



UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE LA PLATA

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Formalismo línea de mundo para un
campo escalar en variedades curvas y
con borde

Autor:

Lucas Manzo

Director:

Dr. Pablo Pisani

Trabajo de Diploma

presentado para aspirar al título de

Licenciado en Física

Marzo de 2020

Resumen

El formalismo línea de mundo es un esquema útil en teoría cuántica de campos que también se ha convertido en una poderosa herramienta para realizar cálculos numéricos. El ingrediente principal de este formalismo consiste en la (primera) cuantización de una partícula puntual auxiliar cuyas amplitudes de transición se corresponden con el núcleo de calor (*heat-kernel*) del operador de fluctuaciones cuánticas de la teoría de campos.

No obstante, para estudiar un campo cuántico en una variedad con borde es necesario restringir el dominio de integración de los caminos de la partícula auxiliar, tomando un subconjunto específico de líneas de mundo contenidas en dicha variedad. El principal objetivo del presente trabajo consiste en mostrar cómo implementar esta restricción para el caso de un campo escalar en ciertas geometrías con borde, poniendo a prueba los resultados al considerar que el campo se encuentra confinado en una esfera D -dimensional bajo condiciones de borde de Dirichlet, Neumann y Robin. Se computan explícitamente los primeros coeficientes del *heat-kernel* para el caso $D = 2$ como verificación de la construcción empleada.

Además de la tarea mencionada, se discuten aspectos varios de las teorías cuánticas de campos y sus aplicaciones, con énfasis en el formalismo línea de mundo. Es en base a estos aspectos que se construye el formalismo, primero en espacios sin borde y luego en variedades con borde. Al final se mencionan posibles generalizaciones de la construcción presentada.

Agradecimientos

Al intentar reiteradas veces escribir esta sección me encontré con una enorme variedad de problemas, siendo mi falta de inspiración y escasa práctica en la prosa dos de los principales. Pero sin lugar a dudas, el mayor de los obstáculos fue el enorme listado de gente a quienes agradecer su inmensurable ayuda durante los largos ocho años de carrera; de a poco me fui dando cuenta que podría dedicar no una sección sino un capítulo entero a mencionar a todes y cada uno de quienes me acompañaron durante esta larga travesía. Así que, para no aburrir con un texto largo y sentimentalista, he optado por acotar los agradecimientos de la forma más concisa en que mis capacidades de resumir me lo permitan. Como ha de notarse por la extensión de la presente sección, dichas capacidades son bastante limitadas.

En primer lugar, agradezco enormemente a mi familia por ser un ejemplo de trabajo y superación. Es por mis padres que he aprendido a formarme como persona (por supuesto, sigo haciéndolo todos los días de mi vida), y es por mis antepasados que he heredado los privilegios que me han permitido estudiar y formarme académicamente (lo cual también seguiré haciendo hasta el hartazgo).

A mis compañeros de la carrera, quienes muchos ya han quedado tristemente en el pasado, les debo no sólo estos agradecimientos sino también una dedicatoria más profunda que a veces no se puede expresar en palabras. Con ellxs luché extensas batallas académicas, me acompañaron en delicadas situaciones personales, compartí risas y llantos a montones, y financiamos más de una cervecería local. A quienes han perdurado hasta el presente, aprovecho para agradecerles su preciada y preciosa amistad.

En la misma línea de agradecimientos, quisiera destacar la labor de aquellxs compañeros que durante estos años se dedicaron desde el Claustro de Alumnos y las distintas comisiones del Departamento de Física a promover y facilitar un espacio de camaradería e inclusión, y sobre todo a defender nuestros intereses como estudiantes de Física y Física Médica. Sé que su trabajo es poco agradecido, y por eso quería dedicar aunque sea este pequeño espacio para ustedes.

También agradezco a aquellxs amigos que hice fuera del ámbito académico, por resistir a mis continuas locuras y ausencias, y a quienes simplemente no les comprendo su capacidad para soportar mi obsesión por mi carrera. Gracias por haber estado cuando los necesitaba.

Por supuesto, gracias también a Pablo, quien además de enseñarme muchas cosas (tal vez demasiadas), también me abrió las puertas al mundillo de la profesión académica y junto con James, Idrish y Olindo me facilitaron la posibilidad de tener mi primera publicación antes de licenciarme. Estoy seguro que es por mi culpa que él adquirió el don de la paciencia, pues durante los últimos tres años se tomó el enorme

trabajo de explicarme con religiosa calma todo lo que pudo transmitirme. Tendrá aún mucho más por explicarme durante los próximos años de trabajo, y espero que lo haga con la misma tranquilidad y elocuencia que lo caracterizan y convierten en un excelente investigador, educador y director.

Gracias también a aquellxs docentes que no sólo se preocupan por transmitir información, sino también por garantizar que lxs estudiantes aprendamos de ella. Siempre he concebido a la docencia como una de las tareas más nobles en la sociedad, y por ello quiero destacar a quienes han estado a la altura de tal nobleza. También agradezco a mis alumnxs, quienes día a día me enseñan a enseñar.

Por último – y no menos importante – agradezco a la educación pública, gratuita, laica e inclusiva; a quienes se convirtieron en mártires por lograr que cumpla con todas estas cualidades, y a quienes luchan todos los días contra las adversidades por permitir que sea y siga siendo de calidad.

¡Gracias a todes por permitirme estudiar!

Índice general

1. Introducción	5
2. Mecánica cuántica y teoría cuántica de campos	8
2.1. Mecánica cuántica no relativista: formulación con integrales de camino en espacios curvos	8
2.1.1. Orden de Weyl	9
2.1.2. Hamiltoniano invariante para una partícula bosónica libre	10
2.1.3. Construcción <i>time slicing</i> en el espacio de fases	13
2.1.4. Construcción <i>time slicing</i> en el espacio de configuraciones	17
2.2. Elementos de teoría cuántica de campos en espacios curvos	20
2.2.1. Función de partición y acción efectiva	20
2.2.2. Anomalías. Anomalía conforme	23
2.2.3. Funciones β	24
3. Formalismo línea de mundo (WLF) en espacios sin borde	26
3.1. La partícula ficticia en el WLF	26
3.2. Funcional generatriz en el espacio de configuraciones llano	30
3.2.1. Función de Green con condiciones de Dirichlet	32
3.2.2. Función de Green con condiciones periódicas	33
3.2.3. Valor medio $\langle 1 \rangle$	35
3.3. Funcional generatriz en el espacio de fases	38
3.3.1. Función de Green con condiciones de Dirichlet	41
3.3.2. Función de Green con condiciones periódicas	42
3.3.3. Valor medio $\langle 1 \rangle$	45
3.4. Aplicaciones	46
3.4.1. Termodinámica en \mathcal{S}^1	48
3.4.2. Función β de la teoría $\lambda\varphi^4$	53
3.4.3. Anomalía conforme en \mathcal{S}^2	58
4. Formalismo línea de mundo (WLF) en espacios con un único borde	61
4.1. El método de las imágenes	63
4.2. Condiciones de borde	66

4.3. Funcional generatriz en el espacio de configuraciones	70
4.4. Funcional generatriz en el espacio de fases	71
4.5. Valor medio de la delta de Dirac y función de Heaviside	73
4.6. Resumen: términos directos e indirectos	75
4.7. Aplicación: coeficientes de Seeley-DeWitt en la bola \mathcal{B}^{D+1}	78
4.7.1. Anomalía conforme de un campo escalar libre en un disco	80
5. Conclusiones y trabajo futuro	86
Bibliografía	89

Índice de figuras

3.1. Caminos cerrados sobre un toroide.	50
3.2. Variables termodinámicas en \mathcal{S}^1	54
3.3. Diagramas de Feynman en los dos formalismos	57
4.1. Variedades bidimensionales con borde.	62
4.2. Trayectorias en un disco.	62
4.3. Trayectorias clásicas en una variedad con borde.	64
4.4. Trayectoria cuántica que rebota en el borde.	65

Capítulo 1

Introducción

Desde los pioneros trabajos de Z. Bern y D. A. Kosover [1], y M. J. Strassler [2], el formalismo línea de mundo se ha convertido en un método práctico para computar amplitudes de dispersión y acciones efectivas en teorías cuánticas de campos [3]. En particular, este formalismo es apropiado para estudiar los efectos de las fluctuaciones cuánticas de campos masivos en espacios curvos. Primero fue establecida una representación de línea de mundo para la acción efectiva en un fondo gravitacional arbitrario tanto para campos escalares [4] como fermiónicos [5]. Luego fue encarado el caso de un campo vectorial en [6], donde – de forma más general – fueron computados los primeros coeficientes de Seeley-DeWitt para un tensor antisimétrico de rango arbitrario. Usando técnicas de línea de mundo, también en [7–9] fueron computados coeficientes de Seeley-DeWitt para campos de mayor espín (*higher-spin fields*) en variedades conformemente planas. El formalismo línea de mundo está hoy establecido como una herramienta muy eficaz para computar cantidades en teorías cuánticas de campos, y en particular, para el estudio de anomalías (ver [10] y sus referencias).

A pesar de las múltiples aplicaciones desarrolladas hasta ahora, las teorías de campos con borde han resultado ser más esquivas: aún no se conoce una completa formulación de línea de mundo que permita realizar cálculos analíticos para campos cuánticos en variedades con bordes. De hecho, la representación de línea de mundo de un campo $\Phi(x)$ en un espacio-tiempo \mathcal{M} está basada en la correspondencia entre los modos espectrales de las fluctuaciones cuánticas de $\Phi(x)$ y el hamiltoniano de una partícula (puntual) auxiliar moviéndose en un espacio \mathcal{M} . Entonces, dado que la acción efectiva a un *loop* de la teoría de campos está dada por la primera cuantización de la partícula auxiliar, uno es llevado a considerar su integral de caminos sobre el conjunto de trayectorias $x^i(t)$ cerradas en \mathcal{M} ¹. En consecuencia, si la variedad tiene un borde $\partial\mathcal{M}$, uno espera que el dominio de la integral de caminos sea restringido en acuerdo con las condiciones específicas sobre $\Phi(x)$ en $\partial\mathcal{M}$. Por ejemplo, si el

¹En este formalismo, el propagador a nivel ‘árbol’ posee una representación similar en términos de una integral de caminos sobre líneas abiertas.

campo está sujeto a condiciones de borde de Dirichlet en $\partial\mathcal{M}$ entonces la integral de caminos debe realizarse sobre aquellas líneas de mundo $x^i(t)$ cerradas en \mathcal{M} que no intersecan a $\partial\mathcal{M}$ ². No obstante, sólo se conocen técnicas de línea de mundo que permiten realizar estas restricciones sobre ciertas geometrías y con particulares condiciones de borde [11–14].

El primer problema consiste en realizar una cuantización en términos de integrales de caminos para una partícula puntual en una región delimitada. Vagamente, la principal dificultad es que la medida gaussiana (y sus momentos) puede ser fácilmente integrada en \mathbb{R}^{D+1} pero no en sus subconjuntos acotados. Las condiciones de borde de Dirichlet en una superficie D -dimensional Σ pueden ser modeladas en todo \mathbb{R}^{D+1} a través del acoplamiento $\lambda\delta_\Sigma(x)$, es decir, una función delta con soporte en Σ : en el límite de acoplamiento infinito $\lambda \rightarrow \infty$ se reproducen las condiciones de Dirichlet. Este enfoque fue introducido en el contexto de líneas de mundo en [15] (por un mecanismo similar para condiciones de borde de Neumann, ver [16]). No obstante, las técnicas analíticas usuales con líneas de mundo requieren tratar los términos de interacción perturbativamente; tal procedimiento conduciría entonces a una expansión en potencias positivas de λ , y el límite $\lambda \rightarrow \infty$ está entonces mal definido.

En el contexto de paredes llanas infinitas, M. S. Marinov propuso un análisis diferente en términos de topología no trivial en el espacio de fases [17] pero éste no ha sido explorado en el formalismo línea de mundo. Un enfoque diferente que puede ser adecuado para una formulación de línea de mundo fue dada por I. Sökmen, quien resolvió la integral de caminos para una partícula dentro de un pozo rectangular infinito realizando una transformación canónica que lleva la partícula a la recta completa bajo un potencial de Rosen-Morse [18]. No obstante, esta formulación está fuertemente basada en una transformación particular que sólo es válida en este contexto unidimensional.

Una aplicación concreta del formalismo línea de mundo en presencia de un borde fue dada en [11–13], donde fue utilizado el método de las imágenes para computar los coeficientes de Seeley-DeWitt para un campo cuántico escalar en el semiespacio $(D+1)$ -dimensional limitado por un hiperplano infinito. No obstante, en estos ejemplos puede verse que sólo se sabe cómo aplicar el método de las imágenes en el caso de bordes planos³, por lo que para lidiar con casos más generales debe introducirse una técnica diferente. Otra aplicación para un campo cuántico escalar confinado en la bola $(D+1)$ -dimensional fue dada en [14], utilizando una transformación conforme para llevar su borde curvo (la esfera D -dimensional) al hiperplano infinito.

²En efecto, los bordes rígidos pueden ser modelados acoplando $\Phi(x)^2$ a una función delta con soporte sobre $\partial\mathcal{M}$ y tomando el límite de la constante de acoplamiento $\lambda \rightarrow \infty$. En este límite, la contribución de las líneas de mundo que intersecan al borde es suprimida exponencialmente.

³Nótese que aunque las cargas imagen son usadas para resolver la ecuación de Laplace con borde esférico, el mismo procedimiento no funciona para la ecuación de calor, que describe la evolución temporal de la partícula auxiliar.

El propósito del presente trabajo de diploma puede ser dividido en dos partes. Por un lado, se explica cómo desarrollar el formalismo línea de mundo para un campo escalar en variedades no singulares y sin borde. Luego, se aprovechan estos conocimientos para establecer un compendio de las generalidades de las técnicas empleadas en [11–14] para el estudio de un campo escalar en variedades no singulares y con borde.

La organización del presente trabajo se desarrolla entonces como sigue. En el capítulo 2 se establecen los prerrequisitos necesarios para enunciar el formalismo línea de mundo así como sus aplicaciones. Luego, en el capítulo 3 se enuncia dicho formalismo para el cálculo de acciones efectivas en el caso de variedades curvas sin singularidades ni bordes. Se muestra cómo proceder tanto si se decide trabajar en el espacio de configuraciones llano como en el espacio de fases curvo. Ambos espacios conducen a tener que calcular las funciones de Green asociadas al operador cuadrático de la acción de una partícula libre que describe líneas de mundo cerradas; se muestra entonces cómo calcular estas funciones de Green tanto con condiciones de contorno de Dirichlet como con condiciones periódicas para estas trayectorias. Al concluir, se mencionan diversas aplicaciones del formalismo en variedades sin borde, las cuales fueron presentados en las reuniones anuales de la Asociación Física Argentina de los años 2017 y 2018. Este trabajo se repite para el caso de variedades no singulares con borde en el capítulo 4, poniendo el foco en los casos conocidos presentes en [11–14]. Este estudio conduce a establecer nuevas herramientas tales como el método de las imágenes y el correcto modelado de las condiciones de contorno. Al final se aplican estos resultados a reproducir el cálculo de los coeficientes de Seeley-DeWitt en la bola $(D + 1)$ -dimensional que fueron publicados en [14] en coautoría junto a colaboradores externos y presentados en la reunión anual de la Asociación Física Argentina del año 2019. En el presente trabajo de diploma se agrega a los resultados de dicho artículo: el estudio de las condiciones de borde de Robin – además de las de Dirichlet y Neumann – y el uso de condiciones de contorno periódicas (en reemplazo de las condiciones de Dirichlet) para las trayectorias de la partícula auxiliar en el espacio de fases. Por último, en el capítulo 5 se presentan algunas consideraciones relacionadas con las aplicaciones de los resultados presentados. En particular, se discute con cierto detalle la posibilidad de implementar condiciones de borde más generales. Además, se comenta el eventual uso de la representación de línea de mundo discutida en el presente trabajo en computaciones numéricas aplicadas a teorías cuánticas de campos.

Capítulo 2

Mecánica cuántica y teoría cuántica de campos

En el presente capítulo se resumen varios temas sobre la mecánica cuántica y la teoría cuántica de campos. Como la mayoría de estos no suelen ser abarcados en los cursos de grado, se considera que merecen un capítulo especial para ser correctamente introducidos, en lugar de ser explicados a medida que se los necesite en el resto del trabajo de diploma. Respecto de la mecánica cuántica, se desarrolla su formulación mediante integrales de camino en espacios curvos; al hacerlo, se introducen contra-terminos que dejan invariante al hamiltoniano. En cuanto a la teoría cuántica de campos, se comentan con mínimo detalle varios conceptos como la acción efectiva, las anomalías y las funciones β .

2.1. Mecánica cuántica no relativista: formulación con integrales de camino en espacios curvos

En la presente sección se buscará desarrollar la mecánica cuántica en espacios curvos mediante integrales de camino. Para lograr tal cometido es necesario introducir una serie de formalidades que llevarán a una expresión final para las amplitudes de transición de un sistema. En primer lugar, se introduce la noción de orden de Weyl de operadores y se indica un importante teorema que lo concierne. Luego se define un operador hamiltoniano para un bosón en espacios curvos que resulta invariante ante transformaciones generales de coordenadas. Finalmente se utilizan ambos conceptos para hallar una expresión para las amplitudes de transición entre estados en mecánica cuántica; dicha expresión incluye contratérminos actuando como potenciales que garantizan la invarianza del hamiltoniano ante transformaciones de coordenadas.

2.1.1. Orden de Weyl

Por fines didácticos, se comienza explicando el orden Weyl para el caso unidimensional. La generalización al caso multidimensional resulta inmediata y es explicada en el último párrafo del presente apartado.

En primer lugar, considérese un monomio de potencias de \hat{x} y \hat{p} . Por simplicidad, supóngase que dicho monomio posee n veces al operador \hat{x} y m veces a \hat{p} , distribuidos en cualquier orden arbitrario. Se define la “forma simétrica” de dicho monomio como el promedio de todas las posibles permutaciones de los n factores \hat{x} y los m factores \hat{p} . Por ejemplo, las formas simétricas de $\hat{x}\hat{p}$ y $\hat{x}^2\hat{p}$ son $(\hat{x}\hat{p})_S = \frac{1}{2}(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x})$ y $(\hat{x}^2\hat{p})_S = \frac{1}{3}(\hat{x}^2\hat{p} + \hat{x}\hat{p}\hat{x} + \hat{p}\hat{x}^2)$ respectivamente. Nótese que, en general, un operador no es igual a su forma simétrica.

Ahora considérese al operador $\hat{O} \equiv O(\hat{x}, \hat{p})$ actuando sobre estados de un sistema cuántico. El mismo depende sólo del operador posición \hat{x} y del operador momento \hat{p} . Al desarrollar este operador en su serie de potencias, en general no se obtendrá un resultado simétrico, en el sentido de que los monomios que se obtienen de la serie de Taylor no pueden ser combinados entre si para construir formas simétricas; pero siempre es posible llevarlos a una forma en la que lo sean mediante el uso de la relación $[\hat{x}, \hat{p}] = i$. En otras palabras, existen coeficientes a_{nm} tales que siempre es posible escribir $\hat{O} = \hat{O}_W$, donde

$$\hat{O}_W = \sum_{n,m=1}^{\infty} a_{nm}(\hat{x}^n \hat{p}^m)_S. \quad (2.1)$$

Al operador \hat{O}_W se lo denomina “orden de Weyl” de \hat{O} . Por ejemplo, $\hat{x}\hat{p} = \frac{1}{2}(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}) + \frac{i}{2}$, por lo que resulta $(\hat{x}\hat{p})_W = (\hat{x}\hat{p})_S + \frac{i}{2}$. Análogamente, $(\hat{p}\hat{x})_W = (\hat{p}\hat{x})_S - \frac{i}{2}$. También puede verse que $\hat{x}^2\hat{p} = \frac{1}{3}(\hat{x}^2\hat{p} + \hat{x}\hat{p}\hat{x} + \hat{p}\hat{x}^2) + i\hat{x}$, de modo que resulta $(\hat{x}^2\hat{p})_W = (\hat{x}^2\hat{p})_S + i(\hat{x})_S$.

En general, trabajar con la forma simétrica de un operador es una tarea ardua, ya que para $n + m$ muy grande se requieren muchos términos. No obstante, N. McCoy probó en [19] las fórmulas

$$(\hat{x}^n \hat{p}^m)_S = \frac{1}{2^n} \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \hat{x}^{n-l} \hat{p}^m \hat{x}^l = \frac{1}{2^m} \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} \hat{p}^{m-l} \hat{x}^n \hat{p}^l, \quad (2.2)$$

que resumen notablemente la forma simétrica de cualquier monomio en dos posibles sumas. A partir de (2.1) y (2.2) se motiva la definición de la “función de Weyl” (cuyos argumentos son *c-numbers*) asociada al operador \hat{O} como

$$\begin{aligned}
O_W(x, p) &= \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{a_{nm}}{2^n} \sum_{l=1}^n \binom{n}{l} x^{n-l} p^m x^l = \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{a_{nm}}{2^m} \sum_{l=1}^m \binom{m}{l} p^{m-l} x^n p^l \\
&= \sum_{n,m=1}^{\infty} a_{nm} x^n p^m
\end{aligned}$$

(sólo si x y p son c -numbers) . (2.3)

Sean ahora $|x\rangle$ un autoestado de \hat{x} con autovalor x , y $|p\rangle$ un autoestado de \hat{p} con autovalor p (recuérdese que se está trabajando en un caso unidimensional). Si se normaliza a estos últimos autoestados mediante la identidad $1 = \int dp |p\rangle \langle p|$, entonces a partir de (2.1), de cualquiera de las dos sumas en (2.2) y de (2.3) resulta:

$$\langle x'| O_W(\hat{x}, \hat{p}) |x\rangle = \int dp \langle x'|p\rangle O_W\left(\frac{x+x'}{2}, p\right) \langle p|x\rangle . \quad (2.4)$$

La generalización al caso D -dimensional resulta sencilla. En primer lugar, debe considerarse que cada monomio en la expansión de \hat{O} – que por simplicidad será denominado “monomio D -dimensional” – puede ser convertido en un producto de “monomios unidimensionales” gracias a que \hat{x}^i y \hat{p}_j conmutan si $i \neq j$. Luego, la forma simétrica del monomio D -dimensional es simplemente el producto de la forma simétrica de cada uno de los monomios unidimensionales. A partir de esto, es posible definir una expresión análoga a (2.1) reemplazando $(\hat{x}^n \hat{p}^m)_S$ por la forma simétrica de los monomios D -dimensionales. A continuación, reutilizando las fórmulas de McCoy (2.2) para cada monomio unidimensional es posible definir correctamente la función de Weyl cuyos argumentos son c -numbers. Finalmente, todas estas herramientas permiten probar la versión D -dimensional de (2.4), a saber,

$$\langle x'| O_W(\hat{x}, \hat{p}) |x\rangle = \int d^D p \langle x'|p\rangle O_W\left(\frac{x+x'}{2}, p\right) \langle p|x\rangle \quad (2.5)$$

2.1.2. Hamiltoniano invariante para una partícula bosónica libre

Considérese una variedad D -dimensional \mathcal{M} con métrica de fondo $g_{ij}(x)$ e inversa $g^{ij}(x)$. Sea $g(x) = \det g_{ij}(x)$. Si se busca construir un hamiltoniano para una partícula bosónica libre en dicha variedad, la opción obvia parece ser $\hat{H}_0 \equiv H_0(\hat{x}, \hat{p}) = \frac{1}{2} g^{ij} p_i p_j$. No obstante, una teoría con este hamiltoniano sería dependiente del sistema de coordenadas. Efectivamente, es fácil ver que el mismo no es invariante ante las siguientes transformaciones generales infinitesimales de coordenadas:

$$x \longrightarrow x' = x + \epsilon \xi(x) , \quad (2.6)$$

donde $0 < \epsilon \ll 1$. En cambio, un hamiltoniano que sí es invariante ante las transformaciones (2.6) es

$$H_0(\hat{x}, \hat{p}) = \frac{1}{2m_c} \hat{g}^{-1/4} \hat{p}_i \hat{g}^{ij} \hat{g}^{1/2} \hat{p}_j \hat{g}^{-1/4}. \quad (2.7)$$

donde m_c es simplemente la “masa cinética”. A continuación, se probará que (2.7) es efectivamente invariante, y luego se hallará el orden de Weyl asociado a él.

Por simplicidad, considérese a los operadores \hat{x} y \hat{p} en la representación de Schrödinger, de modo que será posible eliminar el ‘sombbrero’ de los operadores de posición. Entonces el cambio de coordenadas (2.6) implica, a menor orden en ϵ ,

$$\delta x^i = x'^i - x^i = \epsilon \xi^i(x). \quad (2.8)$$

Además, el cambio del determinante de la métrica está dado por

$$g'(x') = g(x) \det^2 \left(\frac{\partial x}{\partial x'} \right). \quad (2.9)$$

Por otro lado, en espacios curvos el operador \hat{p} debe ser redefinido para que resulte hermítico. Se obtiene que el mismo es de la forma

$$\hat{p}_i = -i \left(\partial_i + \frac{1}{2} \frac{(\partial_i \sqrt{g})}{\sqrt{g}} \right) = -i \left(\partial_i + \frac{1}{4} (\partial_i \ln(g)) \right). \quad (2.10)$$

Luego, se podría esperar que el operador de momento transforme de acuerdo a la conocida regla tensorial $\hat{p}'_i = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \hat{p}_j \approx \hat{p}_i - \epsilon (\partial_i \xi^j) \hat{p}_j$. No obstante, es fácil ver que $(\partial_i \xi^j) \hat{p}_j$ no es hermítico, y por lo tanto \hat{p}'_i tampoco lo sería explícitamente. En cambio, $(\partial_i \xi^j) \hat{p}_j - \frac{i}{2} (\partial_i \partial_j \xi^j)$ sí es hermítico, y además resulta que

$$\left[\frac{\partial x^j}{\partial x'^i}, \hat{p}_j \right] \approx -i \epsilon (\partial_i \partial_j \xi^j). \quad (2.11)$$

Por lo tanto, una buena definición para la regla de transformación del operador momento que dé un resultado hermítico es

$$\hat{p}'_i = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \hat{p}_j - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial x^j}{\partial x'^i}, \hat{p}_j \right] = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial x^j}{\partial x'^i}, \hat{p}_j \right\}, \quad (2.12)$$

es decir, es necesario simetrizar la ley de transformación que se conoce del cálculo tensorial. Entonces

$$\delta \hat{p}_i = \hat{p}'_i - \hat{p}_i \approx -\frac{\epsilon}{2} \left\{ \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i}, \hat{p}_j \right\} = -\epsilon \left((\partial_i \xi^j) \hat{p}_j - \frac{i}{2} (\partial_i \partial_j \xi^j) \right). \quad (2.13)$$

Ahora nótese que a primer orden en ϵ , $\det \left(\frac{\partial x}{\partial x'} \right) \approx 1 - \epsilon \partial_i \xi^i$. Entonces

$$(g')^{-1/4} \hat{p}'_i (g')^{1/4} \approx \left(g^{-1/4} \hat{p}_j g^{1/4} \right) \left(\delta_i^j - \epsilon (\partial_i \xi^j) \right); \quad (2.14)$$

$$(g')^{1/4} \hat{p}'_i (g')^{-1/4} \approx \left(\delta_i^j - \epsilon (\partial_i \xi^j) \right) \left(g^{1/4} \hat{p}_j g^{-1/4} \right). \quad (2.15)$$

Finalmente, utilizando estas últimas dos ecuaciones junto con (2.7), se obtiene

$$\hat{H}'_0 \approx \frac{1}{2m_c} \left(g^{-1/4} \hat{p}_i g^{1/4} \right) g^{ij} \left(g^{1/4} \hat{p}_j g^{-1/4} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) = \hat{H}_0 + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (2.16)$$

lo cual prueba que el hamiltoniano libre (2.7) es invariante (a menor orden en ϵ) ante transformaciones del tipo (2.6).

Habiendo probado la invarianza de (2.7), queda ahora buscar su forma de Weyl. Permutando correctamente los operadores, se tiene

$$\begin{aligned} \hat{H}_0 &= \frac{1}{8m_c} (\hat{p}_i \hat{p}_j g^{ij} + 2\hat{p}_i g^{ij} \hat{p}_j + g^{ij} \hat{p}_i \hat{p}_j) \\ &+ \frac{1}{8m_c} (\partial_i \partial_j g^{ij}) + \frac{1}{8m_c} \left(\partial_i (g^{ij} \partial_j \ln g) \right) + \frac{1}{32m_c} g^{ij} (\partial_i \ln g) (\partial_j \ln g). \end{aligned} \quad (2.17)$$

El término en la penúltima fila de (2.17) se corresponde con la forma simétrica de la parte que contiene a los operadores de momento, mientras que los de la última fila son términos de curvatura (que se anulan para una métrica plana). Es conveniente escribir a los mismos en función de otras cantidades geométricas como los símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} g^{ij} (\partial_k g_{lj} + \partial_l g_{jk} - \partial_j g_{kl}) \quad (2.18)$$

o la curvatura escalar

$$R = g^{ij} (\partial_k \Gamma_{ij}^k - \partial_j \Gamma_{ki}^k + \Gamma_{kl}^k \Gamma_{ij}^l - \Gamma_{jl}^k \Gamma_{ik}^l). \quad (2.19)$$

Con este fin, puede utilizarse la fórmula de Jacobi para la derivada de un determinante y obtener la identidad $\partial_i g = g g^{jk} \partial_i g_{jk}$, que junto con (2.18) implican

$$\Gamma_{ij}^i = \frac{1}{2} \partial_j \ln g. \quad (2.20)$$

Por otro lado, derivando la relación $\delta_j^i = g^{ik} g_{kj}$ se obtiene

$$\partial_i g^{jk} = -g^{jl} g^{mk} (\partial_i g_{lm}), \quad (2.21)$$

y por definición de la conexión de Levi-Civita, se tiene también

$$\nabla_i g_{jk} = \partial_i g_{jk} - \Gamma_{ij}^l g_{kl} - \Gamma_{ik}^l g_{jl} = 0. \quad (2.22)$$

Aplicando las ecuaciones (2.18) a (2.22), se obtiene

$$(\partial_i \partial_j g^{ij}) + \left(\partial_i (g^{ij} \partial_j \ln g) \right) + \frac{1}{4} g^{ij} (\partial_i \ln g) (\partial_j \ln g) = -R + g^{ij} \Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^k, \quad (2.23)$$

y aplicando este resultado sobre (2.17), resulta que la forma de Weyl de (2.7) es

$$\hat{H}_{0W} = \frac{1}{8m_c} \left(\hat{p}_i \hat{p}_j g^{ij} + 2\hat{p}_i g^{ij} \hat{p}_j + g^{ij} \hat{p}_i \hat{p}_j \right) - \frac{1}{8m_c} \left(R - g^{ij} \Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^k \right) \quad (2.24)$$

2.1.3. Construcción *time slicing* en el espacio de fases

Considérese una partícula bosónica no relativista en una variedad D -dimensional \mathcal{M} sin borde, la cual interactúa con un potencial \hat{V} . En un dado sistema de coordenadas x , sea $g_{ij}(x)$ la métrica de fondo en \mathcal{M} , $g^{ij}(x)$ su inversa, y $g(x)$ su determinante. El sistema de coordenadas debe ser elegido de manera tal que el dominio de cada una de las coordenadas sea \mathbb{R} . Entonces, el hamiltoniano de dicha partícula puede ser escrito como

$$H(\hat{x}, \hat{p}) = H_0(\hat{x}, \hat{p}) + V(\hat{x}), \quad (2.25)$$

donde \hat{H}_0 viene dado por (2.7), cuyo orden de Weyl es (2.24). Según se prueba en la sección 2.1.2, \hat{H}_0 es invariante ante transformaciones generales de coordenadas, pero en general $V(\hat{x})$ sí puede variar.

Sean también $|x\rangle$ y $|p\rangle$ los autoestados de \hat{x} y \hat{p} respectivamente. Se opta por normalizar a los mismos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^D} d^D x |x\rangle \sqrt{g(x)} \langle x| = \mathbb{I} &\implies \langle x'|x\rangle = \frac{\delta^D(x-x')}{\sqrt{g(x)}}; \\ \int_{\mathbb{R}^D} d^D p |p\rangle \langle p| = \mathbb{I} &\implies \langle p'|p\rangle = \delta^D(p-p'). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Escribiendo la transformada de Fourier de la delta de momentos como $\delta^D(p-p') = \int \frac{d^D x}{(2\pi)^D} e^{i(p_i - p'_i)x^i}$, resulta que (2.26) lleva a la siguiente expresión para una onda plana:

$$\langle x|p\rangle = \frac{e^{ip_i x^i}}{(2\pi)^{D/2} g^{1/4}(x)}. \quad (2.27)$$

Ahora considérese al operador unitario de evolución temporal, que para un tiempo T está dado por

$$\hat{U}(T) = e^{-iT\hat{H}}, \quad (2.28)$$

pero por futura simplicidad se opta por realizar una rotación de Wick, cambiando T por $-iT$. Luego de esta rotación, el tiempo T recibe el nombre de “tiempo euclídeo”. Entonces, la amplitud de transición de la partícula para pasar de la configuración x a la configuración x' en un tiempo T está dada por $\langle x' | e^{-T\hat{H}} | x \rangle$.

Ahora, sea N un número entero muy grande y sea $\varepsilon = T/N$. Si en la amplitud de transición se inserta $N - 1$ veces la identidad (2.26) con autoestados de posición, se obtiene

$$\begin{aligned}
\langle x' | e^{-T\hat{H}} | x \rangle &= \langle x' | (e^{-\varepsilon\hat{H}})^N | x \rangle \\
&= \int d^D z_1 \dots d^D z_{N-1} \sqrt{g(z_1) \dots g(z_{N-1})} \langle x' | e^{-\varepsilon\hat{H}} | z_{N-1} \rangle \\
&\times \langle z_{N-1} | e^{-\varepsilon\hat{H}} | z_{N-2} \rangle \times \dots \times \langle z_1 | e^{-\varepsilon\hat{H}} | x \rangle \\
&= \int \frac{d^D z_1 \dots d^D z_{N-1}}{\sqrt{g(z_0)}} \prod_{a=1}^N \left(\sqrt{g(z_{a-1})} \langle z_a | e^{-\varepsilon\hat{H}} | z_{a-1} \rangle \right), \tag{2.29}
\end{aligned}$$

donde se ha definido $z_0 \equiv x$ y $z_N \equiv x'$ en el último paso. La interpretación de (2.29) es evidente: los puntos inicial y final permanecen fijos (por eso no se integra sobre ellos), mientras que los puntos intermedios de la trayectoria que sigue la partícula pueden tomar valores arbitrarios en la variedad (por eso sí se integra sobre ellos). Por consiguiente, (2.29) tiene en cuenta todos los posibles caminos que puede seguir la partícula en tanto sus configuraciones inicial y final estén dadas. Utilizando ahora (2.5), se obtiene

$$\begin{aligned}
\langle x' | e^{-T\hat{H}} | x \rangle &= \int \frac{d^D z_1 \dots d^D z_{N-1} d^D p_1 \dots d^D p_N}{\sqrt{g(z_0)}} \\
&\times \prod_{a=1}^N \left(\sqrt{g(z_{a-1})} \langle z_a | p_a \rangle \langle p_a | z_{a-1} \rangle \left(e^{-\varepsilon H} \right)_W \right), \tag{2.30}
\end{aligned}$$

donde $(e^{-\varepsilon H})_W$ debe ser evaluada en $(\frac{z_a+z_{a-1}}{2}, p_a)$. Nótese que esta última expresión ya no representa a la amplitud de transición en términos de operadores, sino que la representa en términos de funciones. Definiendo $\bar{z}_{a-1/2} = \frac{z_a+z_{a-1}}{2}$ y $\Delta z_{a-1/2} = z_a - z_{a-1}$, y utilizando (2.27), se obtiene

$$\langle x' | e^{-T\hat{H}} | x \rangle = \int \frac{d^D z_1 \dots d^D z_{N-1} d^D p_1 \dots d^D p_N}{(2\pi)^{ND} g^{1/4}(z_0) g^{1/4}(z_N)} \prod_{a=1}^N \left(e^{ip_a \Delta z_{a-1/2}} \left(e^{-\varepsilon H} \right)_W \right). \tag{2.31}$$

A continuación cabe realizarse la siguiente pregunta: ¿es posible reemplazar $(e^{-\varepsilon H})_W$ por $e^{-\varepsilon H_W(\bar{z}_{a-1/2}, p_a)}$? Generalmente la respuesta es no, y para concluir ello

basta con observar la diferencia en los desarrollos de ambas exponenciales:

$$(e^{-\varepsilon H})_W - e^{-\varepsilon H_W} = \frac{\varepsilon^2}{2} \left[(H^2)_W - (H_W)(H_W) \right] + \dots, \quad (2.32)$$

donde tanto $(H^2)_W$ como H_W están evaluados en $\bar{z}_{a-1/2}$ y p_a . La diferencia (2.32) puede parecer que es de orden ε^2 y que por lo tanto puede ser desestimada para $N \gg 1$. De ser esto así, puede reemplazarse el orden de Weyl de la exponencial por el exponente del orden de Weyl y utilizar el resultado (2.24). No obstante, esto no valdría si ocurre que (2.32) es de algún orden menor a ε^2 – por ejemplo, podría ocurrir que la dependencia con ε de las funciones p_a y z_a conduzcan a que $(H^2)_W - (H_W)(H_W)$ sea de orden ε^{-1} . Puede probarse (ver [10]) que la dependencia de p_a y z_a con ε conduce efectivamente a que $(H^2)_W - (H_W)(H_W)$ sea de orden ε^0 , concluyendo que sí es posible aproximar $(e^{-\varepsilon H})_W \approx e^{-\varepsilon H_W}$.

Antes de proceder, cabe realizar un breve comentario sobre el orden de Weyl. La ecuación (2.5) representa el teorema importante que le concierne, y establece que se puede reemplazar el operador de posición por el punto medio entre dos configuraciones específicas. A la hora de construir el formalismo de la mecánica cuántica utilizando *time slicing*, esto implica reemplazar el operador de posición en el hamiltoniano por el punto medio entre dos configuraciones intermedias sobre las cuales luego debe integrarse. Pero en todo esto, ¿cuál es la importancia de utilizar el orden de Weyl? La respuesta, es que lleva naturalmente a trabajar con el mencionado punto medio. Es gracias a que se evalúa a las funciones en dicho punto que se obtienen los propagadores que justifican aproximar el orden de Weyl del operador de evolución por la exponencial del orden de Weyl del hamiltoniano, simplificando notablemente la integral de caminos que resulta de esta construcción. Los términos de curvatura en (2.24) representan el ‘precio’ a pagar por semejante simplificación, ya que añaden un término extra que debe tenerse en cuenta en todos los cálculos perturbativos que se realicen. Dichos términos de curvatura, típicamente llamados por el nombre de “contratérminos”, pueden ser acoplados al potencial $V(x)$ para servir juntos como un potencial efectivo. Existe también otro motivo por el cual el punto medio es importante (y por ende, también lo es el orden de Weyl): cuando se trabaja con el grupo de simetría de gauge $U(1)$ del electromagnetismo, debe reemplazarse $\hat{p} \rightarrow \hat{p} - eA(\hat{x})$, donde e es la carga fundamental y $A(\hat{x})$ es el campo de gauge. Feynman demostró que, en la construcción *time slicing*, el hamiltoniano sólo es invariante de gauge si se reemplaza \hat{x} por el punto medio [20].

Ahora se retoma la ecuación (2.31) utilizando la aproximación $(e^{-\varepsilon H})_W \approx e^{-\varepsilon H_W}$:

$$\langle x' | e^{-T\hat{H}} | x \rangle = \int \frac{d^D z_1 \dots d^D z_{N-1} d^D p_1 \dots d^D p_N}{(2\pi)^{ND} g^{1/4}(z_0) g^{1/4}(z_N)} \prod_{a=1}^N e^{ip_a \cdot \Delta z_{a-1/2}} e^{-\varepsilon H_W(\bar{z}_{a-1/2}, p_a)}. \quad (2.33)$$

Se define la acción discreta como

$$S_{\text{dis}} \equiv \sum_{a=1}^N \varepsilon \left(-ip_a \frac{\Delta z_{a-1/2}}{\varepsilon} + H_W(\bar{z}_{a-1/2}, p_a) \right), \quad (2.34)$$

de modo que resulta

$$\langle x' | e^{-T\hat{H}} | x \rangle = \int \frac{d^D z_1 \dots d^D z_{N-1} d^D p_1 \dots d^D p_N}{(2\pi)^{ND} g^{1/4}(z_0) g^{1/4}(z_N)} e^{-S_{\text{dis}}}. \quad (2.35)$$

A continuación se toma el límite continuo $N \rightarrow \infty$ (o equivalentemente, $\varepsilon \rightarrow 0$). Este límite lleva a las siguientes identificaciones:

$$\begin{aligned} \varepsilon &\rightarrow dt, \\ N\varepsilon &\rightarrow T, \\ a\varepsilon &\rightarrow t, \\ \bar{z}_{a-1/2} &\rightarrow z(t), \\ \frac{\Delta z_{a-1/2}}{\varepsilon} &\rightarrow \dot{z}(t), \\ p_a &\rightarrow p(t). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Juntas, estas identificaciones implican

$$S_{\text{dis}} \rightarrow S[z, p] = \int_0^T dt \left(-ip\dot{z} + H_W(z, p) \right). \quad (2.37)$$

También se define la integral de caminos mediante la notación

$$\int \mathcal{D}z \mathcal{D}p \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \int \frac{d^D z_1 \dots d^D z_{N-1} d^D p_1 \dots d^D p_N}{(2\pi)^{ND}}. \quad (2.38)$$

Recordando que $z_0 \equiv x$ y $z_N \equiv x'$, resulta finalmente la siguiente expresión para la amplitud de transición a tiempo T entre una configuración inicial x y una configuración final x' :

$$\langle x' | e^{-T\hat{H}} | x \rangle = [g(x)g(x')]^{-1/4} \int \mathcal{D}z \mathcal{D}p e^{-S[z, p]}. \quad (2.39)$$

Sólo queda realizar un último paso para que la construcción quede lista, y es escribir a la acción $S[z, p]$ de una forma más explícita. Utilizando (2.24), se obtiene

$$S[z, p] = \int_0^T dt \left\{ -ip_i \dot{z}^i + \frac{1}{2m_c} g^{ij}(z) p_i p_j - \frac{1}{8m_c} \left(R - g^{ij} \Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^k \right) + V(z) \right\}, \quad (2.40)$$

donde los términos de curvatura son todos evaluados en z . A continuación, defínase el camino recto $r(t) = x + \frac{t}{T}(x' - x)$ que trivialmente satisface $r(0) = x$ y $r(T) =$

x' . Defínase también la perturbación $q(t) = z(t) - r(t)$ que trivialmente satisface $q(0) = q(T) = 0$. Entonces, integrar sobre todos los posibles caminos en $z(t)$ es equivalente a integrar sobre todos los caminos en $q(t)$, pero con la particularidad de que esta última variable satisface condiciones de contorno homogéneas. Luego, si se escribe $-ip_i\dot{z} = -\frac{i}{T}p_i(x' - x)^i - \frac{i}{2}p_i\dot{q}^i - \frac{i}{2}p_i\dot{q}^i$ y se integra esta última mitad por partes, resulta que las condiciones homogéneas anulan el término de borde. Por consiguiente, resulta

$$\langle x' | e^{-T\hat{H}} | x \rangle = [g(x)g(x')]^{-1/4} \int \mathcal{D}q\mathcal{D}p e^{-S[q,p]}. \quad (2.41)$$

$$S[q,p] = \int_0^T dt \left\{ \frac{1}{2} (p_i \ q^i) \begin{pmatrix} g^{ij}(x)/m_c & -i\delta_j^i \partial_t \\ i\delta_i^j \partial_t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_j \\ q^j \end{pmatrix} + H_{\text{int}}(q,p) \right\}. \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} H_{\text{int}}(q,p) &= \frac{1}{2m_c} \left[g^{ij} \left(x + \frac{t}{T}(x' - x) + q \right) - g^{ij}(x) \right] p_i p_j - \frac{i}{T} p_i (x' - x)^i \\ &\quad - \frac{1}{8m_c} \left[R \left(x + \frac{t}{T}(x' - x) + q \right) \right. \\ &\quad \left. - g^{ij} \left(x + \frac{t}{T}(x' - x) + q \right) \Gamma_{ik}^l \left(x + \frac{t}{T}(x' - x) + q \right) \Gamma_{jl}^k \left(x + \frac{t}{T}(x' - x) + q \right) \right] \\ &\quad + V \left(x + \frac{t}{T}(x' - x) + q \right). \end{aligned} \quad (2.43)$$

En esta última expresión, la primera línea del lado derecho de la igualdad representa perturbaciones del término cinético en torno al punto x , la segunda y tercera línea representan los contratérminos, y la cuarta línea representan al potencial original. Las ecuaciones (2.41), (2.42) y (2.43) son las tres ecuaciones que completan la construcción *time slicing* de la mecánica cuántica no relativista en términos de integrales de camino en el espacio de fases.

2.1.4. Construcción *time slicing* en el espacio de configuraciones

Vuélvanse a considerar las ecuaciones (2.34) y (2.35), donde

$$H_W(\bar{z}_{a-1/2}, p_a) = \frac{1}{2m_c} g^{ij} p_{a,i} p_{a,j} - \frac{1}{8m_c} \left(R - g^{ij} \Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^k \right) + V \quad (2.44)$$

y tanto V como los términos de curvatura deben ser evaluados en $\bar{z}_{a-1/2}$. Definiendo

$$V_{\text{ef}}(z) = V(z) - \frac{1}{8m_c} \left(R(z) - g^{ij}(z) \Gamma_{ik}^l(z) \Gamma_{jl}^k(z) \right) \quad (2.45)$$

resulta que se puede escribir a (2.34) como

$$\begin{aligned}
S_{\text{dis}} &= \sum_{a=1}^N \varepsilon \left(-ip_{a,i} \frac{\Delta z_{a-1/2}^i}{\varepsilon} + \frac{1}{2m_c} g^{ij}(\bar{z}_{a-1/2}) p_{a,i} p_{a,j} + V_{\text{ef}}(\bar{z}_{a-1/2}) \right) \\
&= \sum_{a=1}^N \varepsilon \left(\frac{1}{2m_c} g^{ij}(\bar{z}_{a-1/2}) \pi_{a,i} \pi_{a,j} + \frac{m_c}{2} g_{ij}(\bar{z}_{a-1/2}) \frac{\Delta z_{a-1/2}^i}{\varepsilon} \frac{\Delta z_{a-1/2}^j}{\varepsilon} + V_{\text{ef}}(\bar{z}_{a-1/2}) \right)
\end{aligned} \tag{2.46}$$

donde $\pi_{a,i} = p_{a,i} - im_c g_{ij}(\bar{z}_{a-1/2}) \frac{z_{a-1/2}^j}{\varepsilon}$. Esta misma definición implica $d^D p_a = d^D \pi_a$. Entonces las integrales respecto de p en (2.35) se convierten en

$$\begin{aligned}
\int d^D \pi_1 \dots d^D \pi_N \exp \left[- \sum_{a=1}^N \varepsilon \frac{1}{2m_c} g^{ij}(\bar{z}_{a-1/2}) \pi_{a,i} \pi_{a,j} \right] \\
= \left(\frac{2\pi m_c}{\varepsilon} \right)^{ND/2} \prod_{a=1}^N \sqrt{g(\bar{z}_{a-1/2})} .
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Este resultado convierte a (2.35) en

$$\langle x' | e^{-T\hat{H}} | x \rangle = \int \frac{d^D z_1 \dots d^D z_{N-1}}{(2\pi\varepsilon/m_c)^{ND/2} g^{1/4}(z_0) g^{1/4}(z_N)} \prod_{a=1}^N \sqrt{g(\bar{z}_{a-1/2})} e^{-S'_{\text{dis}}} , \tag{2.48}$$

donde se ha redefinido la acción discreta para que sea

$$S'_{\text{dis}} = \sum_{a=1}^N \varepsilon \left(\frac{m_c}{2} g_{ij}(\bar{z}_{a-1/2}) \frac{\Delta z_{a-1/2}^i}{\varepsilon} \frac{\Delta z_{a-1/2}^j}{\varepsilon} + V_{\text{ef}}(\bar{z}_{a-1/2}) \right) . \tag{2.49}$$

A continuación se toma el límite continuo $N \rightarrow \infty$ (o equivalentemente, $\varepsilon \rightarrow 0$). Este límite lleva nuevamente a las identificaciones (2.36), las cuales implican

$$S'_{\text{dis}} \rightarrow S[z] = \int_0^T dt \left(\frac{m_c}{2} g_{ij}(z) \dot{z}^i \dot{z}^j + V_{\text{ef}}(z) \right) . \tag{2.50}$$

También se define la integral de caminos mediante la notación

$$\int \mathcal{D}z \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{a=1}^N \sqrt{g(\bar{z}_{a-1/2})} \frac{d^D z_1 \dots d^D z_{N-1}}{(2\pi T/N m_c)^{D/2}} . \tag{2.51}$$

Recordando que $z_0 \equiv x$ y $z_N \equiv x'$, resulta finalmente la siguiente expresión para la amplitud de transición a tiempo T entre una configuración inicial x y una

configuración final x' :

$$\langle x' | e^{-T\hat{H}} | x \rangle = [g(x)g(x')]^{-1/4} \int \mathcal{D}z e^{-S[z]} . \quad (2.52)$$

Sólo queda realizar un último paso para que la construcción quede lista, y es escribir a la acción $S[z]$ de una forma más explícita. Al igual que se hizo en el espacio de fases, es conveniente escribir $z(t) = x + \frac{t}{T}(x' - x) + q(t)$. Entonces, utilizando (2.45) resulta

$$S[q] = \int_0^T dt \left\{ \frac{m_c}{2} g_{ij} \left(x + \frac{t}{T}(x' - x) + q \right) \left(\frac{(x' - x)^i}{T} + \dot{q}^i \right) \left(\frac{(x' - x)^j}{T} + \dot{q}^j \right) + V_{\text{ef}} \left(x + \frac{t}{T}(x' - x) + q \right) \right\} . \quad (2.53)$$

Al distribuir los cuatro términos de la primera línea, se encuentra que uno de ellos es proporcional a $g_{ij} \left(x + \frac{t}{T}(x' - x) + q \right) \dot{q}^i \dot{q}^j$. Sumando y restando $g_{ij}(x)$, se obtiene un término que es proporcional a $g_{ij}(x) \dot{q}^i \dot{q}^j$. Sobre este término es posible integrar por partes, y como el término de borde se anula (pues $q(0) = q(T) = 0$), se obtiene finalmente

$$\langle x' | e^{-T\hat{H}} | x \rangle = [g(x)g(x')]^{-1/4} \int \mathcal{D}q e^{-S[q]} , \quad (2.54)$$

$$S[q] = \int_0^T dt \left\{ -\frac{m_c}{2} \dot{q}^i g_{ij}(x) \partial_t^2 q^j + H_{\text{int}}(q, \dot{q}) \right\} , \quad (2.55)$$

$$\begin{aligned} H_{\text{int}}(q, \dot{q}) &= \frac{m_c}{2} \left[g_{ij} \left(x + \frac{t}{T}(x' - x) + q \right) - g_{ij}(x) \right] \dot{q}^i \dot{q}^j \\ &+ \frac{m_c}{2} g_{ij} \left(x + \frac{t}{T}(x' - x) + q \right) \left[\frac{2}{T} \dot{q}^i + \frac{1}{T^2} (x' - x)^i \right] (x' - x)^j \\ &- \frac{1}{8m_c} \left[R \left(x + \frac{t}{T}(x' - x) + q \right) \right. \\ &- \left. g^{ij} \left(x + \frac{t}{T}(x' - x) + q \right) \Gamma_{ik}^l \left(x + \frac{t}{T}(x' - x) + q \right) \Gamma_{jl}^k \left(x + \frac{t}{T}(x' - x) + q \right) \right] \\ &+ V \left(x + \frac{t}{T}(x' - x) + q \right) . \end{aligned} \quad (2.56)$$

En esta última expresión, la primera y segunda línea del lado derecho de la igualdad representan perturbaciones del término cinético en torno al punto x , la tercera y la cuarta línea representan los contratérminos, y la quinta línea representa al potencial original.

Las expresiones (2.54), (2.55) y (2.56) pueden parecer todas las ecuaciones que completan la construcción *time slicing* de la mecánica cuántica no relativista en términos de integrales de camino en el espacio de configuraciones. No obstante, aún queda un ingrediente por considerar. Si se observa la definición (2.51), puede notarse que la integral de caminos contiene una productoria de la medida evaluada en los puntos medios de los integrandos. Estos términos, en general, no son sencillos de tratar analíticamente; para poder lidiar con ellos, deben introducirse campos fantasma que, al integrarlos, den como resultado dicha medida¹. En el presente trabajo, estos campos *ghost* no serán introducidos, y por ende el estudio de las integrales de camino en espacios curvos será tratado únicamente en el espacio de fases – donde la productoria de la medida no aparece en la definición de la integral de caminos; ver (2.38) –. En cambio, los problemas en espacios llanos – donde la medida es simplemente igual a 1 – sí podrán ser tratados libremente en el espacio de configuraciones.

2.2. Elementos de teoría cuántica de campos en espacios curvos

En lo que queda del presente capítulo se introducirán varios conceptos relacionados con la teoría cuántica de campos. Se hará hincapié en la acción efectiva de una teoría con campo escalar (Klein-Gordon), pues representa la herramienta fundamental que diferencia una teoría clásica de campos escalares de una teoría cuántica. A partir de la acción efectiva se introducen también otros dos conceptos: anomalías y funciones β . A diferencia de lo realizado en la sección 2.1, aquí se mantendrán al mínimo las demostraciones y la mayoría de los teoremas se asumirán como válidos.

2.2.1. Función de partición y acción efectiva

Considérese un campo escalar real φ en una variedad espacio-temporal $(D + 1)$ -dimensional \mathcal{M} . Al igual que en la sección 2.1, se realiza una rotación de Wick $t \rightarrow -it$ para trabajar con un tiempo t euclídeo. De este modo, si \mathcal{M} fuese llana, existe un sistema de coordenadas donde su métrica es simplemente la matriz identidad. No obstante, en lugar de considerar una variedad llana, se considerará el caso general de una variedad curva. En un dado sistema de coordenadas x (con $x_0 = t$ la coordenada temporal) la métrica es entonces $g_{ij}(x)$, su inversa es $g^{ij}(x)$ y su determinante es $g(x)$.

A continuación considérese la densidad lagrangiana del campo de Klein-Gordon

¹Esta técnica, inspirada en los *ghost* de Faddeev-Popov, puede ser estudiada con detalle en [10].

en presencia de una densidad de potencial \mathcal{V} :

$$\mathcal{L}[\varphi] = -\frac{1}{2}g^{ij}(x)(\partial_i\varphi)(\partial_j\varphi) - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 - \mathcal{V}[\varphi]. \quad (2.57)$$

Es estándar introducir ahora la “densidad lagrangiana euclídea” mediante $\mathcal{L}_E = -\mathcal{L}$. A partir de este momento, en el presente trabajo se trabajará siempre con ésta densidad euclídea, por lo que no se escribirá el subíndice E para simplificar la notación. Entonces, en lugar de (2.57), se considerará la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L}[\varphi] = \frac{1}{2}g^{ij}(x)(\partial_i\varphi)(\partial_j\varphi) + \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + \mathcal{V}[\varphi]. \quad (2.58)$$

Se define también la lagrangiana con fuentes de acuerdo a

$$\mathcal{L}_J[\varphi] = \mathcal{L}[\varphi] + J(x)\varphi \quad (2.59)$$

donde a $J(x)$ se la denomina “campo fuente” y representa un campo externo en interacción local con el campo de Klein-Gordon. Sea H el hamiltoniano (no densidad hamiltoniana) correspondiente a la lagrangiana \mathcal{L} , y sea H_J el hamiltoniano correspondiente a \mathcal{L}_J . Entonces se define la función de partición mediante

$$Z[J] = \langle \Omega | e^{-TH_J} | \Omega \rangle \quad (2.60)$$

donde $|\Omega\rangle$ es el estado de vacío asociado a \mathcal{L} . Para un dado campo fuente, también se define al “campo clásico” φ_{cl} como un promedio del campo φ sobre todas las fluctuaciones posibles:

$$\varphi_{\text{cl}}(x) = \langle \Omega | \varphi(x) | \Omega \rangle_J \quad (2.61)$$

donde el subíndice J recuerda que $\varphi_{\text{cl}}(x)$ depende de $J(x)$. Otra definición importante es la del funcional $W[J]$ mediante

$$W[J] = -\ln Z[J]. \quad (2.62)$$

En este punto es conveniente definir la derivada funcional mediante

$$\frac{\delta}{\delta J(x)} J(x') = \delta^{D+1}(x' - x) \iff \frac{\delta}{\delta J(x)} \int d^{D+1}x' \sqrt{g(x')} J(x')\varphi(x') = \varphi(x) \sqrt{g(x)}. \quad (2.63)$$

Luego, utilizando las ecuaciones (2.60) hasta (2.62), es posible probar que la derivada funcional de $W[J]$ respecto de $J(x)$ es

$$\frac{\delta}{\delta J(x)} W[J] = -\varphi_{\text{cl}}(x) \sqrt{g(x)}. \quad (2.64)$$

Este resultado motiva a definir la transformada de Legendre de $W[J]$ como función

de φ_{cl} :

$$\Gamma[\varphi_{\text{cl}}] = -W[J] - \int d^{D+1}x \sqrt{g(x)} J(x) \varphi_{\text{cl}}(x). \quad (2.65)$$

La cantidad $\Gamma[\varphi_{\text{cl}}]$ recibe el nombre de “acción efectiva”. Utilizando (2.64), es evidente que satisface

$$\frac{\delta}{\delta\varphi_{\text{cl}}(x)} \Gamma[\varphi_{\text{cl}}] = -J(x) \sqrt{g(x)}. \quad (2.66)$$

Definiendo ahora a la “acción clásica” como

$$S[\varphi] = \int d^{D+1}x \sqrt{g(x)} \mathcal{L}[\varphi], \quad (2.67)$$

es posible probar la siguiente expansión a un *loop*:

$$\Gamma[\varphi_{\text{cl}}] = S[\varphi_{\text{cl}}] + \frac{1}{2} \ln \text{Det} \left(\frac{\delta^2 S}{\mathcal{E}^2} \right), \quad (2.68)$$

donde el operador

$$\delta_\varphi^2 S \equiv -\Delta + m^2 + \left[\frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial \varphi^2} \right]_{\varphi=\varphi_{\text{cl}}} \quad (2.69)$$

es denominado “operador de fluctuaciones cuánticas” y tiene unidades de energía al cuadrado, en tanto que \mathcal{E} es una “energía de referencia”. En lo sucesivo, se opta por establecer simplemente $\mathcal{E} = 1$. Por su parte, el operador laplaciano posee su forma usual en espacios curvos:

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i \left(\sqrt{g} g^{ij} \partial_j \right). \quad (2.70)$$

La notación para el operador de fluctuaciones cuánticas proviene del hecho de que la derivada funcional segunda de la acción S es igual al núcleo de dicho operador.

La ecuación (2.68) describe la manera en la cual se computa la acción efectiva, y representa el resultado más relevante de la presente sección. Puesto que la misma queda expresada en términos del determinante del operador de fluctuaciones cuánticas, el problema de hallar la acción efectiva es entonces equivalente al de calcular dicho determinante.

A continuación se indica un procedimiento para calcular un determinante funcional. Sea λ un autovalor del operador de fluctuaciones cuánticas. Es entonces válida la identidad

$$\ln \lambda = - \int_0^\infty \frac{dT}{T} \left(e^{-T\lambda} - e^{-T} \right). \quad (2.71)$$

A partir de esta expresión se motiva la regularización a tiempo propio de Schwinger,

según la cual se tiene

$$\Gamma[\varphi_{\text{cl}}] = S[\varphi_{\text{cl}}] - \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dT}{T} \text{Tr} e^{-T \delta_\varphi^2 S} \quad (2.72)$$

a menos de una constante aditiva infinita.

Si la variedad \mathcal{M} es suave y satisface condiciones de contorno de Dirichlet, Neumann o Robin (o alternativamente, si no tiene borde), entonces la expansión

$$\text{Tr} e^{-T \delta_\varphi^2 S} \sim (4\pi T)^{-\frac{D+1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\mathcal{M}) T^{\frac{n}{2}} \quad (2.73)$$

es válida para $T \rightarrow 0$. Al introducir (2.73) en (2.72), es evidente que los coeficientes $a_n(\mathcal{M})$ con $0 \leq n \leq D + 1$ proveen las divergencias a un *loop* de la acción efectiva. Asimismo, es evidente que los coeficientes $a_n(\mathcal{M})$ con $n > D + 1$ son los que contribuyen de manera finita a la acción efectiva a un *loop*.

Habiendo definido la acción efectiva, queda por explicar cuál es la motivación de definirla. A nivel clásico, el problema de hallar el valor de expectación del vacío de una teoría de campos consiste simplemente en encontrar la configuración del campo que minimiza la acción. No obstante, el cálculo perturbativo a varios *loops* puede alterar dicho resultado clásico; incluso puede desplazarlo en una cantidad potencialmente divergente que debe ser controlada mediante alguna técnica de renormalización. Entonces, ¿existe alguna funcional cuyo mínimo provea el valor de expectación del vacío incluso con correcciones cuánticas? La respuesta es sí, y dicha funcional es precisamente el “potencial efectivo”. Por ejemplo, para teorías donde los estados de vacío son invariantes ante transformaciones de Lorentz, φ_{cl} es una constante independiente de x , y el potencial efectivo adquiere simplemente la forma

$$\mathcal{V}_{\text{ef}}[\varphi_{\text{cl}}] = -V^{-1} \Gamma[\varphi_{\text{cl}}], \quad (2.74)$$

donde V es el volumen de la variedad espacio-temporal. Una vez encontrado el valor de expectación del vacío, se puede proceder de manera análoga al caso clásico para estudiar diversos fenómenos de la teoría. Se observa entonces que la acción efectiva es una herramienta poderosa para estudiar la versión cuántica de una teoría surgida a partir de un lagrangiano clásico. No obstante, los mismos efectos cuánticos dan lugar a otros fenómenos antes ausentes, como las anomalías, sobre las cuales se discute a continuación.

2.2.2. Anomalías. Anomalía conforme

Las anomalías son variaciones no nulas de la acción efectiva con respecto a las transformaciones de simetría que sí dejan invariante a la teoría clásica. En otras palabras, las anomalías son simetrías que sí cumple S pero no cumple Γ . Si bien

existen varias clases de anomalías, la presente sección introducirá muy brevemente una anomalía particular: la anomalía conforme.

La “anomalía conforme”, “anomalía de traza” o simplemente “anomalía de Weyl” consiste en la ruptura de la simetría conforme presente en una teoría de campos. Para entender en qué consiste la simetría conforme, considérese una transformación conforme de coordenadas, de la forma $x^i \rightarrow x'^i$ y tal que resulte

$$g'_{ij}(x') = e^{2\rho(x)} g_{ij}(x) . \quad (2.75)$$

Si esta transformación lleva a que se satisfaga la relación $S[\varphi(x')] = S[\varphi(x)]$, se dice que $x^i \rightarrow x'^i$ es una transformación de simetría de la teoría clásica, denominada “simetría conforme”.

Por otro lado, la polarización del vacío inducida por efectos cuánticos es descripta por el tensor de energía-impulso

$$\langle T_{ij} \rangle = \frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\delta \Gamma}{\delta g^{ij}} , \quad (2.76)$$

Combinando las ecuaciones (2.75) y (2.76), es posible probar que la variación de la acción efectiva para una transformación conforme está dada por

$$\delta \Gamma = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x \sqrt{g} \langle T_{ij} \rangle \delta g^{ij} = - \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x \sqrt{g} \langle T^i_i \rangle \delta \rho . \quad (2.77)$$

La ecuación (2.77) muestra que el cambio en la acción debido a una transformación conforme está determinado por la traza del tensor de energía-impulso. La suposición de que la teoría clásica respete una simetría conforme implica $\delta S = 0$, de modo que si se usara la acción clásica en lugar de la cuántica en la definición del tensor de energía-impulso resultaría que $\langle T^i_i \rangle = 0$. En el caso cuántico, en cambio, el tensor de energía-impulso generalmente no tiene traza nula, y por lo tanto sí se ve afectada la acción efectiva, rompiéndose la simetría conforme.

Por último, retomando la expansión (2.73), D. V. Vassilevich prueba en [21] que la integral de $\langle T^i_i \rangle$ está dada por

$$\int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x \sqrt{g} \langle T^i_i \rangle = (4\pi)^{-\frac{D+1}{2}} a_{D+1}(\mathcal{M}) , \quad (2.78)$$

lo cual implica que la anomalía conforme (integrada) está unívocamente determinada por el coeficiente $a_{D+1}(\mathcal{M})$.

2.2.3. Funciones β

Considérese nuevamente la ecuación (2.72). En general, la integral puede ser divergente en ambos extremos, de modo que es necesario introducir dos *cut-offs* que la regularicen. En lo siguiente, se hará incapié en lo que sucede con el extremo

inferior de integración.

Sea Λ una variable con unidades de energía, tal que la regularización de la integral en (2.72) es

$$\int_{\Lambda^{-2}}^{\infty} \frac{dT}{T} \text{Tr} e^{-T \delta_{\varphi}^2 S} . \quad (2.79)$$

Claramente, si $\Lambda \rightarrow \infty$ se recupera la integral presente en (2.72). Si dicho límite da como resultado una divergencia, se habla de una “divergencia ultravioleta” (altas energías). Físicamente, Λ representa simplemente una energía máxima finita, lo cual es razonable si los modos de altas energías se desacoplan de la física que rige las observaciones experimentales. Los efectos de estos modos se manifiestan en la dependencia de Γ con Λ .

A continuación, sea λ una constante de acoplamiento presente en el potencial $\mathcal{V}[\varphi_{\text{cl}}]$ (es decir, presente en la teoría clásica). La acción efectiva depende de Λ a través de λ . No obstante, la constante de acoplamiento ‘física’ λ_f (es decir, aquella que se corresponde con la teoría verdadera de la naturaleza, incluidos los órdenes cuánticos) no puede ser dependiente de la escala de energía con la que se trabaje en el laboratorio. En otras palabras, mientras que se le asigna a $\lambda \equiv \lambda(\Lambda)$ una dependencia con el *cut-off*, a $\lambda_f = \lim_{\hbar \rightarrow 0} \lambda$ se la establece como independiente de Λ .

Se define a continuación a la función $\beta(\lambda)$ como

$$\beta(\lambda) = \Lambda \frac{\partial \lambda}{\partial \Lambda} . \quad (2.80)$$

Por medio de la función $\beta(\lambda)$ pueden conocerse varios aspectos de la teoría cuántica. Por ejemplo, si $\beta(\lambda) > 0$ entonces la constante de acoplamiento λ se hace mayor cuanto mayor sea la energía Λ , es decir, la fuerza de interacción responsable del acoplamiento se hace mayor a mayores energías (distancias más cortas). Por el contrario, si $\beta(\lambda) < 0$ entonces la constante de acoplamiento se hace menor conforme se aumente la energía Λ , es decir, la fuerza de interacción tiende a cero a mayores energías (dando lugar al fenómeno de libertad asintótica).

Como comentario final, cabe destacar que el mismo análisis realizado sobre el extremo inferior de la integral en (2.72) puede ser realizado sobre el extremo superior. En tal caso, la posible divergencia existente se denomina “divergencia infrarroja”. Los resultados también pueden ser extendidos al caso de más de una constante de acoplamiento λ_i , dando lugar a un juego de funciones β_i . Otras funciones como las funciones γ y γ_m pueden ser introducidas de manera similar, pero no se discutirá sobre las mismas en el presente trabajo.

Capítulo 3

Formalismo línea de mundo (WLF) en espacios sin borde

Uno de los conceptos más útiles en teorías cuánticas de campos es el cálculo de la acción efectiva, a partir del cual pueden estudiarse muchos de los fenómenos intrínsecamente cuánticos de tales teorías (por ejemplo: amplitudes de dispersión, simetrías, anomalías y funciones β). Según se estudia en la sección 2.2.1, la acción efectiva depende de la traza de la exponencial del operador de fluctuaciones cuánticas. En el presente capítulo se explica cómo calcular dicha traza en un formalismo denominado “Formalismo línea de mundo” (o simplemente *WLF* por sus siglas en inglés). Dicho formalismo requiere de la introducción de una partícula ficticia cuya dinámica es descrita por la mecánica cuántica no relativista, de modo que será necesario utilizar todos los resultados relevantes en la sección 2.1.

En el presente capítulo se hace énfasis en el caso en el cual la variedad donde existe el campo escalar es una variedad curva pero sin borde. Se estudian primero las generalidades del formalismo, dejando para el final una serie de aplicaciones conocidas como son la termodinámica de un campo escalar libre en la variedad \mathcal{S}^1 , la función $\beta(\lambda)$ de la teoría con interacción $\lambda\varphi^4$, y la anomalía conforme de la teoría libre en la variedad \mathcal{S}^2 . Estas aplicaciones fueron presentadas en las reuniones anuales de la Asociación Física Argentina (A.F.A.) de los años 2017 y 2018.

3.1. La partícula ficticia en el WLF

Iniciéase recordando la expresión (2.72) para la acción efectiva a orden de un *loop*:

$$\Gamma[\varphi] = S[\varphi] - \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dT}{T} \text{Tr} e^{-T\delta_\varphi^2 S}. \quad (3.1)$$

El problema de calcular dicha acción se convierte entonces en el problema de calcular la traza presente en dicha ecuación. El procedimiento de cálculo que propone el WLF consiste en suponer que existe una partícula ficticia cuya dinámica es descrita

dentro del formalismo de la mecánica cuántica no relativista por el hamiltoniano

$$\hat{H} = \delta_\varphi^2 S . \quad (3.2)$$

Al hacer esta asignación, el problema de calcular la traza presente en (3.1), que es un problema en teoría cuántica de campos, se convierte implícitamente en un problema de mecánica cuántica. Concretamente, se convierte en el problema de calcular la traza del operador de evolución a tiempo T asociado con \hat{H} , lo cual en el espacio de fases puede realizarse aplicando la ecuación (2.41), o bien en el espacio de configuraciones aplicando (2.54):

$$\begin{aligned} \text{Tr } e^{-T\hat{H}} &= \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x \sqrt{g(x)} \langle x | e^{-T\hat{H}} | x \rangle \\ &= \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x \int \mathcal{D}q \mathcal{D}p e^{-S[q,p]} = \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x \int \mathcal{D}q e^{-S[q]} , \end{aligned} \quad (3.3)$$

Para poder resolver la ecuación (3.3) debe hallarse la expresión correcta para $S[q, p]$ si se trabaja en el espacio de fases, o de $S[q]$ si se trabaja en el espacio de configuraciones. Para ello, vuélvase a la ecuación (3.2) donde el operador de fluctuaciones cuánticas está dado por (2.69):

$$\delta_\varphi^2 S = -\Delta + m^2 + \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial \varphi^2} . \quad (3.4)$$

Identificando naturalmente al operador $-\Delta$ con el cuadrado del operador momento $g^{ij}(x)\hat{p}_i\hat{p}_j$, se obtiene el hamiltoniano

$$\hat{H} = g^{ij}(x)\hat{p}_i\hat{p}_j + m^2 + \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial \varphi^2} . \quad (3.5)$$

Los tres términos presentes del lado derecho en la última ecuación tienen una interpretación evidente: el primero es simplemente un término cinético con una masa cinética $m_c = 1/2$, y los dos términos restantes son potenciales (el primero de los cuales se corresponde con un potencial constante). Se puede definir ahora el hamiltoniano de masa cero como $\hat{H}' = \hat{H} - m^2$, de manera que la primera línea de la ecuación (3.3) se convierte en

$$\text{Tr } e^{-T\hat{H}} = e^{-Tm^2} \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x \sqrt{g(x)} \langle x | e^{-T\hat{H}'} | x \rangle . \quad (3.6)$$

Esta última igualdad permite ver que es conveniente definir $S[q, p]$ y $S[q]$ utilizando \hat{H}' en lugar de \hat{H} . Si se trabaja en el espacio de fases, las ecuaciones (2.42) y

(2.43) con $x' = x$ permiten escribir

$$S[q, p] = \int_0^T dt \left\{ \frac{1}{2} (p_i \ q^i) \begin{pmatrix} 2g^{ij}(x) & -i\delta_j^i \partial_t \\ i\delta_i^j \partial_t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_j \\ q^j \end{pmatrix} + H_{\text{int}}(q, p) \right\}, \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} H_{\text{int}}(q, p) &= [g^{ij}(x+q) - g^{ij}(x)] p_i p_j \\ &\quad - \frac{1}{4} [R(x+q) - g^{ij}(x+q) \Gamma_{ik}^l(x+q) \Gamma_{jl}^k(x+q)] + \left[\frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial \varphi^2} \right]_{\varphi=\varphi_{\text{cl}}(x+q)}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

En cambio, si se trabaja en el espacio de configuraciones, las ecuaciones (2.55) y (2.56) con $x' = x$ permiten escribir

$$S[q] = \int_0^T dt \left\{ -\frac{1}{4} q^i g_{ij}(x) \partial_t^2 q^j + H_{\text{int}}(q, \dot{q}) \right\}, \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} H_{\text{int}}(q, \dot{q}) &= \frac{1}{4} [g_{ij}(x+q) - g_{ij}(x)] \dot{q}^i \dot{q}^j \\ &\quad - \frac{1}{4} [R(x+q) - g^{ij}(x+q) \Gamma_{ik}^l(x+q) \Gamma_{jl}^k(x+q)] + \left[\frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial \varphi^2} \right]_{\varphi=\varphi_{\text{cl}}(x+q)}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

No obstante, teniendo en cuenta los comentarios al final de la sección 2.1.4, se estudiará en el presente trabajo al espacio de configuraciones sólo en el caso de espacios llanos – con $g_{ij}(x) = \delta_{ij}$ –. Teniendo esto en cuenta, las ecuaciones (3.9) y (3.10) se convierten en

$$S[q] = \int_0^T dt \left\{ -\frac{1}{4} \delta_{ij} q^i \partial_t^2 q^j + H_{\text{int}}(q) \right\}, \quad (3.11)$$

$$H_{\text{int}}(q) = \left[\frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial \varphi^2} \right]_{\varphi=\varphi_{\text{cl}}(x+q)}. \quad (3.12)$$

Entonces, si en lugar de utilizar (3.3) se utiliza (3.6), resulta

$$\begin{aligned} \text{Tr } e^{-T\hat{H}} &= e^{-Tm^2} \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x \int \mathcal{D}q \mathcal{D}p e^{-S[q,p]} \\ &= e^{-Tm^2} \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x \int \mathcal{D}q e^{-S[q]}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Antes de proceder más con el formalismo, caben destacar dos detalles importantes. El primero concierne a las ecuaciones (3.7) y (3.11). Las integrales temporales

allí presentes no se realizan respecto de la coordenada x_0 o q_0 , sino respecto de un tiempo t sin relación con las coordenadas del espacio-tiempo. En otras palabras, la partícula ficticia realiza una trayectoria cerrada en $D + 1$ dimensiones espaciales en el intervalo temporal $0 \leq t \leq T$, donde el tiempo t de la partícula no está relacionado con x_i o con q_i (en consistencia con la mecánica no relativista), salvo por el hecho de que las coordenadas q_i son funciones de t .

El segundo detalle importante a destacar concierne a las bases del propio formalismo línea de mundo, concretamente a la ecuación (3.2). Recordando que el problema físico que se está estudiando es un problema en el marco de la teoría cuántica de campos y no un problema en el marco de la mecánica cuántica, entonces (3.2) no es más que una igualdad formal, es decir, un mero ‘artilugio matemático’. En ningún punto se pretende resolver un problema físico en el marco de la mecánica cuántica, sino que simplemente se plantea un problema ficticio (el de la dinámica de la partícula ficticia) como herramienta para resolver el verdadero problema que se está estudiando. Esta técnica recuerda los diversos ‘trucos’ que existen para estudiar varios problemas equivalentes entre sí, presentes en diversas áreas de la física, como es el caso de modelos de dinámica de fluidos que se pueden analizar en el marco del electromagnetismo y viceversa. Las ecuaciones (3.8) y (3.12) proveen una obvia pista de que el problema ficticio de mecánica cuántica que se plantea en realidad proviene de un problema de teoría cuántica de campos, pues dichos potenciales efectivos (que también se denominan “hamiltonianos de interacción”) dependen del campo clásico original $\varphi_{\text{cl}}(x + q)$ a través de su último término.

El siguiente paso consiste en resolver la integral de caminos presente en (3.13), ya sea en el espacio de fases o en el de configuraciones. El proceso de resolución consiste en realizar una expansión perturbativa respecto de H_{int} . Para ello, se define la acción libre (donde el término ‘libre’ aplica a la partícula ficticia, y no al campo original) como

$$S_0[q, p] = S[q, p] - \int_0^T dt H_{\text{int}}(q, p) = \frac{1}{2} \int_0^T dt \begin{pmatrix} p_i & q^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2g^{ij}(x) & -i\delta_j^i \partial_t \\ i\delta_i^j \partial_t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_j \\ q^j \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

$$S_0[q] = S[q] - \int_0^T dt H_{\text{int}}(q, \dot{q}) = -\frac{1}{4} \delta_{ij} \int_0^T dt q^i \partial_t^2 q^j. \quad (3.15)$$

Entonces la expansión perturbativa de la integral de caminos en el espacio de fases

toma la forma

$$\int \mathcal{D}q \mathcal{D}p e^{-S[q,p]} = \int \mathcal{D}q \mathcal{D}p e^{-S_0[q,p]} \left\{ 1 - \int_0^T dt H_{\text{int}}(q(t), p(t)) + \int_0^T dt \int_0^t dt' H_{\text{int}}(q(t), p(t)) H_{\text{int}}(q(t'), p(t')) + \dots \right\}. \quad (3.16)$$

Análogamente, la expansión perturbativa en el espacio de configuraciones llano es

$$\int \mathcal{D}q e^{-S[q]} = \int \mathcal{D}q e^{-S_0[q]} \left\{ 1 - \int_0^T dt H_{\text{int}}(q(t)) + \int_0^T dt \int_0^t dt' H_{\text{int}}(q(t)) H_{\text{int}}(q(t')) + \dots \right\}. \quad (3.17)$$

A continuación se intercambian de orden las integrales temporales y de caminos. Como resultado, en el espacio de fases se obtienen diversas integrales de camino (típicamente denominadas como “valores medios”) de la forma

$$\langle F[q, p] \rangle \equiv \int \mathcal{D}q \mathcal{D}p e^{-S_0[q,p]} F[q, p], \quad (3.18)$$

mientras que en el espacio de configuraciones las integrales son de la forma

$$\langle F[q, \dot{q}] \rangle \equiv \int \mathcal{D}q e^{-S_0[q]} F[q, \dot{q}]. \quad (3.19)$$

En las dos últimas integrales, F es alguna función de sus argumentos, donde los mismos pueden estar evaluados en diferentes tiempos (por ejemplo, algunas funciones pueden estar evaluadas en t y otras en t' , donde las mismas provienen del término cuadrático en H_{int}). En la siguientes secciones se muestra cómo resolver tales integrales de camino.

3.2. Funcional generatriz en el espacio de configuraciones llano

En la presente sección se explica cómo resolver las integrales de camino de la forma (3.19), es decir, cuando se trabaja en el espacio de configuraciones. Teniendo en cuenta los comentarios al final de la sección 2.1.4, se limitará el análisis al caso llano, con métrica $g_{ij}(x) = \delta_{ij}$. Como se verá en la sección 3.3, algunas herramientas presentadas pueden extenderse a integrales de la forma (3.18), es decir, cuando se trabaja en el espacio de fases curvo.

Se define la “funcional generatriz” (también llamada “función de partición”) como

$$Z[j] \equiv \langle e^{i \int_0^T dt j_i q^i} \rangle = \int \mathcal{D}q e^{-S_0[q]} e^{i \int_0^T dt j_i q^i} \quad (3.20)$$

donde j_i es denominado “campo fuente”, y es función de t . Con esta definición, es inmediato calcular múltiples valores medios. Por ejemplo, para una única coordenada q , es inmediato notar que $\forall n_1, \dots, n_a \in \mathbb{N}_0$ se tiene

$$\langle q(t_1)^{n_1} \dots q(t_a)^{n_a} \rangle = (-i)^{n_1 + \dots + n_a} \frac{\delta^{n_1 + \dots + n_a}}{\delta^{n_1} j(t_1) \dots \delta^{n_a} j(t_a)} Z[j] \Big|_{j=0} . \quad (3.21)$$

Otro valor medio importante es el valor medio de 1:

$$\langle 1 \rangle = Z[0] = \int \mathcal{D}q e^{-S_0[q]} . \quad (3.22)$$

Otros posibles valores medios que se pueden calcular con la funcional generatriz incluyen el de la exponencial de $q^i(t_1)$:

$$\langle e^{i\omega_i q^i(t_1)} \rangle = Z[j_i = \omega_i \delta(t_1)] . \quad (3.23)$$

donde ω_i son constantes. Dicho valor medio es útil cuando se desea calcular el valor medio de las deltas de Dirac o de las funciones de Heaviside.

A continuación, considérese el exponente del lado derecho de la ecuación (3.20), que puede ser escrito como

$$-S_0[q] + i \int_0^T dt j_i q^i = - \int_0^T dt \left\{ -\frac{1}{4} \delta_{ij} q^i \partial_t^2 q^j - i j_i q^i \right\} . \quad (3.24)$$

Se define entonces el operador

$$\hat{D}_{ij} \equiv -\frac{1}{2} \delta_{ij} \partial_t^2 , \quad (3.25)$$

de modo que (3.24) toma la forma

$$-S_0[q] + i \int_0^T dt j_i q^i = -S_0[q^i - i j_n (\hat{D}^{-1})^{ni}] - \frac{1}{2} \int_0^T dt j_i (\hat{D}^{-1})^{ij} j_j . \quad (3.26)$$

Por lo tanto, (3.20) se puede escribir como

$$Z[j] = e^{-\frac{1}{2} \int_0^T dt j_i (\hat{D}^{-1})^{ij} j_j} \int \mathcal{D}q e^{-S_0[q^i - i j_n (\hat{D}^{-1})^{ni}]} , \quad (3.27)$$

donde $(\hat{D}^{-1})^{ij}$ es el operador inverso de \hat{D}_{ij} . Luego, el cambio $q^i = q^i - i j_n (\hat{D}^{-1})^{ni}$ deja invariante la medida de integración, es decir, $\mathcal{D}q' = \mathcal{D}q$. Por lo tanto, el lado

derecho de (3.27) adquiere una forma mucho más simple, resultando

$$Z[j] = e^{-\frac{1}{2} \int_0^T dt j_i (\hat{D}^{-1})^{ij} j_j} \langle 1 \rangle . \quad (3.28)$$

Para obtener la forma final de la funcional generatriz, resta encontrar una forma explícita de $(\hat{D}^{-1})^{ij}$. La forma más sencilla de obtenerla es escribiendo

$$(\hat{D}^{-1})^{ij} f = 2\delta^{ij} \int_0^T dt' G(t, t') f(t) , \quad (3.29)$$

donde $f(t)$ es simplemente una función de prueba y la función de Green $G(t, t')$ satisface

$$-\partial_t^2 G(t, t') = \delta(t - t') - \sum q_{zm}(t) q_{zm}(t') . \quad (3.30)$$

En esta última expresión, $q_{zm}(t) = at + b \neq 0$ son los modos cero del operador $-\partial_t^2$ con sus condiciones de contorno. Se eligen a y b de manera que dichos modos cero se hallen normalizados según $\int_0^T dt q_{zm}(t)^2 = 1$. Resulta entonces

$$Z[j] = \exp \left\{ -\delta^{ij} \int_0^T dt \int_0^T dt' j_i(t) j_j(t') G(t, t') \right\} \langle 1 \rangle . \quad (3.31)$$

Sólo queda entonces por hallar la función de Green $G(t, t')$ para obtener la expresión final de la funcional generatriz. En las dos subsecciones siguientes se la halla para dos condiciones de contorno diferentes: de Dirichlet y periódicas.

3.2.1. Función de Green con condiciones de Dirichlet

De acuerdo a lo establecido en la sección 2.1.3, las coordenadas q satisfacen las condiciones de Dirichlet homogéneas $q^i(0) = q^i(T) = 0$. Estas condiciones (que no conducen a ningún modo cero) naturalmente también forman parte del operador $(\hat{D}^{-1})^{ij}$, y en consecuencia de la función de Green:

$$G(0, t') = G(T, t') = 0 . \quad (3.32)$$

Entonces tómesese la ecuación (3.30) sin modos cero:

$$-\partial_t^2 G(t, t') = \delta(t - t') . \quad (3.33)$$

A continuación, intégresela dos veces respecto a t y utilícense las condiciones (3.32) para determinar las constantes de integración. El resultado final es simplemente

$$G(t, t') = -\frac{1}{2}|t - t'| + \frac{1}{2}(t + t') - \frac{tt'}{T} , \quad (3.34)$$

que claramente satisface $G(t, t') = G(t', t)$.

3.2.2. Función de Green con condiciones periódicas

Según se ha estudiado hasta aquí, el cálculo de los elementos de traza del operador de evolución de la partícula ficticia implica integrar sobre trayectorias cerradas que inician y terminan en todos los posibles puntos x de la variedad. Recordando lo visto en la sección 2.1.3, esto se consigue escribiendo a los caminos como $z(t) = x + q(t)$ e imponiendo que las perturbaciones q satisfagan $q(0) = q(T) = 0$. Luego, integrando explícitamente sobre x (es decir, calculando la traza) se obtiene el resultado deseado. Tal procedimiento ha llevado a construir la funcional generatriz, la cual depende de la función de Green (3.34). A menos del valor medio $\langle 1 \rangle$, esto permite conocer con exactitud la funcional generatriz, lo cual permite proceder con el formalismo sin mayores inconvenientes. No obstante, la separación $z(t) = x + q(t)$ no es la única que permite calcular la traza del operador de evolución. Otra posibilidad se analiza a continuación.

Considérese otra separación de la forma $z(t) = x_{CM} + s(t)$, donde esta vez x_{CM} no es necesariamente el punto inicial y final de las trayectorias consideradas, sino un punto arbitrario de la variedad (el subíndice CM se explicará más adelante). Entonces el cálculo de la traza sigue siendo el mismo que antes: se calculan primero las integrales de camino, y luego se integra explícitamente sobre x_{CM} . No obstante, esta separación ya no implica $s(0) = s(T) = 0$. Por lo tanto, con esta nueva separación, nada cambia en el desarrollo hasta aquí realizado, excepto por la función de Green (3.34).

Para conocer la función de Green asociada con esta nueva separación, deben conocerse las condiciones de contorno que satisface la perturbación $s(t)$. Trivialmente, la condición de que el camino sea cerrado implica

$$s(0) = s(T) . \quad (3.35)$$

Obviamente, se necesita de otra condición más. Para elegirla, se considerará que todas las trayectorias son derivables excepto tal vez en una colección numerable de puntos. Esto quiere decir que existe al menos un punto para toda trayectoria en la cual la misma es derivable. Eligiendo uno de tales puntos como el inicial/final, resulta entonces la otra condición periódica

$$\dot{s}(0) = \dot{s}(T) . \quad (3.36)$$

Estas condiciones periódicas llevan a que la función de Green satisfaga las condiciones

$$\begin{aligned} G(0, t') &= G(T, t') , \\ \bullet G(0, t') &= \bullet G(T, t') . \end{aligned} \quad (3.37)$$

La notación $\bullet G$ implica una derivada respecto de la primera componente (asimismo,

G^\bullet implica una derivada respecto de la segunda componente).

Ahora bien, nótese que con las condiciones periódicas surge un (único) modo cero $q_{zm}(t) = 1/\sqrt{T}$. Por lo tanto, la ecuación que satisface la función de Green es

$$-\partial_t^2 G(t, t') = \delta(t - t') - \frac{1}{T} . \quad (3.38)$$

Integrando dos veces respecto de t y utilizando la primera de las condiciones (3.37), resulta

$$G(t, t') = -\frac{1}{2}|t - t'| + \frac{(t - t')^2}{2T} + c(t') , \quad (3.39)$$

donde $c(t')$ es una función que sólo depende de t' . Dicha función debería de poder determinarse utilizando la segunda de las condiciones (3.37), pero es inmediato ver que esto no funciona, por lo que se necesita de otra condición más. Ahora bien, ¿de qué manera puede elegirse otra condición que puedan satisfacer las trayectorias? La respuesta es que tal otra condición depende de la elección de x_{CM} . En el caso en el cual x_{CM} es el punto inicial y final de los caminos se llega a las condiciones de Dirichlet antes mencionadas, pero una elección distinta lleva a otras condiciones. Elíjase entonces a x_{CM} como el “centro geométrico” de la trayectoria (en la literatura, también se denomina a tal punto como “centro de masas”, y de allí el subíndice CM). En otras palabras,

$$x_{CM} = \frac{1}{T} \int_0^T dt z(t) , \quad (3.40)$$

y por lo tanto

$$\int_0^T dt s(t) = 0 . \quad (3.41)$$

Esta condición se traduce sobre la función de Green como

$$\int_0^T dt G(t, t') = 0 , \quad (3.42)$$

lo que implica finalmente

$$G(t, t') = -\frac{1}{2}|t - t'| + \frac{(t - t')^2}{2T} + \frac{T}{12} , \quad (3.43)$$

que claramente satisface $G(t, t') = G(t', t)$. Además nótese que a diferencia de la función de Green (3.34) con condiciones de Dirichlet, la función de Green (3.43) satisface $G(t, t') \equiv G(t - t')$. Esta última propiedad de invarianza traslacional es sumamente útil para simplificar algunos de los cálculos que pueden aparecer al resolver las integrales de caminos, y representa una ventaja al trabajar con trayectorias que satisfacen condiciones periódicas.

En adelante, cada vez que se trabaje con las presentes condiciones, se realizarán

por simplicidad los cambios de notación $x_{CM} \rightarrow x$ y $s(t) \rightarrow q(t)$, y de este modo volver a la notación antes usada. No obstante, cuando ello ocurra debe recordarse que x representa el centro geométrico de las trayectorias, y no el punto inicial como cuando se trabaja con condiciones homogéneas de Dirichlet. Salvo que no sea necesario, siempre se especificarán las condiciones con las cuales se está trabajando.

3.2.3. Valor medio $\langle 1 \rangle$

Habiendo calculado la función de Green tanto con condiciones homogéneas de Dirichlet como con condiciones periódicas, la funcional generatriz (3.31) está casi completa. Sólo resta un último paso: determinar $\langle 1 \rangle$. Para tal propósito se utiliza la ecuación (3.22):

$$\langle 1 \rangle = \int \mathcal{D}q e^{-S_0[q]} = \int \mathcal{D}q \exp \left\{ -\frac{1}{4} \delta_{ij} \int_0^T dt \dot{q}^i \dot{q}^j \right\}, \quad (3.44)$$

donde debe recordarse que los caminos inician y terminan en el mismo punto $q = q_0$ (con $q_0 = 0$ para las condiciones de Dirichlet). Esta ecuación tiene una sencilla interpretación si se la compara con (2.55) y (2.56): claramente, el valor medio de 1 puede ser interpretado como la amplitud de transición de una partícula con $H_{\text{int}} = 0$. Esto es equivalente a decir que la partícula es libre (porque $V = 0$).

El problema entonces consiste en calcular la integral de caminos de lado derecho de (3.44). El procedimiento para tal cálculo es completamente ‘rústico’. En primer lugar, es necesario deshacer el límite continuo utilizando las ecuaciones (2.49) a (2.51) (con $m_c = 1/2$):

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{D}q \exp \left\{ -\frac{1}{4} \delta_{ij} \int_0^T dt \dot{q}^i \dot{q}^j \right\} \\ & \equiv \int \frac{d^{D+1}q_1 \dots d^{D+1}q_{N-1}}{(4\pi T/N)^{N(D+1)/2}} \exp \left\{ -\frac{\varepsilon}{4} \sum_{a=1}^N \delta_{ij} \frac{\Delta q_{a-1/2}^i}{\varepsilon} \frac{\Delta q_{a-1/2}^j}{\varepsilon} \right\} \\ & = \int \frac{d^{D+1}q_1 \dots d^{D+1}q_{N-1}}{(4\pi T/N)^{N(D+1)/2}} \prod_{a=1}^N \exp \left\{ -\frac{N}{4T} \delta_{ij} \Delta q_{a-1/2}^i \Delta q_{a-1/2}^j \right\}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Si bien la integral anterior debe realizarse desde q_0 hasta $q_N = q_0$ para obtener $\langle 1 \rangle$, se procederá de manera ligeramente más general, comenzando y terminando en posiciones q_0 y q_N arbitrarias.

Luego, para un índice i fijo vale que

$$\begin{pmatrix} \Delta q_{1/2}^i \\ \Delta q_{3/2}^i \\ \Delta q_{5/2}^i \\ \vdots \\ \Delta q_{N-5/2}^i \\ \Delta q_{N-3/2}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1^i - q_0^i \\ q_2^i - q_1^i \\ q_3^i - q_2^i \\ \vdots \\ q_{N-2}^i - q_{N-3}^i \\ q_{N-1}^i - q_{N-2}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1^i \\ q_2^i \\ q_3^i \\ \vdots \\ q_{N-2}^i \\ q_{N-1}^i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -q_0^i \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.46)$$

La matriz cuadrada anterior es la matriz jacobiana de la transformación que permite pasar de las coordenadas q_a a las coordenadas $s_a \equiv \Delta q_{a-1/2}$. Como dicha matriz es triangular inferior y todos los elementos de la diagonal son iguales a 1, resulta

$$d^{D+1}q_1 \dots d^{D+1}q_{N-1} = d^{D+1}s_1 \dots d^{D+1}s_{N-1}. \quad (3.47)$$

Además, es inmediato notar que también vale

$$s_N^i \equiv \Delta q_{N-1/2}^i = q_N^i - q_{N-1}^i = (q_N^i - q_0^i) - \sum_{a=1}^{N-1} s_a^i. \quad (3.48)$$

Con estas sustituciones, la integral del lado derecho de (3.45) se convierte en

$$\begin{aligned} & \int d^{D+1}q_1 \dots d^{D+1}q_{N-1} \prod_{a=1}^N \exp \left\{ -\frac{N}{4T} \delta_{ij} \Delta q_{a-1/2}^i \Delta q_{a-1/2}^j \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{N}{4T} \delta_{ij} (q_N^i - q_0^i) (q_N^j - q_0^j) \right\} \int d^{D+1}s_1 \dots d^{D+1}s_{N-1} \\ & \quad \times \exp \left\{ -\frac{N}{2T} \delta_{ij} \left(\sum_{a=1}^{N-1} \sum_{b=1}^a s_a^i s_b^j - (q_N^i - q_0^i) \sum_{a=1}^{N-1} s_a^j \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

La expresión entre paréntesis dentro del exponente de la última línea en la ecuación (3.49) puede ser escrita en forma matricial. Para ello, defínase la matriz columna \vec{s}^i con $(N-1)(D+1)$ elementos como

$$(\vec{s}^i)^T = \left(s_1^i \quad s_2^i \quad \cdots \quad s_{N-1}^i \right), \quad (3.50)$$

así como también la matriz de $(N-1)(D+1) \times (N-1)(D+1)$,

$$\mathbf{A}_{ij} = \begin{pmatrix} \delta_{ij} & \delta_{ij}/2 & \delta_{ij}/2 & \delta_{ij}/2 & \cdots & \delta_{ij}/2 & \delta_{ij}/2 & \delta_{ij}/2 \\ \delta_{ij}/2 & \delta_{ij} & \delta_{ij}/2 & \delta_{ij}/2 & \cdots & \delta_{ij}/2 & \delta_{ij}/2 & \delta_{ij}/2 \\ \delta_{ij}/2 & \delta_{ij}/2 & \delta_{ij} & \delta_{ij}/2 & \cdots & \delta_{ij}/2 & \delta_{ij}/2 & \delta_{ij}/2 \\ \delta_{ij}/2 & \delta_{ij}/2 & \delta_{ij}/2 & \delta_{ij} & \cdots & \delta_{ij}/2 & \delta_{ij}/2 & \delta_{ij}/2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \delta_{ij}/2 & \delta_{ij}/2 & \delta_{ij}/2 & \delta_{ij}/2 & \cdots & \delta_{ij} & \delta_{ij}/2 & \delta_{ij}/2 \\ \delta_{ij}/2 & \delta_{ij}/2 & \delta_{ij}/2 & \delta_{ij}/2 & \cdots & \delta_{ij}/2 & \delta_{ij} & \delta_{ij}/2 \\ \delta_{ij}/2 & \delta_{ij}/2 & \delta_{ij}/2 & \delta_{ij}/2 & \cdots & \delta_{ij}/2 & \delta_{ij}/2 & \delta_{ij} \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

donde cada uno de los anteriores elementos es en realidad una matriz de $(D+1) \times (D+1)$. También puede definirse la matriz columna de elementos constantes \vec{B} , con $(N-1)(D+1)$ elementos, como

$$\vec{B}^T = \left(\frac{2}{N} \quad \frac{2}{N} \quad \frac{2}{N} \quad \cdots \quad \frac{2}{N} \quad \frac{2}{N} \right). \quad (3.52)$$

Con estas definiciones, es inmediato ver que (3.49) se convierte en

$$\begin{aligned} & \int d^{D+1}q_1 \dots d^{D+1}q_{N-1} \prod_{a=1}^N \exp \left\{ -\frac{N}{4T} \delta_{ij} \Delta q_{a-1/2}^i \Delta q_{a-1/2}^j \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{N}{4T} \delta_{ij} (q_N^i - q_0^i) (q_N^j - q_0^j) \right\} \int d^{D+1}s_1 \dots d^{D+1}s_{N-1} \\ & \quad \times \exp \left\{ -\frac{N}{2T} \left((\vec{s}^i)^T \mathbf{A}_{ij} \vec{s}^j - (q_N^i - q_0^i) \vec{B}^T \mathbf{A}_{ij} \vec{s}^j \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Teniendo en cuenta que cada una de las integrales de las variables s_a^i se realiza sobre toda la recta real, resulta que la integral del lado derecho de esta última ecuación se puede escribir como

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} d^{D+1}s_1 \dots d^{D+1}s_{N-1} \exp \left\{ -\frac{N}{2T} \left((\vec{s}^i)^T \mathbf{A}_{ij} \vec{s}^j - (q_N^i - q_0^i) \vec{B}^T \mathbf{A}_{ij} \vec{s}^j \right) \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\det \mathbf{A}_{ij}}} \left(\frac{2\pi T}{N} \right)^{(N-1)(D+1)/2} \exp \left\{ \frac{N}{8T} (q_N^i - q_0^i) (q_N^j - q_0^j) \vec{B}^T \mathbf{A}_{ij} \vec{B} \right\}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Utilizando (3.51) y (3.52), es posible probar por inducción sobre N las igualdades

$$\det \mathbf{A}_{ij} = \left(\frac{N}{2^{N-1}} \right)^{D+1} \quad \text{y} \quad \vec{B}^T \mathbf{A}_{ij} \vec{B} = \frac{2(N-1)}{N} \delta_{ij} \quad . \quad (3.55)$$

Combinando (3.53), (3.54) y (3.55), se obtiene

$$\begin{aligned}
& \int d^{D+1}q_1 \dots d^{D+1}q_{N-1} \prod_{a=1}^N \exp \left\{ -\frac{N}{4T} \delta_{ij} \Delta q_{a-1/2}^i \Delta q_{a-1/2}^j \right\} \\
&= \frac{1}{N^{(D+1)/2}} \left(\frac{4\pi T}{N} \right)^{(N-1)(D+1)/2} \exp \left\{ -\frac{1}{4T} \delta_{ij} (q_N^i - q_0^i) (q_N^j - q_0^j) \right\}. \quad (3.56)
\end{aligned}$$

A continuación, se inserta este último resultado en (3.45), obteniéndose

$$\begin{aligned}
& \int \mathcal{D}q \exp \left\{ -\frac{1}{4} \int_0^T dt \dot{q}^i \delta_{ij} \dot{q}^j \right\} \\
&= \left(\frac{1}{4\pi T} \right)^{(D+1)/2} \exp \left\{ -\frac{1}{4T} \delta_{ij} (q_N^i - q_0^i) (q_N^j - q_0^j) \right\}, \quad (3.57)
\end{aligned}$$

que es explícitamente independiente de N . Insertando este resultado en (3.44) con $q_0 = q_N$ se obtiene el valor medio de 1:

$$\langle 1 \rangle = \left(\frac{1}{4\pi T} \right)^{(D+1)/2}. \quad (3.58)$$

Finalmente, a partir de este valor medio se obtiene la funcional generatriz (3.31):

$$Z[j] = \left(\frac{1}{4\pi T} \right)^{(D+1)/2} \exp \left\{ -\delta^{ij} \int_0^T dt \int_0^T dt' j_i(t) j_j(t') G(t, t') \right\}, \quad (3.59)$$

donde la función de Green $G(t, t')$ es (3.34) o (3.43) según las condiciones elegidas para los caminos.

3.3. Funcional generatriz en el espacio de fases

Habiendo explicado en la sección 3.2 cómo se resuelven las integrales de la forma (3.19) cuando se trabaja en el espacio de configuraciones llano, se procede a continuación a explicar cómo se resuelven las integrales de la forma (3.18), es decir, cuando se trabaja en el espacio de fases curvo.

Se define la “funcional generatriz” (también llamada “función de partición”) como

$$Z[j, k] \equiv \langle e^{i \int_0^T dt (j_i q^i + k^i p_i)} \rangle = \int \mathcal{D}q \mathcal{D}p e^{-S_0[q, p]} e^{i \int_0^T dt (j_i q^i + k^i p_i)} \quad (3.60)$$

donde j_i y k^i son denominados “campos fuentes”, y son funciones de t . Con esta definición, es inmediato calcular múltiples valores medios. Por ejemplo, para una única dimensión, es inmediato notar que $\forall n_1, \dots, n_a, m_1, \dots, m_a \in \mathbb{N}_0$ se tiene

$$\begin{aligned}
& \langle q(t_1)^{n_1} \dots q(t_a)^{n_a} p(t_1)^{m_1} \dots p(t_a)^{m_a} \rangle \\
&= (-i)^{n_1 + \dots + n_a + m_1 + \dots + m_a} \frac{\delta^{n_1 + \dots + n_a + m_1 + \dots + m_a}}{\delta^{n_1} j(t_1) \dots \delta^{n_a} j(t_a) \delta^{m_1} k(t_1) \dots \delta^{m_a} k(t_a)} Z[j, k] \Big|_{j=0, k=0} .
\end{aligned} \tag{3.61}$$

Otro valor medio importante es el valor medio de 1:

$$\langle 1 \rangle = Z[0, 0] = \int \mathcal{D}q \mathcal{D}p e^{-S_0[q, p]} . \tag{3.62}$$

Otros posibles valores medios que se pueden calcular con la funcional generatriz incluyen el de la exponencial de $q^i(t_1)$:

$$\langle e^{i\omega_i q^i(t_1)} \rangle = Z[j_i = \omega_i \delta(t_1), k = 0] . \tag{3.63}$$

donde ω_i son constantes. Dicho valor medio es útil cuando se desea calcular el valor medio de las deltas de Dirac o de funciones de Heaviside.

A continuación, considérese el exponente del lado derecho de la ecuación (3.60), que puede ser escrito como

$$\begin{aligned}
& -S_0[q, p] + i \int_0^T dt (j_i q^i + k^i p_i) \\
&= - \int_0^T dt \left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} p^i & q^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2g_{ij}(x) & -i g_{ij}(x) \partial_t \\ i g_{ij}(x) \partial_t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^j \\ q^j \end{pmatrix} - i (j_i q^i + k^i p_i) \right\} .
\end{aligned} \tag{3.64}$$

Al escribir esta última línea, debe tenerse el cuidado de no olvidar que la integral de caminos se realiza respecto de p_i y no respecto de $p^i = g^{ij}(x)p_j$. Se define entonces el operador

$$\hat{D}_{ij} \equiv g_{ij}(x) \begin{pmatrix} 2 & -i\partial_t \\ i\partial_t & 0 \end{pmatrix} , \tag{3.65}$$

de modo que (3.64) toma la forma

$$\begin{aligned}
& -S_0[q, p] + i \int_0^T dt (j_i q^i + k^i p_i) \\
&= -S_0 \left[\begin{pmatrix} p^i & q^i \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} k_n & j_n \end{pmatrix} (\hat{D}^{-1})^{ni} \right] - \frac{1}{2} \int_0^T dt \begin{pmatrix} k_i & j_i \end{pmatrix} (\hat{D}^{-1})^{ij} \begin{pmatrix} k_j \\ j_j \end{pmatrix} .
\end{aligned} \tag{3.66}$$

Por lo tanto, (3.60) se puede escribir como

$$Z[j, k] = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^T dt (k_i \ j_i) (\hat{D}^{-1})^{ij} \begin{pmatrix} k_j \\ j_j \end{pmatrix} \right\} \\ \times \int \mathcal{D}q \mathcal{D}p \exp \left\{ -S_0 \left[(p^i \ q^i) - i (k_n \ j_n) (\hat{D}^{-1})^{ni} \right] \right\}, \quad (3.67)$$

donde $(\hat{D}^{-1})^{ij}$ es el operador inverso de \hat{D}_{ij} . Luego, el cambio $(p^i \ q^i) = (p^i \ q^i) - i (k_n \ j_n) (\hat{D}^{-1})^{ni}$ deja invariante la medida de integración, es decir, $\mathcal{D}q' \mathcal{D}p' = \mathcal{D}q \mathcal{D}p$. Por lo tanto, el lado derecho de (3.67) adquiere una forma mucho más simple, resultando

$$Z[j, k] = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^T dt (k_i \ j_i) (\hat{D}^{-1})^{ij} \begin{pmatrix} k_j \\ j_j \end{pmatrix} \right\} \langle 1 \rangle. \quad (3.68)$$

Para obtener la forma final de la funcional generatriz, resta encontrar una forma explícita de $(\hat{D}^{-1})^{ij}$. La forma más sencilla de obtenerla es escribiendo

$$(\hat{D}^{-1})^{ij} = g^{ij}(x) \int_0^T dt' \begin{pmatrix} G_{11}(t, t') & G_{12}(t, t') \\ G_{21}(t, t') & G_{22}(t, t') \end{pmatrix}. \quad (3.69)$$

donde las funciones de Green $G_{ab}(t, t')$ satisfacen

$$\begin{pmatrix} 2 & -i\partial_t \\ i\partial_t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{11}(t, t') & G_{12}(t, t') \\ G_{21}(t, t') & G_{22}(t, t') \end{pmatrix} \\ = \delta(t - t') \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{D+1} & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_{D+1} \end{pmatrix} - \sum \begin{pmatrix} p_{zm}(t) \\ q_{zm}(t) \end{pmatrix} (p_{zm}(t') \ q_{zm}(t')). \quad (3.70)$$

En esta última expresión, $\begin{pmatrix} p_{zm}(t) \\ q_{zm}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -2iat + b \end{pmatrix}$ son los “modos cero” del operador matricial $\begin{pmatrix} 2 & -i\partial_t \\ i\partial_t & 0 \end{pmatrix}$ con sus condiciones de contorno. Se eligen a y b de manera tal que dichos modos cero se hallen normalizados según $\int_0^T dt (p_{zm}(t)^2 + q_{zm}(t)^2) = 1$. Resulta entonces

$$Z[j, k] = \exp \left\{ -\frac{1}{2} g^{ij}(x) \int_0^T dt \int_0^T dt' (k_i(t) \ j_i(t)) \begin{pmatrix} G_{11}(t, t') & G_{12}(t, t') \\ G_{21}(t, t') & G_{22}(t, t') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_j(t') \\ j_j(t') \end{pmatrix} \right\} \langle 1 \rangle. \quad (3.71)$$

Sólo queda entonces por hallar la función de Green $G(t, t')$ para obtener la expresión final de la funcional generatriz. En las dos subsecciones siguientes se la halla para dos condiciones de contorno diferentes: de Dirichlet y periódicas.

3.3.1. Función de Green con condiciones de Dirichlet

De acuerdo a lo establecido en la sección 2.1.3, las coordenadas q satisfacen las condiciones de Dirichlet homogéneas $q^i(0) = q^i(T) = 0$. Estas condiciones (que no conducen a ningún modo cero) naturalmente también forman parte del operador $(\hat{D}^{-1})^{ij}$, y en consecuencia de las funciones de Green:

$$\begin{aligned} G_{21}(0, t') = G_{21}(T, t') = 0 ; \\ G_{22}(0, t') = G_{22}(T, t') = 0 . \end{aligned} \quad (3.72)$$

Nótese que las condiciones son impuestas sólo sobre los elementos de la mitad inferior de la matriz de Green, pues dichos elementos son los asociados a las coordenadas q^i . En cambio, sobre los elementos de la mitad superior de la matriz de Green no hay ninguna restricción pues nada restringe el dominio de los momentos p_i .

Entonces tómesese la ecuación (3.70) sin modos cero:

$$\begin{pmatrix} 2 & -i\partial_t \\ i\partial_t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{11}(t, t') & G_{12}(t, t') \\ G_{21}(t, t') & G_{22}(t, t') \end{pmatrix} = \delta(t - t') \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{D+1} & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_{D+1} \end{pmatrix} . \quad (3.73)$$

A continuación, es conveniente desglosar esta ecuación matricial en cuatro ecuaciones independientes:

$$\begin{aligned} 2G_{11}(t, t') - i\partial_t G_{21}(t, t') &= \delta(t - t') ; \\ 2G_{12}(t, t') - i\partial_t G_{22}(t, t') &= 0 ; \\ i\partial_t G_{11}(t, t') &= 0 ; \\ i\partial_t G_{12}(t, t') &= \delta(t - t') . \end{aligned} \quad (3.74)$$

Integrando las dos últimas ecuaciones, se halla

$$\begin{aligned} G_{11}(t, t') &= c_{11}(t') , \\ G_{12}(t, t') &= -\frac{i}{2} \epsilon(t - t') + c_{12}(t') , \end{aligned} \quad (3.75)$$

donde $c_{11}(t')$ y $c_{12}(t')$ son funciones que sólo dependen de t' , mientras que $\epsilon(t - t')$ es la función signo. Si estos resultados se insertan en las dos primeras de las ecuaciones (3.74) y se integra respecto de t , se obtiene

$$\begin{aligned} 2t c_{11}(t') - iG_{21}(t, t') + c_{21}(t') &= \frac{1}{2} \epsilon(t - t') \quad \text{y} \\ -i|t - t'| + 2t c_{12}(t') - iG_{22}(t, t') + c_{22}(t') &= 0 , \end{aligned} \quad (3.76)$$

donde $c_{21}(t')$ y $c_{22}(t')$ son otras funciones que sólo dependen de t' . Todas las funciones $c_{ab}(t')$ se determinan mediante las condiciones (3.72), simplemente evaluando las ecuaciones (3.76) en $t = 0$ y $t = T$. El resultado final es

$$\begin{pmatrix} G_{11}(t, t') & G_{12}(t, t') \\ G_{21}(t, t') & G_{22}(t, t') \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1/T & -i\epsilon(t-t') + i(1-2t'/T) \\ i\epsilon(t-t') + i(1-2t/T) & 2(-|t-t'| + t+t' - 2tt'/T) \end{pmatrix}. \quad (3.77)$$

Por simplicidad, conviene entonces definir

$$\begin{aligned} G(t, t') &\equiv -\frac{1}{2}|t-t'| + \frac{1}{2}(t+t') - \frac{tt'}{T}, \\ \bullet G(t, t') &\equiv -\frac{1}{2}\epsilon(t-t') + \frac{1}{2} - \frac{t'}{T}. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Con estas definiciones, resulta entonces

$$\begin{pmatrix} G_{11}(t, t') & G_{12}(t, t') \\ G_{21}(t, t') & G_{22}(t, t') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2T & i\bullet G(t, t') \\ i\bullet G(t', t) & 2G(t, t') \end{pmatrix}. \quad (3.79)$$

3.3.2. Función de Green con condiciones periódicas

Según se discute en la sección 3.2.2, es posible utilizar las condiciones de Dirichlet si se descomponen los caminos en la forma $z(t) = x + q(t)$ donde x es el punto inicial y final de las trayectorias, y las perturbaciones satisfacen $q(0) = q(T) = 0$. Por otra parte, es posible cambiar a otras condiciones denominadas “periódicas” si se descomponen los caminos en la forma $z(t) = x + q(t)$ donde x es el “centro geométrico” o “centro de masas” de la trayectoria:

$$x = \frac{1}{T} \int_0^T dt z(t), \quad (3.80)$$

mientras que las perturbaciones satisfacen las condiciones periódicas

$$\begin{aligned} q(0) &= q(T), \\ \dot{q}(0) &= \dot{q}(T). \end{aligned} \quad (3.81)$$

En el espacio de fases, esta última condición debe ser reescrita en términos de los momentos p , obteniéndose

$$\begin{aligned} p(0) &= p(T), \\ q(0) &= q(T). \end{aligned} \quad (3.82)$$

En términos de las funciones de Green, estas condiciones se convierten en

$$\begin{aligned}
G_{11}(0, t') &= G_{11}(T, t') , \\
G_{12}(0, t') &= G_{12}(T, t') , \\
G_{21}(0, t') &= G_{21}(T, t') , \\
G_{22}(0, t') &= G_{22}(T, t') .
\end{aligned} \tag{3.83}$$

Ahora bien, nótese que con las condiciones periódicas surge un (único) modo cero $(p_{zm}(t) \ q_{zm}(t)) = (0 \ 1/\sqrt{T})$. Por lo tanto, la ecuación que satisface la función de Green es

$$\begin{pmatrix} 2 & -i\partial_t \\ i\partial_t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{11}(t, t') & G_{12}(t, t') \\ G_{21}(t, t') & G_{22}(t, t') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta(t-t') & 0 \\ 0 & \delta(t-t') - 1/T \end{pmatrix} . \tag{3.84}$$

A continuación, es conveniente desglosar esta ecuación matricial en cuatro ecuaciones independientes:

$$\begin{aligned}
2G_{11}(t, t') - i\partial_t G_{21}(t, t') &= \delta(t-t') ; \\
2G_{12}(t, t') - i\partial_t G_{22}(t, t') &= 0 ; \\
i\partial_t G_{11}(t, t') &= 0 ; \\
i\partial_t G_{12}(t, t') + 1/T &= \delta(t-t') .
\end{aligned} \tag{3.85}$$

Integrando las dos últimas ecuaciones, se halla

$$\begin{aligned}
G_{11}(t, t') &= c_{11}(t') , \\
G_{12}(t, t') &= -\frac{i}{2} \epsilon(t-t') + i\frac{t}{T} + c_{12}(t') ,
\end{aligned} \tag{3.86}$$

donde $c_{11}(t')$ y $c_{12}(t')$ son funciones que sólo dependen de t' , mientras que $\epsilon(t-t')$ es la función signo. Si estos resultados se insertan en las dos primeras de las ecuaciones (3.85) y se integra respecto de t , se obtiene

$$\begin{aligned}
2t c_{11}(t') - iG_{21}(t, t') + c_{21}(t') &= \frac{1}{2} \epsilon(t-t') , \\
-i|t-t'| + i\frac{t^2}{T} + 2t c_{12}(t') - iG_{22}(t, t') + c_{22}(t') &= 0 ,
\end{aligned} \tag{3.87}$$

donde $c_{21}(t')$ y $c_{22}(t')$ son otras funciones que sólo dependen de t' . En principio, todas las funciones $c_{ab}(t')$ se determinan mediante las condiciones (3.83). No obstante, al aplicar dichas condiciones sólo se resuelven las funciones $c_{11}(t')$ y $c_{12}(t')$,

obteniéndose

$$\begin{aligned} \frac{t}{T} - iG_{21}(t, t') + c(t') &= \frac{1}{2}\epsilon(t - t') , \\ -i|t - t'| + i\frac{(t - t')^2}{T} - iG_{22}(t, t') + d(t') &= 0 , \end{aligned} \quad (3.88)$$

donde se ha llamado $c(t') \equiv c_{21}(t')$ y $d(t') \equiv c_{22}(t') - it'^2/T$.

Surge ahora el problema de determinar $c(t')$ y $d(t')$. Para ello, al igual que en la sección 3.2.2, se utiliza la imposición (3.80) para obtener dos condiciones integrales. Las condiciones resultantes son entonces

$$\begin{aligned} G_{21}(0, t') &= G_{21}(T, t') , \\ G_{22}(0, t') &= G_{22}(T, t') , \\ \int_0^T dt G_{21}(t, t') &= 0 , \\ \int_0^T dt G_{22}(t, t') &= 0 . \end{aligned} \quad (3.89)$$

Nótese que mientras que las condiciones (3.82) son utilizadas para determinar el modo cero, son en realidad las ecuaciones (3.89) las que determinan las funciones de Green, sin tener estas últimas una total relación con las primeras. Utilizando entonces las dos condiciones integrales de (3.89) en (3.88), resulta

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} G_{11}(t, t') & G_{12}(t, t') \\ G_{21}(t, t') & G_{22}(t, t') \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1/T & -i\epsilon(t - t') + 2i(t - t')/T \\ i\epsilon(t - t') - 2i(t - t')/T & 2(-|t - t'| + (t - t')^2/T + T/6) \end{pmatrix} . \end{aligned} \quad (3.90)$$

Por simplicidad, conviene entonces definir

$$\begin{aligned} G(t, t') &\equiv G(t - t') \equiv -\frac{1}{2}|t - t'| + \frac{(t - t')^2}{2T} + \frac{T}{12} , \\ \bullet G(t, t') &\equiv \partial_t G(t - t') \equiv -\frac{1}{2}\epsilon(t - t') + \frac{t - t'}{T} . \end{aligned} \quad (3.91)$$

Con estas definiciones, resulta entonces

$$\begin{pmatrix} G_{11}(t, t') & G_{12}(t, t') \\ G_{21}(t, t') & G_{22}(t, t') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2T & i\bullet G(t, t') \\ i\bullet G(t', t) & 2G(t, t') \end{pmatrix} . \quad (3.92)$$

Nótese que las funciones de Green (3.91) satisfacen $G(t, t') \equiv G(t - t')$ y $\bullet G(t, t') \equiv \bullet G(t - t')$. Esta última propiedad de invarianza traslacional es sumamente útil para simplificar algunos de los cálculos que pueden aparecer al resolver las integrales de caminos, y representa una ventaja al trabajar con trayectorias que satisfacen

condiciones periódicas.

3.3.3. Valor medio $\langle 1 \rangle$

Habiendo calculado la función de Green tanto con condiciones homogéneas de Dirichlet como con condiciones periódicas, la funcional generatriz (3.71) está casi completa. Sólo resta un último paso: determinar $\langle 1 \rangle$. Para tal propósito se utiliza la ecuación (3.62):

$$\begin{aligned}
\langle 1 \rangle &= \int \mathcal{D}q \mathcal{D}p e^{-S_0[q,p]} \\
&= \int \mathcal{D}q \mathcal{D}p \exp \left\{ -\frac{g_{ij}(x)}{2} \int_0^T dt \begin{pmatrix} p^i & q^i \\ i \partial_t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^j \\ q^j \end{pmatrix} \right\} \\
&= \int \mathcal{D}q \mathcal{D}p \exp \left\{ -\int_0^T dt \left(g^{ij}(x) p_i p_j - i p_i \dot{q}^i \right) \right\},
\end{aligned} \tag{3.93}$$

donde debe recordarse que los caminos inician y terminan en el mismo punto $q = q_0$ (con $q_0 = 0$ para las condiciones de Dirichlet) pero no necesariamente en el mismo p . Esta última ecuación tiene una sencilla interpretación si se la compara con (2.42) y (2.43): claramente, el valor medio de 1 puede ser interpretado como la amplitud de transición de una partícula con $H_{\text{int}} = 0$. Esto es equivalente a decir que la partícula es libre (porque $V = 0$) y que inicia y termina en el punto $q = q_0$ dentro de una variedad similar a \mathcal{M} , pero con curvatura llana no trivial $g_{ij}(x)$ (esta última imposición anula los términos de curvatura presentes en $H_{\text{int}}(q, p)$, pues todas las derivadas de $g^{ij}(x)$ respecto de q son nulas).

El problema entonces consiste en calcular la integral de caminos de lado derecho de (3.93). El procedimiento para tal cálculo es completamente ‘rústico’. En primer lugar, es necesario deshacer el límite continuo utilizando las ecuaciones (2.34), (2.37) y (2.38) (con $m_c = 1/2$):

$$\begin{aligned}
&\int \mathcal{D}q \mathcal{D}p \exp \left\{ -\int_0^T dt \left(g^{ij}(x) p_i p_j - i p_i \dot{q}^i \right) \right\} \\
&\equiv \int \frac{d^{D+1}q_1 \dots d^{D+1}q_{N-1} d^{D+1}p_1 \dots d^{D+1}p_N}{(2\pi)^{N(D+1)}} \\
&\quad \times \exp \left\{ -\sum_{a=1}^N \frac{T}{N} \left(g^{ij}(x) p_{a,i} p_{a,j} - i \frac{N}{T} p_{a,i} \Delta q_{a-1/2}^i \right) \right\} \\
&= g(x)^{N/2} \int \frac{d^{D+1}q_1 \dots d^{D+1}q_{N-1}}{(4\pi T/N)^{N(D+1)/2}} \prod_{a=1}^N \exp \left\{ -\frac{N}{4T} g_{ij}(x) \Delta q_{a-1/2}^i \Delta q_{a-1/2}^j \right\}.
\end{aligned} \tag{3.94}$$

El lado derecho de esta igualdad es muy similar al lado derecho de (3.45), con ex-

cepción del prefactor multiplicativo $g(x)^{N/2}$ y por la matrix $g_{ij}(x)$ en la exponencial reemplazando a δ_{ij} . Esto implica que el procedimiento para calcular el valor medio $\langle 1 \rangle$ en el espacio de fases curvo es análogo al realizado en el espacio de configuraciones llano, a menos de las dos excepciones mencionadas. Procediendo entonces de manera análoga al espacio de configuraciones, se obtiene para una configuración inicial q_0 y una configuración final q_N (donde ambas configuraciones no son necesariamente iguales) la identidad

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{D}q \mathcal{D}p \exp \left\{ - \int_0^T dt \left(g^{ij}(x) p_i p_j - i p_i \dot{q}^i \right) \right\} \\ &= \sqrt{g(x)} \left(\frac{1}{4\pi T} \right)^{(D+1)/2} \exp \left\{ - \frac{1}{4T} g_{ij}(x) (q_N^i - q_0^i) (q_N^j - q_0^j) \right\}. \end{aligned} \quad (3.95)$$

Por último, el valor medio $\langle 1 \rangle$ se obtiene simplemente considerando el caso $q_0 = q_N$. Insertando este resultado en (3.71), se llega a que la funcional generatriz buscada es

$$\begin{aligned} Z[j, k] &= \sqrt{g(x)} \left(\frac{1}{4\pi T} \right)^{(D+1)/2} \\ &\times \exp \left\{ - \frac{1}{2} g^{ij}(x) \int_0^T dt \int_0^T dt' \begin{pmatrix} k_i(t) & j_i(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2T & i \bullet G(t, t') \\ i \bullet G(t', t) & 2G(t, t') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_j(t') \\ j_j(t') \end{pmatrix} \right\}, \end{aligned} \quad (3.96)$$

donde las funciones de Green $G(t, t')$ y $\bullet G(t, t')$ son (3.78) o (3.91) según las condiciones elegidas para los caminos.

3.4. Aplicaciones

A continuación se enuncian una serie de aplicaciones del WLF en variedades sin borde. Concretamente, se estudia:

1. la termodinámica de un campo escalar libre en la variedad \mathcal{S}^1 ,
2. la función $\beta(\lambda)$ de la teoría con interacción $\lambda\varphi^4$, y
3. la anomalía conforme de la teoría libre sin masa en la variedad \mathcal{S}^2 .

Como se verá en las sucesivas secciones, todas estas aplicaciones tienen como particularidad que su variedad es “conformemente plana”. Esto quiere decir que existe una función $f(q)$ dependiente de las coordenadas tal que

$$g_{ij}(q) = f(q) \delta_{ij}. \quad (3.97)$$

Resulta entonces que en el espacio de configuraciones llano – es decir, con $f(q) = 1$ – puede escribirse la funcional generatriz como

$$Z[j] = \left(\frac{1}{4\pi T} \right)^{(D+1)/2} \exp \left\{ - \delta^{ij} \int_0^T dt \int_0^T dt' j_i(t) j_j(t') G(t, t') \right\}, \quad (3.98)$$

mientras que en el espacio de fases curvo se la puede escribir como

$$Z[j, k] = \left(\frac{f(x)}{4\pi T} \right)^{(D+1)/2} \exp \left\{ - \int_0^T dt \int_0^T dt' \left(\frac{f(x)}{4T} \delta_{ij} k^i(t) k^j(t') + i \bullet G(t, t') k^i(t) j_i(t') + \frac{1}{f(x)} G(t, t') \delta^{ij} j_i(t) j_j(t') \right) \right\}. \quad (3.99)$$

Por su parte, los potenciales de interacción (3.12) y (3.8) toman respectivamente la forma

$$H_{\text{int}}(q) = \left[\frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial \varphi^2} \right]_{\varphi=\varphi_{\text{cl}}(x+q)}, \quad (3.100)$$

$$H_{\text{int}}(q, p) = \left[\frac{1}{f(x+q)} - \frac{1}{f(x)} \right] \delta^{ij} p_i p_j - \frac{1}{4} [R(x+q) - g^{ij}(x+q) \Gamma_{ik}^l(x+q) \Gamma_{jl}^k(x+q)] + \left[\frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial \varphi^2} \right]_{\varphi=\varphi_{\text{cl}}(x+q)}. \quad (3.101)$$

Por último, cabe destacar que es en las aplicaciones 1 y 2 donde la variedad considerada es simplemente \mathbb{R}^{D+1} con métrica llana $g_{ij} = \delta_{ij}$ (es decir, con $f(q) = 1$). En este caso particular, los potenciales (3.100) y (3.101) son simplemente

$$H_{\text{int}}(q) = H_{\text{int}}(q, p) = \left[\frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial \varphi^2} \right]_{\varphi=\varphi_{\text{cl}}(x+q)}, \quad (3.102)$$

es decir, se anulan los términos de curvatura. Todos los términos de interacción provienen entonces de la densidad de energía potencial de la lagrangiana de la teoría de campos. Como además estos potenciales de interacción no dependen de p , resulta que los campos fuente k no tienen utilidad alguna en estos casos particulares y pueden ser eliminados de (3.99), resultando tanto en el espacio de configuraciones como en el de fases

$$Z[j] = \left(\frac{1}{4\pi T} \right)^{(D+1)/2} \exp \left\{ - \delta^{ij} \int_0^T dt \int_0^T dt' G(t, t') j_i(t) j_j(t') \right\}. \quad (3.103)$$

Nótese además que la función de Green $G(t, t')$ debe ser elegida entre (3.34) y (3.43) si se trabaja en el espacio de configuraciones, o bien entre (3.78) y (3.91) si se trabaja en el espacio de fases. No obstante, $G(t, t')$ es idéntica en ambos espacios. Resulta entonces que cuando la variedad es \mathbb{R}^{D+1} con métrica llana, es completamente indistinto trabajar en el espacio de configuraciones o en el de fases, y la única elección que debe realizarse radica en las condiciones que satisfacen las trayectorias (homogéneas de Dirichlet o periódicas).

Los resultados obtenidos para las aplicaciones 1 y 2 fueron presentados en la reunión anual de la Asociación Física Argentina del año 2017, mientras que los resultados de la aplicación 3 fueron presentados en la reunión anual de la Asociación Física Argentina del año 2018.

3.4.1. Termodinámica en \mathcal{S}^1

A continuación se considera el estudio de la termodinámica de un campo escalar libre en la variedad \mathcal{S}^1 como aplicación del WLF. Para entender esta aplicación, primero es necesario comentar brevemente las generalidades sobre el estudio de la termodinámica de un campo escalar.

Generalidades sobre termodinámica de un campo escalar libre

En primer lugar, considérese un campo escalar φ en una variedad espacial llana D -dimensional $I_D \subset \mathbb{R}^D$, la cual es simplemente conexa. Se define entonces la “función de partición” en el espacio de Fock – es decir, en el ensamble gran canónico – como

$$Q(\beta) = \text{Tr} e^{-\beta \hat{H}} , \quad (3.104)$$

donde $\beta = 1/\mathcal{T}$ con \mathcal{T} la temperatura. Por su parte, el hamiltoniano es

$$\hat{H} = \int_{I_D} d^D x \left\{ \frac{1}{2} (\partial_t \varphi)^2 + \frac{1}{2} \delta^{ab} \partial_a \varphi \partial_b \varphi + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 \right\} , \quad (3.105)$$

donde los índices a y b corren desde 1 hasta D . En el equilibrio, es posible probar que la función de partición toma la forma

$$Q(\beta) = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ - \int_0^\beta dx_0 \int_{I_D} d^D x \left(- \frac{1}{2} \delta^{ij} \partial_i \partial_j + \frac{1}{2} m^2 \right) \varphi \right\} , \quad (3.106)$$

donde se ha definido $x_0 = t$, de modo que los índices i y j corren desde 0 hasta D . Además, la integral de caminos se realiza sobre todas las configuraciones de los campos que satisfagan la condición de periodicidad $\varphi(x_0) = \varphi(x_0 + \beta)$. Por su parte,

\mathcal{N} es simplemente una normalización introducida para adimensionalizar a la función de partición.

Ahora, sea $I_0 = (0, \beta)$ un segmento unidimensional. Debido a la condición de periodicidad impuesta sobre los campos, es posible la identificación $I_0 \equiv \mathcal{S}^1$, donde el correspondiente anillo tiene un radio igual a $\beta/2\pi$. Definiendo entonces la variedad $(D + 1)$ -dimensional $\mathcal{M} = I_0 \times I_D$, puede escribirse

$$Q(\beta) = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ - \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x \varphi \left(- \frac{1}{2} \delta^{ij} \partial_i \partial_j + \frac{1}{2} m^2 \right) \varphi \right\}. \quad (3.107)$$

Esta integral gaussiana puede resolverse, resultando

$$Q(\beta) = \mathcal{N}' \text{Det} \left(- \delta^{ij} \partial_i \partial_j + m^2 \right)^{-1/2}, \quad (3.108)$$

donde \mathcal{N}' es una nueva normalización. Cambiándola por una normalización \mathcal{E} con unidades de energía y fijando $\mathcal{E} = 1$, se obtiene

$$\ln Q(\beta) = -\frac{1}{2} \ln \text{Det} \left(- \Delta + m^2 \right), \quad (3.109)$$

donde por simplicidad se ha llamado $\Delta = \delta^{ij} \partial_i \partial_j$.

A partir de este punto, es posible empezar a utilizar el WLF. Nótese la evidente similitud entre (3.109) y el último término en (2.68). De hecho, ambas expresiones ¡son formalmente iguales! Entonces el WLF puede utilizarse para calcular la función de partición. Para entender cómo se lo utiliza, conviene empezar aplicando la ecuación (2.72) sobre (2.68), de modo que (3.109) se convierte evidentemente en

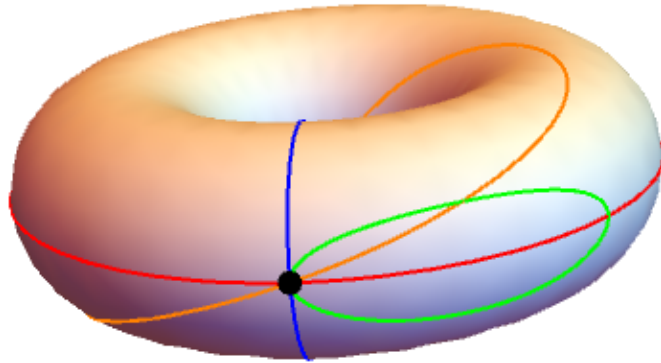
$$\ln Q(\beta) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dT}{T} \text{Tr} e^{-T(-\Delta+m^2)}. \quad (3.110)$$

Finalmente, el cálculo de esta última traza se realiza con las herramientas presentadas en las tres secciones previas del presente capítulo.

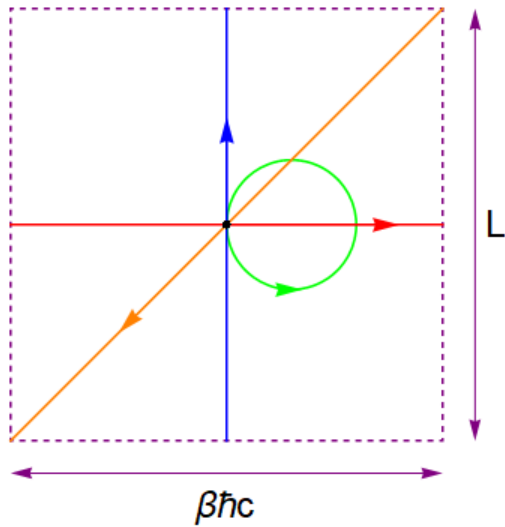
Termodinámica de un campo escalar libre en \mathcal{S}^1

Ahora, considérese explícitamente el caso en el cual $I_D = \mathcal{S}^1$, donde el correspondiente anillo tiene un radio $L/2\pi$, lo cual implica que $\text{Vol}(I_D) = L$. Entonces la variedad espacio-temporal bidimensional sobre la cual deben realizarse las integrales de caminos es el toroide $\mathcal{M} = \mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^1 \equiv (0, \beta) \times (0, L)$. Por su parte, los campos sobre dicha variedad satisfacen las condiciones $\varphi(x_0, x_1) = \varphi(x_0 + \beta, x_1 + L)$.

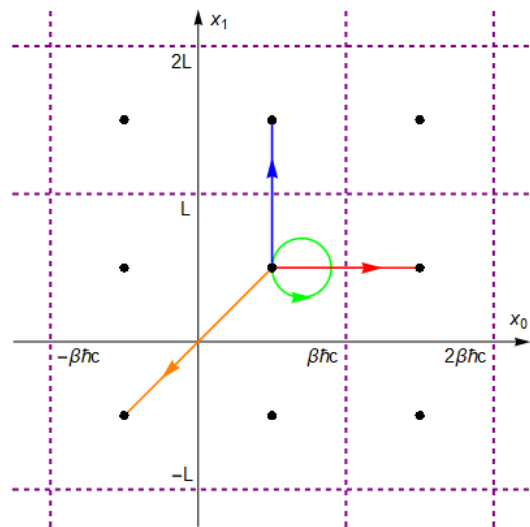
A continuación, considérense las trayectorias cerradas sobre el toroide que parten y terminan en un punto en común, como las que se esquematizan con diversos colores en la figura 3.1(a). Por simplicidad, se supondrá que las trayectorias sobre dicha imagen dan únicamente una vuelta. Mediante la representación $\mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^1 \equiv$



(a) Cuatro trayectorias cerradas sobre la superficie de un toroide.



(b) Las mismas trayectorias de la figura 3.1(a) son dibujadas sobre el toroide 'abierto'. Sobre las líneas punteadas violetas se satisfacen condiciones periódicas.



(c) Se realizan múltiples copias equivalentes de la misma región de la figura 3.1(b) sobre \mathbb{R}^2 . Los diferentes puntos negros que allí se observan corresponden en el toroide al mismo punto físico.

Figura 3.1: Caminos cerrados sobre un toroide.

$(0, \beta) \times (0, L)$ es posible ‘abrir’ al toroide, es decir, representarlo como una sección rectangular dentro del plano. Esto se esquematiza en la figura 3.1(b), donde se han mantenido las mismas trayectorias de 3.1(a) y además se les ha añadido un sentido. Nótese que sobre los bordes verticales de la sección rectangular, cualquier función $f(x_0, x_1)$ satisface las condiciones periódicas $f(0, x_1) = f(\beta, x_1)$ y $f(x_0, 0) = f(x_0, L)$.

Ahora, es posible aprovechar estas condiciones periódicas y reproducir infinitas veces sobre el plano al rectángulo de la figura 3.1(b). Este proceso se esquematiza en la figura 3.1(c). Al hacer esto, se realizan múltiples copias equivalentes del toroide, y cada punto sobre su superficie queda reproducido infinitas veces. La ventaja de este procedimiento consiste en que a partir de ahora es posible trabajar sobre el plano \mathbb{R}^2 (que no tiene borde) en lugar de trabajar sobre el rectángulo de la figura 3.1(b) (que sí tiene borde). Por su parte, las trayectorias deben empezar siempre desde algún punto x_{in} perteneciente al cuadrante $(0, \beta) \times (0, L)$ y terminar en $x_{\text{in}} + (k\beta, lL)$, donde $k, l \in \mathbb{Z}$ representan la cantidad de vueltas que realiza cada trayectoria en el eje correspondiente.

A raíz de las anteriores consideraciones, es posible descomponer a todas las trayectorias en segmentos rectos dentro de \mathbb{R}^2 que inician en x_{in} y terminan en $x_{\text{in}} + (k\beta, lL)$, más perturbaciones (q_0, q_1) que inician y terminan en $(0, 0)$. En forma de ecuación, esto es

$$x(t) = x_{\text{in}} + \left(k\beta \frac{t}{T}, lL \frac{t}{T} \right) + (q_0(t), q_1(t)) . \quad (3.111)$$

Entonces, la suma sobre todas las trayectorias cerradas en las coordenadas $x(t)$ pueden ser escritas en términos de las coordenadas $q(t)$ como

$$\int \mathcal{D}x = \sum_{(k,l) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} \int \mathcal{D}q . \quad (3.112)$$

Tómese ahora la traza de la ecuación (3.110) y escribásele por medio de (3.13) (en el espacio de configuraciones) y de (3.102) en la forma

$$\text{Tr} e^{-T(-\Delta+m^2)} = e^{-Tm^2} \int_{\mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^1} d^2x_{\text{in}} \int \mathcal{D}x \exp \left\{ -\frac{1}{4} \int_0^T dt (\dot{x}_0^2 + \dot{x}_1^2) \right\} . \quad (3.113)$$

Utilizando (3.111), es posible ver que

$$\int_0^T dt (\dot{x}_0^2 + \dot{x}_1^2) = \frac{k^2\beta^2 + l^2L^2}{T} - \delta_{ij} \int_0^T dt q^i \partial_t^2 q^j . \quad (3.114)$$

Como esta expresión es independiente de x_{in} , resulta que se puede separar la integral

$\int_{\mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^1} d^2 x_{\text{in}} = \beta L$ resultando

$$\text{Tr} e^{-T(-\Delta+m^2)} = \frac{\beta L}{4\pi T} e^{-Tm^2} \left[1 + \sum_{(k,l) \neq (0,0)} e^{-\frac{1}{4T}(k^2\beta^2+l^2L^2)} \right], \quad (3.115)$$

donde se ha usado (3.103) con $D = 1$ para escribir $\langle 1 \rangle = Z[0] = 1/4\pi T$.

Habiendo calculado esta última traza, ahora resta introducirla en (3.110) para obtener la función de partición:

$$\ln Q(\beta) = \frac{\beta L}{8\pi} \int_0^\infty \frac{dT}{T^2} e^{-Tm^2} \left[1 + \sum_{(k,l) \neq (0,0)} e^{-\frac{1}{4T}(k^2\beta^2+l^2L^2)} \right] \quad (3.116)$$

Tomando el '1' presente dentro de los corchetes, se obtiene una integral divergente por el extremo inferior. Entonces, como en la ecuación (2.79), debe integrarse desde un *cut-off* inferior Λ con unidades de energía. A menor orden en Λ , se obtiene entonces

$$\int_{\Lambda^{-2}}^\infty \frac{dT}{T^2} e^{-Tm^2} \approx -\Lambda^2. \quad (3.117)$$

Ahora queda resolver el término restante en (3.116). Para ello debe intercambiarse el orden de la serie y de la integral, resultando

$$\int_0^\infty \frac{dT}{T^2} e^{-Tm^2} e^{-\frac{1}{4T}(k^2\beta^2+l^2L^2)} = \frac{4m}{\sqrt{k^2\beta^2+l^2L^2}} K_1\left(m\sqrt{k^2\beta^2+l^2L^2}\right), \quad (3.118)$$

donde $K_1(u)$ es la función modificada de Bessel de segunda especie. Resulta entonces que la ecuación (3.116) se convierte en

$$\ln Q(\beta) = -\frac{\beta L \Lambda^2}{8\pi} + \sum_{(k,l) \neq (0,0)} \frac{\beta L m}{2\pi \sqrt{k^2\beta^2+l^2L^2}} K_1\left(\sqrt{k^2\beta^2+l^2L^2}\right). \quad (3.119)$$

Ahora bien, el primer término de la ecuación (3.119) es claramente divergente, pero puede ser eliminado mediante renormalización. En consecuencia, sólo la serie restante contribuye realmente a la función de partición, y a partir de ella es posible obtener las variables termodinámicas de la teoría de campo escalar libre en la variedad \mathcal{S}^1 . Llamando entonces $\ln Q_{\text{ren}}(\beta) = \ln Q(\beta) + \frac{\beta L \Lambda^2}{8\pi}$, es posible calcular la

energía, la presión y la entropía:

$$\begin{aligned}
E(\beta) &= -\frac{\partial}{\partial\beta} \ln Q_{\text{ren}}(\beta) \\
&= \frac{Lm}{2\pi} \sum_{(k,l) \neq (0,0)} \left[\frac{m(k\beta)^2}{k^2\beta^2 + l^2L^2} K_0\left(m\sqrt{k^2\beta^2 + l^2L^2}\right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{k^2\beta^2 - l^2L^2}{(k^2\beta^2 + l^2L^2)^{3/2}} K_1\left(m\sqrt{k^2\beta^2 + l^2L^2}\right) \right], \tag{3.120}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(\beta) &= \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial L} \ln Q_{\text{ren}}(\beta) \\
&= \frac{m}{2\pi} \sum_{(k,l) \neq (0,0)} \left[-\frac{m(lL)^2}{k^2\beta^2 + l^2L^2} K_0\left(m\sqrt{k^2\beta^2 + l^2L^2}\right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{k^2\beta^2 - l^2L^2}{(k^2\beta^2 + l^2L^2)^{3/2}} K_1\left(m\sqrt{k^2\beta^2 + l^2L^2}\right) \right], \tag{3.121}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S(\beta) &= \beta E + \ln Q_{\text{ren}}(\beta) \\
&= \frac{\beta Lm}{2\pi} \sum_{(k,l) \neq (0,0)} \left[\frac{m(k\beta)^2}{k^2\beta^2 + l^2L^2} K_0\left(m\sqrt{k^2\beta^2 + l^2L^2}\right) \right. \\
&\quad \left. + 2 \frac{k^2\beta^2}{(k^2\beta^2 + l^2L^2)^{3/2}} K_1\left(m\sqrt{k^2\beta^2 + l^2L^2}\right) \right]. \tag{3.122}
\end{aligned}$$

La figura 3.2 muestra la gráfica de estas tres cantidades termodinámicas como función de β . Nótese que todas ellas tienden a un valor constante a bajas temperaturas (es decir, con $\beta \rightarrow \infty$). Estas cantidades son respectivamente la energía, presión y entropía del vacío. En particular, la entropía tiende a cero, lo cual se condice con la tercera ley de la termodinámica.

3.4.2. Función β de la teoría $\lambda\varphi^4$

Una aplicación inmediata del WLF es la obtención de la acción efectiva de una teoría con autointeracción y de las funciones β asociadas con sus constantes de acoplamiento. A continuación se discute un ejemplo de ello.

Considérese una teoría de campo escalar en la variedad espacio-temporal \mathbb{R}^{3+1} con la siguiente interacción:

$$\mathcal{V}[\varphi] = \frac{\lambda}{4!} \varphi^4. \tag{3.123}$$

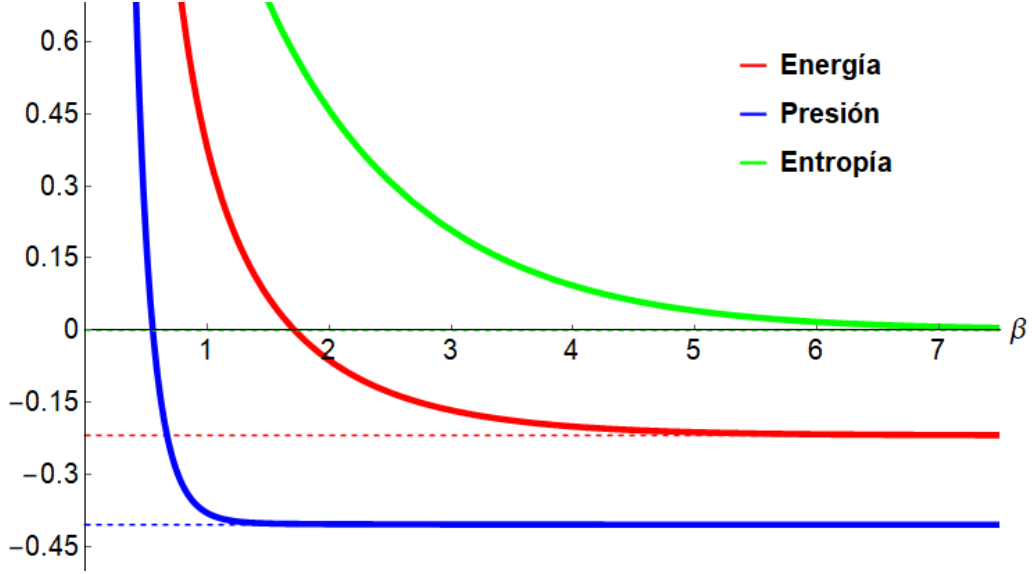


Figura 3.2: Variables termodinámicas en \mathcal{S}^1 . Por simplicidad, se ha tomado $L = m = 1$. Las líneas continuas representan las variables propiamente dichas, mientras que las líneas punteadas son sus límites cuando $\beta \rightarrow \infty$.

De acuerdo a la ecuación (3.102), se tiene entonces

$$H_{\text{int}}(q) = \frac{\lambda}{2} \varphi(x + q(t))^2. \quad (3.124)$$

Aplicado este resultado sobre la ecuación (3.17) y expandiendo a orden λ y qq , se tiene

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}q e^{-S[q]} &= \int \mathcal{D}q e^{-S_0[q]} \left\{ 1 - \frac{\lambda}{2} \int_0^T dt \varphi(x + q(t))^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda^2}{4} \int_0^T dt \int_0^t dt' \varphi(x + q(t))^2 \varphi(x + q(t'))^2 + \dots \right\} \\ &\approx \langle 1 \rangle - \frac{\lambda}{2} \int_0^T dt \left(\varphi(x)^2 \langle 1 \rangle + \partial_i [\varphi^2](x) \langle q^i(t) \rangle + \frac{1}{2} \partial_i \partial_j [\varphi^2](x) \langle q^i(t) q^j(t) \rangle \right) \\ &\quad \left. + \frac{\lambda^2}{4} \int_0^T dt \int_0^t dt' \varphi(x)^4 \langle 1 \rangle \right\}. \end{aligned} \quad (3.125)$$

Por otro lado, la funcional generatriz (3.103) es

$$Z[j] = \left(\frac{1}{4\pi T} \right)^2 \exp \left\{ -\delta^{ij} \int_0^T dt \int_0^T dt' G(t, t') j_i(t) j_j(t') \right\}. \quad (3.126)$$

A partir de esta última expresión, es inmediato calcular los valores medios

$$\langle 1 \rangle = Z[0] = \left(\frac{1}{4\pi T} \right)^2, \quad (3.127)$$

$$\langle q^i(t_1) \rangle = 0 , \quad (3.128)$$

$$\langle q^i(t_1)q^j(t_2) \rangle = \frac{1}{8\pi^2 T^2} \delta^{ij} G(t_1, t_2) . \quad (3.129)$$

Insertando estos valores medios en (3.125), resulta

$$\int \mathcal{D}q e^{-S[q]} = \left(\frac{1}{4\pi T} \right)^2 - \frac{\lambda}{2} \left\{ \frac{1}{(4\pi)^2 T} \varphi(x)^2 + \frac{1}{(4\pi)^2 T^2} \Delta[\varphi^2](x) \int_0^T dt G(t, t) \right\} + \frac{\lambda^2}{8(4\pi)^2} \varphi(x)^4 . \quad (3.130)$$

El valor de la integral $\int_0^T dt G(t, t)$ difiere según se elijan condiciones homogéneas de Dirichlet o condiciones periódicas para los caminos. El resultado en el primer caso es $T^2/6$, mientras que en el segundo caso es $T^2/12$. No obstante, como se verá a continuación, esta discrepancia no tiene consecuencias físicas.

El siguiente paso consiste en insertar el resultado (3.130) en (3.13). Uno de los términos que se obtienen es de la forma $\int_{\mathbb{R}^4} d^4x \Delta[\varphi^2](x)$, pero este término se anula por medio del teorema de Gauss. Resulta entonces

$$\text{Tr } e^{-T\hat{H}} = e^{-Tm^2} \left[\frac{\text{Vol}(\mathbb{R}^4)}{16\pi^2 T^2} - \frac{\lambda}{4!} \frac{3}{4\pi^2 T} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \varphi(x)^2 + \frac{\lambda^2}{4!} \frac{3}{16\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \varphi(x)^4 \right] . \quad (3.131)$$

Para finalmente obtener la acción efectiva, se inserta este último resultado en (3.1). Al hacerlo, se obtienen tres integrales respecto de T que son divergentes por el extremo inferior de integración. Entonces se integra respecto de un *cut-off* Λ con unidades de energía, y se conservan los resultados a orden dominante en Λ . Resulta

$$\begin{aligned} \int_{\Lambda^{-2}}^{\infty} \frac{dT}{T} e^{-Tm^2} &\approx \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right) , \\ \int_{\Lambda^{-2}}^{\infty} \frac{dT}{T^2} e^{-Tm^2} &\approx \Lambda^2 , \\ \int_{\Lambda^{-2}}^{\infty} \frac{dT}{T^3} e^{-Tm^2} &\approx \frac{\Lambda^4}{2} . \end{aligned} \quad (3.132)$$

Entonces, la acción efectiva (3.1) es

$$\begin{aligned} \Gamma[\varphi] = & - \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \left\{ \frac{1}{2} \varphi(x) \Delta \varphi(x) + \frac{\Lambda^4}{64\pi^2} \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \left[m^2 + \frac{\lambda}{4!} \frac{3\Lambda^2}{4\pi^2} \right] \varphi(x)^2 - \frac{\lambda}{4!} \left[1 - \frac{3\lambda \ln(\Lambda/m)}{16\pi^2} \right] \varphi(x)^4 \right\} . \end{aligned} \quad (3.133)$$

Algunos comentarios son posibles respecto de esta última expresión. En primer lugar, el término divergente $\Lambda^4/64\pi^2$ puede ser eliminado por renormalización de la constante cosmológica¹. De los tres términos restantes, el primero es simplemente el término cinético, el segundo es un término de masa (por ser proporcional a $\varphi(x)^2$), y el tercero es un término de autointeracción (por ser proporcional a $\varphi(x)^4$). Entonces, definiendo la masa efectiva

$$m_f^2 = m^2 + \frac{\lambda}{4!} \frac{3\Lambda^2}{4\pi^2} \quad (3.134)$$

y la constante de acoplamiento efectiva

$$\lambda_f = \lambda - \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right), \quad (3.135)$$

resulta que (3.133) se convierte en

$$\Gamma[\varphi] = - \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \left\{ \frac{1}{2} \varphi(x) \Delta \varphi(x) - \frac{1}{2} m_f^2 \varphi(x)^2 - \frac{\lambda_f}{4!} \varphi(x)^4 \right\}. \quad (3.136)$$

Esta última ecuación, junto con (3.134) y (3.135), representa la acción efectiva a un *loop* de la teoría $\lambda\varphi^4$. Las constantes de acoplamiento efectivas reciben también el nombre de “constantes físicas” pues cualquier medición arroja sus valores como resultados. Naturalmente, una constante física no puede depender de un *cut-off*. Este hecho permite calcular fácilmente la función $\beta(\lambda)$ dada por la ecuación (2.80):

$$\begin{aligned} 0 &= \Lambda \frac{d\lambda_f}{d\Lambda} = -\frac{3\lambda^2}{16\pi^2} + \beta(\lambda) \left(1 - \frac{3\lambda \ln(\Lambda/m)}{8\pi^2} \right) \\ &\Rightarrow \beta(\lambda) = \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} + \mathcal{O}(\lambda^3). \end{aligned} \quad (3.137)$$

Según este resultado, se tiene $\beta(\lambda) > 0$. Esto quiere decir que λ crece al aumentar Λ , y por lo tanto la interacción es muy fuerte a altas energías, volviendo obsoleto al tratamiento perturbativo de esta teoría. En otras palabras, dicho tratamiento sólo es válido a bajas energías.

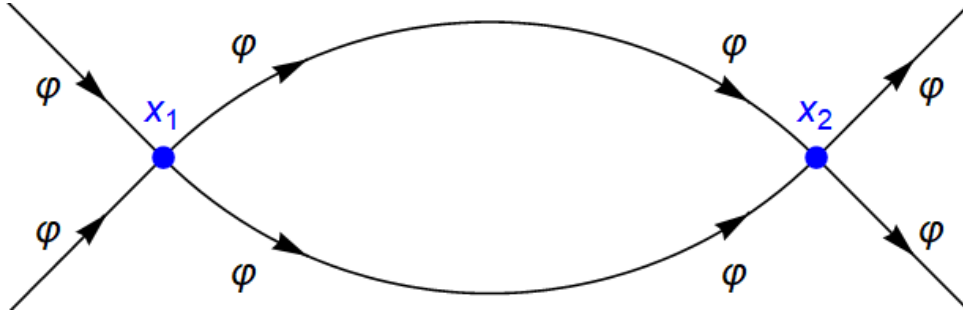
Diagramas de Feynman en el formalismo línea de mundo

El ejemplo anterior permite realizar una breve discusión sobre los diagramas de Feynman de la teoría $\lambda\varphi^4$ en el contexto del WLF. Concretamente, se mirará el diagrama a un *loop* de dispersión de dos partículas.

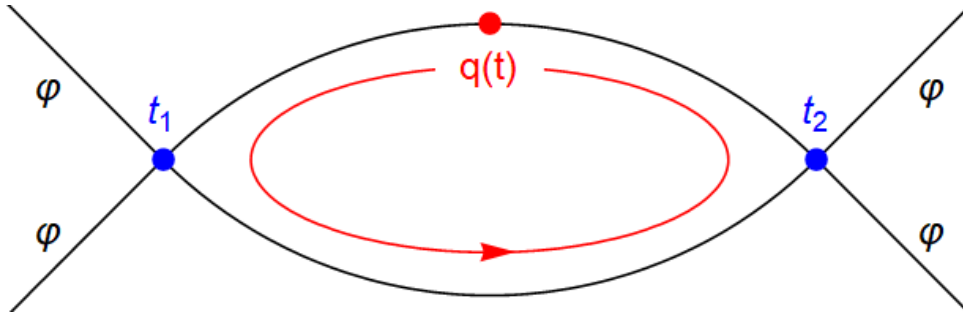
La figura 3.3(a) se corresponde a dicho diagrama dentro del formalismo tradicional (también denominado “diagramal”). En dicho diagrama, dos partículas asociadas al campo φ colisionan en un evento espacio-temporal x_1 . Las partículas dispersa-

¹Esto quiere decir, de forma menos rigurosa, que se la elimina simplemente por ser una constante en la lagrangiana.

das vuelven luego a colisionar en otro evento posterior x_2 . Luego de esta segunda colisión, las partículas no vuelven a interactuar y pueden ser detectadas. Como los eventos x_1 y x_2 son arbitrarios, se debe integrar respecto a los mismos en toda la variedad \mathcal{M} .



(a) Diagrama de Feynman a un *loop* representando la dispersión de dos partículas en el formalismo diagramal. Ambas colisionan en un evento x_1 , se dispersan y vuelven a colisionar en otro evento posterior x_2 .



(b) Diagrama de Feynman a un *loop* representando la dispersión de dos partículas en el formalismo línea de mundo. Una partícula ficticia recorre una trayectoria cerrada parametrizada mediante la función $q(t)$. En los instantes $t_1 < t_2$, interactúa con un potencial proporcional a φ^2 .

Figura 3.3: Diagramas representando la dispersión de dos partículas en la teoría $\lambda\varphi^4$ a un *loop*, utilizando el formalismo diagramal y el formalismo línea de mundo

Por otro lado, la figura 3.3(b) muestra el mismo diagrama pero dentro del formalismo línea de mundo. En él, una partícula (la partícula ficticia del formalismo) realiza una trayectoria cerrada que dura un tiempo T . En un instante de tiempo t_1 , esta partícula interactúa con un potencial proporcional a φ^2 . Esto se representa mediante las dos patas externas, una por cada campo en el potencial. En otro instante de tiempo posterior t_2 , la partícula vuelve a interactuar con el mismo potencial, lo cual se representa mediante dos patas externas más. Como los instantes t_1 y t_2 son arbitrarios, debe integrarse respecto a los mismos en todo el intervalo $(0, T)$. Como además T es una duración arbitraria para la trayectoria de la partícula, también debe integrarse respecto a la misma en el dominio \mathbb{R}^+ .

3.4.3. Anomalía conforme en \mathcal{S}^2 .

Como última aplicación del WLF en variedades sin borde, considérese el problema de hallar la anomalía de traza para un campo escalar sin masa $\varphi(x)$ donde $x \in \mathcal{S}^2$.

En primer lugar, conviene pensar a la esfera \mathcal{S}^2 como una subvariedad de \mathbb{R}^3 , de manera que todo punto en \mathcal{S}^2 puede ser descripto mediante tres coordenadas (y^1, y^2, y^3) vinculadas mediante la restricción $\delta_{ij} y^i y^j = L^2$, donde L es el radio de la esfera. A continuación, considérese la transformación de coordenadas

$$x^i = L \frac{y^i}{L - y^3}, \quad i = 1, 2. \quad (3.138)$$

La transformación anterior es simplemente la “proyección estereográfica”. Por tal proyección, cada variable x^i se mueve sobre toda la recta \mathbb{R} . Luego, la inversa de la proyección está dada por

$$\begin{aligned} y^1 &= L \frac{2x^1 L}{(x^1)^2 + (x^2)^2 + L^2} \\ y^2 &= L \frac{2x^2 L}{(x^1)^2 + (x^2)^2 + L^2} \\ y^3 &= L \frac{(x^1)^2 + (x^2)^2 - L^2}{(x^1)^2 + (x^2)^2 + L^2}. \end{aligned} \quad (3.139)$$

Por su parte, la forma diferencial de (3.138) es

$$\begin{pmatrix} dx^1 \\ dx^2 \end{pmatrix} = \frac{L}{(L - y^3)^2} \begin{pmatrix} L - y^3 & 0 & y^1 \\ 0 & L - y^3 & y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dy^1 \\ dy^2 \\ dy^3 \end{pmatrix}. \quad (3.140)$$

Como el intervalo en \mathbb{R}^3 es simplemente $ds = \sqrt{\delta_{ij} dy^i dy^j}$, resulta

$$ds^2 = \left(\frac{2L^2}{(x^1)^2 + (x^2)^2 + L^2} \right)^2 \delta_{ij} dx^i dx^j. \quad (3.141)$$

Esta última ecuación tiene una simple interpretación: la variedad \mathcal{S}^2 puede ser representada por todo el plano \mathbb{R}^2 mediante el sistema de coordenadas x , con una “métrica inducida”

$$g_{ij}(x) = \left(\frac{2L^2}{(x^1)^2 + (x^2)^2 + L^2} \right)^2 \delta_{ij}. \quad (3.142)$$

Nótese que esta métrica es de la forma $f(x)\delta_{ij}$, con lo cual resultan válidas las ecuaciones (3.97) a (3.101). Como en este caso particular vale que la función $f(x)$ es la inversa de un polinomio, resulta que el espacio de fases es especialmente cómodo para trabajar, pues la diferencia $\frac{1}{f(x+q)} - \frac{1}{f(x)}$ presente en (3.101) puede ser expandida como un polinomio respecto de las perturbaciones q . Entonces en lo sucesivo se

trabajará con las ecuaciones (3.99) y (3.101).

Concretamente, de (3.101) resulta que para el caso libre ($\mathcal{V} = 0$) se obtiene

$$\begin{aligned}
H_{\text{int}}(q, p) = & \frac{1}{4L^4} \left[4 \left(L^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 \right) \left(x^1 q^1 + x^2 q^2 \right) \right. \\
& + 4 \left(x^1 q^1 + x^2 q^2 \right)^2 + 2 \left(L^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 \right) \left((q^1)^2 + (q^2)^2 \right) \\
& + 4 \left((q^1)^2 + (q^2)^2 \right) \left(x^1 q^1 + x^2 q^2 \right) \\
& \left. + \left((q^1)^2 + (q^2)^2 \right)^2 \right] \left[(p_1)^2 + (p_2)^2 \right] - \frac{1}{2L^2},
\end{aligned} \tag{3.143}$$

donde se ha utilizado que para el presente caso, los términos de curvatura resultan $R(x) - g^{ij}(x)\Gamma_{ik}^l(x)\Gamma_{jl}^k(x) = 2/L^2$.

Ahora bien, calculando los propagadores $\langle qq \rangle$, $\langle qp \rangle$ y $\langle pp \rangle$, es inmediato notar que p es orden $T^{-1/2}$ mientras que q es orden $T^{1/2}$. Este conocimiento ayuda a saber cuáles son los propagadores necesarios para desarrollar la traza hasta cualquier orden en T que se desee. Debe recordarse que $\langle 1 \rangle$ también es parte del desarrollo, y que el mismo es orden $T^{-(D+1)/2} = T^{-1}$. Por lo tanto, si se desea conocer la traza (3.13) hasta orden T^0 , es necesario conocer las combinaciones de q y p obtenibles de (3.143) que sean a lo sumo orden T^1 . Los correspondientes valores medios pueden conocerse por medio del teorema de Wick y de las funciones de correlación de dos puntos. En resumen, los valores medios relevantes hasta orden T^0 en (3.13) son:

$$\begin{aligned}
\langle 1 \rangle &= \frac{f(x)}{4\pi T}, \\
\langle q^i(t_1)q^j(t_2) \rangle &= \langle 1 \rangle \frac{2}{f(x)} G(t_1, t_2) \delta^{ij}, \\
\langle p_i(t_1)p_j(t_2) \rangle &= \langle 1 \rangle \frac{f(x)}{2T} \delta_{ij}, \\
\langle q^i(t_1)p_j(t_2) \rangle &= \langle 1 \rangle i \bullet G(t_2, t_1) \delta_j^i, \\
\delta^{kl} \langle q^i(t)q^j(t)p_k(t)p_l(t) \rangle &= \langle 1 \rangle 2 \left(\frac{G(t, t)}{T} - [\bullet G(t, t)]^2 \right) \delta^{ij}, \\
\delta^{kl} \delta^{mn} \langle q^i(t)p_k(t)p_l(t)q^j(t')p_m(t')p_n(t') \rangle & \\
&= \langle 1 \rangle \frac{2f(x)}{T} \left(2 \frac{G(t, t')}{T} - \bullet G(t, t) \bullet G(t, t') \right. \\
&\quad - \bullet G(t, t) \bullet G(t', t') - \bullet G(t', t) \bullet G(t', t') \\
&\quad \left. - \bullet G(t', t) \bullet G(t, t') \right) \delta^{ij}.
\end{aligned} \tag{3.144}$$

Otros valores medios relevantes que involucran tres variables, como $\langle q^i(t)p_j(t)p_k(t) \rangle$, son nulos por tratarse de un número impar de campos. Por supuesto, en todos los

valores medios anteriores vale $f(x) = \left(\frac{2L^2}{L^2 + \delta_{ij}x^i x^j}\right)^2$

Insertando los anteriores valores medios en el desarrollo (3.16) hasta orden T^0 , se obtiene

$$\int \mathcal{D}q \mathcal{D}p e^{-S[q,p]} \sim \frac{1}{\pi T} \frac{L^4}{(L^2 + \delta_{ij}x^i x^j)^2} + \frac{1}{3\pi} \frac{L^2}{(L^2 + \delta_{ij}x^i x^j)^2}. \quad (3.145)$$

Vale aclarar que el resultado anterior es independiente de que se elijan las funciones de Green con condiciones homogéneas de Dirichlet (3.78) o que se elijan las funciones de Green con condiciones periódicas (3.91).

Para conocer la traza, sólo queda insertar (3.145) en (3.13) (con $m = 0$, pues se está considerando el campo sin masa). El resultado es

$$\text{Tr} e^{-T\hat{H}} \sim \frac{1}{4\pi T} \left(4\pi L^2 + \frac{4}{3}\pi T \right), \quad (3.146)$$

en perfecto acuerdo con lo que se puede calcular a partir de [21].

Finalmente, a partir de la expansión (2.73) y (3.146), es inmediato ver que los primeros coeficientes de Seeley-DeWitt del presente caso son $a_0(\mathcal{S}^2) = 4\pi L^2 = \text{Vol}(\mathcal{S}^2)$, $a_1(\mathcal{S}^2) = 0$ y $a_2(\mathcal{S}^2) = \frac{4}{3}\pi$. Por último, mediante la expresión (2.78) es posible ver que la anomalía conforme (integrada) de la teoría de campo escalar libre sin masa en la variedad plana \mathcal{S}^2 es

$$\int_{\mathcal{S}^2} d^2x \langle T_i^i \rangle = \frac{a_2(\mathcal{S}^2)}{4\pi} = \frac{1}{3}. \quad (3.147)$$

Capítulo 4

Formalismo línea de mundo (WLF) en espacios con un único borde

En el capítulo 3 se ha explicado cómo calcular la traza de la exponencial del operador de fluctuaciones cuánticas de una teoría con campo escalar mediante la introducción de una partícula ficticia, restringiendo el análisis a variedades curvas pero sin borde. El formalismo que engloba este procedimiento es llamado “línea de mundo”, y se ha mostrado que posee ciertas ventajas de cálculo notables respecto del formalismo diagramal.

Para indagar aún más en este formalismo, es deseable conocer cómo aplicarlo al caso de un campo escalar en variedades que sí tienen borde. Lamentablemente, este conocimiento es escaso en la literatura. Algunos pocos ejemplos pueden hallarse en [11–14]. Todos ellos tienen dos propiedades en común:

- la curvatura de la variedad \mathcal{M} sobre la que se trabaja es llana, y
- existe un sistema de coordenadas x para representar a \mathcal{M} tal que el dominio de x^i es toda la recta \mathbb{R} si $i = 1, \dots, D$, y el dominio de x^{D+1} es la semirrecta \mathbb{R}^+ . En otras palabras, existe un mapeo que permite describir a la variedad \mathcal{M} mediante el semiespacio $\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^+$. En dichas coordenadas se induce una métrica conformemente llana $g_{ij}(x) = f(x) \delta_{ij}$. Además, el hiperplano $x^{D+1} = 0$ representa a $\partial\mathcal{M}$, es decir, el borde de \mathcal{M} .

Una importante característica que debe cumplir \mathcal{M} para satisfacer esta última propiedad es la de tener un único borde simple. Se dice que un borde es “simple” si dado cualquier punto sobre $\partial\mathcal{M}$, entonces su entorno – también sobre $\partial\mathcal{M}$ – puede ser identificado con un entorno en \mathbb{R}^D . Para fijar esta idea, la figura 4.1 muestra cuatro ejemplos de variedades bidimensionales con borde. El borde de la variedad de la figura 4.1(a) es único y simple, en tanto que el borde de las figuras 4.1(b), 4.1(c) y 4.1(d) o bien no es simple o bien no es único.

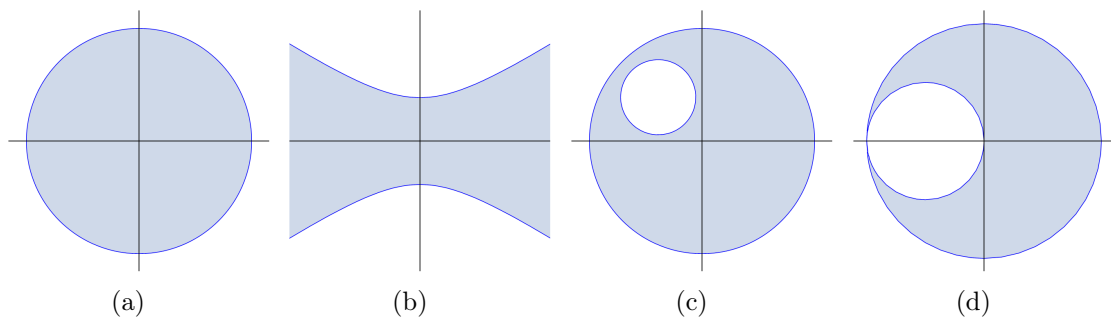


Figura 4.1: Variedades bidimensionales con borde. La figura 4.1(a) tiene un único borde simple. En cambio, 4.1(b) y 4.1(c) tienen dos bordes simples. Por su parte, 4.1(d) tiene un único borde pero el mismo no es simple.

Uno de los grandes problemas que se presenta al estudiar variedades con borde consiste en aplicar la adecuada restricción a los caminos para que los mismos estén contenidos en el interior de su borde. Por ejemplo, la figura 4.2 considera como variedad al disco bidimensional y muestra tres trayectorias cerradas que pasan por un mismo punto. Según la construcción empleada, las tres trayectorias (así como cualquier otra trayectoria en \mathbb{R}^2) son consideradas por las integrales de caminos, pero sólo aquellas que están completamente contenidas en la variedad deben ser tenidas en cuenta. Esto quiere decir que la trayectoria roja de la figura 4.2 debe ser considerada, mientras que la trayectoria anaranjada debe ser descartada por atravesar el borde de la variedad. La trayectoria verde, que toca al borde pero no lo atraviesa, debe ser tenida en cuenta o descartada según el tipo de condición que satisfaga $\partial\mathcal{M}$.

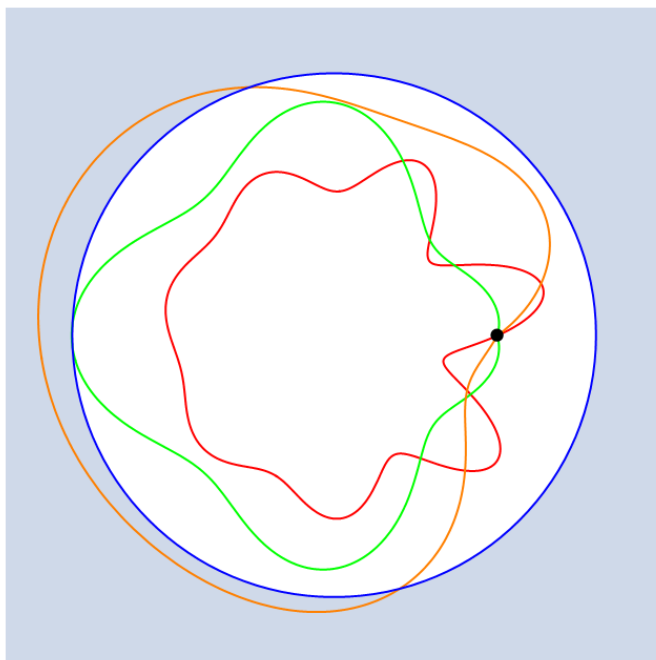


Figura 4.2: Trayectorias en un disco. La trayectoria roja no toca el borde, en tanto que la trayectoria verde lo toca sin atravesarlo y la trayectoria anaranjada sí lo traspasa. En consecuencia, la trayectoria anaranjada debe ser descartada de la integral de caminos, en tanto que la trayectoria verde debe ser considerada o descartada según la condición sobre el borde del disco.

En el presente capítulo, se aborda el estudio del WLF en variedades llanas con

un único borde simple y suave (para evitar la presencia de singularidades en la métrica), tal que dichas variedades pueden ser mapeadas a $\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^+$ donde se induce una métrica conformemente plana. Se analizan tres posibles condiciones de borde: Dirichlet, Neumann, y Robin. Como ejemplo concreto, se estudia cómo aplicar el formalismo al cálculo de los coeficientes de Seeley-DeWitt del campo escalar libre y sin masa en la bola \mathcal{B}^{D+1} , es decir, el interior de la esfera \mathcal{S}^D . Por último, se utilizan los resultados hallados en este ejemplo para encontrar la anomalía conforme de la mencionada teoría en \mathcal{B}^2 . Los resultados de esta aplicación fueron presentados en la reunión anual de la Asociación Física Argentina 2019 y publicados recientemente en [14] en coparticipación con colaboradores externos, donde se estudia el mismo problema pero con un enfoque ligeramente distinto al del presente trabajo de diploma (concretamente, el artículo no considera condiciones de borde de Robin y usa trayectorias que satisfacen condiciones de contorno de Dirichlet, mientras que en el presente trabajo sí se consideran las condiciones de borde de Robin y se utilizan trayectorias que satisfacen condiciones de contorno periódicas).

4.1. El método de las imágenes

Sea \mathcal{M} una variedad espacio-temporal $(D + 1)$ -dimensional con un único borde simple, descrita mediante coordenadas x por el semiespacio $\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^+$, de tal manera que en dichas coordenadas posee una métrica inducida conformemente llana $g_{ij}(x) = f(x)\delta_{ij}$. Por su parte, el hiperplano $x^{D+1} = 0$ representa al borde $\partial\mathcal{M}$.

Sobre esta variedad es evidente que, dado un punto inicial x y un punto final x' , las acciones libres (3.14) y (3.15) poseen al menos dos mínimos locales: uno correspondiente a la geodésica que une directamente a x con x' , y uno correspondiente con la geodésica que rebota una única vez sobre el borde. La figura 4.3 muestra estas dos trayectorias para el caso llano (es decir, con $f(x) = 1$). Asumiendo que estos dos mínimos son únicos, el elemento de matriz $\langle x'|e^{-T\hat{H}}|x\rangle$ se obtiene sumando sobre todas las fluctuaciones alrededor de estos caminos clásicos, obteniéndose

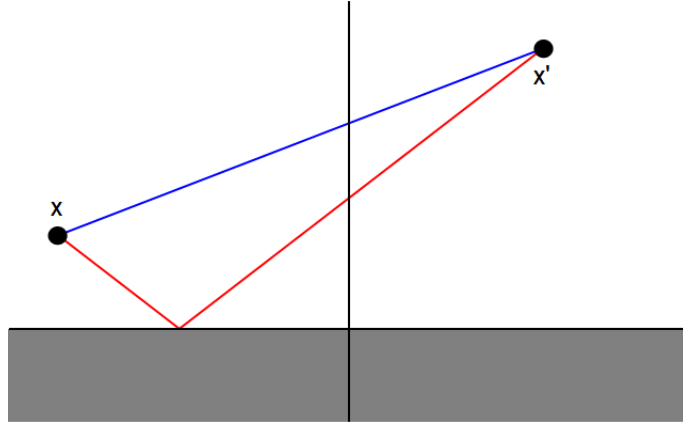
$$\langle x'|e^{-T\hat{H}}|x\rangle = \langle x'|e^{-T\hat{H}}|x\rangle_{\text{SR}} + \gamma \langle x'|e^{-T\hat{H}}|x\rangle_{\text{1R}} , \quad (4.1)$$

donde los subíndices SR y 1R significan ‘sin rebote’ y ‘un rebote’ respectivamente. Por su parte, γ es una fase relativa entre ambos caminos, que depende de la condición de borde sobre $\partial\mathcal{M}$.

A continuación, se introduce el método de las imágenes para calcular los elementos de matriz de la ecuación (4.1). El primer paso, consiste en transformar la variedad \mathcal{M} en una variedad $\widetilde{\mathcal{M}}$ sin borde, ‘duplicando’ el semiespacio superior en el semiespacio inferior. Si se define

$$\tilde{x} = (x^1, \dots, x^D, -x^{D+1}) , \quad (4.2)$$

Figura 4.3: Trayectorias clásicas en una variedad con borde. La trayectoria azul no toca el borde, en tanto que la trayectoria roja sí lo hace una única vez.



esto quiere decir que

1. $\widetilde{\mathcal{M}}$ no tiene borde y es mapeable a \mathbb{R}^{D+1} ,
2. la métrica $\tilde{g}_{ij}(x)$ sobre $\widetilde{\mathcal{M}}$ satisface

$$\tilde{g}_{ij}(x) = \theta(x^{D+1}) g_{ij}(x) + \theta(-x^{D+1}) g_{ij}(\tilde{x}), \quad y \quad (4.3)$$

3. si sobre \mathcal{M} se tiene un potencial de la forma $\mathcal{V}(x)$, entonces sobre $\widetilde{\mathcal{M}}$ será de la forma

$$\tilde{\mathcal{V}}(x) = \theta(x^{D+1}) \mathcal{V}(x) + \theta(-x^{D+1}) \mathcal{V}(\tilde{x}). \quad (4.4)$$

Nótese que 2 y 3 implican que tanto la métrica como el potencial se ‘duplican’ de forma par.

Ahora, para las trayectorias que tocan una vez el borde es posible reemplazar el camino original por el camino ‘reflejado’ que continúa a través de la frontera, como se indica en la figura 4.4. Debido a la simetría del potencial y de la métrica, tanto el camino original como el reflejado contribuyen a $\langle x' | e^{-T\hat{H}} | x \rangle$ de igual manera. En consecuencia, es conveniente reemplazar las trayectorias en \mathcal{M} que tocan una vez al borde y terminan en x' , por las trayectorias en $\widetilde{\mathcal{M}}$ que terminan en \tilde{x}' , obteniéndose

$$\langle x' | e^{-T\hat{H}} | x \rangle_{\mathcal{M}} = \langle x' | e^{-T\tilde{\hat{H}}} | x \rangle_{\widetilde{\mathcal{M}}} + \gamma \langle \tilde{x}' | e^{-T\tilde{\hat{H}}} | x \rangle_{\widetilde{\mathcal{M}}}, \quad (4.5)$$

donde los subíndices \mathcal{M} y $\widetilde{\mathcal{M}}$ son introducidos para recordar cuál es la variedad sobre la que se calcula cada elemento de matriz. Estos subíndices no volverán a ser escritos, y se sobreentenderá la variedad sobre la que se trabaja según se escriba el hamiltoniano original \hat{H} o el hamiltoniano ‘duplicado’ $\tilde{\hat{H}}$.

Recordando que lo que se desea es calcular los elementos de matriz diagonales para obtener la traza (3.6), resulta que el lado derecho de dicha ecuación se puede escribir como

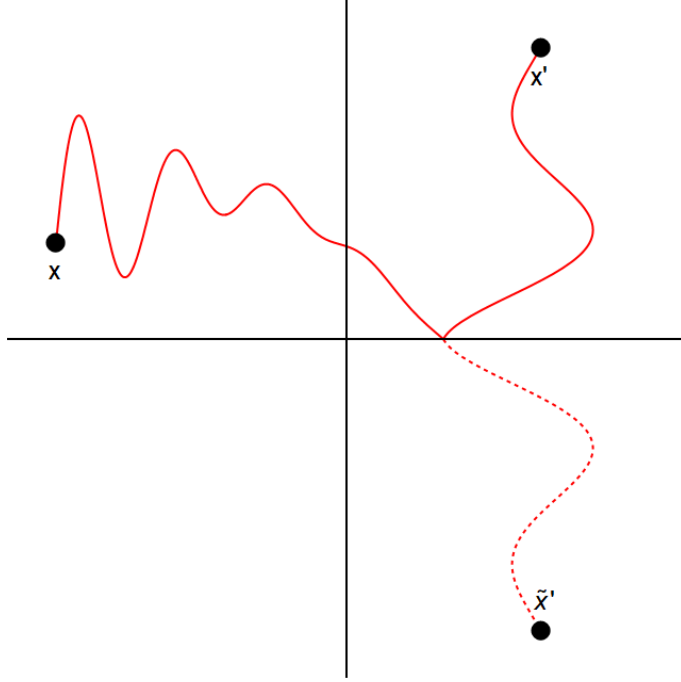


Figura 4.4: Trayectoria cuántica (línea continua) que rebota en el borde. La línea punteada es la trayectoria reflejada luego de rebotar.

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x \sqrt{g(x)} \langle x | e^{-T\hat{H}'} | x \rangle \\ &= \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x \sqrt{g(x)} \langle x | e^{-T\tilde{H}'} | x \rangle + \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x \sqrt{g(x)} \gamma \langle \tilde{x} | e^{-T\tilde{H}'} | x \rangle, \end{aligned} \quad (4.6)$$

donde $\hat{H}' = \hat{H} - m^2$ y $\tilde{H}' = \tilde{H} - m^2$. Nótese que las integrales respecto de x en el lado derecho de la igualdad se realizan sobre la variedad original \mathcal{M} , mientras que los caminos en el argumento de dichas integrales se realizan sobre la variedad duplicada $\tilde{\mathcal{M}}$. A la primera de las integrales del lado derecho se la denomina “directa” y a los términos que de ella provienen se los llama “términos directos”. Análogamente, a la segunda de las integrales del lado derecho se la denomina “indirecta” y a los términos que de ella provienen se los llama “términos indirectos”.

Los elementos de matriz en las integrales del lado derecho de (4.6) pueden calcularse de manera similar a los calculados en el capítulo anterior, pues al trabajar en la variedad duplicada $\tilde{\mathcal{M}}$ no hay ningún borde. Si se decide trabajar en el espacio de fases deben utilizarse las ecuaciones (2.41), (2.42) y (2.43), en tanto que si se decide trabajar en el espacio de configuraciones (que sólo se estudia en el presente trabajo para el caso de una métrica llana trivial, es decir, para $f(x) = 1$) deben utilizarse (2.54), (2.55) y (2.56). En estas ecuaciones, cualquiera sea el espacio en el que se decida trabajar, debe tomarse $x' = x$ para los términos directos y $x' = \tilde{x}$ para los términos indirectos. Esto implica que el cálculo de los términos directos es completamente idéntico al caso del capítulo anterior, en tanto que para los términos indirectos vale el mismo procedimiento pero teniendo en cuenta que el punto final

de los caminos no es igual al punto inicial.

4.2. Condiciones de borde

En la sección anterior se introdujo el método de las imágenes para calcular la traza (3.6). Esto condujo a tener que calcular dos elementos de matriz $\langle x | e^{-T\hat{H}'} | x \rangle$ y $\langle \tilde{x} | e^{-T\hat{H}'} | x \rangle$ en una variedad “duplicada”. Mediante (4.6) puede verse cómo contribuye cada uno de estos elementos al cálculo de la traza: el primero de ellos contribuye a los términos directos y el segundo a los indirectos. Se sabe cómo proceder con la integral directa pues su cálculo es completamente análogo a lo realizado en el capítulo 3, en tanto que en las secciones 4.3 a 4.6 se menciona cómo calcular la integral indirecta. Pero antes de pasar a ello, es adecuado mencionar cómo se puede determinar el valor de la fase γ en (4.6), la cual contiene toda la información sobre la condición de borde.

Condición homogénea de Dirichlet

La condición de borde homogénea de Dirichlet establece que

$$\langle x' | e^{-T\hat{H}} | x \rangle = 0 \quad \text{si } x' \in \partial\mathcal{M}. \quad (4.7)$$

Como $x' = \tilde{x}'$ si $x' \in \partial\mathcal{M}$, resulta que la ecuación (4.5) se convierte en

$$\langle x' | e^{-T\hat{H}} | x \rangle_{\mathcal{M}} = (1 + \gamma) \langle x' | e^{-T\tilde{H}} | x \rangle_{\tilde{\mathcal{M}}} \quad \text{si } x' \in \partial\mathcal{M}, \quad (4.8)$$

y por lo tanto la condición (4.7) implica simplemente $\gamma = -1$. Esto lleva a que (4.6) sea

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x \sqrt{g(x)} \langle x | e^{-T\hat{H}'} | x \rangle \\ &= \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x \sqrt{g(x)} \langle x | e^{-T\tilde{H}'} | x \rangle - \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x \sqrt{g(x)} \langle \tilde{x} | e^{-T\tilde{H}'} | x \rangle. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Esta última ecuación tiene una clara interpretación heurística. La última integral del lado derecho involucra caminos que deben atravesar el borde al menos una vez, y que se corresponden con las trayectorias reflejadas de algún camino de la primera de las integrales del lado derecho. Por lo tanto, la función de los términos indirectos es simplemente cancelar las contribuciones de los términos directos que tocan el borde.

Condición homogénea de Neumann

Sea n^i el vector unitario (es decir, que satisface $g_{ij}n^in^j = 1$), normal al borde $\partial\mathcal{M}$. La condición de borde homogénea de Neumann establece que

$$n^i \frac{\partial}{\partial x^i} \langle x' | e^{-T\hat{H}} | x \rangle = 0 \quad \text{si } x' \in \partial\mathcal{M}. \quad (4.10)$$

Como el borde puede ser descrito por la ecuación $x^{D+1} = 0$, resulta que es posible elegir $n^i \propto \delta_{D+1}^i$. Esto lleva a que la condición de borde sea

$$\frac{\partial}{\partial x^{D+1}} \langle x' | e^{-T\hat{H}} | x \rangle = 0 \quad \text{si } x' \in \partial\mathcal{M}. \quad (4.11)$$

Como $x^{D+1} = -\tilde{x}^{D+1}$, y además $x' = \tilde{x}'$ si $x' \in \partial\mathcal{M}$, resulta que la ecuación (4.5) se convierte en

$$\frac{\partial}{\partial x^{D+1}} \langle x' | e^{-T\hat{H}} | x \rangle_{\mathcal{M}} = \left((1 - \gamma) \frac{\partial}{\partial x^{D+1}} + \frac{\partial\gamma}{\partial x^{D+1}} \right) \langle x' | e^{-T\tilde{H}} | x \rangle_{\tilde{\mathcal{M}}} \quad \text{si } x' \in \partial\mathcal{M}. \quad (4.12)$$

Para resolver la condición (4.11), es necesario que sean nulos tanto el término proporcional a $\frac{\partial}{\partial x^{D+1}}$ como también el término $\frac{\partial\gamma}{\partial x^{D+1}}$. Esto se logra correctamente si $\gamma = 1$, lo cual lleva a que (4.6) sea

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x \sqrt{g(x)} \langle x | e^{-T\hat{H}'} | x \rangle \\ &= \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x \sqrt{g(x)} \langle x | e^{-T\tilde{H}'} | x \rangle + \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x \sqrt{g(x)} \langle \tilde{x} | e^{-T\tilde{H}'} | x \rangle. \end{aligned} \quad (4.13)$$

A diferencia de las condiciones de borde de Dirichlet, cabe mencionar que la condición homogénea de Neumann no posee una interpretación heurística sencilla.

Condición homogénea de Robin

La condición homogénea de Robin establece que

$$\left(n^i \frac{\partial}{\partial x^i} + S(x') \right) \langle x' | e^{-T\hat{H}} | x \rangle = 0 \quad \text{si } x' \in \partial\mathcal{M}, \quad (4.14)$$

pero por simplicidad se considerará sólo el caso en el que $S(x) = S = \text{cte}$. En este caso es posible escribir $n^i = \delta_{D+1}^i / \sqrt{f(x')}$, y entonces la condición de borde se convierte en

$$\left(\frac{1}{\sqrt{f(x')}} \frac{\partial}{\partial x^{D+1}} + S \right) \langle x' | e^{-T\hat{H}} | x \rangle = 0 \quad \text{si } x' \in \partial\mathcal{M}. \quad (4.15)$$

Como $x'_{D+1} = -\tilde{x}'_{D+1}$, y además $x' = \tilde{x}'$ si $x' \in \partial\mathcal{M}$, resulta que la ecuación (4.5) se convierte en

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\sqrt{f(x')}} \frac{\partial}{\partial x'^{D+1}} + S \right) \langle x' | e^{-T\hat{H}} | x \rangle_{\mathcal{M}} \\ &= \left(\frac{1-\gamma}{\sqrt{f(x')}} \frac{\partial}{\partial x'^{D+1}} + \frac{1}{\sqrt{f(x')}} \frac{\partial \gamma}{\partial x'^{D+1}} + (1+\gamma)S \right) \langle x' | e^{-T\tilde{H}} | x \rangle_{\tilde{\mathcal{M}}} \\ & \hspace{15em} \text{si } x' \in \partial\mathcal{M}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Al igual que en el caso Neumann, es necesario que en esta última expresión sean nulos tanto el término que es proporcional a $\frac{\partial}{\partial x'^{D+1}}$ como también el término que no es proporcional a dicho operador. Lo primero implica necesariamente que sea $\gamma = 1$, pero esto implica entonces que $S = 0$, lo cual es absurdo. Claramente, el método hasta aquí desarrollado entra en un impasse, y debe desarrollarse una alternativa que se adecúe a la condición de contorno de Robin.

La alternativa [12] consiste en suponer que al hamiltoniano ‘duplicado’ se le debe sumar un potencial extra $V_{\partial}(x^{D+1})$. Entonces, derivando (4.5) respecto de T se obtiene

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial T} \langle x' | e^{-T\hat{H}} | x \rangle_{\mathcal{M}} \\ &= \frac{\partial}{\partial T} \left(\langle x' | e^{-T(\tilde{H}+V_{\partial}(x^{D+1}))} | x \rangle_{\tilde{\mathcal{M}}} + \gamma \langle \tilde{x}' | e^{-T(\tilde{H}+V_{\partial}(x^{D+1}))} | x \rangle_{\tilde{\mathcal{M}}} \right) \\ &= - \left(\tilde{H} + V_{\partial}(x^{D+1}) \right)' \left(\langle x' | e^{-T(\tilde{H}+V_{\partial}(x^{D+1}))} | x \rangle_{\tilde{\mathcal{M}}} + \gamma \langle \tilde{x}' | e^{-T(\tilde{H}+V_{\partial}(x^{D+1}))} | x \rangle_{\tilde{\mathcal{M}}} \right) \\ &= - \left(-\Delta + m^2 + \left[\frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial \varphi^2} \right]_{\varphi=\varphi_{\text{cl}}} + V_{\partial}(x^{D+1}) \right)' \langle x' | e^{-T\hat{H}} | x \rangle_{\mathcal{M}}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

donde $\Delta = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g} \tilde{g}^{ij} \partial_j)$. Además, la comilla al final de algunos paréntesis denota que el operador en su interior debe ser tomado respecto de x' .

Puesto que si se elige $\gamma = 1$ vale que la ‘duplicación’ hacia la variedad $\tilde{\mathcal{M}}$ se realiza de forma par y continua, es posible integrar la segunda línea en (4.17) respecto de un volumen ‘pegado a la variedad’ (es decir, con x'^{D+1} entre 0^- y 0^+) y obtener en consecuencia un resultado nulo. Entonces, realizando la misma integración en la última línea (y asumiendo también la continuidad de \mathcal{V}), se obtiene

$$\begin{aligned}
& \int_{x'^{D+1}=0^-}^{x'^{D+1}=0^+} d^{D+1}x' \sqrt{\tilde{g}} \left(-\Delta + m^2 + \left[\frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial \varphi^2} \right]_{\varphi=\varphi_{cl}} + V_{\partial}(x^{D+1}) \right)' \langle x' | e^{-T\hat{H}} | x \rangle_{\mathcal{M}} \\
&= - \int d^D x' \left[\sqrt{\tilde{g}} \delta_i^{D+1} g^{ij}(x') \partial'_j \langle x' | e^{-T\hat{H}} | x \rangle_{\mathcal{M}} \right]_{x'^{D+1}=0^-}^{x'^{D+1}=0^+} \\
&\quad + \int_{x'^{D+1}=0^-}^{x'^{D+1}=0^+} d^{D+1}x' \sqrt{\tilde{g}} V_{\partial}(x^{D+1}) \langle x' | e^{-T\hat{H}} | x \rangle_{\mathcal{M}} = 0 . \quad (4.18)
\end{aligned}$$

Como la ‘duplicación’ es par resulta que la derivada normal es impar, y por lo tanto

$$\sqrt{\tilde{g}} \delta_i^{D+1} g^{ij}(x') \partial'_j \langle x' | e^{-T\hat{H}} | x \rangle_{\mathcal{M}} \Big|_{x'^{D+1}=0^-}^{x'^{D+1}=0^+} = 2 \frac{\sqrt{\tilde{g}}}{\sqrt{f(x')}} n^i \partial'_i \langle x' | e^{-T\hat{H}} | x \rangle_{\mathcal{M}} \Big|_{x'^{D+1}=0^+} . \quad (4.19)$$

Esto lleva a

$$\begin{aligned}
& \int_{x'^{D+1}=0^-}^{x'^{D+1}=0^+} dx'^{D+1} \sqrt{\tilde{g}} V_{\partial}(x^{D+1}) \langle x' | e^{-T\hat{H}} | x \rangle_{\mathcal{M}} \\
&= 2 \left[\frac{\sqrt{\tilde{g}}}{\sqrt{f(x')}} n^i \partial'_i \langle x' | e^{-T\hat{H}} | x \rangle_{\mathcal{M}} \right]_{x'^{D+1}=0^+} . \quad (4.20)
\end{aligned}$$

Finalmente, tomando $V_{\partial}(x^{D+1}) = -2 \frac{S}{\sqrt{f(x')}} \delta(x^{D+1})$ se reproduce la condición de borde (4.14). En resumen, la ecuación (4.6) toma en el presente caso la forma

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x \sqrt{g(x)} \langle x | e^{-T\hat{H}'} | x \rangle \\
&= \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x \sqrt{g(x)} \langle x | e^{-T\tilde{H}'_{\partial}} | x \rangle + \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x \sqrt{g(x)} \langle \tilde{x} | e^{-T\tilde{H}'_{\partial}} | x \rangle , \quad (4.21)
\end{aligned}$$

donde

$$\tilde{H}'_{\partial} = \tilde{H}' - 2 \frac{S}{\sqrt{f(x')}} \delta(x^{D+1}) . \quad (4.22)$$

En resumidas cuentas, la ecuación (4.22) muestra que para tratar con condiciones de Robin es necesario acoplar un potencial tipo delta al problema original.

4.3. Funcional generatriz en el espacio de configuraciones

Habiendo explicado cómo el método de las imágenes lleva a la ecuación (4.6) y cómo las condiciones de borde convierten dicha expresión en (4.9) para condiciones Dirichlet, en (4.13) para condiciones Neumann o en (4.21) para condiciones Robin, es hora de explicar cómo calcular los elementos de matriz en términos de integrales de camino, comenzando por el caso llano en el espacio de configuraciones.

Al trabajar sobre la variedad ‘duplicada’ $\widetilde{\mathcal{M}}$ se elimina el borde, y por lo tanto la mayoría de los métodos desarrollados en los capítulos anteriores siguen siendo válidos. En particular, son válidas las ecuaciones (2.54), (2.55), (2.56), (3.17) y (3.19), así también como la funcional generatriz (3.20). Para los términos directos, son válidos todos los resultados desarrollados en el capítulo 3, de manera que su cálculo puede realizarse sin introducir nuevas herramientas. En cambio, para los términos indirectos debe tenerse en cuenta que el punto inicial no es idéntico al punto final, lo cual puede inducir cambios en las funciones de Green y en el valor medio $\langle 1 \rangle$.

Si al trabajar con los términos indirectos se opta por calcular la función de Green utilizando condiciones de contorno de Dirichlet, es inmediato ver que tampoco hay diferencia alguna con el caso sin borde. Efectivamente, al separar las trayectorias rectas $r(t) = x + \frac{t}{T}(x' - x)$ de las perturbaciones $q(t)$, resulta que también en este caso son válidas las condiciones $q(0) = q(T) = 0$ que en la sección 3.2.1 han llevado a obtener la función de Green (3.34). Asimismo, también es válido el cálculo de la sección 3.2.3 que lleva a obtener el valor medio $\langle 1 \rangle$.

La situación cambia si se decide trabajar con caminos que satisfacen condiciones periódicas. Al igual que en el caso sin borde, pueden elegirse los caminos sobre \mathcal{M} de manera tal que su punto inicial y final satisfagan condiciones periódicas. En tal caso, es fácil convencerse de que sólo las primeras D coordenadas cumplen con esas mismas condiciones en $\widetilde{\mathcal{M}}$. La coordenada restante, en cambio, satisface condiciones antiperiódicas. A esta coordenada conviene no separarla en la forma $z^{D+1}(t) = x_{CM}^{D+1} + q^{D+1}(t)$ (o, equivalentemente, imponer $x_{CM}^{D+1} = 0$) para que la perturbación $q(t)$ también satisfaga condiciones antiperiódicas. Entonces, la integral $\int d^{D+1}x$ presente en (4.6) no se realiza respecto de x_{CM}^{D+1} , sino respecto del punto inicial $q^{D+1}(0)$. Por este motivo, conviene definir $x^{D+1} \equiv q^{D+1}(0)$. En resumen, las condiciones que satisfacen las perturbaciones son

$$\begin{cases} q^i(0) = q^i(T) \\ \dot{q}^i(0) = \dot{q}^i(T) \end{cases} \quad \text{si } i = 1, \dots, D, \quad (4.23)$$

$$\begin{cases} q^{D+1}(0) = -q^{D+1}(T) \\ \dot{q}^{D+1}(0) = -\dot{q}^{D+1}(T) \end{cases} .$$

En otras palabras, las primeras D coordenadas satisfacen condiciones periódicas, en tanto que la $(D + 1)$ -ésima satisface condiciones antiperiódicas. Para las primeras coordenadas se puede proceder de manera análoga a la sección 3.2.2 y obtener entonces la función de Green (3.43), en tanto que para la coordenada antiperiódica q^{D+1} se debe recalcular su función de Green $G_A(t, t')$, la cual satisface las condiciones

$$\begin{aligned} G_A(0, t') &= -G_A(T, t') , \\ \bullet G_A(0, t') &= -\bullet G_A(T, t') . \end{aligned} \quad (4.24)$$

Como para las condiciones antiperiódicas no hay modos cero asociados al operador $-\partial_t^2$, resulta que $G_A(t, t')$ satisface la ecuación

$$-\partial_t^2 G_A(t, t') = \delta(t - t') . \quad (4.25)$$

Integrando dos veces con respecto a t y utilizando las condiciones (4.24), se obtiene

$$G_A(t, t') = -\frac{1}{2}|t - t'| + \frac{T}{4} . \quad (4.26)$$

Queda entonces por considerar el cálculo del valor medio $\langle 1 \rangle$ con estas condiciones periódicas y antiperiódicas. Para ello puede simplemente partirse de la ecuación (3.57). Al hacerlo, debe tomarse $q_N^i - q_0^i = -2x^{D+1}\delta_{D+1}^i$. Este resultado, al ser insertado en (3.44), lleva finalmente a

$$\langle 1 \rangle = \left(\frac{1}{4\pi T} \right)^{(D+1)/2} \exp \left\{ -\frac{(x^{D+1})^2}{T} \right\} . \quad (4.27)$$

4.4. Funcional generatriz en el espacio de fases

Habiendo explicado en la sección (4.3) cómo calcular los elementos de matriz en términos de integrales de camino en el espacio de configuraciones llano, ahora se procede a explicar cómo calcularlos en el espacio de fases curvo. El procedimiento es prácticamente análogo, así que gran parte del siguiente texto es idéntico al de la sección anterior, excepto por las ecuaciones calculadas y referenciadas.

Al trabajar sobre la variedad ‘duplicada’ $\widetilde{\mathcal{M}}$ se elimina el borde, y por lo tanto la mayoría de los métodos desarrollados en los capítulos anteriores siguen siendo válidos. En particular, son válidas las ecuaciones (2.41), (2.42), (2.43), (3.16) y (3.18), así también como la funcional generatriz (3.60). Para los términos directos, son válidos todos los resultados desarrollados en el capítulo 3, de manera que su cálculo puede realizarse sin introducir nuevas herramientas. En cambio, para los términos indirectos debe tenerse en cuenta que el punto inicial no es idéntico al punto final, lo cual puede inducir cambios en las funciones de Green y en el valor medio $\langle 1 \rangle$.

Con el mismo argumento de la sección anterior, es fácil ver que si se opta por calcular las funciones de Green utilizando condiciones de contorno de Dirichlet,

entonces no hay diferencia alguna al caso sin borde, obteniéndose nuevamente las funciones de Green (3.78). Asimismo, también es válido el cálculo de la sección 3.3.3 que lleva a obtener el valor medio $\langle 1 \rangle$. De hecho, también es válido el resultado (3.96), debiendo tan solo realizarse el cambio $g(x) \rightarrow \tilde{g}(x)$.

La situación cambia si se decide trabajar con caminos que satisfacen condiciones periódicas. Al igual que en el caso sin borde, pueden elegirse los caminos sobre \mathcal{M} de manera tal que su punto inicial y final satisfagan condiciones periódicas. En tal caso, es fácil convencerse de que sólo las primeras D coordenadas cumplen con esas mismas condiciones en $\widetilde{\mathcal{M}}$. La coordenada restante, en cambio, satisface condiciones antiperiódicas. A esta coordenada conviene no separarla en la forma $z^{D+1}(t) = x_{CM}^{D+1} + q^{D+1}(t)$ (o, equivalentemente, imponer $x_{CM}^{D+1} = 0$) para que la perturbación $q(t)$ también satisfaga condiciones antiperiódicas. Entonces, la integral $\int d^{D+1}x$ presente en (4.6) no se realiza respecto de x_{CM}^{D+1} , sino respecto del punto inicial $q^{D+1}(0)$. Por este motivo, conviene definir $x^{D+1} \equiv q^{D+1}(0)$. En resumen, las condiciones que satisfacen las perturbaciones son

$$\begin{cases} p_i(0) = p_i(T) \\ q^i(0) = q^i(T) \end{cases} \quad \text{si } i = 1, \dots, D, \quad (4.28)$$

$$\begin{cases} p_{D+1}(0) = -p_{D+1}(T) \\ q^{D+1}(0) = -q^{D+1}(T) \end{cases} .$$

En otras palabras, las primeras D coordenadas satisfacen condiciones periódicas, en tanto que la $(D + 1)$ -ésima satisface condiciones antiperiódicas. Para las primeras coordenadas se puede proceder de manera análoga a la sección 3.3.2 y obtener entonces la función de Green (3.91), en tanto que para la coordenada antiperiódica q^{D+1} se deben recalcular sus funciones de Green $G_{ijA}(t, t')$, las cuales satisfacen las condiciones

$$\begin{aligned} G_{11A}(0, t') &= -G_{11A}(T, t') , \\ G_{12A}(0, t') &= -G_{12A}(T, t') , \\ G_{21A}(0, t') &= -G_{21A}(T, t') , \\ G_{22A}(0, t') &= -G_{22A}(T, t') . \end{aligned} \quad (4.29)$$

Como para las condiciones antiperiódicas no hay modos cero asociados al operador matricial $\begin{pmatrix} 2 & -i\partial_t \\ i\partial_t & 0 \end{pmatrix}$, resulta que las funciones $G_{ijA}(t, t')$ satisfacen la ecuación

$$\begin{pmatrix} 2 & -i\partial_t \\ i\partial_t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{11A}(t, t') & G_{12A}(t, t') \\ G_{21A}(t, t') & G_{22A}(t, t') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta(t - t') & 0 \\ 0 & \delta(t - t') \end{pmatrix} . \quad (4.30)$$

Resolviendo esta ecuación matricial con las condiciones (4.29), se obtiene

$$\begin{pmatrix} G_{11A}(t, t') & G_{12A}(t, t') \\ G_{21A}(t, t') & G_{22A}(t, t') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \bullet G_A(t, t') \\ i \bullet G_A(t', t) & 2G_A(t, t') \end{pmatrix}, \quad (4.31)$$

donde las funciones de Green son

$$\begin{aligned} G_A(t, t') &\equiv G_A(t - t') \equiv -\frac{1}{2}|t - t'| + \frac{T}{4}, \\ \bullet G_A(t, t') &\equiv \partial_t G_A(t - t') \equiv -\frac{1}{2}\epsilon(t - t'). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Queda entonces por considerar el cálculo del valor medio $\langle 1 \rangle$ con estas condiciones periódicas y antiperiódicas. El argumento para calcularlo es idéntico al expuesto en la sección anterior, partiéndose esta vez desde (3.95) y obteniéndose entonces un resultado similar a (4.27) pero involucrando la métrica $g_{ij}(x) = f(x_\partial)\delta_{ij}$ evaluada en puntos del borde $x_\partial = (x^1, \dots, x^D, 0)$. El resultado es

$$\langle 1 \rangle = \left(\frac{f(x_\partial)}{4\pi T} \right)^{(D+1)/2} \exp \left\{ -\frac{(x^{D+1})^2}{T} f(x_\partial) \right\}. \quad (4.33)$$

4.5. Valor medio de la delta de Dirac y función de Heaviside

Al calcular el potencial efectivo (2.43) o (2.56) en la variedad ‘duplicada’ $\widetilde{\mathcal{M}}$ debe utilizarse la métrica (4.3) y el potencial (4.4) (además de (4.22) si se trabaja con condiciones de borde de Robin). Esto conduce a que sobre el potencial efectivo aparezcan deltas de Dirac y funciones de Heaviside. Al trabajar con la expresión perturbativa (3.16) o (3.17) surgen entonces valores medios de la forma $\langle \delta(q + x) \rangle$ y $\langle \theta(q + x) \rangle$ (posiblemente acompañados de varios campos q y p). En la presente sección se discute cómo calcularlos.

Antes de proceder, debe notarse que los valores medios de estas distribuciones no son exclusivos de variedades con borde; en variedades sin borde también pueden aparecer en cualquier punto donde la métrica $g_{ij}(x)$ sea no derivable, gracias a los contratérminos $-R + g^{ij}\Gamma_{ik}^l\Gamma_{jl}^k$. Entonces la discusión de la presente sección bien podría haber sido parte del capítulo 3. No obstante, debido a que en variedades sin borde estas distribuciones pueden no aparecer (efectivamente, no aparecieron en ninguna de las aplicaciones de la sección 3.4) pero sí aparecen necesariamente en variedades con borde, se ha decidido presentar recién aquí este tema.

La clave para calcular los valores medios de estas distribuciones consiste en utilizar sus desarrollos de Fourier

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega x}, \quad (4.34)$$

$$\theta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{e^{i\omega x}}{\omega - i0}. \quad (4.35)$$

Esta última expansión eventualmente es acompañada por

$$\frac{1}{\omega - i0} = \text{PV}\left(\frac{1}{\omega}\right) + i\pi \delta(\omega), \quad (4.36)$$

donde PV es simplemente el valor principal.

Con este método, se puede observar que el problema de calcular valores medios que involucren a $\delta(q+x)$ y $\theta(q+x)$ se convierte en el problema de calcular valores medios que involucren a $e^{i\omega q}$. El cálculo de estas cantidades se realiza de manera similar a (3.21) y (3.61), excepto que tras realizar las derivaciones no deben evaluarse todos los campos fuentes en $j=0$, sino que el campo fuente asociado con la coordenada presente en la exponencial debe ser evaluado en $j = \omega \delta(t - t_1)$.

A continuación se listan algunos valores medios que involucren a la exponencial $e^{i\omega q}$. Concretamente, se escogieron aquellos que resultan relevantes para la aplicación de la sección 4.7. Para simplificar la notación, se define $x_{\partial} = (x^1, x^2, \dots, x^D, 0)$. Si en la última coordenada se asignan condiciones periódicas, se obtiene

$$\begin{aligned} \langle e^{-i\omega q^{D+1}(t_1)} \rangle &= \left(\frac{f(x)}{4\pi T}\right)^{(D+1)/2} \exp\left\{-\frac{T}{12} \frac{\omega^2}{f(x)}\right\}, \\ \langle q^{D+1}(t_1) e^{-i\omega q^{D+1}(t_1)} \rangle &= \left(\frac{f(x)}{4\pi T}\right)^{(D+1)/2} (-i) \frac{T}{6} \frac{\omega}{f(x)} \exp\left\{-\frac{T}{12} \frac{\omega^2}{f(x)}\right\}, \\ \langle p_i(t_1) e^{-i\omega q^{D+1}(t_1)} \rangle &= 0, \\ \langle p_i(t_1) q^{D+1}(t_1) e^{-i\omega q^{D+1}(t_1)} \rangle &= 0, \\ \langle p_i(t_1) p_j(t_1) e^{-i\omega q^{D+1}(t_1)} \rangle &= \left(\frac{f(x)}{4\pi T}\right)^{(D+1)/2} \frac{f(x)}{2T} \delta_{ij} \exp\left\{-\frac{T}{12} \frac{\omega^2}{f(x)}\right\}, \\ \langle p_i(t_1) p_j(t_1) q^{D+1}(t_1) e^{-i\omega q^{D+1}(t_1)} \rangle &= \left(\frac{f(x)}{4\pi T}\right)^{(D+1)/2} (-i) \frac{\omega}{12} \delta_{ij} \exp\left\{-\frac{T}{12} \frac{\omega^2}{f(x)}\right\}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

En cambio, si en la última coordenada se asignan condiciones antiperiódicas, se tiene

$$\begin{aligned} \langle e^{-i\omega q^{D+1}(t_1)} \rangle &= \left(\frac{f(x_{\partial})}{4\pi T}\right)^{(D+1)/2} \exp\left\{-\frac{(x^{D+1})^2}{T} f(x_{\partial})\right\} \\ &\times \exp\left\{-\frac{T}{4} \frac{\omega^2}{f(x_{\partial})}\right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle q^{D+1}(t_1) e^{-i\omega q^{D+1}(t_1)} \rangle &= \left(\frac{f(x_\partial)}{4\pi T} \right)^{(D+1)/2} \exp \left\{ -\frac{(x^{D+1})^2}{T} f(x_\partial) \right\} \\
&\quad \times (-i) \frac{T}{2} \frac{\omega}{f(x_\partial)} \exp \left\{ -\frac{T}{4} \frac{\omega^2}{f(x_\partial)} \right\}, \\
\langle p_i(t_1) e^{-i\omega q^{D+1}(t_1)} \rangle &= 0, \\
\langle p_i(t_1) q^{D+1}(t_1) e^{-i\omega q^{D+1}(t_1)} \rangle &= 0, \\
\langle p_i(t_1) p_j(t_1) e^{-i\omega q^{D+1}(t_1)} \rangle &= \left(\frac{f(x_\partial)}{4\pi T} \right)^{(D+1)/2} \exp \left\{ -\frac{(x^{D+1})^2}{T} f(x_\partial) \right\} \\
&\quad \times \frac{f(x_\partial)}{2T} \left(\delta_{ij} - \delta_i^{D+1} \delta_{D+1,j} \right) \exp \left\{ -\frac{T}{4} \frac{\omega^2}{f(x_\partial)} \right\}, \\
\langle p_i(t_1) p_j(t_1) q^{D+1}(t_1) e^{-i\omega q^{D+1}(t_1)} \rangle &= \left(\frac{f(x_\partial)}{4\pi T} \right)^{(D+1)/2} \exp \left\{ -\frac{(x^{D+1})^2}{T} f(x_\partial) \right\} \\
&\quad \times (-i) \frac{\omega}{4} \left(\delta_{ij} - \delta_i^{D+1} \delta_{D+1,j} \right) \exp \left\{ -\frac{T}{4} \frac{\omega^2}{f(x_\partial)} \right\}.
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Resulta entonces que el presente método para calcular los valores medios de las deltas no requieren la introducción de nuevas herramientas ni trucos, ya que pueden calcularse directamente mediante la funcional generatriz. Por otro lado, el método también introduce una nueva integral (respecto de ω). Dicha integral para la distribución delta de Dirac es inmediata, mientras que para la función de Heaviside requiere del uso de (4.36).

4.6. Resumen: términos directos e indirectos

A continuación se resumen los resultados de las secciones anteriores, poniéndolos a todos ellos juntos en pocas expresiones.

Términos directos

En primer lugar, considérese la integral directa en la ecuación (4.6) pero añadiendo el potencial extra que aparece con las condiciones de borde de Robin, es decir

$$\int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x \sqrt{g(x)} \langle x | e^{-T(\tilde{H}' + V_\partial(x^{D+1}))} | x \rangle \tag{4.39}$$

donde $\tilde{H}' + V_\partial(x^{D+1}) = \tilde{H} - m^2 - 2\frac{S}{\sqrt{f(x)}}\delta(x^{D+1})$, en tanto que \tilde{H} es simplemente el mismo hamiltoniano H de la partícula ficticia pero ‘duplicado’. A continuación debe realizarse el reemplazo $x \rightarrow x + q$ y utilizar las integrales de caminos en términos de q .

Si se trabaja en el espacio de configuraciones llano, la integral directa se convierte entonces en

$$\int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x \int \mathcal{D}q e^{-S[q]} = \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x \left\langle e^{-\int_0^T dt H_{\text{int}}(q)} \right\rangle, \quad (4.40)$$

donde $H_{\text{int}}(q)$ está dado por

$$H_{\text{int}}(q) = \left[\frac{\partial^2 \tilde{\mathcal{V}}}{\partial \varphi^2} \right]_{\varphi=\varphi_{\text{cl}}(x+q)} - 2 \frac{S}{\sqrt{f(x+q)}} \delta(x^{D+1} + q^{D+1}). \quad (4.41)$$

Para resolver el valor medio en (4.40) se expande la exponencial y se calculan los valores medios en cada término según se describe en las secciones 4.3 y 4.5.

Si en cambio se trabaja en el espacio de fases curvo, la integral directa se convierte entonces en

$$\int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x \int \mathcal{D}q \mathcal{D}p e^{-S[q,p]} = \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x \left\langle e^{-\int_0^T dt H_{\text{int}}(q,p)} \right\rangle, \quad (4.42)$$

donde $H_{\text{int}}(q,p)$ está dado por

$$\begin{aligned} H_{\text{int}}(q,p) &= \left[\frac{1}{\tilde{f}(x+q)} - \frac{1}{\tilde{f}(x)} \right] \delta^{ij} p_i p_j \\ &\quad - \frac{1}{4} [\tilde{R}(x+q) - \tilde{g}^{ij}(x+q) \tilde{\Gamma}_{ik}^l(x+q) \tilde{\Gamma}_{jl}^k(x+q)] \\ &\quad + \left[\frac{\partial^2 \tilde{\mathcal{V}}}{\partial \varphi^2} \right]_{\varphi=\varphi_{\text{cl}}(x+q)} \\ &\quad - 2 \frac{S}{\sqrt{f(x+q)}} \delta(x^{D+1} + q^{D+1}), \end{aligned} \quad (4.43)$$

donde se ha usado $\tilde{f}(x) = \theta(x^{D+1})f(x) + \theta(-x^{D+1})f(\tilde{x})$. Para resolver el valor medio en (4.42) se expande la exponencial y se calculan los valores medios en cada término según se describe en las secciones 4.4 y 4.5.

Términos indirectos

Ahora considérese la integral indirecta en la ecuación (4.6), nuevamente añadiendo el potencial extra que aparece con las condiciones de borde de Robin, es decir

$$\int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x \sqrt{g(x)} \langle \tilde{x} | e^{-(\tilde{H}' + V_{\partial}(x^{D+1}))} | x \rangle \quad (4.44)$$

donde $\tilde{H}' + V_{\partial}(x^{D+1}) = \tilde{H} - m^2 - 2 \frac{S}{\sqrt{f(x)}} \delta(x^{D+1})$, en tanto que \tilde{H} es simplemente el mismo hamiltoniano H de la partícula ficticia pero ‘duplicado’. A continuación

debe realizarse el reemplazo $x \rightarrow x + (\tilde{x} - x)t/T + q = x - 2x^{D+1}t/T + q$ y utilizar las integrales de caminos en términos de q .

Si se trabaja en el espacio de configuraciones llano, la integral indirecta se convierte entonces en

$$\int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x \int \mathcal{D}q e^{-S[q]} = \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x \left\langle e^{-\int_0^T dt H_{\text{int}}(q, \dot{q})} \right\rangle, \quad (4.45)$$

donde $H_{\text{int}}(q, \dot{q})$ está dado por

$$\begin{aligned} H_{\text{int}}(q, \dot{q}) = & - \left[\dot{q}^{D+1} - \frac{x^{D+1}}{T} \right] \frac{x^{D+1}}{T} \\ & + \left[\frac{\partial^2 \tilde{\mathcal{V}}}{\partial \varphi^2} \right]_{\varphi = \varphi_{\text{cl}}(x - 2x^{D+1}t/T + q)} \\ & - 2 \frac{S}{\sqrt{f(x - 2x^{D+1}t/T + q)}} \delta(x^{D+1} + q^{D+1}). \end{aligned} \quad (4.46)$$

Para resolver el valor medio en (4.45) se expande la exponencial y se calculan los valores medios en cada término según se describe en las secciones 4.3 y 4.5.

Si en cambio se trabaja en el espacio de fases curvo, la integral indirecta se convierte entonces en

$$\int_{\mathcal{M}} \left(\frac{\tilde{g}(x)}{\tilde{g}(\tilde{x})} \right)^{1/4} d^{D+1}x \int \mathcal{D}q \mathcal{D}p e^{-S[q,p]} = \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x \left\langle e^{-\int_0^T dt H_{\text{int}}(q,p)} \right\rangle, \quad (4.47)$$

donde $H_{\text{int}}(q, p)$ está dado por

$$\begin{aligned} H_{\text{int}}(q, p) = & \left[\frac{1}{\tilde{f}(x - 2x^{D+1}t/T + q)} - \frac{1}{\tilde{f}(x)} \right] \delta^{ij} p_i p_j + 2i \frac{x^{D+1}}{T} p_{D+1} \\ & - \frac{1}{4} \left[\tilde{R} \left(x - 2 \frac{t}{T} x^{D+1} + q \right) \right. \\ & \left. - \tilde{g}^{ij} \left(x - 2 \frac{t}{T} x^{D+1} + q \right) \tilde{\Gamma}_{ik}^l \left(x - 2 \frac{t}{T} x^{D+1} + q \right) \tilde{\Gamma}_{jl}^k \left(x - 2 \frac{t}{T} x^{D+1} + q \right) \right] \\ & + \left[\frac{\partial^2 \tilde{\mathcal{V}}}{\partial \varphi^2} \right]_{\varphi = \varphi_{\text{cl}}(x - 2x^{D+1}t/T + q)} \\ & - 2 \frac{S}{\sqrt{f(x - 2x^{D+1}t/T + q)}} \delta(x^{D+1} + q^{D+1}). \end{aligned} \quad (4.48)$$

Nótese que el cociente $\tilde{g}(x)/\tilde{g}(\tilde{x})$ en (4.47) desaparece porque la métrica es duplicada de forma par respecto de x^{D+1} , lo que implica que $\tilde{g}(x) = \tilde{g}(\tilde{x})$. Para resolver el valor

medio en (4.47) se expande la exponencial y se calculan los valores medios en cada término según se describe en las secciones 4.4 y 4.5.

Condiciones de borde

Finalmente, según el tipo de condición de borde que se posea, a la integral directa se le debe sumar o restar la integral indirecta. Además, puede que se deba forzar a que la función S sea igual a cero. La lista siguiente resume cómo proceder según los tres tipos de condiciones de contorno analizados.

- Condición homogénea de Dirichlet: se impone $S = 0$ y se calcula la integral directa menos la integral indirecta.
- Condición homogénea de Neumann: se impone $S = 0$ y se calcula la integral directa más la integral indirecta.
- Condición homogénea de Robin: se mantiene $S \neq 0$ y se calcula la integral directa más la integral indirecta.

4.7. Aplicación: coeficientes de Seeley-DeWitt en la bola \mathcal{B}^{D+1}

Los resultados del presente capítulo pueden ser inmediatamente aplicados al cálculo de los coeficientes de Seeley-DeWitt en la bola llana \mathcal{B}^{D+1} de radio L , es decir, el interior de la esfera \mathcal{S}^D .

En primer lugar, considérese a la variedad llana \mathcal{B}^{D+1} inmersa en \mathbb{R}^{D+1} , de manera que puede ser descrita por un sistema de coordenadas y^i que satisfacen $\delta_{ij}y^i y^j \leq L^2$. El borde de dicha variedad es $\partial\mathcal{B}^{D+1} \approx \mathcal{S}^D$, y puede ser descrito mediante $\delta_{ij}y^i y^j = L^2$.

A continuación considérense las siguientes transformaciones, que representan una “proyección estereográfica generalizada”:

$$\begin{aligned} x^i &= L \frac{2L y^i}{L^2 + \delta_{jk} y^j y^k - 2Ly^{D+1}} \quad \text{si } i = 0, \dots, D \quad , \\ x^{D+1} &= L \frac{L^2 - \delta_{jk} y^j y^k}{L^2 + \delta_{jk} y^j y^k - 2Ly^{D+1}} . \end{aligned} \tag{4.49}$$

Es inmediato notar que estas nuevas coordenadas satisfacen que cada x^i toma valores en todo \mathbb{R} si $i = 0, \dots, D$, que $x^{D+1} \geq 0$, y que $x^{D+1} = 0$ se corresponde con el

borde $\delta_{ij}y^i y^j = L^2$. Por su parte, la transformación inversa a (4.49) es

$$\begin{aligned} y^i &= L \frac{2Lx^i}{L^2 + \delta_{jk}x^j x^k + 2Lx^{D+1}} \quad \text{si } i = 0, \dots, D \quad , \\ y^{D+1} &= L \frac{\delta_{jk}x^j x^k - L^2}{L^2 + \delta_{jk}x^j x^k + 2Lx^{D+1}} . \end{aligned} \quad (4.50)$$

Respecto del diferencial de longitud ds , es posible escribir

$$ds^2 = \delta_{ij} dy^i dy^j = \delta_{ij} \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^k} \right) \left(\frac{\partial y^j}{\partial x^l} \right) dx^k dx^l = \frac{4L^4 \delta_{kl}}{[L^2 + \delta_{mn}x^m x^n + 2Lx^{D+1}]^2} dx^k dx^l , \quad (4.51)$$

lo cual implica que la métrica (conformemente plana) inducida por la proyección es

$$g_{ij}(x) = \left(\frac{2L^2}{L^2 + \delta_{mn}x^m x^n + 2Lx^{D+1}} \right)^2 \delta_{ij} . \quad (4.52)$$

La métrica inversa es entonces

$$g^{ij}(x) = \left(\frac{L^2 + \delta_{mn}x^m x^n + 2Lx^{D+1}}{2L^2} \right)^2 \delta_{ij} , \quad (4.53)$$

la cual puede observarse que resulta proporcional a un polinomio cuártico respecto de las coordenadas x^i . Por este hecho, el estudio de los coeficientes de Seeley-DeWitt de la variedad \mathcal{B}^{D+1} llana es más sencillo si se trabaja en el espacio de fases. En lo sucesivo, se trabajará precisamente en dicho espacio.

A continuación, considérese la variedad ‘duplicada’ $\tilde{\mathcal{B}}^{D+1}$. Su métrica se obtiene extendiendo de forma par sobre x^{D+1} a la métrica en \mathcal{B}^{D+1} . En otras palabras, la métrica inversa ‘duplicada’ es

$$\tilde{g}^{ij}(x) = \left(\frac{L^2 + \delta_{mn}x^m x^n + 2L|x^{D+1}|}{2L^2} \right)^2 \delta_{ij} = \left\{ h(x) - f(x) \theta(-x^{D+1}) \right\} \delta_{ij} \quad (4.54)$$

donde

$$\begin{aligned} h(x) &= \left(\frac{L^2 + \delta_{mn}x^m x^n + 2Lx^{D+1}}{2L^2} \right)^2 , \\ f(x) &= 2 \frac{(L^2 + \delta_{mn}x^m x^n)x^{D+1}}{L^3} . \end{aligned} \quad (4.55)$$

A partir de (4.54) es posible calcular

$$\sqrt{\tilde{g}(x)} \Big|_{x^{D+1} \geq 0} = h(x)^{-(D+1)/2} = \left(\frac{2L^2}{L^2 + \delta_{mn}x^m x^n + 2Lx^{D+1}} \right)^{D+1} , \quad (4.56)$$

así como también los términos de curvatura del potencial efectivo, los cuales resultan

$$\begin{aligned}
& -\tilde{R}(x) + \tilde{g}^{ij}(x)\tilde{\Gamma}_{ik}^l(x)\tilde{\Gamma}_{jl}^k(x) \\
& = -2D\frac{L^2 + \delta_{nm}x^n x^m}{L^3}\delta(x^{D+1}) + 4\frac{D-1}{L^3}x^{D+1}\theta(-x^{D+1}) \\
& \quad - \frac{D-1}{L^4}\left[L^2 + \delta_{nm}x^n x^m + 2Lx^{D+1}\right]. \tag{4.57}
\end{aligned}$$

Estos resultados junto con la técnica desarrollada en el presente capítulo (resumida en la sección 4.6) permiten calcular la traza (4.6) para un campo escalar en \mathcal{B}^{D+1} con condiciones de borde homogéneas de Dirichlet, Neumann o Robin. A continuación, se aplican estos resultados al cálculo de los primeros tres coeficientes de Seeley-DeWitt para el caso libre sobre una variedad euclídea con forma de disco (es decir, en \mathcal{B}^2). En particular, esto lleva a obtener la anomalía conforme de dicha teoría.

4.7.1. Anomalía conforme de un campo escalar libre en un disco

En la presente sección se busca calcular los coeficientes $a_0(\mathcal{B}^2)$, $a_1(\mathcal{B}^2)$ y $a_2(\mathcal{B}^2)$ de la expansión (2.73) para la teoría libre (con $\mathcal{V} = 0$), y finalmente usar la ecuación (2.78) para obtener la anomalía conforme (integrada) de la teoría. Por medio de la propia expansión (2.73) es inmediato observar que para lograr el objetivo propuesto, es necesario calcular la traza (4.6) hasta orden T^0 . Para ello, es útil recordar que q y p son de orden $T^{1/2}$ y $T^{-1/2}$ respectivamente, y que en consecuencia ω es orden $T^{-1/2}$ y x^2 es orden $T^{1/2}$. Teniendo esto en cuenta, es sencillo ver que los términos que se calculan a lo largo de toda la presente sección son los únicos necesarios para obtener los coeficientes deseados.

Antes de comenzar efectivamente con los cálculos, se aclara que se opta por trabajar en el espacio de fases con trayectorias que satisfacen condiciones de contorno (anti-)periódicas. De este modo, son válidos todos los valores medios explicitados en la sección 4.5.

Términos directos

El potencial efectivo para los términos directos de la presente teoría se puede calcular mediante (4.43), resultando

$$\begin{aligned}
H_{\text{int}}(q, p) = & \left[h(x+q) - h(x) + f(x)\theta(-x^{D+1}) \right] \delta^{ij} p_i p_j \\
& - f(x+q) \delta^{ij} p_i p_j \theta(-x^2 - q^2) \\
& - \frac{1}{2} \left[\frac{L^2 + \delta_{nm}(x+q)^m (x+q)^n}{L^3} + 4\sqrt{h(x+q)} S \right] \delta(x^2 + q^2).
\end{aligned} \tag{4.58}$$

Al calcular la traza (4.6) es necesario integrar sólo sobre la región $x^{D+1} > 0$, lo cual lleva a que la función de Heaviside en la primera línea de (4.58) sea igual a cero. Con esta consideración en cuenta, resulta que el potencial efectivo se simplifica ligeramente, resultando

$$\begin{aligned}
H_{\text{int}}(q, p) = & \left[h(x+q) - h(x) \right] \delta^{ij} p_i p_j - f(x+q) \delta^{ij} p_i p_j \theta(-x^2 - q^2) \\
& - \frac{1}{2} \left[\frac{L^2 + (x^1 + q^1)^2 + (x^2 + q^2)^2}{L^3} + 4\sqrt{h(x+q)} S \right] \delta(x^2 + q^2).
\end{aligned} \tag{4.59}$$

Para calcular los diferentes valores medios con este potencial efectivo, es necesario utilizar las ecuaciones (4.37), que se corresponden con condiciones periódicas para las trayectorias en el espacio de fases. Al tener condiciones periódicas sobre la última coordenada, estas ecuaciones son apropiadas para el cálculo de los términos directos. Para el presente caso, debe tenerse en cuenta que $D = 1$ y $g(x)^{-1/2} = h(x) = \left(\frac{L^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + 2Lx^2}{2L^2} \right)^2$.

Ahora bien, la contribución a orden T^{-1} de (4.42) es simplemente

$$\int_{\mathcal{B}^2} d^2x \langle 1 \rangle = \frac{L^2}{4T}. \tag{4.60}$$

Siguiendo con cuidado los órdenes en T de los propagadores, es fácil ver que no hay orden $T^{-1/2}$ proveniente de los términos directos. Finalmente, el orden T^0 está dado por tres términos provenientes de ‘bajar’ una sola vez al potencial efectivo. Dichos tres términos son los siguientes, correspondiendo cada uno de ellos a los tres términos que conforman al potencial efectivo (4.59):

$$-\frac{2}{L^2} \int_{\mathcal{B}^2} d^2x h(x) \delta_{ij} \delta^{kl} \left(x^i + L\delta_2^i \right) \int_0^T dt_1 \left\langle q^j(t) p_k(t_1) p_l(t_1) \right\rangle = 0, \tag{4.61}$$

$$\begin{aligned}
2 \int_{\mathcal{B}^2} d^2x \frac{L^2 + (x^1)^2}{L^3} \int_0^T dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{e^{-i\omega x^2}}{\omega - i0} \\
\times \delta^{ij} \left\langle p_i(t_1) p_j(t_1) \left(x^2 + q^2(t_1) \right) e^{-i\omega q^2(t_1)} \right\rangle \\
= -\frac{1}{12} + \mathcal{O}(\sqrt{T}), \quad (4.62)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}^2} d^2x \left[\frac{L^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2}{L^3} + 4\sqrt{h(x)}S \right] \int_0^T dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega x^2} \left\langle e^{-i\omega q^2(t_1)} \right\rangle \\
= \frac{1}{4} + \frac{LS}{2} + \mathcal{O}(\sqrt{T}). \quad (4.63)
\end{aligned}$$

Finalmente, sumando las ecuaciones (4.60) a (4.63) resulta que la integral directa de la traza es

$$\int_{\mathcal{B}^2} d^2x \sqrt{g(x)} \langle x | e^{-(\tilde{H}' + V_\partial(x^2))} | x \rangle = \frac{L^2}{4T} + \frac{1}{6} + \frac{LS}{2} + \mathcal{O}(\sqrt{T}). \quad (4.64)$$

Términos indirectos

El potencial efectivo para los términos indirectos de la presente teoría se puede calcular mediante (4.48), resultando

$$\begin{aligned}
H_{\text{int}}(q, p) &= \left[h\left(x - 2\frac{t}{T}x^2 + q\right) - h(x) \right] \delta^{ij} p_i p_j \\
&\quad - \left[f\left(x - 2\frac{t}{T}x^2 + q\right) \theta\left(-x^2\left(1 - 2\frac{t}{T}\right) - q\right) \right. \\
&\quad \left. - f(x) \theta(-x^2) \right] \delta^{ij} p_i p_j + 2i \frac{x^2}{T} p_2 \\
&\quad - \frac{1}{2} \left[\frac{L^2 + \delta_{nm}(x - 2x^2t/T + q)^m (x - 2x^2t/T + q)^n}{L^3} \right. \\
&\quad \left. + 4\sqrt{h(x - 2x^2t/T + q)} S \right] \delta\left(x^2(1 - 2t/T) + q^2\right). \quad (4.65)
\end{aligned}$$

Según se sugiere en la sección (4.4), al trabajar con condiciones periódicas en los caminos (antiperiódicas en la última coordenada para los términos indirectos) debe pensarse que la coordenada de centro de masa $x^{D+1} \equiv x_{CM}^{D+1}$ presente en $H_{\text{int}}(q, p)$ es nula. De esta manera, toda la dependencia con x^{D+1} recae en los valores medios a través de $\langle 1 \rangle$. Esta consideración simplifica ligeramente al potencial efectivo,

resultando

$$\begin{aligned}
H_{\text{int}}(q, p) &= \frac{1}{4L^4} \left[\left(L^2 + (x^1 + q^1)^2 + (q^2)^2 + 2Lq^2 \right)^2 - \left(L^2 + (x^1)^2 \right)^2 \right] \delta^{ij} p_i p_j \\
&\quad - \frac{2}{L^3} \left(L^2 + (x^1 + q^1)^2 + (q^2)^2 \right) q^2 \delta^{ij} p_i p_j \theta(-q^2) \\
&\quad - \frac{1}{2} \left[\frac{L^2 + (x^1 + q^1)^2 + (q^2)^2}{L^3} + 4 \sqrt{h(x+q)} S \right] \delta(q^2) .
\end{aligned} \tag{4.66}$$

Para calcular los diferentes valores medios con este potencial efectivo, es necesario utilizar las ecuaciones (4.38), que se corresponden con condiciones periódicas en x^1 y antiperiódicas en x^2 para las trayectorias en el espacio de fases. Al tener condiciones antiperiódicas sobre la última coordenada, estas ecuaciones son apropiadas para el cálculo de los términos indirectos. Para el presente caso, debe tenerse en cuenta que $D = 1$ y $g(x)^{-1/2} = h(x) = \left(\frac{L^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + 2Lx^2}{2L^2} \right)^2$.

Ahora bien, siguiendo con cuidado los órdenes en T de los propagadores, es fácil ver que no hay orden T^{-1} proveniente de los términos indirectos. Por otra parte, la contribución a orden $T^{-1/2}$ es simplemente

$$\int_{\mathcal{B}^2} d^2x \langle 1 \rangle = \frac{L}{4} \sqrt{\frac{\pi}{T}} . \tag{4.67}$$

Finalmente, el orden T^0 está dado por tres términos provenientes de ‘bajar’ una sola vez al potencial efectivo. Dichos tres términos son los siguientes, correspondiendo cada uno de ellos a los tres términos que conforman al potencial efectivo (4.66):

$$-\frac{1}{L^4} \int_{\mathcal{B}^2} d^2x \left(L^2 + (x^1)^2 \right) \delta_{ij} \delta^{kl} \left(x^i + (L - x^2) \delta_2^i \right) \int_0^T dt_1 \left\langle q^j(t) p_k(t_1) p_l(t_1) \right\rangle = 0 , \tag{4.68}$$

$$2 \int_{\mathcal{B}^2} d^2x \frac{L^2 + (x^1)^2}{L^3} \int_0^T dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{1}{\omega - i0} \delta^{ij} \left\langle p_i(t_1) p_j(t_1) q^2(t_1) e^{-i\omega q^2(t_1)} \right\rangle = -\frac{1}{4} , \tag{4.69}$$

$$\frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}^2} d^2x \left[\frac{L^2 + (x^1)^2}{L^3} + 4 \sqrt{h(x_\partial)} S \right] \int_0^T dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \left\langle e^{-i\omega q^2(t_1)} \right\rangle = \frac{1}{4} + \frac{LS}{2} . \tag{4.70}$$

Finalmente, sumando las ecuaciones (4.67) a (4.70) resulta que la integral indirecta

de la traza es

$$\int_{\mathcal{B}^2} d^2x \sqrt{g(x)} \langle \tilde{x} | e^{-(\tilde{H} + V_{\partial}(x^2))} | x \rangle = \frac{L}{4} \sqrt{\frac{\pi}{T}} + \frac{LS}{2} + \mathcal{O}(\sqrt{T}). \quad (4.71)$$

Coefficientes de Seeley-DeWitt y anomalía conforme

Para encontrar la traza del operador de evolución en el disco deben sumarse o restarse (dependiendo de las condiciones que satisfaga el borde) la integral directa (4.64) y la integral indirecta (4.71). Al hacer esto, y suponiendo por simplicidad que el campo escalar no tiene masa (de manera que las ecuaciones (3.6) y (4.6) son iguales) resulta

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{B}^2} e^{-T\hat{H}} = \frac{1}{4\pi T} \left[\pi L^2 \mp \sqrt{\pi^3 L^2 T} + \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi(1 \mp 1)LS \right) T + \mathcal{O}(T^{3/2}) \right]. \quad (4.72)$$

A continuación se escribe esta traza según las condiciones de borde.

- Para condiciones homogéneas de Dirichlet (es decir, con el signo ‘−’ y con $S = 0$), resulta

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{B}^2} e^{-T\hat{H}} \sim \frac{L^2}{4T} - \frac{\sqrt{\pi}L}{4\sqrt{T}} + \frac{1}{6}. \quad (4.73)$$

- Para condiciones homogéneas de Neumann (es decir, con el signo ‘+’ y con $S = 0$), resulta

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{B}^2} e^{-T\hat{H}} \sim \frac{L^2}{4T} + \frac{\sqrt{\pi}L}{4\sqrt{T}} + \frac{1}{6}. \quad (4.74)$$

- Para condiciones homogéneas de Robin (es decir, con el signo ‘+’ y con $S \neq 0$), resulta

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{B}^2} e^{-T\hat{H}} \sim \frac{L^2}{4T} - \frac{\sqrt{\pi}L}{4\sqrt{T}} + \left(\frac{1}{6} + LS \right). \quad (4.75)$$

Todos estos resultados se encuentran en perfecto acuerdo con lo que se puede calcular a partir de [21].

Tomando nuevamente la ecuación (4.72), es inmediato ver que los coeficientes de

Seeley-DeWitt son

$$\begin{aligned}
a_0(\mathcal{B}^2) &= \pi L^2 = \text{Vol}(\mathcal{B}^2), \\
a_1(\mathcal{B}^2) &= \mp \sqrt{\pi^3 L^2} = \mp \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{Vol}(\mathcal{S}^1) = \mp \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{Vol}(\partial \mathcal{B}^2), \\
a_2(\mathcal{B}^2) &= 2\pi \left(\frac{1}{3} + (1 \mp 1)LS \right) = 2\pi \left(\frac{1}{3} + 2LS \right),
\end{aligned} \tag{4.76}$$

donde en el último paso se ha usado que el signo ‘ $-$ ’ sólo aparece en el caso $S = 0$. Finalmente, por medio de la ecuación (2.78) es inmediato ver que la anomalía conforme (integrada) es

$$\int_{\mathcal{B}^2} d^2x \langle T_i^i \rangle = \frac{a_2(\mathcal{B}^2)}{4\pi} = \frac{1}{6} + LS. \tag{4.77}$$

Capítulo 5

Conclusiones y trabajo futuro

De forma resumida, fueron presentadas las herramientas necesarias para desarrollar el formalismo línea de mundo, construyendo la primera cuantización de una partícula puntual en la formulación *time-slicing* tanto en el espacio de fases como en el espacio de configuraciones. Para ello se incluyó una discusión sobre el orden de Weyl y se postuló un hamiltoniano para un bosón libre que resulta invariante ante transformaciones generales de coordenadas. Como las integrales de caminos en el espacio de configuraciones requerían la introducción de campos *ghost*, se limitó el análisis en este espacio para el caso llano donde dichos campos no son necesarios, relegando el estudio de los espacios curvos sólo al espacio de fases. Paralelamente, se comentaron varios elementos de teorías cuánticas de campos aplicadas al caso de un campo escalar real, a saber, su función de partición, la acción efectiva a un *loop*, las anomalías – con énfasis en la anomalía conforme – y las funciones β .

Con las herramientas presentadas se procedió a construir el formalismo línea de mundo para variedades sin borde con curvatura no singular. Se comenzó estableciendo la correspondencia entre el operador de fluctuaciones cuánticas de una teoría de campos con el hamiltoniano de una partícula puntual. Luego se definió la funcional generatriz, herramienta crucial para realizar los cálculos de los correladores, tanto en el espacio de fases curvo como en el de configuraciones llano. Los resultados fueron aplicados a una serie de problemas diversos: en primer lugar, se estudió la termodinámica de un campo escalar libre y sin masa en \mathcal{S}^1 calculando la correspondiente función de partición y, a partir de la misma, la entropía, energía y presión de vacío. Luego se calculó la función β de la teoría $\lambda\varphi^4$, debiendo previamente obtenerse la acción efectiva de dicha teoría a un *loop*. Por último, se calculó la anomalía conforme de un campo escalar libre y sin masa en \mathcal{S}^2 .

Los conocimientos hasta aquí desarrollados permitieron extender el estudio a algunas variedades con borde y con curvatura no singular; concretamente, se consideró como variedad de estudio al semiespacio $\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^+$ con métrica conformemente llana. Introduciendo el método de las imágenes, se estableció cómo una reflexión simétrica de tanto el potencial como de la métrica permiten convertir el problema de estudio

en uno cuya variedad no posee borde pero sí una curvatura singular (descrita sólo en términos de deltas de Dirac y funciones de Heaviside), detallando también cómo simular las condiciones de borde en esta nueva variedad ‘duplicada’. Como caso particular, se mostró cómo simular las condiciones homogéneas de Dirichlet, Neumann y Robin. Luego se redefinió la funcional generatriz para poder calcular correctamente los correladores. Por último, se aplicaron los resultados obtenidos para estudiar el cálculo de los coeficientes de Seeley-DeWitt de una teoría de campo escalar en la bola \mathcal{B}^{D+1} – cuyo borde es la esfera \mathcal{S}^D –, definiendo la transformación que mapea dicha bola al semiespacio. Como caso aún más particular, estos resultados fueron utilizados para calcular los primeros tres coeficientes de Seeley-DeWitt en el disco \mathcal{B}^2 , obteniendo la anomalía conforme de un campo escalar libre y sin masa en dicha variedad.

El objetivo principal del presente trabajo de diploma consistió en mostrar una técnica que permite el estudio de teorías de campos cuánticos en algunas variedades con borde. El procedimiento exhibido admite una amplia gama de generalizaciones y aplicaciones concretas. Hasta ahora, en la literatura sólo se ha establecido una formulación de línea de mundo para el estudio de campos cuánticos en variedades con bordes llanos (excepto en [14]): en primer lugar, condiciones de Dirichlet y Neumann fueron analizadas en [11, 13]; luego, con base en [22], se consideraron condiciones de borde de Robin [12] y condiciones de *matching* específicas [23] en interfaces llanas. El procedimiento descrito en el presente trabajo para el interior de una esfera puede ahora – además de ser aplicado a interfaces curvas – utilizarse con estas condiciones de *matching* más generales, y se espera lograr la misma eficiencia de cálculo previamente observada utilizando técnicas de primera cuantización.

También merece ser considerada la extensión a otro tipo de condiciones de borde. En [24] fue construida una medida browniana que describe apropiadamente a todas las extensiones autoadjuntas para una partícula unidimensional comprendida entre paredes infinitas. En [25], este resultado fue generalizado a la familia infinito-dimensional de condiciones de borde para una partícula en el semiplano; sería interesante considerar si esta formulación admite una representación en el formalismo línea de mundo (si se apunta a considerar las condiciones de borde más generales [26], deben tenerse en cuenta las dificultades discutidas en [27, 28]).

En este contexto, también sería interesante rever el detallado análisis en [29] (ver también [30, 31]) que muestra que la energía de Casimir en presencia de superficies físicas contiene divergencias que no pueden ser removidas mediante contratérminos adecuados en la lagrangiana. Estas divergencias son inocuas a la hora de computar las fuerzas de Casimir entre diferentes superficies, pero generaron dudas acerca de la correcta definición de la tensión de Casimir en cada una de ellas. De hecho, el problema aparece en la vecindad de bordes tipo delta, por lo que el formalismo línea de mundo podría ser aplicado a estos modelos pues los resultados expuestos

en el presente trabajo ya incorporan fondos del tipo delta, y pueden ser fácilmente adaptados al cálculo de densidades de energía.

Estas generalizaciones no sólo se motivan por las aplicaciones a cálculos analíticos. En las últimas dos décadas, el formalismo línea de mundo ha probado ser una herramienta poderosa para la computación numérica de cantidades físicas en teorías cuánticas de campos. Este enfoque se originó en la evaluación numérica de acciones efectivas en problemas analíticamente resolubles [32], pero desde entonces ha sido utilizado en una amplia variedad de contextos. En [33] fue usado en su forma de Minkowski para estudiar la producción de pares por un fondo inhomogéneo. En particular, los métodos numéricos de línea de mundo son unas de las pocas alternativas existentes con las cuales comparar los resultados experimentales vinculados al efecto Casimir (considerado por primera vez en [15]; ver por ejemplo sus aplicaciones a otras geometrías en [34, 35] y a medios más realistas en [36]). En este contexto, análisis numéricos basados en líneas de mundo han sido utilizados para determinar el rango de validez del esquema conocido como “*proximity force approximation*” [37, 38]. En [39, 40] el método fue puesto a prueba computando las condiciones de energía positiva en varios arreglos de Casimir. Estos métodos numéricos están basados en una generación Monte Carlo de ensamblajes línea de mundo que, aparte de proveer una imagen intuitiva de la naturaleza no local de las fluctuaciones cuánticas, es comparativamente barata gracias a su naturaleza probabilística (ver [41–44]); se considera que las expresiones analíticas del presente trabajo de diploma pueden ser usadas para poner a prueba las computaciones numéricas en otras geometrías (como por ejemplo, geometrías esféricas).

Aún más importante, los métodos numéricos basados en líneas de mundo han sido principalmente aplicados a bordes rígidos pero aún no han sido implementados bajo condiciones de Robin. La técnica mencionada en el presente trabajo de diploma junto con [7, 22, 23] pueden motivar tal implementación. Nótese finalmente que el método del presente trabajo no contiene ningún análisis de las condiciones de energía (relevantes en espacios curvos). Estas líneas de investigación se encuentran actualmente en progreso.

Bibliografía

- [1] Z. Bern y D. A. Kosover. “Efficient calculation of one loop QCD amplitudes”. *Phys. Rev. Lett.*, **66**:1669, 1991.
- [2] M. J. Strassler. “Field theory without Feynman diagrams: One loop effective actions”. *Nucl. Phys. B*, **385**:145, 1992. [arXiv:hep-ph/9205205](#).
- [3] C. Schubert. “Perturbative quantum field theory in the string inspired formalism”. *Phys. Rept.*, **355**:73, 2001. [arXiv:hep-th/0101036](#).
- [4] F. Bastianelli y A. Zirotti. “Worldline formalism in a gravitational background”. *Nucl. Phys. B*, **642**:372, 2002. [arXiv:hep-th/0205182](#).
- [5] F. Bastianelli, O. Corradini y A. Zirotti. “Dimensional regularization for $\mathcal{N} = 1$ supersymmetric sigma models and the worldline formalism”. *Phys. Rev. D*, **67**:104009, 2003. [arXiv:hep-th/0211134](#).
- [6] F. Bastianelli, P. Benincasa y S. Giombi. “Worldline approach to vector and antisymmetric tensor fields”. *JHEP*, **0504**:010, 2005. [arXiv:hep-th/0503155](#).
- [7] F. Bastianelli, O. Corradini y E. Latini. “Spinning particles and higher spin fields on (A)dS backgrounds”. *JHEP*, **0811**:054, 2008. [arXiv:0810.0188](#).
- [8] O. Corradini. “Half-integer Higher Spin Fields in (A)dS from Spinning Particle Models”. *JHEP*, **1009**:113, 2010. [arXiv:1006.4452](#).
- [9] F. Bastianelli, R. Bonezzi, O. Corradini y E. Latini. “Effective action for higher spin fields on (A)dS backgrounds”. *JHEP*, **1212**:113, 2012. [arXiv:1210.4649](#).
- [10] F. Bastianelli y P. van Nieuwenhuizen. “Path integrals and anomalies in curved space”. Cambridge University Press, 2009.
- [11] F. Bastianelli, O. Corradini y P. A. G. Pisani. “Worldline approach to quantum field theories on flat manifolds with boundaries”. *JHEP*, **0702**:052, 2007. [arXiv:hep-th/0612236](#).
- [12] F. Bastianelli, O. Corradini y P. A. G. Pisani. “Scalar Field with Robin Boundary Conditions in the Worldline Formalism”. *J. Phys. A*, **41**:164010, 2008. [arXiv:0710.4026](#).

- [13] F. Bastianelli, O. Corradini, P. A. G. Pisani y C. Schubert. “Scalar heat kernel with boundary in the worldline formalism”. JHEP, **0810**:095, 2008. [arXiv:0809.0652](#).
- [14] O. Corradini, J. P. Edwards, I. Huet, L. Manzo y P. A. G. Pisani. “Worldline formalism for a confined scalar field”. JHEP, **1908**:037, 2019. [arXiv:1905.00945](#).
- [15] H. Gies, K. Langfeld y L. Moyaerts. “Casimir effect on the worldline”. JHEP, **0306**:018, 2003. [arXiv:hep-th/0303264](#).
- [16] C. D. Fosco, F. C. Lombardo y F. D. Mazzitelli. “Neumann Casimir effect: a singular boundary-interaction approach”. Phys. Lett. B, **690**:189, 2010. [arXiv:0912.0886](#).
- [17] M. S. Marinov. “Path Integrals In Quantum Theory: An Outlook Of Basic Concepts”. Phys. Rept., **60**:1, 1980.
- [18] I. Sökmen. “Exact path integral solution to the infinite square well”. Phys. Lett. A, **106**:212, 1984.
- [19] N. H. McCoy. “On the Function in Quantum Mechanics which Corresponds to a Given Function in Classical Mechanics”. Proc. N. A. S., **19**:674, 1932.
- [20] R. P. Feynman. “Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics”. Rev. Mod. Phys, **20**:367, 1948.
- [21] D. V. Vassilevich. “Heat kernel expansion: user’s manual”. Phys. Rept., **388**:279, 2003. [arXiv:hep-th/0306138](#).
- [22] T. E. Clark, R. Menikoff y D. H. Sharp. “Quantum mechanics on the half-line using path integrals”. Phys. Rev. D, **22**:3012, 1980.
- [23] S. A. Franchino Viñas y P. A. G. Pisani. “Semi-transparent Boundary Conditions in the Worldline Formalism”. J. Phys. A, **44**:295401, 2011. [arXiv:1012.2883](#).
- [24] M. Carreau, E. Farhi y S. Gutmann. “The Functional Integral for a Free Particle in a Box”. Phys. Rev. D, **42**:1194, 1990.
- [25] M. Carreau. “The Functional integral for a free particle on a half plane”. J. Math. Phys., **33**:4139, 1992. [arXiv:hep-th/9208052](#).
- [26] M. Asorey, A. Ibort y G. Marmo. “Global theory of quantum boundary conditions and topology change”. Int. J. Mod. Phys. A, **20**:1001, 2005. [arXiv:hep-th/0403048](#).

- [27] M. Asorey, A. Ibort y G. Marmo. “Path integrals and boundary conditions”. Proceedings of A. Galindo Festschrift, Eds. R.F. Álvarez-Estrada et al., Madrid, 2004. [arXiv:quant-ph/0609023](#).
- [28] M. Asorey, J. Clemente-Gallardo y J. M. Muñoz-Castañeda. “Boundary conditions: The path integral approach”. J. Phys. Conf. Ser., **87**:012004, 2007. [arXiv:0712.4353](#).
- [29] N. Graham, R. L. Jaffe, V. Khemani, M. Quandt, M. Scandurra y H. Weigel. “Calculating vacuum energies in renormalizable quantum field theories: A New approach to the Casimir problem”. Nucl. Phys. B, **645**:49, 2002. [arXiv:hep-th/0207120](#).
- [30] N. Graham, R. L. Jaffe, V. Khemani, M. Quandt, M. Scandurra y H. Weigel. “Casimir energies in light of quantum field theory”. Phys. Lett. B, **572**:196, 2003. [arXiv:hep-th/0207205](#).
- [31] N. Graham, R. L. Jaffe, V. Khemani, M. Quandt, O. Schröder y H. Weigel. “The Dirichlet Casimir problem”. Nucl. Phys. B, **677**:379, 2004. [arXiv:hep-th/0309130](#).
- [32] H. Gies y K. Langfeld. “Quantum diffusion of magnetic fields in a numerical worldline approach”. Nucl. Phys. B, **613**:353, 2001. [arXiv:hep-ph/0102185](#).
- [33] H. Gies y K. Klingmüller. “Pair production in inhomogeneous fields”. Phys. Rev. D, **72**:065001, 2005. [arXiv:hep-ph/0505099](#).
- [34] M. Schaden. “Numerical and semiclassical analysis of some generalized Casimir pistons”. Phys. Rev. A, **79**:052105, 2009.
- [35] M. Schaden. “Irreducible Scalar Many-Body Casimir Energies: Theorems and Numerical Studies”. Int. J. Mod. Phys. Conf. Ser., **14**:501, 2012. [arXiv:1112.3274](#).
- [36] J. B. Mackrory, T. Bhattacharya y D. A. Steck. “Worldline approach for numerical computation of electromagnetic Casimir energies: Scalar field coupled to magnetodielectric media”. Phys. Rev. A, **94**:042508, 2016. [arXiv:1606.00150](#).
- [37] H. Gies y K. Klingmüller. “Casimir effect for curved geometries: PFA validity limits”. Phys. Rev. Lett., **96**:220401, 2006. [arXiv:quant-ph/0601094](#).
- [38] H. Gies y K. Klingmüller. “Worldline algorithms for Casimir configurations”. Phys. Rev. D, **74**:045002, 2006. [arXiv:quant-ph/0605141](#).
- [39] M. Schäfer, I. Huet y H. Gies. “Energy-Momentum Tensors with Worldline Numerics”. Int. J. Mod. Phys. Conf. Ser., **14**:511, 2012. [arXiv:1112.0469](#).

- [40] M. Schäfer, I. Huet y H. Gies. “Worldline Numerics for Energy-Momentum Tensors in Casimir Geometries”. *J. Phys. A*, **49**:135402, 2016. [arXiv:1509.03509](#).
- [41] K. Aehlig, H. Dietert, T. Fischbacher y J. Gerhard. “Casimir Forces via Worldline Numerics: Method Improvements and Potential Engineering Applications”. [arXiv:1110.5936](#).
- [42] D. Mazur y J. S. Heyl. “Parallel Worldline Numerics: Implementation and Error Analysis”. [arXiv:1407.7486](#).
- [43] J. P. Edwards, U. Gerber, C. Schubert, M. A. Trejo y A. Weber. “Integral transforms of the quantum mechanical path integral: Hit function and path averaged potentials”. *Phys. Rev. E*, **97**:042114, 2018. [arXiv:1709.04984](#).
- [44] J. P. Edwards, U. Gerber, C. Schubert, M. A. Trejo, T. Tsiftsi y A. Weber. “Applications of the worldline Monte Carlo formalism in quantum mechanics”. *Ann. Phys. (N. Y.)*, **411**:167966, 2019. [arXiv:1903.00536](#).