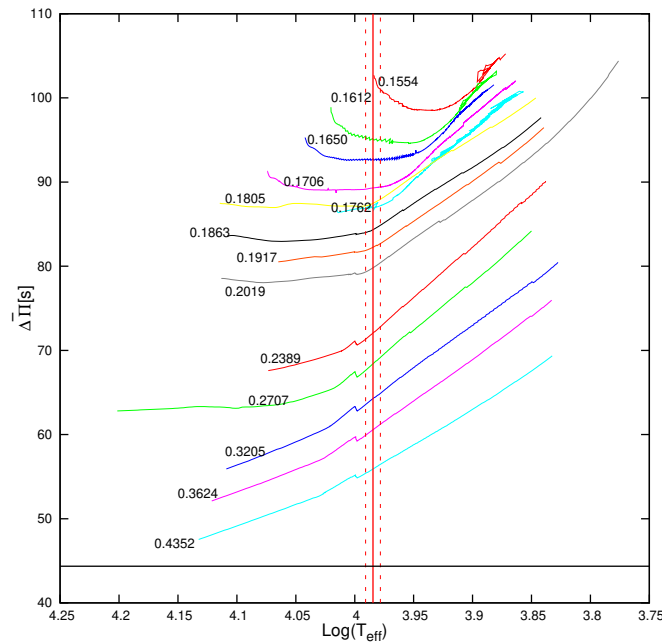


Figura 4.3: Espaciamento promedio de períodos dipolares ($\overline{\Delta\Pi}_\ell$, con $\ell = 1$) computados en el rango de períodos observado para J1518, correspondiente a cada secuencia de modelos de enana blanca considerada en este análisis, en términos del logaritmo de la temperatura efectiva. Los números a lo largo de cada curva denotan la masa estelar (en unidades de masa solar). El espaciamento de períodos observado derivado para J1518 es representado con una línea sólida horizontal. También indicamos la T_{eff} (línea vertical sólida) en el modelo 3D, junto con sus incertezas (líneas verticales discontinuas).

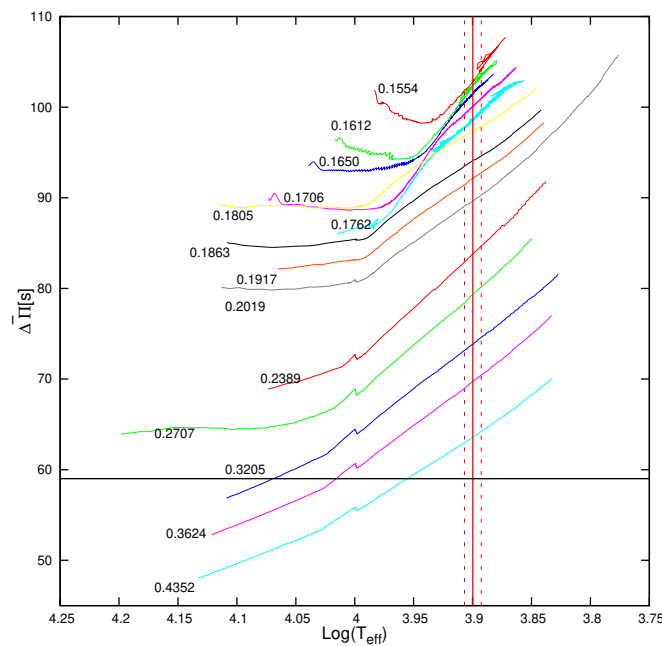


Figura 4.4: Igual que en la Figura 4.3, pero para J1735.

4.5. Ajustes de períodos individuales

En este procedimiento (ver Sección 1.3.1) buscamos un modelo estelar que ajuste de la mejor manera posible los períodos de pulsación individuales de la estrella bajo estudio. La calidad del ajuste entre los períodos de pulsación teóricos (Π_k^T) y los observados (Π_i^O) es medida mediante la función de calidad que en este caso viene dada por:

$$\chi^2(M_\star, T_{\text{eff}}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{mín}[(\Pi_i^O - \Pi_k^T)^2], \quad (4.3)$$

donde n es el número de períodos observado. El modelo de ELM con el valor más pequeño de χ^2 , si existe, es entonces adoptado como el modelo astrosismológico. Hemos calculado la función $\chi^2 = \chi^2(M_\star, T_{\text{eff}})$ para el conjunto completo de masas estelares con 0.1554, 0.1612, 0.1650, 0.1706, 0.1762, 0.1805, 0.1863, 0.1921, 0.2025, 0.2390, 0.2707, 0.3205, 0.3624, y 0.4352 M_\odot , en un amplio rango de temperaturas ($13\,000 \gtrsim T_{\text{eff}} \gtrsim 6\,000$ K).

Hemos llevado a cabo este ajuste astrosismológico para todas las ELMV conocidas hasta el momento (Sección 4.2), siendo esta la primera vez que tal procedimiento es realizado para este tipo de estrellas. Comenzamos nuestro análisis suponiendo que todos los períodos observados corresponden a modos g asociados a $\ell = 1$ y considerando el conjunto de períodos observados, Π_i^O , de cada estrella para calcular la función de calidad dada por la Ecuación (4.3). Luego, consideramos el caso en que todos los períodos observados corresponden a modos g asociados a $\ell = 2$ y, finalmente, consideramos el caso de mezcla de modos g asociados a $\ell = 1$ y $\ell = 2$. Adicionalmente, para el caso de J1112, hemos realizado un ajuste más detallado, puesto que empleamos dos conjuntos distintos de períodos observados. Por un lado, usamos los cinco períodos más largos, para los cuales llevamos a cabo el análisis previamente mencionado. Por otro lado, adoptamos el conjunto completo de períodos (siete) y exploramos la posibilidad de que correspondan a una mezcla de modos g y p con $\ell = 1$ y, además, consideramos el caso más general en que los períodos observados correspondan a modos radiales ($\ell = 0$) y no radiales p y g ($\ell = 1, 2$).

En las Figuras 4.5 a 4.14 mostramos la cantidad $(\chi^2)^{-1}$ en términos de la temperatura efectiva para diferentes masas estelares, para cada ELMV conocida, tomando en cuenta su correspondiente conjunto de períodos observados. También incluimos las temperaturas efectivas y sus incertezas para las determinaciones de los modelos de atmósferas 1D (líneas verticales negras) y 3D (líneas verticales rojas). Como ya hemos mencionado, la calidad del ajuste entre los períodos observados y teóricos es medida mediante el valor de χ^2 , de modo que cuanto mejor sea el ajuste de períodos, más chico es el valor de χ^2 , lo cual se traduce en nuestras Figuras a un mayor valor de $(\chi^2)^{-1}$ (ya que hemos optado por graficar la inversa de la función de calidad). En algunos casos hay un solo máximo y adoptamos ese modelo como la solución astrosismológica para esa estrella. Algunas veces, encontramos múltiples soluciones posibles, y entonces es necesario emplear alguna restricción externa para poder elegir una solución. Generalmente, tal restricción es la incerteza en la temperatura efectiva dada por las determinaciones de la espectroscopía. En algunos casos, cuando aún así sigue habiendo múltiples soluciones posibles, optamos por un modelo con un valor de masa lo más próxima a la masa dada por las determinaciones espectroscópicas (a las cuales, a lo largo de nuestro trabajo, denominaremos masas espectroscópicas). Es importante mencionar que, como es más probable observar modos

con $\ell = 1$ que con $\ell = 2$ (debido a que los efectos de cancelación geométrica se vuelven más fuertes con valores mayores de ℓ ; ver Dziembowski 1977, y Sección 1.2.1), cuando es posible, elegimos típicamente soluciones astrosismológicas que ajusten períodos observados con un número mayor de modos con $\ell = 1$.

A continuación mostramos los resultados de este procedimiento aplicado a cada estrella bajo estudio.

4.5.1. El caso de J1840

En la Figura 4.5 mostramos el ajuste entre los períodos teóricos y los cinco períodos observados de J1840 (ver la Tabla 4.2), suponiendo que están asociados a modos g con $\ell = 1$ (panel superior), $\ell = 2$ (panel medio), y $\ell = 1, 2$ (panel inferior). El caso con $\ell = 2$ es mostrado por completitud puesto que no es de esperar que una estrella pulsante pueda exhibir todos los períodos asociados a $\ell = 2$ y ninguno a $\ell = 1$, por argumentos de cancelación geométrica (ver arriba).

Para el caso en que $\ell = 1$, el panel superior muestra que hay más de una solución. En particular, el máximo absoluto (la mejor solución) yace a temperaturas efectivas mucho mayores que las permitidas por las dos determinaciones espectroscópicas. La segunda mejor solución se encuentra dentro del rango permitido de T_{eff} para el modelo de atmósfera 1D ($T_{\text{eff}} = 9\,390 \pm 140$ K), de modo que podemos adoptar este modelo porque representa un buen ajuste de períodos. Corresponde a un modelo con $M_{\star} = 0.2389 M_{\odot}$ y $T_{\text{eff}} \sim 9\,529$ K.

Para el caso de $\ell = 1, 2$, no hay una única solución, y el mejor ajuste de períodos tiene un valor muy alto de T_{eff} . En los rangos permitidos de T_{eff} puede verse que no hay un único modelo astrosismológico. Sin embargo, podemos adoptar la solución dada para el modelo con $M_{\star} = 0.1805 M_{\odot}$ y $T_{\text{eff}} \sim 9\,007$ K, que es el mejor ajuste en el rango permitido de T_{eff} , según el modelo de atmósfera 3D ($T_{\text{eff}} = 9\,120 \pm 140$ K).

Con el fin de determinar cuán bueno es el acuerdo entre los períodos teóricos y los observados de J1840, podemos compararlos calculando las diferencias de períodos absolutas $|\delta\Pi| = |\Pi^{\text{O}} - \Pi^{\text{T}}|$. Mostramos los resultados para J1840 en la Tabla 4.11 para el caso de $\ell = 1$. La columna 6 de la Tabla 4.11 muestra el valor de la tasa de crecimiento no adiabática lineal (η) que según hemos visto en el Capítulo 2, está definida como $\eta \equiv -\Im(\sigma)/\Re(\sigma)$ (donde $\Re(\sigma)$ y $\Im(\sigma)$ son las partes reales e imaginaria, respectivamente, de la autofrecuencia compleja σ , calculada con la versión no adiabática del código de pulsaciones LP-PUL (Córscico et al. 2006; Córscico & Althaus 2016)). Un valor de $\eta > 0$ ($\eta < 0$) implica un modo inestable (estable) (ver columna 6 de la Tabla 4.11). Para $\ell = 1, 2$ los resultados se muestran en la Tabla 4.12.

Considerando que el ajuste de períodos del caso con $\ell = 1, 2$ es mejor, dado que tiene un valor mayor de $(\chi^2)^{-1}$ que la solución del caso con $\ell = 1$, y que la masa de este modelo ($M_{\star} = 0.1805 M_{\odot}$) está en línea con las masas espectroscópicas determinadas para esta estrella ($M_{\star}^{1D} = 0.183 M_{\odot}$ y $M_{\star}^{3D} = 0.177 M_{\odot}$), adoptamos este modelo con $M_{\star} = 0.1805 M_{\odot}$ y $T_{\text{eff}} = 9\,007$ K como la solución astrosismológica para J1840, que además tiene un valor de T_{eff} en acuerdo con el dado por la espectroscopía (para el modelo 3D), aunque este modelo tiene un mayor número de modos asociado con $\ell = 2$ que con $\ell = 1$. Notar que la mayoría de los períodos de este modelo corresponde a modos pulsacionalmente inestables.

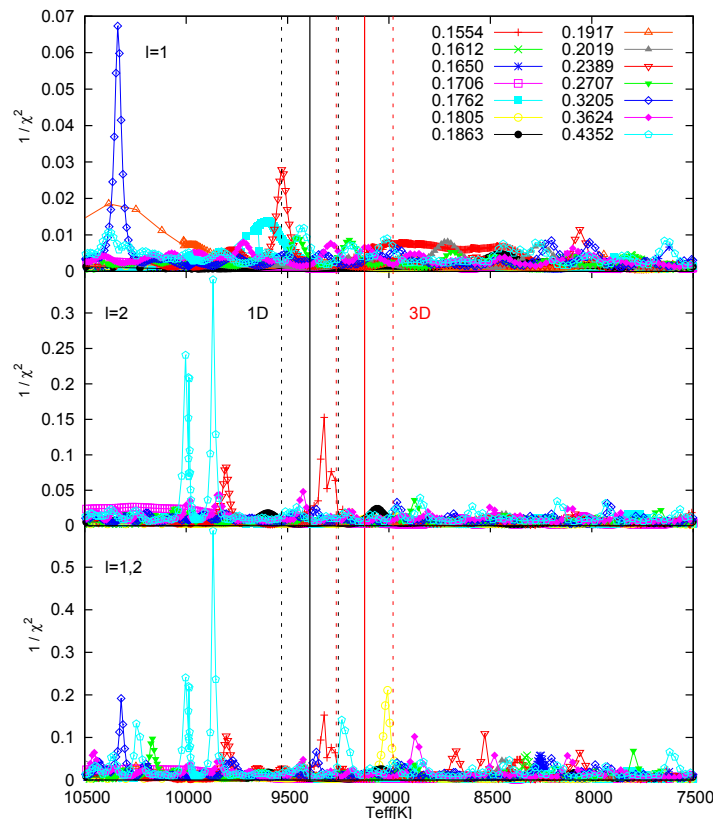


Figura 4.5: Inversa de la función de calidad del ajuste de períodos considerando $\ell = 1$ (panel superior), $\ell = 2$ (panel medio), y $\ell = 1, 2$ (panel inferior) contra la T_{eff} para J1840 (detalles en el texto). Las líneas verticales representan la T_{eff} (líneas verticales sólidas) y sus incertezas (líneas verticales discontinuas) para los modelos 1D (líneas negras) y 3D (líneas rojas).

4.5.2. El caso de J1112

Debido a que en su espectro de pulsaciones (que puede encontrarse en la Tabla 4.3), esta estrella exhibe dos períodos cortos, de ~ 108 s y ~ 134 s, que probablemente estén asociados a modos p o radiales, dividimos el análisis para J1112 en dos partes. Por un lado, consideramos los cinco períodos más largos, suponiendo que están todos asociados a modos g con $\ell = 1$, $\ell = 2$ o una mezcla de $\ell = 1$ y $\ell = 2$. Por otro lado, consideramos el conjunto completo de períodos (siete) suponiendo, en primer lugar, que están todos asociados a una mezcla de modos p y g con $\ell = 1$. En segundo lugar, que están todos asociados a una mezcla de modos p y g con $\ell = 1$ y $\ell = 2$, y también con modos radiales ($\ell = 0$). Cabe destacar que, adicionalmente, hemos explorado una posible combinación de modos p y g con $\ell = 1$ y $\ell = 2$ (no mostrado), pero no hemos obtenido resultados significativamente diferentes. Es importante mencionar que aún está pendiente la confirmación de la naturaleza de estos dos períodos más cortos, como mencionan Hermes et al. (2013c). Este hecho indica la relevancia de realizar análisis astrosismológicos separando los casos donde se incluyan y excluyan dichos períodos.

En la Figura 4.6 se puede ver el ajuste entre los períodos teóricos y los cinco más largos

Tabla 4.11: Comparación entre los períodos observados y teóricos para J1840, correspondientes al modelo astrosismológico con $M_{\star} = 0.2389 M_{\odot}$ y $T_{\text{eff}} = 9\,529$ K ($\ell = 1$). También se encuentran el grado armónico ℓ , el orden radial k , la diferencia de períodos absoluta, y la tasa de crecimiento no adiabática para cada período teórico.

$\Pi^{\text{O}}[\text{s}]$	$\Pi^{\text{T}}[\text{s}]$	ℓ	k	$ \delta\Pi [\text{s}]$	$\eta[10^{-5}]$	Observación
1 164.15	1 168.26	1	14	4.11	0.0345	inestable
1 578.70	1 589.47	1	20	10.77	0.384	inestable
2 376.07	2 378.49	1	31	2.42	2.61	inestable
3 930.0	3 923.65	1	52	6.35	4.72	inestable
4 445.3	4 445.20	1	59	0.1	4.16	inestable

Tabla 4.12: Igual que en la Tabla 4.11, pero para el modelo adoptado para J1840 con $M_{\star} = 0.1805 M_{\odot}$ y $T_{\text{eff}} = 9\,007$ K ($\ell = 1, 2$).

$\Pi^{\text{O}}[\text{s}]$	$\Pi^{\text{T}}[\text{s}]$	ℓ	k	$ \delta\Pi [\text{s}]$	$\eta[10^{-6}]$	Observación
1 164.15	1 163.53	2	20	0.62	0.719	inestable
1 578.70	1 577.75	2	28	0.95	2.47	inestable
2 376.07	2 373.77	2	43	2.30	4.13	inestable
3 930.0	3 933.98	2	72	3.98	-3.22	estable
4 445.3	4 444.16	1	47	1.14	6.96	inestable

observados de J1112, suponiendo que están todos asociados a modos g con $\ell = 1$ (panel superior), $\ell = 2$ (panel intermedio) o una mezcla de $\ell = 1$ y $\ell = 2$ (panel inferior).

En el caso en que $\ell = 1$, el máximo absoluto se encuentra a una temperatura efectiva comparativamente muy alta, y además, hay muchas otras soluciones para valores comparativamente bajos de T_{eff} . Dentro del rango posible para T_{eff} según el modelo 3D de atmósfera ($T_{\text{eff}} = 9\,240 \pm 140$ K), podría haber una solución para el modelo con $M_{\star} = 0.3205 M_{\odot}$ en $T_{\text{eff}} \sim 9\,253$ K. En la Tabla 4.13 mostramos la comparación de los períodos teóricos y los observados, como hemos hecho para J1840.

Si, por otro lado, consideramos el caso de la mezcla de períodos con $\ell = 1$ y $\ell = 2$, hay múltiples máximos locales que están asociados a modelos estelares demasiado calientes o demasiado fríos en comparación con los valores permitidos de T_{eff} . Aún así, es posible encontrar una solución dentro del rango de valores permitidos de T_{eff} (para el modelo 3D) para el modelo con $M_{\star} = 0.2389 M_{\odot}$, en $T_{\text{eff}} \sim 9\,300$ K. En la Tabla 4.14, mostramos la comparación entre los períodos observados y teóricos para este modelo.

A continuación, consideramos el caso en que el conjunto completo de períodos observado (siete) corresponde a modos p y g con $\ell = 1$ y, además, el caso en que corresponde a modos radiales ($\ell = 0$) y p y g ($\ell = 1, 2$). Mostramos los resultados en la Figura 4.7.

Para el caso de mezcla de modos p y g con $\ell = 1$ (panel inferior), el máximo absoluto yace en un valor alto de T_{eff} y no hay solución unívoca en los rangos de T_{eff} permitidos. Sin embargo, puede haber una solución posible para un modelo con $M_{\star} = 0.1612 M_{\odot}$, que sí se encuentra en el rango permitido de T_{eff} para el modelo 1D ($T_{\text{eff}} = 9\,590 \pm 140$ K).

En el análisis más completo, considerando también la mezcla de modos radiales ($\ell = 0$) y p y g ($\ell = 1, 2$), encontramos que el máximo absoluto se halla en el mismo modelo y

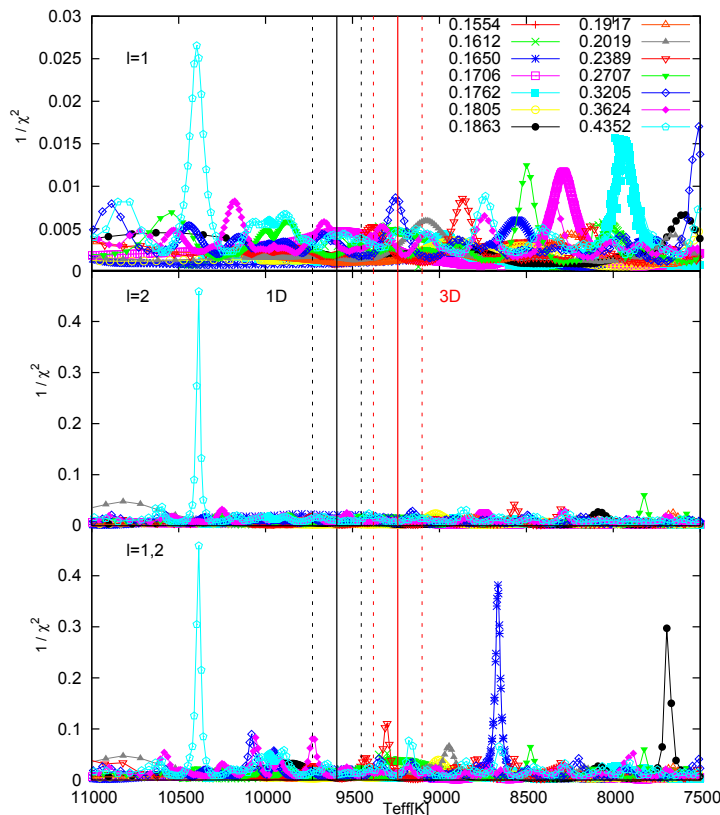


Figura 4.6: Igual que en la Figura 4.5, pero para J1112 en el caso de los cinco períodos más largos.

que representa un mejor ajuste porque tiene un valor mayor de $(\chi^2)^{-1}$, como se muestra en el panel superior de la Figura 4.7. Es el mejor ajuste de períodos para este caso, y corresponde a un modelo con $M_\star = 0.1612 M_\odot$ en $T_{\text{eff}} \sim 9709$ K. Por lo tanto, representa una solución muy buena para el caso del conjunto completo de períodos. Nuevamente, mostramos la comparación entre los períodos observados y teóricos en la Tabla 4.15. En la misma, puede verse que uno de los períodos cortos podría estar asociado a un modo p (con $\ell = 2$) y el otro, a un modo radial ($\ell = 0$).

Considerando todos los resultados de este análisis, podemos concluir que la mejor solución corresponde al modelo con $M_\star = 0.1612 M_\odot$ a $T_{\text{eff}} = 9709$ K, que se encuentra en línea con las masas espectroscópicas determinadas para esta estrella ($M_\star^{1D} = 0.179 M_\odot$ y $M_\star^{3D} = 0.169 M_\odot$), y también en acuerdo con la T_{eff} dada por la espectroscopía (para el modelo 1D). Desafortunadamente, nuestros cálculos no adiabáticos (ver la Tabla 4.15) predicen que todos los modos de esta posible solución son pulsacionalmente estables, lo cual nos fuerza a descartar esta solución. Cuando consideramos esto e ignoramos los dos períodos más cortos, vemos que es posible adoptar la solución con $M_\star = 0.2389 M_\odot$ y $T_{\text{eff}} = 9300$ K (ver la Tabla 4.14), aunque este valor de la masa estelar no está tan en acuerdo con las masas que resultan del análisis espectroscópico. Notamos, sin embargo, que todos los períodos de este modelo están asociados con modos pulsacionalmente inestables. Finalmente, el hecho de que no hayamos podido encontrar un modelo astrosismológico con modos inestables con períodos que ajusten los siete períodos observados en J1112

Tabla 4.13: Igual que en la Tabla 4.11, pero para J1112 (en el caso de los cinco períodos más largos), correspondiente el modelo con $M_{\star} = 0.3205 M_{\odot}$ y $T_{\text{eff}} = 9\,253\text{ K}$ ($\ell = 1$).

$\Pi^{\text{O}}[\text{s}]$	$\Pi^{\text{T}}[\text{s}]$	ℓ	k	$ \delta\Pi [\text{s}]$	$\eta[10^{-6}]$	Observación
1 792.905	1 802.269	1	26	9.364	4.90	inestable
1 884.599	1 867.419	1	27	17.18	4.87	inestable
2 258.528	2 264.984	1	33	6.456	5.54	inestable
2 539.695	2 530.317	1	37	9.378	5.91	inestable
2 855.728	2 863.702	1	42	7.974	5.08	inestable

 Tabla 4.14: Igual que en la Tabla 4.13 para J1112 (en el caso de los cinco períodos más largos), para el modelo con $M_{\star} = 0.2389 M_{\odot}$ y $T_{\text{eff}} = 9\,300\text{ K}$ ($\ell = 1, 2$).

$\Pi^{\text{O}}[\text{s}]$	$\Pi^{\text{T}}[\text{s}]$	ℓ	k	$ \delta\Pi [\text{s}]$	$\eta[10^{-6}]$	Observación
1 792.905	1 798.677	2	40	5.772	6.71	inestable
1 884.599	1 884.824	2	42	0.225	6.63	inestable
2 258.528	2 259.902	1	29	1.374	7.13	inestable
2 539.695	2 536.648	2	57	3.047	3.79	inestable
2 855.728	2 856.498	1	37	0.77	11.2	inestable

(incluyendo los más cortos) podría estar indicando que los períodos de $\sim 108\text{ s}$ y ~ 134 , reportados por Hermes et al. (2013c) no son auténticos períodos de pulsación. Esto sugiere la necesidad de un mayor trabajo fotométrico sobre esta estrella.

4.5.3. El caso de J1518

En la Figura 4.8 mostramos el ajuste entre los períodos teóricos y los siete períodos observados para J1518 (Tabla 4.4) suponiendo que están asociados a modos g con $\ell = 1$ (panel superior), $\ell = 2$ (panel medio), y $\ell = 1, 2$ (panel inferior).

En el caso con $\ell = 1$, vemos múltiples máximos locales. Sin embargo, en el rango de T_{eff} permitido por el modelo de atmósfera 3D ($T_{\text{eff}} = 9\,650 \pm 140\text{ K}$), hay una solución posible que puede ser elegida como modelo representativo de J1518. Esta corresponde a $M_{\star} = 0.3205 M_{\odot}$ y $T_{\text{eff}} \sim 9\,625\text{ K}$. En la Tabla 4.16, comparamos los períodos teóricos y los períodos observados para este modelo.

Para el caso de $\ell = 1, 2$, el mejor ajuste de períodos yace en un valor de T_{eff} muy bajo y hay múltiples máximos locales dentro de los rangos de T_{eff} permitidos. Sin embargo, hay una solución posible caracterizada por $M_{\star} = 0.2707 M_{\odot}$ y $T_{\text{eff}} \sim 9\,789\text{ K}$ que, aunque no es demasiado claro en la Figura, es el mejor ajuste de períodos que se encuentra dentro de los rangos de T_{eff} permitidos ($T_{\text{eff}}^{1D} = 9\,900 \pm 140\text{ K}$ y $T_{\text{eff}}^{3D} = 9\,650 \pm 140\text{ K}$). Presentamos en la Tabla 4.17 la comparación entre los períodos observados y los teóricos para este caso.

Considerando que la solución para el caso con $\ell = 1, 2$ implica un ajuste mucho mejor (es decir, un valor mayor de $(\chi^2)^{-1}$) que para el caso con $\ell = 1$, podemos adoptar el modelo con $M_{\star} = 0.2707 M_{\odot}$ y $T_{\text{eff}} = 9\,789\text{ K}$ como la solución astrosismológica para esta estrella, que está en línea con la T_{eff} dada por la espectroscopía. Adicionalmente, la mayoría de los períodos del modelo adoptado están asociados con modos pulsacionalmente inestables.

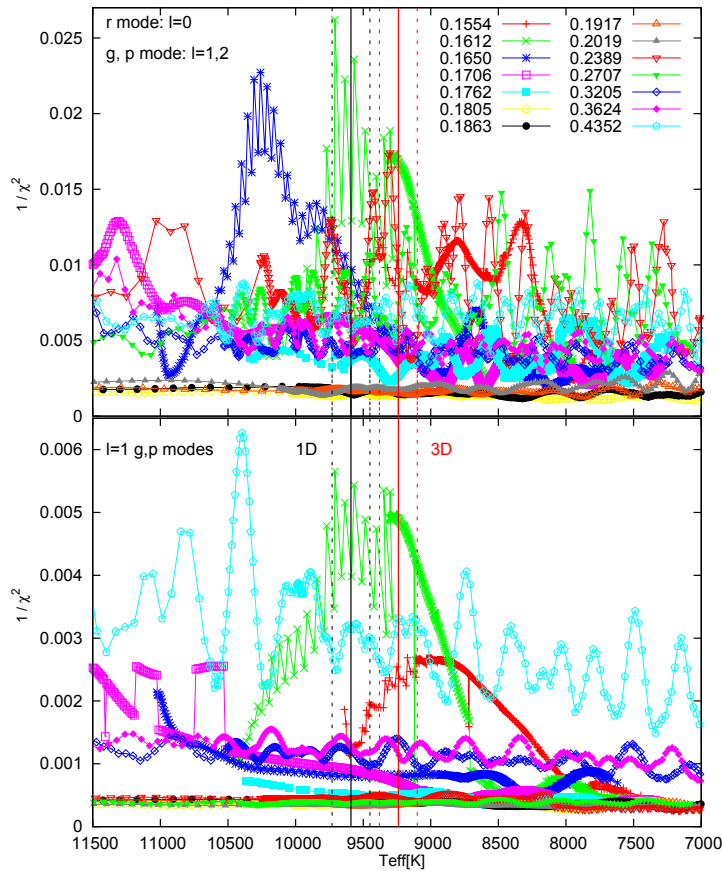


Figura 4.7: Igual que en la Figura 4.6, para el caso de los siete períodos observados en J1112. En el panel superior se ve el caso de modos radiales ($\ell = 0$) y p y g ($\ell = 1, 2$), mientras que en el panel inferior, se ve el caso de modos p y g con $\ell = 1$.

Es necesario, sin embargo, destacar que ninguna de las soluciones encontradas están en acuerdo con las masas que resultan de las determinaciones espectroscópicas ($M_{\star}^{1D} = 0.220 M_{\odot}$ y $M_{\star}^{3D} = 0.197 M_{\odot}$).

4.5.4. El caso de J1614

En la Figura 4.9 mostramos el ajuste entre los períodos teóricos y los dos períodos observados para J1614 (Tabla 4.5), suponiendo que están asociados a modos g con $\ell = 1$ (panel superior), $\ell = 2$ (panel medio), y $\ell = 1, 2$ (panel inferior). Es necesario mencionar antes de comenzar con este análisis, que este ajuste de períodos no será del todo confiable porque esta estrella solo muestra dos períodos independientes.

En el caso de $\ell = 1$, no hay una solución unívoca y las mejores soluciones están localizadas más allá de los rangos de T_{eff} permitidos. Sin embargo, es posible elegir un modelo con $M_{\star} = 0.1762 M_{\odot}$ y $T_{\text{eff}} \sim 8862$ K que yace dentro de los rangos de T_{eff} permitidos ($T_{\text{eff}}^{1D} = 8800 \pm 170$ K y $T_{\text{eff}}^{3D} = 8700 \pm 170$ K), y que además tiene un valor de la masa consistente con las determinaciones espectroscópicas. En la Tabla 4.18 mostramos la comparación entre los períodos observados y los períodos teóricos para este modelo.

En el caso de $\ell = 1, 2$, el mejor ajuste de períodos está ubicado en un valor de T_{eff}

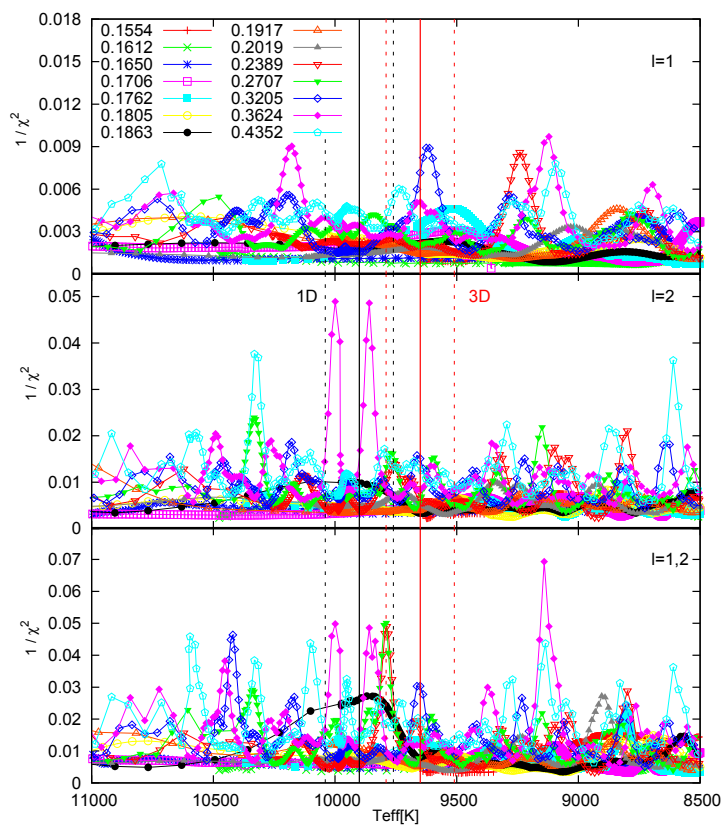


Figura 4.8: Igual que en la Figura 4.5, pero para J1518.

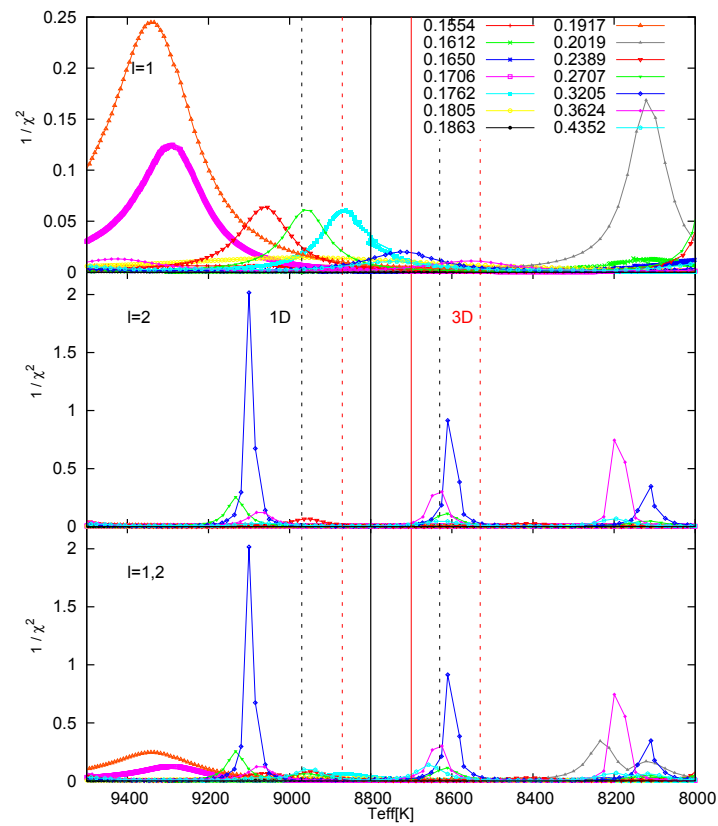


Figura 4.9: Igual que en la Figura 4.5, pero para J1614.

Tabla 4.15: Igual que en la Tabla 4.13 para J1112 (considerando el conjunto completo de períodos), pero para el modelo con $M_{\star} = 0.1612 M_{\odot}$ y $T_{\text{eff}} = 9\,709$ K, en el caso de modos p , g ($\ell = 1, 2$), y radiales ($\ell = 0$).

$\Pi^{\text{O}}[\text{s}]$	$\Pi^{\text{T}}[\text{s}]$		ℓ	k	$ \delta\Pi [\text{s}]$	$\eta[10^{-7}]$	Observación	
	g	p	radial					
107.56	—	—	105.176	0	1	2.384	-0.287	estable
134.275	—	136.881	—	2	0	2.606	-0.0238	estable
1\,792.905	1\,793.216	—	—	1	17	0.311	-0.0197	estable
1\,884.599	1\,889.869	—	—	2	32	5.270	-7.34	estable
2\,258.528	2\,272.008	—	—	2	39	13.480	-53.6	estable
2\,539.695	2\,543.853	—	—	2	44	4.158	-196	estable
2\,855.728	2\,850.465	—	—	1	28	5.263	-2.52	estable

Tabla 4.16: Igual que en la Tabla 4.11, pero para el modelo de J1518 con $M_{\star} = 0.3205 M_{\odot}$ y $T_{\text{eff}} = 9\,625$ K en el caso de $\ell = 1$.

$\Pi^{\text{O}}[\text{s}]$	$\Pi^{\text{T}}[\text{s}]$	ℓ	k	$ \delta\Pi [\text{s}]$	$\eta[10^{-5}]$	Observación
1\,335.318	1\,324.926	1	19	10.392	0.484	inestable
1\,956.361	1\,953.996	1	29	2.365	1.71	inestable
2\,134.027	2\,146.419	1	32	12.392	2.26	inestable
2\,268.203	2\,275.543	1	34	7.340	2.46	inestable
2\,714.306	2\,727.475	1	41	13.169	2.49	inestable
2\,799.087	2\,791.464	1	42	7.623	2.57	inestable
3\,848.201	3\,832.927	1	58	15.274	0.0899	inestable

alto, pero el segundo mejor ajuste está en el rango de T_{eff} permitido (para el modelo 3D). Este modelo está caracterizado por $M_{\star} = 0.3205 M_{\odot}$ y $T_{\text{eff}} \sim 8\,610$ K. Sin embargo, como podemos ver en la Tabla 4.19, la comparación entre los períodos observados y los dos teóricos muestra que ambos períodos están asociados con $\ell = 2$, lo cual no es usualmente el caso porque, como ya mencionamos arriba, es más probable observar períodos asociados a $\ell = 1$ que a $\ell = 2$. Por lo tanto, el modelo astrosismológico que adoptamos corresponde al caso de $\ell = 1$, con $M_{\star} = 0.1762 M_{\odot}$ y $T_{\text{eff}} = 8\,862$ K, con una masa que está en línea con las determinaciones espectroscópicas ($M_{\star}^{1D} = 0.192 M_{\odot}$ y $M_{\star}^{3D} = 0.172 M_{\odot}$) y una T_{eff} en acuerdo con la espectroscopía. Finalmente, como puede verse de la Tabla 4.18, ambos períodos están asociados con modos pulsacionalmente inestables.

4.5.5. El caso de J2228

En la Figura 4.10 mostramos el ajuste entre los períodos teóricos y los tres períodos observados para J2228 (Tabla 4.6), suponiendo que están asociados a modos g con $\ell = 1$ (panel superior), $\ell = 2$ (panel medio) y $\ell = 1, 2$ (panel inferior).

En el caso de $\ell = 1$, hay múltiples soluciones posibles y la solución que mejor ajusta está localizada en un valor alto de T_{eff} . Dentro de los rangos de T_{eff} permitidos ($T_{\text{eff}}^{1D} = 7\,870 \pm 120$ K y $T_{\text{eff}}^{3D} = 7\,890 \pm 120$ K), hay una solución posible para el modelo con

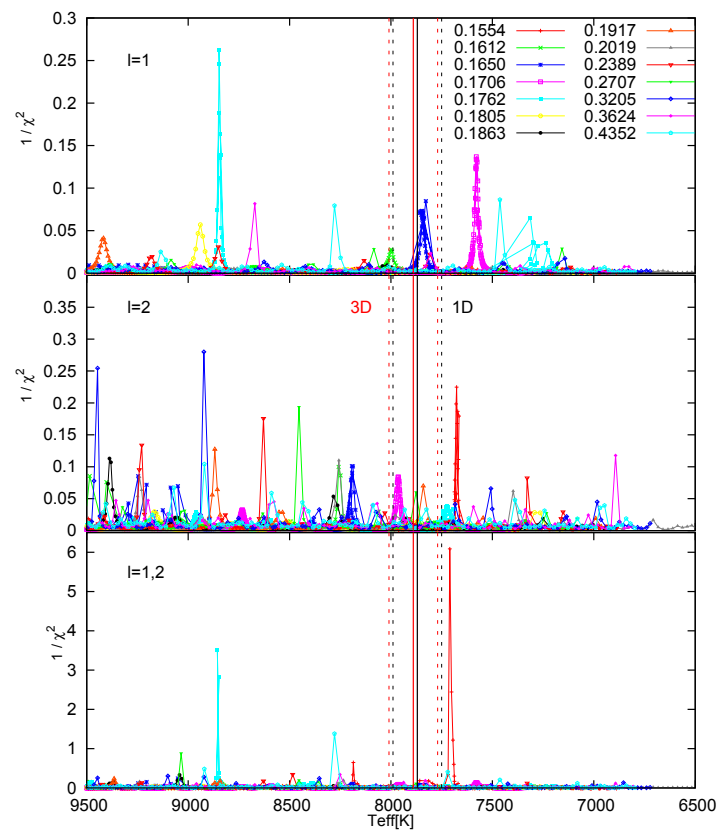


Figura 4.10: Igual que en la Figura 4.5, pero para J2228.

Tabla 4.17: Igual que en la Tabla 4.16, para el modelo adoptado para J1518 con $M_\star = 0.2707 M_\odot$ y $T_{\text{eff}} = 9789$ K en el caso de $\ell = 1, 2$.

Π^O [s]	Π^T [s]	ℓ	k	$ \delta\Pi $ [s]	$\eta[10^{-5}]$	Observación
1335.318	1331.485	2	32	3.833	3.94	inestable
1956.361	1960.394	2	48	4.033	5.37	inestable
2134.027	2140.805	1	30	6.778	5.25	inestable
2268.203	2274.699	1	32	6.496	6.55	inestable
2714.306	2714.827	2	67	0.521	0.711	inestable
2799.087	2794.753	2	69	4.334	-0.357	estable
3848.201	3847.023	1	55	1.178	7.81	inestable

 Tabla 4.18: Igual que en la Tabla 4.11, pero para el modelo adoptado para J1614 con $M_\star = 0.1762 M_\odot$ y $T_{\text{eff}} = 8862$ K en el caso de $\ell = 1$.

Π^O [s]	Π^T [s]	ℓ	k	$ \delta\Pi $ [s]	$\eta[10^{-9}]$	Observación
1184.106	1179.527	1	11	4.579	2.03	inestable
1262.668	1266.119	1	12	3.451	2.88	inestable

$M_\star = 0.1650 M_\odot$ y $T_{\text{eff}} \sim 7828$ K. En la Tabla 4.20 mostramos la comparación entre los períodos observados y los teóricos para este caso.

En el caso de $\ell = 1, 2$, el máximo absoluto yace muy cerca de los rangos de T_{eff} permitidos. Corresponde a un modelo con $M_\star = 0.1554 M_\odot$ y $T_{\text{eff}} \sim 7710$ K. En la Tabla 4.21 mostramos la comparación entre los períodos observados y los teóricos para este modelo.

Ya que la solución para el caso de $\ell = 1, 2$ ($M_\star = 0.1554 M_\odot$ y $T_{\text{eff}} = 7710$ K) implica un ajuste de períodos mucho mejor que la solución para el caso de $\ell = 1$, y dado que se encuentra en un valor de T_{eff} casi compatible con los valores dados por la espectroscopía, y que su masa está en línea con las determinaciones espectroscópicas para la masa ($M_\star^{1D} = 0.152 M_\odot$ y $M_\star^{3D} = 0.142 M_\odot$), adoptamos este modelo como la solución astrosismológica para J2228. De acuerdo con nuestros cálculos no adiabáticos (Tabla 4.21), la mayoría de los períodos del modelo adoptado están asociados con modos pulsacionalmente inestables.

4.5.6. El caso de J1738

En la Figura 4.11 se encuentra el ajuste entre los períodos teóricos y los tres períodos observados para J1738 (Tabla 4.7), suponiendo que están asociados a modos g con $\ell = 1$ (panel superior), $\ell = 2$ (panel medio) y $\ell = 1, 2$ (panel inferior).

En el caso de $\ell = 1$, la mejor solución yace en un valor muy alto de T_{eff} , pero la segunda mejor solución se encuentra dentro del rango permitido de T_{eff} (para la determinación del modelo 1D de atmósfera, $T_{\text{eff}} = 9130 \pm 140$ K). Esta solución está caracterizada por $M_\star = 0.4352 M_\odot$ y $T_{\text{eff}} \sim 9177$ K, y en la Tabla 4.22 mostramos la comparación entre los períodos observados y los teóricos.

En el caso de $\ell = 1, 2$, el máximo absoluto está ubicado en un valor de T_{eff} mayor al permitido por la espectroscopía ($T_{\text{eff}} = 9130 \pm 140$ K y $T_{\text{eff}} = 8910 \pm 150$ K, en los

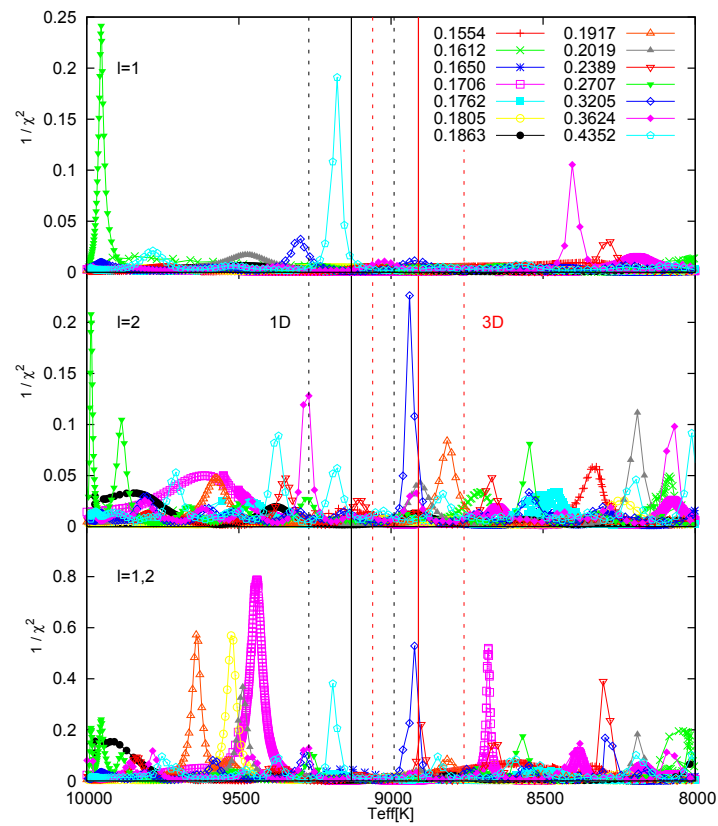


Figura 4.11: Igual que en la Figura 4.5, pero para J1738.

Tabla 4.19: Igual que en la Tabla 4.18 para J1614, pero para el modelo con $M_{\star} = 0.3205 M_{\odot}$ y $T_{\text{eff}} = 8610$ K en el caso de $\ell = 1, 2$.

$\Pi^{\text{O}}[\text{s}]$	$\Pi^{\text{T}}[\text{s}]$	ℓ	k	$ \delta\Pi [\text{s}]$	$\eta[10^{-7}]$	Observación
1184.106	1182.674	2	28	1.432	4.41	inestable
1262.668	1263.035	2	30	0.367	4.13	inestable

 Tabla 4.20: Igual que en la Tabla 4.11, pero para J2228, para el modelo con $M_{\star} = 0.1650 M_{\odot}$ y $T_{\text{eff}} = 7828$ K en el caso de $\ell = 1$.

$\Pi^{\text{O}}[\text{s}]$	$\Pi^{\text{T}}[\text{s}]$	ℓ	k	$ \delta\Pi [\text{s}]$	$\eta[10^{-8}]$	Observación
3254.5	3259.9	1	31	5.4	4.34	inestable
4178.3	4175.8	1	40	2.5	5.03	inestable
6234.9	6235.2	1	60	0.3	-7.02	estable

modelos 1D y 3D, respectivamente), y por lo visto, hay muchas otras soluciones posibles. Sin embargo, los modelos con $M_{\star} = 0.3205 M_{\odot}$ y $T_{\text{eff}} \sim 8922$ K, y $M_{\star} = 0.4352 M_{\odot}$ y $T_{\text{eff}} \sim 9192$ K son ajustes de períodos relativamente buenos, que se encuentran dentro de los rangos permitidos de T_{eff} . Cuando analizamos el ajuste período a período en detalle, vemos que el último caso (mostrado en la Tabla 4.23) podría ser más realista por tener más modos asociados con $\ell = 1$ que con $\ell = 2$. Lo opuesto ocurre para el primer caso, con lo cual sería preferible elegir la segunda solución, la que tiene una masa de $M_{\star} = 0.4352 M_{\odot}$, aunque no sea la mejor.

De este análisis, ya que los valores de $(\chi^2)^{-1}$ para las dos soluciones posibles (con $\ell = 1$ y $\ell = 1, 2$) no son considerablemente diferentes, y dado que el valor de la masa es el mismo para ambas pero la solución para el caso con $\ell = 1$ tiene más períodos asociados con modos pulsacionalmente inestables, concluimos que esta es la mejor solución astrosismológica, caracterizada por $M_{\star} = 0.4352 M_{\odot}$ y $T_{\text{eff}} = 9177$ K, que está en línea con la T_{eff} dada por la espectroscopía (para los cálculos del modelo de atmósfera 1D). Sin embargo, cuando comparamos la masa de este modelo con las masas de las determinaciones espectroscópicas ($M_{\star}^{1D} = 0.181 M_{\odot}$ y $M_{\star}^{3D} = 0.172 M_{\odot}$), vemos que no están en buen acuerdo. En resumen, no podemos encontrar acuerdo entre los resultados astrosismológicos y los espectroscópicos para J1738.

4.5.7. El caso de J1618

En la Figura 4.12 mostramos el ajuste entre los períodos teóricos y los tres períodos observados para J1618 (Tabla 4.8), suponiendo que están asociados a modos g con $\ell = 1$ (panel superior), $\ell = 2$ (panel medio) y $\ell = 1, 2$ (panel inferior).

En el caso de $\ell = 1$, las posibles soluciones son múltiples. Dentro del rango permitido de T_{eff} para el modelo 1D ($T_{\text{eff}} = 9144 \pm 120$ K), hay una posible solución para el modelo con $M_{\star} = 0.4352 M_{\odot}$ y $T_{\text{eff}} \sim 9136$ K, y en el rango permitido de T_{eff} para el modelo 3D ($T_{\text{eff}} = 8965 \pm 120$ K) hay otra posible solución para el modelo caracterizado por $M_{\star} = 0.2019 M_{\odot}$ y $T_{\text{eff}} \sim 8863$ K. Esta último parece ser más adecuada como solución debido a que su masa está en línea con las determinaciones espectroscópicas para la masa estelar

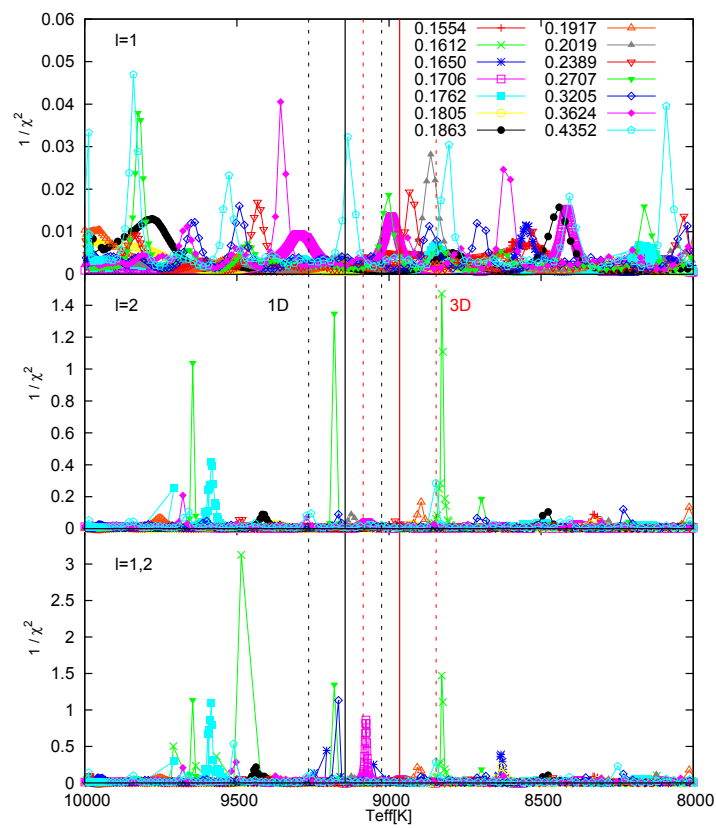


Figura 4.12: Igual que en la Figura 4.5, pero para J1618.

Tabla 4.21: Igual que en la Tabla 4.20 para J2228, pero para el modelo adoptado con $M_{\star} = 0.1554 M_{\odot}$ y $T_{\text{eff}} = 7710$ K, en el caso de $\ell = 1, 2$.

$\Pi^{\text{O}}[\text{s}]$	$\Pi^{\text{T}}[\text{s}]$	ℓ	k	$ \delta\Pi [\text{s}]$	$\eta[10^{-8}]$	Observación
3 254.5	3 254.2	2	52	0.3	1.61	inestable
4 178.3	4 177.9	2	67	0.4	-2.67	estable
6 234.9	6 234.4	1	58	0.5	0.832	inestable

 Tabla 4.22: Igual que en la Tabla 4.11, pero para el modelo adoptado para J1738 con $M_{\star} = 0.4352 M_{\odot}$ y $T_{\text{eff}} = 9177$ K en el caso de $\ell = 1$.

$\Pi^{\text{O}}[\text{s}]$	$\Pi^{\text{T}}[\text{s}]$	ℓ	k	$ \delta\Pi [\text{s}]$	$\eta[10^{-6}]$	Observación
1 788	1 788.9	1	30	0.9	3.41	inestable
2 656	2 654.4	1	45	1.6	0.232	inestable
3 057	3 060.5	1	52	3.5	-4.14	estable

(y, en comparación, el ajuste de períodos para la otra solución no es significativamente mejor). En la Tabla 4.24 mostramos la comparación entre los períodos observados y los teóricos para el modelo con $M_{\star} = 0.2019 M_{\odot}$.

En el caso de modos mezclados con $\ell = 1, 2$, se ve un máximo absoluto para un valor mayor de T_{eff} que el permitido, y no parece haber una única solución en los rangos de T_{eff} permitidos. Sin embargo, hay una posible solución caracterizada por $M_{\star} = 0.1706 M_{\odot}$ y $T_{\text{eff}} \sim 9076$ K, que si bien no es el mejor ajuste de períodos en los rangos de T_{eff} permitidos, corresponde a modos asociados con $\ell = 1$ y $\ell = 2$ (y no solo $\ell = 2$, ver Tabla 4.25) y, además, la masa está en bastante buen acuerdo con la masa de la determinación espectroscópica.

Aunque la solución para el caso con $\ell = 1$ ($M_{\star} = 0.2019 M_{\odot}$) tenga una masa ligeramente más cercana a los valores de masa dados para las determinaciones espectroscópicas para J1618 ($M_{\star}^{1D} = 0.220 M_{\odot}$ y $M_{\star}^{3D} = 0.179 M_{\odot}$) que la solución del caso con $\ell = 1, 2$ ($M_{\star} = 0.1706 M_{\odot}$), concluimos que el modelo con $M_{\star} = 0.1706 M_{\odot}$ y $T_{\text{eff}} = 9076$ K es una solución más adecuada cuando consideramos el hecho de que esta última es un mejor ajuste entre los períodos observados y teóricos, y también que este valor de masa estelar es más realista para este tipo de estrellas. Más aún, el valor de T_{eff} está en línea con la espectroscopía. Por lo tanto, este es el modelo que adoptamos para J1618. Notamos que todos los períodos del modelo adoptado están asociados con modos pulsacionalmente inestables.

4.5.8. El caso de J1735

En la Figura 4.13 representamos el ajuste entre los períodos teóricos y los cuatro períodos observados para J1735 (Tabla 4.9), suponiendo que están asociados a modos g con $\ell = 1$ (panel superior), $\ell = 2$ (panel medio) y $\ell = 1, 2$ (panel inferior).

En el caso de $\ell = 1$, se puede ver que hay múltiples máximos locales que tienen valores de T_{eff} que resultan ser demasiado altos o demasiado bajos en comparación con el rango permitido de T_{eff} ($T_{\text{eff}} = 7940 \pm 130$ K). Sin embargo, hay una solución posible dentro del rango, correspondiente al modelo con $M_{\star} = 0.3624 M_{\odot}$ y $T_{\text{eff}} \sim 7991$ K. En la

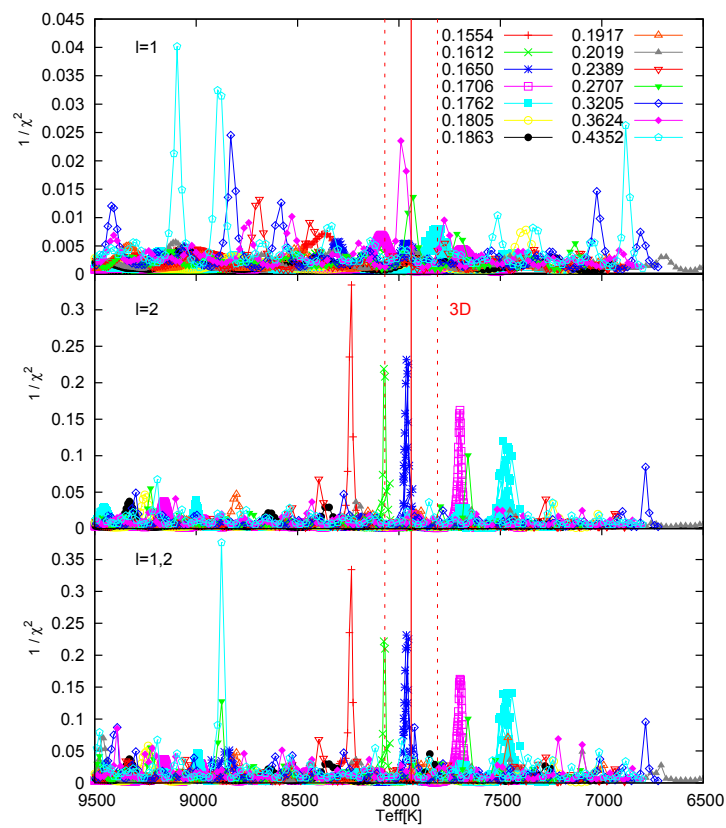


Figura 4.13: Igual que en la Figura 4.5, pero para J1735.

Tabla 4.23: Igual que en la Tabla 4.22 para J1738, pero para el modelo con $M_{\star} = 0.4352 M_{\odot}$ y $T_{\text{eff}} = 9192$ K en el caso de $\ell = 1, 2$.

$\Pi^{\text{O}}[\text{s}]$	$\Pi^{\text{T}}[\text{s}]$	ℓ	k	$ \delta\Pi [\text{s}]$	$\eta[10^{-6}]$	Observación
1788	1786.7	1	30	1.3	4.45	inestable
2656	2653.6	2	78	2.4	-31.0	estable
3057	3056.5	1	52	0.5	-4.13	estable

 Tabla 4.24: Igual que en la Tabla 4.11, pero para J1618, para el modelo con $M_{\star} = 0.2019 M_{\odot}$ y $T_{\text{eff}} = 8863$ K, en el caso de $\ell = 1$.

$\Pi^{\text{O}}[\text{s}]$	$\Pi^{\text{T}}[\text{s}]$	ℓ	k	$ \delta\Pi [\text{s}]$	$\eta[10^{-6}]$	Observación
2543.0	2546.46	1	29	3.46	1.70	inestable
4935.21	4927.03	1	57	8.18	0.347	inestable
6125.9	6131.16	1	71	5.26	-4.11	estable

Tabla 4.26 mostramos la comparación entre los períodos observados y los teóricos para el modelo mencionado. Notamos, sin embargo, que en este modelo estelar que constituye una solución sismológica posible para J1735, todos los modos son pulsacionalmente estables.

Para el caso en que $\ell = 1, 2$, los mejores ajustes de modelos tienen valores de T_{eff} mayores a los permitidos. Aunque hay una solución posible dentro del rango de T_{eff} permitido, para el modelo caracterizado por $M_{\star} = 0.1650 M_{\odot}$ y $T_{\text{eff}} \sim 7963$ K, cuando comparamos los períodos observados y teóricos (no mostrado), encontramos que están todos asociados a $\ell = 2$. El modelo con $M_{\star} = 0.1612 M_{\odot}$, que se encuentra a un valor de T_{eff} ligeramente superior al permitido (~ 8075 K) podría entonces ser una solución más adecuada para este caso (ver Tabla 4.27).

Tomando en cuenta la determinación espectroscópica para la masa de J1735, $M_{\star}^{3D} = 0.142 \pm 0.010 M_{\odot}$, y comparando la calidad del ajuste de períodos de los resultados astrosismológicos, encontramos que el modelo con $M_{\star} = 0.1612 M_{\odot}$ y $T_{\text{eff}} = 8075$ K es una solución apropiada (con un valor de T_{eff} casi comparable con el dado por la espectroscopía), y por lo tanto, este es el modelo que adoptamos. Este modelo tiene la mayoría de sus períodos asociados a modos pulsacionalmente inestables.

4.5.9. El caso de J2139

En la Figura 4.14 se encuentra representado el ajuste entre los períodos teóricos y los tres observados para J2139 (Tabla 4.10), suponiendo que están asociados a modos g con $\ell = 1$ (panel superior), $\ell = 2$ (panel medio) y $\ell = 1, 2$ (panel inferior).

En el caso de $\ell = 1$, podemos ver que el máximo absoluto, localizado en $T_{\text{eff}} \sim 8221$ K para un modelo con $M_{\star} = 0.1863 M_{\odot}$, se encuentra muy cerca del rango permitido de T_{eff} ($T_{\text{eff}} = 7990 \pm 130$ K). Entonces, representa una solución adecuada.

En el caso de modos mezclados con $\ell = 1, 2$, el máximo absoluto corresponde al mismo modelo, y los tres períodos están asociados con $\ell = 1$. Hay otras soluciones posibles, pero caen lejos del rango de T_{eff} permitido, y dentro de este rango, los ajustes son pobres. En la Tabla 4.28 mostramos la comparación entre los períodos observados y los teóricos para el

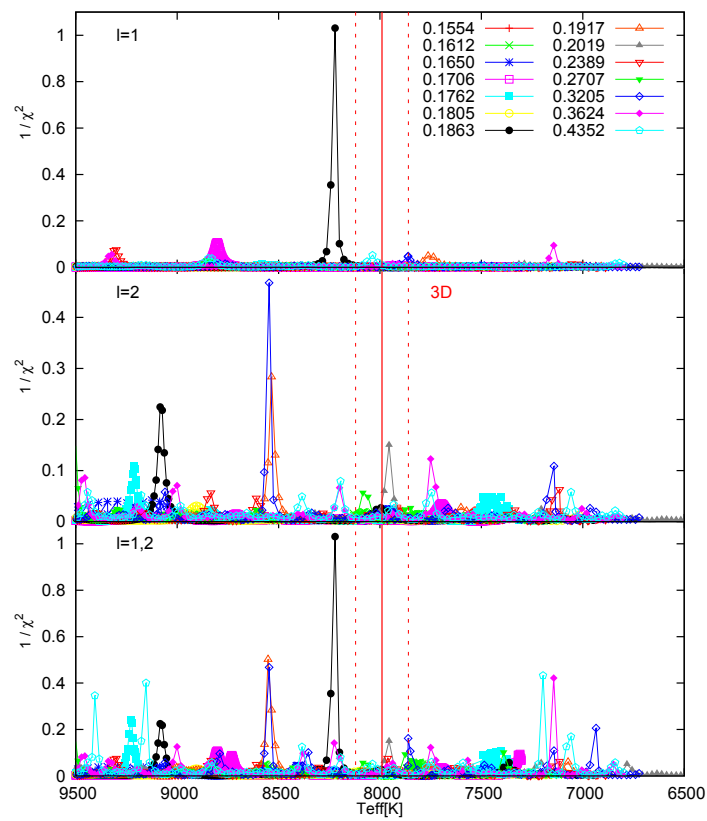


Figura 4.14: Igual que en la Figura 4.5, pero para J2139.

Tabla 4.25: Igual que en la Tabla 4.24, pero para el modelo adoptado para J1618 con $M_{\star} = 0.1706 M_{\odot}$ y $T_{\text{eff}} = 9076$ K, en el caso de $\ell = 1, 2$.

$\Pi^{\text{O}}[\text{s}]$	$\Pi^{\text{T}}[\text{s}]$	ℓ	k	$ \delta\Pi [\text{s}]$	$\eta[10^{-4}]$	Observación
2543.0	2541.44	1	26	1.56	0.0144	inestable
4935.21	4934.59	2	91	0.62	3.88	inestable
6125.9	6126.71	2	113	0.81	1.32	inestable

 Tabla 4.26: Igual que en la Tabla 4.11, pero para J1735, para el modelo con $M_{\star} = 0.3624 M_{\odot}$ y $T_{\text{eff}} = 7991$ K, en el caso de $\ell = 1$.

$\Pi^{\text{O}}[\text{s}]$	$\Pi^{\text{T}}[\text{s}]$	ℓ	k	$ \delta\Pi [\text{s}]$	$\eta[10^{-6}]$	Observación
3362.76	3356.67	1	48	6.09	-0.660	estable
3834.54	3841.23	1	55	6.69	-1.28	estable
4541.88	4535.74	1	65	6.14	-2.73	estable
4961.22	4954.12	1	71	7.10	-3.83	estable

modelo con $M_{\star} = 0.1863 M_{\odot}$.

Considerando estos resultados, es posible adoptar el modelo mencionado, con $M_{\star} = 0.1863 M_{\odot}$ y $T_{\text{eff}} = 8221$ K, que aunque no está del todo en línea con el resultado espectroscópico para la masa ($M_{\star}^{3D} = 0.149 \pm 0.011 M_{\odot}$) y la T_{eff} , representa un muy buen ajuste de períodos (con todos los períodos asociados a modos g con $\ell = 1$) y que además tiene todos los períodos asociados con modos pulsacionalmente inestables.

4.6. Conclusiones

En este Capítulo hemos presentado el primer análisis astrosismológico detallado de todas las estrellas enanas blancas de baja masa pulsantes conocidas hasta el momento, considerando el espectro de pulsaciones que exhiben (según consignan los diferentes autores, indicados en las Tablas 4.2 a 4.10), y empleando el conjunto de modelos evolutivos de Althaus et al. (2013).

Para este estudio, uno de los procedimientos que utilizamos está basado en la comparación entre el espaciamiento de períodos observado para la estrella bajo estudio con el espaciamiento promedio de los períodos teóricos computados para nuestra grilla de modelos. Para tal fin, entonces, primero intentamos determinar los espaciamientos de períodos para las ELMVs a través de tres tests de significancia independientes. Debido a que las estrellas bajo análisis exhiben pocos períodos, solo pudimos seguir este procedimiento para aquellas que muestran cuatro o más períodos, es decir, para J1840, J1112, J1518, y J1735. Sin embargo, para las dos primeras, no pudimos encontrar un espaciamiento de períodos constante unívoco. Para J1518 y J1735, en cambio, encontramos una clara indicación de un espaciamiento de períodos constante de aproximadamente 44 s y 59 s, respectivamente, para los tres tests de significancia aplicados. Luego de comparar estos valores con el espaciamiento promedio de los períodos teóricos de nuestra grilla de modelos, encontramos que las masas estelares resultantes (mayores a $0.4352 M_{\odot}$ en ambos casos) son superiores a las esperadas para este tipo de estrellas. En el caso de J1518,

Tabla 4.27: Igual que en la Tabla 4.26, pero para el modelo adoptado para J1735 con $M_{\star} = 0.1612 M_{\odot}$ y $T_{\text{eff}} = 8075$ K en el caso de $\ell = 1, 2$.

$\Pi^{\text{O}}[\text{s}]$	$\Pi^{\text{T}}[\text{s}]$	ℓ	k	$ \delta\Pi [\text{s}]$	$\eta[10^{-8}]$	Observación
3362.76	3359.87	2	56	2.89	5.57	inestable
3834.54	3831.65	2	64	2.89	0.243	inestable
4541.88	4542.92	2	76	1.04	-14.3	estable
4961.22	4960.70	1	48	0.52	13.9	inestable

 Tabla 4.28: Igual que en la Tabla 4.11, pero para el modelo adoptado para J2139 con $M_{\star} = 0.1863 M_{\odot}$ y $T_{\text{eff}} = 8221$ K en el caso de $\ell = 1$.

$\Pi^{\text{O}}[\text{s}]$	$\Pi^{\text{T}}[\text{s}]$	ℓ	k	$ \delta\Pi [\text{s}]$	$\eta[10^{-7}]$	Observación
2119.44	2120.01	1	22	0.57	1.14	inestable
2482.32	2483.89	1	26	1.57	1.74	inestable
3303.3	3303.63	1	35	0.33	2.19	inestable

esto podría estar asociado al hecho de que esta estrella no se encuentre pulsando en el límite asintótico (Córscico & Althaus 2014a). El caso de J1735 es más intrigante, porque esta estrella sí parece estar en ese régimen.

A continuación, buscamos el modelo astrosismológico que represente el mejor ajuste entre los períodos individuales de pulsación exhibidos por la estrella y los teóricos dados por los modelos. Para tal fin, estimamos la función de calidad $\chi^2 = \chi^2(M_{\star}, T_{\text{eff}})$ (dada por la ecuación 4.3 de la Sección 4.5) para el conjunto completo de secuencias de modelos del que disponemos, cubriendo un amplio rango de T_{eff} ($13000 \gtrsim T_{\text{eff}} \gtrsim 6000$ K). Para llevar a cabo este análisis, consideramos que todos los períodos observados corresponden a modos g con $\ell = 1$ y bajo esa suposición, calculamos la función de calidad de cada una de las estrellas bajo estudio. Asimismo, consideramos el caso (no tan probable) en que todos los períodos estén asociados a modos g con $\ell = 2$. Finalmente, consideramos el caso de una mezcla de modos g , con $\ell = 1$ y $\ell = 2$. Además, para el caso particular de J1112, llevamos a cabo dos análisis diferentes. Ya que los dos períodos más cortos reportados para esta estrella aún necesitan confirmación (Hermes et al. 2013c), primero realizamos un ajuste astrosismológico aplicado al subconjunto de los cinco períodos más largos exhibidos por esta estrella considerando tres casos: que están asociados a modos g con $\ell = 1$, $\ell = 2$ y una mezcla de $\ell = 1$ y $\ell = 2$. En segundo lugar, para el conjunto completo de siete períodos, exploramos dos posibilidades: que todos los períodos observados correspondan a una mezcla de modos g y p ($\ell = 1$) y, además, el caso en que los períodos observados correspondan a modos radial ($\ell = 0$), p y g ($\ell = 1, 2$). Debido a que en general encontramos multiplicidad de soluciones, nos vimos forzados a emplear restricciones externas al método (por ejemplo, el valor de T_{eff} y su incerteza, según resultan de la espectroscopía).

En la Tabla 4.29 mostramos un resumen de las determinaciones de las masas espectroscópicas (otros trabajos) y astrosismológicas (este trabajo) para las ELMVs. Considerando los resultados obtenidos, encontramos que la masa astrosismológica está en buen acuerdo con las determinaciones espectroscópicas para J1840 (para el caso de una mezcla de modos g con $\ell = 1, 2$), J1614 (para el caso de modos g con $\ell = 1$), J2228 (para el caso de modos g

Tabla 4.29: Masas estelares (en unidades solares) para todas las estrellas ELMV estudiadas.

Estrella	Ajuste de períodos			Espectroscopía (otros trabajos)	
	$\ell = 1$ (g)	$\ell = 1, 2$ (g)	$\ell = 1, 2(g, p)$ $\ell = 0$ (radial)	1D	3D
J1840	0.2389	0.1805	—	0.183 ^a	0.177 ^f
J1112	0.3205*	0.2389*	0.1612**	0.179 ^b	0.169 ^f
J1518	0.3205	0.2707	—	0.220 ^b	0.197 ^f
J1614	0.1762	0.3205	—	0.192 ^c	0.172 ^f
J2228	0.1650	0.1554	—	0.152 ^c	0.142 ^f
J1738	0.4352	0.4352	—	0.181 ^d	0.172 ^f
J1618	0.2019	0.1706	—	0.220 ^e	0.179 ^f
J1735	0.3624	0.1612	—	—	0.142 ^g
J2139	0.1863	—	—	—	0.149 ^g

Notas: ^aHermes et al. (2012). * Determinada usando un subconjunto de los períodos observados. **

Determinada usando el conjunto completo de períodos observados. ^bHermes et al. (2013c). ^cHermes et al.

(2013a). ^dKilic et al. (2015). ^eBell et al. (2015). ^f Determinada usando las correcciones para efectos 3D por

Tremblay et al. (2015). ^gBell et al. (2017a).

con $\ell = 1, 2$), J1618 (para el caso de modos g con $\ell = 1, 2$), y J1735 (para el caso de modos g con $\ell = 1, 2$). Consideramos que hay un buen acuerdo entre la masa astrosismológica y espectroscópica cuando la diferencia está por debajo de la incerteza del 15 %, es decir, la diferencia típica en el valor de la masa derivada de conjuntos independientes de tracks evolutivos. De este modo, concluimos que para la mayoría de las estrellas bajo estudio, los modelos adoptados de los análisis astrosismológicos tienen masas que están en acuerdo con los resultados espectroscópicos. En contraste, para cuatro estrellas (J1738, J1518, J1112 y J2139) obtuvimos un valor más alto de la masa estelar en comparación con las determinaciones espectroscópicas. En particular, considerando los resultados de las determinaciones de la masa para J1518, concluimos que no hay acuerdo entre la masa dada por la espectroscopía ($M_{\star}^{1D} = 0.220 M_{\odot}$ y $M_{\star}^{3D} = 0.197 M_{\odot}$), la obtenida al comparar el espaciamiento de períodos observado y el espaciamiento promedio de los períodos teóricos (que resulta ser mayor a $0.4352 M_{\odot}$), y la masa proveniente del modelo astrosismológico adoptado ($M_{\star} = 0.2707 M_{\odot}$). Además, cabe mencionar que aunque pudimos adoptar un modelo astrosismológico para J1735 cuya masa ($M_{\star} = 0.1612 M_{\odot}$) está en línea con la dada por la determinación espectroscópica ($M_{\star} = 0.142 \pm 0.010 M_{\odot}$), no hemos podido encontrar tal acuerdo para la masa resultante de la comparación entre el espaciamiento de períodos observado y el espaciamiento promedio de los períodos computados ($M_{\star} \gtrsim 0.44 M_{\odot}$). Revirtiendo el argumento, como esta estrella parece estar en el régimen asintótico, si el valor que hemos obtenido para el espaciamiento de períodos de esta estrella estuviese en realidad asociado con modos g de alto orden radial, esto podría indicar que la masa estelar es mayor que las que resultan de la determinación espectroscópica y del ajuste de períodos, aunque en ese caso entonces la estrella no podría ser clasificada como una enana blanca ELMV. Finalmente, vale la pena mencionar que, en general, los períodos de pulsación correspondientes a los modelos astrosismológicos adoptados en este trabajo para las ELMVs analizadas son pulsacionalmente inestables, de acuerdo con nuestros cálculos no adiabáticos. Este acuerdo entre las predicciones adiabáticas y no adiabáticas le da mayor relevancia a nuestros resultados astrosismológicos.

Tabla 4.30: Principales características de los modelos astrosismológicos adoptados para cada ELMV.

Estrella	T_{eff} [K]	$\log(g)$ [cgs]	M_{\star} [M_{\odot}]	$\log(R_{\star}/R_{\odot})$	$\log(L_{\star}/L_{\odot})$
J1840	9 007	6.6156	0.1805	-1.4609	-2.1487
J1112*	9 300	6.9215	0.2389	-1.5528	-2.2757
J1518*	9 789	7.0956	0.2707	-1.6126	-2.3098
J1614	8 862	6.3832	0.1762	-1.3497	-1.9547
J2228	7 710	6.1738	0.1554	-1.2725	-2.0409
J1738*	9 177	7.6241	0.4352	-1.7746	-2.7447
J1618	9 076	6.2403	0.1706	-1.2857	-1.7852
J1735	8 075	6.2241	0.1612	-1.2899	-1.9957
J2139*	8 221	6.6515	0.1863	-1.4724	-2.3279

Nota: * Solución cuya masa está en conflicto con los resultados espectroscópicos.

De los resultados presentados en este Capítulo para todas las ELMVs es evidente, una vez más, el poder que tiene este enfoque ya que en la mayoría de los casos hemos podido restringir el valor de la masa estelar. Más aún, el hecho de haber podido elegir un modelo astrosismológico representativo de cada estrella nos da acceso a información adicional, como puede verse en la Tabla 4.30, lo cual representa otra ventaja de esta técnica. Tomando en cuenta estos resultados, cuatro de las estrellas analizadas (J1840, J1518, J1738 y J2139) no serían estrictamente enanas blancas ELM, de acuerdo con la definición establecida previamente, es decir, los progenitores de estas estrellas podrían haber experimentado múltiples flashes.

En la Figura 4.15 mostramos la ubicación de las nueve ELMVs analizadas (de acuerdo con los parámetros del modelo de atmósfera 3D) y los valores correspondientes de T_{eff} y $\log g$ de los modelos astrosismológicos adoptados para cada estrella, junto con nuestros tracks evolutivos de enanas blancas de baja masa y núcleo de He, y el dominio de inestabilidad de modos g con $\ell = 1$ computados por Córscico & Althaus (2016). Como ya mencionamos, para cinco estrellas encontramos buen acuerdo entre las masas astrosismológica y espectroscópica, y para las otras cuatro estrellas el acuerdo es pobre. Además, la Figura 4.15 muestra que para ocho de las nueve estrellas que analizamos los modelos astrosismológicos son más masivos (es decir, están caracterizados por gravedades mayores) en comparación con los resultados espectroscópicos. Esta tendencia sistemática también es encontrada en el caso en que se adoptan los valores de T_{eff} y $\log(g)$ de los cálculos de atmósfera 1D (no mostrado). Esta tendencia puede deberse, en parte, al hecho de que no hemos considerado modelos de enana blanca de baja masa y núcleo de He caracterizados por envolturas de H más delgadas que aquellas predichas por la historia evolutiva binaria completa de las estrellas progenitoras. De forma alternativa, podría ser una indicación de que las determinaciones espectroscópicas de $\log g$ y T_{eff} de esta clase de estrellas no son correctas.

En este trabajo hemos considerado enanas blancas de baja masa y núcleo de He provenientes de progenitores con metalicidad solar, típicos de la población del disco galáctico. La masa estelar umbral por debajo de la cual no se espera que ocurran los flashes de CNO en la rama de enfriamiento temprana de las enanas blancas es $\sim 0.18M_{\odot}$. Si hubiésemos adoptado progenitores con metalicidad inferior, la masa umbral debería de ser mayor (ver

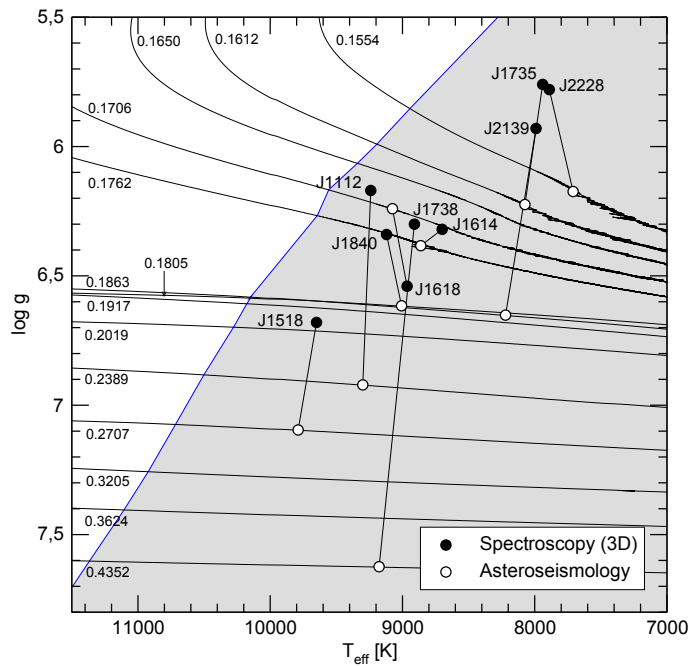


Figura 4.15: Ubicación en el plano $\log T_{\text{eff}} - \log g$ de las nueve estrellas analizadas, de acuerdo con los parámetros espectroscópicos del modelo de atmósfera 3D (círculos negros) y el correspondiente modelo astrosismológico adoptado para cada estrella (círculos blancos), junto con nuestros tracks evolutivos de enanas blancas de núcleo de He de baja masa. La región sombreada limitada por la línea delgada azul corresponde con el dominio de inestabilidad de los modos g con $\ell = 1$, de acuerdo con los cálculos no adiabáticos de Córscico & Althaus (2016).

Serenelli et al. 2002; Nelson et al. 2004; Istrate et al. 2016b). Y en ese caso, las envolturas de H de las enanas blancas de baja masa serían ser más gruesas que las obtenidas en Althaus et al. (2013) (ver Istrate et al. 2016b, por ejemplo). Esto significa que cuando suponemos que algunas de las ELMVs que estudiamos en este trabajo son objetos del halo galáctico, el análisis astrosismológico debería estar basado en modelos evolutivos provenientes de metalicidad baja, y por lo tanto, los modelos astrosismológicos para cada estrella analizada podrían ser distintos a los obtenidos en este trabajo.

Finalmente, en este trabajo hemos considerado modelos de enanas blancas de baja masa y núcleo de He caracterizados por envolturas de H gruesas, consistentes con la evolución previa (suponiendo una transferencia de masa estable vía RLOF). Sin embargo, como hemos expuesto, hay grandes incertezas sobre el valor preciso del espesor de la envoltura. No podemos descartar que si el escenario de transferencia de masa es inestable, por ejemplo, a través de una envoltura común, el espesor de la envoltura de H resulte delgado. En el siguiente trabajo, presentaremos un conjunto de secuencias con un rango amplio de espesores de la envoltura, a partir de las cuales, llevaremos a cabo un nuevo estudio astrosismológico.

5 | Secuencias de enanas blancas ELM con envolturas de H delgadas y nuevos ajustes astrosismológicos de ELMVs

“Deep in the human unconscious is a pervasive need for a logical universe that makes sense. But the real universe is always one step beyond logic.”

Dune, Frank Herbert (1965)

La mayoría de los resultados mostrados en el presente Capítulo han sido publicados en los artículos **“Pulsating low-mass white dwarfs in the frame of new evolutionary sequences VI. Thin H-envelope sequences and asteroseismology of ELMV stars revisited”**, Leila M. Calcaferro, Alejandro H. Córscico, Leandro G. Althaus, Alejandra D. Romero, and S. O. Kepler. *Astronomy & Astrophysics*, 620, A196 (2018), y **“A refined search for pulsations in white dwarf companions to millisecond pulsars”**, Mukremin Kilic, J. J. Hermes, A. H. Córscico, Alekzander Kosakowski, Warren R. Brown, John Antoniadis, Leila M. Calcaferro, A. Gianninas, Leandro G. Althaus and M. J. Green. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 479, 1267-1272 (2018).

5.1. Introducción

En el Capítulo 4 hemos presentado el primer análisis astrosismológico aplicado al conjunto completo de ELMVs conocidas hasta el momento. A pesar de que las estrellas bajo estudio tienen muy pocos períodos detectados y que hay muchas soluciones posibles, en la mayoría de los casos pudimos adoptar un modelo astrosismológico en el cual los valores correspondientes de M_{\star} y T_{eff} se encuentran dentro de los valores dados por las determinaciones espectroscópicas. Además, nuestros cálculos no adiabáticos indican que, en general, los períodos de pulsación correspondientes a dichos modelos astrosismológicos están asociados a modos propios pulsacionalmente inestables. Sin embargo, los modelos astrosismológicos derivados para la mayoría de las estrellas analizadas resultan más masivos de lo esperado en comparación con las determinaciones espectroscópicas. Concluimos que parte de los resultados obtenidos podrían deberse, hasta cierto punto, al hecho de que solo consideramos modelos de enanas blancas de baja masa con núcleo de He caracterizados por una envoltura externa de H gruesa, proveniente de un escenario evolutivo de pérdida de masa estable mediante RLOF (Althaus et al. 2013; Istrate et al.

2016b), en lugar de considerar la posibilidad de que tengan envoltura de H más delgada (ver Sección 1.1.3). En este sentido, no es posible descartar la existencia de este tipo de enanas blancas de baja masa, que por tener envoltura de H delgada, no pueden mantener quema residual de H y cuya formación puede ser el resultado de la evolución a través de una envoltura común de sistemas binarios interactuantes (Woods et al. 2012; Nandez & Ivanova 2016; Ivanova & Nandez 2016; Clayton et al. 2017) o de la pérdida de la envoltura de una estrella RGB inducida por un planeta gigante cayendo en espiral (Nelemans & Tauris 1998; De Marco & Soker 2002; Sabach & Soker 2018). Bajo estas consideraciones, que retomaremos en el Capítulo 6, concluimos que la posible existencia de enanas blancas ELM con envoltura de H delgada debe tenerse en cuenta.

Debido a las motivaciones expuestas, en este Capítulo presentamos un nuevo conjunto de secuencias evolutivas de enanas blancas de baja masa con núcleo de He y un rango amplio de envolturas de H. Comenzamos por analizar las propiedades pulsacionales de las nuevas secuencias. Posteriormente, empleando esta expansión del espacio de parámetros que da lugar a un gran número de modelos ($0.1554 \leq M_{\star}/M_{\odot} \leq 0.4352$, $6000 \lesssim T_{\text{eff}} \lesssim 13000$ K, y envoltura de H con masa en el rango de $-5.8 \lesssim \log(M_{\text{H}}/M_{\star}) \lesssim -1.7$), llevamos a cabo un nuevo ajuste de períodos detallado aplicado a todas las ELMVs. Para una de ellas, J1738, mostramos además parte del trabajo presentado en Kilic et al. (2018), en el cual se ha reobservado esta estrella, confirmando su carácter variable. Empleando los períodos determinados por las nuevas observaciones, nuestra participación ha sido mediante la realización de un análisis astrosismológico sobre el nuevo conjunto de períodos en comparación con los períodos previamente consignados. Finalmente, las consecuencias de la presencia de envolturas de H delgadas sobre las edades de enfriamiento de enanas blancas de baja masa con núcleo de He serán analizadas en el siguiente Capítulo.

5.2. Secuencias con diferente espesor de la envoltura de H

Como hemos mencionado, en este trabajo hemos incorporado un aspecto innovador: la generación de nuevas secuencias evolutivas de enanas blancas de baja masa con núcleo de He y envoltura delgada de H. El procedimiento que hemos seguido para producir estas secuencias es simple (ver el caso de estrellas ZZ Ceti en Romero et al. 2012) y se basa en las secuencias previamente generadas por Althaus et al. (2013) (Sección 2.3). Con el objetivo de obtener un rango de espesores de la envoltura de H para cada secuencia caracterizada por un dado valor de M_{\star} y un valor de M_{H} que es *grueso* (en adelante, nos referiremos a los modelos de Althaus et al. (2013) como *canónicos*, de modo que hablar de una secuencia canónica implica que tiene una envoltura gruesa) según predicen los cálculos evolutivos de Althaus et al. (2013) (y cuyo valor se encuentra en la segunda columna de la Tabla 5.1) hemos reemplazado parte del ^1H por ^4He con el fin de obtener los valores deseados de la masa de la envoltura de H. Este procedimiento, aunque artificial, es realizado a muy altos valores de T_{eff} en la secuencia de enfriamiento final para poder deshacerse de cualquier efecto transitorio que no esté relacionado con la física sino con el procedimiento en sí, mucho antes de que los modelos alcancen la etapa de pulsaciones de las estrellas ELMVs. Luego de cambiar el grosor de la envoltura, se permite que actúe la difusión de elementos dependiente del tiempo mientras los modelos de enana blanca se enfrían hasta alcanzar los valores típicos de T_{eff} que representan la banda de inestabilidad de las

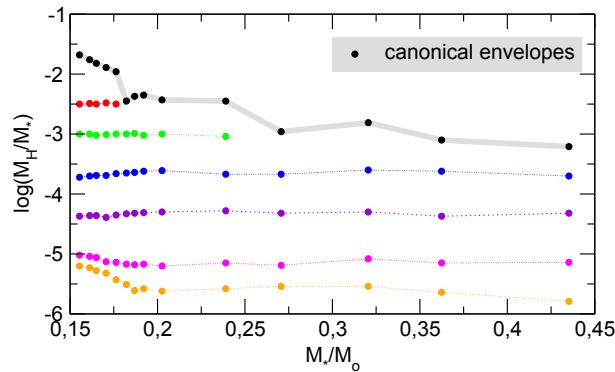


Figura 5.1: Grilla de secuencias evolutivas de enanas blancas de baja masa con núcleo de He mostradas en el plano $M_{\star}/M_{\odot} - \log(M_{\text{H}}/M_{\star})$. Los círculos pequeños representan cada secuencia de modelos de enana blanca con una dada masa estelar y un espesor específico de la envoltura de H para $T_{\text{eff}} \sim 8000$ K. Los círculos negros conectados por una línea gruesa gris corresponden a los valores del máximo grosor de la envoltura de H tal como lo predicen los cálculos evolutivos de Althaus et al. (2013). Para cada secuencia, hemos analizado pulsacionalmente unos 200 modelos estelares, cubriendo el intervalo de T_{eff} entre 6000 y 10000 K.

ELMVs ($T_{\text{eff}} \sim 10000$ K). La difusión erosiona fuertemente los perfiles químicos en las regiones de transición química de He/H. Los valores de la cantidad de H que resultan de los diferentes espesores de las envolturas de las enanas blancas a $T_{\text{eff}} \sim 8000$ K pueden verse en la Tabla 5.1. Además, en la Figura 5.1 puede apreciarse una representación gráfica de la grilla de modelos empleados en este y el próximo Capítulo, donde una línea gris gruesa conecta los valores canónicos de M_{H} predichos por la evolución estelar según Althaus et al. (2013). Nuestra nueva grilla consiste de 85 secuencias de enanas blancas de baja masa con núcleo de He, que comprenden entonces un total de alrededor de 17000 modelos estelares que fueron analizados pulsacionalmente en este trabajo.

En los paneles superiores de las Figuras 5.2 y 5.3 se muestran los perfiles químicos internos de H correspondientes a modelos de enanas blancas a $T_{\text{eff}} \sim 8000$ K con $M_{\star} = 0.1554 M_{\odot}$ y $M_{\star} = 0.2390 M_{\odot}$. En cada caso, mostramos el perfil correspondiente a la envoltura canónica con una línea negra, y las envolturas delgadas de H con líneas de diferentes colores. Para los modelos con $M_{\star} = 0.1554 M_{\odot}$ (Figura 5.2), notamos que las envolturas con $\log(M_{\text{H}}/M_{\star}) = -2.50$ y -3.00 tienen una forma de doble capa que consiste en una envoltura de H pura que rodea una capa rica en H y He. En las otras envolturas (incluida la canónica), las regiones de transición están caracterizadas por perfiles químicos simples. En el caso de modelos con $M_{\star} = 0.2390 M_{\odot}$ (Figura 5.3), la región de transición He/H tiene forma de capa simple para todos los espesores considerados de la envoltura de H.

5.2.1. Estructura química de capas simple y doble de la envoltura de H

En esta Sección veremos que en el caso de modelos de enanas blancas ELM, es decir, modelos de enanas blancas con masa estelar en el intervalo $0.1554 \leq M_{\star}/M_{\odot} \leq 0.1762$, las

Tabla 5.1: Masas estelares de nuestro conjunto de modelos de enanas blancas de baja masa con núcleo de He (columna 1) y cantidad de H asociada a los diferentes espesores de la envoltura adoptada para cada masa estelar ($T_{\text{eff}} \sim 8000$ K). En la segunda y el resto de las columnas, se indican el límite superior del espesor de la envoltura de H (envoltura canónica) para cada masa estelar como resulta de los cálculos completamente evolutivos de Althaus et al. (2013) que suponen una pérdida de masa estable (RLOF).

$\frac{M_{\star}}{M_{\odot}}$	$\log(\frac{M_{\text{H}}}{M_{\star}})$	$\log(\frac{M_{\text{H}}}{M_{\star}})$	$\log(\frac{M_{\text{H}}}{M_{\star}})$	$\log(\frac{M_{\text{H}}}{M_{\star}})$	$\log(\frac{M_{\text{H}}}{M_{\star}})$	$\log(\frac{M_{\text{H}}}{M_{\star}})$	$\log(\frac{M_{\text{H}}}{M_{\star}})$
0.1554	-1.69	-2.50	-3.00	-3.72	-4.37	-5.02	-5.20
0.1612	-1.76	-2.49	-3.00	-3.70	-4.35	-5.04	-5.23
0.1650	-1.82	-2.50	-3.01	-3.69	-4.35	-5.06	-5.28
0.1706	-1.89	-2.50	-3.01	-3.69	-4.39	-5.13	-5.32
0.1762	-1.95	-2.50	-3.00	-3.66	-4.34	-5.14	-5.43
0.1805	-2.44	-	-3.00	-3.65	-4.33	-5.17	-5.51
0.1869	-2.37	-	-2.99	-3.64	-4.32	-5.19	-5.61
0.1921	-2.35	-	-3.02	-3.62	-4.30	-5.17	-5.58
0.2025	-2.43	-	-3.00	-3.61	-4.30	-5.20	-5.62
0.2390	-2.45	-	-3.04	-3.67	-4.28	-5.15	-5.58
0.2707	-2.96	-	-	-3.67	-4.32	-5.19	-5.54
0.3205	-2.81	-	-	-3.60	-4.30	-5.08	-5.54
0.3624	-3.10	-	-	-3.62	-4.32	-5.15	-5.64
0.4352	-3.21	-	-	-3.71	-4.32	-5.14	-5.79

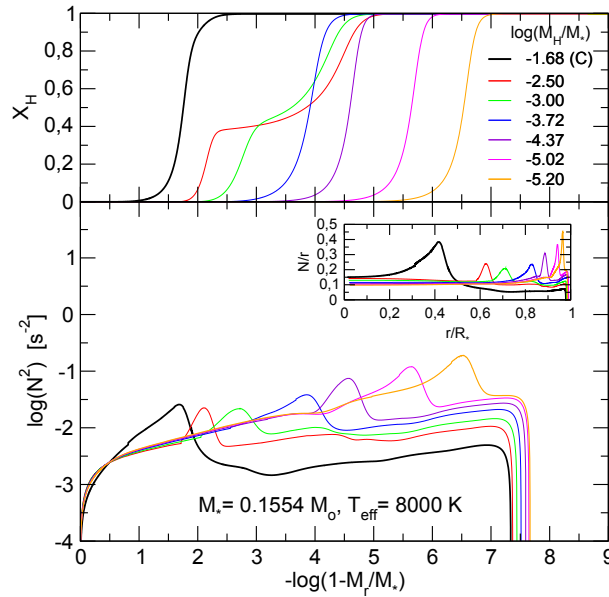


Figura 5.2: *Panel superior:* Perfiles químicos de H para los modelos de enanas blancas con $M_{\star} = 0.1554 M_{\odot}$, $T_{\text{eff}} \sim 8000$ K y diversos espesores de la envoltura de H. La línea negra corresponde a la envoltura canónica. *Panel inferior:* Logaritmo de la frecuencia de Brunt-Väisälä al cuadrado para cada modelo representado. El recuadro muestra la cantidad N/r como función de la coordenada radial, r , para los mismos modelos de enana blanca.

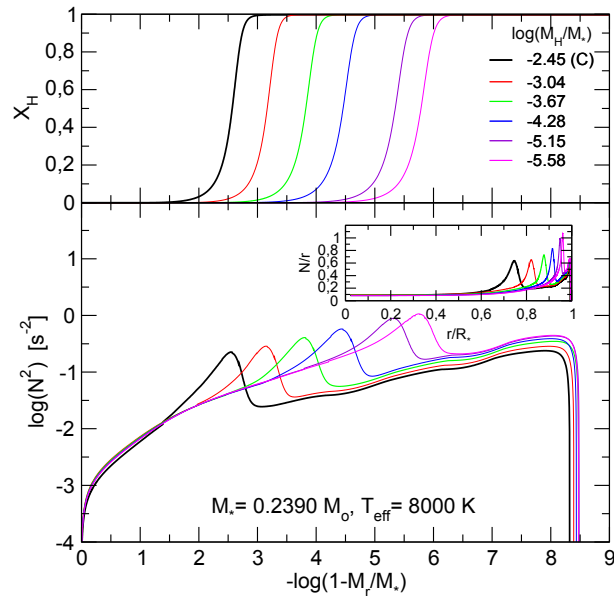


Figura 5.3: Igual que en la Figura 5.2, pero para modelos con $M_{\star} = 0.2390 M_{\odot}$.

envolturas de H pueden tener una estructura química de doble capa, para ciertos valores de temperatura efectiva bien dentro de la banda de inestabilidad de estrellas ELMVs. Para analizar esto, adoptamos la secuencia con $M_{\star} = 0.1554 M_{\odot}$ y calculamos varias secuencias de modelos con el espesor de la envoltura de H en el rango $-5.20 \leq \log(M_{\text{H}}/M_{\star}) \leq -1.68$ con un pequeño paso $\Delta(M_{\text{H}}/M_{\star})$. Este rango de espesores de la envoltura incluye el valor canónico $M_{\text{H}} = 2.09 \times 10^{-2} M_{\star}$ para esta secuencia de modelos ($M_{\star} = 0.1554 M_{\odot}$).

En la Figura 5.4 puede verse la abundancia fraccional de H como función de la fracción de masa externa¹ para modelos con $M_{\star} = 0.1554 M_{\odot}$ y $T_{\text{eff}} \sim 8000$ K y varios espesores de la envoltura de H. Las curvas han sido desplazadas hacia arriba de forma arbitraria con fines de claridad. Notemos que para envolturas gruesas de H, con valores cercanos al canónico ($M_{\text{H}} \gtrsim 1.50 \times 10^{-2} M_{\star}$), la región de la transición química de He/H tiene una estructura de capa simple a $T_{\text{eff}} \sim 8000$ K (curvas inferiores negras en Figura 5.4). Esto se debe a que la presencia de envolturas tan gruesas de H da lugar a una quema nuclear residual de H y esta constituye la principal fuente de energía de la enana blanca. Esto, a su vez, resulta en escalas de tiempo de enfriamiento muy largas (del orden de los $\sim 10^9$ años). La difusión de elementos dependiente del tiempo, actuando durante estas largas escalas de tiempo, modifica fuertemente la forma inicial de los perfiles de H y He mientras la enana blanca se enfría, forzando que el He se hunda y el H flote hacia la superficie.

Cuando consideramos envolturas de H levemente más delgadas, la quema nuclear es mucho menos importante en relación con la escala de tiempo de enfriamiento del modelo de enana blanca, y la estrella se enfría mucho más rápido. Siendo este el caso, la escala de tiempo de la difusión en la base de la envoltura de H es mucho más larga que la escala de tiempo de enfriamiento de la enana blanca. Como resultado, durante el enfriamiento de la estrella, el H flota a la superficie en las capas más externas, pero la base de la envoltura de

¹La elección de esta coordenada permite una mejor visualización de la parte más externa de la estrella, en comparación con la coordenada M_r .

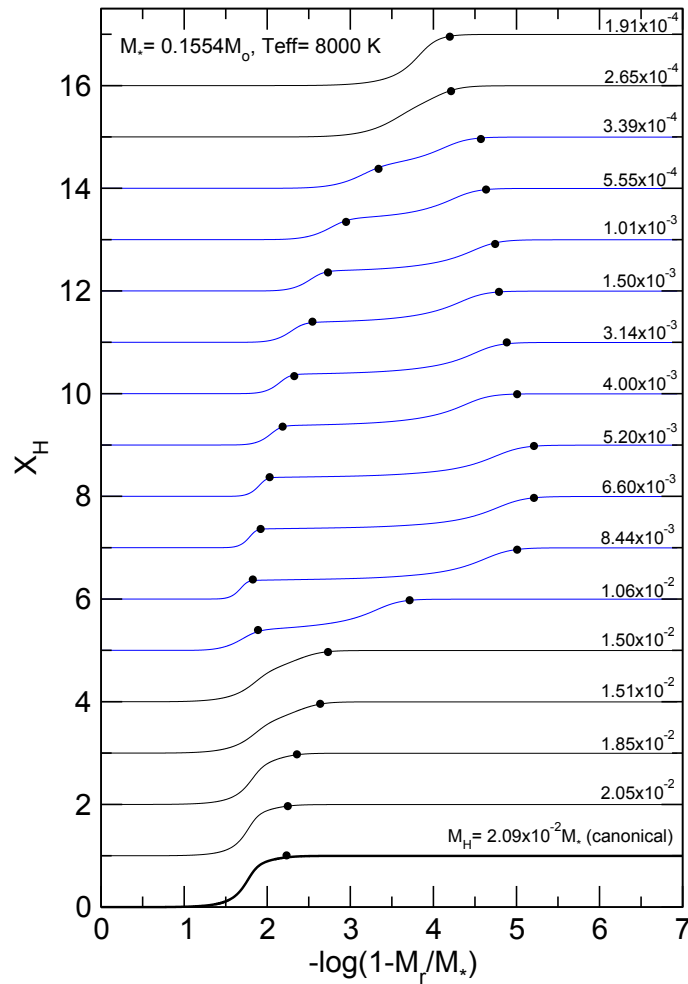


Figura 5.4: Abundancia fraccional de H (X_H) contra la coordenada de la fracción de masa externa, para modelos de ELM con $M_\star = 0.1554 M_\odot$ y $T_{\text{eff}} = 8000$ K. La curva inferior (negra y gruesa) corresponde a un modelo caracterizado por la envoltura más gruesa (canónica) para esta masa estelar, mientras que las curvas superiores (que han sido artificialmente desplazadas hacia arriba por claridad) corresponden a modelos con envolturas de H con espesor decreciente. Las curvas negras (azules) corresponden a modelos con envolturas de H con una estructura química de capa simple (capa doble). Los puntos negros indican la ubicación de cada paso en el perfil químico.

H permanece virtualmente sin alteraciones. La consecuencia de esto es que la envoltura tiene una estructura química de doble capa, que consiste en una envoltura pura de H que rodea a una cáscara rica en H y He.

La presencia de una estructura química de doble capa en la envoltura de nuestros modelos es una consecuencia de la evolución estelar. Un resultado similar ha sido reportado en detalle para modelos de estrellas enanas blancas DB (por ejemplo, Althaus & Córscico 2004). La Figura 5.4 muestra que se espera que los modelos de enanas blancas ELM con $M_{\star} = 0.1554 M_{\odot}$ y $T_{\text{eff}} \sim 8000$ K tengan una estructura química de doble capa para envolturas de H con espesores en el rango $3.4 \times 10^{-4} \lesssim M_{\text{H}}/M_{\star} \lesssim 1 \times 10^{-2}$ (curvas azules en la Figura). Sin embargo, la existencia de una capa doble apenas impacta las propiedades pulsacionales de nuestras enanas blancas ELM.

Finalmente, para envolturas de H aún más delgadas ($M_{\text{H}} \lesssim 3.4 \times 10^{-4} M_{\star}$), el perfil de H de los modelos a la misma T_{eff} adopta una estructura química de capa simple (curvas superiores negras en la Figura 5.4). Esto es simplemente porque para ELMs con envolturas de H muy delgadas la escala de tiempo de la difusión en la cola de la distribución de H es extremadamente corta (debido a las densidades más bajas), mucho más corta que los tiempos de enfriamiento. Por lo tanto, la estrella evoluciona hacia una estructura de perfil químico de capa simple en un período de tiempo bastante corto. Para cerrar, vale la pena mencionar que el efecto descrito para la secuencia de $M_{\star} = 0.1554 M_{\odot}$ también se verifica para las secuencias de modelos más masivos de ELM ($0.1554 \leq M_{\star}/M_{\odot} \leq 0.1762$).

5.2.2. Impacto de la envoltura de H delgada sobre las propiedades pulsacionales

La forma de los perfiles químicos deja rastros notorios en las curvas de las frecuencias críticas, particularmente, en la frecuencia de Brunt-Väisälä. En los paneles inferiores de las Figuras 5.2 y 5.3 mostramos el logaritmo de la frecuencia de Brunt-Väisälä al cuadrado para modelos con $M_{\star} = 0.1554 M_{\odot}$ y $M_{\star} = 0.2390 M_{\odot}$ (para $T_{\text{eff}} \sim 8000$ K). Hay una clara conexión entre las regiones de transición química (paneles superiores) y las características resultantes en la curva de la frecuencia de Brunt-Väisälä al cuadrado para cada modelo.

A continuación examinaremos brevemente el impacto de considerar envolturas delgadas de H sobre las propiedades de atrapamiento de modos (más conocido por su término en inglés, *mode trapping*) de modelos de enana blanca de baja masa con núcleo de He. El atrapamiento de modos g en enanas blancas es un mecanismo de resonancia muy conocido para la propagación de modos, que actúa debido a la presencia de gradientes de composición química (ver Brassard et al. 1992a,b; Bradley et al. 1993; Córscico et al. 2002, para más detalles). Observacionalmente, una posible indicación del atrapamiento de modos en una enana blanca es que el espaciamiento de períodos no sea uniforme. Recordemos que la teoría asintótica de pulsaciones estelares predice que, en ausencia de gradientes químicos, los períodos de pulsación de modos g de alto orden radial k están uniformemente espaciados con una separación de períodos constante, cuya expresión está dada por (ver también Sección 1.2.4):

$$\Delta\Pi_{\ell}^a = \Pi_0/\sqrt{\ell(\ell+1)}, \quad (5.1)$$

donde

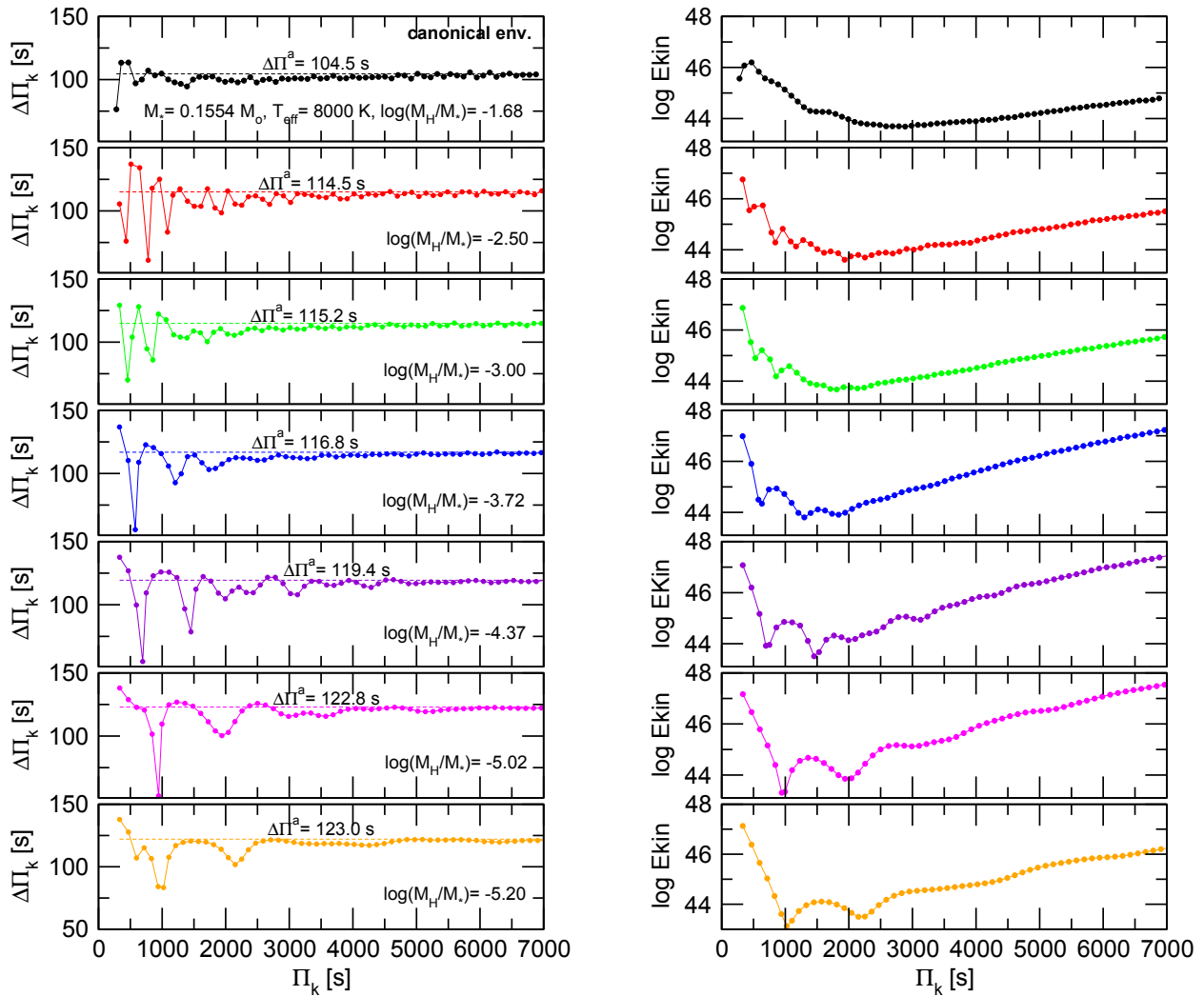


Figura 5.5: *Paneles izquierdos*: Espaciamento de períodos, $\Delta\Pi_k$, en función de los períodos de pulsación, Π_k , para modelos de enana blanca con $M_\star = 0.1554 M_\odot$, $T_{\text{eff}} \sim 8000$ K y diferentes espesores de la envoltura de H (ver Tabla 5.1 y Figura 5.2). El panel superior corresponde al modelo de enana blanca con envoltura canónica. Las líneas delgadas horizontales discontinuas corresponden al valor del espaciamento de períodos asintótico, $\Delta\Pi^a$. *Paneles derechos*: Energía cinética de oscilación en función de los períodos para los mismos modelos de enana blanca mostrados en los paneles izquierdos.

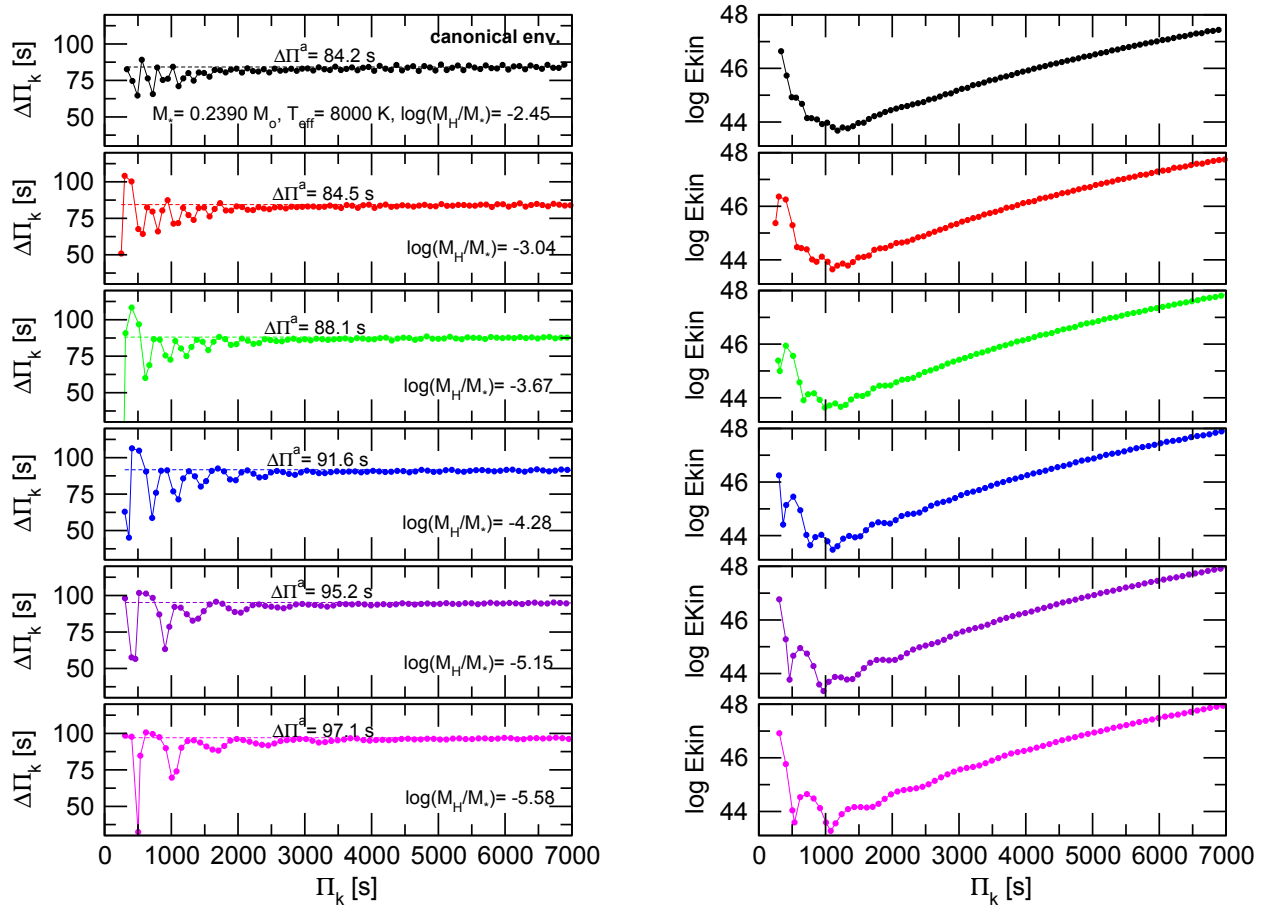


Figura 5.6: Igual que en la Figura 5.5, pero para modelos con $M_\star = 0.2390 M_\odot$ (ver Tabla 5.1 y Figura 5.3).

$$\Pi_0 = 2\pi^2 \left[\int_{r_1}^{r_2} \frac{N}{r} dr \right]^{-1}. \quad (5.2)$$

En realidad, la separación de períodos no es de ningún modo constante en modelos de enana blanca químicamente estratificadas, excepto para modos de orden radial muy alto. Recordando que $\Delta\Pi_k = \Pi_{k+1} - \Pi_k$, se tiene que para modelos estelares con una sola región de transición química (He/H) como los que estamos considerando, los mínimos locales en $\Delta\Pi_k$ usualmente corresponden a modos atrapados en la envoltura de H, mientras que los máximos locales en $\Delta\Pi_k$ están asociados con modos atrapados en la región del núcleo.

Los paneles izquierdos de las Figuras 5.5 y 5.6 muestran los diagramas $\Pi_k - \Delta\Pi_k$ para los mismos modelos de enana blanca representados en las Figuras 5.2 y 5.3. Estos modelos tienen $M_\star = 0.1554 M_\odot$ y $M_\star = 0.2390 M_\odot$, una temperatura efectiva de $T_{eff} \sim 8000$ K, y distintos espesores de la envoltura de H. En cada panel, las líneas horizontales a trazos corresponden al espaciamiento de períodos asintótico. Comenzando desde arriba con el caso de la envoltura canónica, se muestra hacia abajo el caso de modelos con espesor de la envoltura de H decreciente. Al examinar los gráficos, muchos aspectos son dignos de mención. Para comenzar, el espaciamiento de períodos asintótico aumenta cuando el

espesor de la envoltura de H decrece. Esto se debe a que la integral en la Ecuación (5.2) para la cantidad Π_0 es más pequeña para envolturas más delgadas de H, en virtud de que el *bump* en la frecuencia de Brunt-Väisälä debido a la interfaz química de He/H se vuelve progresivamente más angosto en la coordenada radial r , cuando esta interfaz se localiza en capas más externas. Esto puede apreciarse con claridad en los recuadros de los paneles inferiores de las Figuras 5.2 y 5.3, en los cuales hemos representado la cantidad N/r en términos de r . Como Π_0 es mayor para envolturas más delgadas de H, el espaciamiento asintótico de períodos aumenta (Ecuación (5.1)). En el caso de los modelos con $0.1554 M_\odot$, encontramos que $\Delta\Pi_\ell^a$ experimenta un aumento de 15–18 % cuando vamos de la envoltura canónica ($\log(M_H/M_\star) = -1.68$) a la más delgada ($\log(M_H/M_\star) = -5.20$) para esta secuencia. Para modelos con $M_\star = 0.2390 M_\odot$, la variación (aumento) de $\Delta\Pi_\ell^a$ llega hasta 13 – 15 % desde la envoltura canónica ($\log(M_H/M_\star) = -2.45$) hasta la más delgada ($\log(M_H/M_\star) = -5.58$) para esta secuencia.

Otra característica remarcable de los paneles izquierdos de las Figuras 5.5 y 5.6 está relacionada con los cambios en las propiedades de atrapamiento de modos al considerar envolturas de H progresivamente más delgadas. Para envolturas gruesas, incluyendo la canónica, la distribución de espaciamientos de períodos de modos g exhibe un patrón regular de atrapamiento de modos, con un ciclo de atrapamiento muy corto (el intervalo Δk entre dos modos atrapados). Por ejemplo, en el caso de modelos con $0.1554 M_\odot$, encontramos un ciclo de atrapamiento de $\Delta k \sim 1 - 3$ para envolturas de H con espesor en el rango $-3 \lesssim \log(M_H/M_\star) \lesssim -1.7$. Para envolturas de H más delgadas, el ciclo de atrapamiento y la amplitud de atrapamiento aumentan. Por ejemplo, para $\log(M_H/M_\star) = -4.37$ resulta $\Delta k \sim 5$, y para $\log(M_H/M_\star) = -5.20$, $\Delta k \sim 9$. Una situación similar ocurre para modelos con $M_\star = 0.2390 M_\odot$ (Figura 5.6).

Cabe destacar una característica común para todos los valores de $\log(M_H/M_\star)$ considerados en ambas secuencias $0.1554 M_\odot$ y $0.2390 M_\odot$ (Figuras 5.5 y 5.6): las marcas que deja el atrapamiento de modos reflejadas por $\Delta\Pi_k$ desaparecen para órdenes radiales muy grandes (períodos muy largos), en cuyo caso $\Delta\Pi_k$ se acerca a $\Delta\Pi_\ell^a$, como predice la teoría asintótica.

Los efectos del atrapamiento de modos también se traducen en mínimos y máximos locales en la energía cinética de oscilación, E_{kin} , que generalmente corresponden a modos parcialmente confinados a las regiones del núcleo y a modos parcialmente atrapados en la envoltura. Esto puede apreciarse en los paneles de la derecha de las Figuras 5.5 y 5.6. El comportamiento descrito arriba para $\Delta\Pi_k$ también es encontrado en el caso de E_{kin} , es decir, el ciclo de atrapamiento de modos y la amplitud aumentan cuando el espesor de la envoltura de H decrece. Desafortunadamente, la energía cinética de oscilación es una cantidad muy difícil de estimar solo por observaciones.

5.3. Nuevos ajustes de períodos individuales

En esta Sección, mostramos los resultados de un análisis astrosismológico teniendo en cuenta el conjunto completo de secuencias, tanto las canónicas como las nuevas. Como en el Capítulo 4, buscamos un modelo astrosismológico que ajuste de la mejor forma posible los períodos de pulsación individuales de la estrella bajo estudio, determinando la calidad del ajuste entre los períodos de pulsación teóricos y los observados mediante la función

de calidad, que ahora estará dada por:

$$\chi^2(M_\star, T_{\text{eff}}, M_{\text{H}}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{mín}[(\Pi_i^{\text{O}} - \Pi_k^{\text{T}})^2], \quad (5.3)$$

donde, recordemos, n es el número de períodos observado. Calculamos la función $\chi^2 = \chi^2(M_\star, T_{\text{eff}}, M_{\text{H}})$ que entonces tiene en cuenta no solo el conjunto de masas estelares en el rango $0.1554 \lesssim M_\star \lesssim 0.4352 M_\odot$, y temperatura efectiva en $13000 \gtrsim T_{\text{eff}} \gtrsim 6000 \text{ K}$, sino también el intervalo de espesores de la envoltura de H, $-5.8 \lesssim \log(M_{\text{H}}/M_\star) \lesssim -1.7$, dependiente de la masa estelar.

Antes de continuar, es necesario mencionar que para este estudio consideramos las mismas estrellas que en el Capítulo 4, sin embargo en dos casos, J1738 y J1618, tomamos en cuenta otro conjunto de períodos por razones que se expondrán más adelante. Finalmente, no ampliamos el análisis a la ELMV J134336.44+082639.4 (Pelisoli et al. 2018b) porque de acuerdo con Pelisoli et al. (2018a), solo se ha detectado un período para esta estrella, y no resulta suficiente para realizar un ajuste astrosismológico, ni tampoco a SDSS J222009.74-092709.9 debido a que hay grandes dudas sobre su clasificación (Pelisoli et al. 2018b).

Para este nuevo análisis procedimos similarmente al Capítulo 4, considerado que todos los períodos observados están asociados a modos g con $\ell = 1$, y tomamos en cuenta el conjunto de períodos de cada estrella, Π_i^{O} , a fin de estimar la función de calidad dada por la Ecuación (5.3). Luego, consideramos una mezcla de modos g asociados a $\ell = 1$ y $\ell = 2$. Debido a que generalmente no encontramos soluciones adecuadas al considerar solamente $\ell = 1$, mostramos en general los casos donde combinamos $\ell = 1$ y $\ell = 2$, con solo dos excepciones.

En las Figuras 5.7 a 5.17 mostramos la proyección de la inversa de la función de calidad, $(\chi^2)^{-1}$, sobre el plano de la temperatura efectiva contra la masa estelar para cada ELMV analizada, tomando en cuenta su conjunto correspondiente de períodos observado, de forma análoga a lo realizado en el Capítulo 4. También hemos incluido la temperatura efectiva y la masa estelar para cada ELMV junto con sus incertezas según las determinaciones de los modelos de atmósferas 1D y 3D (Tremblay et al. 2015) (rectángulos naranja y verde en las figuras, respectivamente, a los cuales nos referiremos como *cajas espectroscópicas*). La incerteza considerada para todas las masas estelares es de un 15% de la masa total (diferencia típica en el valor de la masa derivada de conjuntos independientes de tracks evolutivos, ver Capítulo 4). Cada punto $(M_\star, T_{\text{eff}})$ en los mapas corresponde a un valor de la masa de la envoltura de H (M_{H}/M_\star) que maximiza el valor de $(\chi^2)^{-1}$ para esa masa estelar y temperatura efectiva. Todos los rangos (para los casos con $\ell = 1, 2$) han sido ajustados para poder mostrar los mejores ajustes de períodos en una región cercana a la de interés. Nuevamente, la calidad del ajuste entre los períodos teóricos y observados es medida por el valor de χ^2 : cuanto mejor sea el ajuste de períodos, menor el valor de χ^2 ; en nuestras figuras, mayor el valor de $(\chi^2)^{-1}$, lo cual se muestra con un código de colores. Como en el Capítulo anterior, si hubiese un único máximo, adoptaríamos ese modelo como la solución astrosismológica para esa estrella. Desafortunadamente, en general encontramos múltiples soluciones posibles, y necesitamos recurrir a una restricción externa para poder elegir una. Generalmente, empleamos la incerteza en la T_{eff} como hemos mostrado en el Capítulo 4, pero a diferencia de lo que hicimos allí, también restringimos por el valor de la masa estelar (y su incerteza) dada por las determinaciones espectroscópicas.

5.3.1. El caso de J1840

Comenzamos el análisis con J1840, que tiene como parámetros espectroscópicos estelares $T_{\text{eff}} = 9390 \pm 140$ K, $\log(g) = 6.49 \pm 0.06$ [cgs] y $M_{\star} = 0.183 M_{\odot}$ según el modelo de atmósfera 1D (Hermes et al. 2012), y $T_{\text{eff}} = 9120 \pm 140$ K, $\log(g) = 6.34 \pm 0.05$ [cgs] y $M_{\star} = 0.177 M_{\odot}$, para el modelo 3D (Tremblay et al. 2015). Consideramos el mismo conjunto de períodos que en el Capítulo 4, es decir, los que figuran en la Tabla 4.2, y supusimos que están asociados a modos g , en los casos en que $\ell = 1$ y $\ell = 1, 2$.

Para el caso de $\ell = 1$, encontramos que un modelo a ~ 9485 K, con $0.1612 M_{\odot}$ y $\log(M_{\text{H}}/M_{\star}) = -2.49$ representa una solución posible, con $(\chi^2)^{-1} = 0.025$, dentro de la caja espectroscópica 1D. Para el caso en que $\ell = 1, 2$, encontramos que el mejor ajuste de períodos se da para un modelo con ~ 7307 K, $0.1869 M_{\odot}$ y $\log(M_{\text{H}}/M_{\star}) = -5.61$, con $(\chi^2)^{-1} = 1.15$, es decir, un modelo con un valor de T_{eff} mucho menor a los rangos dados por las determinaciones espectroscópicas. Sin embargo, si nos enfocamos en valores más cercanos a los esperados, podemos encontrar soluciones posibles dentro de los límites de T_{eff} y M_{\star} . En la Figura 5.7(b) puede verse la proyección de la inversa de la función de calidad, $(\chi^2)^{-1}$, en el plano $T_{\text{eff}} - M_{\star}/M_{\odot}$, para el caso $\ell = 1, 2$. Podemos ver que si bien hay múltiples soluciones posibles, hay una solución que es la mejor dentro de los rangos considerados, y que se encuentra dentro de la caja espectroscópica dada por el modelo de atmósfera 3D en ~ 9007 K, para $0.1805 M_{\odot}$ y $\log(M_{\text{H}}/M_{\star}) = -2.44$ (es decir, este modelo tiene asociada una envoltura canónica), con $(\chi^2)^{-1} = 0.21$.

Ahora bien, debido a la gran incerteza que Hermes et al. (2012) reportaron en uno de los períodos ($\Pi_i^{\text{O}} = 3930.0$ s, $\sigma_i = 300$ s), realizamos el mismo ajuste pero ahora considerando el conjunto de períodos con 3930.0 s - 300 s y 3930.0 s + 300 s. En el primer caso ($-\sigma_i$), considerando $\ell = 1$, hay una solución dentro de la caja 3D en ~ 8967 K, para $0.1869 M_{\odot}$, $\log(M_{\text{H}}/M_{\star}) = -3.00$ con $(\chi^2)^{-1} = 0.017$. Para el caso con $\ell = 1, 2$, no se ven soluciones claras dentro de las cajas, así que achicamos los rangos y mostramos este caso en la Figura 5.7(a). Podemos ver que hay muchas soluciones posibles y que el mejor ajuste de períodos en los rangos considerados yace en ~ 9576 K, para $0.1805 M_{\odot}$ y $\log(M_{\text{H}}/M_{\star}) = -5.51$ con $(\chi^2)^{-1} = 0.15$, pero corresponde a un valor un poco más grande de T_{eff} de lo esperado según el modelo 1D de atmósfera. Dentro de las cajas espectroscópicas hay una solución posible en ~ 9244 K, para $0.1869 M_{\odot}$, $\log(M_{\text{H}}/M_{\star}) = -5.19$ con $(\chi^2)^{-1} = 0.075$. En cuanto al caso en que consideramos $+\sigma_i$, para $\ell = 1$, hay una solución en ~ 8996 K, para $0.1554 M_{\odot}$ y $\log(M_{\text{H}}/M_{\star}) = -1.69$ (canónica) con $(\chi^2)^{-1} = 0.01$. Para $\ell = 1, 2$, como puede apreciarse en la Figura 5.7(c), la única solución que vale la pena mencionar dentro de las cajas, está en ~ 8997 K, para $0.1554 M_{\odot}$, y $\log(M_{\text{H}}/M_{\star}) = -1.69$ (canónica) con $(\chi^2)^{-1} = 0.077$.

Dadas las diferencias en las soluciones, que sugieren una sensibilidad considerable de los ajustes de períodos al variar uno de ellos según su valor de incerteza, solo podemos concluir que hay un rango de soluciones posibles con parámetros en el intervalo $M_{\star} = 0.1554 - 0.1869 M_{\odot}$, $T_{\text{eff}} \sim 8997 - 9244$ K, y $M_{\text{H}}/M_{\star} = 6.53 \times 10^{-6} - 2.04 \times 10^{-2}$. Debe notarse que la calidad de las soluciones se ve reducida en, aproximadamente, 3 veces cuando consideramos la incerteza en dicho período.

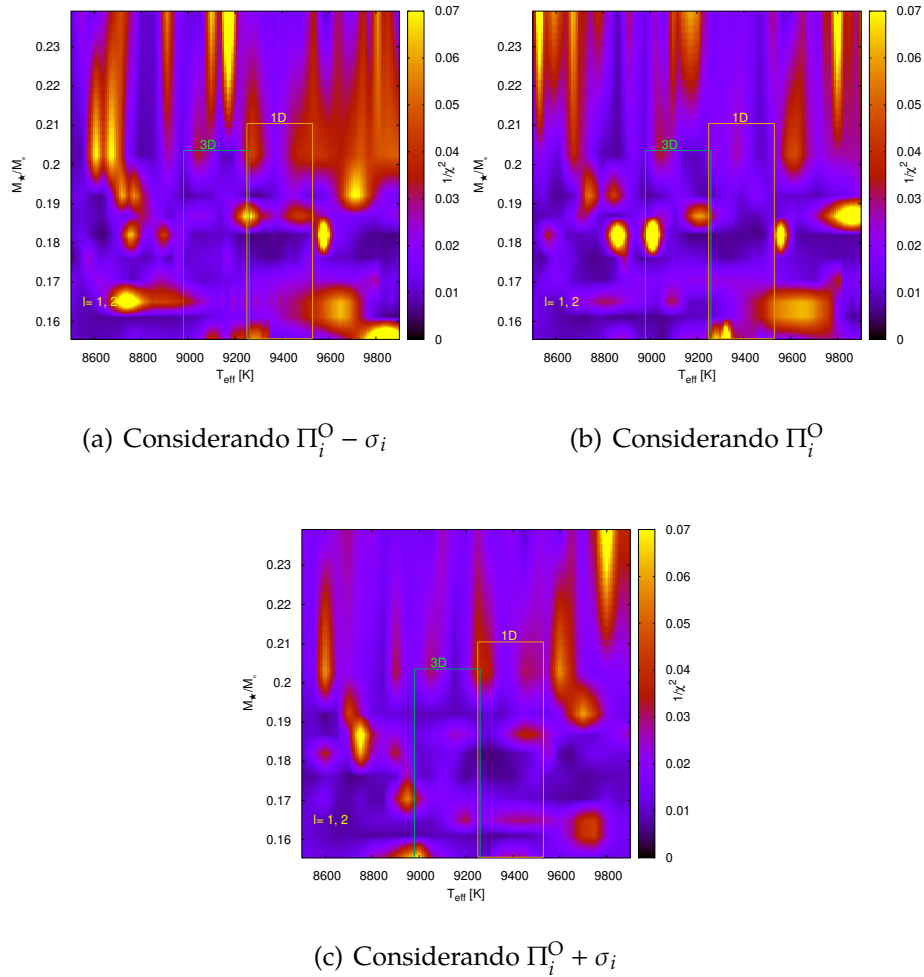


Figura 5.7: Proyección sobre el plano temperatura efectiva contra la masa estelar de la inversa de la función de calidad, considerando $\ell = 1, 2$ para los tres conjuntos diferentes de períodos de J1840: en el panel medio (b), el conjunto original sin considerar la incerteza en ninguno de los períodos, y los conjuntos considerando la incerteza únicamente para el período con $\Pi_i^{\text{O}} = 3930.0$ s tomando $-\sigma_i$ en el panel izquierdo (a) y $+\sigma_i$ en el panel derecho (c) (ver detalles en el texto). El espesor de la envoltura de H para cada masa estelar corresponde a la secuencia con el valor máximo de la inversa de la función de calidad, para esa masa estelar. Las cajas representan las T_{eff} y M_{\star} espectroscópicas determinadas para J1840, junto con sus incertezas, para los modelos de atmósferas 1D y 3D. Los rangos elegidos para los tres ejes están enfocados en aquellos valores de interés.

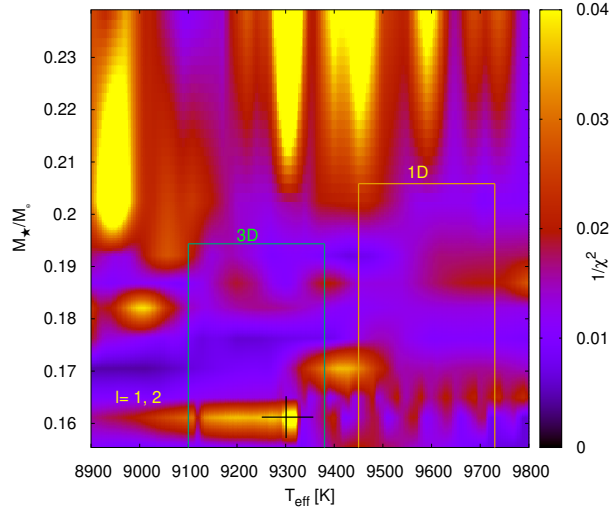


Figura 5.8: Igual que en la Figura 5.7(b) pero para el caso de J1112. La cruz negra marca el modelo elegido.

5.3.2. El caso de J1112

Como hemos mencionado en la Sección 4.2, J1112 tiene los siguientes parámetros espectroscópicos: $T_{\text{eff}} = 9590 \pm 140$ K, $\log(g) = 6.36 \pm 0.06$ [cgs] y $M_{\star} = 0.179 M_{\odot}$ según el modelo 1D (Hermes et al. 2013c), y $T_{\text{eff}} = 9240 \pm 140$ K, $\log(g) = 6.17 \pm 0.06$ [cgs] y $M_{\star} = 0.169 M_{\odot}$ para el modelos 3D (Tremblay et al. 2015). Los siete períodos exhibidos por esta estrella se encuentran detallados en la Tabla 4.3. A diferencia de lo presentado en Calcaferro et al. (2017b), y que mostramos en el Capítulo 4, ahora solo nos enfocamos en los cinco períodos más largos, puesto que la realidad de los dos períodos más cortos (107.56 y 134.275 s) aún necesita ser confirmada.

El caso con $\ell = 1$ tiene múltiples soluciones posibles, y podemos mencionar la existencia de un modelo que cae dentro de la caja 1D en ~ 9670 K, para $0.1869 M_{\odot}$ y $\log(M_{\text{H}}/M_{\star}) = -5.19$, con $(\chi^2)^{-1} = 0.014$. El caso de $\ell = 1, 2$ tiene como mejor ajuste a un modelo con T_{eff} mucho menor que la esperada (~ 8660 K, para $0.1650 M_{\odot}$ y $\log(M_{\text{H}}/M_{\star}) = -1.82$ (canónica), con $(\chi^2)^{-1} = 0.38$). Sin embargo, si nos enfocamos en rangos más cercanos a los valores permitidos por la espectroscopía, como mostramos en la Figura 5.8, encontramos dos posibles soluciones, una en ~ 9301 K, para $0.1612 M_{\odot}$ y $\log(M_{\text{H}}/M_{\star}) = -1.76$ (canónica) con $(\chi^2)^{-1} = 0.05$, y otra en ~ 9406 K, para $0.1706 M_{\odot}$ y $\log(M_{\text{H}}/M_{\star}) = -2.48$, con $(\chi^2)^{-1} = 0.037$. Podríamos elegir la primera aunque notamos que no están asociadas con ajustes de períodos muy buenos porque tienen valores bajos de $(\chi^2)^{-1}$ en comparación con la mejor solución.

A fin de poder determinar cuán bueno es el acuerdo entre los períodos observados y teóricos, los comparamos mediante el cálculo de las diferencias absolutas de períodos $|\delta\Pi| = |\Pi^{\text{O}} - \Pi^{\text{T}}|$, tal como lo hemos hecho en el Capítulo anterior. Los resultados para J1112 se muestran en la Tabla 5.2, para el caso de $\ell = 1, 2$. Recordemos que en

la sexta columna se muestra el valor de la tasa de crecimiento lineal no adiabática, η ($\eta \equiv -\mathfrak{I}(\sigma)/\Re(\sigma)$; ver Capítulo 2 y también, Sección 4.5), tal que si $\eta > 0$ (< 0), implica un modo inestable (estable). Desafortunadamente, en este caso, nuestro análisis no adiabático predice que estos períodos son todos estables.

Tabla 5.2: Comparación entre los períodos observados y teóricos ($\ell = 1, 2$) para J1112, correspondientes al modelo astrosismológico con $M_\star = 0.1612 M_\odot$, en $T_{\text{eff}} \sim 9301$ K, con $\log(M_{\text{H}}/M_\star) = -1.76$ (canónico). También mostramos el grado armónico ℓ , el orden radial k , la diferencia de períodos absoluta, y la tasa de crecimiento no adiabática para cada período teórico.

$\Pi^{\text{O}}[\text{s}]$	$\Pi^{\text{T}}[\text{s}]$	ℓ	k	$ \delta\Pi [\text{s}]$	$\eta[10^{-4}]$	Observación
1792.905	1797.822	1	17	4.92	-0.00004	estable
1884.599	1886.039	2	32	1.44	-0.0155	estable
2258.528	2266.323	2	39	7.79	-0.131	estable
2539.695	2536.215	2	44	3.48	-0.399	estable
2855.728	2861.968	2	50	6.24	-1.14	estable

5.3.3. El caso de J1518

Como ya hemos mencionado, esta estrella tiene los siguientes parámetros espectroscópicos: $T_{\text{eff}} = 9990 \pm 140$ K, $\log(g) = 6.80 \pm 0.05$ [cgs] y $M_\star = 0.220 M_\odot$ para el modelo 1D de atmósfera (Hermes et al. 2013c), y $T_{\text{eff}} = 9650 \pm 140$ K, $\log(g) = 6.68 \pm 0.05$ [cgs] y $M_\star = 0.197 M_\odot$ para el modelo 3D (Tremblay et al. 2015). Consideramos el conjunto completo de períodos como figuran en la Tabla 4.4.

Cuando suponemos que estos períodos están asociados a $\ell = 1$, encontramos una posible solución en ~ 9916 K, para $0.1762 M_\odot$ y $\log(M_{\text{H}}/M_\star) = -2.5$, con $(\chi^2)^{-1} = 0.007$, cerca de la caja 1D. En el caso en que $\ell = 1, 2$, encontramos el mejor ajuste de períodos en un valor de M_\star más alto de lo esperado ($0.4352 M_\odot$, en ~ 9717 K, $\log(M_{\text{H}}/M_\star) = -3.69$, con $(\chi^2)^{-1} = 0.13$). Si examinamos una región más cercana a los rangos permitidos por la espectroscopía, como se muestra en la Figura 5.9, no encontramos ninguna solución dentro de las cajas pero hay un buen ajuste de períodos cerca, en ~ 9487 K, caracterizado por $0.2390 M_\odot$, $\log(M_{\text{H}}/M_\star) = -3.67$ y $(\chi^2)^{-1} = 0.07$. El mismo representa el mejor ajuste de períodos en los rangos mostrados y podríamos adoptarlo como solución. Nuevamente, mostramos en la Tabla 5.3 la diferencia entre los períodos observados y teóricos para el modelo adoptado.

5.3.4. El caso de J1614

Recordemos que J1614 está caracterizada por $T_{\text{eff}} = 8800 \pm 170$ K, $\log(g) = 6.66 \pm 0.14$ [cgs] y $M_\star = 0.192 M_\odot$ para el modelo 1D (Hermes et al. 2013a), y $T_{\text{eff}} = 8700 \pm 170$ K, $\log(g) = 6.32 \pm 0.13$ [cgs] y $M_\star = 0.172 M_\odot$ para el modelo 3D (Tremblay et al. 2015). Reiteramos que, al exhibir solo dos períodos independientes (Tabla 4.5), el ajuste realizado no es del todo confiable.

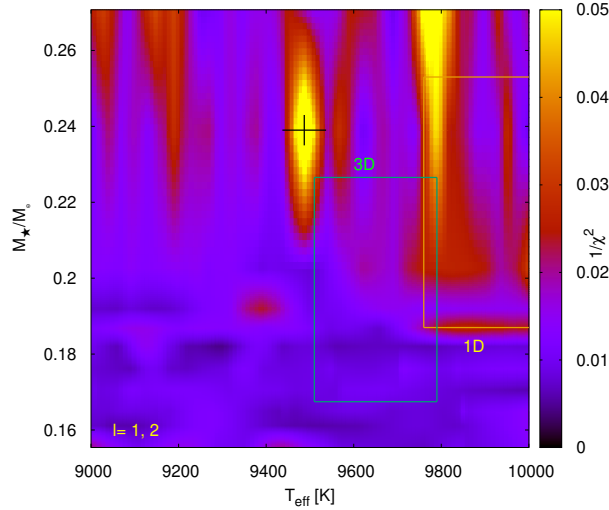


Figura 5.9: Igual que en la Figura 5.7(b), pero para el caso de J1518.

 Tabla 5.3: Igual que en la Tabla 5.2, pero para el modelo adoptado para J1518 con $M_{\star} = 0.2390 M_{\odot}$, $T_{\text{eff}} \sim 9487$ K y $\log(M_{\text{H}}/M_{\star}) = -3.67$.

Π^{O} [s]	Π^{T} [s]	ℓ	k	$ \delta\Pi $ [s]	$\eta[10^{-5}]$	Observación
1335.318	1329.599	2	28	5.719	0.463	inestable
1956.361	1959.913	1	24	3.552	0.653	inestable
2134.027	2131.306	2	46	2.721	0.504	inestable
2268.203	2266.188	1	28	2.015	0.766	inestable
2714.306	2717.686	2	59	3.380	-0.373	estable
2799.087	2802.873	1	35	3.786	1.14	inestable
3848.201	3851.967	2	84	3.766	-4.96	estable

El caso con $\ell = 1$ tiene una solución posible dentro de la caja espectroscópica 3D, en ~ 8567 K, para $0.1921 M_{\odot}$ y $\log(M_{\text{H}}/M_{\star}) = -3.62$, con $(\chi^2)^{-1} = 0.52$. No hemos podido encontrar una solución dentro de las cajas espectroscópicas para el caso en que $\ell = 1, 2$, pero como puede verse en la Figura 5.10, encontramos un muy buen ajuste de períodos en ~ 8989 K, para $0.1612 M_{\odot}$ y $\log(M_{\text{H}}/M_{\star}) = -4.35$, con $(\chi^2)^{-1} = 76.76$, una solución que se encuentra muy cerca de la caja espectroscópica 1D, de modo que podemos adoptarla como una solución para J1614. Mostramos la diferencia entre los períodos teóricos de ese modelo y los observados en la Tabla 5.4. Vale la pena mencionar que el mejor ajuste de períodos está en ~ 9290 K, y tiene $0.1869 M_{\odot}$, $\log(M_{\text{H}}/M_{\star}) = -5.19$, con $(\chi^2)^{-1} = 155.04$.

5.3.5. El caso de J2228

J2228 está caracterizada por $T_{\text{eff}} = 7870 \pm 120$ K, $\log(g) = 6.03 \pm 0.08$ [cgs] y $M_{\star} = 0.152 M_{\odot}$ para el modelo 1D de atmósferas (Hermes et al. 2013a), y $T_{\text{eff}} = 7890 \pm 120$ K,

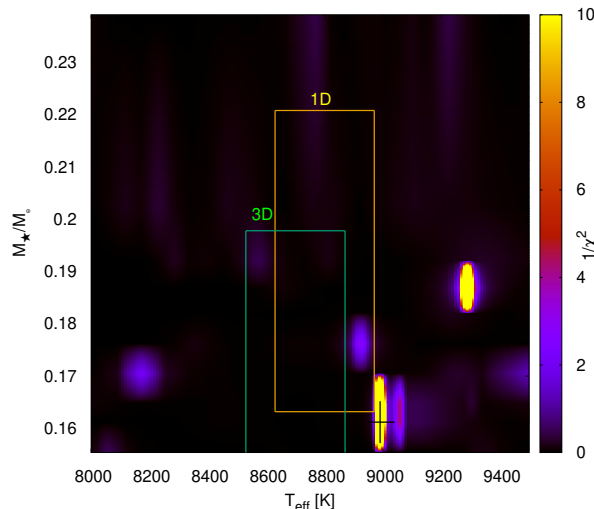


Figura 5.10: Igual que en la Figura 5.7(b), pero para el caso de J1614.

Tabla 5.4: Igual que en la Tabla 5.2, pero para el modelo adoptado para J1614 con $M_{\star} = 0.1612 M_{\odot}$, $T_{\text{eff}} \sim 8989 \text{ K}$ y $\log(M_{\text{H}}/M_{\star}) = -4.35$.

$\Pi^{\text{O}}[\text{s}]$	$\Pi^{\text{T}}[\text{s}]$	ℓ	k	$ \delta\Pi [\text{s}]$	$\eta[10^{-8}]$	Observación
1184.106	1184.104	1	9	0.002	0.0343	inestable
1262.668	1262.507	2	18	0.161	1.93	inestable

$\log(g) = 5.78 \pm 0.08$ [cgs] y $M_{\star} = 0.142 M_{\odot}$ para el modelo 3D (Tremblay et al. 2015). Los tres períodos independientes exhibidos por J2228 se encuentran en la Tabla 4.6.

El caso con $\ell = 1$ muestra una posible solución dentro de la caja 1D, en $\sim 7828 \text{ K}$, para $0.1650 M_{\odot}$ y $\log(M_{\text{H}}/M_{\star}) = -1.82$ (canónica), con $(\chi^2)^{-1} = 0.085$. Para el caso con $\ell = 1, 2$, mostrado en la Figura 5.11(b), el mejor ajuste de períodos yace en $\sim 7710 \text{ K}$, con $0.1554 M_{\odot}$ y $\log(M_{\text{H}}/M_{\star}) = -1.69$ (canónica), con $(\chi^2)^{-1} = 6.08$, una solución cuyos parámetros son muy cercanos a la caja 1D y con un valor alto de la función de calidad. El segundo mejor ajuste de períodos yace en 7650 K , y está caracterizado por $0.1650 M_{\odot}$ y $\log(M_{\text{H}}/M_{\star}) = -3.01$, con $(\chi^2)^{-1} = 1.2$.

Debido a la incerteza considerable que presenta uno de los períodos, $\Pi_i^{\text{O}} = 6234.9 \text{ s}$ y $\sigma_i = 6 \text{ s}$, repetimos el tratamiento como hicimos para el caso de J1840. Empleando el conjunto de períodos considerando $6234.9 \text{ s} - 6.0 \text{ s}$, para $\ell = 1$, hay una posible solución en $\sim 7849 \text{ K}$, para $0.1650 M_{\odot}$, $\log(M_{\text{H}}/M_{\star}) = -1.82$ (canónica), con $(\chi^2)^{-1} = 0.06$. Para $\ell = 1, 2$, como se muestra en la Figura 5.11(a), encontramos que el mejor ajuste de períodos yace en 7710 K , para $0.1554 M_{\odot}$ y $\log(M_{\text{H}}/M_{\star}) = -1.69$ (canónica), con $(\chi^2)^{-1} = 12.21$, como en el caso en que no consideramos la incerteza pero esta vez con el doble del valor de la inversa de la función de calidad. Hay otro ajuste de períodos bueno en $\sim 7795 \text{ K}$, para $0.1554 M_{\odot}$ y $\log(M_{\text{H}}/M_{\star}) = -1.69$ (canónica), con $(\chi^2)^{-1} = 3.95$, que sí se encuentra dentro de las cajas. Con respecto al caso en que consideramos el período con $6234.9 \text{ s} + 6.0 \text{ s}$, para

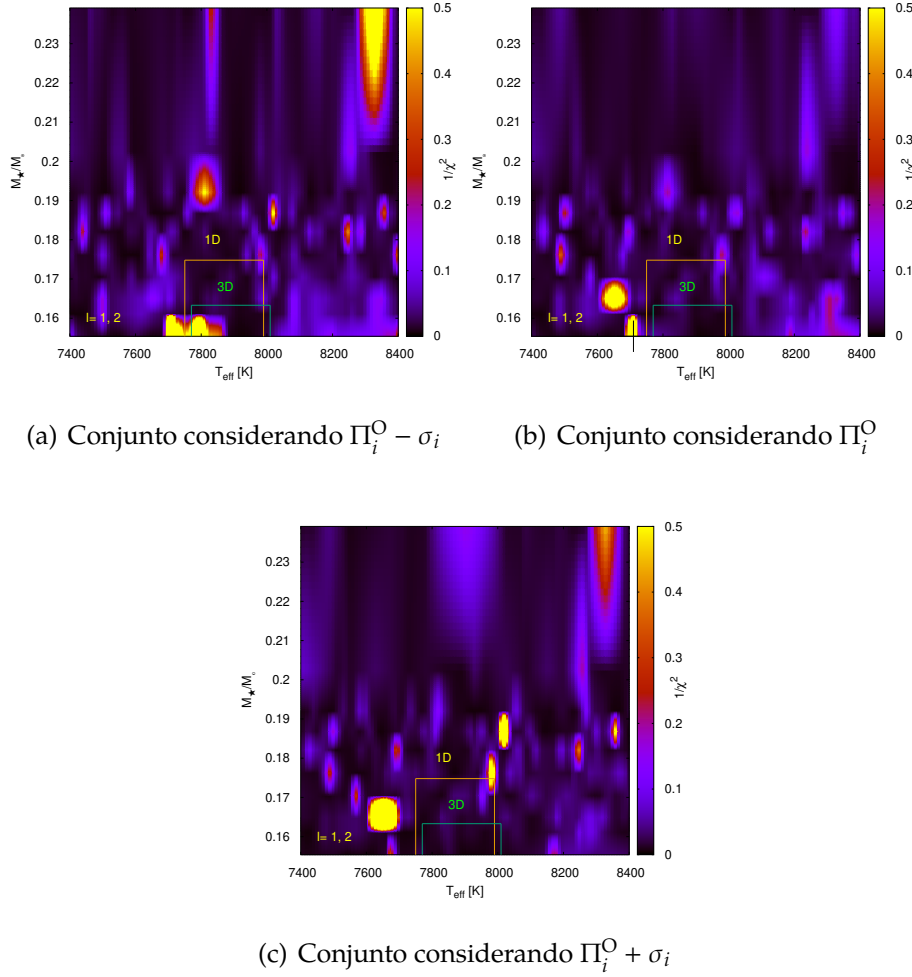


Figura 5.11: Igual que en la Figura 5.7, pero para el caso de J2228.

$\ell = 1$ encontramos un buen ajuste en ~ 8036 K, para $0.1762 M_\odot$ y $\log(M_H/M_\star) = -3.66$, con $(\chi^2)^{-1} = 0.079$. Para $\ell = 1, 2$, como mostramos en la Figura 5.11(c), el mejor ajuste de períodos está en un valor muy cercano a las cajas espectroscópicas, en ~ 7651 K, para $0.1650 M_\odot$ y $\log(M_H/M_\star) = -3.01$, con $(\chi^2)^{-1} = 3.59$.

Dados los resultados mencionados, podemos adoptar el modelo que se encuentra muy cerca de las cajas, a ~ 7710 K, con $0.1554 M_\odot$ y $\log(M_H/M_\star) = -1.69$ (canónica) porque, si bien no está precisamente dentro de las cajas espectroscópicas, representa la mejor solución con un valor grande de $(\chi^2)^{-1}$, para ambos casos, en que σ_i no es considerado y en aquél en que se considera $-\sigma_i$. Entonces, obtenemos el mismo resultado que en el Capítulo anterior (Calcaferro et al. 2017b). En la Tabla 5.5 mostramos la diferencia entre los períodos teóricos y observados. Finalmente, debería mencionarse el hecho de que no es posible encontrar buenas soluciones dentro de las cajas espectroscópicas a no ser que la incerteza sea considerada en el ajuste.

Tabla 5.5: Igual que en la Tabla 5.2, pero para el modelo adoptado para J2228 con $M_{\star} = 0.1554 M_{\odot}$, $T_{\text{eff}} \sim 7710$ K y $\log(M_{\text{H}}/M_{\star}) = -1.69$ (canónica).

$\Pi^{\text{O}}[\text{s}]$	$\Pi^{\text{T}}[\text{s}]$	ℓ	k	$ \delta\Pi [\text{s}]$	$\eta[10^{-8}]$	Observación
3 254.5	3 254.2	2	52	0.3	1.61	inestable
4 178.3	4 177.9	2	67	0.4	-2.67	estable
6 234.9	6 234.4	1	58	0.5	0.832	inestable

5.3.6. El caso de J1738

Recordemos que J1738, compañera de un MSP, tiene los siguientes parámetros: $T_{\text{eff}} = 9\,130 \pm 140$ K, $\log(g) = 6.55 \pm 0.06$ [cgs] y $M_{\star} = 0.181 M_{\odot}$ para el modelo 1D (Kilic et al. 2015), y $T_{\text{eff}} = 8\,910 \pm 150$ K, $\log(g) = 6.30 \pm 0.10$ [cgs] y $M_{\star} = 0.172 M_{\odot}$ para el 3D (Tremblay et al. 2015).

Para comenzar, mencionaremos brevemente lo presentado en Kilic et al. (2018), de modo de dar un contexto para la colaboración realizada por nosotros en dicho trabajo. En el marco del estudio fotométrico en el óptico de tres MSPs (PSR J1738+0333, PSR J1911-5958A y PSR J2234+0611) con compañeras enanas blancas de baja masa presentado en Kilic et al. (2018), ha sido posible confirmar la detección de pulsaciones en J1738, que ya habían sido reportadas en Kilic et al. (2015). De los tres casos explorados, esta estrella es la única que pulsa. Con el objetivo de obtener un mejor muestreo de los períodos de pulsación excitados y así poder llevar a cabo un análisis astrosismológico más completo con el cual sea posible restringir más adecuadamente las características de J1738, se han realizado observaciones en tres observatorios terrestres distintos durante los años 2016 y 2017. Lamentablemente, solo uno de los tres casos dio resultados utilizables. Algunas noches de observación se llevaron a cabo a través de ESO con el telescopio *New Technology Telescope* en La Silla, Chile. Debido principalmente a cuestiones climáticas no se detectó variabilidad por arriba del límite de significancia requerido. Asimismo, se hizo fotometría con el telescopio *South African Large Telescope* (SALT) aunque, nuevamente, no se pudieron obtener períodos de pulsación por el mismo tipo de problemas. Los datos que resultaron útiles provienen de observaciones obtenidas con *Gemini North*, de los cuales solo una parte tienen las condiciones fotométricas óptimas. En estas nuevas observaciones la estrella muestra variaciones de unas 0.2 mag (entre picos), y es considerablemente diferente a las 0.05 mag de dispersión medida por Antoniadis et al. (2012) en las imágenes fotométricas que obtuvieron en el año 2006. Es claro entonces que las amplitudes de pulsación son variables en escalas temporales de algunos años y de una década. Este tipo de variabilidad se encuentra para algunas enanas blancas pulsantes con núcleo de C y O muy frías (ver por ejemplo Kleinman et al. 1998), que están caracterizadas por períodos más largos, y se atribuye a una pérdida en la coherencia de la fase de los modos con período más largo (Hermes et al. 2017). Un fenómeno similar podría estar detrás de esta variación en ELMVs.

A título informativo, se muestran en la Figura 5.12 las transformadas de Fourier de los datos del 2014 (panel superior), las observaciones individuales de 2017 de Gemini (panel medio) y los datos de 2017 combinados (panel inferior). Se muestran, además, los límites de detección con líneas horizontales. Combinando los datos de todas las noches del conjunto de 2017, se identifican cuatro periodicidades por encima del límite requerido (línea a

trozos en la Figura), sin embargo una es descartada por el mismo análisis fotométrico ².

En la Tabla 5.6 se encuentran los períodos de J1738 (Kilic et al. 2018), junto con los encontrados usando los datos del año 2014³. Al comparar los valores (y como se ve en la Figura), al menos una de las amplitudes de pulsación ha aumentado significativamente, como mencionamos previamente. Notar que los modos con 27.3919 y 26.0105 ciclos/d son consistentes en frecuencia (dentro de los 3σ), siendo los únicos que se mantienen relativamente estables entre las temporadas de observación.

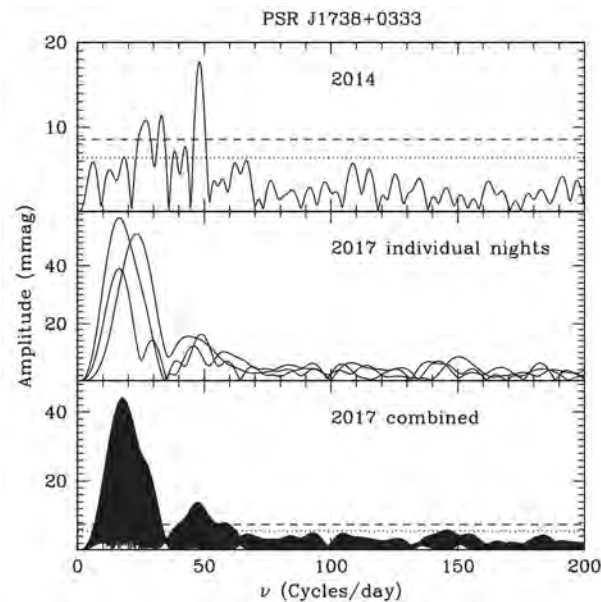


Figura 5.12: Transformada de Fourier de los datos obtenidos para J1738 usando las observaciones de 2014 (panel superior), las observaciones individuales de 2017 (panel medio) y las de 2017 combinadas (panel inferior). Es clara la gran variabilidad en frecuencias y/o amplitudes que experimentó la estrella desde 2014 al 2017. Adaptado de Kilic et al. (2018).

Procedemos ahora a resumir los resultados de los análisis astrosismológicos que llevamos a cabo. Considerando los dos conjuntos de períodos que figuran en la Tabla 5.6, provenientes de los datos de 2014 y 2017, hemos realizado tres ajustes de períodos distintos, dos considerando ambos conjuntos por separado, y otro considerando los seis períodos combinados. Este último análisis es viable, porque la diferencia significativa que hay en las mediciones de los períodos y de sus amplitudes, provenientes de diferentes épocas de observación, pueden ser asociadas con diferentes modos haciéndose visibles.

Cuando consideramos el primer caso (2014) para $\ell = 1$, el mejor ajuste de períodos se encuentra en 9273 K, con $0.1921 M_{\odot}$, $\log(M_{\text{H}}/M_{\star}) = -3.02$ y $(\chi^2)^{-1} = 0.31$, es decir, casi

²Si bien estas cuestiones exceden por completo el enfoque de esta Tesis, mencionaremos que es descartada por coincidir con la ventana observacional, algo que debe tenerse en cuenta en el procedimiento para extraer frecuencias de pulsación a partir de la curva de luz (ver por ejemplo Bell et al. 2017b).

³Notar que con respecto al conjunto de períodos reportado en Kilic et al. (2015), presentes en la Tabla 4.7, hay cierta diferencia en dos de los períodos. Esto podría deberse a diferencias en el procedimiento que siguen los autores para obtener los períodos a partir de la curva de luz. Como consecuencia, los resultados de este Capítulo podrían diferir en algún punto cuando son comparados con aquellos del Capítulo anterior.

Tabla 5.6: Lista de los períodos independientes de J1738, con sus frecuencias correspondientes y amplitudes, para los años 2014 y 2017. Adaptado de Kilic et al. (2018).

Frecuencia [ciclos/d]	Π° [s]	Amplitud [mmag]
2014		
$48.3072^{+0.3338}_{-0.2904}$	1 788.6	15.3
$32.8090^{+0.5962}_{-0.4881}$	2 633.4	10.2
$27.3919^{+0.3953}_{-0.4820}$	3 154.2	11.1
2017		
$47.1124^{+0.0021}_{-0.0017}$	1 833.9	12.2
$26.0105^{+0.0401}_{-0.0405}$	3 321.7	21.6
$17.3475^{+0.0008}_{-0.0007}$	4 980.6	43.5

dentro de la caja espectroscópica 1D y representa una solución muy buena. Mostramos esto en la Figura 5.13(a). Para $\ell = 1, 2$, el mejor ajuste se encuentra en 9 689 K, con $0.4352 M_{\odot}$, $\log(M_{\text{H}}/M_{\star}) = -3.21$ (canónica) y $(\chi^2)^{-1} = 13$, pero tiene una masa estelar mayor a la esperada. Sin embargo, como se muestra en la Figura 5.14(a), hay muchas otras soluciones, por ejemplo dentro de la caja 3D hay una solución posible en 8 922 K, para $0.1762 M_{\odot}$, $\log(M_{\text{H}}/M_{\star}) = -5.42$ con $(\chi^2)^{-1} = 0.72$.

Cuando consideramos el segundo caso (2017) para $\ell = 1$, encontramos el mejor ajuste de períodos en 9 204 K, para $0.1762 M_{\odot}$ y $\log(M_{\text{H}}/M_{\star}) = -5.43$, con $(\chi^2)^{-1} = 0.16$, es decir, dentro de la caja espectroscópica 1D. Mostramos este caso en la Figura 5.13(b). Para $\ell = 1, 2$, el mejor yace en 8 554 K, para $0.1762 M_{\odot}$, $\log(M_{\text{H}}/M_{\star}) = -1.95$ (canónica), con $(\chi^2)^{-1} = 1.31$, pero tiene un valor bajo de T_{eff} . Acotamos, entonces, los rangos considerados, y lo mostramos en la Figura 5.14(b). Una vez más, hay muchas soluciones posibles. Por ejemplo, hay una en 8 883 K, para $0.1612 M_{\odot}$ y $\log(M_{\text{H}}/M_{\star}) = -1.76$ (canónica), con $(\chi^2)^{-1} = 1.22$, que es un ajuste muy bueno que yace dentro de la caja 3D.

Cuando consideramos el caso de los datos de 2014 y 2017 combinados, para $\ell = 1$ encontramos una solución posible en 8 863 K, para $0.1921 M_{\odot}$, $\log(M_{\text{H}}/M_{\star}) = -2.35$ (canónica), con $(\chi^2)^{-1} = 0.006$ (no mostrada). Para $\ell = 1, 2$, encontramos la mejor solución en 9 891 K, para $0.4352 M_{\odot}$ y $\log(M_{\text{H}}/M_{\star}) = -3.70$, con $(\chi^2)^{-1} = 0.18$. Al enfocarnos en rangos más apropiados, como mostramos en la Figura 5.14(c), vemos que hay un buen ajuste de períodos cerca de la caja 1D, en 9 311 K, para $0.1921 M_{\odot}$, $\log(M_{\text{H}}/M_{\star}) = -3.02$, con $(\chi^2)^{-1} = 0.068$. Dentro de las cajas espectroscópicas, encontramos una posible solución que yace en 8 962 K, para $0.1762 M_{\odot}$, $\log(M_{\text{H}}/M_{\star}) = -1.95$ (canónica), con $(\chi^2)^{-1} = 0.062$.

Adicionalmente, cuando consideramos los errores en los nuevos períodos, y repetimos los ajustes (no mostrado), encontramos nuevamente que solo es posible dar un rango de soluciones astrosismológicas, y para este caso tan solo mencionaremos que las mismas se hallan asociadas a $\ell = 1, 2$ y están en los rangos de $\sim 9\,110\text{--}9\,151$ K, $M_{\star} = 0.1554\text{--}0.1921 M_{\odot}$ y $\log(M_{\text{H}}/M_{\star})$ entre -4.34 y -2.35 .

A partir de los resultados, solo podemos concluir que las soluciones tienen una masa estelar en el intervalo de $M_{\star} = 0.1554\text{--}0.1921 M_{\odot}$, con una T_{eff} restringida en el rango

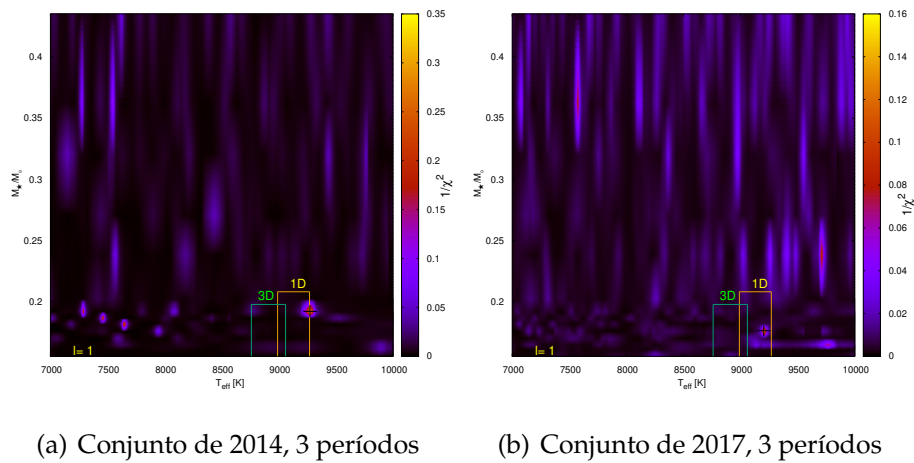


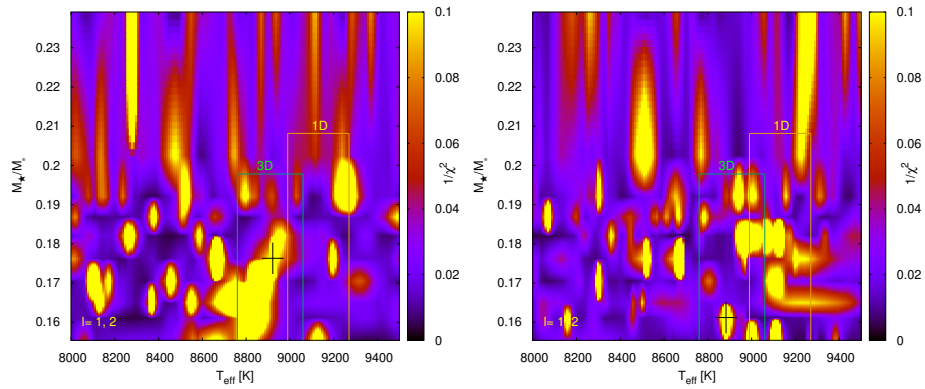
Figura 5.13: Igual que en la Figura 5.7(b) pero para el caso de J1738, considerando los períodos del conjunto de datos de 2014, suponiendo que están asociados con $\ell = 1$.

de $\sim 8883 - 9273$ K, y una envoltura de H muy pobremente restringida en el rango de $M_H/M_\star = 3.75 \times 10^{-6} - 1.74 \times 10^{-2}$. Las edades de enfriamiento estimadas tampoco están bien acotadas, resultando entre unos 0.03 y 3 Gyr. Finalmente y como es de esperarse, comparando las Figuras 5.14(a) y 5.14(b) con 5.14(c), obtenemos menos posibles soluciones cuando incrementamos el número de períodos considerados. A pesar de esto, los resultados obtenidos no son más concluyentes (las soluciones no tienen valores más grandes de $(\chi^2)^{-1}$).

5.3.7. El caso de J1618

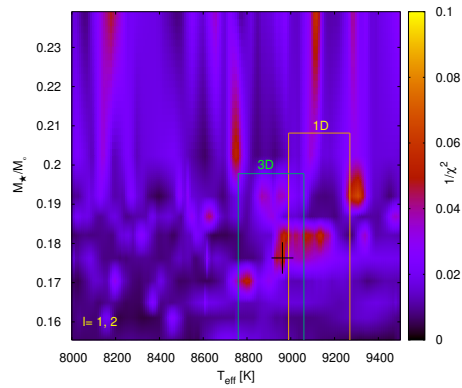
J1618 tiene los siguientes parámetros espectroscópicos: $T_{\text{eff}} = 9144 \pm 120$ K, $\log(g) = 6.83 \pm 0.14$ [cgs] y $M_\star = 0.220 M_\odot$ para el modelo 1D (Bell et al. 2015), y $T_{\text{eff}} = 8965 \pm 120$ K, $\log(g) = 6.54 \pm 0.14$ [cgs] y $M_\star = 0.179 M_\odot$ para el modelo 3D (Tremblay et al. 2015). Como se expone en Bell et al. (2018), esta estrella exhibe un conjunto diferente de períodos dependiendo de cómo se procesa la curva de luz (en el procedimiento denominado *prewhitening* para encontrar las frecuencias de pulsación). En ese trabajo, los autores hacen una reinterpretación de los datos y presentan dos soluciones posibles para las frecuencias provenientes de sus observaciones publicadas por primera vez en Bell et al. (2015) (las cuales figuran en la Tabla 4.8). Los nuevos conjuntos, con dos y tres períodos, se encuentran en la Tabla 5.7, según lo reportado por Bell et al. (2018). De acuerdo con esto, llevamos a cabo dos ajustes de períodos distintos. Más aún, dada la incerteza en algunos de los períodos, también analizamos los casos en que uno de los períodos de cada conjunto es cambiado según $\pm\sigma_i$. Notar que con estos dos nuevos conjuntos de períodos, los resultados pueden diferir considerablemente respecto de los presentados en el Capítulo 4.

Cuando consideramos el conjunto de dos períodos de Bell et al. (2018), sin tener en cuenta las incertezas, el caso con $\ell = 1$ no tiene una solución posible dentro de las cajas y la



(a) Conjunto de 2014, 3 períodos

(b) Conjunto de 2017, 3 períodos



(c) Conjunto de 2014+2017, 6 períodos

Figura 5.14: Igual que en la Figura 5.7 pero para el caso de J1738, considerando el conjunto de períodos correspondientes a 2014, 2017 y 2014 + 2017.

Tabla 5.7: Lista de dos conjuntos posibles de períodos independientes de J1618, con sus frecuencias correspondientes y amplitudes, provenientes de un reanálisis de los datos publicados originalmente en Bell et al. (2015). Adaptado de Bell et al. (2018).

Frecuencia [μHz]	Π^{O} [s]	Amplitud [%]
202.61 ± 15	4936 ± 4	6.19 ± 19
162.8 ± 3	6143 ± 11	3.35 ± 19
189.56 ± 16	5275 ± 5	5.63 ± 19
226.7 ± 3	4410 ± 7	2.76 ± 19
149.1 ± 4	6706 ± 16	2.59 ± 19

mejor solución yace en ~ 9614 K, para $0.2390 M_{\odot}$, $\log(M_{\text{H}}/M_{\star}) = -4.28$ con $(\chi^2)^{-1} = 17.5$. Para $\ell = 1, 2$, como puede verse en la Figura 5.15(a), hay una solución posible en ~ 8919 K, para $0.1706 M_{\odot}$, $\log(M_{\text{H}}/M_{\star}) = -1.89$ (canónica) con $(\chi^2)^{-1} = 4.68$, dentro de la caja 3D. Es claro de la Figura que el mejor ajuste de períodos cae en un valor alto de $T_{\text{eff}} \sim 9387$ K, para $0.1650 M_{\odot}$, $\log(M_{\text{H}}/M_{\star}) = -1.82$ (canónica) con $(\chi^2)^{-1} = 662$. El caso considerando la incerteza para el período con 6143.0 s y $\sigma_i = 11$ s (no mostrado) presenta, cuando se toma $-\sigma_i$ y modos asociados a $\ell = 1$, una solución posible dentro de la caja 3D en 8871 K, para $0.1762 M_{\odot}$, $\log(M_{\text{H}}/M_{\star}) = -3.66$, con $(\chi^2)^{-1} = 1.26$. Si $\ell = 1, 2$, encontramos una solución posible dentro de la caja 1D, en 9207 K, para $0.1869 M_{\odot}$, $\log(M_{\text{H}}/M_{\star}) = -2.37$ (canónica), con $(\chi^2)^{-1} = 22.2$. Considerando $+\sigma_i$, para $\ell = 1$, hay una solución posible dentro de la caja 3D en 8943 K, para $0.1706 M_{\odot}$, $\log(M_{\text{H}}/M_{\star}) = -1.89$ (canónica), con $(\chi^2)^{-1} = 0.35$, mientras que para $\ell = 1, 2$, un buen ajuste de períodos dentro de la caja 1D está en 9231 K, para $0.1921 M_{\odot}$, $\log(M_{\text{H}}/M_{\star}) = -4.30$, con $(\chi^2)^{-1} = 11.47$. Estos resultados sugieren que para este caso la solución está bastante limitada dentro de los rangos $T_{\text{eff}} \sim 8919 - 9231$ K, $M_{\star} = 0.1706 - 0.1921 M_{\odot}$ pero pobremente limitada en cuanto a la envoltura de H, $M_{\text{H}}/M_{\star} = 4.93 \times 10^{-5} - 1.29 \times 10^{-2}$.

Cuando consideramos el conjunto de tres períodos de Bell et al. (2018), el caso de $\ell = 1$ indica que la mejor solución está en 9157 K, para $0.1554 M_{\odot}$, $\log(M_{\text{H}}/M_{\star}) = -3.00$, con $(\chi^2)^{-1} = 0.32$, es decir, casi en la caja 3D. Y para $\ell = 1, 2$, como se muestra en la Figura 5.15(b), una solución posible yace en 8979 K, para $0.1650 M_{\odot}$, $\log(M_{\text{H}}/M_{\star}) = -5.06$, con $(\chi^2)^{-1} = 2.16$. Respecto a los casos considerando la incerteza, tomando el valor $\sigma_i = 16$ s para el período con 6706.0 s, encontramos para el caso $-\sigma_i$ y modos asociados a $\ell = 1$, que hay una posible solución dentro de la caja 3D en 8920 K, para $0.1650 M_{\odot}$, $\log(M_{\text{H}}/M_{\star}) = -4.35$, con $(\chi^2)^{-1} = 0.56$. Para $\ell = 1, 2$, hay una posible solución en la caja 3D en 8928 K, para $0.1921 M_{\odot}$, $\log(M_{\text{H}}/M_{\star}) = -3.62$, con $(\chi^2)^{-1} = 1.79$, y además otra posible solución en 8920 K, para $0.1650 M_{\odot}$, $\log(M_{\text{H}}/M_{\star}) = -4.35$, con $(\chi^2)^{-1} = 0.54$. Para el caso $+\sigma_i$ y $\ell = 1$, una posible solución dentro de la caja 3D, está en 9005 K, para $0.1762 M_{\odot}$, $\log(M_{\text{H}}/M_{\star}) = -2.50$, con $(\chi^2)^{-1} = 0.06$. Y para $\ell = 1, 2$, hay un buen ajuste de períodos dentro de la caja 3D en 8940 K, para $0.1650 M_{\odot}$, $\log(M_{\text{H}}/M_{\star}) = -4.35$, con $(\chi^2)^{-1} = 1.58$. Esta solución con $0.1650 M_{\odot}$ y $\log(M_{\text{H}}/M_{\star}) = -4.35$ aparece en ambos casos, $\pm\sigma_i$, con un valor levemente diferente de T_{eff} . En base a estos resultados, la solución tendría un valor de M_{\star} en el intervalo de $M_{\star} = 0.1650 - 0.1921 M_{\odot}$, con una T_{eff} bien limitada en el rango de $\sim 8920 - 8979$ K, y una envoltura de H en el rango $M_{\text{H}}/M_{\star} = 8.64 \times 10^{-6} - 2.38 \times 10^{-4}$.

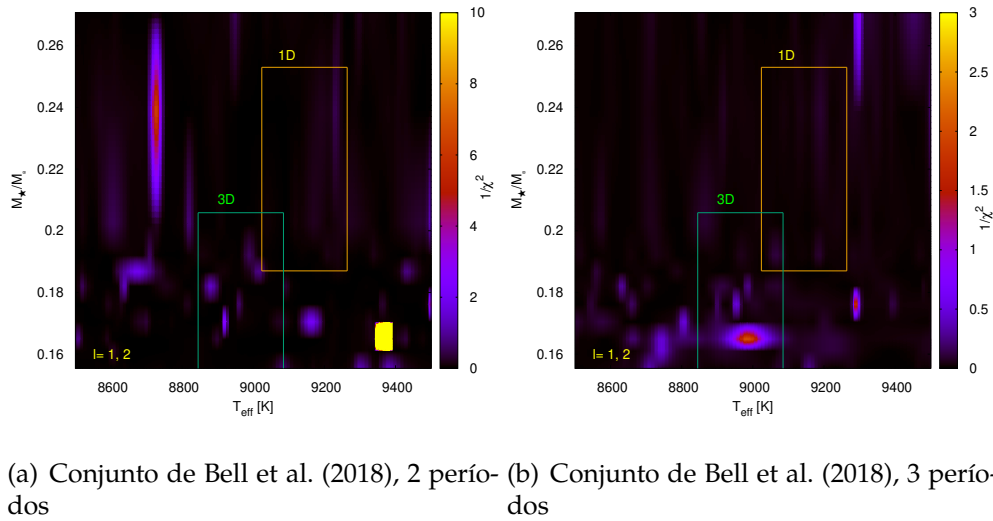


Figura 5.15: Igual que en la Figura 5.7 pero para el caso de J1618, para los tres conjuntos diferentes de períodos.

Al reunir los resultados parciales, es claro que hay grandes diferencias en las soluciones cuando tomamos en cuenta los diferentes conjuntos. Entonces, para esta estrella, solo es posible concluir que hay un amplio rango de soluciones con una masa estelar en el intervalo $M_{\star} = 0.1650 - 0.1921 M_{\odot}$, una T_{eff} entre unos 8919 y 9231 K, y una envoltura de H en el intervalo $M_{\text{H}}/M_{\star} = 8.64 \times 10^{-6} - 1.29 \times 10^{-2}$.

5.3.8. El caso de J1735

J1735 está caracterizada por los parámetros: $T_{\text{eff}} = 7940 \pm 130$ K, $\log(g) = 5.76 \pm 0.08$ [cgs] y $M_{\star} = 0.142 M_{\odot}$ para el modelo 3D, y exhibe cuatro períodos independientes, como se muestra en la Tabla 4.9.

El caso en que $\ell = 1$ indica una solución pobre dentro de la caja, en 8082 K, para $0.1612 M_{\odot}$, y $\log(M_{\text{H}}/M_{\star}) = -1.76$ (canónica) con $(\chi^2)^{-1} = 0.007$, mientras que para el caso de $\ell = 1, 2$, el ajuste de períodos con el mejor valor está asociado con un modelo caracterizado por $0.2390 M_{\odot}$ (con 9892 K, $\log(M_{\text{H}}/M_{\star}) = -4.28$, $(\chi^2)^{-1} = 0.53$), que entonces está fuera de los rangos permitidos. Si nos enfocamos en rangos más cercanos a los permitidos por la espectroscopía, como se muestra en la Figura 5.16, podemos ver buenos ajustes de períodos en 7963 K, para $0.1650 M_{\odot}$ y $\log(M_{\text{H}}/M_{\star}) = -1.82$ (canónica), con $(\chi^2)^{-1} = 0.23$ y otro 8075 K, para $0.1612 M_{\odot}$ y $\log(M_{\text{H}}/M_{\star}) = -1.76$ (canónica), con $(\chi^2)^{-1} = 0.22$. Este último modelo puede ser elegido como solución, y resulta ser el mismo resultado obtenido en el Capítulo anterior. Mostramos la comparación entre los períodos teóricos y observados en la Tabla 5.8.

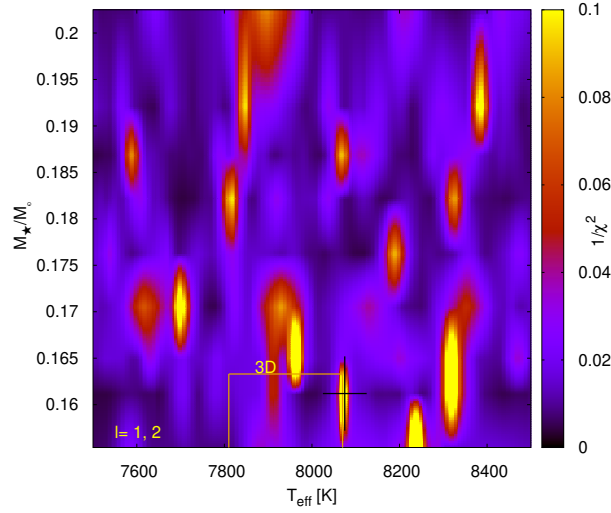


Figura 5.16: Igual que en la Figura 5.7, pero para el caso de J1735.

 Tabla 5.8: Igual que en la Tabla 5.2, pero para el modelo adoptado para J1735 con $M_\star = 0.1612 M_\odot$, $T_{\text{eff}} = 8075 \text{ K}$ y $\log(M_{\text{H}}/M_\star) = -1.76$ (canónica).

$\Pi^{\text{O}}[\text{s}]$	$\Pi^{\text{T}}[\text{s}]$	ℓ	k	$ \delta\Pi [\text{s}]$	$\eta[10^{-8}]$	Observación
3 362.76	3 359.87	2	56	2.89	5.57	inestable
3 834.54	3 831.65	2	64	2.89	0.243	inestable
4 541.88	4 542.92	2	76	1.04	-14.3	estable
4 961.22	4 960.70	1	48	0.52	13.9	inestable

5.3.9. El caso de J2139

J2139 está caracterizada por $T_{\text{eff}} = 7990 \pm 130 \text{ K}$, $\log(g) = 5.93 \pm 0.12 \text{ [cgs]}$ y $M_\star = 0.149 M_\odot$ para el modelo 3D de atmósferas, y muestra tres períodos independientes, de acuerdo a la Tabla 4.10.

Cuando tomamos en cuenta el caso de $\ell = 1$, hay una solución posible en $\sim 7903 \text{ K}$ para $0.1706 M_\odot$, $\log(M_{\text{H}}/M_\star) = -1.89$ (canónica) y $(\chi^2)^{-1} = 0.006$, aunque no es una buena solución. Para $\ell = 1, 2$, el mejor ajuste de períodos está en 9610 K , para $0.2025 M_\odot$, $\log(M_{\text{H}}/M_\star) = -4.30$ con $(\chi^2)^{-1} = 1.94$. Enfocándonos en valores más cercanos a los rangos permitidos, como se muestra en la Figura 5.17, es claro que hay muchas soluciones posibles con valores de $(\chi^2)^{-1}$ considerablemente buenos, pero ninguna de ellas se encuentra dentro de la caja espectroscópica. La única solución cercana está representada por un modelo con $0.1612 M_\odot$, en 8173 K y $\log(M_{\text{H}}/M_\star) = -2.49$, con $(\chi^2)^{-1} = 0.12$. Aunque en este caso no podemos encontrar una solución dentro de las restricciones dadas, es posible adoptar el mencionado modelo. En la Tabla 5.9, mostramos las diferencias correspondientes entre los períodos teóricos y observados. Desafortunadamente, como se muestra en la sexta columna, el análisis no adiabático predice que estos períodos son

estables.

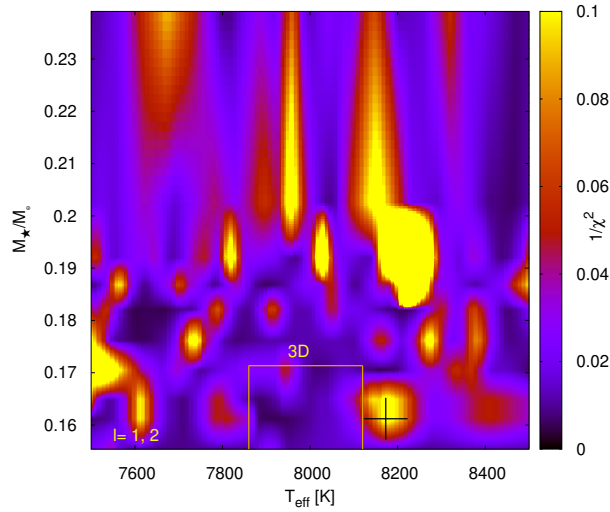


Figura 5.17: Igual que en la Figura 5.7, pero para el caso de J2139.

Tabla 5.9: Igual que en la Tabla 5.2, pero para el modelo adoptado para J2139 con $M_\star = 0.1612 M_\odot$, $T_{\text{eff}} = 8173 \text{ K}$ y $\log(M_{\text{H}}/M_\star) = -2.49$.

$\Pi^{\text{O}}[\text{s}]$	$\Pi^{\text{T}}[\text{s}]$	ℓ	k	$ \delta\Pi [\text{s}]$	$\eta[10^{-10}]$	Observación
2119.44	2114.52	2	4.92	33	-6.40	estable
2482.32	2483.65	2	1.33	39	-3.33	estable
3303.30	3303.08	1	0.22	30	-8.20	estable

5.4. Conclusiones

En este Capítulo hemos presentado un conjunto completo de secuencias de enanas blancas de masa baja con núcleo de He, con distintos espesores de sus envolturas de H, sobre la base de los modelos completamente evolutivos que representan a estas estrellas generados por Althaus et al. (2013). Hemos explorado los perfiles químicos de esta grilla de modelos, y también hemos analizado el impacto sobre las propiedades de pulsación adiabáticas. Más aún, hemos llevado a cabo ajustes astrosismológicos aplicados a estrellas ELMV, como en el Capítulo anterior, pero esta vez empleando este conjunto mayor de secuencias evolutivas que expande el espacio de parámetros al incorporar al espesor de la envoltura de H como un parámetro libre.

Mediante un análisis de los perfiles químicos internos de nuestros modelos de enanas blancas ELM, se ha puesto en evidencia la existencia de una envoltura de H de doble capa para algunos modelos que se encuentran dentro de la banda de inestabilidad. Al

considerar envolturas delgadas de H y analizando el impacto sobre las propiedades de atrapamiento de modos g de nuestros modelos de ELMs, encontramos que dependen fuertemente de M_H . La distribución del espaciamiento de períodos adquiere una forma relativamente regular para envolturas gruesas de H (incluyendo la canónica), con un ciclo muy corto de trapping, mientras que para envolturas más delgadas de H, tanto el ciclo de trapping como su amplitud aumentan. Por otro lado, encontramos que el espaciamiento de períodos asintótico aumenta al decrecer el espesor de la envoltura de H.

En cuanto a los ajustes de períodos, hemos encontrado soluciones múltiples. Esto podría deberse, en parte, al problema (persistente) de la escasez de períodos disponibles detectados en las ELMVs. solo a través de la inclusión de restricciones externas (es decir, valores espectroscópicos) hemos podido adoptar un modelo y en tres de los casos, tan solo hemos podido dar rangos de soluciones posibles. Los resultados están condensados en la Tabla 5.10. Algunos conjuntos de datos exhiben uno o más períodos con gran incerteza (σ). En esos casos, hemos llevado a cabo análisis considerando entonces $\pm\sigma$ para el período con mayor incerteza, y encontramos un cambio considerable en los resultados. También hemos encontrado diferencias sustanciales en los resultados al considerar, para la misma estrella, diferentes conjuntos de períodos. Es importante destacar que algunas de las soluciones encontradas (Tabla 5.10) están caracterizadas por envolturas de H gruesas (canónicas) y otras, por envolturas delgadas de H. Este resultado refuerza los hallazgos de Calcaferro et al. (2018a), que se muestran en el siguiente Capítulo. Algunas de las soluciones adoptadas tienen un valor de masa estelar inferior a la adoptada en el Capítulo 4. Esto puede deberse al hecho de estar empleando modelos con envoltura más delgada de H, y además, porque estamos empleando una nueva restricción en este trabajo: la masa estelar. En general, no encontramos soluciones apropiadas al considerar modos asociados únicamente con $\ell = 1$, sino con una mezcla de $\ell = 1, 2$. Cabe mencionar que en la mayoría de los casos encontramos que los períodos de pulsación correspondientes a los modelos adoptados están asociados a modos pulsacionalmente inestables.

Dada la escasez de períodos observados en las ELMVs, resulta difícil obtener una solución unívoca compatible con las determinaciones espectroscópicas mediante los métodos de la astrosismología. Esto nos fuerza a enfocar nuestra exploración en el rango de parámetros determinados por la espectroscopía (cajas espectroscópicas). Adicionalmente, si la estrella exhibe uno o más períodos con incerteza considerable, resulta aún más difícil encontrar una solución astrosismológica unívoca, y este ha sido el caso para J1840 y J1618. En estos, solo hemos podido especificar rangos de T_{eff} , M_\star y M_H/M_\star . solo para dos casos, J1112 y J2139, nuestros cálculos no adiabáticos predicen que las soluciones adoptadas son pulsacionalmente estables.

Es claro que resulta imperioso, a fin de poder mejorar las estimaciones hechas a través de la astrosismología, detectar un mayor número de períodos de pulsación para las ELMVs conocidas. Además, para poder caracterizar mejor a este tipo de estrellas, también es necesario detectar un mayor número de ellas.

Tabla 5.10: Principales características de los modelos astrosismológicos adoptados y de los rangos de soluciones posibles para cada ELMV conocida.

Estrella	T_{eff} [K]	$\log(g)$ [cgs]	M_{\star} [M_{\odot}]	$\log(M_{\text{H}}/M_{\star})$	$\log(R_{\star}/R_{\odot})$	$\log(L_{\star}/L_{\odot})$
J1840	[8 997,9 244]	[5.8276,6.7524]	[0.1554,0.1869]	[-5.19,-1.69]	[-1.5216,-1.0992]	[-2.2166,-1.4249]
J1112*	9 301	5.9695	0.1612	-1.76	-1.1623	-1.4932
J1518	9 487	6.9994	0.2390	-3.67	-1.5916	-2.3200
J1614	8 989	6.4468	0.1612	-4.35	-1.4009	-2.0232
J2228*	7 710	6.1738	0.1554	-1.69	-1.2725	-2.0409
J1738	[8 883,9 273]	[6.0506,6.6923]	[0.1554,0.1921]	[-5.43,-1.76]	[-1.5057,-1.2029]	[-2.2548,-1.6560]
J1618	[8 919,9 231]	[6.2661,6.7568]	[0.1650,0.1921]	[-5.06,-1.89]	[-1.5178,-1.2982]	[-2.2447,-1.8401]
J1735*	8 075	6.2241	0.1612	-1.76	-1.2899	-1.9957
J2139	8 173	6.3355	0.1612	-2.49	-1.3453	-2.0820

Nota: * Solución con envoltura de H canónica.

6 | Las ELMs más frías

“Let us step into the night and pursue that flighty temptress, adventure.”

Harry Potter and the Half-Blood Prince, J.K. Rowling (2005)

La mayoría de los resultados mostrados en el presente Capítulo han sido publicados en el artículo **“The coolest extremely low-mass white dwarfs”**, Leila M. Calcaferro, Leandro G. Althaus, Alejandro H. Córscico. *Astronomy & Astrophysics*, 614, A49 (2018)

6.1. Introducción

Como ya hemos mencionado, el mecanismo aceptado para la formación de enanas blancas de baja masa con núcleo de He implica la ocurrencia de al menos un episodio de transferencia de masa, ya sea de forma inestable vía episodios de envoltura común o bien de forma estable vía RLOF en sistemas binarios interactuantes (ver la discusión reciente de Istrate et al. 2016b, por ejemplo). En particular, los tracks evolutivos existentes hasta el momento son derivados de estrellas progenitoras que han experimentado transferencia de masa estable, ver por ej. Althaus et al. (2013); Istrate et al. (2016b) y referencias allí. Todos estos estudios predicen para estas estrellas la presencia de envolturas gruesas de H que sostienen la quema residual estable de H, con sus consecuentes edades de enfriamiento extremadamente largas, aún a temperaturas altas. En particular, estos estudios muestran que no se espera que se encuentren en el Universo ELMs que se hayan enfriado por debajo de los ~ 7000 K.

Sin embargo, como hemos mencionado previamente, la formación de ELMs con envolturas delgadas de H incapaces de mantener quema residual de H no puede descartarse. Tales enanas blancas podrían resultar de la evolución a través de envoltura común de sistemas binarios cercanos (ver Nandez & Ivanova 2016; Ivanova & Nandez 2016; Clayton et al. 2017, para cálculos recientes) o de la pérdida de la envoltura de una estrella RGB inducida por un planeta gigante espiralando (Nelemans & Tauris 1998; De Marco & Soker 2002; Sabach & Soker 2017). Estos estudios sugieren que una estrella RGB podría de hecho perder la mayor parte de su envoltura en estos episodios. En particular, Clayton et al. (2017) encontró que la envoltura de sus modelos de baja masa en la RGB se vuelven dinámicamente inestables, resultando que la envoltura completa de la estrella se ve removida en la duración de la fase lenta de espiralamiento hacia adentro (*spiral-in phase*). Sin embargo, debería mencionarse que la predicción de estos canales para la formación de ELMs es más incierta debido a la gran energía de ligadura de la envoltura de la estrella donante (Sun

& Arras 2018). Desde el punto de vista observacional, no puede descartarse la existencia de una población de enanas blancas de baja masa y núcleo de He con envoltura de H delgada en NGC 6397 (ver Strickler et al. 2009). En un contexto completamente diferente, la formación de ELMs con envoltura delgada de H podría resultar de la irradiación del púlsar compañero, conduciendo a un enfriamiento rápido de la ELM (van den Heuvel & van Paradijs 1988; Ergma et al. 2001). Finalmente, cabe mencionar que algunos autores plantean posibilidades adicionales para la formación de ELMs, y aunque en estos escenarios estas estrellas se encontrarían aisladas, dichos escenarios podrían dar lugar a enanas blancas de baja masa con envolturas delgadas de H. Podría ser posible hallar remanentes de estrellas donantes en la rama de las gigantes cuyas envolturas fueron removidas en una explosión de supernova, o incluso, aunque menos probable, podría ser que la fusión de dos estrellas (*merger*) en la cual se quemaría el H, diera origen a este tipo de objetos (Justham et al. 2009). Estas últimas podrían, quizás, ser la clave para explicar aquellas ELMs para las cuales no se han detectado una compañera binaria.

En vista de estas consideraciones, no podemos descartar la existencia de ELMs con envolturas de H delgadas. Para explorar el impacto de este posible resultado de la interacción binaria sobre las expectativas observacionales de ELMs, en este trabajo estudiamos las secuencias evolutivas de enanas blancas ELM formadas con una envoltura de H delgada y mostramos que, en este caso, los tiempos de enfriamiento de tales enanas blancas resultan ser mucho más cortos que los tiempos de enfriamiento de sus contrapartes con envolturas de H gruesas (canónicas) que sugieren que no es esperable observar ELM alguna por debajo de ~ 7000 K, en acuerdo con las observaciones. De acuerdo con nuestros cálculos, sin embargo, si las ELMs *nacieran* con una envoltura de H delgada (por ejemplo, debido a episodios de transferencia de masa inestable) podrían ser observadas a temperaturas efectivas mucho más bajas (por debajo de los 2500 K). La detección de enanas blancas ELM a temperatura efectiva baja sería una indicación de que tales enanas blancas podrían haber sido formadas con una envoltura de H delgada, un hecho que podría arrojar luz sobre la naturaleza de la pérdida de masa que conduce a la formación de ELMs. Aunque la detección de tales ELMs es difícil, debido a que la técnica espectroscópica se vuelve imprecisa debajo de los ~ 7000 K, donde las líneas de Balmer se vuelven más débiles y luego desaparecen debajo de los ~ 5000 K, las mediciones de paralajes de Gaia representan un camino prometedor que podría ayudar a identificar tales ELMs frías.

En este trabajo estudiamos los tiempos de enfriamiento para algunas secuencias de ELMs seleccionadas con envolturas delgadas y gruesas de H, de las presentadas en el Capítulo 5. Empleamos las secuencias canónicas de Althaus et al. (2013) y aquellas con envoltura delgada de H que presentamos en dicho Capítulo, las cuales, recordemos, fueron generadas reduciendo artificialmente la envoltura de H en la etapa de pre-enana blanca y para las cuales luego actúa la difusión de elementos para suavizar los perfiles químicos antes de alcanzar la etapa de enana blanca. Con el fin de explorar no solo el impacto de la envoltura de H sobre el tiempo de enfriamiento, para lo cual alcanza con reducir levemente el espesor de la envoltura, sino también el efecto sobre la gravedad superficial, usaremos particularmente las secuencias con envolturas de H cuyo espesor es muchos órdenes de magnitud menor que el de las envolturas canónicas. Para este estudio en particular, también generamos dos secuencias evolutivas con 0.130 y $0.140 M_{\odot}$, con envolturas delgadas de H, con el objetivo de cubrir el dominio de baja gravedad

superficial en nuestra grilla. Esto fue realizado escaleando artificialmente la masa total de la secuencia de enana blanca con $0.1554 M_{\odot}$.

Comenzaremos por estudiar la diferencia en los tiempos de enfriamiento entre nuestras secuencias. Posteriormente, describiremos las consideraciones que tenemos en cuenta para encontrar la temperatura efectiva más baja que podría ser alcanzada por estrellas ELM, considerando distintos progenitores posibles y, finalmente, mostramos los resultados obtenidos.

6.2. Estimación de la menor temperatura efectiva posible alcanzada por una ELM

Comenzamos examinando el impacto de la masa de la envoltura de H sobre los tiempos de enfriamiento de ELMs. En este sentido, encontramos que una pequeña reducción de la envoltura de H, por un factor entre 2 y 3, es suficiente para apagar la quema de H, conduciendo así a una rápida evolución en etapas avanzadas (ver Althaus et al. 2001, para un resultado similar). Esto se ilustra en las Figuras 6.1 y 6.2, que muestran los tiempos de enfriamiento como una función de la temperatura efectiva para las secuencias con 0.1554 y $0.1822 M_{\odot}$, respectivamente, tanto para las envolturas de H canónicas como delgadas. Cabe mencionar que estas secuencias no han experimentado flashes de CNO sobre la rama de enfriamiento.

Las Figuras muestran el rápido enfriamiento que caracteriza a las secuencias con envoltura delgada de H, en comparación con sus contrapartes con envoltura canónica, las cuales están experimentando quema residual de H y se enfrían mucho más lentamente. En particular, vemos que la evolución de la secuencia canónica con $M_{\star} = 0.1554 M_{\odot}$ tarda aproximadamente unos 8 700 Myr en llegar hasta unos 7 500 K, en contraste con los 290 Myr requeridos por la secuencia con envoltura delgada. Se puede encontrar información más específica en la Tabla 6.1, que tabula el tiempo de enfriamiento, t_{cool} , junto con el $\log(g)$ para algunos modelos elegidos con 0.1554 , 0.1822 , y $0.2025 M_{\odot}$ con envolturas canónicas (con $M_H = 2.0 \times 10^{-2}$, 3.6×10^{-3} y $3.7 \times 10^{-3} M_{\star}$ para las secuencias con 0.1554 , 0.1822 , y $0.2025 M_{\odot}$, respectivamente) y envolturas delgadas de H (con $M_H \sim 10^{-5} M_{\star}$ para todas las secuencias). Cabe destacar, además, que la secuencia con $0.2025 M_{\odot}$ experimenta flashes de CNO durante la primera rama de enfriamiento, resultando que la envoltura de H y, consigo, la quema de H en la rama final de enfriamiento, son reducidas. Esto explica la corta edad de enfriamiento de esta secuencia también en el caso de la envoltura canónica. Es claro que la quema nuclear residual es responsable de los tiempos de enfriamiento extremadamente largos que necesitarían las ELMs para alcanzar temperaturas efectivas bajas, y más importante aún, que una pequeña reducción de la envoltura de H es suficiente para extinguir esta fuente de quema nuclear, y por lo tanto, causar una evolución rápida de la ELM.

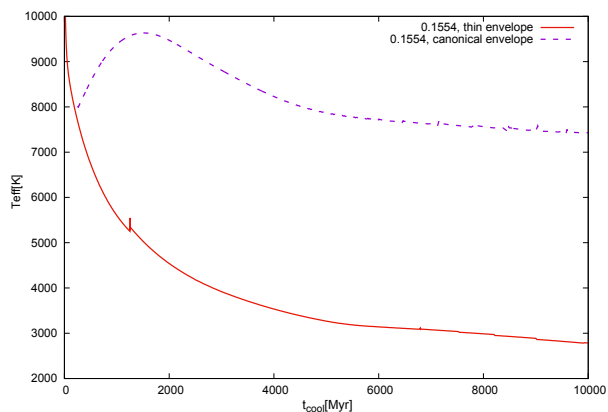


Figura 6.1: Curvas de enfriamiento para las ELM con $M_{\star} = 0.1554 M_{\odot}$ con envolturas tanto canónica como delgada de H.

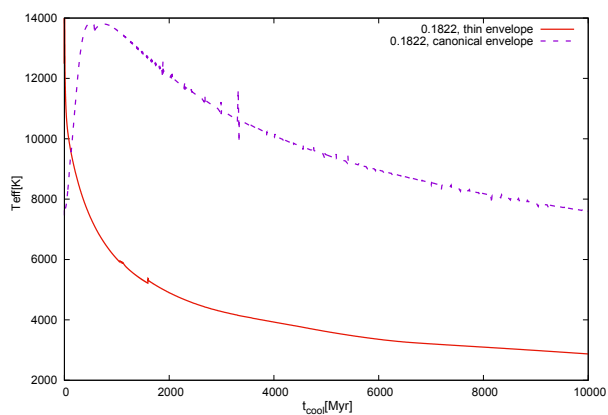


Figura 6.2: Igual que en la Figura 6.1 pero para las secuencias evolutivas con $M_{\star} = 0.1822 M_{\odot}$.

Tabla 6.1: Características principales de tres modelos elegidos con envoltura canónica y delgada.

$M_{\star}[M_{\odot}]$	$T_{\text{eff}}[\text{K}]$	$\log(g)[\text{cgs}]$	$t_{\text{cool}}[\text{Gyr}]$	$T_{\text{eff}}[\text{K}]$	$\log(g)[\text{cgs}]$	$t_{\text{cool}}[\text{Gyr}]$
		Envoltura gruesa		Envoltura delgada		
0.1554	9 420	5.682	2.077	9 440	6.287	0.032
	8 930	5.858	2.811	8 940	6.358	0.058
	8 420	5.995	3.633	8 430	6.436	0.115
	7 930	6.108	4.742	7 930	6.505	0.203
	7 430	6.245	10.12	7 430	6.561	0.309
				6 930	6.611	0.444
				6 430	6.654	0.608
				5 930	6.694	0.820
				5 430	6.737	1.112
				4 930	6.812	1.593
				4 430	6.834	2.145
				3 930	6.855	2.968
				3 430	6.875	4.356
				2 930	6.912	8.469
			2 540	6.927	12.21	
0.1822	10 430	6.479	3.583	10 420	6.548	0.052
	9 930	6.516	4.249	9 930	6.595	0.087
	9 430	6.554	5.066	9 430	6.642	0.139
	8 930	6.590	6.074	8 940	6.684	0.203
	8 420	6.624	7.203	8 440	6.722	0.279
	7 940	6.655	8.848	7 930	6.756	0.374
	7 430	6.685	10.69	7 440	6.787	0.486
	6 930	6.713	13.03	6 920	6.816	0.631
				6 440	6.844	0.808
				5 930	6.872	1.046
				5 430	6.904	1.402
				4 930	6.967	1.971
				4 420	6.986	2.682
				3 930	7.008	4.004
			3 430	7.021	5.675	
			2 930	7.039	9.497	
			2 550	7.046	12.18	
0.2025	10 430	6.695	0.003	10 430	6.798	0.004
	9 910	6.706	0.059	9 940	6.809	0.007
	9 420	6.719	0.121	9 440	6.825	0.014
	8 950	6.735	0.188	8 940	6.844	0.034
	8 430	6.753	0.278	8 450	6.868	0.093
	7 930	6.771	0.380	7 910	6.895	0.199
	7 430	6.790	0.499	7 450	6.916	0.314
	6 930	6.811	0.650	6 960	6.937	0.463
	6 440	6.833	0.849	6 430	6.960	0.673

$M_{\star}[M_{\odot}]$	$T_{\text{eff}}[\text{K}]$	$\log(g)[\text{cgs}]$	$t_{\text{cool}} [\text{Gyr}]$	$T_{\text{eff}}[\text{K}]$	$\log(g)[\text{cgs}]$	$t_{\text{cool}} [\text{Gyr}]$
Envoltura gruesa			Envoltura delgada			
	5 930	6.859	1.117	5 930	6.981	0.924
	5 430	6.889	1.480	5 430	7.007	1.284
	4 930	6.941	2.031	4 930	7.058	1.886
	4 430	6.998	2.844	4 420	7.075	2.729
	3 930	7.031	4.418	3 930	7.093	4.132
	3 430	7.047	6.166	3 430	7.113	6.810
	2 930	7.058	8.525	2 940	7.120	9.502
	2 530	7.064	11.17	2 530	7.124	12.13

Los tiempos evolutivos cortos que caracterizan a las secuencias de envoltura delgada de H abren la posibilidad de detectar ELMs a muy baja T_{eff} . Con el fin de cuantificar esto, supongamos una edad para el disco galáctico de unos 13.7 Gyr. Si definimos t_{birth} y t_{MS} como los tiempos de nacimiento y de secuencia principal de la estrella progenitora, respectivamente, entonces el tiempo disponible para que la ELM evolucione durante la etapa de enana blanca viene dado por $13.7 \text{ Gyr} - t_{\text{MS}} - t_{\text{birth}}$. Para obtener el tiempo máximo disponible en el régimen de enana blanca, y por lo tanto poder encontrar la T_{eff} más baja que puede ser alcanzada por una enana blanca de He de baja masa, tomamos $t_{\text{birth}} = 0$, es decir, suponemos que el progenitor nació al comienzo de la formación estelar en el disco. Asimismo, deben tenerse en cuenta las edades más cortas para los posibles progenitores de estas estrellas. Para estimar esto, hemos realizado cálculos adicionales para conocer el valor máximo de la masa inicial de las estrellas progenitoras en la ZAMS que pueden formar ELMs, y hemos obtenido un valor de $\sim 1.5 M_{\odot}$ ($t_{\text{MS}} \sim 1.5 \text{ Gyr}$ para metalicidad solar). Esto está en acuerdo con la exploración llevada a cabo por Sun & Arras (2018). Tomando en cuenta el t_{MS} de este progenitor, exploramos los valores más bajos de T_{eff} que pueden ser alcanzados por las secuencias que no experimentan flashes, con $M_{\star} = 0.1554 M_{\odot}$ y $M_{\star} = 0.1822 M_{\odot}$, y por la secuencia que sí experimenta flashes de CNO, con $M_{\star} = 0.2025 M_{\odot}$.

Los resultados están ilustrados en la Figura 6.3, en la cual representamos las secuencias evolutivas mencionadas, con envolturas canónicas y delgadas de H, en el plano $\log(g) - T_{\text{eff}}$. También hemos incluido en la Figura la ubicación de una muestra de ELMs junto con las ELMVs conocidas (Hermes et al. 2012, 2013c,a; Kilic et al. 2015; Bell et al. 2015; Brown et al. 2016a; Bell et al. 2017a). La línea negra sólida a la izquierda conecta puntos de igual edad (13.7 Gyr) para los tracks canónicos mientras que las líneas sólidas a la derecha conectan puntos de igual edad (13.7 Gyr) pero para los tracks con envoltura delgada de H. Las líneas discontinuas también corresponden al límite de la edad del disco galáctico, y solo se marcan como proyecciones con el fin de delimitar la región. El resultado principal ilustrado por la Figura 6.3 es la existencia de una región que denominamos *Thin H envelope* (envoltura delgada de H) en la cual solo aquellas ELMs con envoltura de H delgada pueden ser encontradas. De hecho, no se espera que las ELMs con envoltura canónica de H hayan evolucionado a valores de T_{eff} inferiores al límite impuesto por la línea sólida de la izquierda. Solo aquellas ELMs con envoltura de H delgada, y por lo tanto, edades de enfriamiento cortas, se espera que evolucionen hasta valores tan bajos de T_{eff} (pero no inferiores a la línea sólida de la derecha). Más específicamente, las enanas

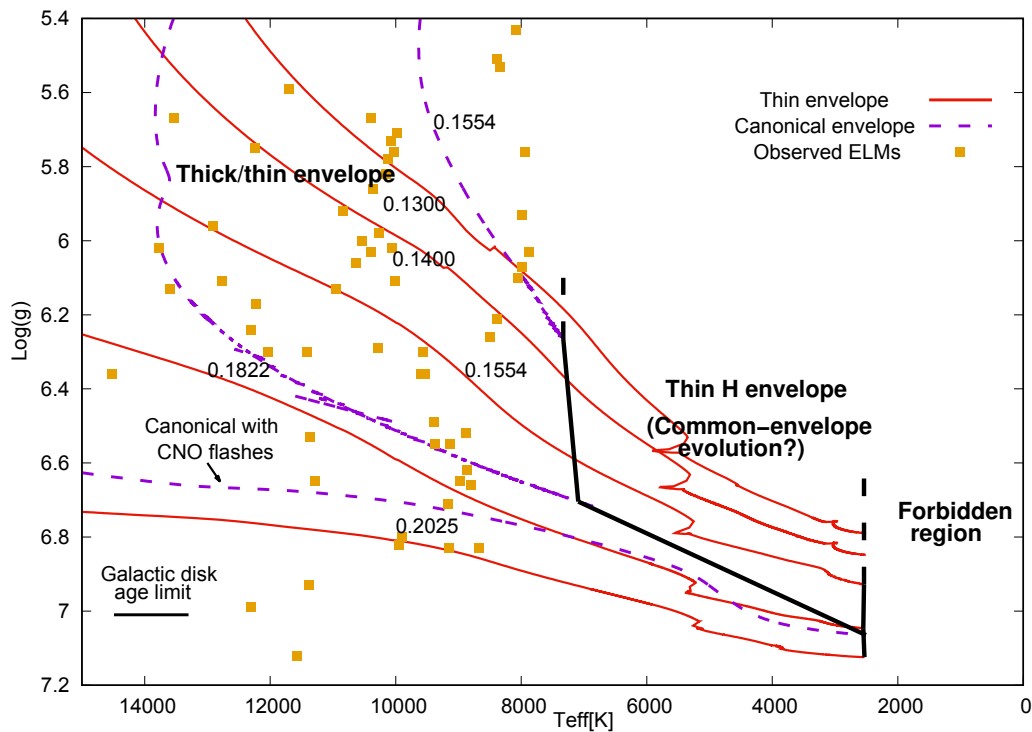


Figura 6.3: Secuencias evolutivas de enanas blancas de baja masa con diferentes espesores de la envoltura de H (canónica y delgada, ver texto) en el plano $\log(g) - T_{\text{eff}}$. La línea negra vertical a la izquierda (derecha) conecta puntos de igual edad, 13.7 Gyr, para los tracks canónicos (envolturas delgadas de H). Las líneas discontinuas también corresponden al límite de la edad del disco galáctico, y solo se marcan como proyecciones para delimitar la región. También hemos incluido las secuencias evolutivas artificiales con 0.130 y 0.140 M_{\odot} , así como ELMs y ELMVs. El progenitor considerado tiene $M_{\star} = 1.5 M_{\odot}$.

blancas de baja masa con $M_{\star} < 0.20 M_{\odot}$, con quema residual de H (envolturas canónicas), no deberían ser más frías que, aproximadamente, unos 7000 K, como parecen indicar las observaciones. Pero si tales enanas blancas de baja masa se formaran con envolturas de H más delgadas (por ejemplo, debido a transferencia de masa inestable) se podría esperar encontrarlas a temperaturas efectivas considerablemente inferiores (hasta unos ~ 2500 K). Así, la detección de enanas blancas de baja masa en esta región podría indicar que tales estrellas fueron formadas con envolturas de H delgadas. Una posibilidad es a través de pérdida de masa de forma inestable vía episodios de envoltura común. En la Figura 6.3, también hemos marcado una zona llamada *Forbidden region*, o región prohibida, donde no se espera encontrar ELMs debido a que para alcanzar tal región necesitarían tiempos evolutivos mayores a los de la edad del disco galáctico (aún suponiendo ELMs con envolturas de H delgadas).

Otra consecuencia observable de una reducción de la envoltura de H tiene que ver con el impacto que causa sobre la gravedad superficial. Es claro de la Figura 6.3 (y de la Tabla 6.1) que reducir el grosor de la envoltura de H conduce a secuencias evolutivas con valores de gravedad sustancialmente mayores. Esto se debe a que una reducción en el contenido de H causa que la envoltura se vuelva más densa, implicando así un decre-

cimiento en el radio estelar. A diferencia de lo que ocurre con las enanas blancas de masa promedio, donde la masa de H residual es mucho menor, el impacto sobre la gravedad se vuelve más significativo en enanas blancas de baja masa y núcleo de He. El aumento en la gravedad como resultado de una reducción de la envoltura de H tiene consecuencias en la determinación espectroscópica de los parámetros de la estrella. A primera vista, podemos ver que la incerteza en la masa estelar debido a la incerteza en el grosor de la envoltura de H es de al menos unos $\sim 0.025 M_{\odot}$.

Las expectativas mencionadas arriba están basadas en la suposición de que la estrella progenitora tiene el valor máximo de masa inicial, y por ende las edades más cortas, para formar enanas blancas ELM, o sea, $1.5 M_{\odot}$. Ahora exploramos cómo se ven alteradas estas conclusiones si la masa de la estrella progenitora es modificada. En particular, mostramos los resultados para ELMs provenientes de estrellas progenitoras con 1.0 y $1.3 M_{\odot}$ en la Figura 6.4. Puede notarse que las líneas de igual edad se desplazan hacia valores mayores de T_{eff} en comparación con las líneas obtenidas para el caso de un progenitor con $1.5 M_{\odot}$, como es de esperarse debido a las edades mayores de los progenitores. Sin embargo, este corrimiento no es significativo y podemos concluir que estos bordes no son muy sensibles a la masa del progenitor. Específicamente, si las enanas blancas de baja masa con $M_{\star} \lesssim 0.18 M_{\odot}$ se formaran con envolturas gruesas de H y provinieran de un progenitor con $1.3 M_{\odot}$, no sería probable que fueran más frías que ~ 7400 K, y si tales enanas blancas de baja masa se formaran con envolturas de H delgadas, podrían alcanzar hasta unos ~ 2700 K. Para un progenitor con $1.0 M_{\odot}$, los límites son aproximadamente, 8100 K y 3500 K, para una envoltura gruesa y delgada de H, respectivamente. La región donde solo pueden encontrarse aquellas con envoltura delgada de H permanece casi sin cambios y bien definida.

Finalmente, notamos que todas nuestras secuencias de envoltura delgada de H experimentan una suerte de *gancho* en el track entre $T_{\text{eff}} \sim 5000$ y 6000 K. La razón de esto está relacionada con una profundización de la zona convectiva que alcanza la región de transición de H/He, enriqueciendo la envoltura con He y por lo tanto, haciendo a la estrella más compacta.

6.3. Conclusiones

En este Capítulo hemos presentado las diferencias en los tiempos de enfriamiento como consecuencia de los diferentes espesores de la envoltura de H al comparar los casos de envoltura canónica y delgada. Se cree que las enanas blancas ELM resultan de fuertes episodios de pérdida de masa en sistemas binarios interactuantes antes del flash de He, durante la fase de RGB de estrellas de baja masa (Sarna et al. 2000; Althaus et al. 2013; Istrate et al. 2016b). Actualmente se acepta que estas estrellas han sido formadas a través de pérdida de masa inestable, por ejemplo vía episodios de envoltura común, o por pérdida de masa estable a través de RLOF en sistemas binarios interactuantes (ver Istrate et al. 2016b, por ejemplo). Los estudios existentes (Althaus et al. 2013; Istrate et al. 2016b) han sido realizados considerando ELMs que evolucionaron de progenitores que han atravesado una transferencia de masa estable, dejándoles envolturas de H gruesas, y conduciendo así a edades de enfriamiento largas debido a la quema residual de H. Sin embargo, no

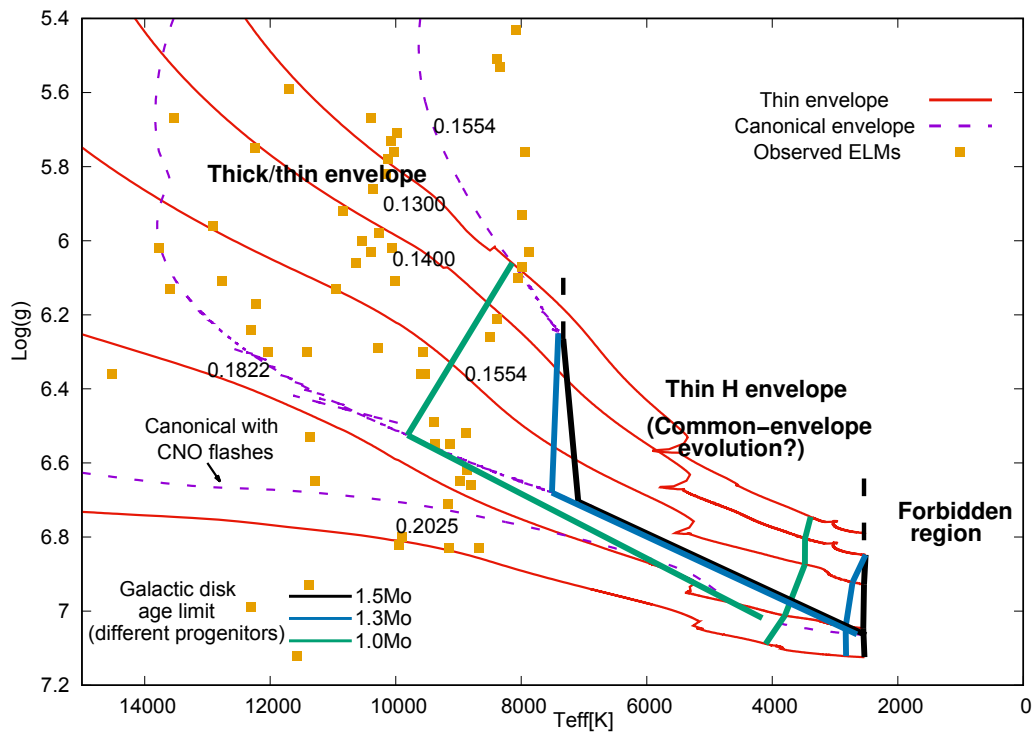


Figura 6.4: Igual que en la Figura 6.3 pero para diferentes masas de la estrella progenitora (1.0 , 1.3 y $1.5 M_{\odot}$), marcadas con líneas sólidas de diferentes colores.

podemos descartar un escenario donde estas estrellas hayan sido formadas a través de pérdida de masa inestable, conduciendo a ELMs con envolturas de H delgadas incapaces de mantener quema residual de H, resultando en edades de enfriamiento mucho más cortas.

En este trabajo hemos determinado la temperatura efectiva más baja que podría ser alcanzada por las ELMs. Estudiamos los tiempos de enfriamiento de modelos de ELM con envoltura de H canónica (gruesa) tomados de Althaus et al. (2013), y de modelos de ELM caracterizados por una envoltura de H delgada, presentados en el Capítulo 5. Este último conjunto ha sido generado sobre la base de los modelos con envoltura canónica, para los cuales hemos reducido artificialmente el grosor de la envoltura de H a luminosidades altas. En este sentido, no es necesario que la reducción del espesor de la envoltura de H sea grande para que la quema nuclear se vuelva despreciable: por ejemplo, para la secuencia con $0.1554 M_{\odot}$, solo basta con reducirla en un factor ~ 2.4 . Analizamos las edades de enfriamiento de nuestras secuencias de enanas blancas considerando la edad del disco galáctico, y supusimos que las estrellas se formaron al mismo tiempo que el disco, implicando que habrían tenido tiempo suficiente para alcanzar la T_{eff} mínima. También consideramos la edad de algunos progenitores posibles que pueden formar ELMs. Encontramos que hay una región estrictamente limitada en el plano $\log(g) - T_{\text{eff}}$ donde solo pueden encontrarse estrellas ELMs con envolturas de H delgadas. También encontramos que cambiar la masa del progenitor no cambia de forma significativa las temperaturas efectivas más bajas alcanzadas por estas estrellas. Adicionalmente, encontramos que una reducción de la envoltura de H tiene un impacto observacional importante puesto que aumenta el valor

de la gravedad superficial, afectando a las determinaciones espectroscópicas para estas estrellas.

Nuestros resultados muestran que sería posible encontrar ELMs a T_{eff} muy bajas si tuviesen envoltura delgada. Si fuese este el caso, podríamos concluir que estas estrellas experimentaron pérdida de masa inestable durante su evolución previa, arrojando luz sobre la formación de estas estrellas. Si bien la detección de ELMs frías es una tarea complicada, debido a la poca precisión de la técnica espectroscópica por debajo de los 7000 K, es de esperar que con las mediciones de paralaje de GAIA podamos identificar ELMs frías en un futuro próximo.

7 | Conclusiones

“Tarda en llegar, y al final, al final, hay recompensa...”

Zona de promesas, Gustavo Cerati (1993)

El destino final más común para las estrellas es el de enana blanca. En efecto, se espera que las estrellas con masa por debajo de $\sim 9 - 10 M_{\odot}$ (dependiendo de su metalicidad; Woosley & Heger 2015), que corresponde a alrededor del 95% de las estrellas de la secuencia principal, finalicen su evolución como enanas blancas (Winget & Kepler 2008a; Fontaine & Brassard 2008a; Althaus et al. 2010). Estos objetos compactos constituyen una clave fundamental para estudiar la evolución y formación de las estrellas, la evolución de sistemas planetarios, y la historia y estructura de la Galaxia (García-Berro et al. 2010; Bedin et al. 2015; Farihi 2016), así como también, representan laboratorios cósmicos para el estudio de la física en condiciones extremas (Córscico et al. 2012b; Miller Bertolami et al. 2014), entre otras aplicaciones.

Adicionalmente, el hecho de encontrar enanas blancas en numerosos sistemas binarios, permite el estudio de las interacciones complejas que transcurren entre las estrellas que, al día de hoy, sostienen grandes incertezas. En particular, para los sistemas binarios interactuantes, posibilita el estudio de la forma en que transcurre la transferencia de masa. En este sentido, hay al menos dos canales posibles a través de los cuales una de las estrellas (donante) que se expande hasta llenar su lóbulo de Roche, le cede material a su compañera (acretora). Una de las posibilidades es que, si la donante es una estrella gigante con envoltura convectiva y más masiva que la acretora, la compañera no pueda acretar toda la masa transferida y se forme una envoltura común circundando ambas estrellas. Este escenario de transferencia de masa inestable no es del todo entendido (Ivanova et al. 2013; Woods et al. 2012; Nandez & Ivanova 2016). Por otro lado, en un escenario estable de transferencia de masa a través del desbordamiento del lóbulo de Roche, cuando la donante es una estrella de baja masa que se encuentra en la RGB, la envoltura de H puede ser removida antes de que el núcleo de He crezca lo suficiente para encenderse. La estrella no puede sostener su configuración de gigante y evoluciona, contrayéndose, hacia la etapa de enana blanca con un núcleo de He (Althaus et al. 2013; Istrate et al. 2016b).

La gran mayoría de las enanas blancas observadas muestra H en sus envolturas (Kepler et al. 2016), y su distribución de masa tiene un máximo en $M_{\star} \sim 0.6 M_{\odot}$, aunque también muestra un pico para $M_{\star} \lesssim 0.45 M_{\odot}$ (Kleinman et al. 2013; Kepler et al. 2015). A diferencia de las primeras, mucho más abundantes y con núcleos de C y O, se espera que los núcleos de las enanas blancas de baja masa sean de He. Esto se basa en que se cree que el camino evolutivo más probable para la formación de estas estrellas es el escenario de evolución

binario donde la estrella progenitora ha experimentado una transferencia de masa estable, cuando se encuentra en la RGB, antes de que ocurra el flash de He, luego de lo cual evolucionaría hacia la rama de enfriamiento de las enanas blancas en tiempos menores a la edad del Universo (Althaus et al. 2013). Dentro de la población de enanas blancas de masa baja con núcleo de He se encuentran las enanas blancas de masa extremadamente baja, denominadas ELM, caracterizadas por $M_{\star} \lesssim 0.18 - 0.20 M_{\odot}$, que se diferencian considerablemente del resto de las enanas blancas de masa baja con núcleo de He y masa en el rango de $0.18 - 0.20 \lesssim M_{\star} \lesssim 0.45 M_{\odot}$. Este límite, que depende de la metalicidad (Serenelli et al. 2002; Nelson et al. 2004; Istrate et al. 2016b), tiene una motivación física: las ELM no han experimentado flashes de CNO en su evolución pasada, están caracterizadas por tiempos de enfriamiento muy largos y tienen propiedades pulsacionales muy diferentes en comparación con aquellas que experimentaron flashes (Althaus et al. 2013; Córscico & Althaus 2014a).

La formación y evolución de las enanas blancas de baja masa con núcleo de He ha sido estudiada por diversos autores (ver, por ejemplo, Driebe et al. 1998; Sarna et al. 2000; Althaus et al. 2001; Nelson et al. 2004; Panei et al. 2007; Benvenuto & De Vito 2003, 2005; De Vito & Benvenuto 2010, 2012; Althaus et al. 2013; Istrate et al. 2014, 2016b; Sun & Arras 2018). En general, estos trabajos están enfocados principalmente al estudio de la evolución binaria donde la transferencia de masa transcurre de forma estable a través de RLOF (o simulando la remoción de la envoltura de la donante de forma artificial), considerando distintas condiciones iniciales del problema (masa de la donante, de la acretora, cantidad de masa perdida por la donante que es acretada por su compañera, período orbital inicial, metalicidad, entre otras). Entre los citados trabajos, es relevante mencionar de forma breve la exploración llevada a cabo recientemente por Istrate et al. (2016b). En ese trabajo, los autores estudian la formación y evolución de enanas blancas de baja masa con compañeras estrellas de neutrones, para lo cual generan una grilla con distintas masas para las estrellas donante y acretora, y distintas metalicidades (0.02, 0.01, 0.001 y 0.0002), dando lugar a enanas blancas con masas entre 0.16 y 0.45 M_{\odot} . Los modelos han sido generados empleando un código de evolución estelar, denominado *MESA* (Modules for Experiments in Stellar Astrophysics, Paxton et al. 2011, 2013, 2015), que permite simular la evolución binaria de los sistemas considerando diferentes ingredientes físicos. La transferencia de masa en sus simulaciones es llevada a cabo mediante la prescripción de Ritter (1988). En su estudio, los autores consideran los efectos producidos por la mezcla debida a la rotación, en conjunto con la acción de la difusión de elementos, ambos actuando durante la evolución de las pre-enanas blancas de baja masa. Istrate et al. (2016b) encuentran que el asentamiento gravitacional compite con la mezcla rotacional, jugando un rol importante en la determinación de las abundancias químicas superficiales. Al comienzo de la etapa de pre-enana blanca, la mezcla rotacional domina, sin embargo, la gravedad superficial de la pre-enana blanca aumenta con el tiempo y la eficiencia de la mezcla rotacional disminuye y, eventualmente, es el asentamiento gravitacional el que juega un rol dominante. Como hemos mencionado en el Capítulo 1, Córscico et al. (2016a); Gianninas et al. (2016) muestran que la presencia de una cantidad suficiente de He en las atmósferas de las pre-ELMVs es clave para poder excitar pulsaciones por el mecanismo $\kappa - \gamma$. Mientras que para los modelos que incluyen únicamente los efectos de la difusión no es posible explicar las abundancias necesarias, los modelos que consideran la contribución de los efectos de la

mezcla rotacional parecen hacerlo. Es importante destacar que en los casos donde consideran sólo los efectos de la difusión respecto a aquellos donde consideran el efecto conjunto de la difusión y rotación, se observan comportamientos muy similares en cuanto a los tiempos de enfriamiento y la estructura de la enana blanca que se forma a continuación. Otro resultado relevante es que la presencia de la mezcla rotacional podría dar cuenta de la presencia de metales (en particular, calcio) en las atmósferas de las pre-enanas blancas.

Adicionalmente, Istrate et al. (2016b) estudiaron los efectos de la metalicidad. Como mostraron previamente otros autores (Serenelli et al. 2002; Nelson et al. 2004), la masa umbral que obtienen para la ocurrencia de los flashes de H aumenta cuando la metalicidad es menor. Según sus cálculos, para los modelos donde sólo incluyen difusión, el límite de la ocurrencia de flashes es de $\sim 0.169 M_{\odot}$ para $Z = 0.01$ (en contraste con nuestro valor de $\sim 0.18 - 0.20 M_{\odot}$); para $Z = 0.001$, de $\sim 0.22 M_{\odot}$, para $Z = 0.0002$, de $\sim 0.26 M_{\odot}$ y para $Z = 0.02$, de $\sim 0.167 M_{\odot}$. En los modelos en los que incluyen difusión y mezcla rotacional estos límites son ligeramente superiores. Además, para aquellas secuencias que experimentan flashes, la metalicidad no sólo afecta el umbral de ocurrencia de los mismos, sino también la extensión de los bucles que describen los modelos en el diagrama H-R así como el número de flashes.

En cuanto a la envoltura de H al finalizar la fase de transferencia de masa, para una dada metalicidad, obtienen que los modelos con difusión y difusión más mezcla rotacional, dan lugar a valores muy similares de M_H . La metalicidad también afecta la masa de la envoltura, ya que para una pre-enana blanca de masa fija, a menor metalicidad, mayor la masa de la envoltura.

Refiriéndonos ahora al plano observacional de las ELMs, en los últimos años se ha producido un avance muy importante. Las campañas con base terrestre ELM, WASP, SDSS, entre otras, han podido detectar un número grande de ELMs (ver Koester et al. 2009; Brown et al. 2010, 2012; Maxted et al. 2011; Kilic et al. 2011, 2012; Brown et al. 2013; Gianninas et al. 2014; Kilic et al. 2015; Gianninas et al. 2015; Brown et al. 2016a,b, 2017b; Pelisoli & Vos 2019). La detección de variaciones multiperiódicas de brillo debido a pulsaciones, compatibles con modos g no radiales en algunas de ellas (Hermes et al. 2012, 2013c,a; Kilic et al. 2015; Bell et al. 2015, 2017a; Pelisoli et al. 2018b; Kilic et al. 2018; Bell et al. 2018; Pelisoli et al. 2018b) ha abierto el camino para la aplicación de las técnicas de la astrosismología en estrellas ELMVs, que permiten estudiar los interiores de estrellas pulsantes, conocer su estado evolutivo, y estimar parámetros como la masa estelar, gravedad y temperatura efectiva, entre muchos otros. Adicionalmente, la existencia de pulsaciones en estrellas pre-ELMVs (Maxted et al. 2013, 2014; Gianninas et al. 2016; Zhang et al. 2016; Corti et al. 2016; Bell et al. 2018; Pelisoli et al. 2018b), permite no sólo estudiar este nuevo tipo de estrella variable, sino también estudiar cómo transcurre la evolución hacia la formación de ELMVs.

Recientemente, gracias a las mediciones satelitales de TESS (Ricker et al. 2015) y Gaia (Gaia Collaboration et al. 2018a,b) el área de la observación de las enanas blancas pulsantes ha crecido de forma considerable. Por un lado, las características del satélite TESS, con una sensibilidad sin precedentes y una amplia cobertura del cielo, lo convierten en una misión que ya ha dado amplias muestras de su utilidad en el campo de las enanas blancas pulsantes (ver Bognár et al. 2018; Bell et al. 2019, entre otros). Con este antecedente, es inminente la detección de un mayor número enanas blancas de baja masa pulsantes y, a su

vez, de un mayor número de períodos de pulsación de estas estrellas. Por su parte, Gaia ya ha aportado una gran cantidad de enanas blancas nuevas (Gentile Fusillo et al. 2019), y así de potenciales pulsadores. Debido a la gran precisión de sus mediciones astrométricas, permite una estimación precisa del radio de las enanas blancas de baja masa pulsantes, aportando a la caracterización de este tipo de estrellas.

Para llevar a cabo el estudio de las enanas blancas de baja masa pulsantes, se debe disponer de observaciones precisas de las pulsaciones de estas estrellas (a la vez que contar con mediciones espectroscópicas), y utilizar modelos teóricos detallados apropiados al tipo de estrella bajo estudio, a fin de contrastar con las observaciones. De esta manera, en esta Tesis hemos dado un paso más en la serie de trabajos realizados por el Grupo de Evolución Estelar y Pulsaciones de La Plata que tienen como fin caracterizar a las enanas blancas de baja masa y núcleo de He pulsantes (Althaus et al. 2013; Córscico & Althaus 2014a, 2016; Córscico et al. 2016a).

Como primer aporte, en el Capítulo 3, hemos presentado por primera vez una estimación detallada de las tasas teóricas de cambio de períodos de estrellas pulsantes ELMVs y pre-ELMVs. El estudio está basado en los modelos evolutivos de enanas blancas ELM con núcleo de He (y envoltura de H) de Althaus et al. (2013), provenientes de simular la evolución binaria de estrellas de baja masa, que experimentan transferencia de masa estable a través del lóbulo de Roche. Hemos estimado las tasas teóricas de cambio de períodos para modos g y p dipolares ($\ell = 1$) y radiales ($\ell = 0$), teniendo en cuenta el rango de períodos detectado en este tipo de estrellas, considerando las etapas evolutivas donde la probabilidad de detectar a estas estrellas es mayor: la rama de enfriamiento final (fase de enana blanca), los estados evolutivos previos a la ocurrencia de flashes de CNO sobre la rama de enfriamiento temprana (etapas pre-flash, para las secuencias con $M_{\star} \gtrsim 0.18 - 0.20 M_{\odot}$) y los estadios a luminosidad constante, posteriores al RLOF (etapas pre-enana blanca). Encontramos que la magnitud que toma la tasa de cambio de períodos para modos g en pre-ELMVs, resulta mayor que para ELMVs. A su vez, para modos g de modelos que se encuentran evolucionando antes de la ocurrencia de los flashes de CNO, esta cantidad es mayor que los valores máximos predichos para modelos de pre-ELMVs. Hemos así concluido que cualquier medición futura que se realice de la tasa de cambio de períodos para ELMVs o pre-ELMVs, contribuirá en la determinación de su estado evolutivo. Asimismo, dada cierta incerteza en la clasificación de estrellas (puesto que sus espectros se asemejan a los de estrellas pulsantes de otras poblaciones estelares), contar con esta medida podría ayudar a confirmar que una dada estrella pulsante es una auténtica enana blanca de baja masa y no una estrella de otra población estelar. Es claro que cuando pueda medirse esta cantidad para este tipo de estrellas, representará una herramienta muy útil.

Por otro lado, en el Capítulo 4, hemos presentado el primer análisis astrosismológico detallado aplicado a todas las ELMVs conocidas hasta el momento. Para tal fin, hemos empleado el conjunto completo de modelos enteramente evolutivos de enanas blancas de baja masa con núcleo de He de Althaus et al. (2013). En primer lugar, hemos intentado estimar el espaciamiento de períodos medio para las estrellas bajo estudio y, a continuación, hemos buscado acotar el valor de la masa estelar al comparar el espaciamiento de períodos observado con el espaciamiento promedio de los períodos computados para nuestra grilla de modelos. Encontramos que sólo es posible determinar el espaciamiento de períodos para dos de los casos, probablemente porque en general contamos con pocos

períodos observados para estas estrellas. En los casos donde hemos podido determinar esta cantidad, el procedimiento para estimar la masa estelar dio resultados con valores superiores a los esperados para este tipo de estrellas. Posteriormente, hemos empleado los períodos individuales observados de cada una de las ELMV conocidas, en busca de un modelo astrosismológico representativo. Obtuvimos que, aunque las estrellas bajo estudio exhiben pocos períodos, y nuestros ajustes de períodos muestran multiplicidad de soluciones, es posible encontrar soluciones astrosismológicas cuya masa estelar y temperatura efectiva están en acuerdo con las determinaciones dadas por la espectroscopía, para la mayoría de los casos. Además, en general, los períodos de pulsación correspondientes a los modelos astrosismológicos elegidos están asociados a modos pulsacionalmente inestables, de acuerdo con nuestros cálculos no adiabáticos. Desafortunadamente, los modelos astrosismológicos derivados para la mayoría de las estrellas analizadas resultan un poco más masivos de lo esperado, en comparación con las determinaciones espectroscópicas. En parte, esto puede estar relacionado con haber considerado únicamente modelos de enanas blancas de baja masa con núcleo de He caracterizados por una envoltura gruesa, según resulta de la evolución previa (en un escenario de transferencia de masa estable; Althaus et al. 2013)).

Motivados por los resultados obtenidos, y dado que sería posible encontrar enanas blancas de baja masa con núcleo de He y envoltura delgada de H, en el Capítulo 5 hemos presentado un conjunto nuevo de secuencias de enanas blancas de baja masa con núcleo de He con envolturas de H en un rango amplio de espesores, generadas artificialmente a partir de los modelos de Althaus et al. (2013). Así, disponemos de un nuevo conjunto amplio de secuencias, con masa estelar entre 0.1554 y $0.4352 M_{\odot}$, temperatura efectiva en el rango de $13000 \gtrsim T_{\text{eff}} \gtrsim 6000$ K, y espesor de la envoltura de H en el intervalo de $-5.8 \lesssim \log(M_{\text{H}}/M_{\star}) \lesssim -1.7$. Para comenzar, hemos explorado los efectos de considerar distintos espesores de la envoltura de H sobre las propiedades de pulsación adiabáticas de estos modelos. Encontramos que los efectos de atrapamiento de modos para los modos g dependen sensiblemente del valor de la masa de la envoltura de H, siendo el ciclo y la amplitud del atrapamiento mayores para envolturas más delgadas de H. Además, obtuvimos que el espaciado asintótico de períodos es mayor para envolturas más delgadas de H. A continuación, hemos llevado a cabo ajustes período a período, análogos a los presentados en el Capítulo 4, aplicado a todas las ELMVs. Encontramos que los modelos astrosismológicos están caracterizados tanto por envolturas gruesas como delgadas de H. Además, los valores de temperatura efectiva y masa estelar de los modelos están, en general, en acuerdo con las determinaciones espectroscópicas. Adicionalmente, para algunas de las ELMVs, llevamos a cabo ajustes astrosismológicos variando el conjunto de períodos según el valor de su incerteza, cuando la misma es considerable, o bien variando el conjunto de períodos en sí mismo, cuando se han reportado diferencias en los períodos de la estrella. Como resultado, encontramos que las soluciones astrosismológicas cambian significativamente, pudiendo entonces dar únicamente rangos de soluciones posibles para estos casos. Finalmente, el hecho de haber podido encontrar soluciones astrosismológicas compatibles con envolturas delgadas de H nos da indicios de los posibles escenarios de formación de estas estrellas y, a su vez, abre la posibilidad de que estas estrellas pudieran haberse formado a través de canales evolutivos donde la transferencia de masa transcurre de forma inestable.

En el Capítulo 6, considerando la comparación entre las secuencias con envoltura grue-

sa y las nuevas con envoltura delgada, hemos realizado un estudio de los cambios sobre los tiempos de enfriamiento y gravedad superficial inducidos por la reducción del espesor de la envoltura de H. Además, hemos determinado las temperaturas efectivas más bajas alcanzadas por las secuencias de enanas blancas ELM con envoltura delgada, teniendo en cuenta las predicciones de la evolución de sus estrellas progenitoras. Obtuvimos que una leve reducción de la envoltura de H conduce a un aumento significativo de las tasas de enfriamiento de las ELMs. Debido a esto, las enanas blancas ELM con envoltura delgada de H podrían llegar a enfriarse hasta unos ~ 2500 K, en contraste con sus contrapartes con envoltura gruesa, que podrían a lo sumo alcanzar unos ~ 7000 K. Adicionalmente, encontramos que una reducción de la envoltura de H aumenta considerablemente la gravedad superficial de estas estrellas. Esto tendría consecuencias en las determinaciones espectroscópicas de estas estrellas. Por los resultados expuestos, si las enanas blancas ELM se formaran con envoltura delgada de H, sería posible que se detecten a muy bajas temperaturas efectivas. De este modo, la detección de enanas blancas ELM frías podría indicar que se han formado con envoltura delgada de H, y tal como hemos mencionado, esto da lugar a la posibilidad de poner restricciones a los mecanismos posibles de formación de estas estrellas.

De los estudios astrosismológicos del Capítulo 5, advertimos que la presencia de errores en las pulsaciones de algunas de estas ELMVs, traen consigo una gran variación de los resultados obtenidos en los ajustes. Como consecuencia, a veces no es del todo posible restringir los parámetros fundamentales de temperatura efectiva, gravedad, radio, entre otras cantidades, a través de esta técnica. Adicionalmente, la escasa cantidad de períodos en algunas de estas ELMVs, conduce a ajustes que no resultan confiables. Considerando que hemos explorado exhaustivamente el problema, en términos de las derivaciones astrosismológicas que hemos realizado, contando para ello con una amplia cantidad de modelos detallados que cubren extensamente el espacio de parámetros, se hace necesario contar con observaciones más precisas de las pulsaciones de estas estrellas, a fin de poder llevar a cabo un estudio astrosismológico que ponga cotas más robustas a estas cantidades. Si bien somos conscientes de las dificultades a la hora de realizar estas mediciones, confiamos en que la nueva generación de misiones pueda hacer progresos sustanciales en el campo. En este sentido, nos encontramos en un momento muy prometedor a nivel observacional. En la Figura 7.1 se puede apreciar la línea de tiempo de las misiones que ya han servido y (muy probablemente) servirán para la detección de enanas blancas pulsantes. Tan solo basta con ver los logros ya alcanzados por las misiones que hemos mencionado en este trabajo, para advertir que es inminente la detección de un mayor número de ELMVs y pre-ELMVs, y de sus pulsaciones.

Por último, en este trabajo hemos utilizado las secuencias evolutivas de enanas blancas de baja masa y núcleo de He de Althaus et al. (2013), que presentamos en el Capítulo 2, provenientes de simular la evolución no conservativa de un sistema binario dado, donde la transferencia de masa transcurre de manera estable a través del lóbulo de Roche, siguiendo una dada prescripción (Ecuación (2.20)). Es importante destacar que no hemos realizado una exploración de otras posibles recetas para la pérdida de masa, que podrían impactar sobre las envolturas de H. Sin embargo, no parece haber una diferencia significativa en los valores de las envolturas de H provenientes del empleo de distintas prescripciones para la pérdida de masa de la estrella donante. Podemos visualizar esto comparando, de forma

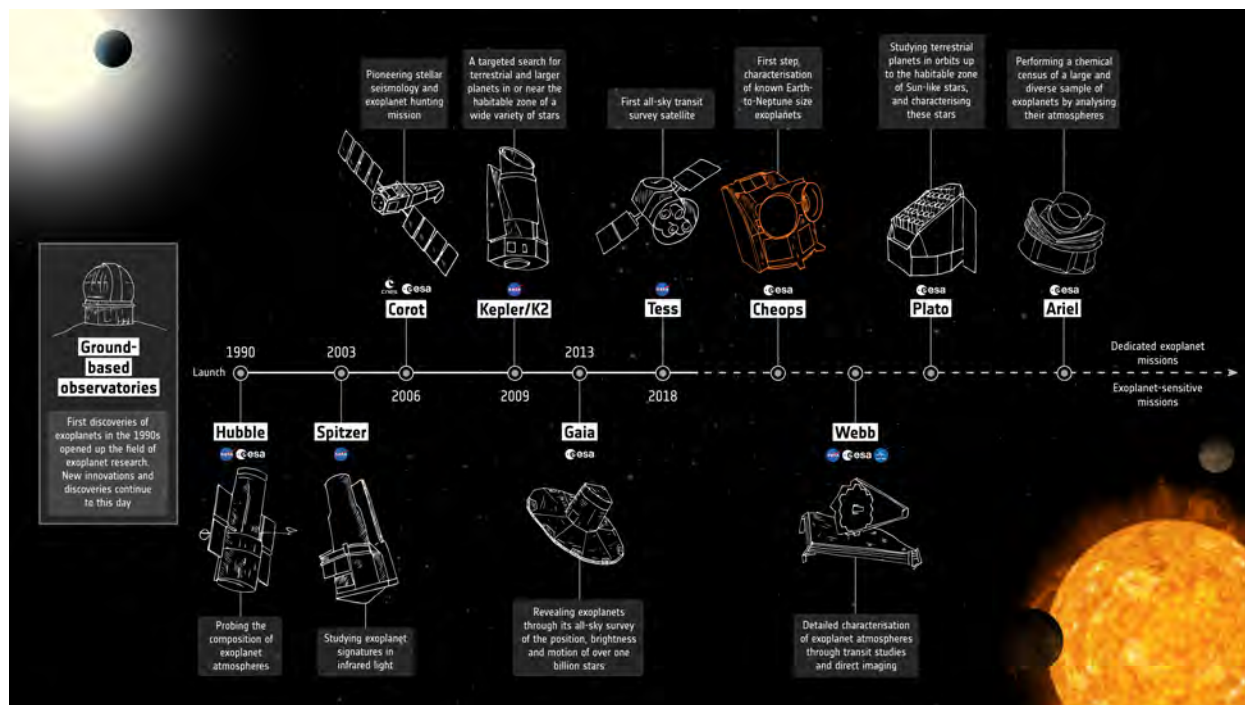


Figura 7.1: Línea de tiempo de las distintas misiones con el objetivo principal de detectar exoplanetas, y secundario, de detectar estrellas y pulsaciones estelares. Tomado de <https://www.esa.int>.

esquemática, los resultados consignados por Driebe et al. (1998) (donde la envoltura es removida de forma artificial), con los de Althaus et al. (2013) e Istrate et al. (2016b) (en el caso de progenitores de igual masa y metalicidad). Como los valores de las envolturas están dados en distintos momentos evolutivos en dichos trabajos (aunque en ambos casos son dados luego de finalizada la transferencia de masa), hacemos dos comparaciones diferenciadas, como puede apreciarse en la Figura 7.2. El acuerdo entre los valores obtenidos por los distintos tratamientos parece indicar que la envoltura de H, para una dada masa de la enana blanca, no se debería ver alterada sustancialmente si la transferencia se implementase con otra prescripción, por lo cual, consideramos que las propiedades pulsacionales y en consecuencia, los resultados arribados en este trabajo, seguirían siendo válidos. En cambio, cabe esperar que el sistema formado tenga otra configuración final, algo que no hemos explorado.

7.1. Trabajo a futuro

Si bien hasta el momento hemos podido estudiar extensamente las propiedades de las enanas blancas de baja masa y núcleo de He pulsantes, hay algunos aspectos que no han sido explorados, e ingredientes físicos que, recientemente, se han estudiado y que podrían estar presentes en estas estrellas. A fin de tener un panorama más completo, es nuestra intención incluirlos. Adicionalmente, hay ciertas características que se han observado en algunas ELMs que no pueden explicarse con los modelos de que disponemos actualmente.

Consideremos por un lado, a las pre-ELMVs. Como hemos mencionado anteriormente, estas estrellas muestran una composición superficial de H y He. El hecho de que exhiban pulsaciones, que se excitarían debido al mecanismo $\kappa-\gamma$ actuando en la zona de la segunda ionización parcial del He, indica que debe existir un mecanismo capaz de contrarrestar la acción del asentamiento gravitacional (Córscico et al. 2016a). Como hemos indicado, Istrate et al. (2016b) muestran que la mezcla rotacional podría explicar gran parte de las abundancias de He necesarias en la región de excitación de modos de la estrella. En algún momento posterior de la evolución de estas estrellas, se espera que el asentamiento gravitacional finalmente domine sobre el efecto de la mezcla de la rotación, conduciendo así a enanas blancas con atmósferas de H puro, tal como es observado en las ELMVs. Por lo tanto, es importante estudiar cómo transcurre esta transición. Otro punto de interés es la posibilidad de analizar cómo afecta la rotación a las propiedades pulsacionales durante la evolución. En particular, como ya hemos mencionado en la Sección 1.2.5, se espera que una estrella pulsante que rota muestre un desdoblamiento de sus frecuencias de pulsación. Si bien aún no se ha detectado este efecto sobre las pulsaciones de estas estrellas (ELMVs y pre-ELMVs), de observarse, permitiría inferir su velocidad de rotación. Asimismo, en la atmósfera de algunas ELMs se observa la presencia de algunos metales. La levitación radiativa, relacionada con la absorción de momento del campo de radiación por parte de ciertos elementos, en algunos casos capaz de contrarrestar el asentamiento gravitacional, ha sido explorada en forma preliminar por Hermes et al. (2014).

Hasta el momento, el estudio detallado del impacto de estos dos fenómenos (mezcla por rotación y levitación radiativa) en las propiedades evolutivas y pulsacionales no ha sido llevado a cabo en profundidad para ELMs, y es necesario para un análisis cuantitativo de su composición superficial. Por los motivos expuestos, como parte del trabajo a futuro, nos proponemos generar una grilla de secuencias de enanas blancas de baja masa con núcleo de He, obtenidas siguiendo su evolución desde la ZAMS hasta la etapa de enana blanca, considerando los efectos de la rotación y la levitación radiativa. Con los nuevos modelos que generaremos, además, se planea estudiar la transición entre las estrellas precursoras de enanas blancas ELM que muestran una composición superficial de H y He, y las enanas blancas ELM (composición superficial de H puro).

Asimismo, recientemente hemos comenzado a explorar la posibilidad de que el mecanismo ϵ pueda excitar pulsaciones de modos g debido a quema estable de H en secuencias de pre-enanas blancas de baja masa que se encuentran atravesando (o próximas a hacerlo) flashes de CNO. Por la exploración preliminar que hemos hecho, los tiempos evolutivos en dichas etapas son mayores a las escalas de tiempo para que los modos se vuelvan inestables, haciendo viable la posibilidad de observar dichas pulsaciones. Próximamente, nos embarcaremos en la tarea de buscar la banda de inestabilidad que caracteriza a dichas secuencias.

Otro aspecto que nos interesa estudiar tiene que ver con la posibilidad de llevar a cabo ajustes astrosismológicos teniendo en cuenta en la función de calidad un parámetro adicional, el radio estelar, disponible actualmente gracias a las mediciones astrométricas precisas de Gaia. En este sentido, esperamos poder arrojar luz sobre la clasificación de aquellas ELMVs cuya naturaleza sigue sin poder definirse (tal es el caso de, por ejemplo,

la estrella SDSS J1355+1956, como mencionamos en el Capítulo 4).

Finalmente, otro aspecto de interés, que resulta fundamental en el estudio de las enanas blancas de baja masa con núcleo de He (Capítulo 6), es el de los escenarios que las originan, en particular, la forma en que ocurre la transferencia de masa durante su evolución binaria previa. En esta Tesis, hemos empleado las secuencias evolutivas generadas por Althaus et al. (2013), donde la transferencia ocurre de forma estable (mediante RLOF), dando lugar a una envoltura gruesa de H, gracias a lo cual sus tiempos de enfriamiento son considerablemente largos. Como ya hemos expuesto, un escenario en que la transferencia de masa sea inestable podría dar lugar a enanas blancas de baja masa con envoltura delgada de H, por ejemplo, a través de un episodio de envoltura común (Woods et al. 2012; Ivanova et al. 2013; Ivanova & Nandez 2016) que conduciría a una evolución mucho más rápida, haciendo posible encontrar estas estrellas a temperaturas efectivas significativamente más bajas que sus contrapartes con envoltura gruesa. Es entonces interesante estudiar este escenario, con el fin de determinar si puede explicar la existencia de enanas blancas de baja masa con núcleo de He y envoltura delgada de H. En un primer acercamiento al tema, es nuestra intención incorporar los resultados de simulaciones hidrodinámicas en un código de evolución estelar, a fin de estudiar el grosor de las envolturas de H resultantes de este evento (Clayton et al. 2017).

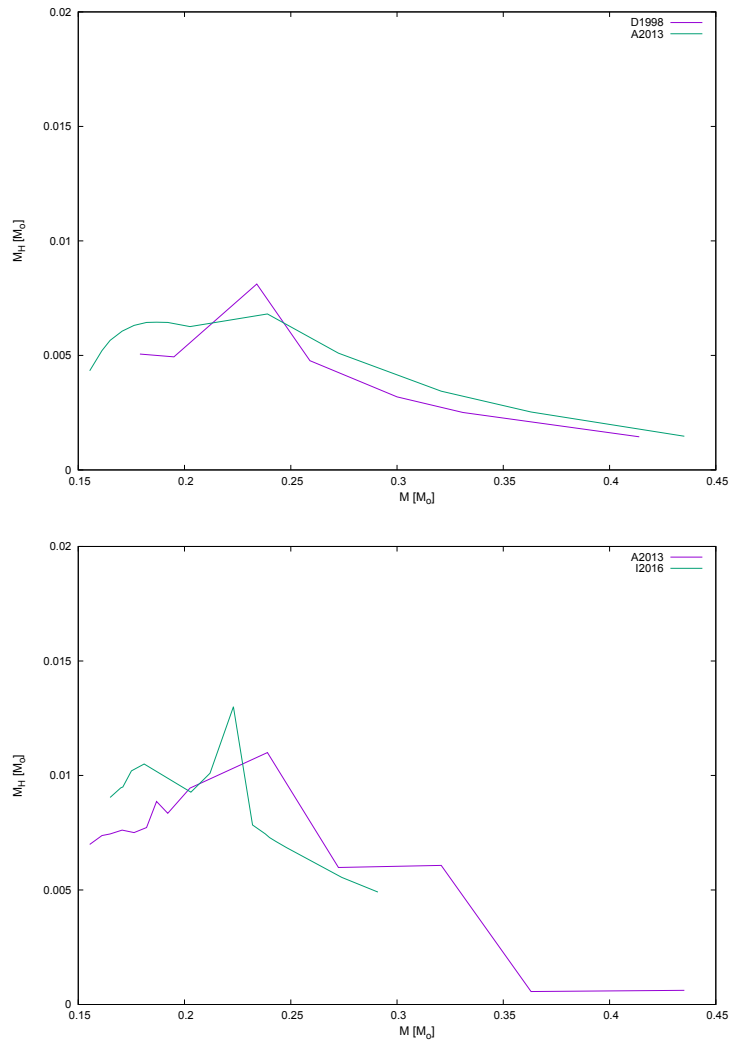


Figura 7.2: *Panel superior:* Comparación entre las masas de las envolturas de los modelos de Driebe et al. (1998) y de Althaus et al. (2013) para cada masa de la enana blanca (dadas a 10 000 K para secuencias con $M \lesssim 0.2 M_\odot$ y ~ 5000 K para secuencias con $M > 0.2 M_\odot$, luego de terminada la fase de transferencia de masa, a fin de poder comparar con los valores de Driebe et al. (1998)). *Panel inferior:* Comparación entre las masas de las envolturas de los modelos de Istrate et al. (2016b) y de Althaus et al. (2013), evaluadas luego de terminada la fase de transferencia de masa.

A | Ecuaciones de pulsación

A continuación, expondremos el desarrollo de la teoría de pulsaciones no radiales, adiabáticas, en la aproximación lineal. Para esto, supondremos pequeñas perturbaciones a fin de llevar a cabo un desarrollo a primer orden de las ecuaciones correspondientes, a partir de un sistema con simetría esférica (supondremos ausencia de rotación y campos magnéticos). Las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales que plantearemos serán las autofunciones y autofrecuencias de oscilación. El procedimiento que mostraremos se puede encontrar en su forma completa en Unno et al. (1989).

Las ecuaciones necesarias para describir el comportamiento de un fluido autogravitante, con transporte de radiación no convectivo, son la conservación de la masa, del momentum y de la energía:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0, \quad (\text{A.1})$$

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{u} = \rho \vec{f} - \vec{\nabla} p - \rho \vec{\nabla} \Phi + \vec{\nabla} \cdot \Theta, \quad (\text{A.2})$$

$$\rho T \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \right) S = \rho (\varepsilon_N + \varepsilon_V) - \vec{\nabla} \cdot \vec{F}_R, \quad (\text{A.3})$$

en las cuales, ρ es la densidad de masa, $\vec{\nabla}$ el operador gradiente, \vec{u} la velocidad del fluido, \vec{f} las fuerzas externas, p la presión, Φ el potencial gravitatorio, Θ el tensor de esfuerzos viscosos, T la temperatura, S la entropía específica, ε_N la tasa de generación de energía nuclear, ε_V la generación de calor por viscosidad y \vec{F}_R el flujo de energía por radiación. Asimismo, deben considerarse la ecuación de Poisson y la de difusión para el flujo radiativo:

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho, \quad (\text{A.4})$$

$$\vec{F}_R = -\frac{4ac}{3\kappa\rho} T^3 \vec{\nabla} T \quad (\text{A.5})$$

donde ∇^2 es el operador laplaciano, G la constante de gravitación universal, a la constante de densidad de radiación, c la velocidad de la luz y κ la opacidad. Asimismo, deben considerarse las ecuaciones de estado $p(\rho, T)$ y $S(\rho, T)$, y la de generación de energía, $\varepsilon_N(\rho, T)$ y opacidad $\kappa(\rho, T)$. El factor $K = \frac{4ac}{3\kappa\rho} T^3$ es llamado, a veces, conductividad radiativa. En el

caso en que la convección está presente, el tratamiento se dificulta considerablemente, por lo cual el procedimiento siguiente se hará despreciando la convección. Como consecuencia, dentro de la estrella en ausencia de convección, la viscosidad es aproximadamente despreciable, por lo cual tenemos que $\vec{\nabla} \cdot \Theta \sim 0$ y $\varepsilon_V \sim 0$. Adicionalmente, como $\vec{f} \sim 0$ en ausencia de campos magnéticos, y considerando un fluido autogravitante y, además, usando \vec{v} para distinguir la velocidad sin convección de la velocidad general \vec{u} , las ecuaciones se pueden expresar como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (\text{A.6})$$

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} = -\vec{\nabla} p - \rho \vec{\nabla} \Phi, \quad (\text{A.7})$$

$$\rho T \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) S = \rho \varepsilon_N - \vec{\nabla} \cdot \vec{F}_R, \quad (\text{A.8})$$

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho, \quad (\text{A.9})$$

$$\vec{F}_R = -K \vec{\nabla} T \quad (\text{A.10})$$

donde la Ecuación (A.7) es la de Euler o de Navier-Stokes en la aproximación para un fluido no viscoso.

Consideremos ahora el modelo en equilibrio, es decir, no perturbado (en el cual designaremos a las variables correspondientes con el subíndice 0), a partir del cual aplicaremos las pequeñas perturbaciones. Entonces $\vec{v}_0 = 0$ y las derivadas temporales $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, con lo cual las expresiones (A.6) a (A.10) quedan:

$$-\vec{\nabla} p_0 - \rho_0 \vec{\nabla} \Phi_0 = 0, \quad (\text{A.11})$$

$$\rho_0 \varepsilon_{N,0} - \vec{\nabla} \cdot \vec{F}_{R,0} = 0, \quad (\text{A.12})$$

$$\nabla^2 \Phi_0 = 4\pi G \rho_0, \quad (\text{A.13})$$

$$\vec{F}_{R,0} = -K_0 \vec{\nabla} T. \quad (\text{A.14})$$

Cabe notar que la Ecuación (A.11) es la condición de equilibrio hidrostático.

A fin de derivar las ecuaciones de oscilación, aplicaremos a este estado de equilibrio pequeñas perturbaciones, que entonces consistirá en un análisis lineal, en el cual conservaremos los términos a primer orden y descartaremos los superiores. Como hemos introducido brevemente en la Sección 1.2.1, una perturbación de una cantidad arbitraria f puede describirse matemáticamente de dos formas, como variación Lagrangiana, δf :

$$\delta f(\vec{r}, t) = f(\vec{r}, t) - f_0(\vec{r}), \quad (\text{A.15})$$

o bien, Euleriana, f' :

$$f'(\vec{r}, t) = f(\vec{r}, t) - f_0(\vec{r}). \quad (\text{A.16})$$

donde, la relación (a primer orden) entre ambas está dada por:

$$\delta f(\vec{r}, t) = f'(\vec{r}, t) + \vec{\xi} \cdot \vec{\nabla} f_0(\vec{r}). \quad (\text{A.17})$$

siendo $\vec{\xi} = \delta \vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$ la variación Lagrangiana de la posición de un elemento de fluido. La variación (tanto Lagrangiana como Euleriana) en la velocidad, siendo que $\vec{v}_0 = 0$, será:

$$\vec{v} = \delta \vec{v} = \vec{v}' = \frac{d\vec{\xi}}{dt}. \quad (\text{A.18})$$

Desarrollando a primer orden cada variable, es decir, expresando cada variable mediante la suma de un término en equilibrio y uno perturbativo (euleriano) en la forma:

$$\rho = \rho_0 + \rho', \quad p = p_0 + p', \quad \Phi = \Phi_0 + \Phi', \dots, \quad \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}' \quad (\text{A.19})$$

y reemplando correspondientemente en las Ecuaciones (A.6) a (A.10) (despreciando términos con potencias ≥ 2 de las perturbaciones y/o productos de las mismas, y recordando que las variables en equilibrio satisfacen las Ecuaciones (A.11) a (A.14)), obtenemos:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho_0 \vec{v}) = 0, \quad (\text{A.20})$$

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} p' + \rho_0 \vec{\nabla} \Phi' + \rho' \vec{\nabla} \Phi_0 = 0, \quad (\text{A.21})$$

$$\rho_0 T_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(S' + \vec{\xi} \cdot \vec{\nabla} S_0 \right) = (\rho \varepsilon_N)' - \vec{\nabla} \cdot \vec{F}'_R, \quad (\text{A.22})$$

$$\nabla^2 \Phi' = 4\pi G \rho', \quad (\text{A.23})$$

$$\vec{F}'_R = -K_0 \vec{\nabla} T' - K' \vec{\nabla} T_0. \quad (\text{A.24})$$

Estas expresiones forman un sistema de ecuaciones diferenciales parciales, lineales y homogéneas, cuya solución da las perturbaciones ρ' , T' , Φ' , p' , y la variación en la velocidad $\vec{v} = \delta \vec{v} = \vec{v}'$ o la variación Lagrangiana del desplazamiento, $\vec{\xi}$. Los coeficientes en estas ecuaciones son cantidades en equilibrio, que dependen únicamente de la coordenada r por estar considerando que el modelo sin perturbar tiene simetría esférica: $\rho_0 = \rho_0(r)$, $T_0 = T_0(r)$, $\Phi_0 = \Phi_0(r)$, etc. Nótese que de aquí en más omitiremos el subíndice 0, a fin de simplificar la notación.

Por otro lado, si suponemos que todas las perturbaciones tienen dependencia temporal de forma oscilatoria del tipo $e^{i\sigma t}$, siendo σ la frecuencia angular de oscilación (relacionada con la frecuencia cíclica ν y el período P a través de $\nu = \sigma/2\pi = 1/P$) entonces podemos escribir a las cantidades físicas como producto de variables separadas en las coordenadas esféricas:

$$f'(r, \theta, \phi, t) = f'(r, \theta, \phi) e^{i\sigma t} \quad (\text{A.25})$$

Si consideramos la relación termodinámica (Unno et al. 1989):

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{1}{\Gamma_1} \frac{p'}{p} - A \xi_r - \nabla_{ad} \frac{\rho T}{p} \delta S \quad (\text{A.26})$$

siendo:

$$\Gamma_1 = \left(\frac{\partial \ln p}{\partial \ln \rho} \right)_S; \quad \nabla_{ad} = \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln p} \right)_S \quad (\text{A.27})$$

donde el subíndice S significa que las derivadas se consideran a entropía constante, ξ_r es la componente radial del vector $\vec{\xi}$, y A una cantidad conocida como el *discriminante de Schwarzschild*, definido según:

$$A = \frac{d \ln \rho}{dr} - \frac{1}{\Gamma_1} \frac{d \ln p}{dr} \quad (\text{A.28})$$

y relacionado con la inestabilidad ($A > 0$) o estabilidad ($A < 0$) convectiva. Utilizando la expresión (A.25), (A.26) y operando con (A.20) a (A.24), obtenemos el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\rho g}{\Gamma_1 p} \right) p' - (\sigma^2 + gA) \xi_r + \frac{\partial \Phi'}{\partial r} = g \nabla_{ad} \frac{\rho T}{p} \delta S, \quad (\text{A.29})$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r^2 \xi_r)}{\partial r} + \frac{1}{\Gamma_1} \frac{d \ln p}{dr} \xi_r + \left(\frac{\rho}{\Gamma_1 p} + \frac{\nabla_{\perp}^2}{\sigma^2} \right) \frac{p'}{\rho} + \frac{1}{\sigma^2} \nabla_{\perp}^2 \Phi' = \nabla_{ad} \frac{\rho T}{p} \delta S, \quad (\text{A.30})$$

$$\left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \nabla_{\perp}^2 \right) \Phi' - 4\pi G \rho \left(\frac{p'}{\Gamma_1 p} - A \xi_r \right) = -4\pi G \nabla_{ad} \frac{\rho^2 T}{p} \delta S, \quad (\text{A.31})$$

$$i\sigma \rho T \delta S = (\rho \varepsilon_N)' - \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 F_r')}{\partial r} + \nabla_{\perp}^2 (KT'), \quad (\text{A.32})$$

$$F_r' = -K \frac{\partial T'}{\partial r} - K' \frac{\partial T'}{\partial r}, \quad (\text{A.33})$$

donde ∇_{\perp}^2 representa al operador diferencial definido como:

$$\nabla_{\perp}^2 = \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin^2(\theta)} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right], \quad (\text{A.34})$$

en cuya expresión F_r' es la componente radial de la variación Euleriana en el flujo, \vec{F}_R' .

Con este procedimiento hemos podido obtener ecuaciones independientes del tiempo, cuyos coeficientes solo dependen de la coordenada r , con excepción del operador diferencial ∇_{\perp}^2 que depende de los ángulos θ y ϕ . Al ser el único con esa dependencia, es posible realizar otra separación de variables entre las partes radial y angular. La parte angular puede ser dada a través de los armónicos esféricos $Y_{\ell}^m(\theta, \phi)$, que son autofunciones del operador de Legendre $L^2 = r^2 \nabla_{\perp}^2$, cuyos autovalores son $\ell(\ell + 1)$, es decir:

$$L^2 Y_{\ell}^m(\theta, \phi) = \ell(\ell + 1) Y_{\ell}^m(\theta, \phi) \quad (\text{A.35})$$

donde los armónicos esféricos de grado ℓ y orden acimutal m vienen definidos por:

$$Y_\ell^m(\theta, \phi) = (-1)^{(m+|m|)/2} \left[\frac{2\ell+1}{2\pi} \frac{(\ell-|m|)!}{(\ell+|m|)!} \right]^{1/2} P_\ell^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (\text{A.36})$$

donde $m = -\ell, \dots, -1, 0, 1, \dots, \ell$.

Con esta separación de variables, las perturbaciones adquieren la forma:

$$f'(r, \theta, \phi) = f'(r) Y_\ell^m(\theta, \phi) \quad (\text{A.37})$$

Por su parte, la variación Lagrangiana del desplazamiento se vuelve:

$$\vec{\xi}(r, \theta, \phi) = \left[\xi_r(r), \xi_t(r), \xi_t(r) \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] Y_\ell^m(\theta, \phi) \quad (\text{A.38})$$

donde:

$$\xi_t(r) = \frac{1}{\sigma^2 r} \left(\frac{p'}{\rho} + \Phi' \right). \quad (\text{A.39})$$

Reemplazando entonces las expresiones del tipo (A.37) para las perturbaciones, las Ecuaciones (A.29) a (A.33) resultan:

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp'}{dr} + \frac{g}{\rho c_s^2} p' + (N^2 - \sigma^2) \xi_r + \frac{d\Phi'}{dr} = g \nabla_{ad} \frac{\rho T}{p} \delta S, \quad (\text{A.40})$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 \xi_r)}{dr} + \frac{1}{\Gamma_1} \frac{d \ln p}{dr} \xi_r + \left(1 - \frac{L_\ell^2}{\sigma^2} \right) \frac{p'}{\rho c_s^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{\sigma^2 r^2} \Phi' = \nabla_{ad} \frac{\rho T}{p} \delta S, \quad (\text{A.41})$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi'}{dr} \right) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \Phi' - 4\pi G \rho \left(\frac{p'}{\rho c_s^2} + \frac{N^2}{g} \xi_r \right) = -4\pi G \nabla_{ad} \frac{\rho^2 T}{p} \delta S, \quad (\text{A.42})$$

$$K \frac{dT'}{dr} = -F'_r - K' \frac{dT}{dr} \quad (\text{A.43})$$

$$i\sigma \rho T \delta S = (\rho \varepsilon_N)' - \frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 F'_r)}{dr} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} K T', \quad (\text{A.44})$$

donde $c_s = (\Gamma_1 p / \rho)^{1/2}$ es la velocidad local del sonido, N la frecuencia de Brunt-Väisälä y L_ℓ la frecuencia de Lamb, que entonces quedan definidas como:

$$N^2 = g \left(\frac{1}{\Gamma_1} \frac{d \ln p}{dr} - \frac{d \ln \rho}{dr} \right) = -gA \quad (\text{A.45})$$

y

$$L_\ell^2 = \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} C_s^2. \quad (\text{A.46})$$

Como hemos visto en la Sección 1.2.1, estas frecuencias críticas son muy importantes en las oscilaciones estelares no radiales. En particular, la frecuencia de Brunt-Väisälä define las características globales de los modos g .

Las Ecuaciones (A.40) a (A.44) nos dan la parte de las perturbaciones que depende de r ($p'(r)$, $\Phi'(r)$, etc.) en el caso de las oscilaciones no radiales, no adiabáticas y lineales. Consideremos ahora la denominada *aproximación adiabática*, en la cual se supone que no hay intercambio de calor entre los elementos del fluido al oscilar (algo que resulta válido en el interior estelar, mas no en regiones próximas a la superficie). Esto equivale a decir que la entropía específica se conserva (o sea, $\delta S = 0$). Con esta condición, se obtiene para la Ecuación (A.26):

$$\rho' = \frac{p'}{c_s^2} + \frac{\xi_r \rho N^2}{g}, \quad (\text{A.47})$$

que da la perturbación a la densidad como función de la perturbación a la presión. Así, las Ecuaciones (A.40) a (A.42) quedan reducidas a:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 \xi_r)}{dr} - \frac{g}{c_s^2} \xi_r + \left(1 - \frac{L_\ell^2}{\sigma^2}\right) \frac{p'}{\rho c_s^2} = \frac{\ell(\ell+1)}{\sigma^2 r^2} \Phi', \quad (\text{A.48})$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp'}{dr} + \frac{g}{\rho c_s^2} p' + (N^2 - \sigma^2) \xi_r = -\frac{d\Phi'}{dr}, \quad (\text{A.49})$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi'}{dr} \right) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \Phi' = 4\pi G \rho \left(\frac{p'}{\rho c_s^2} + \frac{N^2}{g} \xi_r \right). \quad (\text{A.50})$$

Estas tres Ecuaciones, junto con las condiciones de borde apropiadas para el centro ($r = 0$) y superficie estelar ($r = R_\star$), representan un problema de autovalores (con autovalor σ^2) que debe ser resuelto para encontrar los modos normales de pulsación. Cabe destacar que las Ecuaciones (A.48) a (A.50) no involucran al orden acimutal m dentro de sus coeficientes, por lo cual se puede ver la degeneración de los autovalores que mencionamos anteriormente: hay $(2\ell + 1)$ autovalores degenerados.

La resolución de las Ecuaciones (A.48) a (A.50) aplicadas a modelos estelares generales debe llevarse a cabo de forma numérica, puesto que no poseen solución analítica (excepto el caso de una esfera homogénea). Para lograrlo, debe hacerse una reformulación en términos de cantidades adimensionales, para lo cual se proponen los siguientes cambios de variables:

$$y_1 = \frac{\xi_r}{r}, \quad (\text{A.51})$$

$$y_2 = \frac{1}{gr} \left(\frac{p'}{\rho} + \Phi' \right), \quad (\text{A.52})$$

$$y_3 = \frac{1}{gr} \Phi', \quad (\text{A.53})$$

$$y_4 = \frac{1}{g} \frac{d\Phi'}{dr}, \quad (\text{A.54})$$

$$\omega^2 = \frac{R_\star^3}{GM_\star} \sigma^2. \quad (\text{A.55})$$

en cuyo caso, las incógnitas pueden expresarse como:

$$\xi_r = r y_1, \quad (\text{A.56})$$

$$p' = \rho g r (y_2 - y_3), \quad (\text{A.57})$$

$$\Phi' = g r y_3, \quad (\text{A.58})$$

$$\frac{d\Phi'}{dr} = g y_4, \quad (\text{A.59})$$

$$\sigma^2 = \frac{GM_\star}{R_\star^3} \omega^2. \quad (\text{A.60})$$

Al reemplazar las Ecuaciones (A.56) a (A.60) en las Ecuaciones (A.48) a (A.50) se obtiene, finalmente, el sistema de ecuaciones adimensionales:

$$x \frac{dy_1}{dr} = (V_g - 3)y_1 + \left[\frac{\ell(\ell + 1)}{C_1 \omega^2} - V_g \right] y_2 + V_g y_3, \quad (\text{A.61})$$

$$x \frac{dy_2}{dr} = (C_1 \omega^2 - A^*)y_1 + (A^* - U + 1)y_2 - A^* y_3, \quad (\text{A.62})$$

$$x \frac{dy_3}{dr} = (1 - U)y_3 + y_4, \quad (\text{A.63})$$

$$x \frac{dy_4}{dr} = UA^* y_1 + UV_g y_2 + [\ell(\ell + 1) - UV_g]y_3 - U y_4, \quad (\text{A.64})$$

donde V_g , U , A^* y C_1 valen:

$$V_g = \frac{V}{\Gamma_1} = -\frac{1}{\Gamma_1} \frac{d \ln p}{d \ln r} = \frac{g r}{c_s^2} = \frac{g r \rho}{\Gamma_1 p}, \quad (\text{A.65})$$

$$U = \frac{d \ln M_r}{d \ln r} = \frac{4\pi \rho r^3}{M_r}, \quad (\text{A.66})$$

$$A^* = -rA = \frac{r}{g} N^2, \quad (\text{A.67})$$

$$C_1 = \left(\frac{r}{R_\star} \right)^3 \left(\frac{M_\star}{M_r} \right). \quad (\text{A.68})$$

La variable $r/R_\star = x$ es adimensional (y representa a la coordenada radial escaleada con el radio de la estrella). Finalmente, las condiciones de contorno para el conjunto de ecuaciones, son:

$$y_1 C_1 \omega^2 - \ell y_2 = 0, \quad \ell y_3 - y_4 = 0 \quad (\text{A.69})$$

en el centro, y:

$$y_1 - y_2 + y_3 = 0, \quad (\ell + 1)y_3 + y_4 = 0 \quad (\text{A.70})$$

en la superficie estelar y, por último, hay que sumar a estas, la condición de normalización, $y_1 = 1$ en $x = 1$.

Bibliografía

- Aerts, C., Christensen-Dalsgaard, J., & Kurtz, D. W. 2010, *Asteroseismology*
- Aizenman, M., Smeyers, P., & Weigert, A. 1977, *A&A*, 58, 41
- Althaus, L. G., Camisassa, M. E., Miller Bertolami, M. M., Córscico, A. H., & García-Berro, E. 2015, *A&A*, 576, A9
- Althaus, L. G. & Córscico, A. H. 2004, *A&A*, 417, 1115
- Althaus, L. G., Córscico, A. H., Isern, J., & García-Berro, E. 2010, *A&A Rev.*, 18, 471
- Althaus, L. G., Córscico, A. H., Miller Bertolami, M. M., García-Berro, E., & Kepler, S. O. 2008, *ApJ*, 677, L35
- Althaus, L. G., Córscico, A. H., Torres, S., et al. 2011, *A&A*, 527, A72
- Althaus, L. G., Miller Bertolami, M. M., & Córscico, A. H. 2013, *A&A*, 557, A19
- Althaus, L. G., Miller Bertolami, M. M., Córscico, A. H., García-Berro, E., & Gil-Pons, P. 2005a, *A&A*, 440, L1
- Althaus, L. G., Serenelli, A. M., & Benvenuto, O. G. 2001, *MNRAS*, 323, 471
- Althaus, L. G., Serenelli, A. M., Córscico, A. H., & Montgomery, M. H. 2003, *A&A*, 404, 593
- Althaus, L. G., Serenelli, A. M., Panei, J. A., et al. 2005b, *A&A*, 435, 631
- Antoniadis, J., Freire, P. C. C., Wex, N., et al. 2013, *Science*, 340, 448
- Antoniadis, J., van Kerkwijk, M. H., Koester, D., et al. 2012, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 423, 3316
- Battich, T., Córscico, A. H., Althaus, L. G., & Miller Bertolami, M. M. 2016, *J. Cosmology Astropart. Phys.*, 8, 062
- Beck, P. G. & Kallinger, T. 2013, *Sterne und Weltraum*, 52, 50
- Bedin, L. R., Salaris, M., Anderson, J., et al. 2015, *MNRAS*, 448, 1779
- Bell, K. J., Córscico, A. H., Bischoff-Kim, A., et al. 2019, *A&A*, 632, A42
- Bell, K. J., Gianninas, A., Hermes, J. J., et al. 2017a, *ApJ*, 835, 180
- Bell, K. J., Hermes, J. J., Vanderbosch, Z., et al. 2017b, *ApJ*, 851, 24

- Bell, K. J., Kepler, S. O., Montgomery, M. H., et al. 2015, in *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, Vol. 493, 19th European Workshop on White Dwarfs, ed. P. Dufour, P. Bergeron, & G. Fontaine, 217
- Bell, K. J., Pelisoli, I., Kepler, S. O., et al. 2018, *A&A*, 617, A6
- Benvenuto, O. G. & De Vito, M. A. 2003, *MNRAS*, 342, 50
- . 2005, *MNRAS*, 362, 891
- Bischoff-Kim, A., Montgomery, M. H., & Winget, D. E. 2008a, *ApJ*, 675, 1505
- . 2008b, *ApJ*, 675, 1512
- Bognár, Z., Kalup, C., Sódor, Á., Charpinet, S., & Hermes, J. J. 2018, *MNRAS*, 478, 2676
- Bognár, Z., Páparó, M., Córscico, A. H., Kepler, S. O., & Gyórfy, Á. 2014, *A&A*, 570, A116
- Bognár, Z., Páparó, M., Molnár, L., et al. 2016, *MNRAS*, 461, 4059
- Bradley, P. A. 1996, *ApJ*, 468, 350
- . 1998, *ApJS*, 116, 307
- . 2001, *ApJ*, 552, 326
- Bradley, P. A., Winget, D. E., & Wood, M. A. 1992, *ApJ*, 391, L33
- . 1993, *ApJ*, 406, 661
- Brassard, P., Fontaine, G., Wesemael, F., & Hansen, C. J. 1992a, *ApJS*, 80, 369
- Brassard, P., Fontaine, G., Wesemael, F., Kawaler, S. D., & Tassoul, M. 1991, *ApJ*, 367, 601
- Brassard, P., Fontaine, G., Wesemael, F., & Tassoul, M. 1992b, *ApJS*, 81, 747
- Breger, M., Huang, L., Jiang, S. Y., et al. 1987, *A&A*, 175, 117
- Breton, R. P., Rappaport, S. A., van Kerkwijk, M. H., & Carter, J. A. 2012, *ApJ*, 748, 115
- Brickhill, A. J. 1991, *MNRAS*, 251, 673
- Brown, W. R., Gianninas, A., Kilic, M., Kenyon, S. J., & Allende Prieto, C. 2016a, *ApJ*, 818, 155
- Brown, W. R., Kilic, M., Allende Prieto, C., Gianninas, A., & Kenyon, S. J. 2013, *ApJ*, 769, 66
- Brown, W. R., Kilic, M., Allende Prieto, C., & Kenyon, S. J. 2010, *ApJ*, 723, 1072
- . 2012, *ApJ*, 744, 142
- Brown, W. R., Kilic, M., & Gianninas, A. 2017a, *ApJ*, 839, 23
- Brown, W. R., Kilic, M., Kenyon, S. J., & Gianninas, A. 2016b, *ApJ*, 824, 46
- Brown, W. R., Kilic, M., Kosakowski, A., & Gianninas, A. 2017b, *ApJ*, 847, 10

- Burgers, J. M. 1969, *Flow Equations for Composite Gases* (New York: Academic Press)
- Calcaferro, L. M., Althaus, L. G., & Córscico, A. H. 2018a, *A&A*, 614, A49
- Calcaferro, L. M., Córscico, A. H., & Althaus, L. G. 2016, *A&A*, 589, A40
- . 2017a, *A&A*, 600, A73
- . 2017b, *A&A*, 607, A33
- Calcaferro, L. M., Córscico, A. H., Althaus, L. G., Romero, A. D., & Kepler, S. O. 2018b, *A&A*, 620, A196
- Camisassa, M. E. 2019, PhD thesis, UNLP
- Camisassa, M. E., Althaus, L. G., Córscico, A. H., et al. 2019, *A&A*, 625, A87
- Carroll, B. W. & Ostlie, D. A. 2007, *An Introduction to Modern Astrophysics*, 2nd edn., ed. S. F. P. Addison-Wesley
- Carter, J. A., Rappaport, S., & Fabrycky, D. 2011, *ApJ*, 728, 139
- Cassisi, S., Potekhin, A. Y., Pietrinferni, A., Catelan, M., & Salaris, M. 2007, *ApJ*, 661, 1094
- Castanheira, B. G. & Kepler, S. O. 2008, *MNRAS*, 385, 430
- . 2009, *MNRAS*, 396, 1709
- Chen, X. & Han, Z. 2002, *MNRAS*, 335, 948
- Christensen-Dalsgaard, J. 1981, *MNRAS*, 194, 229
- Christensen-Dalsgaard, J. 1997, in *Lecture Notes on Stellar Oscillations*
- Christensen-Dalsgaard, J. & Houdek, G. 2010, *Ap&SS*, 328, 51
- Clayton, M., Podsiadlowski, P., Ivanova, N., & Justham, S. 2017, *MNRAS*, 470, 1788
- Clemens, J. C., van Kerkwijk, M. H., & Wu, Y. 2000, *MNRAS*, 314, 220
- Córscico, A. H. 2003, PhD thesis, UNLP
- Córscico, A. H. & Althaus, L. G. 2004, *A&A*, 428, 159
- . 2006, *A&A*, 454, 863
- . 2014a, *A&A*, 569, A106
- . 2014b, *ApJ*, 793, L17
- . 2016, *A&A*, 585, A1
- Córscico, A. H., Althaus, L. G., Benvenuto, O. G., & Serenelli, A. M. 2002, *A&A*, 387, 531
- Córscico, A. H., Althaus, L. G., García-Berro, E., & Romero, A. D. 2013, *J. Cosmology Astropart. Phys.*, 6, 032

- Córsico, A. H., Althaus, L. G., Kepler, S. O., Costa, J. E. S., & Miller Bertolami, M. M. 2008, *A&A*, 478, 869
- Córsico, A. H., Althaus, L. G., & Miller Bertolami, M. M. 2006, *A&A*, 458, 259
- Córsico, A. H., Althaus, L. G., Miller Bertolami, M. M., & Bischoff-Kim, A. 2012a, *A&A*, 541, A42
- Córsico, A. H., Althaus, L. G., Miller Bertolami, M. M., & García-Berro, E. 2009, *A&A*, 499, 257
- Córsico, A. H., Althaus, L. G., Miller Bertolami, M. M., & Kepler, S. O. 2019, *A&A Rev.*, 27, 7
- Córsico, A. H., Althaus, L. G., Miller Bertolami, M. M., Kepler, S. O., & García-Berro, E. 2014, *J. Cosmology Astropart. Phys.*, 8, 054
- Córsico, A. H., Althaus, L. G., Miller Bertolami, M. M., et al. 2012b, *MNRAS*, 424, 2792
- Córsico, A. H., Althaus, L. G., Miller Bertolami, M. M., & Werner, K. 2007a, *A&A*, 461, 1095
- Córsico, A. H., Althaus, L. G., Romero, A. D., et al. 2012c, *J. Cosmology Astropart. Phys.*, 12, 10
- Córsico, A. H., Althaus, L. G., Serenelli, A. M., et al. 2016a, *A&A*, 588, A74
- Córsico, A. H. & Benvenuto, O. G. 2002, *Ap&SS*, 279, 281
- Córsico, A. H., Benvenuto, O. G., Althaus, L. G., Isern, J., & García-Berro, E. 2001, *New A*, 6, 197
- Córsico, A. H., Miller Bertolami, M. M., Althaus, L. G., Vauclair, G., & Werner, K. 2007b, *A&A*, 475, 619
- Córsico, A. H., Romero, A. D., Althaus, L. G., et al. 2016b, *J. Cosmology Astropart. Phys.*, 7, 036
- Córsico, A. H., Romero, A. D., Althaus, L. G., & Hermes, J. J. 2012d, *A&A*, 547, A96
- Corti, M. A., Kanaan, A., Córsico, A. H., et al. 2016, *A&A*, 587, L5
- Costa, J. E. S. & Kepler, S. O. 2008, *A&A*, 489, 1225
- Cowling, T. G. 1941, *MNRAS*, 101, 367
- Cowling, T. G. & Newing, R. A. 1949, *ApJ*, 109, 149
- Cox, J. P. 1980, *Theory of stellar pulsation*
- De Gerónimo, F. C. 2018, PhD thesis, UNLP
- De Gerónimo, F. C., Althaus, L. G., Córsico, A. H., Romero, A. D., & Kepler, S. O. 2017, *A&A*, 599, A21
- . 2018, *A&A*, 613, A46
- De Gerónimo, F. C., Córsico, A. H., Althaus, L. G., & Romero, A. D. 2015, in *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, Vol. 493, 19th European Workshop on White Dwarfs, ed. P. Dufour, P. Bergeron, & G. Fontaine, 225
- De Marco, O. & Soker, N. 2002, *PASP*, 114, 602

- De Vito, M. A. & Benvenuto, O. G. 2010, *MNRAS*, 401, 2552
- . 2012, *MNRAS*, 421, 2206
- Deheuvels, S. & Michel, E. 2010, *Ap&SS*, 328, 259
- Driebe, T., Schoenberner, D., Bloeker, T., & Herwig, F. 1998, *A&A*, 339, 123
- Dziembowski, W. 1977, *Acta Astron.*, 27, 203
- Eggleton, P. P. 1983, *ApJ*, 268, 368
- Ergma, E., Sarna, M. J., & Gerškevič-Antipova, J. 2001, *MNRAS*, 321, 71
- Farihi, J. 2016, *New A Rev.*, 71, 9
- Fontaine, G. & Brassard, P. 2008a, *PASP*, 120, 1043
- . 2008b, *PASP*, 120, 1043
- Fontaine, G., Istrate, A., Gianninas, A., Brassard, P., & Van Grootel, V. 2017, *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, Vol. 509, *Making Sense Out of Pulsating Pre-ELM and ELM White Dwarfs*, ed. P. E. Tremblay, B. Gänsicke, & T. Marsh, 347
- Gaia Collaboration, Babusiaux, C., van Leeuwen, F., et al. 2018a, *A&A*, 616, A10
- Gaia Collaboration, Brown, A. G. A., Vallenari, A., et al. 2018b, *A&A*, 616, A1
- García-Berro, E., Torres, S., Althaus, L. G., et al. 2010, *Nature*, 465, 194
- Gentile Fusillo, N. P., Tremblay, P.-E., Gänsicke, B. T., et al. 2019, *MNRAS*, 482, 4570
- Giammichele, N., Charpinet, S., Brassard, P., & Fontaine, G. 2017a, *A&A*, 598, A109
- Giammichele, N., Charpinet, S., Fontaine, G., & Brassard, P. 2017b, *ApJ*, 834, 136
- Giammichele, N., Charpinet, S., Fontaine, G., et al. 2018, *Nature*, 554, 73
- Giammichele, N., Fontaine, G., Brassard, P., & Charpinet, S. 2016, *ApJS*, 223, 10
- Gianninas, A., Curd, B., Fontaine, G., Brown, W. R., & Kilic, M. 2016, *ApJ*, 822, L27
- Gianninas, A., Dufour, P., Kilic, M., et al. 2014, *ApJ*, 794, 35
- Gianninas, A., Kilic, M., Brown, W. R., Canton, P., & Kenyon, S. J. 2015, *ApJ*, 812, 167
- Handler, G. 2013, *Asteroseismology*, ed. T. D. Oswalt & M. A. Barstow, Vol. 4, 207
- Handler, G., Pikall, H., O'Donoghue, D., et al. 1997, *MNRAS*, 286, 303
- Hansen, B. M. S., Kalirai, J. S., Anderson, J., et al. 2013, *Nature*, 500, 51
- Harris, H. C., Munn, J. A., Kilic, M., et al. 2006, *AJ*, 131, 571
- Hermes, J. J., Gänsicke, B. T., Koester, D., et al. 2014, *MNRAS*, 444, 1674

- Hermes, J. J., GÅnsicke, B. T., Kawaler, S. D., et al. 2017, *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 232, 23
- Hermes, J. J., Montgomery, M. H., Gianninas, A., et al. 2013a, *MNRAS*, 436, 3573
- Hermes, J. J., Montgomery, M. H., Mullally, F., Winget, D. E., & Bischoff-Kim, A. 2013b, *ApJ*, 766, 42
- Hermes, J. J., Montgomery, M. H., Winget, D. E., et al. 2013c, *ApJ*, 765, 102
- . 2012, *ApJ*, 750, L28
- Iglesias, C. A. & Rogers, F. J. 1996, *ApJ*, 464, 943
- Isern, J., García-Berro, E., Hernanz, M., Mochkovitch, R., & Torres, S. 1998, *ApJ*, 503, 239
- Isern, J., Hernanz, M., & García-Berro, E. 1992, *ApJ*, 392, L23
- Istrate, A. G., Fontaine, G., Gianninas, A., et al. 2016a, *A&A*, 595, L12
- Istrate, A. G., Marchant, P., Tauris, T. M., et al. 2016b, *A&A*, 595, A35
- Istrate, A. G., Tauris, T. M., & Langer, N. 2014, *A&A*, 571, A45
- Itoh, N., Hayashi, H., Nishikawa, A., & Kohyama, Y. 1996, *ApJS*, 102, 411
- Ivanova, N., Justham, S., Chen, X., et al. 2013, *A&A Rev.*, 21, 59
- Ivanova, N. & Nandez, J. L. A. 2016, *MNRAS*, 462, 362
- Jeffery, C. S. & Saio, H. 2013, *MNRAS*, 435, 885
- . 2016, *MNRAS*, 458, 1352
- Justham, S., Wolf, C., Podsiadlowski, P., & Han, Z. 2009, *A&A*, 493, 1081
- Kaplan, D. L., Bhalerao, V. B., van Kerkwijk, M. H., et al. 2013, *ApJ*, 765, 158
- Karpova, A. V., Zyuzin, D. A., Shibano, Y. A., Kirichenko, A. Y., & Zharikov, S. V. 2018, *PASA*, 35, e028
- Kawaler, S. D. 1988, in *IAU Symposium, Vol. 123, Advances in Helio- and Asteroseismology*, ed. J. Christensen-Dalsgaard & S. Frandsen, 329
- Kawaler, S. D. & Bradley, P. A. 1994, *ApJ*, 427, 415
- Kawaler, S. D., Winget, D. E., Iben, Jr., I., & Hansen, C. J. 1986, *ApJ*, 302, 530
- Kepler, S. O. 2012, in *Astronomical Society of the Pacific Conference Series, Vol. 462, Progress in Solar/Stellar Physics with Helio- and Asteroseismology*, ed. H. Shibahashi, 322
- Kepler, S. O., Costa, J. E. S., Castanheira, B. G., et al. 2005, *ApJ*, 634, 1311
- Kepler, S. O., Fraga, L., Winget, D. E., et al. 2014, *MNRAS*, 442, 2278
- Kepler, S. O., Pelisoli, I., Koester, D., et al. 2015, *MNRAS*, 446, 4078

- . 2016, *MNRAS*, 455, 3413
- Kepler, S. O., Pelisoli, I., Peçanha, V., et al. 2012, *ApJ*, 757, 177
- Kilic, M., Brown, W. R., Allende Prieto, C., et al. 2011, *ApJ*, 727, 3
- . 2012, *ApJ*, 751, 141
- Kilic, M., Hermes, J. J., Córscico, A. H., et al. 2018, *MNRAS*, 479, 1267
- Kilic, M., Hermes, J. J., Gianninas, A., & Brown, W. R. 2015, *MNRAS*, 446, L26
- Kilic, M., Stanek, K. Z., & Pinsonneault, M. H. 2007, *ApJ*, 671, 761
- Kippenhahn, R., Weigert, A., & Hofmeister, E. 1967, *Methods in Computational Physics* (New York, Academic Press)
- Kleinman, S. J., Kepler, S. O., Koester, D., et al. 2013, *ApJS*, 204, 5
- Kleinman, S. J., Nather, R. E., Winget, D. E., et al. 1998, *ApJ*, 495, 424
- Koester, D., Voss, B., Napiwotzki, R., et al. 2009, *A&A*, 505, 441
- Ledoux, P. 1951, *ApJ*, 114, 373
- Magni, G. & Mazzitelli, I. 1979, *A&A*, 72, 134
- Marsh, T. R., Dhillon, V. S., & Duck, S. R. 1995, *MNRAS*, 275, 828
- Maxted, P. F. L., Anderson, D. R., Burleigh, M. R., et al. 2011, *MNRAS*, 418, 1156
- Maxted, P. F. L., Serenelli, A. M., Marsh, T. R., et al. 2014, *MNRAS*, 444, 208
- Maxted, P. F. L., Serenelli, A. M., Miglio, A., et al. 2013, *Nature*, 498, 463
- Mestel, L. 1952, *MNRAS*, 112, 583
- Miller Bertolami, M. M. 2016, *A&A*, 588, A25
- Miller Bertolami, M. M. & Althaus, L. G. 2006, *A&A*, 454, 845
- Miller Bertolami, M. M., Battich, T., Córscico, A. H., Christensen-Dalsgaard, J., & Althaus, L. G. 2019, *Nature Astronomy*, 452
- Miller Bertolami, M. M., Melendez, B. E., Althaus, L. G., & Isern, J. 2014, *J. Cosmology Astropart. Phys.*, 2014, 069
- Mukadam, A. S., Bischoff-Kim, A., Fraser, O., et al. 2013, *ApJ*, 771, 17
- Mukadam, A. S., Kepler, S. O., Winget, D. E., et al. 2003, *ApJ*, 594, 961
- Mullally, F., Winget, D. E., Degennaro, S., et al. 2008, *ApJ*, 676, 573
- Muslimov, A. G. & Sarna, M. J. 1993, *MNRAS*, 262, 164
- Nandez, J. L. A. & Ivanova, N. 2016, *MNRAS*, 460, 3992

- Nather, R. E., Winget, D. E., Clemens, J. C., Hansen, C. J., & Hine, B. P. 1990, *ApJ*, 361, 309
- Nelemans, G. & Tauris, T. M. 1998, *A&A*, 335, L85
- Nelson, L. A., Dubeau, E., & MacCannell, K. A. 2004, *ApJ*, 616, 1124
- O'Donoghue, D. 1994, *MNRAS*, 270, 222
- Osaki, J. 1975, *PASJ*, 27, 237
- Panei, J. A., Althaus, L. G., Chen, X., & Han, Z. 2007, *MNRAS*, 382, 779
- Paparó, M., Bognár, Z., Plachy, E., Molnár, L., & Bradley, P. A. 2013, *MNRAS*, 432, 598
- Paxton, B., Bildsten, L., Dotter, A., et al. 2011, *ApJS*, 192, 3
- Paxton, B., Cantiello, M., Arras, P., et al. 2013, *ApJS*, 208, 4
- Paxton, B., Marchant, P., Schwab, J., et al. 2015, *ApJS*, 220, 15
- Pech, D. & Vauclair, G. 2006, *A&A*, 453, 219
- Pech, D., Vauclair, G., & Dolez, N. 2006, *A&A*, 446, 223
- Pelisoli, I., Kepler, S. O., & Koester, D. 2018a, *MNRAS*, 475, 2480
- Pelisoli, I., Kepler, S. O., Koester, D., et al. 2018b, *MNRAS*, 478, 867
- Pelisoli, I. & Vos, J. 2019, *MNRAS*, 488, 2892
- Podsiadlowski, P. 2014, *Accretion Processes in Astrophysics Canary Islands Winter School of Astrophysics, Capítulo 2.* (Cambridge University Press)
- Podsiadlowski, P., Han, Z., Lynas-Gray, A. E., & Brown, D. 2008, in *Astronomical Society of the Pacific Conference Series, Vol. 392, Hot Subdwarf Stars and Related Objects*, ed. U. Heber, C. S. Jeffery, & R. Napiwotzki, 15
- Rappaport, S., Nelson, L., Levine, A., et al. 2015, *ApJ*, 803, 82
- Redaelli, M., Kepler, S. O., Costa, J. E. S., et al. 2011, *MNRAS*, 415, 1220
- Ricker, G. R., Winn, J. N., Vanderspek, R., et al. 2015, *Journal of Astronomical Telescopes, Instruments, and Systems*, 1, 014003
- Ritter, H. 1988, *A&A*, 202, 93
- Robinson, E. L., Mailloux, T. M., Zhang, E., et al. 1995, *ApJ*, 438, 908
- Rohrman, R. D., Althaus, L. G., García-Berro, E., Córscico, A. H., & Miller Bertolami, M. M. 2012, *A&A*, 546, A119
- Romero, A. D. 2012, PhD thesis, UNLP
- Romero, A. D., Córscico, A. H., Althaus, L. G., et al. 2012, *MNRAS*, 420, 1462
- Romero, A. D., Córscico, A. H., Castanheira, B. G., et al. 2017, *ApJ*, 851, 60

- Romero, A. D., Kepler, S. O., Córscico, A. H., Althaus, L. G., & Fraga, L. 2013, *ApJ*, 779, 58
- Sabach, E. & Soker, N. 2017, *ArXiv e-prints*
- . 2018, *MNRAS*, 473, 286
- Salaris, M., Cassisi, S., Pietrinferni, A., Kowalski, P. M., & Isern, J. 2010, *ApJ*, 716, 1241
- Sarna, M. J., Ergma, E., & Gerškevič-Antipova, J. 2000, *MNRAS*, 316, 84
- Scuflaire, R. 1974, *A&A*, 36, 107
- Serenelli, A. M., Althaus, L. G., Rohrmann, R. D., & Benvenuto, O. G. 2002, *MNRAS*, 337, 1091
- Silvotti, R., Østensen, R. H., Bloemen, S., et al. 2012, *MNRAS*, 424, 1752
- Steinfadt, J. D. R., Bildsten, L., & Arras, P. 2010, *ApJ*, 718, 441
- Steinfadt, J. D. R., Bildsten, L., Kaplan, D. L., et al. 2012, *PASP*, 124, 1
- Strickler, R. R., Cool, A. M., Anderson, J., et al. 2009, *ApJ*, 699, 40
- Sullivan, D. J. & Chote, P. 2015, in *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, Vol. 493, 19th European Workshop on White Dwarfs, ed. P. Dufour, P. Bergeron, & G. Fontaine, 199
- Sun, M. & Arras, P. 2018, *ApJ*, 858, 14
- Tassoul, M. 1980, *ApJS*, 43, 469
- Tassoul, M., Fontaine, G., & Winget, D. E. 1990, *ApJS*, 72, 335
- Tauris, T. M. 2012, *Science*, 335, 561
- Torres, S., García-Berro, E., Cojocaru, R., & Calamida, A. 2018, *MNRAS*, 476, 1654
- Tremblay, P.-E., Fontaine, G., Fusillo, N. P. G., et al. 2019, *Nature*, 565, 202
- Tremblay, P.-E., Gianninas, A., Kilic, M., et al. 2015, *ApJ*, 809, 148
- Unno, W., Osaki, Y., Ando, H., Saio, H., & Shibahashi, H. 1989, *Nonradial oscillations of stars*
- van den Heuvel, E. P. J. & van Paradijs, J. 1988, *Nature*, 334, 227
- Van Grootel, V., Fontaine, G., Brassard, P., & Dupret, M.-A. 2013, *ApJ*, 762, 57
- Van Horn, H. M. 2015, *Unlocking the Secrets of White Dwarf Stars*
- van Kerkwijk, M. H., Bassa, C. G., Jacoby, B. A., & Jonker, P. G. 2005, in *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, Vol. 328, *Binary Radio Pulsars*, ed. F. A. Rasio & I. H. Stairs, 357
- van Kerkwijk, M. H., Bell, J. F., Kaspi, V. M., & Kulkarni, S. R. 2000, *ApJ*, 530, L37
- van Kerkwijk, M. H., Bergeron, P., & Kulkarni, S. R. 1996, *ApJ*, 467, L89
- van Kerkwijk, M. H., Rappaport, S. A., Breton, R. P., et al. 2010, *ApJ*, 715, 51

- Vauclair, G., Fu, J.-N., Solheim, J.-E., et al. 2011, *A&A*, 528, A5
- Winget, D. E., Hansen, C. J., & van Horn, H. M. 1983, *Nature*, 303, 781
- Winget, D. E. & Kepler, S. O. 2008a, *ARA&A*, 46, 157
- . 2008b, *ARA&A*, 46, 157
- Winget, D. E., Sullivan, D. J., Metcalfe, T. S., Kawaler, S. D., & Montgomery, M. H. 2004, *ApJ*, 602, L109
- Woods, T. E., Ivanova, N., van der Sluys, M. V., & Chaichenets, S. 2012, *ApJ*, 744, 12
- Woosley, S. E. & Heger, A. 2015, *The Astrophysical Journal*, 810, 34
- Zhang, X. B., Fu, J. N., Li, Y., Ren, A. B., & Luo, C. Q. 2016, *ApJ*, 821, L32