



UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

Facultad de Ciencias Exactas

Departamento de Matemática

**Aspectos Geométricos y Numéricos de los sistemas mecánicos
con términos magnéticos**

Trabajo de Tesis Doctoral

MARÍA EMMA EYREA IRAZÚ

Directora: Marcela Zuccalli

Codirector: Leonardo Jesús Colombo

Año 2019

*Dedicado especialmente a mi
preciada hija Jazmín...
que ha estado siempre
a mi lado, dándome
fuerzas para seguir
adelante...*

Agradecimientos

Quiero agradecer en primer lugar a mis directores, Marce y Leo, quienes estuvieron conmigo a lo largo de todos estos años guiándome y de los cuales pude aprender mucho. Gracias por aceptarme, por su paciencia y por su confianza y sobre todas las cosas gracias por acompañarme en todos los aspectos de mi vida.

Gracias Marce por abrirme las puertas de tu casa una y otra vez, por alentarme a seguir, por tu dedicación, tu calidez y por estar ahí siempre que lo necesité.

Gracias Leo por invitarme y recibirme en Madrid que fue una oportunidad única de trabajo y a nivel personal que no hubiese logrado sin tu ayuda, gracias por recibirme junto a Fani en tu hogar, por las comidas, los asados y los consejos. Gracias por las enseñanzas, por incitarme a mejorar aprendiendo cosas nuevas y por las largas jornadas trabajadas.

Al CONICET por otorgarme la beca para poder realizar este doctorado, sin la cual este trabajo no hubiese sido posible.

Al Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional de La Plata, por brindarme las herramientas necesarias y el espacio para poder investigar; como así también a todos los que trabajan allí. A los que me brindaron sus enseñanzas y a los que me alentaron a crecer como docente.

A las Juradas, Marila, Cora y Viviana, gracias por el tiempo dedicado en leer este trabajo, por sus sugerencias y comentarios que me aportaron mucho y ayudaron a mejorar la tesis.

Al ICMAT por recibirme durante mi estancia en Madrid y al Programa de Visitantes Severo Ochoa que financió mi estancia allí. Gracias a David Martín y Manuel de Leon por los aportes realizados, una parte de esta tesis fue realizada durante mi estadía en el Instituto y ustedes fueron de gran ayuda. Gracias a todos los que están ahí por la buena onda con la que me recibieron, por los almuerzos y las charlas.

A la Universidad Nacional del Sur por recibirme cada vez que fui a trabajar. Gracias a todas las personas que allí trabajan que siempre me recibieron con mucha calidez, gracias por las lindas comidas compartidas y por los aportes realizados.

A Eduardo, un gran colaborador de esta tesis, gracias por recibirme en Bahía y en tu casa con Andre siempre que fui, por brindarme tus conocimientos, por las ayudas animándome a avanzar y por cada momento trabajado.

A mi princesa Jazmin, gracias por estar conmigo siempre, por entender que a veces no podía jugar o que tenía que viajar para trabajar o asistir a algún congreso, por ser mi hija, mi amiga y compañera, por escucharme practicar mis charlas una y mil veces con cara de atención aunque no entendieras nada, por ir conmigo a dar clases, a la oficina, a alguna comida o adonde fuese necesario para que pueda adelantar y terminar con esta tesis. Gracias por el hermoso viaje que realizamos juntas, que aunque fue una gran aventura, pasabas horas en la oficina sin decir nada. Gracias por cada hermoso momento juntas, por el amor que me das día a día y por enseñarme a crecer como persona y como mamá.

A mis papás, por enseñarme las cosas importantes de la vida, por alentarme y apoyarme siempre en cada decisión, por estar ahí dándome fuerzas para seguir adelante cuando caí, por su amor incondicional, por sentirse orgullosos de lo que soy y por sobretodo gracias por la hermosa Familia que me dieron.

A mis hermanas, Costi, Luz y Marthu, que decirles que no sepan porque lo son todo para mí. Gracias por estar firmes en las buenas y en las malas, por los momentos compartidos, por las risas y los llantos y aguantarme con mis cosas matemáticas "raras"; sin ustedes no soy nada.

A Martín, por ser mi compañero, mi amigo, mi pareja y mi gran amor. Gracias por aceptar cada decisión que tome y respetar cada viaje que realicé para crecer a nivel académico y personal. Gracias por alentarme a seguir adelante, por estar conmigo en cada momento brindándome palabras de aliento y demostrándome a cada instante tu amor.

A mis amigas Dani, Gabi, Lau y Nadia, gracias por estar, por los mates, por los momentos compartidos, por escucharme y por los lindos congresos y vacaciones pasados juntas. Por enseñarme que la amistad es incondicional y que no importan las distancias, siempre vamos a estar las unas para las otras.

A mi abuela Betti, que aunque hoy no está conmigo, siempre fue para mí más que mi abuela una gran compañera que me escuchaba, aconsejaba y me acompañó en mi primer congreso, en mi primer experiencia.

A mi familia, por acompañarme y apoyarme siempre, por el cariño recibido y por ayudarme en todo momento.

A todos mis amigos y compañeros de la facu por cada momento compartido, por las cenas, por las risas y almuerzos con charlas interminables, a mis compañeros de cátedra por la paciencia en cada clase y por hacerse cargo siempre que lo necesité.

Por último, gracias a todos los que de una u otra manera estuvieron conmigo en cada momento.

!!!Gracias!!!

"Sólo luchando se alcanzan nuestros sueños"

Índice general

Agradecimientos	2
Resumen	1
Introducción	3
1. Preliminares	13
1.1. Cálculo en variedades diferenciables	13
1.2. Acciones de grupos de Lie	18
1.3. Formas de conexión en fibrados principales	21
1.4. Grupos de Lie	22
1.5. Grupo de rotaciones de \mathbb{R}^3	23
1.6. Ángulos de Euler	25
2. Reducción de Sistemas Mecánicos con simetrías	27
2.1. Sistemas Hamiltonianos	27
2.2. Sistemas Lagrangianos	32
2.2.1. Descripción variacional y ecuaciones de Euler-Lagrange	32
2.2.2. Transformada de Legendre	33
2.3. Sistemas de Poisson	34

2.4. Reducción de Sistemas Hamiltonianos con simetrías	36
2.4.1. Sistemas Hamiltonianos con simetrías	36
2.4.2. Reducción de Marsden-Weinstein	37
2.4.3. Reducción al fibrado cotangente	38
2.5. Reducción de Sistemas Lagrangianos con simetrías	47
2.5.1. Sistemas Lagrangianos con simetrías	47
2.5.2. Reducción Lagrangiana de Marsden-Weinstein	47
2.5.3. Reducción al fibrado tangente	48
2.5.4. Reducción de Routh	50
2.6. Reducción de Sistemas de Poisson	53
2.7. Sistemas Lagrangianos y Hamiltonianos Magnéticos	54
3. Reducción de Sistemas Mecánicos de orden superior	61
3.1. Sistemas Lagrangianos de orden Superior	61
3.1.1. Fibrado Tangente de Orden Superior	62
3.1.2. Sistemas Lagrangianos de orden superior: descripción variacional	63
3.1.3. Sistemas Lagrangianos de orden superior con simetrías	64
3.2. Sistemas Hamiltonianos de orden Superior	65
3.2.1. Sistemas Hamiltonianos y Transformada de Legendre de orden superior	65
3.2.2. Sistemas Hamiltonianos de orden superior con simetrías	67
3.3. Reducción de sistemas Hamiltonianos de orden Superior	67
3.3.1. Reducción de Marsden-Weinstein	68
3.3.2. Reducción al fibrado cotangente	68
3.4. Reducción de sistemas Lagrangianos de orden superior	71

3.4.1.	Reducción Lagrangiana de Marsden-Weinstein	71
3.4.2.	Reducción al fibrado tangente	72
3.5.	Sistemas Lagrangianos y Hamiltonianos Magnéticos de orden Superior	73
4.	Reducción de Sistemas Mecánicos Híbridos	83
4.1.	Generalidades sobre Sistemas Mecánicos Híbridos Simples	83
4.1.1.	Sistemas Híbridos Simples	84
4.1.2.	Sistemas híbridos Hamiltonianos simples	86
4.1.3.	Sistemas híbridos Lagrangianos simples	87
4.1.4.	Equivalencia entre Sistemas Lagrangianos Híbridos simples y Sistemas Hamiltonianos Híbridos simples	88
4.1.5.	Aplicación: sistemas holónomos a trozos	90
4.2.	Reducción Simpléctica para Sistemas Híbridos Hamiltonianos Simples	93
4.2.1.	Reducción Simpléctica	93
4.2.2.	Ejemplos	99
4.2.3.	Sistemas Híbridos Hamiltonianos con Términos Magnéticos . .	103
4.3.	Reducción en Variedades de Poisson Híbridas	112
4.4.	Reducción de Routh para Sistemas Híbridos Lagrangianos	117
4.4.1.	Reducción clásica de Routh para Sistemas Híbridos Lagrangianos	118
4.4.2.	Ejemplos	119
4.4.3.	Reducción de Routh para Sistemas Híbridos Lagrangianos en una clase de variedades producto	123
4.4.4.	Reducción de Routh para Sistemas Híbridos Lagrangianos . .	128
4.4.5.	Ejemplos	130
4.5.	Equivalencia entre Sistemas Híbridos Lagrangianos Reducidos y Sis- temas Híbridos Hamiltonianos reducidos	132
4.5.1.	Ejemplos	135

5. Existencia de Órbitas Periódicas en Sistemas Híbridos Reducidos	139
5.1. Sistemas híbridos Routhianos simples	139
5.2. Simetría tiempo reversible y soluciones periódicas en sistemas híbridos Routhianos simples	144
5.2.1. Simetría tiempo reversible para sistemas híbridos Routhianos simples	145
5.2.2. Existencia de órbitas periódicas	146
5.2.3. Aplicación de Poincaré	147
5.2.4. Análisis de estabilidad para órbitas periódicas	148
5.3. Aplicación de existencia de órbitas periódicas en sistemas híbridos de control Routhianos	151
5.3.1. Sistemas mecánicos de control subactuados	151
5.3.2. Dinámica cero híbrida y soluciones periódicas para sistemas híbridos Routhianos simples de control	152
6. Sistemas Híbridos Cosimpléticos	157
6.1. Geometría de Sistemas Mecánicos dependientes en el tiempo	157
6.2. Teorema de reducción cosimplética	161
6.2.1. Acciones cosimpléticas	161
6.2.2. Teorema de reducción Cosimplética	162
6.3. Sistemas mecánicos híbridos simples dependientes en el tiempo	163
6.4. Simetrías en sistemas mecánicos híbridos simples dependientes en el tiempo	166
6.5. Reducción de ciertas simetrías para sistemas mecánicos híbridos simples dependientes en el tiempo	169
6.5.1. El Routhiano y la reducción de t-HLS	171
Conclusiones y Trabajo a futuro	175

Resumen

Las aplicaciones de técnicas provenientes de la Geometría Diferencial moderna y la Topología han ayudado a una mayor comprensión de los problemas provenientes de la teoría de Sistemas Dinámicos. Estas aplicaciones han reformulado la mecánica analítica y clásica en un lenguaje geométrico que junto a nuevos métodos analíticos, topológicos y numéricos conforman una nueva área de investigación en matemática y física llamada *Mecánica Geométrica*.

La Mecánica Geométrica se configura como un punto de encuentro de disciplinas diversas como la Mecánica, la Geometría, el Análisis, el Álgebra, el Análisis Numérico, las Ecuaciones en Derivadas Parciales, entre otras. Actualmente, la Mecánica Geométrica es un área de investigación pujante con fructíferas conexiones con otras disciplinas como la Teoría de Control no-lineal y los Sistemas Dinámicos.

El objetivo de la Teoría de Control es determinar el comportamiento de un sistema dinámico por medio de acciones externas de forma que se cumplan ciertas condiciones prefijadas, como por ejemplo, que haya un extremo fijo, los dos, que ciertas variables no alcancen algunos valores u otro tipo de situaciones más o menos complicadas. Las aplicaciones de la Mecánica Geométrica en Teoría de Control han causado grandes progresos de esta área de investigación. Por otro lado, los sistemas híbridos son sistemas dinámicos que poseen dos componentes particulares en su dinámica: una dinámica a tiempo continua y una dinámica discreta. Estos sistemas son capaces de modelar varios sistemas ingenieriles como por ejemplo robots bípedos y el trabajo cooperativo con drones.

La teoría de reducción es uno de los temas más estudiados de la Mecánica Geométrica. El punto de partida de todos los trabajos que estudian este tema es eliminar variables asociadas con un grupo de simetrías para reducir los grados de libertad de un sistema mecánico. En Mecánica Geométrica, las variedades simplécticas son utilizadas como espacios de fases de momentos, es decir, fibrados cotangentes en un espacio de configuración Q . En ese caso, las variedades simplécticas son los espacios naturales en las cuales se realiza la formulación Hamiltoniana de la Mecánica Clásica en el sentido autónomo. Dado un grupo de Lie, si el grupo de Lie actúa en Q , entonces se puede reducir la variedad simpléctica T^*Q con respecto a la correspondiente acción levantada al cotangente y la aplicación momento canónica.

Una de las formulaciones modernas de la teoría de reducción es conocida como reducción simpléctica o reducción de Marsden-Weinstein. La idea principal es la siguiente: suponer que un grupo de Lie actúa simplécticamente en una variedad simpléctica y que la aplicación momento está dada. El conjunto de nivel de esta aplicación, está equipado con una 2-forma canónica cerrada que generalmente no es no-degenerada. Bajo ciertas condiciones, se puede cocientar con respecto al grupo de isotropía para así eliminar las variables degeneradas y obtener una nueva 2-forma que resulta ser simpléctica. En el marco de sistemas que dependen explícitamente del tiempo, la situación es diferente. El espacio de configuraciones es una variedad diferenciable con su parte en el conjunto de números reales. Entonces, el espacio de fases es un fibrado cotangente $T^*Q \times \mathbb{R}$ que extiende T^*Q . En este sentido, uno puede pensar en aplicar nuevamente los resultados conocidos a este nuevo marco y realizar una teoría análoga dependiente en el tiempo.

En esta Tesis, el estudio de reducción por simetrías para sistemas Lagrangianos y Hamiltonianos híbridos es desarrollado en profundidad generalizando los resultados ya conocidos. Todos los distintos procesos de reducción que aparecen en mecánica de sistemas a tiempo continuo, de una u otra manera, pueden ser llevados a cabo en el contexto híbrido y así conseguir un sistema equivalente (que luego recuperará la solución del original) más fácil de resolver.

El presente trabajo de investigación incluye nuevos resultados en el área de la Mecánica Geométrica que permiten el estudio de sistemas mecánicos (en particular sobre técnicas de reducción aplicadas en distintos contextos), su aplicación a la teoría de control y a los sistemas híbridos con y sin dependencia del tiempo. Presentamos una nueva formulación geométrica para la dinámica de los sistemas mecánicos de orden superior reducidos y la existencia de términos magnéticos, tanto en estos sistemas como en los sistemas mecánicos híbridos, que aparecen luego de aplicar un proceso de reducción Hamiltoniana. El trabajo desarrollado en esta Tesis contribuye a la Mecánica de Orden Superior, la Mecánica Discreta, la Teoría de reducción, la estabilidad y reducción de los Sistemas Mecánicos Híbridos, la Geometría Cosimpléctica y la Teoría de Control Geométrico.

Introducción

La *Mecánica Geométrica* estudia, entre otros tópicos de la Física Matemática, las formulaciones Lagrangiana y Hamiltoniana de la Mecánica utilizando técnicas de Geometría Diferencial. De esta manera se enriquece el estudio de las ecuaciones de movimiento de muchos sistemas mecánicos provenientes de las áreas de ingeniería y física teórica ya que se explora la estructura geométrica de los mismos. El énfasis en la geometría se realiza como un intento de entender cualitativamente, entre otras cosas, la dinámica de diversos sistemas mecánicos. También se encuentran ventajas, por ejemplo, que permiten diseñar métodos numéricos para integrar ecuaciones de movimiento.

Uno de los principales intereses de la mecánica geométrica es el estudio de los sistemas que presentan simetrías dadas por la acción de un grupo de Lie sobre el espacio de configuraciones del sistema. La descripción geométrica de la mecánica Lagrangiana y Hamiltoniana tiene la ventaja de brindar ecuaciones de movimiento intrínsecas y globales que son invariantes respecto a cambios de coordenadas en el espacio de configuración. Para un sistema con n grados de libertad, la mecánica Lagrangiana da lugar a un sistema de n ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden llamadas *ecuaciones de Euler-Lagrange* que, dada una condición inicial, determinan completamente la evolución del sistema. La descripción Hamiltoniana (que es localmente equivalente a la Lagrangiana, cuando el Lagrangiano es regular), en cambio, describe la evolución mediante un sistema de $2n$ ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden denominadas *ecuaciones de Hamilton*.

Cuando un sistema mecánico presenta una simetría es natural plantear el problema de eliminar los grados de libertad que resultan irrelevantes para obtener ecuaciones de movimiento que involucren sólo a las variables físicamente relevantes. Este proceso suele llamarse *reducción de la simetría del sistema*.

La teoría de reducción ha jugado un papel importante en el estudio de los sistemas dinámicos tanto en matemática como en física, y en particular en el campo de la mecánica geométrica. Algunas de las diversas áreas que se relacionan con el estudio de la teoría de reducción para sistemas dinámicos son, por ejemplo geometría simpléctica, teoría de grupos de Lie, sistemas integrables y teoría de estabilidad. El crecimiento en número de investigaciones que relacionan estas técnicas en la última década es la mejor evidencia del interés de las comunidades matemática y física en

este tema. Vamos a asumir que la estrategia de reducción en sistemas dinámicos con simetrías de un grupo no es completamente nuevo para el lector. En líneas generales, uno intenta hacer uso de la simetría del sistema para simplificar las ecuaciones dinámicas en un conjunto de ecuaciones reducidas, por un lado, y el conjunto de ecuaciones de reconstrucción, por otro lado. El sistema reducido muchas veces está definido en un espacio con un número menor de grados de libertad y por lo tanto se espera que sus ecuaciones de movimiento sean más fáciles de resolver. Cuando la solución del sistema reducido es conocida entonces la solución completa se obtiene mediante ecuaciones de reconstrucción que codifican la relación entre las soluciones del espacio reducido y el original. En mecánica geométrica, existen básicamente dos teorías generales de reducción, que corresponden a las dos formulaciones clásicas de la mecánica. En este sentido, uno puede decir que la reducción Hamiltoniana se basa en considerar una reducción de la estructura geométrica subyacente, mientras que la reducción Lagrangiana se basa en reducir un principio variacional. Pero, como es usual, la terminología es cuestionable. Por ejemplo, a través del proceso de reducción clásico de Routh para sistemas Lagrangianos con simetrías puede realizarse una genuina reducción simpléctica de Marsden-Weinstein para sistemas Lagrangianos.

Hay una clase de teorías de reducción que da cuenta de cantidades conservadas de un grupo de simetrías G . En este caso, uno primero restringe la atención la subvariedad dada por el conjunto de cantidades conservadas, y luego sólo considera las clases de equivalencia por el grupo de simetrías de la subvariedad, que es, en general, un subgrupo propio de G . En realidad la acción del grupo de simetrías en el caso de los sistemas Lagrangianos o Hamiltonianos relacionan la existencia de integrales primeras de la dinámica y resulta que han sido muy fructíferos en la teoría de reducción moderna. El Teorema de Noether es el que hace referencia a la relación entre simetrías y cantidades conservadas de un sistema aunque por razones históricas esta terminología es usualmente reservada sólo para el formalismo Lagrangiano. En el caso donde (P, Ω) es una variedad simpléctica, un camino es construir integrales primeras de las ecuaciones de Hamilton a partir de una aplicación momento $J : P \rightarrow \mathfrak{g}^*$ que pueden ser equivariante o no con respecto a la acción coadjunta de G en \mathfrak{g}^* , donde \mathfrak{g}^* denota el dual del algebra de Lie asociada con el grupo de Lie G . Si fijamos un valor regular $\mu \in \mathfrak{g}^*$ de J , la subvariedad $J^{-1}(\mu)$ es invariante bajo G_μ (subgrupo de G que describe la isotropía de μ), y el espacio de órbitas $J^{-1}(\mu)/G_\mu$ puede ser dotado de una estructura simpléctica canónicamente definida.

El Teorema de reducción simpléctica se aplica directamente al caso de la dinámica Hamiltoniana, donde la variedad simpléctica (T^*Q, Ω_Q) es el fibrado cotangente del espacio de configuración Q y Ω_Q es su estructura simpléctica canónica. Este caso incluye muchos de los teoremas de reducción, tales como la reducción para la familia de integrales de Liouville y Jacobi. Sorprendentemente, si bien los principales resultados de esta reducción simpléctica son bien conocidos y estudiados por varias décadas, su contraparte Lagrangiana que es llamada *reducción de Routh* ha despertado gran interés en los últimos años.

El método de Routh es aplicable a Lagrangianos L con coordenadas cíclicas,

situación que identificamos con grupos de simetrías abelianos. El mismo Routh fue capaz de eliminar estas variables usando la conservación del momento. Este método puede ser generalizado para acciones de grupos no abelianos, y este contexto es precisamente el punto de partida de esta tesis.

Los sistemas Lagrangianos standar se pueden generalizar y dan lugar a los llamados *sistemas Lagrangianos magnéticos*. Esta clase de sistemas dan un enfoque sistemático de los diferentes aspectos de la reducción de Routh ya que ésta puede ser entendida como una técnica de reducción en la clase de sistemas Lagrangianos magnéticos.

Muchas teorías físicas se formulan con Lagrangianos de orden superior, es decir que no sólo dependen de las posiciones y velocidades del sistema, sino de las aceleraciones y derivadas de mayor orden. Por ejemplo, el Lagrangiano de la teoría de la relatividad de Einstein contiene derivadas de segundo orden del campo métrico. También, si consideramos la formulación Hamiltoniana de los sistemas no lineales descritos por las ecuaciones de Korteweg, obtenemos que ésta involucra un Lagrangiano de orden superior. Dos ejemplos clásicos de Lagrangianos de segundo orden aparecen en la teoría elástica del rayo y la del movimiento de la partícula rotando por traslaciones centrales. Por otro lado, Lagrangianos de orden superior aparecen cuando se estudia, por ejemplo, la acción de gravitación de Einstein-Hilbert.

Todos estos ejemplos admiten simetrías, y entonces resulta interesante el estudio de aplicaciones momento para sistemas Lagrangianos de orden superior con simetrías. Esto es uno de los puntos principales a estudiar en este trabajo ya que buscamos generalizar los resultados presentados en [37] y poder caracterizar el espacio reducido del lado Hamiltoniano y la forma simpléctica reducida.

En la primera parte de esta tesis consideramos sistemas mecánicos de orden superior y generalizamos el formalismo de las ecuaciones de Euler-Lagrange de orden superior para sistemas Lagrangianos que presentan un término magnético. Estos sistemas son obtenidos luego de aplicar un proceso de reducción a un Lagrangiano de orden “ k ”. El término magnético aparece como una deformación de la 2-forma canónica en el espacio reducido. Se ve que, bajo hipótesis de regularidad, la forma simpléctica Lagrangiana es el pull-back, vía la Transformada de Legendre de orden superior, de una 2-forma simpléctica del cotangente reducido.

Otro tipo de sistemas que resultan sumamente interesantes para estudiar por su aplicación a la robótica, son los llamados *sistemas mecánicos híbridos*. Los sistemas híbridos son sistemas dinámicos que poseen dos componentes en su dinámica de naturaleza diferentes: una continua y una discreta. Los sistemas híbridos son capaces de modelar varios sistemas físicos, como por ejemplo, sistemas múltiples UAV [60], [81], sistemas computacionales embebidos [24], [67], [40], vehículos móviles subactuados [36] y robots bípedos. En este último caso el movimiento de la pierna antes del impacto con el suelo viene descrito por un sistema dinámico a tiempo continuo, y cuando el pie toca al suelo hay una transición dada por una aplicación discreta que

produce un cambio en las condiciones iniciales de sistema, ver por ejemplo Figura 1 y [79], [80], [82].

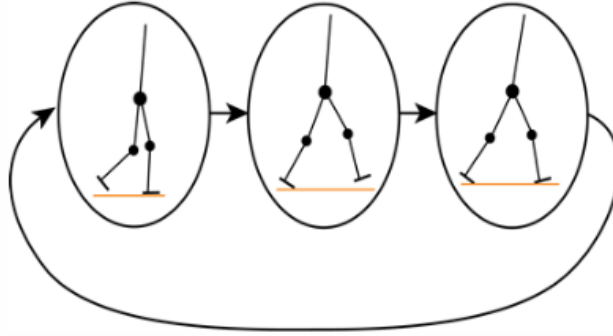


Figura 1: Caminata de los robots bípedos como un sistema híbrido

Los sistemas híbridos simples son una clase de sistemas dinámicos introducidos en [54], llamados de esta manera por su formulación simple. Estos sistemas híbridos están caracterizados por una 4-upla $\mathbf{H} = (D, X, S, R)$ donde D es una variedad diferenciable, el *dominio*, X es un campo vectorial diferenciable en D , S es una subvariedad de D con co-dimensión 1 llamada *superficie de impacto*, y $R : S \rightarrow D$ una aplicación diferenciable denominada *aplicación de impacto*. Esta clase de sistemas híbridos fueron principalmente empleados para entender propiedades de locomoción para bípedos e insectos ([5], [49], [86]). Cuando el campo vectorial X está asociado a un sistema mecánico (Lagrangiano o Hamiltoniano), se han considerados enfoques alternativos para el sistema mecánico con restricciones ([25], [26], [52], [51] y [55]).

Uno de los resultados más importantes de este trabajo consiste en establecer los ingredientes fundamentales para formular la mecánica geométrica de los sistemas híbridos. El estudio de reducción de simetrías para sistemas Lagrangianos y Hamiltonianos híbridos es desarrollado en el Capítulo 4 de esta tesis y resulta un paralelo de los distintos procesos de reducción considerados para los sistemas mecánicos a tiempo continuo. Tal estudio construye un puente entre la mecánica geométrica y una clase muy importante de sistemas dinámicos estudiados en el área de robótica.

En sistemas dinámicos, las simetrías son transformaciones en el espacio de estados que dejan las ecuaciones de movimiento invariantes. Una clase de simetrías que naturalmente aparece en los sistemas mecánicos son las llamadas *simetrías de tiempo reversibles*. Estas simetrías, como su nombre indica, dejan las ecuaciones de movimiento invariantes si el tiempo se invierte; es decir, presentan invarianza bajo la transformación $t \mapsto -t$.

La comprensión del comportamiento cualitativo de un sistema dinámico en base de las propiedades de sus órbitas periódicas ha sido un tema de sumo interés en la investigación de los sistemas dinámicos desde los estudios de Poincaré [71]. Los

resultados relativos a órbitas periódicas son el caso más conocido y para su estudio se usan resultados de los sistemas dinámicos reversibles. Por ejemplo, se han usado las simetrías tiempo dependientes para encontrar órbitas periódicas que han sido empleadas en las restricciones del problema de 3 cuerpos en aerodinámica [9].

Si un sistema dinámico exhibe una simetría, se tiene una cantidad conservada que permite realizar la reducción de un grado de libertad. Generalmente en el caso de los robots bípedos la simetría aparece en el ángulo de inclinación (ver Figura 2).

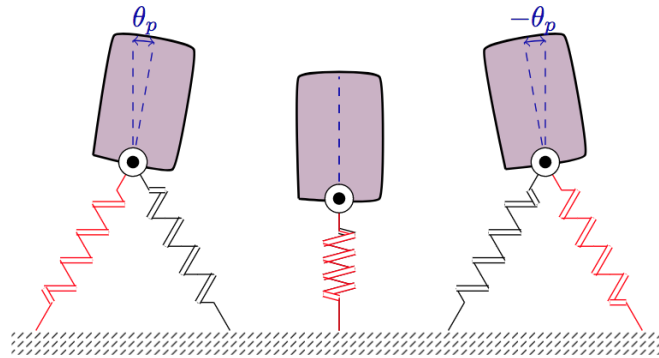


Figura 2: Simetría

Como ya dijimos uno de los procesos de reducción clásica en mecánica es llamado *método de reducción de Routh* [42]. En los últimos años hubo un crecimiento interesante en el uso del método de Routh, principalmente motivado por aplicaciones físicas ([16], [38], [58], [59]). Para sistemas híbridos, el método de Routh fue introducido por A. Ames y S. Sastry y lo aplicaron en el contexto de locomoción bípeda ([4], [5], [8]). En este trabajo incorporamos el enfoque anterior estudiando las condiciones suficientes para las cuales los sistemas Routhianos híbridos simples exhiben una solución periódica.

La búsqueda de ciclos límites en sistemas híbridos es un campo de investigación en robótica y control automático comunitario. Por ejemplo los trabajos de Mc'Geer están relacionados con el estudio de la caminata para caminantes de dinámica pasiva ([21],[66]). En este contexto, el estudio de la estabilidad de órbitas ha sido el análisis más explorado en este campo, la descripción cualitativa para la dinámica híbrida en direcciones que son transversales a las que definen las órbitas periódicas. El método de aplicación de Poincaré es una herramienta fundamental para el estudio de la estabilidad de órbitas de ese paso de caminata ([47], [45], [74], [75], [85], [86]). En la mayoría de los estudios analizados se emplea este enfoque, asumiendo la existencia de soluciones de órbitas periódicas. Entonces uno realiza el análisis de estabilidad correspondiente de las órbitas por examinación de los autovalores de la linealización de la aplicación de Poincaré. Resultados similares para sistemas híbridos simples (no Routhianos) relacionados con la existencia de soluciones periódicas pueden verse en [11] y [23]. Condiciones suficientes para la existencia y unicidad de la aplicación de

Poincaré pueden ser encontrados en [19] y los resultados sobre la estabilidad de las soluciones periódicas para los sistemas híbridos simples 2D pueden ser encontrados en [43].

El objetivo fundamental del Capítulo 5 de este trabajo consiste en establecer bajo qué condiciones podemos asegurar la existencia de órbitas periódicas en sistemas híbridos simples reducidos, en particular, sistemas híbridos Routhianos simples. Por la introducción de simetrías tiempo reversibles, las trayectorias para sistemas Routhianos híbridos simples serán encontrados en órbitas periódicas si las trayectorias empiezan en un punto fijo de la aplicación de simetría. Estableceremos caracterizaciones de los autovalores asociados con la linealización de la aplicación de Poincaré para estas soluciones periódicas. Entonces estudiaremos la existencia de movimientos periódicos y probaremos que las órbitas periódicas son marginalmente estables y que pueden conducir a explorar las perturbaciones de los sistemas Routhianos híbridos para lograr órbitas periódicas en ciclos límites estables.

Como una aplicación, nosotros empleamos los resultados dados en este trabajo para encontrar las órbitas periódicas en sistemas mecánicos híbridos sobreactuados con un grado de sobreactuación en la variable cíclica. En particular, emplearemos los resultados para el resorte de dos dimensiones del péndulo invertido para controlar la pierna del resorte.

Como se comentó anteriormente, uno de los primeros tratamientos de la reducción de simetrías para sistemas mecánicos puede encontrar los trabajos de los pioneros de Routh en la segunda mitad de los 19th. El proceso de Routh, es Lagrangiano en su naturaleza, y se basa en el uso de las llamadas variables cíclicas o ignorables (variables de las cuales el Lagrangiano no depende explícitamente). Como es bien sabido, variables cíclicas conducen a momentos conservados, y estos dan lugar a la construcción de la función Lagrangiano reducida, que actualmente conocemos como Routhiano. Las ecuaciones de Euler-Lagrange para el Routhiano involucran menos variables que las ecuaciones de Euler-Lagrange para el Lagrangiano original, y las soluciones de las ecuaciones dinámicas para el Routhiano, junto con el valor momento prescrito para un sistema reducido, puede ser usado para reconstruir soluciones del sistema Lagrangiano original.

Muchos son los trabajos que realizan aportes a la geometrización y generalización de esta técnica de reducción pero, a nuestro entender, el análogo híbrido no ha sido ampliamente discutido en la literatura. La estrategia híbrida para la reducción de Routh para sistemas híbridos Lagrangianos simples con variables cíclicas es encontrado en [8], inspirado en mejorar el entendimiento de la caminata de modelos bípedos (ver [6] y algunas de sus referencias y [4] para mas detalles). En este trabajo también consideramos sistemas híbridos que describen sistemas Lagrangianos no-autónomos y donde la superficie de impacto permite evolucionar en el tiempo.

Además, y aunque la discusión y los ejemplos en este trabajo están forzados en la clase de sistemas con coordenadas cíclicas, la estrategia presentada aquí se extiende

a simetrías más generales (que es, codificar simetrías en acciones no abelianas). Cabe señalar que dicha estrategia es esencialmente la versión cosimpléctica de los desarrollos presentados en [58], mejorando las condiciones usuales necesarias en reducción híbrida.

Finalmente, motivados por las aplicaciones potenciales extra para la caminata de los robots bípedos sobre superficies que se mueven en el tiempo, y obtener una mejor comprensión de los estados del paso, desarrollamos la teoría general para reducciones de simetrías de sistemas híbridos dependientes en el tiempo donde la dinámica continua está gobernada por un Lagrangiano. Las condiciones suficientes para este proceso de reducción se muestran en dos ejemplos que ilustran la aplicabilidad del esquema propuesto. El primero (ver la Figura 3) es un billar circular donde el radio del círculo define una variedad que cambia en el tiempo de acuerdo con la función de tiempo $f(t)$. El segundo es un billar circular de radio uno cuya superficie es asumida aspera, de modo que el Lagrangiano incluye una disipación del tipo Rayleigh.

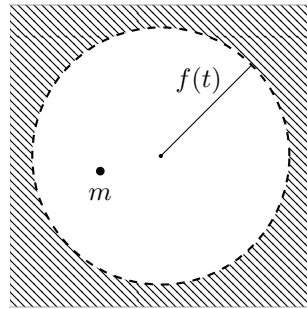


Figura 3: Billar circular

La organización de esta tesis doctoral, y sus principales contribuciones, están descriptas a continuación:

- Capítulo 1: realizamos una breve reseña de los conceptos básicos de la Geometría Diferencial y la mecánica geométrica, que serán usados a lo largo de todo el trabajo.
- Capítulo 2: en este capítulo presentamos la reducción de sistemas mecánicos en sus versiones Lagrangiana y Hamiltoniana. Estudiamos en detalle la llamada reducción de Routh. En particular, completamos las demostraciones de los principales resultados de esta teoría y desarrollamos dos ejemplos: el primero es bien conocido en la literatura, (una partícula en un campo magnético) y el segundo se trata de un ejemplo que no ha sido tratado aún (mecanismo planar: dos cuerpos rígidos con carga). Siguiendo a [37] presentamos los sistemas Lagrangianos y Hamiltonianos Magnéticos.
- Capítulo 3: en este capítulo consideramos los resultados presentados en [31] sobre la reducción de sistemas de Orden Superior en sus versiones Lagrangiana y Hamiltoniana. Damos una identificación del espacio Hamiltoniano reducido

y de su forma simpléctica correspondiente. En el marco de la formulación Lagrangiana, mostramos los inconvenientes que se presentan a la hora de buscar un Routhiano de orden superior equivalente al usual aunque caracterizamos el espacio reducido, tal como se propone para orden 1 en [37]. Además, escribimos ecuaciones de movimiento de orden superior para sistemas Lagrangianos y Hamiltonianos de orden superior.

- **Capítulo 4:** en este capítulo estudiamos los sistemas mecánicos híbridos. Comenzamos con los conceptos básicos para conocer las características de los mismos. Consideramos sistemas híbridos Lagrangianos simples y sistemas híbridos Hamiltonianos simples siguiendo las ideas tratadas en [4]. Realizamos el primer aporte al respecto que involucra una equivalencia entre ambos formalismos definiendo la Transformada de Legendre entre estos sistemas híbridos y con ella probamos en la Proposición 4.1.24 que la misma mapea los flujos híbridos Lagrangianos en flujos híbridos Hamiltonianos. En este sentido, estudiamos una aplicación de esta clase de sistemas a sistemas holónomos a trozos ilustrando el mismo con el Ejemplo bola-ranura 4.1.25, planteado del lado Lagrangiano y Hamiltoniano.

Para esta clase de sistemas, además, generalizamos los procesos de reducción Simpléctica y de Routh planteados en [4] sólo tratados para grupos de Lie G abelianos, a variedades más generales en los Teoremas 4.4.28, 4.4.33, 4.4.38, las Proposiciones 4.4.20, 4.4.36, 4.4.40 y Corolario 4.4.29 e ilustramos los mismos con ejemplos como el del Péndulo esférico invertido y el de la Bola que rebota en una superficie sinusoidal que sólo habían sido planteados en un formalismo, para ambos esquemas. Utilizamos la transformada de Legendre para relacionarlos y además planteamos el Ejemplo del cuerpo rígido con un rotor interno.

Con el fin de relacionar estos sistemas con aquellos que presentan términos magnéticos, asociamos en la Subsección 4.2.3 el espacio reducido de los sistemas híbridos Hamiltonianos, en la Proposición 4.2.33 utilizando una conexión y definimos los sistemas híbridos Hamiltonianos Magnéticos. En este sentido ilustramos con dos ejemplos: una partícula magnética rebotando en una esfera y el Heavy Top híbrido, tratados en los Ejemplos 4.2.38 y 4.2.42 respectivamente.

Realizamos otro aporte del lado Hamiltoniano que es sobre la reducción de Poisson a sistemas híbridos. Para ello definimos las variedades de Poisson híbridas y probamos diversos resultados para estos sistemas (Teorema 4.3.6 y Proposición 4.3.10). Ilustramos con el ejemplo del Péndulo esférico invertido.

Por último planteamos (Proposiciones 4.5.2 y 4.5.6) la equivalencia entre los sistemas híbridos reducidos ilustrando con diversos ejemplos y aplicando dichos resultados a los mismos.

- **Capítulo 5:** en este capítulo analizamos las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de órbitas periódicas en sistemas híbridos Routhianos simples, que son obtenidos a partir de realizar un proceso de reducción de sistemas Lagrangianos y que presentan una simetría tiempo reversible. Damos las nociones básicas de los mismos y ejemplificamos con el sistema "The 2D one

leg robotic hopper". Los resultados de este capítulo están presentados en las Proposiciones 5.2.4, 5.2.5, el Lema 5.2.11 y los Teoremas 5.2.7, 5.2.12.

Por otro lado, también estudiamos una consecuencia de la existencia de órbitas periódicas en sistemas híbridos de control Routhianos. Los resultados obtenidos fueron los Teoremas 5.3.3, 5.3.9 y ejemplificamos con el Resorte de péndulo invertido 2D.

- Capítulo 6: en este capítulo estudiamos las ideas básicas de la geometría cosimpléctica, los sistemas dependientes en el tiempo y el proceso de reducción de los mismos. Los principales resultados están presentados en Proposiciones 6.1.7 y 6.3.6, 6.5.1. Luego ejemplificamos estos resultados obtenidos con dos sistemas el billar con pared móvil y el billar con disipación.

Las *publicaciones científicas* derivadas de esta tesis doctoral son:

1. L. Colombo and E. Eyrea Irazú. Symmetries and periodic orbits in simple hybrid Routhian systems. Aceptado. Octubre 2019. Correspondiente al Capítulo 5 de esta tesis.
2. L. Colombo, E. Eyrea Irazú, E. García-Toraño Andrés. Hybrid Routhian reduction for time-dependent simple hybrid systems. Enviado para su publicación. Abril 2019. Correspondiente al Capítulo 6 de esta tesis.
3. L. Colombo and E. Eyrea Irazú. Reduction by symmetries of hybrid mechanical systems. Enviado para su publicación. Julio 2019. Correspondiente al Capítulo 4 de esta tesis.
4. E. Eyrea Irazú and Marcela Zuccalli. Reduction of higher-order magnetic systems. En preparación. Correspondiente al Capítulo 3 de esta tesis.

Los resultados científicos derivados de esta tesis doctoral fueron presentados en diversas comunicaciones, charlas científicas y en presentaciones en formato poster, a nivel Nacional e Internacional.

Capítulo 1

Preliminares

En este primer capítulo recordamos algunos conceptos elementales de geometría diferencial que son necesarios para el desarrollo del trabajo y fijamos la notación que vamos a usar en todos los capítulos que siguen.

1.1. Cálculo en variedades diferenciables

Definición 1.1.1. Sea M un conjunto:

- i) Un **n -par coordenado** (U, φ) es un par ordenado donde $U \subseteq M$ y $\varphi : U \rightarrow W$ es una biyección, siendo $W \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto.
- ii) Dos n -pares coordenados $(U, \varphi), (V, \psi)$ están **C^∞ -relacionados** si $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ es una aplicación de clase C^∞ .
- iii) Un **n -subatlas** en M es una familia $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ de n -pares C^∞ -relacionados tales que $M = \bigcup_{i \in I} U_i$.
- iv) Un **n -atlas** en M es un n -subatlas maximal.
- v) Una **variedad** diferenciable n -dimensional es un conjunto M con un n -atlas.

Observación 1.1.2. Una variedad diferenciable hereda una estructura topológica de su estructura diferenciable.

Definición 1.1.3. Dadas M y M' variedades diferenciables de dimensión m y m' respectivamente, si $A \subseteq M$ es abierto, $f : A \rightarrow M'$ es **diferenciable** si para todo m -par coordenado (U, φ) del atlas en M y todo m' -par coordenado (V, ψ) del atlas en M' , $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap A) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m'}$ es diferenciable.

Notación: $\mathcal{C}^\infty(M, N) = \{f : M \rightarrow N / f \text{ es diferenciable}\}$.

Notación: $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ denota las funciones diferenciables de M en \mathbb{R} .

Definición 1.1.4. Sea M una variedad diferenciable.

- i) Una **curva diferenciable** en M es una función diferenciable $\gamma : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow M$.
- ii) El **espacio tangente a M en $m \in M$** es el espacio vectorial de dimensión n

$$T_m M := \{\text{vectores tangentes a } m \in M\}.$$

- iii) El **fibrado tangente o espacio tangente a M** es

$$TM := \bigcup_{m \in M} T_m M.$$

Puede verse que TM es una variedad diferenciable de dimensión $2n$ (si M es de dimensión n).

- iv) Un **campo vectorial X sobre M** es una asignación

$$\begin{aligned} X : M &\rightarrow TM \\ X(m) &= X_m \end{aligned}$$

donde $X_m \in T_m M \forall m \in M$.

- v) Se dice que X es un **campo vectorial diferenciable** sobre M si $\forall f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ se tiene que $Xf \in \mathcal{C}^\infty(M)$ donde

$$Xf(m) := \frac{d}{dt}(f(\gamma(t)))|_{t=0},$$

siendo $\gamma(t)$ una curva en M tal que $\gamma(0) = m$.

Notación: $\mathcal{X}(M) = \{\text{campos vectoriales diferenciables sobre } M\}$.

Definición 1.1.5. Sea M una variedad diferenciable

- i) Sea $f : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable. Definimos el **diferencial de f en $m \in M$** como la aplicación lineal

$$(Tf)_m = (df)_m = (f_*)_m : T_m M \rightarrow T_{f(m)} N$$

dada por

$$((df)_m X)(m) := X_m(g \circ f), \forall g \in \mathcal{C}^\infty(N).$$

- ii) Dados $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, se define el **corchete de campos** como la aplicación bilineal antisimétrica $[\cdot, \cdot] : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ dada por

$$[X, Y]_m(f) := X_m(Yf) - Y_m(Xf).$$

Proposición 1.1.6. *Se tiene que $\forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ se verifica que*

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

*Esta relación es llamada **identidad de Jacobi**.*

Observación 1.1.7. Como un **álgebra de Lie** es un espacio vectorial V con una aplicación bilineal, antisimétrica que verifica la identidad de Jacobi, se tiene que el espacio vectorial real $\mathcal{X}(M)$ con corchete de campos resulta un álgebra de Lie.

Definición 1.1.8. Dada M una variedad diferenciable, tenemos

- i) Una **p -forma diferenciable en $m \in M$** es una aplicación diferenciable ω_m p -lineal y antisimétrica definida sobre $T_m M$; es decir

$$\begin{aligned} \omega_m &: T_m M \times \dots \times T_m M \rightarrow \mathbb{R} \\ \omega_m(X_1, \dots, X_p) &:= (-1)^{|\sigma|} \omega_m(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(p)}) \end{aligned}$$

donde $|\sigma|$ representa el signo de una permutación σ del conjunto $\{1, \dots, p\}$. Denotamos por $\mathcal{F}^p(m)$ el conjunto de las p -formas diferenciables en m .

- ii) Una **p -forma diferenciable en M** es una aplicación diferenciable $\omega : M \rightarrow \bigcup_{m \in M} \mathcal{F}^p(m)$ tal que $\omega(m) \in \mathcal{F}^p(m) \forall m \in M$.

Observación 1.1.9. $T_m^* M = \mathcal{F}^1(m)$.

Notación: El conjunto de las p -formas diferenciables sobre M lo denotamos como $\mathcal{F}^p(M)$.

Observación 1.1.10. Sea $T^* M = \bigcup_{m \in M} T_m^* M$, donde $T_m^* M = \mathcal{F}^1(m)$, el espacio de las 1-formas diferenciables en m es una variedad diferenciable de dimensión $2n$.

Definición 1.1.11. i) Dados $\alpha \in \mathcal{F}^p(M)$ y $X \in \mathcal{X}(M)$ se define la **contracción de α con X** , $i_X \alpha$, como la $(p-1)$ -forma diferenciable dada por

$$i_X \alpha(X_1, \dots, X_{p-1}) := \alpha(X, X_1, \dots, X_{p-1}).$$

- ii) Si $\alpha \in \mathcal{F}^p(M)$ y $\beta \in \mathcal{F}^q(M)$, se define el **producto exterior** de α y β como la $(p+q)$ -forma diferenciable

$$\alpha \wedge \beta := \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in P(1, \dots, p+q)} (-1)^{|\sigma|} (\alpha \otimes \beta)^\sigma$$

donde $(\alpha \otimes \beta)^\sigma(X_1, \dots, X_{p+q}) = (\alpha \otimes \beta)(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(p+q)})$, siendo
 $(\alpha \otimes \beta)(X_1, \dots, X_p, Y_1, \dots, Y_q) := \alpha(X_1, \dots, X_p)\beta(Y_1, \dots, Y_q)$.

Observación 1.1.12. $\mathcal{F}^0(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$.

Definición 1.1.13. i) La única aplicación lineal $d : \mathcal{F}^p(M) \rightarrow \mathcal{F}^{p+1}(M)$ que cumple que,

a) si $f \in \mathcal{F}^0(M)$, entonces df es el diferencial usual de funciones $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$,

b) si $\alpha \in \mathcal{F}^p(M)$ y $\beta \in \mathcal{F}^q(M)$, entonces

$$d(\alpha \wedge \beta) := d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta$$

c) $d^2 = 0$.

Esta aplicación se denomina **diferencial exterior**.

ii) Se dice que ω es una **p -forma cerrada** si $d\omega = 0$.

iii) Dada $f : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable entre variedades diferenciables, se define la aplicación **pull-back de f** de la siguiente manera

$$f^* : \mathcal{F}^p(N) \rightarrow \mathcal{F}^p(M)$$

$$(f^*\alpha)_m(X_1, \dots, X_p) := \alpha_{f(m)}(f_*X_1, \dots, f_*X_p).$$

iv) Dados $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ y $X \in \mathcal{X}(M)$, la **derivada de Lie de f con respecto a X** se define como

$$L_X f : M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$L_X f(m) := df(m)(X(m))$$

donde df es el diferencial usual de una función sobre M de clase \mathcal{C}^∞ .

v) Dados $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, se define la **derivada de Lie de Y con respecto a X** como

$$L_X Y := [X, Y].$$

vi) Una **derivación** de $\mathcal{C}^\infty(M)$ es una aplicación $\theta : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$ que es \mathbb{R} -lineal y tal que

$$\theta(fg) = (\theta f)g + f(\theta g) \quad \forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

Definición 1.1.14. Si $X \in \mathcal{X}(M)$, $L_X : \mathcal{F}^p(M) \rightarrow \mathcal{F}^p(M)$ es el único operador lineal sobre $\mathcal{F}^p(M)$ tal que L_X coincide con L_X en los dos casos mencionados en la definición 1.1.13. Lo llamamos la **derivada de Lie con respecto a X** .

Recordemos algunas propiedades importantes de la derivada de Lie y las aplicaciones pull-back:

Proposición 1.1.15. *i) La derivada de Lie conmuta con el diferencial exterior. Esto es, dada $\alpha \in \mathcal{F}^p(M)$ se tiene que*

$$L_X d\alpha = dL_X \alpha \quad \forall X \in \mathcal{X}(M).$$

ii) Sean $f : M \rightarrow N$ un difeomorfismo y $\alpha \in \mathcal{F}^p(M)$. Para $X \in \mathcal{X}(M)$, se tiene que

$$L_{f^*X} f^* \alpha = f^* L_X \alpha.$$

iii) Para $\alpha \in \mathcal{F}^p(M)$ y X e $Y \in \mathcal{X}(M)$ se verifica que

$$a) \quad i_{[X,Y]} \alpha = L_X i_Y \alpha - i_Y L_X \alpha$$

$$b) \quad L_X \alpha = di_X \alpha + i_X d\alpha$$

iv) El pull-back conmuta con el diferencial exterior. Esto es, si $f : M \rightarrow N$ es una aplicación diferenciable y $\alpha \in \mathcal{F}^p(N)$, se tiene que

$$f^*(d\alpha) = d(f^* \alpha).$$

Definición 1.1.16. Una **variedad simpléctica** es un par (M, Ω) donde Ω es una 2-forma cerrada y no degenerada sobre M .

Observación 1.1.17. Dada la variedad simpléctica $M = T^*Q$, consideraremos Ω_Q su forma canónica.

Teorema 1.1.18. Teorema de Darboux

Sea M una variedad simpléctica de dimensión n , entonces localmente se puede tomar un sistemas de coordenadas $(q^1, q^2, \dots, q^n, p_1, p_2, \dots, p_n)$ tal que $\Omega = dq^i \wedge dp_i$.

Lema 1.1.19. *Sean N y M dos variedades diferenciables, α una 2-forma cerrada en N y X es campo vectorial asociado a N . Si $\varphi : N \rightarrow M$ un difeomorfismo, entonces se tiene que*

$$\varphi^*(i_X \alpha) = i_{(\varphi^{-1})_* X} (\varphi^* \alpha).$$

Definición 1.1.20. Dada una función suave $f : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ se define una aplicación $\mathbb{F}f : TQ \rightarrow T^*Q$ llamada **transformada de Legendre de f** , que está dada por

$$\mathbb{F}f(v).w := \left. \frac{d}{dt} f(v + tw) \right|_{t=0}$$

donde $v, w \in T_q Q$.

Es decir, $\mathbb{F}f(v).w$ es la derivada de f en v a lo largo de la fibra $T_q Q$ en la dirección de w y también se llama derivada a lo largo de la fibra.

1.2. Acciones de grupos de Lie

Definición 1.2.1. Un **grupo de Lie** de dimensión n , es una variedad diferenciable G de dimensión n que tiene una estructura de grupo, tal que la aplicación

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow G \\ (g, h) &\mapsto g^{-1}h \end{aligned}$$

es diferenciable, donde $G \times G$ es la variedad diferenciable producto de G consigo mismo.

Definición 1.2.2. Sea M una variedad diferenciable. Una **acción a izquierda** de un grupo de Lie G sobre M es una aplicación diferenciable $\phi^M : G \times M \rightarrow M$ que satisface las siguientes propiedades:

- i) $\phi^M(e, m) = m \quad \forall m \in M$
- ii) $\phi^M(g, \phi^M(h, m)) = \phi^M(gh, m) \quad \forall g, h \in G \text{ y } \forall m \in M.$

Observación 1.2.3. De manera análoga a como definimos una acción a izquierda podemos considerar acciones a derecha de un grupo de Lie G sobre una variedad diferenciable M . En este caso se cumple que

$$\phi^M(h, \phi^M(g, m)) = \phi^M(hg, m) \quad \forall g, h \in G, \quad \forall m \in M.$$

Observación 1.2.4. Una acción ϕ^M de G sobre M define las siguientes aplicaciones diferenciables. Dado $g \in G$, se tiene el difeomorfismo dado por

$$\begin{aligned} \phi_g^M : M &\rightarrow M \\ \phi_g^M(m) &= \phi^M(g, m) \end{aligned}$$

Notemos que del mismo modo, $id|_M = \phi_g^M \circ \phi_{g^{-1}}^M$. Entonces, $(\phi_g^M)^{-1} = \phi_{g^{-1}}^M$.

Ejemplo 1.2.5. i) G actúa sobre sí mismo por traslaciones a izquierda y derecha. Estas traslaciones, respectivamente, están dadas por

$$\begin{aligned} L : G \times G &\rightarrow G & \text{y} & & R : G \times G &\rightarrow G \\ L(g, h) &= gh & & & R(g, h) &= hg \end{aligned}$$

Tenemos entonces,

$$\begin{aligned} L_g : G &\rightarrow G & \text{y} & & R_g : G &\rightarrow G \\ L_g(h) &= gh & & & R_g(h) &= hg \end{aligned}$$

- ii) G actúa sobre sí mismo por conjugación

$$I : G \times G \rightarrow G$$

$$I(g, h) = ghg^{-1}$$

Entonces, se tiene el llamado automorfismo interior de G asociado a g

$$I_g(h) = ghg^{-1} = (L_g \circ R_{g^{-1}})(h).$$

iii) **Levantamiento al fibrado tangente:** Si ϕ^M es una acción de G sobre M se puede considerar la acción de G sobre TM dada por

$$\phi^{TM} : G \times TM \rightarrow TM$$

$$\text{donde } \phi^{TM}(g, (m, v_m)) = (\phi^M(g, m), (d\phi_g^M)_m(v_m)).$$

Definición 1.2.6. Si ϕ^M es una acción de G sobre M y $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, se dice que f es **invariante por la acción ϕ^M** o (**G-invariante**) si $f \circ \phi_g^M = f \quad \forall g \in G$.

Definición 1.2.7. Un campo vectorial X sobre G es un **campo vectorial invariante a izquierda** si $\forall g \in G$,

$$(L_g)_*X = X.$$

Observación 1.2.8. Es claro que $\mathcal{X}_L(G)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{X}(G)$ y puede verse que

$$[\mathcal{X}_L(G), \mathcal{X}_L(G)] \subseteq \mathcal{X}_L(G)$$

donde $[\cdot, \cdot]$ denota el corchete usual entre campos.

Proposición 1.2.9. *Existe un isomorfismo natural entre los espacios vectoriales $\mathcal{X}_L(G)$ y T_eG .*

Definición 1.2.10. Dados $\xi, \eta \in T_eG$, se define un **corchete de Lie** en T_eG por

$$[\xi, \eta] := [X_\xi, X_\eta](e).$$

Observación 1.2.11. Así, T_eG tiene estructura de álgebra de Lie que hereda de la estructura de subálgebra de Lie de $(\mathcal{X}_L(G), [\cdot, \cdot])$.

Definición 1.2.12. T_eG con esta estructura de álgebra de Lie es el **álgebra de Lie del grupo G** .

Definición 1.2.13. i) Dado $X \in \mathcal{X}(M)$, una curva $\alpha : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ es una curva integral de X si

$$\alpha'(t) = X(\alpha(t)) \quad \forall t \in (a, b).$$

ii) Dado $X \in \mathcal{X}(M)$, el **flujo de X** es el conjunto de aplicaciones

$$\varphi_t : M \rightarrow M$$

tales que $t \rightarrow \varphi_t(m)$ es la curva integral de X tal que $\varphi_0(m) = m$.

iii) Definimos

$$\phi_\xi : R \rightarrow G$$

como la curva integral de $X_\xi(e)$ tal que $\phi_\xi(0) = e$. Ésto es,

$$X_\xi(e) = \frac{d}{dt}(\phi_\xi(t)) \Big|_{t=0}$$

iv) La **aplicación exponencial** se define como

$$\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$$

$$\exp(\xi) := \phi_\xi(1).$$

Definición 1.2.14. Sean ϕ^M una acción de G sobre M y $\xi \in \mathfrak{g}$. El campo vectorial diferenciable sobre M

$$(\xi_M)_m := \frac{d}{dt} \phi^M(e^{t\xi}, m) \Big|_{t=0}$$

es el **generador infinitesimal de la acción asociado a ξ** .

Lema 1.2.15. Sea M una variedad y ϕ una acción se tiene la siguiente identificación para el generador infinitesimal $\phi_g^* \xi_M = (Ad_{g^{-1}} \xi)_M$.

Observación 1.2.16. Equivalentemente, f es G -invariante si $L_{\xi_M} f = 0 \quad \forall \xi \in \mathfrak{g}$.

Sea ϕ^Q una acción de G sobre Q , $\phi^Q : G \times Q \rightarrow Q$. Esta acción se levanta al cotangente de Q y se tiene la acción

$$\phi^{T^*Q} : G \times T^*Q \rightarrow T^*Q$$

dada por

$$\phi_g^{T^*Q}(\alpha_q) \cdot X = \alpha_{\phi_g^Q(q)}((\phi_g^Q)_* X)$$

con $X \in T_q Q$ y $\alpha_q \in T_q^* Q$.

Definición 1.2.17. Dado G un grupo de Lie y M una variedad, el *subgrupo de isotropía* de $m \in M$ es el subgrupo

$$G_m = \{g \in G / gm = m\}.$$

Definición 1.2.18. Un acción en M se dice:

- i) **Libre:** si $G_m = \{e\}$ para cada $m \in M$.
- ii) **Propia:** si la aplicación $G \times M \rightarrow M \times M$ dada por $(g, m) \mapsto (m, gm)$ es propia.

1.3. Formas de conexión en fibrados principales

Definición 1.3.1. Sean M una variedad suave y G un grupo de Lie. Un **fibrado principal** P con base M y con grupo de estructura G , también llamado G -fibrado consiste en una variedad suave P y una proyección suave $\pi : P \rightarrow M$ que satisface las siguientes condiciones:

- i) G actúa a derecha libre y propiamente sobre P .
- ii) $\pi(G \cdot p) = \pi(p)$ para todo $p \in P$.
- iii) P es localmente trivial. Esto significa que alrededor de cada $m \in M$ existe un abierto U y un difeomorfismo $\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow G \times U$ que es equivariante, donde G actúa en $G \times U$ por traslaciones a derecha en el primer factor.

La fibra $\pi^{-1}(m)$, donde $m \in M$, son las órbitas de la acción y M es el espacio de órbitas del G -espacio P , que denotamos $M = P/G$.

Definición 1.3.2. Una **conexión** principal \mathcal{A} en el fibrado principal $\pi : P \rightarrow M$ es para cada punto $p \in P$ la elección de un subespacio vectorial $Hor(p)$ de T_pP que complementa al subespacio $Vert(p) = \{\pi^{-1}(\pi(p))\}$ tal que

- i) $Hor(p)$ depende diferenciablemente de p .
- ii) $T_pP = Hor(p) \oplus Vert(p)$.
- iii) $Hor(p.a) = (R_a)_*Hor(p)$, $\forall a \in G$.

Definición 1.3.3. Dados dos espacios fibrados sobre la misma variedad base $\pi_1 : P_1 \rightarrow M$ y $\pi_2 : P_2 \rightarrow M$, definimos el **fibrado producto como el fibrado con base M de la siguiente manera**

$$P_1 \times_M P_2 = \{(p_1, p_2) \in P_1 \times P_2 / \pi_1(p_1) = \pi_2(p_2)\}.$$

Definición 1.3.4. Dado $p \in P$, una **1-forma de conexión principal** en el fibrado principal $\pi : P \rightarrow M$ es una aplicación suave $\mathcal{A} : TP \rightarrow \mathfrak{g}$ tal que

- i) $\mathcal{A}(\xi_P(p)) = \xi \quad \forall p \in P \text{ y } \xi \in \mathfrak{g}$
- ii) $\mathcal{A}(T_p\Phi_a \cdot v_p) = Ad_a(\mathcal{A}(v_p))Q.$

Observación 1.3.5. Es claro que

$$Hor(p) = \{v_p \in T_pP / \mathcal{A}(v_p) = 0\}.$$

Definición 1.3.6. Dada una 1-forma de conexión principal \mathcal{A} en un fibrado principal $\pi : P \rightarrow M$, su **curvatura** asociada es la 2-forma sobre P \mathfrak{g} -valuada dada por

$$\mathcal{B}(v_p, w_p) = d\mathcal{A}(Hor(v_p), Hor(w_p)).$$

1.4. Grupos de Lie

En esta sección recordaremos algunos resultados básicos de grupos de Lie. En particular, usamos la trivialización a izquierda de grupos de Lie G para describir el fibrado tangente y cotangente de G y la aplicación momento canónica $J : T^*G \rightarrow \mathfrak{g}^*$. En este sentido ilustraremos la teoría, considerando el caso especial cuando G es el grupo de Lie $SO(3)$. Sea G un grupo de Lie con \mathfrak{g} su álgebra de Lie y consideremos la acción l de G en si misma por traslaciones a izquierda es decir,

$$l : G \times G \rightarrow G$$

dada por

$$l(g, h) = l_g(h) = gh.$$

Usando la trivialización a izquierda, el fibrado tangente y cotangente, TG y T^*G , pueden identificarse con las variedades producto $G \times \mathfrak{g}$ y $G \times \mathfrak{g}^*$, respectivamente,

$$G \times \mathfrak{g} \rightarrow TG, \quad (g, \xi) \in G \times \mathfrak{g} \mapsto (T_g l_g)(\xi) \in T_g G$$

$$G \times \mathfrak{g}^* \rightarrow T^*G, \quad (g, \nu) \in G \times \mathfrak{g}^* \mapsto (T_g^* l_{g^{-1}})(\nu) \in T_g^* G$$

Por lo tanto, podemos referirnos a esta trivialización definiendolo como **cuerpos coordinados**. Bajo la identificación previa, la estructura simpléctica Ω_G de T^*G está dada por

$$\Omega_G(g, \nu)((\xi, \alpha), (\xi', \alpha')) = -\alpha(\xi') + \alpha'(\xi) + \nu([\xi, \xi']),$$

para $(g, \nu) \in G \times \mathfrak{g}^*$ y $(\xi, \alpha), (\xi', \alpha') \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \simeq T_g G \times T_\nu \mathfrak{g}^* \simeq T_{(g, \nu)}(G \times \mathfrak{g}^*)$.

Describiremos ahora la aplicación del grupo de Lie $SO(3)$ de matrices ortogonales sobre la acción regular a izquierda del subgrupo K de rotaciones alrededor del eje z dado por

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & \text{sen}(\theta) & 0 \\ -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

Denotamos por A_θ las matrices de rotación del ángulo θ alrededor del eje z . Claramente, K es difeomorfo al grupo de Lie abeliano \mathbb{S}^1 vía la identificación $A_\theta \mapsto e^{i\theta}$. El álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$ de $SO(3)$ puede identificarse con \mathbb{R}^3 vía la aplicación **hat**

$$\hat{\cdot} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathfrak{so}(3)$$

dada por

$$v \mapsto \hat{v}$$

donde \hat{v} es la matriz de rotación simétrica tal que

$$\hat{v}w = v \wedge w$$

para todo $w \in \mathbb{R}^3$. El álgebra de Lie \mathfrak{S}^1 de \mathbb{S}^1 es justo $\langle e_3 \rangle \subset \mathbb{R}^3$, donde e_3 es el tercer vector de la base canónica de \mathbb{R}^3 . En coordenadas, tenemos el difeomorfismo

$$T^*(SO(3)) \simeq SO(3) \times (\mathbb{R}^3)^* \simeq SO(3) \times \mathbb{R}^3$$

donde tenemos la identificación de \mathbb{R}^3 con su dual vía el par canónico. La acción levantada al cotangente y la aplicación momento están dadas, respectivamente, por

$$(A_\theta, (A, \Pi)) \mapsto (A_\theta A, \Pi),$$

$$(A, \Pi) \mapsto (A\Pi) \cdot e_3,$$

para $A_\theta \in SO(3)$ y $(A, \Pi) \in SO(3) \times \mathbb{R}^3 \simeq T^*(SO(3))$. Notar que $SO(3)$ es un **grupo de Lie reducible** con respecto al subgrupo K , es decir, el álgebra de Lie de $\mathfrak{so}(3)$ admite la descomposición

$$\mathfrak{so}(3) \simeq \mathbb{R}^3 = \langle e_1, e_2 \rangle \oplus \mathfrak{S}^1$$

donde $\langle e_1, e_2 \rangle$ es un subespacio $Ad(\mathbb{S}^1)$ -invariante de $\mathfrak{so}(3)$.

1.5. Grupo de rotaciones de \mathbb{R}^3

Consideramos el espacio euclídeo \mathbb{R}^3 con su producto escalar usual (\cdot, \cdot) :

$$((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

También denotaremos el producto escalar como $(x, y) = x \cdot y$ donde $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$.

El **grupo ortogonal** $O(3)$ está formado por el conjunto de transformaciones lineales de \mathbb{R}^3 que preservan el producto escalar usual. Es decir, si denotamos por $M(3) \equiv L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ al conjunto de matrices reales:

$$M(3) = \{\mathbf{R} = (R^{ij} \mid R^{ij} \in \mathbb{R}, i, j = 1, 2, 3)\}$$

entonces $\mathbf{R} \in O(3)$ si se verifica

$$(\mathbf{R}x, \mathbf{R}y) = (x, y).$$

Por lo tanto,

$$O(3) = \{\mathbf{R} \in M(3) \mid \mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I}\},$$

donde \mathbf{R}^T denota la matriz traspuesta de \mathbf{R} e \mathbf{I} es la matriz identidad. Como $\det(\mathbf{R}\mathbf{R}^T) = \det(\mathbf{R})^2 = 1$ entonces $\det \mathbf{R} = 1$ ó $\det \mathbf{R} = -1$, lo que divide el grupo ortogonal $O(3)$ en dos componentes conexas.

El **grupo de rotaciones** $SO(3)$ es la componente conexa de $O(3)$ que contiene a la identidad \mathbf{I} , es decir,

$$SO(3) = \{\mathbf{R} \in M(3) \mid \mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I}, \det(\mathbf{R}) = 1\}.$$

$SO(3)$ es un grupo de Lie compacto y conexo.

El álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$ de $SO(3)$ es

$$\begin{aligned} \mathfrak{so}(3) &= T_{\mathbf{I}}SO(3) \\ &= \{\dot{\mathbf{R}}(0) \mid \mathbf{R}(t) \in SO(3), \mathbf{R}(0) = \mathbf{I}\} \\ &= \{A \in M(3) \mid A \text{ es antisimétrica}\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, una matriz $A \in \mathfrak{so}(3)$ si y sólo si es una matriz real 3×3 antisimétrica, o, lo que es lo mismo

$$(Ax, y) + (x, Ay) = 0.$$

Consideremos la aplicación lineal $i : \mathfrak{so}(3) \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$i \left[\begin{array}{ccc} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{array} \right] = (a_1, a_2, a_3) = \mathbf{a}$$

que resulta un isomorfismo.

1.6. Ángulos de Euler

Los **ángulos de Euler** constituyen un conjunto de tres coordenadas angulares que sirven para especificar la orientación de un sistema de referencia de ejes cartesianos respecto a otro sistema de referencia de ejes ortogonales normalmente fijos.

Una rotación de α radianes sobre el eje x está definido como

$$R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ 0 & \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Similarmente, una rotación de β radianes sobre el eje y está definido como

$$R_y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \operatorname{sen} \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen} \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix}$$

Finalmente, una rotación γ radianes sobre el eje z está definido como

$$R_z(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\operatorname{sen} \gamma & 0 \\ \operatorname{sen} \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Los tres ángulos anteriores son los **Ángulos de Euler** y son los valores de las tres rotaciones intrínsecas que describen el sistema y se expresan generalmente como (α, β, γ) , donde $-\pi \leq \alpha \leq \pi$, $-\pi \leq \gamma \leq \pi$ y $0 \leq \beta \leq \pi$. Dada $A \in SO(3)$ puede obtenerse en términos de las tres rotaciones, una sobre cada uno de los ejes principales y queda expresada de la siguiente manera:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \gamma \cos \beta & \cos \gamma \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \gamma \cos \alpha & \cos \alpha \operatorname{sen} \beta \cos \gamma + \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen} \gamma \cos \beta & \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \alpha + \cos \gamma \cos \alpha & \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \beta \cos \alpha - \cos \gamma \operatorname{sen} \alpha \\ -\operatorname{sen} \beta & \cos \beta \operatorname{sen} \alpha & \cos \beta \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Capítulo 2

Reducción de Sistemas Mecánicos con simetrías

En este capítulo consideramos sistemas mecánicos con simetrías analizando distintos marcos y teorías de reducción.

Cuando se consideran las formulaciones Lagrangiana y Hamiltoniana de la mecánica clásica, se observa que son particularmente interesantes los sistemas mecánicos que presentan los llamados términos magnéticos. Estos términos suelen aparecer como un ingrediente geométrico del sistema o bien como un dato de la dinámica del mismo.

2.1. Sistemas Hamiltonianos

La versión Hamiltoniana de la mecánica se realiza en el fibrado cotangente del espacio de configuraciones del sistema y mediante una función suave sobre esta variedad llamada función Hamiltoniana o Hamiltoniano que usualmente es la energía total. Esta formulación explota la riqueza geométrica de las variedades simplécticas.

Definición 2.1.1. Dadas (M, Ω) una variedad simpléctica y $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable sobre M , se define el campo vectorial X_H como el único campo identificado con la 1-forma dH por medio de la forma no degenerada Ω . Es decir, el campo X_H es el único campo sobre M tal que

$$i_{X_H}\Omega = dH.$$

El campo X_H es llamado **campo vectorial Hamiltoniano** de H .

Definición 2.1.2. Un **sistema Hamiltoniano** está dado por una terna (M, Ω, H)

donde (M, Ω) es una variedad simpléctica y $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable llamada **Hamiltoniano del sistema**.

Si M es el fibrado cotangente de una variedad diferenciable Q de dimensión n y Ω es la forma canónica Ω_Q en $M = T^*Q$ que en coordenadas locales (q_i, p^i) se escribe como $\Omega_Q = dq^i \wedge dp_i$, el campo Hamiltoniano $X_H = (X_q, X_p)$ está dado por

$$\begin{aligned} X_{q^i}(q, p) &= \frac{\partial H}{\partial p_i}(q, p) \\ X_{p_i}(q, p) &= -\frac{\partial H}{\partial q^i}(q, p) \end{aligned}$$

con $i = 1, \dots, n$.

Estas son llamadas **ecuaciones de Hamilton** que forman un sistema de $2n$ ecuaciones diferenciales de primer orden.

Veremos, siguiendo [62], que en un fibrado cotangente T^*Q existe una manera natural de definir transformaciones canónicas que usualmente son llamadas traslaciones en la fibra y que permiten modificar la estructura simpléctica canónica Ω_Q de T^*Q con las formas conocidas como términos magnéticos.

Proposición 2.1.3. *Dada A una 1-forma en Q consideremos la aplicación $t_A : T^*Q \rightarrow T^*Q$ definida como $\alpha_q \mapsto \alpha_q + A(q)$ para todo $\alpha_q \in T_q^*Q$ que es llamada **traslación en la fibra por A** . Entonces $t_A^*\theta_Q = \theta_Q + \pi_Q^*A$, con $\Omega_Q = d\theta_Q$ siendo θ_Q el potencial simpléctico canónico en T^*Q y $\pi_Q^* : T^*Q \rightarrow Q$ es la proyección canónica. Por lo tanto, $t_A^*\Omega_Q = \Omega_Q - \pi_Q^*dA$.*

Corolario 2.1.4. *Luego, t_A es una transformación canónica si y sólo si $\pi_Q^*dA = 0$.*

Proposición 2.1.5. *Se tiene que*

- i) Si B es una 2-forma cerrada en Q , entonces $\Omega_B = \Omega_Q - \pi_Q^*B$ es una forma simpléctica en T^*Q .*
- ii) Si B y B' son 2-formas cerradas en Q tales que $B - B' = dA$ entonces la aplicación t_A es un difeomorfismo simpléctico de (T^*Q, Ω_B) en $(T^*Q, \Omega_{B'})$.*

Definición 2.1.6. El término extra π_Q^*B es usualmente llamado **término magnético**.

Proposición 2.1.7. *Dado un Hamiltoniano H y $B = dA$ una 2-forma en Q , consideremos el Hamiltoniano definido como $H_B(q, p) = H_A(q, p) = H(q, p - A)$. Entonces, los sistemas Hamiltonianos (T^*Q, Ω_B, H) y (T^*Q, Ω_Q, H_B) tienen las mismas ecuaciones de movimiento; es decir, son sistemas dinámicos equivalentes.*

Vamos a considerar el ejemplo de una partícula en un campo magnético descrito de estas dos maneras equivalentes.

Ejemplo 2.1.8. Partícula en un campo magnético

Sean $Q = \mathbb{R}^3$ las posibles configuraciones del sistema, T^*Q parametrizado con coordenadas $(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$, B una 2-forma cerrada en \mathbb{R}^3 dada por $B = B_x dy \wedge dz - B_y dx \wedge dz + B_z dx \wedge dy$. Sea $\mathcal{B} = B_x \check{i} + B_y \check{j} + B_z \check{k}$ la divergencia asociada.

Pensando a \mathcal{B} como un campo magnético, las ecuaciones de movimiento para una partícula con carga e y masa m están dadas por la ley de fuerzas de Lorenz $m \frac{dv}{dt} = \frac{e}{c} v \times \mathcal{B}$, donde c es la carga de la partícula; $v = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \dot{q}$ es la velocidad de la partícula.

- i) Consideramos en $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ la forma cerrada simpléctica modificada $\Omega_B = m(dx \wedge d\dot{x} + dy \wedge d\dot{y} + dz \wedge d\dot{z}) - \frac{e}{c} B$. El Hamiltoniano H , la energía cinética, es $H(p_x, p_y, p_z) = \frac{m}{2}(\dot{p}_x^2 + \dot{p}_y^2 + \dot{p}_z^2)$.

Escribiendo $X_H(p_x, p_y, p_z) = (p_x, p_y, p_z, \dot{p}_x, \dot{p}_y, \dot{p}_z)$, la ecuación $i_{X_H} \Omega_B = dH$ da lugar a las 6 ecuaciones de primer orden de Hamilton del sistema que son

$$\begin{aligned} p_x &= \dot{x} \\ p_y &= \dot{y} \\ p_z &= \dot{z} \\ m\dot{p}_x &= \frac{e}{c}(B_z p_y - B_y p_z) \\ m\dot{p}_y &= \frac{e}{c}(B_x p_z - B_z p_x) \\ m\dot{p}_z &= \frac{e}{c}(B_y p_x - B_x p_y) \end{aligned}$$

- ii) Consideramos ahora $B = dA$ con A una 1-forma, la forma canónica usual Ω_B , el Hamiltoniano modificado $H_A(q, p) = \frac{1}{2m} \|p - \frac{e}{c} A\|^2$ y el campo Hamiltoniano

$$X_{H_A} = \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y} + \gamma \frac{\partial}{\partial z} + \tilde{\alpha} \frac{\partial}{\partial p_x} + \tilde{\beta} \frac{\partial}{\partial p_y} + \tilde{\gamma} \frac{\partial}{\partial p_z}$$

entonces las 6 ecuaciones de primer orden de Hamilton del sistema son

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \left(p_x - \frac{e}{c} A_1 \right) \left(-\frac{e}{c} \frac{\partial A_1}{\partial x} \right) &= -\tilde{\alpha} \\ \frac{1}{m} \left(p_y - \frac{e}{c} A_2 \right) \left(-\frac{e}{c} \frac{\partial A_2}{\partial y} \right) &= -\tilde{\beta} \\ \frac{1}{m} \left(p_z - \frac{e}{c} A_3 \right) \left(-\frac{e}{c} \frac{\partial A_3}{\partial z} \right) &= -\tilde{\gamma} \\ \frac{1}{m} \left(p_x - \frac{e}{c} A_1 \right) &= \alpha \\ \frac{1}{m} \left(p_y - \frac{e}{c} A_2 \right) &= \beta \end{aligned}$$

$$\frac{1}{m} \left(p_z - \frac{e}{c} A_3 \right) = \gamma.$$

Ahora presentamos un ejemplo con estructura simpléctica modificada.

Ejemplo 2.1.9. Mecanismo planar: Dos cuerpos rígidos con carga

Consideremos dos cuerpos rígidos idénticos, cada uno con masa M , momento de inercia I y longitud l . La orientación del cuerpo 1 es medida por el ángulo θ respecto al eje inercial y la orientación del cuerpo 2 es medido por el ángulo φ medido respecto del cuerpo 1.

Al final los dos cuerpos se juntan en un punto que es el centro de masa común a ambos, con cargas eléctricas e_1 y e_2 respectivamente. También se considera que el sistema está bajo la influencia de un campo magnético con fuerza \mathcal{B} .

Vamos a escribir las ecuaciones de movimiento de este sistema considerando el Hamiltoniano dado por la energía y la estructura simpléctica modificada con el término magnético.

La posición del pivote (centro donde se unen los dos cuerpos) se describe por un vector $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Por lo tanto el espacio de configuraciones es $Q = SE(2) \times \mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ parametrizado por (x, y, θ, φ) . Consideremos el Lagrangiano (en ausencia del campo magnético) como la energía cinética, es decir, $L(X, \theta, \varphi, \dot{X}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) = M \|\dot{x}\|^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I(\dot{\theta} + \dot{\varphi})^2$.

El Hamiltoniano está dado por

$$H(x, y, \theta, \varphi, p_x, p_y, p_\theta, p_\varphi) = \frac{p_x^2}{4M} + \frac{p_y^2}{4M} + \frac{I}{2} \left(\frac{p_\theta}{I} - \frac{p_\varphi}{I} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{p_\varphi^2}{I}$$

donde
$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 2M\dot{x}, \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = 2M\dot{y},$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 2I\dot{\theta} + I\dot{\varphi} \quad \text{y} \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = I\dot{\theta} + I\dot{\varphi}.$$

Entonces dH se escribe como

$$dH = \frac{1}{2M} p_x dp_x + \frac{1}{2M} p_y dp_y + \left(\frac{p_\theta}{I} - \frac{p_\varphi}{I} \right) dp_\theta + \left(\frac{2p_\varphi}{I} - \frac{p_\theta}{I} \right) dp_\varphi$$

y el campo Hamiltoniano X_H se escribe como

$$X_H = A_x \frac{\partial}{\partial x} + A_y \frac{\partial}{\partial y} + A_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + A_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} + A_{p_x} \frac{\partial}{\partial p_x} + A_{p_y} \frac{\partial}{\partial p_y} + A_{p_\theta} \frac{\partial}{\partial p_\theta} + A_{p_\varphi} \frac{\partial}{\partial p_\varphi}.$$

Consideremos la forma modificada de la siguiente manera:

$$\Omega_{\mathcal{B}} = dx \wedge dp_x + dy \wedge dp_y + d\theta \wedge dp_\theta + d\varphi \wedge dp_\varphi - \left(\frac{e_1}{c} + \frac{e_2}{c} \right) \mathcal{B}$$

donde $\mathcal{B} = Bdx \wedge dy$. Entonces

$$i_{X_H}\Omega_{\mathcal{B}}(\cdot) = \Omega_{\mathcal{B}}(X_H, \cdot)$$

$$\begin{aligned} & (dx \wedge dp_x)(X_H, \cdot) + (dy \wedge dp_y)(X_H, \cdot) + (d\theta \wedge dp_\theta)(X_H, \cdot) \\ & + (d\varphi \wedge dp_\varphi)(X_H, \cdot) - \left(\frac{e_1}{c} + \frac{e_2}{c}\right) \mathcal{B}(dx \wedge dy)(X_H, \cdot) \\ & = dx(X_H)dp_x(\cdot) - dx(\cdot)dp_x(X_H) + dy(X_H)dp_y(\cdot) \\ & - dy(\cdot)dp_y(X_H) + d\theta(X_H)dp_\theta(\cdot) - d\theta(\cdot)dp_\theta(X_H) \\ & + d\varphi(X_H)dp_\varphi(\cdot) - d\varphi(\cdot)dp_\varphi(X_H) \\ & - \left(\frac{e_1}{c} + \frac{e_2}{c}\right) \mathcal{B}dx(X_H)dy(\cdot) - \left(\frac{e_1}{c} + \frac{e_2}{c}\right) \mathcal{B}dx(\cdot)dy(X_H) \\ & = A_x dp_x(\cdot) - dx(\cdot)A_{p_x} + A_y dp_y(\cdot) \\ & - dy(\cdot)A_{p_y} + A_\theta dp_\theta(\cdot) - d\theta(\cdot)A_{p_\theta} + A_\varphi dp_\varphi(\cdot) - d\varphi(\cdot)A_{p_\varphi} \\ & - \left(\frac{e_1}{c} + \frac{e_2}{c}\right) \mathcal{B}A_x dy(\cdot) - \left(\frac{e_1}{c} + \frac{e_2}{c}\right) \mathcal{B}dx(\cdot)A_y \end{aligned}$$

Si escribimos la ecuación de movimiento $i_{X_H}\Omega_{\mathcal{B}}(\cdot) = dH(\cdot)$ se tiene:

$$\begin{aligned} A_{p_x} + \left(\frac{e_1}{c} + \frac{e_2}{c}\right) \mathcal{B}A_y &= 0 \\ A_{p_y} + \left(\frac{e_1}{c} + \frac{e_2}{c}\right) \mathcal{B}A_x &= 0 \\ A_{p_\theta} &= 0 \\ A_{p_\varphi} &= 0 \\ A_x &= \frac{1}{2M}p_x \\ A_y &= \frac{1}{2M}p_y \\ A_\theta &= \frac{p_\theta}{I} - \frac{p_\varphi}{I} \\ A_\varphi &= \frac{2p_\varphi}{I} - \frac{p_\theta}{I} \end{aligned}$$

Entonces las ecuaciones de Hamilton pueden escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} A_{p_x} + \left(\frac{e_1}{c} + \frac{e_2}{c}\right) \mathcal{B}A_y &= 0 \\ A_{p_y} + \left(\frac{e_1}{c} + \frac{e_2}{c}\right) \mathcal{B}A_x &= 0 \\ A_{p_\theta} &= 0 \\ A_{p_\varphi} &= 0 \\ p_x &= 2MA_x \\ p_y &= 2MA_y \\ p_\theta &= (A_\varphi + 2A_\theta)I \\ p_\varphi &= (A_\varphi + A_\theta)I \end{aligned}$$

2.2. Sistemas Lagrangianos

La versión Lagrangiana de la mecánica se formula con el fibrado tangente TQ y una función diferenciable $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$, llamada **función Lagrangiana o Lagrangiano**, que usualmente está dada por la energía cinética menos la energía potencial.

2.2.1. Descripción variacional y ecuaciones de Euler-Lagrange

Definición 2.2.1. Un sistema Lagrangiano está dado por un par (Q, L) donde Q es una variedad diferenciable, el espacio de configuraciones, y $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable llamada **Lagrangiano del sistema**.

El **funcional acción** del sistema está definido como

$$\mathcal{A}(q) := \int_0^T L(q(t), \dot{q}(t)) dt$$

donde $q : [0, T] \rightarrow Q$ es una curva suave en Q y $\dot{q} : [0, T] \rightarrow TQ$ es su curva velocidad de manera tal que $\dot{q}(t) \in T_{q(t)}Q \quad \forall t \in [0, T]$.

Una **variación infinitesimal** de q es una curva suave $\delta_q : [0, T] \rightarrow TQ$ tal que $\delta_q(t) \in T_{q(t)}Q \quad \forall t \in [0, T]$. Se dice que δ_q es una **variación a extremos fijos** si $\delta_q(0) = 0$ y $\delta_q(T) = 0$.

El **principio variacional de Hamilton** establece que las trayectorias del sistema están dadas por los puntos críticos del funcional $\mathcal{A}(q)$; es decir, las curvas q que satisfacen que

$$d\mathcal{A}(q). \delta_q = 0$$

para toda variación δ_q a extremos fijos, donde d denota el diferencial exterior de la acción \mathcal{A} definida sobre el espacio de curvas suaves $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, Q) = \{q : [0, T] \rightarrow Q\}$. Aplicando las técnicas usuales del cálculo de variaciones se muestra que

$$\begin{aligned} d\mathcal{A}(q). \delta_q &= \int_0^T \left[\frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \frac{d}{dt} \delta q^i \right] dt \\ &= \int_0^T \left[\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right] \delta q^i dt + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i \right]_0^T. \end{aligned}$$

Entonces, tomando variaciones a extremos fijos se tiene que los puntos críticos de \mathcal{A} son las soluciones de las **ecuaciones de Euler-Lagrange** que resultan

$$\frac{\partial L}{\partial q}(q, \dot{q}) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}) \right) = 0.$$

Estas ecuaciones determinan un sistema de n ecuaciones diferenciales de segundo orden.

Considerando el fibrado de segundo orden (ver capítulo 3 para más detalles) T^2Q con coordenadas (q, \dot{q}, \ddot{q}) se puede decir que existe un único operador

$$\mathcal{E}L : T^2Q \rightarrow T^*Q$$

denominado el **operador de Euler-Lagrange** que se escribe como

$$\mathcal{E}L = \sum_{l=0}^1 (-1)^l \frac{d^l}{dt^l} \left(\frac{\partial L}{\partial q^{(l)}} \right) = \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)$$

y una única 1-forma $\theta_L = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} dq$ sobre TQ tal que

$$d\mathcal{A}(q(t)) \cdot \delta q(t) = \int_0^T \mathcal{E}L(q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t)) \cdot \delta q(t) dt + (\theta_L(q(t), \dot{q}(t)) \cdot \delta q(t)) \Big|_0^T.$$

2.2.2. Transformada de Legendre

Recordemos que un **sistema Lagrangiano** es **hiperregular** si la transformada de Legendre $\mathbb{F}L : TQ \rightarrow T^*Q$ con $v_q \mapsto \mathbb{F}L(v_q)$ es un difeomorfismo global.

Dado un sistema Lagrangiano hiperregular (Q, L) , se puede definir una estructura simpléctica en TQ usando la transformada de Legendre: denotamos la 2-forma en TQ obtenida como el pull-back de Ω_Q por $\mathbb{F}L$, como $\Omega_Q^L := (\mathbb{F}L)^*\Omega_Q$.

Si ϕ es una acción de un grupo de Lie G sobre Q , la acción levantada ϕ^{TQ} de G en TQ es una acción canónica para la variedad simpléctica (TQ, Ω_Q^L) . Además, la transformada de Legendre es un simplectomorfismo equivariante entre las variedades (TQ, Ω_Q^L) y (T^*Q, Ω_Q) . Es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} TQ & \xrightarrow{\mathbb{F}L} & T^*Q \\ \phi^{TQ} \downarrow & & \downarrow \phi^{T^*Q} \\ TQ & \xrightarrow{\mathbb{F}L} & T^*Q \end{array}$$

Consideremos ahora el mismo ejemplo de la partícula en un campo magnético que ya estudiamos en el marco de la mecánica Hamiltoniana.

Ejemplo 2.2.2. Partícula en un campo magnético

Consideremos $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, el Lagrangiano del sistema viene dado por $L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$ y entonces las 3 ecuaciones de segundo orden de Euler Lagrange para este Lagrangiano son:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \frac{e}{c}(B_z\dot{y} - B_y\dot{z}) \\ m\ddot{y} &= \frac{e}{c}(B_x\dot{z} - B_z\dot{x}) \\ m\ddot{z} &= \frac{e}{c}(B_y\dot{x} - B_x\dot{y}) \end{aligned}$$

Consideramos $B = dA$ con A una 1-forma. Consideremos la forma canónica usual Ω_B y el Hamiltoniano modificado $H_A(q, p) = \frac{1}{2m} \| p - \frac{e}{c}A \|^2$.

Via la transformada de Legendre, podemos obtener el Lagrangiano modificado $L_A : TQ \rightarrow \mathbb{R}$, como $L_A(q, \dot{q}) = p \cdot \dot{q} - H_A(q, p)$ siendo $\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$ y queda entonces $L_A(q, \dot{q}) = \frac{m}{2} \|\dot{q}\|^2 + \frac{e}{c}A(q)\dot{q}$, donde $A(q) = (A_1(q), A_2(q), A_3(q))$. Calculamos entonces las 3 ecuaciones de segundo orden de Euler Lagrange para este lagrangiano modificado, que son:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\dot{y} + \frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_3}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial z}\right)\dot{z} \\ m\ddot{y} &= \frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_1}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial x}\right)\dot{x} + \frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\dot{z} \\ m\ddot{z} &= \frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right)\dot{x} + \frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_2}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial y}\right)\dot{y} \end{aligned}$$

Luego, como teníamos que $B = dA$ se verifica que las ecuaciones del Lagrangiano obtenidas a partir del Hamiltoniano modificado con un término magnético y la forma simpléctica usual, son equivalentes a las ecuaciones de Euler Lagrange obtenidas con el Hamiltoniano usual y la forma simpléctica modificada con un término magnético via la transformada de Legendre.

2.3. Sistemas de Poisson

En muchos casos de interés resulta conveniente generalizar la formulación Hamiltoniana de la mecánica reemplazando el fibrado cotangente por una variedad de Poisson.

Definición 2.3.1. Un **corchete de Poisson** en una variedad M es una operación bilineal $\{, \}$ en $\mathcal{F}^0(M) = C^\infty(M)$ tal que

- i) $(\mathcal{F}^0(M), \{, \})$ es un álgebra de Lie
 ii) $\{, \}$ es una derivación en cada factor, esto es,

$$\{FG, H\} = \{F, H\}G + F\{G, H\} \quad \text{para todas } F, G \text{ y } H \in \mathcal{F}^0(M).$$

Una variedad M con un corchete de Poisson en $\mathcal{F}^0(M)$ es denominada **variedad de Poisson** y se denota como $(M, \{., .\})$.

Definición 2.3.2. Dada una variedad simpléctica (M, Ω) , si $f, g \in \mathcal{F}^0(M)$, se define el corchete de Poisson canónicamente asociado a Ω de f y g como la función $\{f, g\}_\Omega \in \mathcal{F}^0(M)$ dada por

$$\{f, g\}_\Omega(m) := \Omega_m(X_f, X_g).$$

Observación 2.3.3. Si tomamos un sistema local de coordenadas $\{q^i, p_i\}_{i=1, \dots, n}$ en M tenemos que

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i}.$$

Observación 2.3.4. $(\mathcal{F}^0(M), \{., .\})$ es un álgebra de Lie real.

Corolario 2.3.5. La aplicación definida de $\mathcal{F}^0(M)$ en $\mathcal{X}(M)$ que le asigna a cada f su campo Hamiltoniano X_f es un antihomomorfismo de álgebras de Lie.

$$X_{\{f, g\}} = -[X_f, X_g].$$

Proposición 2.3.6. Sean (M, Ω) una variedad simpléctica y $f, g \in \mathcal{F}^0(M)$. Entonces,

$$\{f, g\} = -L_{X_f}g = L_{X_g}f.$$

Definición 2.3.7. Un sistema de Poisson está dado por una terna $((M, \{., .\}), H)$ donde $(M, \{., .\})$ es una variedad de Poisson y $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable.

Las ecuaciones de movimiento de un sistema de Poisson están dadas por

$$\dot{f} = \{f, H\} \quad \forall f \in \mathcal{F}(M)$$

2.4. Reducción de Sistemas Hamiltonianos con simetrías

En esta sección vamos a recordar cómo es natural eliminar las simetrías de los sistemas Hamiltonianos utilizando aplicaciones momento.

2.4.1. Sistemas Hamiltonianos con simetrías

Definición 2.4.1. Una **simetría** del sistema Hamiltoniano (M, Ω, H) es una acción canónica de un grupo de Lie G sobre M tal que el Hamiltoniano H resulta G -invariante.

Definición 2.4.2. Sean (M, Ω) una variedad simpléctica conexa, $\phi^M : G \times M \rightarrow M$ una acción del grupo de Lie G sobre M . Decimos que una función

$$J : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$$

es una **aplicación momento** para esta acción si, $\forall \xi \in \mathfrak{g}$,

$$d\hat{J}(\xi) = i_{\xi_M} \Omega,$$

donde $\hat{J}(\xi) : M \rightarrow \mathbb{R}$ es tal que $\hat{J}(\xi)(m) = J(m) \cdot \xi$ y ξ_M es el generador infinitesimal de la acción correspondiente a ξ . En otras palabras, J es una aplicación momento si

$$X_{\hat{J}(\xi)} = \xi_M, \forall \xi \in \mathfrak{g}.$$

Proposición 2.4.3. Dados $g \in G$ y $\xi \in \mathfrak{g}$, definimos la aplicación $\psi_{g,\xi} : M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\psi_{g,\xi}(m) = \hat{J}(\xi)(\phi_g(m)) - \hat{J}(Ad_{g^{-1}}\xi)(m)$.

Definición 2.4.4. La aplicación $\sigma : G \rightarrow \mathfrak{g}^*$ dada por $\sigma(g) \cdot \xi = \text{valor cte. de } \psi_{g,\xi}$ es llamada **cociclo co-adjunto asociado al momento J**.

Observación 2.4.5. La aplicación $\phi_{g,\xi}$ satisface la identidad de cociclo

$$\sigma(gh) = \sigma(g) + Ad_{g^{-1}}^* \sigma(h).$$

Definición 2.4.6. Una función momento es llamada **Ad^* -equivariante** si

$$J(\phi_g(m)) = Ad_{g^{-1}}^* J(m) \quad \forall g \in G$$

Es decir, J es Ad^* -equivariante si y sólo si el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{J} & \mathfrak{g}^* \\ \phi_g^M \downarrow & & \downarrow Ad_{g^{-1}}^* \\ M & \xrightarrow{J} & \mathfrak{g}^* \end{array}$$

Observación 2.4.7. J es equivariante si y sólo si su cociclo asociado es nulo. El cociclo σ de una aplicación momento cualquiera nos da una medida de su no equivarianza.

En caso de no tener equivarianza, la acción puede ser modificada de manera que el momento resulte equivariante con respecto a la nueva acción llamada afín. En efecto, si definimos la aplicación $\varphi : G \times \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$ como

$$\varphi(g, \alpha) = Ad_{g^{-1}}^* \alpha + \sigma(g)$$

entonces φ resulta ser una acción y J es equivariante con respecto a ella.

Ejemplo 2.4.8. Consideremos una acción ϕ de G sobre Q y su acción levantada al cotangente T^*Q . Si Ω_Q es la estructura simpléctica canónica sobre T^*Q , la aplicación momento equivariante $J : T^*Q \rightarrow \mathfrak{g}^*$ para esta acción está dada por $\langle J(\alpha_q, \xi) \rangle = \alpha_q(\xi_Q(q))$, $\forall \xi \in \mathfrak{g}$.

Para un sistema Hamiltoniano (M, Ω, H) con simetría se tiene una importante ley de conservación conocida como el **Teorema de Noether**.

Teorema 2.4.9. *Sea ϕ una acción simpléctica de G en (M, Ω) con aplicación momento J . Supongamos que $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ es invariante bajo la acción, que es, $H(x) = H(\phi_g(x))$ para todo $x \in M$ y $g \in G$. Entonces si F_t es el flujo de X_H , $J(F_t(x)) = J(x)$, $\forall x \in M$.*

2.4.2. Reducción de Marsden-Weinstein

Este proceso de reducción para sistemas hamiltonianos con simetrías está basado en la propiedad importante de que la aplicación momento es una constante de movimiento del sistema. Seguiremos las ideas propuestas en [61].

Teorema 2.4.10. *(Reducción de Marsden-Weinstein) Sea (M, Ω) una variedad simpléctica conexa con G un grupo de Lie que actúa libre, propia y canónicamente en M . Sea J una aplicación momento para la acción con cociclo no equivariante. Sea $\mu \in J(M)$ un valor regular de J y denotamos por G_μ el grupo de isotropía de μ respecto a la acción afín de G en \mathfrak{g}^* . Entonces (M_μ, Ω_μ) con $M_\mu = J^{-1}(\mu)/G_\mu$ es una variedad simpléctica tal que Ω_μ es una 2-forma únivocamente determinada por $i_\mu^* \Omega = \pi_\mu^* \Omega_\mu$, donde $i_\mu : J^{-1}(\mu) \rightarrow M$ y $\pi_\mu : J^{-1}(\mu) \rightarrow M_\mu$ son la inclusión y la proyección canónicas respectivamente.*

$$\begin{array}{ccc}
 J^{-1}(\mu) & \xleftarrow{i_\mu} & M \\
 \pi_\mu \downarrow & & \\
 J^{-1}(\mu)/G_\mu & &
 \end{array}$$

Sea H una función en M que es invariante bajo la acción de G . Entonces, el campo vectorial hamiltoniano X_H es tangente a $J^{-1}(\mu)$ y existe un hamiltoniano h en M_μ tal que $i_\mu^*H = \pi_\mu^*h$, tal que la restricción de X_H a $J^{-1}(\mu)$ está π_μ -relacionada con X_h .

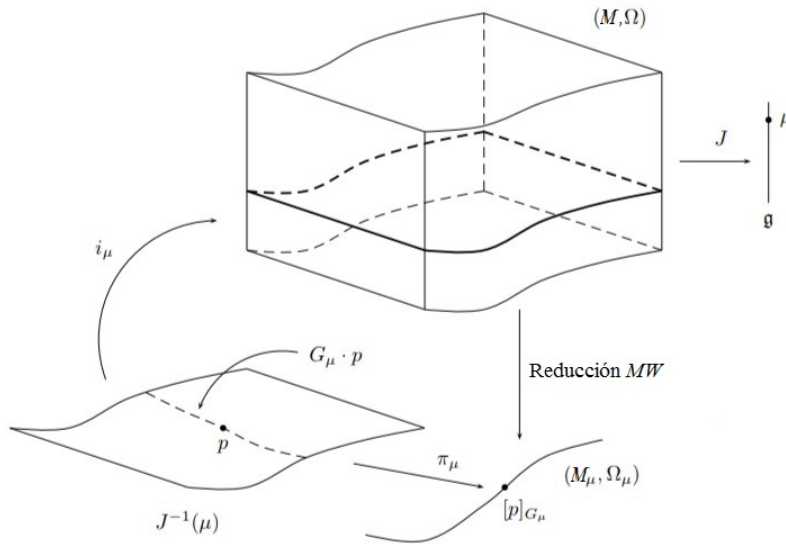


Figura 2.1

Observación 2.4.11. En general, la variedad simpléctica M_μ no es un fibrado cotangente aunque en lo que sigue vemos que se puede conseguir una identificación simpléctica con un fibrado cotangente (para más detalles ver Capítulo 4, Sección 4.3 en [1]).

2.4.3. Reducción al fibrado cotangente

Ahora veremos cómo se puede identificar la variedad cociente M_μ con un producto fibrado y cómo aparecen en este contexto los llamados términos magnéticos que permiten realizar esta identificación.

Consideremos ahora el fibrado cotangente T^*Q con su forma simpléctica canónica $\Omega_Q = d\theta_Q$, y un grupo G que actúa sobre Q por la acción ϕ^Q y por lo tanto en T^*Q

por el levantamiento al cotangente de esta acción como ya definimos:

$$\phi^Q : G \times Q \rightarrow Q$$

$$\phi^{T^*Q} : G \times T^*Q \rightarrow T^*Q$$

tal que

$$(g, \alpha_q) \longmapsto T_{g,q}^* \phi_{g^{-1}}(\alpha_q)$$

La aplicación $J : T^*Q \rightarrow \mathfrak{g}^*$ está definida por $\langle J(\alpha_q), \xi \rangle = \langle \alpha_q, \xi_Q(q) \rangle$. Se puede ver que J es equivariante con respecto a la acción coadjunta en \mathfrak{g}^* ; es decir, $J \circ \phi_g^{T^*Q} = Ad_{g^{-1}}^* \circ J, \forall g \in G$. Supongamos que ϕ^Q es libre y propia. Consideremos el fibrado principal $\pi : Q \rightarrow Q/G$.

Definición 2.4.12. El fibrado de vectores verticales con respecto a la proyección del fibrado principal $\pi : Q \rightarrow Q/G$, está dado por

$$V\pi = \{v \in TQ \mid T\pi(v) = 0\}$$

o sea, $(V\pi)_q = \{v_q \in T_qQ \mid T_q\pi(v_q) = 0\} \forall q \in Q$.

Su anulador es el espacio $V^\circ\pi \subset T^*Q$ tal que

$$V^\circ\pi = \{\alpha_q \in T^*Q \mid \alpha_q(v_q) = 0, \forall v_q \in (V\pi)_q\}.$$

Lema 2.4.13. Bajo las hipótesis anteriores, se tiene que $V^\circ\pi = J^{-1}(0)$.

Demostración. Vemos la doble inclusión entre los conjuntos $V^\circ\pi$ y $J^{-1}(0)$.

i) $V^\circ\pi \subset J^{-1}(0)$

Sea $\alpha_q \in V^\circ\pi$. Queremos ver que $J(\alpha_q) = 0$ o lo que es lo mismo que $\forall \xi \in \mathfrak{g}, \langle J(\alpha_q), \xi \rangle = 0$.

Por definición de aplicación momento se tiene que $\langle J(\alpha_q), \xi \rangle = \langle \alpha_q, \xi_Q(q) \rangle$ y entonces como $\xi_Q(q) \in V\pi, \langle \alpha_q, \xi_Q(q) \rangle = 0$ Por lo tanto, $\alpha_q \in J^{-1}(0)$.

ii) $J^{-1}(0) \subset V^\circ\pi$

Sea $\alpha_q \in J^{-1}(0)$. Entonces $\forall \xi \in \mathfrak{g}, \langle J(\alpha_q), \xi \rangle = 0$. Esto es, $\langle \alpha_q, \xi_Q(q) \rangle = 0$. Entonces, considerando $v = \xi_Q(q)$ para algún $\xi \in \mathfrak{g}, \langle \alpha_q, v \rangle = 0$ que significa que $\alpha_q(v) = 0$, para todos los verticales. Por lo tanto $\alpha_q \in V^\circ\pi$.

□

Veremos ahora cómo establecer una traslación en las fibras que nos permita identificar la subvariedad $J^{-1}(0)$ con cualquier subvariedad $J^{-1}(\mu)$.

Dada una conexión \mathcal{A} en el fibrado principal $\pi : Q \rightarrow Q/G$, para cada $q \in Q$ se define la aplicación $\mathcal{A}_q : T_q Q \rightarrow \mathfrak{g}$ dada por $\mathcal{A}_q(v_q) = \mathcal{A}(v_q)$. Sea $\mathcal{A}_q^* : \mathfrak{g}^* \rightarrow T_q^* Q$ su aplicación dual, definida como

$$\langle \mathcal{A}_q^*(\mu), v_q \rangle = \langle \mu, \mathcal{A}_q(v_q) \rangle.$$

Lema 2.4.14. *Dada una conexión \mathcal{A} en el fibrado principal $Q \rightarrow Q/G$, si $\mu \in \mathfrak{g}^*$ es un valor regular de la aplicación J , entonces existe un difeomorfismo $\phi_{\mathcal{A}}^\mu$ entre $J^{-1}(\mu)$ y $J^{-1}(0)$.*

Demostración.

Consideremos $\phi_{\mathcal{A}}^\mu : J^{-1}(\mu) \rightarrow J^{-1}(0)$ definida como $\phi_{\mathcal{A}}^\mu(\alpha_q) = \alpha_q - \mathcal{A}_q^*(\mu)$ y veamos que es un difeomorfismo.

En primer lugar, es claro que si $\alpha_q \in J^{-1}(\mu)$ entonces $\alpha_q - \mathcal{A}_q^*(\mu) \in J^{-1}(0)$ ya que si $\xi \in \mathfrak{g}$

$$\begin{aligned} \langle J(\alpha_q - \mathcal{A}_q^*(\mu)), \xi \rangle &= \langle (\alpha_q - \mathcal{A}_q^*(\mu)), \xi_Q(q) \rangle \\ &= \langle \alpha_q, \xi_Q(q) \rangle - \langle \mathcal{A}_q^*(\mu), \xi_Q(q) \rangle \\ &= \langle \alpha_q, \xi_Q(q) \rangle - \langle \mu, \mathcal{A}_q(\xi_Q(q)) \rangle \\ &= \langle J(\alpha_q), \xi \rangle - \langle \mu, \xi \rangle = 0 \end{aligned}$$

ya que $\alpha_q \in J^{-1}(\mu)$

Es claro que $\phi_{\mathcal{A}}^\mu$ es inyectiva y se puede verificar fácilmente que $\phi_{\mathcal{A}}^\mu$ es suryectiva ya que dado $\beta_q \in J^{-1}(0)$ si consideramos $\alpha_q = \beta_q + \mathcal{A}_q^*(\mu)$ se tiene que $\phi_{\mathcal{A}}^\mu(\alpha_q) = \beta_q$ y $\langle J(\alpha_q), \xi \rangle = \langle \mu, \xi \rangle \forall \xi \in \mathfrak{g}$

Por construcción $\phi_{\mathcal{A}}^\mu$ y su inversa son suaves y por lo tanto, $\phi_{\mathcal{A}}^\mu$ es un difeomorfismo. \square

Observación 2.4.15. Es sencillo ver que G_μ además de actuar sobre $J^{-1}(\mu)$ actúa sobre $J^{-1}(0)$. Esto es, si α_q es tal que $J(\alpha_q) = 0$ se tiene que para todo $\xi \in \mathfrak{g}$,

$$\begin{aligned} \langle J(\phi_a^{T^*Q}(\alpha_q)), \xi \rangle &= \langle \phi_a^{T^*Q}(\alpha_q), \xi_Q(\phi_a(q)) \rangle \\ &= \langle \alpha_q, T\phi_{a^{-1}}(\xi_Q(\phi_a(q))) \rangle \\ &= \langle \alpha_q, \xi'_Q(q) \rangle = 0 \end{aligned}$$

para algún $\xi' \in \mathfrak{g}$ y por lo tanto, $J(\phi_a^{T^*Q}(\alpha_q)) = 0$.

Lema 2.4.16. *La aplicación $\phi_{\mathcal{A}}^\mu$ define un difeomorfismo $[\phi_{\mathcal{A}}^\mu]$ entre los espacios cociente $J^{-1}(\mu)/G_\mu$ y $J^{-1}(0)/G_\mu$ de manera tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{array}{ccc} J^{-1}(\mu) & \xrightarrow{\phi_{\mathcal{A}}^{\mu}} & J^{-1}(0) \\ \pi_{\mu} \downarrow & & \downarrow \pi_{\mu}^0 \\ J^{-1}(\mu)/G_{\mu} & \xrightarrow{[\phi_{\mathcal{A}}^{\mu}]} & J^{-1}(0)/G_{\mu} \end{array}$$

siendo $\pi_{\mu}^0 : J^{-1}(0) \rightarrow J^{-1}(0)/G_{\mu}$ la proyección canónica.

Demostración. Definimos $[\phi_{\mathcal{A}}^{\mu}](\alpha_q) = [\phi_{\mathcal{A}}^{\mu}(\alpha_q)]$.

Por definición de fibrados, para ver que está bien definida sólo alcanza con ver que $\phi_{\mathcal{A}}^{\mu}$ respeta la acción. Entonces deberíamos ver que $\phi_{\mathcal{A}}^{\mu}(a \cdot \alpha_q) = \tilde{a} \cdot \phi_{\mathcal{A}}^{\mu}(\alpha_q)$, para $a \in G_{\mu}$.

Luego, $\phi_{\mathcal{A}}^{\mu}(a \cdot \alpha_q) = a\alpha_q - \mathcal{A}_q^*(\mu)$. Por otro lado si $\phi_{\mathcal{A}}^{\mu}(\alpha_q) = \alpha_q - \mathcal{A}_q^*(\mu)$, entonces $\tilde{a} \cdot \phi_{\mathcal{A}}^{\mu}(\alpha_q) = \tilde{a}\alpha_q - \tilde{a}\mathcal{A}_q^*(\mu)$, con $a = \tilde{a}$. Luego, quiero demostrar que $\mathcal{A}_q^*(\mu) = a\mathcal{A}_q^*(\mu)$ con $a \in G_{\mu}$.

Se tiene entonces, por un lado $\langle \mathcal{A}_q^*(\mu), v \rangle = \langle \mu, \mathcal{A}(v) \rangle$ (por definición de aplicación dual).

Por otro lado, $\langle a \cdot \mathcal{A}_q^*(\mu), v \rangle = \langle \mathcal{A}_q^*(a \cdot \mu), v \rangle = \langle a \cdot \mu, \mathcal{A}(v) \rangle = \langle \mu, \mathcal{A}(v) \rangle$, pues $a \in G_{\mu}$. En el paso de arriba, usamos que $a \cdot \mathcal{A}_q^*(\mu) = \mathcal{A}_q^*(a \cdot \mu)$, veamos que esto se cumple. Sabemos que, como $a \in G_{\mu}$ se cumple que $\mathcal{A}_q^*(a \cdot \mu) = \mathcal{A}_q^*(\mu)$, entonces sólo debemos ver que $a \cdot \mathcal{A}_q^*(\mu) = \mathcal{A}_q^*(\mu)$

$$\begin{aligned} \langle a \cdot \mathcal{A}_q^*(\mu), v \rangle &= \langle \mathcal{A}_q^*(\mu), T\phi_{a^{-1}}v \rangle \\ &= \langle \mu, \mathcal{A}(T\phi_{a^{-1}}v) \rangle \\ &= \langle \mu, Ad_{a^{-1}}\mathcal{A}(v) \rangle \\ &= \langle Ad_a^*\mu, \mathcal{A}(v) \rangle \\ &= \langle \mu, \mathcal{A}(v) \rangle. \end{aligned}$$

Por otro lado, $\langle \mathcal{A}_q^*(\mu), v \rangle = \langle \mu, \mathcal{A}(v) \rangle$.

$$\therefore a \cdot \mathcal{A}_q^*(\mu) = \mathcal{A}_q^*(\mu).$$

□

Ahora vamos a ver que $J^{-1}(0)$ puede identificarse con un producto fibrado.

Lema 2.4.17. *Existe un difeomorfismo entre $J^{-1}(0)$ y $T^*(Q/G) \times_{Q/G} Q$.*

Demostración.

Consideremos $\beta : J^{-1}(0) \rightarrow T^*(Q/G) \times_{Q/G} Q$ dada por $\beta(\alpha_q) = (\tilde{\alpha}_{[q]}, q)$ donde $\langle \tilde{\alpha}_{[q]}, T\pi_q(v_q) \rangle = \langle \alpha_q, v_q \rangle = \alpha_q(v_q)$.

Veamos que β es un difeomorfismo:

i) **Buena definición:**

β está bien definida por construcción y además como $\tilde{\alpha}_{[q]} \in T_{[q]}^*(Q/G)$ y $q \in Q$, entonces $(\tilde{\alpha}_{[q]}, q) \in (T^*(Q/G) \times_{Q/G} Q)$ que fibra en Q/G pues estoy en la misma fibra.

ii) **β es inyectiva:**

Sean $\alpha_q, \gamma_q \in J^{-1}(0)$ entonces $J(\alpha_q) = J(\gamma_q) = 0$. Consideremos $\beta(\alpha_q) = \beta(\gamma_q)$, queremos ver que $\alpha_q = \gamma_q$.

Como

$$\begin{aligned}\beta(\alpha_q) &= \beta(\gamma_q) \\ (\tilde{\alpha}_{[q]}, q) &= (\tilde{\gamma}_{[q]}, q) \\ \tilde{\alpha}_{[q]} &= \tilde{\gamma}_{[q]}\end{aligned}$$

Entonces, para ver que $\alpha_q = \gamma_q$ deberíamos ver que $\forall v_q \in T_q Q$, $\langle \alpha_q, v_q \rangle = \langle \gamma_q, v_q \rangle$, pero $\langle \alpha_q, v_q \rangle$ por definición es

$$\begin{aligned}\langle \alpha_q, v_q \rangle &= \langle \tilde{\alpha}_{[q]}, T\pi_q(v_q) \rangle \\ &= \langle \tilde{\gamma}_{[q]}, T\pi_q(v_q) \rangle \\ &= \langle \gamma_q, v_q \rangle\end{aligned}$$

iii) **β es suryectiva:**

Consideremos $(\gamma_{[q]}, q) \in (T^*(Q/G) \times_{Q/G} Q)$, entonces debemos ver que existe $\alpha_q \in J^{-1}(0)$ tal que $\beta(\alpha_q) = (\gamma_{[q]}, q)$.

Sea $\alpha_q(v_q) = (\gamma_{[q]}, T\pi_q(v_q))$. Luego, $\beta(\alpha_q) = (\tilde{\alpha}_{[q]}, q)$, entonces veamos que se cumple que $\tilde{\alpha}_{[q]} = \gamma_{[q]}$.

$$\langle \tilde{\alpha}_{[q]}, T\pi_q(v_q) \rangle = \langle \alpha_q, v_q \rangle = \langle \gamma_{[q]}, T\pi_q(v_q) \rangle$$

Por lo que $\tilde{\alpha}_{[q]} = \gamma_{[q]}$.

iv) **β es suave** por construcción y por lo tanto lo es su inversa.

Finalmente, β es un difeomorfismo. □

Observación 2.4.18. Entonces se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} J^{-1}(\mu) & \xrightarrow{\phi_{\mathcal{A}}^\mu} & J^{-1}(0) & \xrightarrow{\beta} & T^*(Q/G) \times_{Q/G} Q \\ \pi_\mu \downarrow & & \downarrow \pi_\mu^0 & & \\ J^{-1}(\mu)/G_\mu & \xrightarrow{[\phi_{\mathcal{A}}^\mu]} & J^{-1}(0)/G_\mu & & \end{array}$$

Por otro lado, es inmediato verificar que G_μ actúa sobre $T^*(Q/G) \times_{Q/G} Q$ de la siguiente manera $a \cdot (\tilde{\alpha}_{[q]}, q) = (\tilde{\alpha}_{[q]}, a \cdot q)$ y por lo tanto, se puede considerar el cociente $(T^*(Q/G) \times_{Q/G} Q)/G_\mu$ y se tiene la proyección canónica al cociente $p_\mu : T^*(Q/G) \times_{Q/G} Q \rightarrow (T^*(Q/G) \times_{Q/G} Q)/G_\mu$

Vamos a identificar esta variedad cociente con un producto fibrado.

Lema 2.4.19. *Consideramos*

$$\chi : (T^*(Q/G) \times_{Q/G} Q)/G_\mu \rightarrow T^*(Q/G) \times_{Q/G} Q/G_\mu$$

definido como

$$\chi([\tilde{\alpha}_{[q]}, q]_{G_\mu}) = (\tilde{\alpha}_{[q]}, [q]_{G_\mu}).$$

Entonces χ es un isomorfismo.

Demostración.

i) **Buena definición:**

Supongamos que $[\tilde{\alpha}_{[q]}, q]_{G_\mu} = [\tilde{\gamma}_{[q]}, q]_{G_\mu}$ tal que $a(\tilde{\alpha}_{[q]}, q) = (\tilde{\gamma}_{[q]}, \tilde{q})$. Como, por definición de acción $a(\tilde{\alpha}_{[q]}, q) = (\tilde{\alpha}_{[q]}, aq)$, se tiene que $\tilde{\alpha}_{[q]} = \tilde{\gamma}_{[q]}$ y que $aq = \tilde{q}$, entonces $[aq] = [\tilde{q}] = [q]$.

Luego, $\chi([\tilde{\alpha}_{[q]}, q]_{G_\mu}) = (\tilde{\alpha}_{[q]}, [q]_{G_\mu}) = (\tilde{\gamma}_{[q]}, [\tilde{q}]_{G_\mu}) = \chi([\tilde{\gamma}_{[q]}, \tilde{q}]_{G_\mu})$

ii) **χ es inyectiva:**

Si $\chi([\tilde{\alpha}_{[q]}, q]_{G_\mu}) = \chi([\tilde{\gamma}_{[q]}, q]_{G_\mu})$, veamos que se cumple que $[\tilde{\alpha}_{[q]}, q]_{G_\mu} = [\tilde{\gamma}_{[q]}, q]_{G_\mu}$. Luego

$$\begin{aligned} \chi([\tilde{\alpha}_{[q]}, q]_{G_\mu}) &= \chi([\tilde{\gamma}_{[q]}, q]_{G_\mu}) \\ (\tilde{\alpha}_{[q]}, [q]_{G_\mu}) &= (\tilde{\gamma}_{[q]}, [q]_{G_\mu}) \\ [\tilde{\alpha}_{[q]}, q]_{G_\mu} &= [\tilde{\gamma}_{[q]}, q]_{G_\mu}. \end{aligned}$$

iii) **χ es suryectiva:** por construcción.

Por lo tanto se tiene que χ es un isomorfismo

$$(T^*(Q/G) \times_{Q/G} Q)/G_\mu \simeq T^*(Q/G) \times_{Q/G} Q/G_\mu.$$

□

Se puede verificar fácilmente que β da lugar a una aplicación $[\beta]$ en los espacios cociente de manera análoga a como se comprobó que $[\phi_{\mathcal{A}}^{\mu}]$ está bien definida en el Lema 2.4.16.

Lema 2.4.20. *Se puede definir $[\beta]$ tal que el siguiente diagrama conmute*

$$\begin{array}{ccc} J^{-1}(0) & \xrightarrow{\beta} & T^*(Q/G) \times_{Q/G} Q \\ \downarrow \pi_{\mu}^0 & & \downarrow \chi^{\circ p_{\mu}} \\ J^{-1}(0)/G_{\mu} & \xrightarrow{[\beta]} & T^*(Q/G) \times_{Q/G} Q/G_{\mu} \end{array}$$

Proposición 2.4.21. *Se tiene que $J^{-1}(\mu)/G_{\mu} \simeq T^*(Q/G) \times_{Q/G} Q/G_{\mu}$.*

Demostración.

Utilizando los resultados anteriores se tiene que el siguiente doble diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} J^{-1}(\mu) & \xrightarrow{\phi_{\mathcal{A}}^{\mu}} & J^{-1}(0) & \xrightarrow{\beta} & T^*(Q/G) \times_{Q/G} Q \\ \pi_{\mu} \downarrow & & \downarrow \pi_{\mu}^0 & & \downarrow \chi^{\circ p_{\mu}} \\ J^{-1}(\mu)/G_{\mu} & \xrightarrow{[\phi_{\mathcal{A}}^{\mu}]} & J^{-1}(0)/G_{\mu} & \xrightarrow{[\beta]} & T^*(Q/G) \times_{Q/G} Q/G_{\mu} \end{array}$$

donde $[\phi_{\mathcal{A}}^{\mu}] : J^{-1}(\mu)/G_{\mu} \rightarrow J^{-1}(0)/G_{\mu}$ y $[\beta] : J^{-1}(0)/G_{\mu} \rightarrow T^*(Q/G) \times_{Q/G} Q/G_{\mu}$.

Entonces $[\tilde{\phi}_{\mathcal{A}}^{\mu}] := [\beta] \circ [\phi_{\mathcal{A}}^{\mu}] : J^{-1}(\mu)/G_{\mu} \rightarrow T^*(Q/G) \times_{Q/G} Q/G_{\mu}$ es un difeomorfismo \square

Nuestro objetivo es modelizar la variedad simpléctica $(J^{-1}(\mu)/G_{\mu}, \Omega_{\mu})$. Hemos identificado el espacio $J^{-1}(\mu)/G_{\mu}$ con $T^*(Q/G) \times_{Q/G} Q/G_{\mu}$ y vamos a caracterizar la forma simpléctica Ω_{μ} .

En primer lugar veamos que dado $\mu \in \mathfrak{g}^*$, una conexión principal $\mathcal{A} : TQ \rightarrow \mathfrak{g}$ define una 1-forma de conexión $\mathcal{A}_{\mu} : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\mathcal{A}_{\mu}(\cdot) := \langle \mu, \mathcal{A}(\cdot) \rangle$. Muchas veces se escribe $\mathcal{A}_{\mu} = \mathcal{A}^*(\mu)$, por lo que $\mathcal{A}_{\mu}^*(\cdot) : T_q Q \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\mathcal{A}_{\mu}^*(\cdot) := \langle \mu, \mathcal{A}(\cdot) \rangle$.

Es sencillo verificar que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} T_q Q & \xrightarrow{\mathcal{A}_{\mu}} & \mathbb{R} \\ \phi_a^{TQ} \downarrow & & \downarrow G_{\mu} \\ T_{\phi_a^{TQ}(q)} Q & \xrightarrow{\mathcal{A}_{\mu}} & \mathbb{R} \end{array}$$

donde la acción de G_{μ} sobre \mathbb{R} es trivial.

Lema 2.4.22. *\mathcal{A}_{μ} es G_{μ} -invariante.*

Demostración. Dado $a \in G_\mu$ se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\mu(\phi_a^{TQ}(v_q)) &= \langle \mu, \mathcal{A}(\phi_a^{TQ}(v_q)) \rangle \\ &= \langle \mu, Ad_a \mathcal{A}(v_q) \rangle \\ &= \langle Ad_a^* \mu, \mathcal{A}(v_q) \rangle \\ &= \langle \mu, \mathcal{A}(v_q) \rangle \\ &= \mathcal{A}_\mu(v_q). \end{aligned}$$

□

Corolario 2.4.23. *La 2-forma $d\mathcal{A}_\mu$ es G_μ -invariante.*

Demostración. Para ver que $d\mathcal{A}_\mu$ es G_μ -invariante veamos que $\mathcal{L}_{\xi_Q} d\mathcal{A}_\mu = 0$ para todo $\xi \in \mathfrak{g}$.

Por la fórmula mágica de Cartan se tiene que

$$\mathcal{L}_{\xi_Q} d\mathcal{A}_\mu = i_{\xi_Q} d(d\mathcal{A}_\mu) + di_{\xi_Q} d\mathcal{A}_\mu = di_{\xi_Q} d\mathcal{A}_\mu = 0$$

ya que $i_{\xi_Q} d\mathcal{A}_\mu = 0$ (utilizando Cartan) pues por un lado \mathcal{A}_μ es G_μ -invariante y por lo tanto $\mathcal{L}_{\xi_Q} \mathcal{A}_\mu = 0$ y además $di_{\xi_Q} \mathcal{A}_\mu = 0$ pues $i_{\xi_Q} \mathcal{A}_\mu$ es una función constante respecto de q , ya que $i_{\xi_Q} \mathcal{A}_\mu(q) = \langle \mu, \xi \rangle$. □

Lema 2.4.24. *Existe una única 2-forma cerrada sobre Q/G_μ que denotamos como β_μ tal que $\pi_{Q,G_\mu}^* \beta_\mu = d\mathcal{A}_\mu$ donde $\pi_{Q,G_\mu} : Q \rightarrow Q/G_\mu$ denota la proyección canónica al cociente.*

Demostración. Veamos que β_μ es única y cerrada en Q/G_μ .

i) β_μ es única:

Supongamos que existe γ_μ tal que $\pi_{Q,G_\mu}^* \gamma_\mu = d\mathcal{A}_\mu$, pero $d\mathcal{A}_\mu = \pi_{Q,G_\mu}^* \beta_\mu$.

Luego, tenemos

$$\begin{aligned} \pi_{Q,G_\mu}^* \gamma_\mu - \pi_{Q,G_\mu}^* \beta_\mu &= 0 \\ \pi_{Q,G_\mu}^* (\gamma_\mu - \beta_\mu) &= 0 \\ \gamma_\mu - \beta_\mu &= 0 \\ \gamma_\mu &= \beta_\mu. \end{aligned}$$

ii) β_μ es cerrada: $\pi_{Q,G_\mu}^* d\beta_\mu = d(\pi_{Q,G_\mu}^* \beta_\mu) = d(d\mathcal{A}_\mu) = dd\mathcal{A}_\mu = 0$

Luego $d\beta_\mu = 0$. Por lo tanto $d\beta_\mu$ es cerrada.

□

Veamos ahora que con la estructura simpléctica canónica $\Omega_{Q/G}$ sobre $T^*(Q/G)$ y esta 2-forma cerrada β_μ sobre Q/G_μ se puede definir una estructura simpléctica sobre el producto fibrado $T^*(Q/G) \times_{Q/G} Q/G_\mu$ de manera tal que la identificación de este espacio con la variedad simpléctica (M_μ, Ω_μ) resulte un isomorfismo simpléctico.

Para esto consideramos las siguientes proyecciones

- i) $\pi_1 : T^*(Q/G) \times_{Q/G} Q/G_\mu \rightarrow T^*(Q/G)$
- ii) $\pi_2 : T^*(Q/G) \times_{Q/G} Q/G_\mu \rightarrow Q/G_\mu$
- iii) $\pi_0 : J^{-1}(0) \rightarrow T^*(Q/G) \times_{Q/G} Q/G_\mu$

Definimos la 2-forma cerrada en $T^*(Q/G) \times_{Q/G} Q/G_\mu$ dada por $\pi_1^*(\Omega_{Q/G}) + \pi_2^*(\beta_\mu)$.

Definición 2.4.25. Con las hipótesis de arriba, $\mathcal{B}_\mu := \pi_2^*(\beta_\mu)$ es denominado **término magnético**.

Observación 2.4.26. Cabe señalar que

- i) Este término magnético aparece como un término necesario para corregir la forma canónica de $T^*(Q/G)$ de manera tal que se puede identificar con la 2-forma Ω_μ en $J^{-1}(\mu)/G_\mu$. A menudo se dice que la forma $\Omega_{Q/G}$ está deformada con un término magnético.
- ii) Como se observa en los cálculos previos, todo esto se define a partir de una 1-forma de conexión principal \mathcal{A}_μ . En realidad, si para cada $\mu \in \mathfrak{g}^*$ se tiene una 1-forma \mathcal{A}_μ que es G_μ -invariante (no necesariamente definida a partir de una conexión principal \mathcal{A}), podemos identificar la variedad simpléctica $(J^{-1}(\mu)/G_\mu, \Omega_\mu)$ con $(T^*(Q/G) \times_{Q/G} Q/G_\mu, \pi_1^*(\Omega_{Q/G}) + \pi_2^*(\beta_\mu))$.

Con todas las identificaciones realizadas es sencillo verificar la siguiente relación (ver [61] para más detalles).

Lema 2.4.27. La forma $\pi_1^*(\Omega_{Q/G}) + \pi_2^*(\beta_\mu)$ es el pull-back de Ω_μ por la aplicación $[\tilde{\phi}_\mathcal{A}^\mu] = [\beta] \circ [\phi_\mathcal{A}^\mu]$. Es decir,

$$([\tilde{\phi}_\mathcal{A}^\mu])^* \Omega_\mu = \pi_1^*(\Omega_{Q/G}) + \pi_2^*(\beta_\mu)$$

y, por lo tanto, es una 2-forma simpléctica.

Finalmente se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2.4.28. Sean una acción libre y propia de un grupo de Lie G sobre Q , su acción levantada a T^*Q y μ un valor regular de la aplicación momento asociada.

Fijando una conexión principal \mathcal{A} , la variedad $(J^{-1}(\mu)/G_\mu, \Omega_\mu)$ es simplectomorfa con $(T^*(Q/G) \times_{Q/G} Q/G_\mu, \pi_1^*(\Omega_{Q/G}) + \pi_2^*(\mathcal{B}_\mu))$ vía $[\tilde{\phi}_\mathcal{A}^\mu]$.

$$\begin{array}{ccccc} J^{-1}(\mu) & \xrightarrow{\phi_\mathcal{A}^\mu} & J^{-1}(0) & \xrightarrow{\beta} & T^*(Q/G) \times_{Q/G} Q \\ \pi_\mu \downarrow & & \downarrow \pi_\mu^0 & & \downarrow \chi \circ p_\mu \\ J^{-1}(\mu)/G_\mu & \xrightarrow{[\phi_\mathcal{A}^\mu]} & J^{-1}(0)/G_\mu & \xrightarrow{[\beta]} & T^*(Q/G) \times_{Q/G} Q/G_\mu \end{array}$$

donde $[\tilde{\phi}_\mathcal{A}^\mu] := [\beta] \circ [\phi_\mathcal{A}^\mu]$.

Observación 2.4.29. Con este modelo para el espacio reducido (M_μ, Ω_μ) se puede definir el hamiltoniano reducido h_μ en las variables de un producto fibrado y escribir las ecuaciones de movimiento reducidas en las variables de esta variedad simplectica.

2.5. Reducción de Sistemas Lagrangianos con simetrías

En esta sección analizamos dos tipos de reducción de sistemas Lagrangianos con simetrías; la análoga a la reducción simplectica de Marsden-Weinstein y la llamada reducción al tangente análoga a la llamada reducción al cotangente de sistemas Hamiltonianos. En este contexto presentamos la reducción de Routh que usa las cantidades conservadas del sistema.

2.5.1. Sistemas Lagrangianos con simetrías

Definición 2.5.1. Dada una acción libre y propia ϕ de G en Q , se dice que el sistema Lagrangiano (Q, L) es **invariante** si L es una función invariante para la acción levantada de ϕ al fibrado tangente TQ .

Si L es un Lagrangiano hiperregular se puede definir una aplicación momento para la acción ϕ^{TQ} sobre la variedad simplectica (TQ, Ω_L) .

Definición 2.5.2. Una **aplicación momento** está dada por $J_L = J \circ \mathbb{F}L : TQ \rightarrow \mathfrak{g}^*$ y J_L es equivariante con respecto a la acción coadjunta en \mathfrak{g}^*

Observación 2.5.3. Es claro que J_L es G -invariante si y sólo si J es G -invariante.

2.5.2. Reducción Lagrangiana de Marsden-Weinstein

Consideraremos ahora la versión Lagrangiana del Teorema de Marsden-Weinstein, para Lagrangianos invariantes.

Teorema 2.5.4. Versión Lagrangiana del Teorema de Marsden-Weinstein Sea G un grupo de Lie que actúa libre y propiamente por ϕ sobre Q y ϕ^{TQ} la acción levantada al tangente. Sea (Q, L) un sistema Lagrangiano invariante tal que L es hiperregular. Si μ es un valor regular de J_L entonces la variedad cociente $(J_L^{-1}(\mu)/G_\mu)$ es una variedad simpléctica con estructura simpléctica $(\Omega_L)_\mu$ definida por la condición $i_\mu^* \Omega_L = \pi_\mu^*(\Omega_L)_\mu$, donde $i_\mu : J_L^{-1}(\mu) \rightarrow TQ$ y $\pi_\mu^L : J_L^{-1}(\mu) \rightarrow J_L^{-1}(\mu)/G_\mu$ son la inclusión y la proyección canónicas respectivamente.

$$\begin{array}{ccc} J_L^{-1}(\mu) & \xleftarrow{i_\mu} & TQ \\ \pi_\mu^L \downarrow & & \\ J_L^{-1}(\mu)/G_\mu & & \end{array}$$

Observación 2.5.5. Como en el caso de la reducción simpléctica de Marsden-Weinstein se puede formular esta versión Lagrangiana para momentos Lagrangianos J_L con cociclo no equivariante.

2.5.3. Reducción al fibrado tangente

De manera análoga a como trabajamos en la llamada reducción al fibrado cotangente vamos a construir un modelo para la variedad simpléctica $(J_L^{-1}(\mu)/G_\mu, (\Omega_L)_\mu)$.

En primer lugar vamos a probar que si L satisface una condición adicional de regularidad, la variedad cociente $J_L^{-1}(\mu)/G_\mu$ se identifica con un producto fibrado análogo al producto fibrado que se identifica con $J^{-1}(\mu)/G_\mu$.

Definición 2.5.6. Un lagrangiano L , G -invariante es llamado **G-regular**, si para $v_q \in T_q Q$ fijo, la aplicación $\mathcal{J}_L^{v_q} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}^*$ definida como $\xi \mapsto J_L(v_q + \xi_Q(q))$ es un difeomorfismo.

Observación 2.5.7. A partir de esta noción observamos que

- i) L es localmente G -regular si $\mathcal{J}_L^{v_q}$ es un difeomorfismo local en entornos del 0 para cada $v_q \in TQ$.
- ii) Si L es G -regular, entonces L es localmente G -regular.

Con esta hipótesis sobre L de G -regularidad se puede demostrar que $J_L^{-1}(\mu)/G_\mu$ es difeomorfo a un espacio fibrado sin recurrir al uso de una familia de 1-formas indexadas con el dual del álgebra como hicimos en la formulación Hamiltoniana.

Lema 2.5.8. Sean L un lagrangiano invariante G -regular y $\mu \in \mathfrak{g}^*$. Entonces existe un difeomorfismo

$$J_L^{-1}(\mu)/G_\mu \cong T(Q/G) \times_{Q/G} Q/G_\mu.$$

Demostración.

Se puede verificar que la aplicación

$$\Pi_\mu : J_L^{-1}(\mu) \rightarrow T(Q/G) \times_{Q/G} Q$$

dada por

$$v_q \mapsto (T\pi(v_q), q)$$

es un difeomorfismo que da lugar a otro difeomorfismo en las variedades que se obtienen al tomar cociente por G_μ (para detalles ver [37]). O sea, la aplicación

$$[\Pi_\mu] : J_L^{-1}(\mu)/G_\mu \rightarrow T(Q/G) \times_{Q/G} Q/G_\mu$$

es un difeomorfismo. \square

Para describir la estructura simpléctica $(\Omega_L)_\mu$ que existe en $J_L^{-1}(\mu)/G_\mu$ vamos a usar el difeomorfismo $[\Pi_\mu]$ y vamos a considerar el siguiente difeomorfismo entre los productos fibrados $T(Q/G) \times_{Q/G} Q/G_\mu$ y $T^*(Q/G) \times_{Q/G} Q/G_\mu$ dado por

$$[\tilde{\phi}_A^\mu] \circ [\mathbb{F}L_\mu] \circ [\Delta_\mu] : T(Q/G) \times_{Q/G} Q/G_\mu \rightarrow T^*(Q/G) \times_{Q/G} Q/G_\mu$$

como se muestra en el siguiente diagrama, siguiendo [37]

$$\begin{array}{ccccccc} T(Q/G) \times_{Q/G} Q & \xrightarrow{\Delta_\mu} & J_L^{-1}(\mu) & \xrightarrow{\mathbb{F}L_\mu} & J^{-1}(\mu) & \xrightarrow{\phi_A^\mu} & J^{-1}(0) \\ \downarrow & & \downarrow \pi_\mu^L & & \downarrow \pi_\mu & & \downarrow \pi_0 \\ T(Q/G) \times_{Q/G} Q/G_\mu & \xrightarrow{[\Delta_\mu]} & J_L^{-1}(\mu)/G_\mu & \xrightarrow{[\mathbb{F}L_\mu]} & J^{-1}(\mu)/G_\mu & \xrightarrow{[\tilde{\phi}_A^\mu]} & T^*(Q/G) \times_{Q/G} Q/G_\mu \end{array}$$

donde

- i) $\mathbb{F}L_\mu := \mathbb{F}L|_{J_L^{-1}(\mu)} : J_L^{-1}(\mu) \rightarrow J^{-1}(\mu)$ que induce una aplicación en los cocientes por G_μ .
- ii) $[\mathbb{F}L_\mu] : J_L^{-1}(\mu)/G_\mu \rightarrow J^{-1}(\mu)/G_\mu$.
- iii) Δ_μ y $[\Delta_\mu]$ las inversas de Π_μ y $[\Pi_\mu]$ respectivamente.

Vamos a considerar el pull-back de la forma simpléctica $\pi_1^*(\Omega_{Q/G}) + \mathcal{B}_\mu$ por el difeomorfismo $[\tilde{\phi}_A^\mu] \circ [\mathbb{F}L_\mu] \circ [\Delta_\mu]$ y así obtenemos las siguientes variedades simplectomorfas

$$(J_L^{-1}(\mu)/G_\mu, (\Omega_L)_\mu)$$

y

$$(T(Q/G) \times_{Q/G} Q/G_\mu, ([\tilde{\phi}_A^\mu] \circ [\mathbb{F}L_\mu] \circ [\Delta_\mu])^*(\pi_1^*(\Omega_{Q/G}) + \mathcal{B}_\mu)).$$

Es claro que para describir la forma $(\Omega_L)_\mu$ en el espacio que modela $J_L^{-1}(\mu)/G_\mu$ fue necesario considerar una familia de 1-formas \mathcal{A}_μ .

2.5.4. Reducción de Routh

Puede verse que esta estructura simpléctica en $T(Q/G) \times_{Q/G} Q/G_\mu$ puede definirse como el pull-back de $(\pi_1^*(\Omega_{Q/G}) + \mathcal{B}_\mu)$ por la transformada de Legendre de un Lagrangiano modificado por una 1-forma que da lugar a una aplicación que llamamos **Routhiano**.

Definición 2.5.9. Dado un lagrangiano $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$, G -invariante y G -regular y una conexión principal \mathcal{A} en el fibrado $\pi : Q \rightarrow Q/G$, para cada $\mu \in \mathfrak{g}^*$ definimos la aplicación $R^\mu = L - \mathcal{A}_\mu$, donde $\mathcal{A}_\mu : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ es la 1-forma conexión considerada antes.

Claramente, por construcción R^μ es G_μ -invariante y su restricción a $J_L^{-1}(\mu)$ define una aplicación reducida $[R^\mu]$ en $J_L^{-1}(\mu)/G_\mu$. Usando la identificación entre este cociente y el fibrado producto $T(Q/G) \times_{Q/G} Q/G_\mu$ se define la aplicación

$$\mathcal{R}^\mu := [R^\mu] \circ [\Delta_\mu] : T(Q/G) \times_{Q/G} Q/G_\mu \rightarrow \mathbb{R}$$

y se denomina **Función de Routh o Routhiano** que es un Lagrangiano reducido.

Proposición 2.5.10. *Se puede definir la transformada de Legendre del Routhiano \mathcal{R}^μ y ver que bajo las condiciones anteriores*

$$[\tilde{\phi}_{\mathcal{A}}^\mu] \circ [\mathbb{F}L_\mu] \circ [\Delta_\mu] = \mathbb{F}\mathcal{R}^\mu.$$

Finalmente estamos en condiciones de enunciar el siguiente teorema de reducción.

Teorema 2.5.11. *Dado un lagrangiano L , G -invariante y G -regular en un espacio de configuraciones Q . Entonces la reducción de Marsden-Weinstein de (TQ, Ω_Q^L) con momento $J_L = \mu$ es la variedad simpléctica*

$$(T(Q/G) \times_{Q/G} Q/G_\mu, (\mathbb{F}\mathcal{R}^\mu)^*(\pi_1^*(\Omega_{Q/G}) + \mathcal{B}_\mu))$$

Al considerar la reducción de Routh (que puede pensarse como la versión Lagrangiana de la reducción Marsden-Weinstein), el sistema que se obtiene es un sistema Lagrangiano con términos magnéticos, que también puede pensarse como un Lagrangiano modificado con estos términos magnéticos, y usualmente suele denominarse **Routhiano**.

Ejemplo 2.5.12. Péndulo con resorte

El sistema consiste en una partícula con masa m moviéndose en el plano horizontal, sujeta al origen de un resorte con constante de fricción k (ver Figura 2.2).

Escogemos coordenadas polares para este sistema lagrangiano

$$L(r, \theta) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{1}{2}kr^2.$$

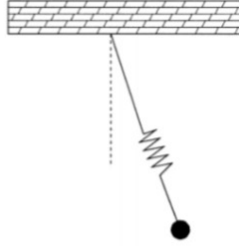


Figura 2.2: Péndulo con resorte

El sistema es invariante bajo traslaciones en la dirección de θ , ya que, si $\psi_a(r, \theta) = (r, \theta + a)$ denota la acción entonces

$$\begin{aligned} L(\psi_a(r, \theta)) &= L(r, \theta + a) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2(\frac{d}{dt}(\theta + a))^2) - \frac{1}{2}kr^2 \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{1}{2}kr^2 = L(r, \theta) \end{aligned}$$

La aplicación momento para esta acción es $J_L = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$, y las ecuaciones de Euler-Lagrange son

$$\begin{aligned} m\ddot{r} - mr\dot{\theta} + kr &= 0 \\ \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) &= 0. \end{aligned}$$

Fijamos un valor regular para la aplicación momento, $0 \neq \mu = mr^2\dot{\theta}$ y sea $\mathcal{A} = d\theta$ la conexión estándar cuyo término de curvatura es nulo. El Routhiano es obtenido como:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^\mu(r, \dot{r}) &= (L - \mu\dot{\theta})|_{\mu=mr^2\dot{\theta}} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{1}{2}kr^2 - \mu\dot{\theta} \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}kr^2 - \mu\dot{\theta} \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\left(\frac{\mu}{mr^2}\right)^2 - \frac{1}{2}kr^2 - \frac{\mu^2}{mr^2} \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{1}{2}\frac{\mu^2}{mr^2} - \frac{1}{2}kr^2. \end{aligned}$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange para \mathcal{R}^μ son

$$m\ddot{r} = -kr + \frac{\mu^2}{mr^3}$$

y las soluciones de esta ecuación están en correspondencia con las soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange para L con momento μ . Para ver eso, observemos que de las ecuaciones anteriores se tiene

$$\begin{aligned} m\ddot{r} &= -kr + \frac{\mu^2}{mr^3} = -kr + \frac{\mu}{r} \frac{\mu}{mr^2} = -kr + \frac{\mu}{r} \cdot \dot{\theta} = -kr + \frac{\dot{\theta}mr^2}{r} \dot{\theta} \\ &= \dot{\theta}^2 mr - kr. \end{aligned}$$

Finalmente, como $\frac{d}{dt}\mu = 0$ por ser el momento una cantidad conservada, se tiene que $\frac{d}{dt}(mr\dot{\theta}) = 0$ (Esto es, $mr^2\dot{\theta}$ es constante a lo largo de las ecuaciones de Euler-Lagrange).

Ejemplo 2.5.13. Tres cuerpos rígidos planares

Consideremos tres cuerpos rígidos planares que tienen un punto en común O , considerado en [37]. Cada cuerpo puede rotar libremente alrededor de O , ortogonalmente al plano. El espacio de configuración es $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ con coordenadas (θ, ϕ, ψ) donde θ es el ángulo que el primer cuerpo rígido hace con una dirección fija en el plano (ver Figura 2.3), ϕ es el ángulo del segundo cuerpo con respecto al primero y ψ denota el ángulo del tercer cuerpo con respecto al segundo cuerpo (ver Figura 2.3).

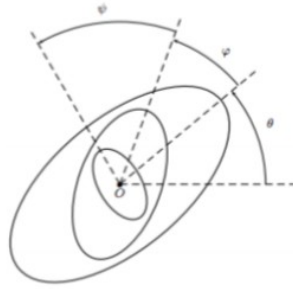


Figura 2.3: Tres cuerpos rígidos

Suponemos que el potencial es de la forma $V(\varphi, \psi)$ de forma tal que tenemos un Lagrangiano S^1 -invariante:

$$L(\theta, \varphi, \psi) = \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_2(\dot{\theta} + \dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2}I_3(\dot{\theta} + \dot{\varphi} + \dot{\psi})^2 - V(\varphi, \psi);$$

pues

$$\begin{aligned}
& L(\gamma_a(\theta, \varphi, \psi)) \\
&= L(\theta + a, \varphi, \psi) \\
&= \frac{1}{2}I_1\left(\frac{d}{dt}(\theta + a)\right)^2 + \frac{1}{2}I_2\left(\left(\frac{d}{dt}(\theta + a)\right) + \dot{\varphi}\right)^2 + \frac{1}{2}I_3\left(\left(\frac{d}{dt}(\theta + a)\right) + \dot{\varphi} + \dot{\psi}\right)^2 - V(\varphi, \psi) \\
&= \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_2(\dot{\theta} + \dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2}I_3(\dot{\theta} + \dot{\varphi} + \dot{\psi})^2 - V(\varphi, \psi) \\
&= L(\theta, \varphi, \psi).
\end{aligned}$$

Sus ecuaciones de Euler-Lagrange son:

$$\begin{aligned}
\ddot{\theta} &= \frac{1}{I_1} \frac{\partial V}{\partial \varphi}, \\
\ddot{\varphi} &= -\left(\frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2}\right) \frac{\partial V}{\partial \varphi} + \frac{1}{I_2} \frac{\partial V}{\partial \psi}, \\
\ddot{\psi} &= -\left(\frac{I_2 + I_3}{I_3 I_2}\right) \frac{\partial V}{\partial \varphi} + \frac{1}{I_2} \frac{\partial V}{\partial \psi}.
\end{aligned}$$

Fijamos un valor regular μ para el momento $J_L = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}$, y entonces queda

$$J_L = (I_1 + I_2 + I_3)\dot{\theta} + (I_2 + I_3)\dot{\varphi} + I_3\dot{\psi}.$$

Si consideramos el conjunto de nivel de la aplicación momento para μ , $\{J_L = \mu\}$, entonces tenemos que

$$\dot{\theta} = \frac{\mu - (I_2 + I_3)\dot{\varphi} - I_3\dot{\psi}}{I_1 + I_2 + I_3}.$$

Consideremos la conexión plana (es decir, con un término con curvatura nula) dada por $\mathcal{A}^0 = d\theta + \cos(\psi)d\varphi$. El Routhiano

$$\mathcal{R}^\mu(\varphi, \dot{\varphi}, \psi, \dot{\psi}) = (L - \langle \mathcal{A}^0, \mu \rangle)_{J=\mu}$$

satisface

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^\mu &= \frac{1}{2} \left[\frac{I_1(I_2 + I_3)}{I_1 + I_2 + I_3} \right] \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{I_3(I_1 + I_2)}{I_1 + I_2 + I_3} \right] \dot{\psi}^2 + \left[\frac{I_1 I_3}{I_1 + I_2 + I_3} \right] \dot{\varphi} \dot{\psi} \\
&\quad + \frac{\mu(I_2 + I_3)(1 - \cos(\psi))}{I_1 + I_2 + I_3} \dot{\varphi} + \frac{\mu I_3}{I_1 + I_2 + I_3} \dot{\psi} - V(\varphi, \psi).
\end{aligned}$$

Luego, se puede ver que las ecuaciones de Euler-Lagrange para \mathcal{R}^μ son equivalentes a las ecuaciones de Euler-Lagrange para las variables (φ, ψ) de L . Asimismo, con la ecuación momento completamos las soluciones del sistema original.

2.6. Reducción de Sistemas de Poisson

Se puede reducir simetrías presentes en variedades de Poisson y en general esto se hace sin una aplicación momento tomando cocientes.

Sea $(P, \{\cdot, \cdot\})$ una variedad de Poisson. Una acción $\phi_g : P \rightarrow P$ de un grupo de Lie se dice **acción de Poisson** si el corchete es invariante por ella; es decir, que el corchete de funciones G -invariantes es invariante.

Teorema 2.6.1. *Sea G un grupo de Lie y Ψ una acción de Poisson que actúa en una variedad de Poisson P . Supongamos que P/G es una variedad diferenciable y $\pi : P \rightarrow P/G$ es una submersión. Entonces hay un único corchete de Poisson $\{\cdot, \cdot\}_{red}$ en P/G llamado corchete de Poisson reducido, tal que*

$$\{F, K\}_{red} \circ \pi := \{F \circ \pi, K \circ \pi\} \quad (2.6.2)$$

para todo $F, K \in \mathcal{F}^0(P/G)$.

Definición 2.6.3. Si $H : P \rightarrow \mathbb{R}$ es una función G -invariante en P , entonces definimos la **función reducida** $H_{red} : P/G \rightarrow \mathbb{R}$ en P/G que está unívocamente determinado por la relación

$$H_{red} \circ \pi = H$$

2.7. Sistemas Lagrangianos y Hamiltonianos Magnéticos

Como vimos, estos procesos de reducción no resultan ser un proceso cerrado en la categoría de los sistemas Lagrangianos y Hamiltonianos. Por un lado, los espacios reducidos no resultan fibrados tangentes ni cotangentes y por otro lado, las estructuras simplécticas se modifican con los llamados términos magnéticos.

En esta sección, siguiendo a [37] presentamos los llamados sistemas Lagrangianos y Hamiltonianos Magnéticos que incluyen a los sistemas que se obtienen al considerar la reducción Lagrangiana de un sistema Lagrangiano.

Definición 2.7.1. Sea $\epsilon : P \rightarrow Q$ un fibrado sobre Q , definimos una **fuerza magnética** \mathcal{B} en P como una 2-forma cerrada en P .

Definición 2.7.2. Un **sistema Lagrangiano magnético** es una clase de sistema Lagrangiano que consiste en una terna $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^L := (\epsilon : P \rightarrow Q, L, \mathcal{B})$ donde $\epsilon : P \rightarrow Q$ es un fibrado, L una función diferenciable en el fibrado producto $TQ \times_Q P$ (independiente de las velocidades tangentes de las fibras de ϵ) y \mathcal{B} un término de fuerza magnética en P .

Observación 2.7.3. Notar que la definición anterior incluye la definición clásica de sistemas Lagrangianos considerando $P = Q$, $\epsilon = id_Q$ y $\mathcal{B} = 0$, donde $id_Q : Q \rightarrow Q$ es la función identidad en Q . En este sentido, el concepto de sistema Lagrangiano magnético extiende el concepto estándar de sistemas Lagrangianos.

Los elementos de las variedades Q y P serán denotados por q y p , respectivamente. Si $\dim Q = n$ y $\dim P = n + k$, las coordenadas en la fibra $\epsilon : P \rightarrow Q$ están dadas por (q^i, p_a) para $i = 1, \dots, n$ y $a = 1, \dots, k = \dim P - \dim Q$. Por lo tanto, las coordenadas del fibrado inducido $TQ \times_Q P$ están dadas por (q^i, v^i, p_a) . Dado que el Lagrangiano es independiente de las velocidades en las coordenadas p_a , y L es interpretado como un Lagrangiano *singular* en función de TP ; es decir $\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial v^a \partial v^b} \right) = 0$. En coordenadas locales, la **2-forma Magnética** \mathcal{B} tiene la expresión

$$\mathcal{B}(q^i, p_a) = \frac{1}{2} \mathbf{B}_{ij} dq^i \wedge dq^j + \mathbf{B}_{ia} dq^i \wedge dp_a + \frac{1}{2} \mathbf{B}_{ab} dp_a \wedge dp_b.$$

donde los coeficientes de \mathcal{B} pueden ser expresados matricialmente como

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{ij} & \mathbf{B}_{ia} \\ \mathbf{B}_{ja} & \mathbf{B}_{ab} \end{pmatrix}$$

La notación usual para trabajar con estos sistemas es la siguiente.

- i) El fibrado producto $TQ \times_Q P$ se representa como $T_P Q$ y los puntos de $T_P Q$ se denotan como (v_q, p) donde $v_q \in T_q Q$ y $p \in P$ tal que $\epsilon(p) = q$.
- ii) De manera análoga, el fibrado producto $T^*Q \times_Q P$ se abrevia como $T_P^* Q$ y sus puntos se denotados por (α_q, p) donde $\alpha_q \in T_q^* Q$ y $p \in P$ tal que $\epsilon(p) = q$.
- iii) V_ϵ denota la distribución en P de vectores tangentes verticales respecto a ϵ .
- iv) $\hat{\epsilon} : TP \rightarrow T_P Q$ es la asignación sobre P que asigna a un elemento $v_q \in TP$ el elemento $(T\epsilon(v_q), p) \in T_P Q$.
- v) $\tau_1 : T_P Q \rightarrow TQ$ es la proyección que le asigna a un elemento $(v_q, p) \in T_P Q$ el vector $v_q \in TQ$ y $\tau_2 : T_P Q \rightarrow P$ la proyección que le asigna el punto $p \in P$.
- vi) $\pi_1 : T_P^* Q \rightarrow T^*Q$ la proyección que le asigna $\alpha_q \in T^*Q$ a $(\alpha_q, p) \in T_P^* Q$ y $\pi_2 : T_P^* Q \rightarrow P$ la proyección que proyecta $(\alpha_q, p) \in T_P^* Q$ en $p \in P$.
- vii) La transformada de Legendre correspondiente a $L : T_P Q \rightarrow \mathbb{R}$ es la aplicación $\mathbb{F}L : T_P Q \rightarrow T_P^* Q$ que asigna $(v_q, p) \in T_P Q$ en $\alpha_q \in T_P^* Q$ y ésta determinada por la relación

$$\langle \alpha_q, w_q \rangle = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} L(v_q + tw_q, p),$$

donde $w_q \in T_q Q$.

- viii) Utilizando la transformada de Legendre, el pull-back de la 2-forma $\pi_1^* \Omega_Q + \pi_2^* \mathcal{B}$ por $\mathbb{F}L$ en $T_P^* Q$ da lugar a una 2-forma presimpléctica en $T_P Q$ (esto es, una 2-forma cerrada pero no necesariamente de rango constante) dada por

$$\Omega^{L, \mathcal{B}} := \mathbb{F}L^*(\pi_1^* \Omega_Q + \pi_2^* \mathcal{B}).$$

- ix) La función $E_L : T_P Q \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $E_L(v_q, p) = \langle \mathbb{F}L(v_q, p), (v_q, p) \rangle - L(v_q, p)$ es llamada **energía** del sistema Lagrangiano magnético. Aquí la contracción de un elemento $(\alpha_q, p) \in T_P Q$ con un elemento $(v_q, p) \in T_P Q$ es definida como $\langle (\alpha_q, p), (v_q, p) \rangle = \langle \alpha_q, v_q \rangle$.

Estas aplicaciones dan lugar al siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & TQ & & T^*Q \\
 & \swarrow & \uparrow \tau_1 & & \uparrow \pi_1 \\
 Q & & T_P Q & \xrightarrow{\mathbb{F}L} & T_P^* Q \\
 & \searrow \epsilon & \downarrow \tau_2 & & \downarrow \pi_2 \\
 & & P & \xrightarrow{id_P} & P
 \end{array}$$

Definición 2.7.4. Una curva $p(t)$ en P es llamada **solución del sistema Lagrangiano magnético** $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^L$ si la curva inducida $\gamma(t) = (\dot{q}(t), p(t)) \in T_P Q$, con $q(t) = \epsilon(p(t)) \forall t$, satisface la ecuación

$$i_{\dot{\gamma}(t)} \Omega^{L, \mathcal{B}}(\gamma(t)) = -dE_L(\gamma(t)).$$

Localmente, la 2-forma $\Omega^{L, \mathcal{B}}$ y el diferencial de la energía del sistema Lagrangiano magnético dE_L , que es una 1-forma en $T_P Q$ tienen la siguiente expresión

$$\Omega^{L, \mathcal{B}} = d \left(\frac{\partial L}{\partial v^i} \right) \wedge dq^i + \frac{1}{2} \mathcal{B}_{ij} dq^i \wedge dq^j + \mathcal{B}_{ia} dq^i \wedge dp_a + \frac{1}{2} \mathcal{B}_{ab} dp_a \wedge dp_b,$$

$$dE_L = v^i d \left(\frac{\partial L}{\partial v^i} \right) + \frac{\partial L}{\partial v^i} dv^i - dL = v^i d \left(\frac{\partial L}{\partial v^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} dq^i - \frac{\partial L}{\partial p_a} dp_a.$$

Una curva $p(t) = (q^i(t), p_a(t))$ en P es una solución del sistema Lagrangiano magnético $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^L$ sí y sólo si se satisface el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = \mathcal{B}_{ij} \dot{q}^j + \mathcal{B}_{ia} \dot{p}_a, \quad (2.7.5)$$

$$-\frac{\partial L}{\partial p_a} = -\mathcal{B}_{ia} \dot{q}^i + \mathcal{B}_{ab} \dot{p}_b, \quad (2.7.6)$$

donde $i = 1, \dots, n$ y $a = 1, \dots, k$. Estas son las ecuaciones de Euler-Lagrange para el Lagrangiano $\tilde{L} = \tilde{\epsilon}^* L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ en TQ sujeto al término magnético. Si $P = Q$ y $\epsilon_T d_Q$ es la identidad en Q , $\tilde{L} = L$ y las ecuaciones de movimiento se corresponden con las ecuaciones de Euler-Lagrange clásicas.

Definición 2.7.7. Un sistema Lagrangiano magnético es llamado **regular** si se satisfacen las siguientes condiciones:

- i) La 2-forma $\Omega_{\mathcal{B}} = \pi_1^* \Omega_Q + \pi_2^* \mathcal{B}$ es simpléctica.
- ii) $\mathbb{F}L : T_P Q \rightarrow T_P^* Q$ es un difeomorfismo local.

Definición 2.7.8. Si $\mathbb{F}L : T_P Q \rightarrow T_P^* Q$ es un difeomorfismo global, el sistema Lagrangiano magnético es llamado **hiperregular**.

Observación 2.7.9. Si consideramos $(TQ, L, \Omega_Q^L = \mathbb{F}L^*(\Omega_Q))$ se tiene un sistema Lagrangiano magnético.

Proposición 2.7.10. Dado un sistema Lagrangiano magnético $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^L$ hiperregular, la 2-forma $\Omega^{L, \mathcal{B}} = \mathbb{F}L^*(\pi_1^* \Omega_Q + \pi_2^* \mathcal{B})$ determina una estructura simpléctica en $T_P Q$.

Observación 2.7.11. La Proposición 2.7.10 implica que un sistema Lagrangiano magnético hiperregular induce una estructura simpléctica en $T_P Q$ y la dinámica del sistema está gobernada por el campo vectorial asociado a la energía del sistema con respecto a la estructura simpléctica $\Omega^{L, \mathcal{B}}$, esto es, las ecuaciones de movimiento para un sistema Lagrangiano magnético se describen intrínsecamente (es decir, independientes de la elección de coordenadas) como

$$i_{X_{E_L}} \Omega^{L, \mathcal{B}} = -dE_L.$$

Vamos a considerar ahora el ejemplo de la partícula en un campo magnético como un sistema Lagrangiano magnético y Hamiltoniano que ya analizamos en las secciones anteriores como sistema Lagrangiano.

Ejemplo 2.7.12. Consideremos el ejemplo de la partícula en un campo magnético tratado en el Ejemplo 2.2.2. Como puede observarse, se trata de un sistema Lagrangiano magnético, donde $\epsilon : P \rightarrow Q$, siendo $P = \mathbb{R}^3$ con coordenadas p_a , con $a = 1, 2, 3$ y $Q = \mathbb{R}^3$ con coordenadas q^i , con $i = 1, 2, 3$, \mathcal{B} una 2-forma cerrada en $P = \mathbb{R}^3$ y el Lagrangiano del sistema $L : T\mathbb{R}^3 \times_{\mathbb{R}^3} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Dado que $T\mathbb{R}^3 \times_{\mathbb{R}^3} \mathbb{R}^3$ fibra sobre \mathbb{R}^3 , haciendo el cambio de índices $a = i$ se tiene que $p_a = p_i = q^i$, para $i = 1, 2, 3$. Por lo tanto el Lagrangiano está dado por

$$L(q^i, v^i) = \frac{m}{2} \|v^i\|^2.$$

Por lo tanto $(\epsilon : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, L, \mathcal{B})$ es un sistema Lagrangiano magnético.

La 2-forma cerrada $\Omega^{L, \mathcal{B}}$ en $T\mathbb{R}^3 \times_{\mathbb{R}^3} \mathbb{R}^3$ está dada por

$$\Omega^{L, \mathcal{B}} = m(dq^1 \wedge dv^1 + dq^2 \wedge dv^2 + dq^3 \wedge dv^3) - \frac{e}{c}(B_{q^1} dq^2 \wedge dq^3 - B_{q^2} dq^1 \wedge dq^3 + B_{q^3} dq^1 \wedge dq^2)$$

donde c es la velocidad de la luz y e es la carga del electrón. Luego, las ecuaciones de movimiento vienen dadas por

$$m\dot{v}^1 = \frac{e}{c}(B_{q^3} v^2 - B_{q^2} v^3)$$

$$m\dot{v}^2 = \frac{e}{c}(B_{q^1}v^3 - B_{q^3}v^1)$$

$$m\dot{v}^3 = \frac{e}{c}(B_{q^2}v^1 - B_{q^1}v^2),$$

que, son exactamente las ecuaciones 2.7.5 con $\mathcal{B}_{ij} = B_{q^3}$, $\mathcal{B}_{ia} = B_{q^2}$ y $\mathcal{B}_{ab} = B_{q^1}$.

Definición 2.7.13. Un **sistema Hamiltoniano magnético** consiste en una terna $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^H := (\epsilon : P \rightarrow Q, H, \mathcal{B})$ donde $\epsilon : P \rightarrow Q$ es un fibrado sobre Q , H una función diferenciable en el fibrado producto $T^*Q \times_Q P$, denominada Hamiltoniano, y \mathcal{B} es una 2-forma cerrada en P .

Definición 2.7.14. Un sistema hamiltoniano magnético es **hiper-regular** si $\Omega^{\mathcal{B}}$ es simpléctica y $\mathbb{F}H$ es un difeomorfismo global.

Existe una estructura simpléctica $\Omega^{\mathcal{B}}$ sobre $T^*Q \times_Q P$ dada por $\Omega^{\mathcal{B}} = \pi_1^*\Omega_Q + \pi_2^*\mathcal{B}$. Una curva $(q^i(t), p_i(t), p_a(t))$ $T^*Q \times_Q P$ es una solución de las ecuaciones de Hamilton para la variedad presimpléctica $(T^*Q \times_Q P, \Omega^{\mathcal{B}})$ sí y sólo sí se satisface el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (2.7.15)$$

$$\dot{p}_i + \mathcal{B}_{ij}\dot{q}^j - \mathcal{B}_{ia}p_a = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \quad (2.7.16)$$

$$\mathcal{B}_{ib}\dot{q}^i + \mathcal{B}_{ab}p_a = -\frac{\partial H}{\partial p_b} \quad (2.7.17)$$

Sea $\mathbb{F}H : T_P^*Q \rightarrow T_P Q$ la transformada (es decir, la derivada fibrada del Hamiltoniano) del sistema Hamiltoniano magnético $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^H$, que asigna a cada elemento $\alpha_q \in T^*Q$ un $(v_q, p) \in T_P Q$ determinado por la relación:

$$\langle \tilde{\alpha}_q, v_q \rangle = \left. \frac{d}{du} \right|_{u=0} H(\alpha_q + u\tilde{\alpha}_q, p),$$

para $\tilde{\alpha}_q \in T_q^*Q$.

Vamos a considerar el ejemplo de la partícula en un campo magnético como un sistema Hamiltoniano magnético que ya analizamos en las secciones anteriores como sistema Hamiltoniano.

Ejemplo 2.7.18. Volviendo al ejemplo de la partícula en un campo magnético tratado en el Ejemplo 2.1.8, se trata también de un sistema Hamiltoniano magnético, donde $\epsilon : P \rightarrow Q$, siendo $P = \mathbb{R}^3$ con coordenadas r_a , con $a = 1, 2, 3$ y $Q = \mathbb{R}^3$ con coordenadas p_i , con $i = 1, 2, 3$, \mathcal{B} una 2-forma cerrada en $P = \mathbb{R}^3$ y el Hamiltoniano del sistema $H : T^*\mathbb{R}^3 \times_{\mathbb{R}^3} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, con la misma observación del cambio de índices, el Hamiltoniano está dado por

$$H(p_1, p_2, p_3) = \frac{m}{2}(\dot{p}_1^2 + \dot{p}_2^2 + \dot{p}_3^2).$$

Por lo tanto $(\epsilon : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, H, \mathcal{B})$ es un sistema Hamiltoniano magnético. Luego, las ecuaciones de movimiento vienen dadas por

$$\begin{aligned} p_1 &= \dot{p}_1 & p_2 &= \dot{p}_2 & p_3 &= \dot{p}_3 \\ m\dot{p}_1 &= \frac{e}{c}(B_{p_3}p_2 - B_{p_2}p_3) \\ m\dot{p}_2 &= \frac{e}{c}(B_{p_1}p_3 - B_{p_3}p_1) \\ m\dot{p}_3 &= \frac{e}{c}(B_{p_2}p_1 - B_{p_1}p_2) \end{aligned}$$

que, son exactamente las ecuaciones 2.7.15 con $\mathcal{B}_{ij} = B_{p_3}$, $\mathcal{B}_{ia} = B_{p_2}$ y $\mathcal{B}_{ab} = B_{p_1}$.

Capítulo 3

Reducción de Sistemas Mecánicos de orden superior

Muchos sistemas de interés en mecánica se formulan con Lagrangianos y Hamiltonianos que dependen de derivadas de orden superior. Un análisis detallado de la geometría de orden superior necesaria para estas formulaciones puede encontrarse, por ejemplo, en [15], [17], [28], [29], [44], [32] y [68]. En esta sección presentamos los conceptos básicos para la formulación de la teoría de sistemas mecánicos de orden superior siguiendo [32] y su reducción en presencia de simetrías.

Como vimos en la Sección 2, al estudiar la reducción de sistemas Lagrangianos aparecen los llamados términos magnéticos que permiten definir una clase más general de sistemas Lagrangianos, los llamados sistemas Lagrangianos magnéticos, que resultan incluir a los sistemas que se obtienen al considerar la reducción de una simetría.

El objetivo fundamental de este capítulo consiste en adaptar esta construcción al caso de sistemas de orden superior. Para esto, presentamos una noción de término magnético de orden superior y una noción de sistemas Hamiltonianos y Lagrangianos magnéticos de orden superior. También mostramos que hasta ahora existen algunas dificultades para definir un análogo del Routhiano considerado para sistemas de orden 1 en el caso de orden superior.

3.1. Sistemas Lagrangianos de orden Superior

En esta sección presentamos el formalismo Lagrangiano para sistemas que involucran Lagrangianos que dependen de derivadas de orden superior.

3.1.1. Fibrado Tangente de Orden Superior

Definición 3.1.1. Dada Q una variedad diferenciable de dimensión n , definimos una relación de equivalencia en el espacio de curvas suaves $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, Q) = \{q : \mathbb{R} \rightarrow Q\}$ de la siguiente manera: dadas $q_1(t) : \mathbb{R} \rightarrow Q$ y $q_2(t) : \mathbb{R} \rightarrow Q$ dos curvas suaves, si $a \in \mathbb{R}^+$ y $t \in (-a, a)$ decimos que tienen un **contacto de orden k** en $q_0 = q_1(0) = q_2(0)$ si para cualquier carta local (φ, U) de Q tal que $q_1(0)$ y $q_2(0) \in U$ se tiene que $\forall s = 0, \dots, k$

$$\frac{d^s}{dt^s} (\varphi \circ q_1(t)) = \frac{d^s}{dt^s} (\varphi \circ q_2(t))$$

Denotamos por $[q(t)]_0^k$ a la clase de equivalencia de q .

Definición 3.1.2. Definimos $T^k Q$ como el conjunto de las clases de equivalencia $[q(t)]_0^k$ que tiene estructura de variedad diferenciable de dimensión $(k+1)n$.

En coordenadas locales, los elementos $[q]_0^k$ de $T^k Q$ pueden ser escritos como

$$(q_1^{(0)}, \dots, q_n^{(0)}, q_1^{(1)}, \dots, q_n^{(1)}, \dots, q_1^{(k)}, \dots, q_n^{(k)})$$

donde $q^{(l)}$ denota la derivada de orden l de q .

Definición 3.1.3. Un **Lagrangiano de orden k** es una función diferenciable $L^k : T^k Q \rightarrow \mathbb{R}$; es decir, una función suave que depende de derivadas de orden superior.

Definición 3.1.4. El **Fibrado Tangente de orden k sobre Q** está dado por la variedad $T^k Q$ y la aplicación suave $\tau_Q^k : T^k Q \rightarrow Q$ donde $\tau_Q^k([q]_0^k) = q(0) = q_0$.

Notación: De ahora en más usaremos la expresión $(q, \dot{q}, \ddot{q}, \dots, q^{(k)})$ para denotar $[q]_0^{(k)}$.

Definición 3.1.5. Dados $k, l \in \mathbb{N}$, $l < k$, definimos las funciones suryectivas

$$\tau_Q^{(k,l)} : T^k Q \rightarrow T^l Q$$

$$\tau_Q^{(k,l)}([q]_0^k) = [q]_0^l$$

que claramente resultan suaves.

Definición 3.1.6. Dada $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable, sus funciones levantadas $f^{(k,l)} : T^k Q \rightarrow T^l Q$ se definen de la siguiente manera

$$f^{(k,l)}([q]_0^k) := \frac{d^l}{dt^l} (f \circ q(t)) \Big|_{t=0}$$

Definición 3.1.7. Dada una función suave $f : M \rightarrow N$ se tiene que

$$T^{(k)} f : T^{(k)} M \rightarrow T^{(k)} N$$

dada por

$$T^{(k)} f([q]_0^{(k)}) := [f \circ q]_{f(0)}^{(k)}.$$

3.1.2. Sistemas Lagrangianos de orden superior: descripción variacional

Definición 3.1.8. Un **Sistema Lagrangiano de orden k** es un par (Q, L^k) donde Q es una variedad diferenciable y $L^k : T^k Q \rightarrow \mathbb{R}$ es un lagrangiano de orden k ,

$$L^k([q]_0^{(k)}) = L^k(q, \dot{q}, \ddot{q}, \dots, q^{(k)})$$

Para describir la dinámica dada por estos sistemas, seguimos la Sección 3 en [30].

Dados dos puntos $x, y \in T^{(k-1)}Q$ definimos el espacio formado por las curvas que conectan x con y de la siguiente manera:

$$\mathcal{C}^{2k}(x, y) := \{q : [0, T] \rightarrow Q / q \in \mathcal{C}^{2k}([0, T], Q); q^{(k-1)}(0) = x, q^{(k-1)}(T) = y\}$$

Dada una curva q en $\mathcal{C}^{2k}(x, y)$ el espacio tangente a $\mathcal{C}^{2k}(x, y)$ en q se define como:

$$T_q \mathcal{C}^{2k}(x, y) = \{X \in \mathcal{C}^{2k-1}([0, T], TQ) / ; X(t) \in T_{q(t)}Q, X^{(k-1)}(0) = 0, X^{(k-1)}(T) = 0\}$$

Consideremos el funcional acción $\mathcal{A} : \mathcal{C}^{2k}(x, y) \rightarrow \mathbb{R}$ definido como

$$\mathcal{A}(q) := \int_0^T L^k(q^k(t)) dt$$

Definición 3.1.9. El principio de Hamilton establece que una curva $q \in \mathcal{C}^{2k}(x, y)$ es una trayectoria del sistema Lagrangiano de orden superior (Q, L^k) si y sólo si q es punto crítico de \mathcal{A} .

Para encontrar dichos puntos necesitamos caracterizar las curvas q tales que $d\mathcal{A}(q)(X) = 0 \quad \forall X \in T_q \mathcal{C}^{2k}(x, y)$.

Trabajando de manera análoga a cómo se caracterizan los puntos críticos del funcional acción para un sistema lagrangiano (Q, L) se pueden caracterizar los puntos críticos del funcional acción definido a partir de un Lagrangiano de orden superior.

Teorema 3.1.10. Sea $L^k : T^k Q \rightarrow \mathbb{R}$ un Lagrangiano de orden superior y \mathcal{A} su funcional acción asociado definido sobre $\mathcal{C}^{2k}([0, T], Q)$.

Entonces existe un único operador

$$\mathcal{E}L^k : T^{2k}Q \rightarrow T^*(T^{k-1})Q$$

y una única 1-forma Θ_L^k en $T^{(2k-1)}Q$ tal que para toda variación de la forma $\delta q_s \in T_q \mathcal{C}^{2k}(x, y)$ con extremos fijos se tiene que

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \mathcal{A}(q_s) =$$

$$\int_0^T \mathcal{E}L^k(q^{(2k)}(t)) \cdot \delta q(t) dt + (\Theta_L^k(q^{(2k-1)}(t)) \cdot \delta^{2k-1} q(t)) \Big|_0^T.$$

En coordenadas $\mathcal{E}L^k$ y Θ_L^k tienen la forma

$$\mathcal{E}L^k := \sum_{l=0}^k (-1)^l \frac{d^l}{dt^l} \left(\frac{\partial L^k}{\partial q^{(l)}} \right)$$

$$\Theta_L^k := \sum_{l=0}^{k-1} \hat{p}^{(l)} \cdot dq^{(l)},$$

donde las funciones $\hat{p}^{(l)}$ para $0 \leq l \leq k-1$ son los momentos generalizados de Jacobi-ostrogradski definidos por

$$\hat{p}^{(l)} := \sum_{s=0}^{k-l-1} \frac{d^s}{dt^s} \left(\frac{\partial L^k}{\partial q^{(l+s+1)}} \right)$$

Considerando los puntos críticos del funcional acción se obtienen las ecuaciones de movimiento llamadas ecuaciones de Euler-Lagrange de orden superior y pueden ser escritas como

$$\sum_{l=0}^k (-1)^l \frac{d^l}{dt^l} \left(\frac{\partial L^k}{\partial q^{(l)i}} \right) = 0$$

Definición 3.1.11. Sea la 2-forma Ω_L^k sobre $T^{(2k-1)}Q$ definida como $\Omega_L^k := -d\Theta_L^k$.

Observación 3.1.12. Usando la expresión de Θ_L^k en coordenadas se puede escribir

$$\Omega_L^k = \sum_{l=0}^{k-1} dq^{(l)i} \wedge d\hat{p}^{(l)}.$$

Puede verse que Ω_L^k es simpléctica cuando $\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial q^{(l-1)j} \partial q^{(l-1)i}} \right) \neq 0$

3.1.3. Sistemas Lagrangianos de orden superior con simetrías

Definición 3.1.13. Sean Q una variedad, G un grupo de Lie y $\Phi^Q : G \times Q \rightarrow Q$ una acción libre y propia de G sobre Q . Entonces la **acción levantada al fibrado tangente de orden superior** $T^k Q$

$$\Phi^{T^k Q} : G \times T^k Q \rightarrow T^k Q$$

está dada por

$$\Phi_g^k : T^k Q \rightarrow T^k Q$$

$$\Phi_g^k([q_t]_0^{(k)}) := T^k \Phi_g([q_t]_0^{(k)}) = [\Phi_g \circ q]_0^{(k)}.$$

Localmente se tiene que $\Phi_g^k(q, \dot{q}, \ddot{q}, \dots, q^{(k)}) = (\Phi_g(q), T\Phi_g(\dot{q}), T^2\Phi_g(\ddot{q}), \dots, T^k\Phi_g(q^{(k)}))$

Definición 3.1.14. Un sistema Lagrangiano de orden k con simetrías es un sistema Lagrangiano (Q, L^k) tal que el Lagrangiano L^k es invariante por la acción $\Phi^{T^k Q}$.

Definición 3.1.15. El **generador infinitesimal** $\xi_{T^k Q}$ se define como

$$\begin{aligned} \xi_{T^k Q}(q, \dot{q}, \ddot{q}, \dots, q^{(k)}) &= \left. \frac{d}{dt} \Phi_{exp(t\xi)}^k(q, \dot{q}, \ddot{q}, \dots, q^{(k)}) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} (\Phi_{exp(t\xi)}^k(q), T\Phi_{exp(t\xi)}^k(\dot{q}), \dots, T^k \Phi_{exp(t\xi)}^k(q^{(k)})) \right|_{t=0} \end{aligned}$$

Definición 3.1.16. La **aplicación momento de orden k** para esta acción sobre la variedad simpléctica $(T^k Q, \Omega_L^k)$ es una aplicación suave $J_L^k : T^{(2k-1)}Q \rightarrow \mathfrak{g}^*$ tal que $\forall z \in T^{(2k-1)}Q$ la función $J_L^k(z) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$ está dada por

$$J_L^k(z)(\xi) := \langle \Theta_L^k, \xi_{T^{(2k-1)}Q}(z) \rangle$$

3.2. Sistemas Hamiltonianos de orden Superior

En esta sección presentamos los sistemas Hamiltonianos de orden superior y su relación con los sistemas Lagrangianos de orden superior.

3.2.1. Sistemas Hamiltonianos y Transformada de Legendre de orden superior

Definición 3.2.1. Un **Hamiltoniano de orden k** está dado por una función diferenciable $H^k : T^*(T^{(k-1)}Q) \rightarrow \mathbb{R}$ llamada Hamiltoniano de orden k del sistema.

Definición 3.2.2. Un **sistema Hamiltoniano de orden k** es una terna $(T^*(T^{(k-1)}Q), \Omega_Q^k, H^k)$ donde $T^*(T^{(k-1)}Q)$ es un fibrado cotangente de orden superior y $H : T^*(T^{(k-1)}Q) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función suave.

Observación 3.2.3. Los puntos de $T^*(T^{(k-1)}Q)$ se denotan como $(q, \dot{q}, \ddot{q}, \dots, q^{(k-1)}, \hat{p}^{(0)}, \dots, \hat{p}^{(k-1)})$ donde \hat{p}^i representa el i -ésimo momento generalizado de Jacobi-Ostrogradski.

Definición 3.2.4. Una curva es trayectoria del sistema Hamiltoniano de orden superior con Hamiltoniano H^k si es una curva integral del **campo vectorial Hamiltoniano** $X_{H^k} \in \mathcal{X}(T^*(T^{(k-1)}Q))$ que está dado por

$$i_{X_{H^k}} \Omega_Q^k = dH^k,$$

donde Ω_Q^k es la forma simpléctica canónica en $T^*(T^{(k-1)}Q)$.

En coordenadas, las **ecuaciones de Hamilton de orden k** se escriben como

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}q^{(i)} &= \frac{\partial H^k}{\partial \hat{p}^{(i)}} \\ \frac{d}{dt}\hat{p}^{(i)} &= -\frac{\partial H^k}{\partial q^{(i)}}\end{aligned}$$

Para establecer una relación entre sistemas Lagrangianos y Hamiltonianos de orden superior se define una transformada de Legendre de orden superior que requiere del uso de los momentos generalizados de Ostrogradski y por lo tanto se denomina transformada de Legendre-Ostrogradski.

Definición 3.2.5. La transformada de Legendre-Ostrogradski

$$\mathbb{F}L^k : T^{(2k-1)}Q \rightarrow T^*(T^{(k-1)}Q)$$

es la aplicación definida como

$$\mathbb{F}L^k(q, \dot{q}, \ddot{q}, \dots, q^{(2k-1)}) = (q, \dot{q}, \ddot{q}, \dots, q^{(k-1)}, \hat{p}^{(0)}, \dots, \hat{p}^{(k-1)})$$

donde \hat{p}^i representa el i -ésimo momento generalizado de Jacobi-Ostrogradski dado por $\hat{p}^{(i)} = \sum_{s=0}^{k-i-1} \frac{d^s}{dt^s} \left(\frac{\partial L^k}{\partial q^{(i+s+1)}} \right)$ que ya consideramos.

Definición 3.2.6. Si $\mathbb{F}L^k$ es un difeomorfismo global se dice que el Lagrangiano L^k es **hiperregular** y el Hamiltoniano asociado está definido como

$$H^k := E_L^k \circ (\mathbb{F}L^k)^{-1} : T^*(T^{(k-1)}Q) \rightarrow \mathbb{R}$$

Observación 3.2.7. Se puede ver que las formas Θ_L^k y Ω_L^k que son llamadas las **formas de Poincaré-Cartan** verifican que

$$\Theta_L^k = (\mathbb{F}L^k)^* \Theta_Q^k \in \Omega^1(T^{(2k-1)}Q)$$

$$\Omega_L^k = (\mathbb{F}L^k)^* \Omega_Q^k \in \Omega^2(T^{(2k-1)}Q)$$

donde Θ_Q^k y Ω_Q^k son las formas canónicas en $T^*(T^{(k-1)}Q)$.

Definición 3.2.8. La función energía de orden k $E_L^k : T^{(2k-1)}Q \rightarrow \mathbb{R}$ asociada a L^k se define como

$$E_L^k([q]^{2k-1}) := \langle \mathbb{F}L^k([q]^{2k-1}), [q^{(k-1)}]^{(1)} \rangle - L^k([q]^k)$$

En coordenadas se tiene $E_L^k = \sum_{i=0}^{k-1} \hat{p}^{(i)} q^{(i+1)} - L^k(q^{(0)}, \dots, q^{(k)})$.

Observación 3.2.9. La solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange de orden k está dada por la curva integral del campo Lagrangiano $X_{L^k} \in \mathcal{X}(T^{(2k-1)}Q)$ que está definido por $i_{X_{L^k}} \Omega_L^k = dE_L^k$.

3.2.2. Sistemas Hamiltonianos de orden superior con simetrías

De ahora en más, utilizamos la siguiente notación.

Sea la variedad diferenciable $\tilde{Q} = T^{(k-1)}Q$ y consideremos la variedad simpléctica $(T^*\tilde{Q}, \Omega_{\tilde{Q}})$ donde, como siempre, $\Omega_{\tilde{Q}}$ es la forma simpléctica canónica en $T^*\tilde{Q}$.

Si ϕ^Q es una acción de un grupo de Lie G sobre Q , como ya dijimos esta acción se puede levantar a \tilde{Q} y luego, de manera canónica, a su fibrado cotangente.

Entonces, la acción $\phi^Q : G \times Q \rightarrow Q$ es la levantada al cotangente $T^*\tilde{Q}$ de la siguiente manera

$$\phi^{T^*\tilde{Q}} : G \times T^*\tilde{Q} \rightarrow T^*\tilde{Q}$$

donde

$$\begin{aligned} (g, q^{(0)}, q^{(1)}, \dots, q^{(k-1)}, \hat{p}^{(0)}, \hat{p}^{(1)}, \dots, \hat{p}^{(k-1)}) = \\ \left(\phi_g(q^{(0)}), T\phi_g(q^{(1)}), \dots, T^{(k-1)}\phi_g(q^{(k-1)}), (\phi_{g^{-1}}^{\tilde{Q}})^*(\hat{p}^{(0)}, \hat{p}^{(1)}, \dots, \hat{p}^{(k-1)}) \right) \end{aligned}$$

Esta acción resulta simpléctica y su aplicación momento asociada $J^k : T^*\tilde{Q} \rightarrow \mathfrak{g}^*$ está definida por

$$\begin{aligned} \langle J^k(q^{(0)}, q^{(1)}, \dots, q^{(k-1)}, \hat{p}^{(0)}, \hat{p}^{(1)}, \dots, \hat{p}^{(k-1)}), \xi \rangle = \\ \langle (q^{(0)}, q^{(1)}, \dots, q^{(k-1)}, \hat{p}^{(0)}, \hat{p}^{(1)}, \dots, \hat{p}^{(k-1)}), \xi_{\tilde{Q}}(q^{(0)}, q^{(1)}, \dots, q^{(k-1)}) \rangle, \end{aligned}$$

siendo $\xi_{\tilde{Q}}$ el generador infinitesimal de orden superior.

Es claro que J^k es equivariante con respecto a la acción coadjunta de G sobre \mathfrak{g}^* ; es decir, que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} T^*\tilde{Q} & \xrightarrow{J^k} & \mathfrak{g}^* \\ \phi_g^{T^*\tilde{Q}} \downarrow & & \downarrow Ad_{g^{-1}}^* \\ T^*\tilde{Q} & \xrightarrow{J^k} & \mathfrak{g}^* \end{array}$$

Definición 3.2.10. Un sistema Hamiltoniano de orden k con simetrías es un sistema Hamiltoniano $(T^*(T^{(k-1)}Q), H^k)$ tal que el Hamiltoniano H^k es invariante por la acción $\Phi^{T^*(T^{(k-1)}Q)}$.

3.3. Reducción de sistemas Hamiltonianos de orden Superior

En esta sección vamos a considerar sistemas Hamiltonianos de orden superior con simetrías y vamos a recordar el clásico proceso de reducción de Marsden-Weinstein

y el proceso de reducción al cotangente.

3.3.1. Reducción de Marsden-Weinstein

En primer lugar recordemos el Teorema de Marsden-Weinstein para el caso de la variedad simpléctica $(T^*\tilde{Q}, \Omega_{\tilde{Q}})$ y el momento de orden superior J^k .

Teorema 3.3.1. *Sea $(T^*\tilde{Q}, \Omega_{\tilde{Q}})$ una variedad simpléctica con G un grupo de Lie que actúa libre, propia y canónicamente en $T^*\tilde{Q}$ por levantamientos. Sean J^k una aplicación momento equivariante y $\mu \in J^k(T^*\tilde{Q})$ un valor regular de J^k . Entonces $((T^*\tilde{Q})_\mu, \Omega_\mu)$ con $(T^*\tilde{Q})_\mu = (J^k)^{-1}(\mu)/G_\mu$ es una variedad simpléctica donde Ω_μ es una 2-forma únivocamente determinada por $i_\mu^*\Omega_{\tilde{Q}} = \pi_\mu^*\Omega_\mu$, donde $i_\mu : (J^k)^{-1}(\mu) \rightarrow T^*\tilde{Q}$ y $\pi_\mu : (J^k)^{-1}(\mu) \rightarrow (T^*\tilde{Q})_\mu$ son la inclusión y la proyección canónicas respectivamente.*

$$\begin{array}{ccc} (J^k)^{-1}(\mu) & \xleftarrow{i_\mu} & T^*\tilde{Q} \\ \pi_\mu \downarrow & & \\ (J^k)^{-1}(\mu)/G_\mu & & \end{array}$$

3.3.2. Reducción al fibrado cotangente

La idea ahora, es determinar un modelo para (como ocurre en orden $k = 1$) el espacio $(J^k)^{-1}(\mu)/G_\mu$. Para esto consideremos el fibrado principal $\pi_{\tilde{Q}} : \tilde{Q} \rightarrow \tilde{Q}/G$ y adaptemos los resultados del Capítulo 2, Sección 2.4 para el caso $\tilde{Q} = T^{(k-1)}Q$.

Definición 3.3.2. Definamos el **fibrado de vectores verticales de orden superior** con respecto a la proyección $\pi_{\tilde{Q}}$, como $V\pi_{\tilde{Q}}$ dado por

$$V\pi_{\tilde{Q}} = \{v \in T\tilde{Q} \mid T\pi_{\tilde{Q}}(v) = 0\}$$

siendo

$$(V\pi_{\tilde{Q}})_{\tilde{q}} = \{v_{\tilde{q}} \in T_{\tilde{q}}\tilde{Q} \mid T_{\tilde{q}}\pi_{\tilde{Q}}(v_{\tilde{q}}) = 0\}.$$

Su anulador es el espacio $V^\circ\pi_{\tilde{Q}} \subset T^*\tilde{Q}$ tal que

$$V^\circ\pi_{\tilde{Q}} = \{\alpha^{(k)} \in T^*\tilde{Q} \mid \alpha^{(k)}(v) = 0 \forall v \in V\pi_{\tilde{Q}}\}$$

siendo $\alpha^{(k)} = (q^{(0)}, q^{(1)}, \dots, q^{(k-1)}, \hat{p}^{(0)}, \hat{p}^{(1)}, \dots, \hat{p}^{(k-1)})$.

Tenemos entonces:

Lema 3.3.3. *Bajo las hipótesis anteriores, se tiene que $V^\circ \pi_{\tilde{Q}} = (J^k)^{-1}(0)$.*

Dado un fibrado principal $\pi_{\tilde{Q}} : \tilde{Q} \rightarrow \tilde{Q}/G$ consideramos una 1-forma de conexión $\mathcal{A}^k : T\tilde{Q} \rightarrow \mathfrak{g}$. Es decir,

- i) $\mathcal{A}^k(\xi_{\tilde{Q}}(\tilde{q})) = \xi$.
- ii) $\mathcal{A}^k(T_{\tilde{q}}\psi_g \cdot v) = Ad_g(\mathcal{A}^k(v))$ que se denomina propiedad de equivarianza.
- iii) Para $\mu \in \mathfrak{g}^*$ y $v_{\tilde{q}} \in T_{\tilde{q}}\tilde{Q}$ se tiene que $\mathcal{A}^k_\mu(\tilde{q})(v_{\tilde{q}}) = \langle \mu, \mathcal{A}^k(v_{\tilde{q}}) \rangle$.

Sea $(\mathcal{A}^k_\mu)^* : \mathfrak{g}^* \rightarrow T_{\tilde{q}}^*\tilde{Q}$ su aplicación dual, dada por

$$\langle (\mathcal{A}^k_\mu)^*(\mu), v_{\tilde{q}} \rangle = \langle \mu, \mathcal{A}^k(v_{\tilde{q}}) \rangle$$

que es una conexión de orden 1 sobre un fibrado principal de orden superior.

Lema 3.3.4. *Sea $\mu \in \mathfrak{g}^*$, entonces existe un difeomorfismo $\phi_{\mathcal{A}^k}^\mu$ entre $(J^k)^{-1}(\mu)$ y $(J^k)^{-1}(0)$.*

Como en el Capítulo 2, $\phi_{\mathcal{A}^k}^\mu : (J^k)^{-1}(\mu) \rightarrow (J^k)^{-1}(0)$ da lugar a una aplicación definida en las variedades cociente. Se observa que G_μ actúa en $(J^k)^{-1}(\mu)$ y en $(J^k)^{-1}(0)$.

Lema 3.3.5. *Sea*

$$[\phi_{\mathcal{A}^k}^\mu] : (J^k)^{-1}(\mu)/G_\mu \rightarrow (J^k)^{-1}(0)/G_\mu$$

definida como

$$[\phi_{\mathcal{A}^k}^\mu]([\alpha^{(k)}]) = [\phi_{\mathcal{A}^k}^\mu(\alpha^{(k)})]$$

que resulta ser un difeomorfismo.

Lema 3.3.6. *Existe un difeomorfismo entre $(J^k)^{-1}(0)$ y $T^*(\tilde{Q}/G) \times_{\tilde{Q}/G} \tilde{Q}$.*

Lema 3.3.7. *Sea G_μ el grupo de isotropía. Puede verse que G_μ está bien definida en $T^*(\tilde{Q}/G) \times_{\tilde{Q}/G} \tilde{Q}$ de manera análoga a como lo hacía en la Observación 2.4.18.*

Por lo tanto, puedo considerar el cociente de $(T^*(\tilde{Q}/G) \times_{\tilde{Q}/G} \tilde{Q})/G_\mu$ por G_μ y ver que el espacio $(T^*(\tilde{Q}/G) \times_{\tilde{Q}/G} \tilde{Q})/G_\mu$ se identifica con $T^*(\tilde{Q}/G) \times_{\tilde{Q}/G} \tilde{Q}/G_\mu$.

Lema 3.3.8. *Consideramos*

$$\chi^{(k)} : (T^*(\tilde{Q}/G) \times_{\tilde{Q}/G} \tilde{Q})/G_\mu \rightarrow T^*(\tilde{Q}/G) \times_{\tilde{Q}/G} \tilde{Q}/G_\mu$$

definido de manera análoga a como se hizo en el Lema 2.4.19 y por lo tanto $\chi^{(k)}$ es un isomorfismo.

Observación 3.3.9. Utilizando los resultados vistos en los Lemas anteriores, se tiene que

$$\begin{array}{ccccc} (J^k)^{-1}(\mu) & \xrightarrow{\phi_{\mathcal{A}^k}^\mu} & (J^k)^{-1}(0) & \xrightarrow{\beta^k} & T^*(\tilde{Q}/G) \times_{\tilde{Q}/G} \tilde{Q} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (J^k)^{-1}(\mu)/G_\mu & \longrightarrow & (J^k)^{-1}(0)/G_\mu & \longrightarrow & T^*(\tilde{Q}/G) \times_{\tilde{Q}/G} \tilde{Q}/G_\mu \end{array}$$

donde $[\phi_{\mathcal{A}^k}^\mu] : (J^k)^{-1}(\mu)/G_\mu \rightarrow (J^k)^{-1}(0)/G_\mu$ y $[\beta^k] : (J^k)^{-1}(0)/G_\mu \rightarrow T^*(\tilde{Q}/G) \times_{\tilde{Q}/G} \tilde{Q}/G_\mu$, por lo que podemos finalmente identificar

$$(J^k)^{-1}(\mu)/G_\mu \simeq T^*(\tilde{Q}/G) \times_{\tilde{Q}/G} \tilde{Q}/G_\mu$$

vía el difeomorfismo $[\beta^k] \circ [\phi_{\mathcal{A}^k}^\mu] := [\tilde{\phi}_{\mathcal{A}^k}^\mu]$, es decir

$$[\tilde{\phi}_{\mathcal{A}^k}^\mu] : (J^k)^{-1}(\mu)/G_\mu \rightarrow T^*(\tilde{Q}/G) \times_{\tilde{Q}/G} \tilde{Q}/G_\mu.$$

Nuestro objetivo es caracterizar la variedad simpléctica

$((T^*\tilde{Q}))_\mu, \Omega_\mu = ((J^k)^{-1}(\mu)/G_\mu, \Omega_\mu)$, donde Ω_μ es una 2-forma únivocamente determinada por $i_\mu^* \Omega_{\tilde{Q}} = \pi_\mu^* \Omega_\mu$.

Por lo visto, logramos identificar los espacios

$(J^k)^{-1}(\mu)/G_\mu$ y $T^*(\tilde{Q}/G) \times_{\tilde{Q}/G} \tilde{Q}/G_\mu$. Como $(J^k)^{-1}(\mu)/G_\mu$ no es el cotangente de ningún espacio no tiene una forma canónica, pero tiene una forma Ω_μ que es simpléctica.

Vamos a estudiar como en el desarrollo de este proceso de reducción aparecen naturalmente términos para corregir ciertas estructuras simplécticas que llamaremos términos magnéticos de orden superior de manera análoga a lo que analizamos en el Capítulo 2.

En primer lugar veamos que fijado $\mu \in \mathfrak{g}^*$, la conexión principal $\mathcal{A}^k : T\tilde{Q} \rightarrow \mathfrak{g}$ define una 1-forma de conexión $\mathcal{A}_\mu^k : T\tilde{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\mathcal{A}_\mu^k(\cdot) = \langle \mu, \mathcal{A}^k(\cdot) \rangle$ que puede escribirse como $\mathcal{A}_\mu^k = (\mathcal{A}^k)^*(\mu)$ ya que $(\mathcal{A}^k)^*_{\tilde{q}}(\mu)(\cdot) : T_{\tilde{q}}\tilde{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ está dada por $(\mathcal{A}^k)^*_{\tilde{q}}(\mu)(\cdot) = \langle \mu, \mathcal{A}^k(\cdot) \rangle$.

Lema 3.3.10. \mathcal{A}_μ^k es G_μ -invariante, por lo que induce una aplicación en el cociente.

Lema 3.3.11. Si \mathcal{A}_μ^k es G_μ -invariante, entonces $d\mathcal{A}_\mu^k$ es G_μ -invariante.

Lema 3.3.12. $d\mathcal{A}_\mu^k$ baja al cociente \tilde{Q}/G_μ , por lo que existe una única β_μ^k en \tilde{Q}/G_μ que es cerrada tal que $\pi_{\tilde{Q}, G_\mu}^* \beta_\mu^k = d\mathcal{A}_\mu^k$, siendo $\pi_{\tilde{Q}, G_\mu} : \tilde{Q} \rightarrow \tilde{Q}/G_\mu$ una submersión.

Entonces, dada $\Omega_{\tilde{Q}/G}$ la 2-forma canónica en $T^*(\tilde{Q}/G)$ y β_μ^k la 2-forma cerrada en \tilde{Q}/G_μ , definamos las siguientes proyecciones:

$$\text{i) } \pi_1^k : T^*(\tilde{Q}/G) \times_{\tilde{Q}/G} \tilde{Q}/G_\mu \rightarrow T^*(\tilde{Q}/G)$$

$$\text{ii) } \pi_2^k : T^*(\tilde{Q}/G) \times_{\tilde{Q}/G} \tilde{Q}/G_\mu \rightarrow \tilde{Q}/G_\mu$$

$$\text{iii) } \pi_0^k : (J^k)^{-1}(0) \rightarrow T^*(\tilde{Q}/G) \times_{\tilde{Q}/G} \tilde{Q}/G_\mu$$

entonces, tenemos una 2-forma cerrada en $T^*(\tilde{Q}/G) \times_{\tilde{Q}/G} \tilde{Q}/G_\mu$ dada por $(\pi_1^k)^*(\Omega_{\tilde{Q}/G}) + (\pi_2^k)^*(\beta_\mu^k)$.

Definición 3.3.13. Con las hipótesis consideradas más arriba, $\mathcal{B}_\mu^k := (\pi_2^k)^*(\beta_\mu^k)$ es denominado el **término magnético de orden superior**.

Como en el caso de los sistemas Hamiltonianos (de orden 1), el mismo aparece como una necesidad para corregir la forma canónica de $T^*(\tilde{Q}/G)$ para caracterizar la 2-forma Ω_μ de $(J^k)^{-1}(\mu)/G_\mu$ para que sea canónica. A menudo se dice que la forma $\Omega_{\tilde{Q}/G}$ está deformada con un término magnético.

Como se observa en los cálculos previos, todo esto se define por medio de una 1-forma de conexión principal; por lo que dada una 1-forma \mathcal{A}_μ^k podemos identificar la variedad simpléctica $((J^k)^{-1}(\mu)/G_\mu, \Omega_\mu)$ con $(T^*(\tilde{Q}/G) \times_{\tilde{Q}/G} \tilde{Q}/G_\mu, (\pi_1^k)^*(\Omega_{\tilde{Q}/G}) + (\pi_2^k)^*(\beta_\mu^k))$.

Teorema 3.3.14. *Dada G una acción en \tilde{Q} que actúa libre y propiamente y consideramos su acción levantada al cotangente $T^*\tilde{Q}$. Sea μ un valor regular de la aplicación momento J^k con subgrupo de isotropía G_μ . Fijando una conexión principal \mathcal{A}^k , la variedad $((J^k)^{-1}(\mu)/G_\mu, \Omega_\mu)$ es simplectomorfa a la variedad $(T^*(\tilde{Q}/G) \times_{\tilde{Q}/G} \tilde{Q}/G_\mu, (\pi_1^k)^*(\Omega_{\tilde{Q}/G}) + (\pi_2^k)^*(\beta_\mu^k))$.*

Observación 3.3.15. Con este modelo para el espacio reducido $((J^k)^{-1}(\mu)/G_\mu, \Omega_\mu)$ se puede definir el Hamiltoniano reducido h_μ en las variables de un producto fibrado y escribir las ecuaciones de movimiento reducidas en las variables de esta variedad simpléctica.

3.4. Reducción de sistemas Lagrangianos de orden superior

3.4.1. Reducción Lagrangiana de Marsden-Weinstein

Teorema 3.4.1. *Sea G un grupo de Lie que actúa libre y propiamente por Φ^Q sobre Q y $\Phi^{T^k Q}$ la acción levantada al tangente de orden k . Sea (Q, L^k) un sistema Lagrangiano invariante tal que L^k es hiperregular. Si μ es un valor regular de*

J_L^k entonces la variedad cociente $(J_L^k)^{-1}(\mu)/G_\mu$ es una variedad simpléctica con estructura simpléctica $(\Omega_L^k)_\mu$ definida por la condición $(i^k)_\mu^* \Omega_L^k = (\pi^k)_\mu^* (\Omega_L^k)_\mu$, donde $(i^k)_\mu : (J_L^k)^{-1}(\mu) \rightarrow T^k Q$ y $(\pi^k)_\mu^* : (J_L^k)^{-1}(\mu) \rightarrow (J_L^k)^{-1}(\mu)/G_\mu$ son la inclusión y la proyección canónicas respectivamente.

$$\begin{array}{ccc} (J_L^k)^{-1}(\mu) & \xleftarrow{i_\mu} & T^k Q \\ \pi_\mu^L \downarrow & & \\ (J_L^k)^{-1}(\mu)/G_\mu & & \end{array}$$

3.4.2. Reducción al fibrado tangente

Como comentamos anteriormente vamos a ver con un ejemplo sencillo que existen problemas para definir el Routhiano de orden superior de manera análoga a como se define en orden 1, como una combinación entre el Lagrangiano y la aplicación momento debido a que éstos están definidos en espacios diferentes.

Ejemplo 3.4.2. Consideramos el Lagrangiano, $L = \ddot{x}^2 + (\ddot{x} + \ddot{y})^2 + V(y)$, las ecuaciones de Euler-Lagrange quedan

$$\mathcal{E}L(y) \equiv -\frac{\partial V}{\partial y} - 2(x^{(4)} + y^{(4)}) = 0, \quad \mathcal{E}L(x) \equiv 2x^{(4)} + y^{(4)} = 0,$$

Observemos que a la segunda ecuación la podemos escribir como la ley de conservación del momento

$$2x^{(3)} + y^{(3)} = \text{cte} = \mu.$$

De hecho, es fácil chequear que la ecuación anterior es precisamente la aplicación momento (es fácil comprobarlo con la definición). Derivando la conservación del momento, nos da $2x^{(4)} = -y^{(4)}$, de manera que podemos reescribir la ecuación $\mathcal{E}L(y)$ como

$$-\frac{\partial V}{\partial y} - y^{(4)} = 0,$$

que es la ecuación de Euler-Lagrange de un Lagrangiano reducido que podría ser $L_r = \frac{\ddot{y}^2}{2} + V(y)$. A partir de L_r y la conservación de momento se puede obtener una solución completa como sigue. Uno integra la ecuación de Euler-Lagrange de L_r para obtener $y(t)$ y luego resuelve la ecuación del momento para obtener $x(t)$ (en este último paso, el valor de la constante μ elegida es relevante).

La pregunta es: ¿cómo obtener L_r a partir de L y de la ecuación de la conservación del momento? Hay algo que es radicalmente diferente del caso de Lagrangianos de orden 1. En orden 1 podemos tomar una combinación conveniente de L y el momento y obtener L_r (que se conoce como Routhiano) de manera directa.

Aquí es mucho más complicado porque J está definido sobre T^3Q , luego “difícilmente” una operación sencilla que involucre L y J nos va a quitar la dependencia de \ddot{x} (¿u otra cosa?) de L .

3.5. Sistemas Lagrangianos y Hamiltonianos Magnéticos de orden Superior

En esta sección vamos a generalizar la noción de sistemas Lagrangianos y Hamiltonianos magnéticos dada en [37] al caso de orden superior. Para hacerlo vamos a usar la noción de término magnético de orden superior que presentamos en las secciones previas.

Definición 3.5.1. Un **sistema Lagrangiano magnético de orden k** consiste en una terna $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{L^k} := (\epsilon : T^*(T^{(k-1)}Q) \rightarrow T^{(k-1)}Q, L^k, \mathcal{B}^k)$, donde $T^*(T^{(k-1)}Q)$ es el espacio de configuración del sistema, $\epsilon : T^*(T^{(k-1)}Q) \rightarrow T^{(k-1)}Q$ es un fibrado, $L^k : T^kQ \times_{T^{(k-1)}Q} T^*(T^{(k-1)}Q) \rightarrow \mathbb{R}$ un lagrangiano magnético de orden k y \mathcal{B}^k es una 2-forma cerrada en $T^*(T^{(k-1)}Q)$ que se denomina término de fuerza magnético de orden superior.

Observación 3.5.2. Si $k = 1$ la definición anterior recupera la definición usual de sistemas lagrangianos con términos magnéticos (ver [37] para más detalles).

De manera análoga a como se hizo para orden q , la notación usual para trabajar con estos sistemas es la siguiente.

- i) \hat{p}_i denota, para cada $i = 1, \dots, k - 1$, los momentos de Ostrodradsky definidos de la siguiente manera

$$\hat{p}_i := \sum_{j=0}^{k-i-1} (-1)^j \frac{d^j}{dt^j} \left(\frac{\partial L^k}{\partial q^{(i+j+1)}} \right)$$

- ii) La aplicación diferenciable

$$\pi_1^k : T^*(T^{(k-1)}Q) \times_{T^{(k-1)}Q} T^*(T^{(k-1)}Q) \rightarrow T^*(T^{(k-1)}Q)$$

como la proyección al primer factor.

- iii) La aplicación diferenciable

$$\pi_2^k : T^*(T^{(k-1)}Q) \times_{T^{(k-1)}Q} T^*(T^{(k-1)}Q) \rightarrow T^*(T^{(k-1)}Q)$$

como la proyección al segundo factor.

iv) La transformada de Ostrogradski-Legendre correspondiente a L^k

$$\mathbb{F}L^k : T^{(2k-1)}Q \times_{T^{(k-1)}Q} T^*(T^{(k-1)}Q) \rightarrow T^*(T^{(k-1)}Q) \times_{T^{(k-1)}Q} T^*(T^{(k-1)}Q)$$

definida como

$$\begin{aligned} \mathbb{F}L^k & (q^{(0)}, q^{(1)}, \dots, q^{(2k-1)}, \hat{p}^{(0)}, \hat{p}^{(1)}, \dots, \hat{p}^{(k-1)}) \\ & = (q^{(0)}, q^{(1)}, \dots, q^{(k-1)}, \hat{p}^{(0)}, \hat{p}^{(1)}, \dots, \hat{p}^{(k-1)}, \hat{p}^{(0)}, \hat{p}^{(1)}, \dots, \hat{p}^{(k-1)}) \end{aligned}$$

v) La función Energía $E_L^k : T^{(2k-1)}Q \times_{T^{(k-1)}Q} T^*(T^{(k-1)}Q) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\begin{aligned} E_L^k & (q^{(0)}, q^{(1)}, \dots, q^{(2k-1)}, \hat{p}^{(0)}, \hat{p}^{(1)}, \dots, \hat{p}^{(k-1)}) \\ & = \sum_{i=0}^{k-1} \hat{p}^{(i)} q^{(i+1)} - L^k(q^{(0)}, q^{(1)}, \dots, q^{(k)}, \hat{p}^{(0)}, \hat{p}^{(1)}, \dots, \hat{p}^{(k-1)}) \end{aligned}$$

vi) Sea $\Omega_Q^k = d\Theta_Q^k$ la forma simpléctica canónica en $T^*(T^{(k-1)}Q)$, definimos la 2-forma cerrada en $T^{(2k-1)}Q \times_{T^{(k-1)}Q} T^*(T^{(k-1)}Q)$ de la siguiente manera

$$\Omega^{L^k, \mathcal{B}^k} := (\mathbb{F}L^k)^*((\pi_1^k)^*\Omega_Q^k + (\pi_2^k)^*\mathcal{B}^k)$$

que en coordenadas puede escribirse como

$$\begin{aligned} \Omega^{L^k, \mathcal{B}^k} & := \sum_{r=1}^k \sum_{s=0}^{k-r} (-1)^s \frac{d^s}{dt^s} d \left(\frac{\partial L^k}{\partial q^{(r+s)}} \right) \wedge dq^{(r-1)} + \sum_{r=0}^{k-1} \frac{1}{2} \mathbf{B}_{ij} dq_i^{(r)} \wedge dq_j^{(r)} \\ & + \sum_{r=0}^{k-1} \mathbf{B}_{ia} dq_i^{(r)} \wedge d\hat{p}_a^{(r)} + \sum_{r=0}^{k-1} \frac{1}{2} \mathbf{B}_{ab} d\hat{p}_a^{(r)} \wedge d\hat{p}_b^{(r)} \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} dE_L^k & = \sum_{r=1}^k \sum_{s=0}^{k-r} (-1)^s \frac{d^s}{dt^s} \left(\frac{\partial L^k}{\partial q^{(r+s)}} \right) dq^{(r)} \\ & + \sum_{r=1}^k q^{(r)} \sum_{s=0}^{k-r} (-1)^s \frac{d^s}{dt^s} \sum_{j=0}^k \left(\frac{\partial^2 L^k}{\partial q^{(j)} \partial q^{(r+s)}} \right) dq^{(j)} \\ & - \sum_{r=0}^k \left(\frac{\partial L^k}{\partial q^{(r)}} \right) dq^{(r)} - \sum_{r=0}^{k-1} \left(\frac{\partial L^k}{\partial \hat{p}^{(r)}} \right) d\hat{p}^{(r)} \end{aligned}$$

Queremos hallar las Ecuaciones de Euler-Lagrange para un sistema Lagrangiano magnético de orden superior.

Definición 3.5.3. Una curva $p(t) \in T^*(T^{(k-1)}Q)$ es **solución del sistema lagrangiano magnético** $\mathcal{M}_B^{L^k}$ si la curva inducida $\gamma(t) = (q^{(0)}(t), q^{(1)}(t), \dots, q^{(k)}(t), \hat{p}^{(0)}(t), \hat{p}^{(1)}(t), \dots, \hat{p}^{(k-1)}(t))$, con $q(t) = \epsilon(p(t))$ para todo t satisface la ecuación

$$i_{\dot{\gamma}(t)}\Omega^{L^k, B^k}(\gamma(t)) = -dE_L^k(\gamma(t))$$

Donde $\dot{\gamma}(t)$ es de la siguiente manera:

$$\dot{\gamma}(t) = \sum_{s=0}^k q^{(s+1)} \frac{\partial}{\partial q^{(s)}} + \sum_{s=0}^{k-1} \hat{p}^{(s+1)} \frac{\partial}{\partial \hat{p}^{(s)}}$$

Comencemos a analizar el lado derecho de la ecuación

$$\begin{aligned} dE_L^k &= \sum_{r=1}^k \sum_{s=0}^{k-r} (-1)^s \frac{d^s}{dt^s} \left(\frac{\partial L^k}{\partial q^{(r+s)}} \right) dq^{(r)} \\ &+ \sum_{r=1}^k q^{(r)} \sum_{s=0}^{k-r} (-1)^s \frac{d^s}{dt^s} \sum_{j=0}^k \left(\frac{\partial^2 L^k}{\partial q^{(j)} \partial q^{(r+s)}} \right) dq^{(j)} \\ &- \sum_{r=0}^k \left(\frac{\partial L^k}{\partial q^{(r)}} \right) dq^{(r)} - \sum_{r=0}^{k-1} \left(\frac{\partial L^k}{\partial \hat{p}^{(r)}} \right) d\hat{p}^{(r)} \end{aligned}$$

A partir de ahora, llamaremos $\hat{\delta}_i := \frac{\partial L^k}{\partial \hat{p}^{(i)}}$, $\delta_i := \frac{\partial L^k}{\partial q^{(i)}}$, $\delta_{i,j} := \frac{\partial^2 L^k}{\partial q^{(i)} \partial q^{(j)}}$ y $\hat{\delta}_{i,j} := \frac{\partial^2 L^k}{\partial \hat{p}^{(i)} \partial q^{(j)}}$ para simplificar las expresiones.

$$\begin{aligned} dE_L^k &= \sum_{s=0}^{k-1} (-1)^s \frac{d^s}{dt^s} \delta_{1+s} dq^{(1)} + \sum_{s=0}^{k-2} (-1)^s \frac{d^s}{dt^s} \delta_{2+s} dq^{(2)} + \dots + \sum_{s=0}^0 (-1)^s \frac{d^s}{dt^s} \delta_{k+s} + \\ &+ q^{(1)} \sum_{s=0}^{k-1} (-1)^s \frac{d^s}{dt^s} \sum_{j=0}^k \delta_{j,1+s} dq^{(j)} + q^{(2)} \sum_{s=0}^{k-2} (-1)^s \frac{d^s}{dt^s} \sum_{j=0}^k \delta_{j,2+s} dq^{(j)} + \dots + \\ &+ q^{(k)} \sum_{s=0}^{k-k} (-1)^s \frac{d^s}{dt^s} \sum_{j=0}^k \delta_{j,k+s} dq^{(j)} - \delta_0 dq^{(0)} - \delta_1 dq^{(1)} - \dots - \delta_k dq^{(k)} \\ &- \hat{\delta}_1 d\hat{p}^{(0)} - \hat{\delta}_2 d\hat{p}^{(1)} - \dots - \hat{\delta}_{k-1} d\hat{p}^{(k-1)} \\ &= \delta_1 dq^{(1)} - \frac{d}{dt} \delta_2 dq^{(1)} + \dots + (-1)^{k-1} \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \delta_k dq^{(1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \delta_2 dq^{(2)} - \frac{d}{dt} \delta_3 dq^{(2)} + \dots + (-1)^{k-2} \frac{d^{k-2}}{dt^{k-2}} \delta_k dq^{(2)} + \dots + \\
& + \delta_k dq^{(k)} + q^{(1)} \sum_{j=0}^k \delta_{j,1} dq^{(j)} - q^{(1)} \frac{d}{dt} \sum_{j=0}^k \delta_{j,2} dq^{(j)} + \dots + \\
& + q^{(1)} (-1)^{k-1} \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \sum_{j=0}^k \delta_{j,1} dq^{(j)} + q^{(2)} \sum_{j=0}^k \delta_{j,2} dq^{(j)} - q^{(2)} \frac{d}{dt} \sum_{j=0}^k \delta_{j,3} dq^{(j)} + \dots + \\
& + q^{(2)} (-1)^{k-2} \frac{d^{k-2}}{dt^{k-2}} \sum_{j=0}^k \delta_{j,2} dq^{(j)} + \dots + q^{(k)} \sum_{j=0}^k \delta_{j,k} dq^{(j)} - \delta_0 dq^{(0)} - \delta_1 dq^{(1)} - \dots - \\
& - \delta_k dq^{(k)} - \hat{\delta}_0 d\hat{p}^{(0)} - \hat{\delta}_1 d\hat{p}^{(1)} - \dots - \hat{\delta}_{k-1} d\hat{p}^{(k-1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& = \delta_1 dq^{(1)} - \frac{d}{dt} \delta_2 dq^{(1)} + \dots + (-1)^{k-1} \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \delta_k dq^{(1)} \\
& + \delta_2 dq^{(2)} - \frac{d}{dt} \delta_3 dq^{(2)} + \dots + (-1)^{k-2} \frac{d^{k-2}}{dt^{k-2}} \delta_k dq^{(2)} + \dots + \\
& + \delta_k dq^{(k)} + q^{(1)} \delta_{0,1} dq^{(0)} + q^{(1)} \delta_{1,1} dq^{(1)} + \dots + q^{(1)} \delta_{k,1} dq^{(k)} + \\
& - q^{(1)} \frac{d}{dt} \delta_{0,2} dq^{(0)} - q^{(1)} \frac{d}{dt} \delta_{1,2} dq^{(1)} - \dots - q^{(1)} \frac{d}{dt} \delta_{k,2} dq^{(k)} + \dots + \\
& + q^{(1)} (-1)^{k-1} \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \delta_{0,k} dq^{(0)} + q^{(1)} (-1)^{k-1} \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \delta_{1,k} dq^{(1)} + \dots + \\
& q^{(1)} (-1)^{k-1} \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \delta_{k,k} dq^{(k)} + q^{(2)} \delta_{0,2} dq^{(0)} + q^{(2)} \delta_{1,2} dq^{(1)} + \dots + q^{(2)} \delta_{k,2} dq^{(k)} - \\
& - q^{(2)} \frac{d}{dt} \delta_{0,3} dq^{(0)} - q^{(2)} \frac{d}{dt} \delta_{1,3} dq^{(1)} - \dots - q^{(2)} \frac{d}{dt} \delta_{k,3} dq^{(k)} + \dots + \\
& + q^{(2)} (-1)^{k-2} \frac{d^{k-2}}{dt^{k-2}} \delta_{0,k} dq^{(0)} + q^{(2)} (-1)^{k-2} \frac{d^{k-2}}{dt^{k-2}} \delta_{1,k} dq^{(1)} + \dots + \\
& + q^{(2)} (-1)^{k-2} \frac{d^{k-2}}{dt^{k-2}} \delta_{k,k} dq^{(k)} + \dots + q^{(k)} \delta_{0,k} dq^{(0)} + q^{(k)} \delta_{1,k} dq^{(1)} + \dots + \\
& + q^{(k)} \delta_{k,k} dq^{(k)} - \delta_0 dq^{(0)} - \delta_1 dq^{(1)} - \dots - \\
& - \delta_k dq^{(k)} - \hat{\delta}_0 d\hat{p}^{(0)} - \hat{\delta}_1 d\hat{p}^{(1)} - \dots - \hat{\delta}_{k-1} d\hat{p}^{(k-1)}
\end{aligned}$$

Hagamos ahora $i_{\dot{\gamma}(t)} \Omega^{L^k, \mathcal{B}^k}(\gamma(t))$, recordemos que

$$\Omega^{L^k, \mathcal{B}^k} := \sum_{r=1}^k \sum_{s=0}^{k-r} (-1)^s \frac{d^s}{dt^s} d\delta_{r+s} \wedge dq^{(r-1)} + \sum_{r=0}^{k-1} \frac{1}{2} \mathbf{B}_{ij} dq_i^{(r)} \wedge dq_j^{(r)} +$$

$$\sum_{r=0}^{k-1} \mathbf{B}_{ia} dq_i^{(r)} \wedge d\hat{p}_a^{(r)} + \sum_{r=0}^{k-1} \frac{1}{2} \mathbf{B}_{ab} d\hat{p}_a^{(r)} \wedge d\hat{p}_b^{(r)}$$

o lo que es lo mismo

$$\begin{aligned} \Omega^{L^k, \mathcal{B}^k} &= \sum_{s=0}^{k-1} (-1)^s \frac{d^s}{dt^s} d\delta_{1+s} \wedge dq^{(0)} + \sum_{s=0}^{k-2} (-1)^s \frac{d^s}{dt^s} d\delta_{2+s} \wedge dq^{(1)} + \dots + \\ &+ \sum_{s=0}^0 (-1)^s \frac{d^s}{dt^s} d\delta_{k+s} \wedge dq^{(k-1)} + \sum_{r=1}^k \frac{1}{2} \mathbf{B}_{ij} dq_i^{(r)} \wedge dq_j^{(r)} \\ &+ \sum_{r=1}^k \mathbf{B}_{ia} dq_i^{(r)} \wedge d\hat{p}_a^{(r)} + \sum_{r=1}^k \frac{1}{2} \mathbf{B}_{ab} d\hat{p}_a^{(r)} \wedge d\hat{p}_b^{(r)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= d\delta_1 \wedge dq^{(0)} - \frac{d}{dt} d\delta_2 \wedge dq^{(0)} + \dots + (-1)^{k-1} \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} d\delta_k \wedge dq^{(0)} + \\ &+ d\delta_2 \wedge dq^{(1)} - \frac{d}{dt} d\delta_3 \wedge dq^{(1)} + \dots + (-1)^{k-2} \frac{d^{k-2}}{dt^{k-2}} d\delta_k \wedge dq^{(1)} + \dots + \\ &+ d\delta_k \wedge dq^{(k-1)} + \frac{1}{2} \mathbf{B}_{ij} dq_i^{(0)} \wedge dq_j^{(0)} + \frac{1}{2} \mathbf{B}_{ij} dq_i^{(1)} \wedge dq_j^{(1)} + \dots + \\ &+ \frac{1}{2} \mathbf{B}_{ij} dq_i^{(k-1)} \wedge dq_j^{(k-1)} + \mathbf{B}_{ia} dq_i^{(0)} \wedge d\hat{p}_a^{(0)} + \mathbf{B}_{ia} dq_i^{(1)} \wedge d\hat{p}_a^{(1)} + \dots + \\ &+ \mathbf{B}_{ia} dq_i^{(k-1)} \wedge d\hat{p}_a^{(k-1)} + \frac{1}{2} \mathbf{B}_{ab} d\hat{p}_a^{(0)} \wedge d\hat{p}_b^{(0)} + \frac{1}{2} \mathbf{B}_{ab} d\hat{p}_a^{(1)} \wedge d\hat{p}_b^{(1)} + \dots + \\ &+ \frac{1}{2} \mathbf{B}_{ab} d\hat{p}_a^{(k-1)} \wedge d\hat{p}_b^{(k-1)} \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} i_{\dot{\gamma}(t)} \Omega^{L^k, \mathcal{B}^k}(\gamma(t)) &= \\ &= [i_{\dot{\gamma}} d\delta_1] dq^{(0)} - q^{(1)} d\delta_1 - \left[i_{\dot{\gamma}} \frac{d}{dt} d\delta_2 \right] dq^{(0)} + q^{(1)} \frac{d}{dt} d\delta_2 + \dots + \\ &\left[i_{\dot{\gamma}} (-1)^{k-1} \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} d\delta_k \right] dq^{(0)} - q^{(1)} (-1)^{k-1} \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} d\delta_k + \\ &+ [i_{\dot{\gamma}} d\delta_2] dq^{(1)} - q^{(2)} d\delta_2 - \left[i_{\dot{\gamma}} \frac{d}{dt} d\delta_3 \right] dq^{(1)} + q^{(2)} \frac{d}{dt} d\delta_3 + \dots + \\ &\left[i_{\dot{\gamma}} (-1)^{k-2} \frac{d^{k-2}}{dt^{k-2}} d\delta_k \right] dq^{(1)} - q^{(2)} (-1)^{k-2} \frac{d^{k-2}}{dt^{k-2}} d\delta_k + \dots + \\ &+ [i_{\dot{\gamma}} d\delta_k] dq^{(k-1)} - q^{(k)} d\delta_k + q_i^{(1)} \mathbf{B}_{ij} dq_j^{(0)} + q_i^{(2)} \mathbf{B}_{ij} dq_j^{(1)} + \dots + \\ &+ q_i^{(k)} \mathbf{B}_{ij} dq_j^{(k-1)} + q_i^{(1)} \mathbf{B}_{ia} d\hat{p}_a^{(0)} - \hat{p}_a^{(1)} \mathbf{B}_{ia} dq_i^{(0)} + q_i^{(2)} \mathbf{B}_{ia} d\hat{p}_a^{(1)} \\ &- \hat{p}_a^{(2)} \mathbf{B}_{ia} dq_i^{(1)} + \dots + q_i^{(k)} \mathbf{B}_{ia} d\hat{p}_a^{(k-1)} \\ &- \hat{p}_a^{(k)} \mathbf{B}_{ia} dq_i^{(k-1)} - \hat{p}_b^{(1)} \mathbf{B}_{ab} d\hat{p}_a^{(0)} - \hat{p}_b^{(2)} \mathbf{B}_{ab} d\hat{p}_a^{(1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \dots - \hat{p}_b^{(k)} \mathbf{B}_{ab} d\hat{p}_a^{(k-1)} \\
& = (\delta_{0,1} dq^{(0)} + \delta_{1,1} dq^{(1)} + \dots + \delta_{k,1} dq^{(k)}) (\dot{\gamma}) dq^{(0)} - q^{(1)} d\delta_1 \\
& + \left(\hat{\delta}_{0,1} d\hat{p}^{(0)} + \hat{\delta}_{1,1} d\hat{p}^{(1)} + \dots + \hat{\delta}_{k-1,1} d\hat{p}^{(k-1)} \right) (\dot{\gamma}) dq^{(0)} \\
& - \left(\frac{d}{dt} \delta_{0,2} dq^{(0)} + \frac{d}{dt} \delta_{1,2} dq^{(1)} + \dots + \frac{d}{dt} \delta_{k,2} dq^{(k)} \right) (\dot{\gamma}) dq^{(0)} + \\
& - \left(\frac{d}{dt} \hat{\delta}_{0,2} d\hat{p}^{(0)} + \frac{d}{dt} \hat{\delta}_{1,2} d\hat{p}^{(1)} + \dots + \frac{d}{dt} \hat{\delta}_{k-1,2} d\hat{p}^{(k-1)} \right) (\dot{\gamma}) dq^{(0)} + q^{(1)} \frac{d}{dt} d\delta_2 \\
& + \dots + \left[(-1)^{k-1} \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \delta_{0,k} dq^{(0)} + (-1)^{k-1} \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \delta_{1,k} dq^{(1)} + \dots + \right] (\dot{\gamma}) dq^{(0)} \\
& + \left[(-1)^{k-1} \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \delta_{k,k} dq^{(k)} + \right] (\dot{\gamma}) dq^{(0)} + \\
& \left[(-1)^{k-1} \left(\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \hat{\delta}_{0,k} d\hat{p}^{(0)} + \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \hat{\delta}_{1,k} d\hat{p}^{(1)} + \dots + \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \hat{\delta}_{k-1,k} d\hat{p}^{(k-1)} \right) \right] (\dot{\gamma}) dq^{(0)} \\
& - q^{(1)} (-1)^{k-1} \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} d\delta_k + (\delta_{0,2} dq^{(0)} + \delta_{1,2} dq^{(1)} + \dots + \delta_{k,2} dq^{(k)}) (\dot{\gamma}) dq^{(1)} \\
& - q^{(2)} d\delta_2 + \left(\hat{\delta}_{0,2} d\hat{p}^{(0)} + \hat{\delta}_{1,2} d\hat{p}^{(1)} + \dots + \hat{\delta}_{k-1,2} d\hat{p}^{(k-1)} \right) (\dot{\gamma}) dq^{(1)} \\
& - \left(\frac{d}{dt} \delta_{0,3} dq^{(0)} + \frac{d}{dt} \delta_{1,3} dq^{(1)} + \dots + \frac{d}{dt} \delta_{k,3} dq^{(k)} \right) (\dot{\gamma}) dq^{(1)} + \\
& - \left(\frac{d}{dt} \hat{\delta}_{0,3} d\hat{p}^{(0)} + \frac{d}{dt} \hat{\delta}_{1,3} d\hat{p}^{(1)} + \dots + \frac{d}{dt} \hat{\delta}_{k-1,3} d\hat{p}^{(k-1)} \right) (\dot{\gamma}) dq^{(1)} + q^{(2)} \frac{d}{dt} d\delta_3 \\
& + \dots + \left[(-1)^{k-2} \left(\frac{d^{k-2}}{dt^{k-2}} \delta_{0,k} dq^{(0)} + \frac{d^{k-2}}{dt^{k-2}} \frac{d}{dt} \delta_{1,k} dq^{(1)} + \dots + \right) \right] (\dot{\gamma}) dq^{(1)} + \\
& \left[(-1)^{k-2} \left(\frac{d^{k-2}}{dt^{k-2}} \delta_{k,k} dq^{(k)} + \frac{d^{k-2}}{dt^{k-2}} \hat{\delta}_{0,k} d\hat{p}^{(0)} + \frac{d^{k-2}}{dt^{k-2}} \hat{\delta}_{1,k} d\hat{p}^{(1)} + \dots \right) \right] (\dot{\gamma}) dq^{(1)} \\
& \left[(-1)^{k-2} \frac{d^{k-2}}{dt^{k-2}} \hat{\delta}_{k-1,k} d\hat{p}^{(k-1)} \right] (\dot{\gamma}) dq^{(1)} - q^{(2)} (-1)^{k-2} \frac{d^{k-2}}{dt^{k-2}} d\delta_k + \dots + \\
& + (\delta_{0,k} dq^{(0)} + \delta_{1,k} dq^{(1)} + \dots + \delta_{k,k} dq^{(k)}) (\dot{\gamma}) dq^{(k-1)} - \\
& \left(\hat{\delta}_{0,k} d\hat{p}^{(0)} + \hat{\delta}_{1,k} d\hat{p}^{(1)} + \dots + \hat{\delta}_{k-1,k} d\hat{p}^{(k-1)} \right) (\dot{\gamma}) dq^{(k-1)} - \\
& - q^{(k)} d\delta_k + q_i^{(1)} \mathbf{B}_{ij} dq_j^{(0)} + q_i^{(2)} \mathbf{B}_{ij} dq_j^{(1)} + \dots + q_i^{(k)} \mathbf{B}_{ij} dq_j^{(k-1)} + \\
& + q_i^{(1)} \mathbf{B}_{ia} d\hat{p}_a^{(0)} - \hat{p}_a^{(1)} \mathbf{B}_{ia} dq_i^{(0)} + q_i^{(2)} \mathbf{B}_{ia} d\hat{p}_a^{(1)} - \hat{p}_a^{(2)} \mathbf{B}_{ia} dq_i^{(1)} \\
& + \dots + q_i^{(k)} \mathbf{B}_{ia} d\hat{p}_a^{(k-1)} - \hat{p}_a^{(k)} \mathbf{B}_{ia} dq_i^{(k-1)} - \hat{p}_b^{(1)} \mathbf{B}_{ab} d\hat{p}_a^{(0)} \\
& - \hat{p}_b^{(2)} \mathbf{B}_{ab} d\hat{p}_a^{(1)} - \dots - \hat{p}_b^{(k)} \mathbf{B}_{ab} d\hat{p}_a^{(k-1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \delta_{0,1}dq^{(0)} + \delta_{1,1}dq^{(0)} + \dots + \delta_{k,1}dq^{(0)} \\
&+ \left(\hat{\delta}_{0,1}\hat{p}^{(1)}\right) dq^{(0)} + \left(\hat{\delta}_{1,1}\hat{p}^{(2)}\right) dq^{(0)} + \dots + \left(\hat{\delta}_{k-1,1}\hat{p}^{(k)}\right) dq^{(0)} + \\
&- q^{(1)}\delta_{0,1}dq^{(0)} - q^{(1)}\delta_{1,1}dq^{(1)} - \dots - q^{(1)}\delta_{k,1}dq^{(k)} \\
&- q^{(1)}\hat{\delta}_{0,1}d\hat{p}^{(0)} - q^{(1)}\hat{\delta}_{1,1}d\hat{p}^{(1)} - \dots - q^{(1)}\hat{\delta}_{k-1,1}d\hat{p}^{(k-1)} - \\
&- q^{(1)}\frac{d}{dt}\delta_{0,2}dq^{(0)} - q^{(2)}\frac{d}{dt}\delta_{1,2}dq^{(0)} - \dots - q^{(k+1)}\frac{d}{dt}\delta_{k,2}dq^{(0)} \\
&- \hat{p}^{(1)}\frac{d}{dt}\hat{\delta}_{0,2}dq^{(0)} - \hat{p}^{(2)}\frac{d}{dt}\hat{\delta}_{1,2}dq^{(0)} - \dots - \hat{p}^{(k)}\frac{d}{dt}\hat{\delta}_{k-1,2}dq^{(0)} + \\
&+ q^{(1)}\frac{d}{dt}\delta_{0,2}dq^{(0)} + q^{(1)}\frac{d}{dt}\delta_{1,2}dq^{(1)} + \dots + q^{(1)}\frac{d}{dt}\delta_{k,2}dq^{(k)} + \\
&+ q^{(1)}\frac{d}{dt}\hat{\delta}_{0,2}d\hat{p}^{(0)} + q^{(1)}\frac{d}{dt}\hat{\delta}_{1,2}d\hat{p}^{(1)} + \dots + q^{(1)}\frac{d}{dt}\hat{\delta}_{k-1,2}d\hat{p}^{(k-1)} + \\
&+ \dots + q^{(1)}(-1)^{k-1}\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}\delta_{0,k}dq^{(0)} + q^{(2)}(-1)^{k-1}\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}\delta_{1,k}dq^{(0)} + \dots + \\
&q^{(k+1)}(-1)^{k-1}\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}\delta_{k,k}dq^{(0)} + \hat{p}^{(1)}(-1)^{k-1}\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}\hat{\delta}_{0,k}dq^{(0)} + \\
&+ \hat{p}^{(2)}(-1)^{k-1}\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}\hat{\delta}_{1,k}dq^{(0)} + \dots + \hat{p}^{(k)}(-1)^{k-1}\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}\hat{\delta}_{k-1,k}dq^{(0)} - \\
&- q^{(1)}(-1)^{k-1}\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}\delta_{0,k}dq^{(0)} - q^{(1)}(-1)^{k-1}\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}\delta_{1,k}dq^{(1)} - \dots - \\
&- q^{(1)}(-1)^{k-1}\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}\delta_{k,k}dq^{(k)} - q^{(1)}(-1)^{k-1}\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}\hat{\delta}_{0,k}d\hat{p}^{(0)} - \\
&- q^{(1)}(-1)^{k-1}\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}\hat{\delta}_{1,k}d\hat{p}^{(1)} - \dots - q^{(1)}(-1)^{k-1}\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}\hat{\delta}_{k-1,k}d\hat{p}^{(k-1)} \\
&q^{(1)}\delta_{0,2}dq^{(1)} + q^{(2)}\delta_{1,2}dq^{(1)} + \dots + q^{(k+1)}\delta_{k,2}dq^{(1)} + \\
&+ \hat{p}^{(1)}\hat{\delta}_{0,2}dq^{(1)} + \hat{p}^{(2)}\hat{\delta}_{1,2}dq^{(1)} + \dots + \hat{p}^{(k)}\hat{\delta}_{k-1,2}dq^{(1)} \\
&- q^{(2)}\delta_{0,2}dq^{(0)} - q^{(2)}\delta_{1,2}dq^{(1)} - \dots - q^{(2)}\delta_{k,2}dq^{(k)} \\
&- q^{(2)}\hat{\delta}_{0,2}d\hat{p}^{(0)} - q^{(2)}\hat{\delta}_{1,2}d\hat{p}^{(1)} - \dots - q^{(2)}\hat{\delta}_{k-1,2}d\hat{p}^{(k-1)} - \\
&- q^{(1)}\frac{d}{dt}\delta_{0,3}dq^{(1)} - q^{(2)}\frac{d}{dt}\delta_{1,3}dq^{(1)} - \dots - q^{(k+1)}\frac{d}{dt}\delta_{k,3}dq^{(1)} - \\
&- \hat{p}^{(1)}\frac{d}{dt}\hat{\delta}_{0,3}dq^{(1)} - \hat{p}^{(2)}\frac{d}{dt}\hat{\delta}_{1,3}dq^{(1)} - \dots - \hat{p}^{(k)}\frac{d}{dt}\hat{\delta}_{k-1,3}dq^{(1)} + \\
&+ q^{(2)}\frac{d}{dt}\delta_{0,3}dq^{(0)} + q^{(2)}\frac{d}{dt}\delta_{1,3}dq^{(1)} + \dots + q^{(2)}\frac{d}{dt}\delta_{k,3}dq^{(k)} + \\
&+ q^{(2)}\frac{d}{dt}\hat{\delta}_{0,3}d\hat{p}^{(0)} + q^{(2)}\frac{d}{dt}\hat{\delta}_{1,3}d\hat{p}^{(1)} + \dots + q^{(2)}\frac{d}{dt}\hat{\delta}_{k-1,3}d\hat{p}^{(k-1)} + \\
&+ \dots + q^{(1)}(-1)^{k-2}\frac{d^{k-2}}{dt^{k-2}}\delta_{0,k}dq^{(1)} + q^{(2)}(-1)^{k-2}\frac{d^{k-2}}{dt^{k-2}}\delta_{1,k}dq^{(1)} + \dots + \\
&+ q^{(k+1)}(-1)^{k-2}\frac{d^{k-2}}{dt^{k-2}}\delta_{k,k}dq^{(1)} + \hat{p}^{(1)}(-1)^{k-2}\frac{d^{k-2}}{dt^{k-2}}\hat{\delta}_{0,k}dq^{(1)} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \hat{p}^{(2)}(-1)^{k-2} \frac{d^{k-2}}{dt^{k-2}} \hat{\delta}_{1,k} dq^{(1)} + \dots + \hat{p}^{(k)}(-1)^{k-2} \frac{d^{k-2}}{dt^{k-2}} \hat{\delta}_{k-1,k} dq^{(1)} - \\
& - q^{(2)}(-1)^{k-2} \frac{d^{k-2}}{dt^{k-2}} \delta_{0,k} dq^{(0)} - q^{(2)}(-1)^{k-2} \frac{d^{k-2}}{dt^{k-2}} \delta_{1,k} dq^{(1)} - \dots - \\
& - q^{(2)}(-1)^{k-2} \frac{d^{k-2}}{dt^{k-2}} \delta_{k,k} dq^{(k)} - q^{(2)}(-1)^{k-2} \frac{d^{k-2}}{dt^{k-2}} \hat{\delta}_{0,k} d\hat{p}^{(0)} - \\
& - q^{(2)}(-1)^{k-2} \frac{d^{k-2}}{dt^{k-2}} \hat{\delta}_{1,k} d\hat{p}^{(1)} - \dots - q^{(2)}(-1)^{k-2} \frac{d^{k-2}}{dt^{k-2}} \hat{\delta}_{k-1,k} d\hat{p}^{(k-1)} + \\
& + \dots + q^{(1)} \delta_{0,k} dq^{(k-1)} + q^{(2)} \delta_{1,k} dq^{(k-1)} + \dots + q^{(k+1)} \delta_{k,k} dq^{(k-1)} + \\
& + \hat{p}^{(1)} \hat{\delta}_{0,k} dq^{(k-1)} + \hat{p}^{(2)} \hat{\delta}_{1,k} dq^{(k-1)} + \dots + \hat{p}^{(k)} \hat{\delta}_{k-1,k} dq^{(k-1)} - \\
& - q^{(k)} \delta_{0,k} dq^{(0)} - q^{(k)} \delta_{1,k} dq^{(1)} - \dots - q^{(k)} \delta_{k,k} dq^{(k)} - \\
& - q^{(k)} \hat{\delta}_{0,k} d\hat{p}^{(0)} - q^{(k)} \hat{\delta}_{1,k} d\hat{p}^{(1)} - \dots - q^{(k)} \hat{\delta}_{k-1,k} d\hat{p}^{(k-1)} + \\
& + q_i^{(1)} \mathbf{B}_{ij} dq_j^{(0)} + q_i^{(2)} \mathbf{B}_{ij} dq_j^{(1)} + \dots + q_i^{(k)} \mathbf{B}_{ij} dq_j^{(k-1)} + q_i^{(1)} \mathbf{B}_{ia} d\hat{p}_a^{(0)} \\
& - \hat{p}_a^{(1)} \mathbf{B}_{ia} dq_i^{(0)} + q_i^{(2)} \mathbf{B}_{ia} d\hat{p}_a^{(1)} - \hat{p}_a^{(2)} \mathbf{B}_{ia} dq_i^{(1)} + \dots + q_i^{(k)} \mathbf{B}_{ia} d\hat{p}_a^{(k-1)} \\
& - \hat{p}_a^{(k)} \mathbf{B}_{ia} dq_i^{(k-1)} - \hat{p}_b^{(1)} \mathbf{B}_{ab} d\hat{p}_a^{(0)} \\
& - \hat{p}_b^{(2)} \mathbf{B}_{ab} d\hat{p}_a^{(1)} - \dots - \hat{p}_b^{(k)} \mathbf{B}_{ab} d\hat{p}_a^{(k-1)}
\end{aligned}$$

i) Comencemos ahora juntando los términos que tienen $dq^{(0)}$ de la expresión

$$\begin{aligned}
i_{\dot{\gamma}(t)} \Omega^{L^k, \mathcal{B}^k}(\gamma(t)) &= -dE_L^k(\gamma(t)) \\
& - q^{(1)} \delta_{0,1} + q^{(1)} \frac{d}{dt} \delta_{0,2} + \dots - q^{(1)} (-1)^{k-1} \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \delta_{0,k} - q^{(2)} \delta_{0,2} \\
& + \dots + q^{(2)} \frac{d}{dt} \delta_{0,3} + \dots - q^{(2)} (-1)^{k-2} \frac{d^{k-2}}{dt^{k-2}} \delta_{0,k} - q^{(k)} \delta_{0,k} - \delta_0 \\
& = \delta_{0,1} q^{(1)} + \delta_{1,1} q^{(2)} + \dots + \delta_{k,1} q^{(k+1)} + \\
& + \hat{p}^{(1)} \hat{\delta}_{0,1} + \hat{p}^{(2)} \hat{\delta}_{1,1} + \dots + \hat{p}^{(k)} \hat{\delta}_{k-1,1} - q^{(1)} \delta_{0,1} - q^{(1)} \frac{d}{dt} \delta_{0,2} - \\
& - q^{(2)} \frac{d}{dt} \delta_{1,2} - \dots - q^{(k+1)} \frac{d}{dt} \delta_{k,2} + q^{(1)} \frac{d}{dt} \delta_{0,2} + \dots + \\
& - \hat{p}^{(1)} \frac{d}{dt} \hat{\delta}_{0,2} - \hat{p}^{(2)} \frac{d}{dt} \hat{\delta}_{1,2} - \dots - \hat{p}^{(k)} \frac{d}{dt} \hat{\delta}_{k-1,2} \\
& q^{(1)} (-1)^{k-1} \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \delta_{0,k} + q^{(2)} (-1)^{k-1} \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \delta_{1,k} + \dots + \\
& q^{(k+1)} (-1)^{k-1} \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \delta_{k,k} + \hat{p}^{(1)} (-1)^{k-1} \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \hat{\delta}_{0,k} + \\
& + \hat{p}^{(2)} (-1)^{k-1} \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \hat{\delta}_{1,k} + \dots + \hat{p}^{(k)} (-1)^{k-1} \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \hat{\delta}_{k-1,k} - \\
& q^{(1)} (-1)^{k-1} \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \delta_{0,k} - q^{(2)} \delta_{0,2} + q^{(2)} \frac{d}{dt} \delta_{0,3} - \\
& q^{(2)} (-1)^{k-2} \frac{d^{k-2}}{dt^{k-2}} \delta_{0,k} - q^{(k)} \delta_{0,k}
\end{aligned}$$

$$+ q_i^{(1)} B_{ij} - \hat{p}_a^{(1)} B_{ia}$$

Que queda exactamente

$$\sum_{j=0}^k (-1)^j \frac{d^j}{dt^j} \left(\frac{\partial L^k}{\partial q^{(j)}} \right) = q_i^{(1)} B_{ij} - \hat{p}_a^{(1)} B_{ia}$$

- ii) Si realizamos el mismo procedimiento pero para los términos que tienen $dq^{(1)}$, se observa que todos se anulan.
- iii) De manera similar ocurre para todos los términos de $dq^{(j)}$ para $j = 1, \dots, k$.
- iv) Por último, veamos qué ocurre con los términos que tienen $d\hat{p}^{(j)}$. En este caso se obtiene:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^k q^{(i)} \hat{\delta}_{j,i} - \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1} q^{(1)} \frac{d^i}{dt^i} \hat{\delta}_{j,1+i} - \sum_{i=1}^{k-2} (-1)^{i+1} q^{(2)} \frac{d^i}{dt^i} \hat{\delta}_{j,2+i} \\ & = q_i^{(j+1)} B_{ia} - \hat{p}_b^{(j+1)} B_{ab} \end{aligned}$$

Observación 3.5.4. Si se considera $k = 1$ las ecuaciones anteriores recuperan las ecuaciones de Euler-Lagrange para sistemas lagrangianos magnéticos usuales.

Definición 3.5.5. Un sistema Lagrangiano magnético de orden k es llamado **regular** si se satisfacen las siguientes condiciones:

- i) La 2-forma $(\pi_1^k)^* \Omega_Q^k + (\pi_2^k)^* \mathcal{B}^k$ es simpléctica.
- ii) $\mathbb{F}L^k$ es un difeomorfismo local.

Observación 3.5.6. Si $\mathbb{F}L^k$ es un difeomorfismo global, el sistema lagrangiano magnético de orden k es llamado hiperregular.

Proposición 3.5.7. Si un sistema Lagrangiano magnético de orden k $(\epsilon : T^*(T^{(k-1)}Q) \rightarrow T^{(k-1)}Q, L^k, \mathcal{B})$ es hiperregular, la 2-forma $\Omega^{L^k, \mathcal{B}^k} = (\mathbb{F}L^k)^*((\pi_1^k)^* \Omega_Q^k + (\pi_2^k)^* \mathcal{B}^k)$ determina una estructura simpléctica en $T^{(2k-1)}Q \times_{T^{(k-1)}Q} T^*(T^{(k-1)}Q)$.

Observación 3.5.8. Luego, se tiene que un sistema Lagrangiano magnético hiperregular de orden k induce una estructura simpléctica en $T^*(T^{(k-1)}Q) \times_{T^{(k-1)}Q} T^*(T^{(k-1)}Q)$ y su dinámica está representada por el campo vectorial hamiltoniano con respecto a su estructura simpléctica y con la función de energía como Hamiltoniano:

$$i_{X_{E_L^k}} \Omega^{L^k, \mathcal{B}^k} = -dE_L^k.$$

Claramente, cada curva integral de $X_{E_L^k}$ proyecta una solución del sistema Lagrangiano magnético de orden k .

Definición 3.5.9. Un sistema Hamiltoniano magnético de orden k consiste en una terna $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{H^k} := (\epsilon : T^*(T^{(k-1)}Q) \rightarrow T^{(k-1)}Q, H^k, \mathcal{B})$ donde $\epsilon : T^*(T^{(k-1)}Q) \rightarrow T^{(k-1)}Q$ un fibrado; H^k una función suave en el fibrado producto $T^*(T^{(k-1)}Q) \times_{T^{(k-1)}Q} T^*(T^{(k-1)}Q)$, denominada Hamiltoniano de orden k , y \mathcal{B} es una 2-forma cerrada en $T^*(T^{(k-1)}Q)$.

Proposición 3.5.10. Una curva $(q^{(0)}, q^{(1)}, \dots, q^{(k-1)}, \hat{p}^{(0)}, \hat{p}^{(1)}, \dots, \hat{p}^{(k-1)})$ en $T^*(T^{(k-1)}Q) \times_{T^{(k-1)}Q} T^*(T^{(k-1)}Q)$ es una solución de las ecuaciones de Hamilton de orden k para la variedad presimpléctica $(T^*(T^{(k-1)}Q) \times_{T^{(k-1)}Q} T^*(T^{(k-1)}Q), \Omega^{H^k, \mathcal{B}^k})$ si y sólo si se satisface el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} q^{(i)} &= \frac{\partial H^k}{\partial \hat{p}^{(i)}} \\ \hat{p}_i^{(1)} + q_i^{(1)} B_{ij} - \hat{p}_a^{(1)} B_{ia} &= -\frac{\partial H^k}{\partial q^i} \\ \mathcal{B}_{ib} \hat{q}_i^{(1)} + \mathcal{B}_{ab} \hat{p}_a^{(1)} &= -\frac{\partial H^k}{\partial p_b} \end{aligned}$$

Definición 3.5.11. Sea

$$\mathbb{F}H^k : T^*(T^{(k-1)}Q) \times_{T^{(k-1)}Q} T^*(T^{(k-1)}Q) \rightarrow T^{(2k-1)}Q \times_{T^{(k-1)}Q} T^*(T^{(k-1)}Q)$$

la transformada de Hamilton de orden k del Hamiltoniano H^k asigna a cada $(q^{(0)}, q^{(1)}, \dots, q^{(k-1)}, \hat{p}^{(0)}, \hat{p}^{(1)}, \dots, \hat{p}^{(k-1)}) \in T^*(T^{(k-1)}Q) \times_{T^{(k-1)}Q} T^*(T^{(k-1)}Q)$ un $(q^{(0)}, q^{(1)}, \dots, q^{(2k-1)}) \in T^{(2k-1)}Q \times_{T^{(k-1)}Q} T^*(T^{(k-1)}Q)$.

Definición 3.5.12. Un sistema Hamiltoniano magnético de orden k es hiperregular si $\Omega^{H^k, \mathcal{B}^k}$ es simpléctica y $\mathbb{F}H^k$ es un difeomorfismo (global).

Observación 3.5.13. Existe una estructura simpléctica $\Omega^{H^k, \mathcal{B}^k}$ sobre $T^*(T^{(k-1)}Q) \times_{T^{(k-1)}Q} T^*(T^{(k-1)}Q)$ dada por $\Omega^{H^k, \mathcal{B}^k} = (\pi_1^k)^* \Omega_Q^k + (\pi_2^k)^* \mathcal{B}^k$.

Capítulo 4

Reducción de Sistemas Mecánicos Híbridos

En este capítulo estudiamos, siguiendo [4], los sistemas mecánicos híbridos que resultan ser sistemas dinámicos sumamente útiles para modelar varios sistemas físicos. Estudiamos la reducción de sistemas híbridos en presencia de simetrías tanto en el marco Lagrangiano como Hamiltoniano. Introducimos las nociones de transformada de Legendre híbrida y la usamos para establecer, bajo ciertas hipótesis de regularidad, la equivalencia entre sistemas híbridos Lagrangianos y sistemas híbridos Hamiltonianos.

También definimos sistemas híbridos magnéticos en sus dos variantes y consideramos un proceso de reducción para ellos.

4.1. Generalidades sobre Sistemas Mecánicos Híbridos Simples

En esta sección daremos las nociones de sistemas híbridos simples y el correspondiente sistema dinámico asociado. De ellos deduciremos, como casos particulares, los sistemas híbridos Hamiltonianos simples y sistemas híbridos Lagrangianos simples. Finalmente, introduciremos la noción de transformación de Legendre entre sistemas mecánicos híbridos simples y mostraremos la correspondiente equivalencia entre ambos formalismos.

4.1.1. Sistemas Híbridos Simples

Definición 4.1.1. Un **Sistema Híbrido Simple** está caracterizados por una 4-upla $\mathcal{H} = (D, \mathcal{S}, R, X)$ donde D es una variedad diferenciable que suele denominarse *dominio*, \mathcal{S} es una subvariedad embebida de D de codimensión 1 denominada *superficie de impacto*, $R : \mathcal{S} \rightarrow D$ es una aplicación diferenciable llamada *función de impacto* y X es un campo vectorial diferenciable en D .

La dinámica asociada con un sistema híbrido simple está descrita por un sistema autónomo con un impacto instantáneo. Denotamos por $\Sigma_{\mathcal{H}}$ la dinámica del sistema híbrido simple generado por \mathcal{H} , de la siguiente manera:

$$\Sigma_{\mathcal{H}} = \begin{cases} \dot{x}(t) = X(x(t)), & x^-(t) \notin \mathcal{S} \\ x^+(t) = R(x^-(t)), & x^-(t) \in \mathcal{S} \end{cases} \quad (4.1.2)$$

donde $x : I \subset \mathbb{R} \rightarrow D$ y $x^-(t) := \lim_{\tau \rightarrow t^-} x(\tau)$ y $x^+(t) := \lim_{\tau \rightarrow t^+} x(\tau)$, denotan los estados instantáneos antes y después de que la trayectoria x intersekte \mathcal{S} (es decir que impacte a \mathcal{S}).

$R : \mathcal{S} \rightarrow D$ es una aplicación continua y denotando por $\overline{R(\mathcal{S})}$ la clausura de $R(\mathcal{S})$, asumiremos que $\overline{R(\mathcal{S})} \cap \mathcal{S} = \emptyset$, y por lo tanto un impacto no conduce inmediatamente a otro impacto. Además, asumiremos que \mathcal{H} satisface:

- (H1) $\mathcal{S} \neq \emptyset$ y existe un subconjunto abierto $U \subset D$ y una aplicación diferenciable $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{S} = \{x \in U \mid h(x) = 0\}$ con $\frac{\partial h}{\partial x}(s) \neq 0$ para todo $s \in \mathcal{S}$; es decir, \mathcal{S} es una subvariedad embebida de D de codimensión 1.
- (H2) Una trayectoria $\gamma : [0, t_f] \rightarrow D$ intersekte la superficie de impacto \mathcal{S} en

$$t_i^- = \inf\{t > t_{i-1} \mid \gamma(t) \in \mathcal{S}\}$$

donde estamos considerando $[0, t_f] = \bigcup_{i=0}^{N-1} [t_i, t_{i+1}]$, con $t_0 = 0$ y $t_f = t_N$. Le permitimos a la trayectoria γ que no sea diferenciable pero sí continua en t_i^- . Esto es que, la velocidad antes del impacto, \dot{x}^- , puede ser diferente a, \dot{x}^+ , la velocidad después del impacto con \mathcal{S} , es decir, $\dot{x}(t_i^-) \neq \dot{x}(t_i^+)$.

Definición 4.1.3. Una función $\varphi : [0, t_f] \rightarrow D$, con $t_f \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $t_f > 0$ es una **solución** de (4.1.2) si satisface:

- i) φ es continua a derecha en $[0, t_f)$,
- ii) Los límites laterales a izquierda y a derecha en cada punto $t \in [t_0, t_f)$ existen y son denotados por $\varphi^-(t) := \lim_{\tau \rightarrow t^-} \varphi(\tau)$ y $\varphi^+(t) := \lim_{\tau \rightarrow t^+} \varphi(\tau)$,

iii) existe un subconjunto $\mathcal{T} \subset [0, t_f)$ cerrado y discreto llamado **conjunto de impactos**, tal que,

- a) $\forall t \notin \mathcal{T}$, $\varphi(t)$ es diferenciable, $\frac{d\varphi(t)}{dt} = X(\varphi(t))$ y $\varphi(t) \notin \mathcal{S}$
- b) $\forall t \in \mathcal{T}$, $\varphi^-(t) \in \mathcal{S}$ y $\varphi^+(t) = R(\varphi^-(t))$.

Observación 4.1.4. Una solución de un sistema híbrido puede experimentar un estado Zeno que es cuando ocurren infinitos impactos en un intervalo finito de tiempo [4]. En este trabajo se tratarán sistemas híbridos como en [86], donde estos comportamientos estén excluidos. Las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de un comportamiento Zeno son estudiados en [57]. Asumimos que $\overline{R(\mathcal{S})} \cap \mathcal{S} = \emptyset$ y el conjunto de tiempos de impacto es cerrado y discreto, lo que significa que no hay una acumulación de impactos en un mismo punto.

Definición 4.1.5. La terna $D^{\mathcal{H}} = (D, \mathcal{S}, R)$ con los elementos D , \mathcal{S} y R definidos anteriormente es llamada **variedad híbrida**.

Definición 4.1.6. Un **flujo híbrido** es una terna

$$\chi^{\mathcal{H}} = (\Lambda, \mathcal{J}, \mathcal{C}),$$

donde:

- i) $\Lambda = \{0, 1, 2, \dots\} \subseteq \mathbb{N}$ es una colección (finita o infinita) de conjuntos indexados,
- ii) $\mathcal{J} = \{I_i\}_{i \in \Lambda}$ es un intervalo híbrido, donde $I_i = [\tau_i, \tau_{i+1}]$ si $i, i+1 \in \Lambda$ y $I_{N-1} = [\tau_{N-1}, \tau_N]$ o $[\tau_{N-1}, \tau_N)$ o $[\tau_{N-1}, \infty)$ si $|\Lambda| = N$, N finito, con $\tau_i, \tau_{i+1}, \tau_N \in \mathbb{R}$ y $\tau_i \leq \tau_{i+1}$,
- iii) $\mathcal{C} = \{c_i\}_{i \in \Lambda}$ es una colección de soluciones de X , es decir, $\dot{c}_i = X(c_i(t))$ para todo $i \in \Lambda$, tal que las siguientes condiciones se satisfacen para cada $i, i+1 \in \Lambda$.

- a) $c_i(\tau_{i+1}) \in \mathcal{S}$,
- b) $R(c_i(\tau_{i+1})) = c_{i+1}(\tau_{i+1})$.

La condición inicial de un flujo híbrido será denotada por $x_0 = c_0(\tau_0)$. Entonces, cuando queremos hacer explícita la condición inicial de $\chi^{\mathcal{H}}$ escribiremos $\chi^{\mathcal{H}}(x_0)$.

Ejemplo 4.1.7. Consideremos el siguiente sistema planar en coordenadas polares:

$$\dot{r} = 1 - r, \tag{4.1.8}$$

$$\dot{\theta} = 1. \tag{4.1.9}$$

Dada una condición inicial (r_0, θ_0) el flujo del sistema viene dado por

$$\varphi_t(r_0, \theta_0) = ((r_0 - 1)e^{-t} + 1, \theta_0 + t).$$

Si consideramos la subvariedad de $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ dada por $S = \{(r, \theta) \mid \theta = \alpha\}$, y la función

$$R(r, \alpha) = (\beta r, \gamma)$$

con $0 \leq \gamma < \alpha \leq 2\pi$, $\beta > 0$, entonces la 4-upla $(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1, S, R, X)$ con X el campo de vectores que definen las ecuaciones (4.1.8) y (4.1.9) define un sistema híbrido, donde el tiempo de impacto $t_i = \alpha - \gamma$.

4.1.2. Sistemas híbridos Hamiltonianos simples

Definición 4.1.10. Un **Hamiltoniano Híbrido** es una terna

$$\mathbf{H} = (Q, H, h),$$

donde

- i) Q es el espacio de configuraciones,
- ii) $H : T^*Q \rightarrow \mathbb{R}$ es un Hamiltoniano,
- iii) $h : Q \rightarrow \mathbb{R}$ es una función tal que $h^{-1}(0)$ describe una subvariedad de Q (dando lugar a una ligadura holónoma, ligadura definida mediante las posiciones, del sistema hamiltoniano descrito por H).

Dado un Hamiltoniano híbrido, se puede asociar un Sistema Híbrido Hamiltoniano de la siguiente manera:

Definición 4.1.11. Un Sistema Híbrido Simple $\mathcal{H} = (D, \mathcal{S}, R, X)$ se dice que es un **Sistema Híbrido Hamiltoniano Simple** si está determinado por $\mathcal{H}_H := (T^*Q, \mathcal{S}, R, X_H)$, donde $X_H : T^*Q \rightarrow T(T^*Q)$ es el campo vectorial hamiltoniano asociado a H , esto es $X_H(q, p) = \left(q, p, \frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q}\right)$, $\mathcal{S} \subset T^*Q$ y $R : \mathcal{S} \rightarrow T^*Q$ satisfacen las mismas condiciones que la Definición 4.1.1.

El sistema dinámico asociado al sistema híbrido Hamiltoniano simple está dado por:

$$\Sigma_{\mathcal{H}_H} = \begin{cases} \dot{\gamma}(t) = X_H(\gamma(t)), & \gamma^-(t) \notin \mathcal{S} \\ \gamma^+(t) = R(\gamma^-(t)), & \gamma^-(t) \in \mathcal{S} \end{cases}$$

donde $\gamma(t) = (q(t), p(t)) \in T^*Q$.

Las trayectorias admisibles para estos sistemas dinámicos son descritas a continuación. Nosotros usaremos la definición dada por [86] para sistemas con impulsos. Otra caracterización para trayectorias admisibles, dependiendo del contexto, puede encontrarse en [13] y [41].

Definición 4.1.12. Una **solución** para un sistema híbrido Hamiltoniano simple, \mathcal{H}_H , es una curva $\gamma : [0, t_f) \rightarrow T^*Q$ que satisface:

- i) γ es continua a derecha
- ii) sus límites a izquierda y derecha existen para $t \in (0, t_f)$ (denotados por $\gamma^+(t)$ y $\gamma^-(t)$, respectivamente)
- iii) el conjunto de impactos, $\mathcal{J} \subset [0, t_f)$ es cerrado y discreto.

El conjunto de tiempos de impactos está definido como en la Definición 4.1.6 tal que para todo $t \notin \mathcal{J}$, $\gamma(t)$ es diferenciable, $\dot{\gamma}(t) = X_H(\gamma(t))$ y $\gamma(t) \notin \mathcal{S}$. Adicionalmente, si $t \in \mathcal{J}$, entonces $\gamma^-(t) \in \mathcal{S}$ y $\gamma^+(t) = R(\gamma^-(t))$.

Observación 4.1.13. Notar que la continuidad a derecha de las soluciones implica que $\gamma(t) = \gamma^+(t)$ para todo punto en su dominio de definición. Si $\gamma_0 \in T^*Q$ denota un estado inicial a tiempo t_0 , la solución en t_0 será denotada por $\gamma(t_0, \gamma_0)$. Cuando $\gamma_0 \notin \mathcal{S}$, $\gamma(t_0, \gamma_0) = \gamma_0$ y cuando $\gamma_0 \in \mathcal{S}$, $\gamma(t_0, \gamma_0) = R(\gamma_0) = \gamma(t_0, R(\gamma_0))$.

Observación 4.1.14. El flujo híbrido asociado a un sistema híbrido Hamiltoniano simple es una colección de trayectorias como en la Definición 4.1.6 donde la dinámica del campo vectorial es el campo vectorial Hamiltoniano y las trayectorias son soluciones para el sistema híbrido Hamiltoniano simple.

Observación 4.1.15. Si $\chi^{\mathcal{H}}(x_0) = (\Lambda, \mathcal{J}, \mathcal{C})$ es el flujo híbrido asociado con un Sistema híbrido Hamiltoniano simple, entonces la definición 4.1.6 implica que $c_i(t)$ debe satisfacer las ecuaciones de Hamilton asociadas a H para cada $i \in \Lambda$.

4.1.3. Sistemas híbridos Lagrangianos simples

Definición 4.1.16. Un **Lagrangiano Híbrido** es una terna

$$\mathbf{L} = (Q, L, h),$$

donde

- i) Q es el espacio de configuraciones,
- ii) $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ es un Lagrangiano regular,
- iii) $h : Q \rightarrow \mathbb{R}$ es una función tal que $h^{-1}(0)$ describe una subvariedad de Q .

De manera análoga a la descripción Hamiltoniana, dado un Lagrangiano híbrido, se puede asociar un sistema híbrido Lagrangiano de la siguiente manera:

Definición 4.1.17. Un Sistema Híbrido Simple $\mathcal{H} = (D, \mathcal{S}, R, X)$ se dice que es un **sistema híbrido Lagrangiano simple** si está determinado por $\mathcal{H}_L := (TQ, \mathcal{S}, R, X_L)$, siendo $X_L : TQ \rightarrow T(TQ)$ es el campo vectorial Lagrangiano asociado a L , esto es $X_L(q, \dot{q}) = \left(q, \dot{q}; \dot{q}, \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q} \partial \dot{q}} \right)^{-1} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q} \partial q} \dot{q} \right) \right)$ donde $\mathcal{S} \subset TQ$ y $R : \mathcal{S} \rightarrow TQ$ satisfacen las condiciones dadas en la Definición 4.1.1.

El sistema dinámico asociado al sistema híbrido Lagrangiano simple está dado por

$$\Sigma_{\mathcal{H}_L} = \begin{cases} \dot{\gamma}(t) = X_L(\gamma(t)), & \gamma^-(t) \notin \mathcal{S} \\ \gamma^+(t) = R(\gamma^-(t)), & \gamma^-(t) \in \mathcal{S} \end{cases}$$

donde $\gamma(t) = (q(t), \dot{q}(t)) \in TQ$.

Definición 4.1.18. Una **solución** para un sistema híbrido Lagrangiano simple, \mathcal{H}_L , es una curva $\gamma : [0, t_f] \rightarrow TQ$, que satisface:

- i) γ es continua a derecha
- ii) sus límites a izquierda y derecha existen para $t \in [0, t_f]$ (denotados por $\gamma^+(t)$ y $\gamma^-(t)$, respectivamente)
- iii) el conjunto de impactos, $\mathcal{J} \subset [0, t_f]$ es cerrado y discreto.

El conjunto de tiempos de impactos está definido de modo que para todo $t \notin \mathcal{J}$, $\gamma(t)$ es diferenciable, $\dot{\gamma}(t) = X_L(\gamma(t))$ y $\gamma(t) \notin \mathcal{S}$. Adicionalmente, si $t \in \mathcal{J}$, entonces $\gamma^-(t) \in \mathcal{S}$ y $\gamma^+(t) = R(\gamma^-(t))$.

Observación 4.1.19. Como antes, notar que la continuidad a derecha de las soluciones implica que $\gamma(t) = \gamma^+(t)$ para todo punto en su dominio de definición. Si $\gamma_0 \in TQ$ denota un estado inicial a tiempo t_0 , la solución en t_0 está denotada por $\gamma(t_0, \gamma_0)$. Cuando $\gamma_0 \notin \mathcal{S}$, $\gamma(t_0, \gamma_0) = \gamma_0$ y cuando $\gamma_0 \in \mathcal{S}$, $\gamma(t_0, \gamma_0) = R(\gamma_0) = \gamma(t_0, R(\gamma_0))$.

Observación 4.1.20. El flujo híbrido asociado a un sistema híbrido Lagrangiano simple es una colección de trayectorias como en la definición 4.1.6 donde la dinámica del campo vectorial es el campo vectorial Lagrangiano y las trayectorias son soluciones para el sistema híbrido Lagrangiano simple.

Observación 4.1.21. Si $\chi^{\mathcal{H}}(x_0) = (\Lambda, \mathcal{J}, \mathcal{C})$ es el flujo híbrido asociado con un sistema híbrido Lagrangiano simple, entonces la definición 4.1.6 implica que $c_i(t)$ debe satisfacer las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a L para cada $i \in \Lambda$.

4.1.4. Equivalencia entre Sistemas Lagrangianos Híbridos simples y Sistemas Hamiltonianos Híbridos simples

Existe una manera de relacionar un sistema híbrido Lagrangiano simple con un sistema híbrido Hamiltoniano simple induciendo la noción de transformada de Legendre para esta clase de sistemas dinámicos.

Definición 4.1.22. Dados $\mathcal{H}_L = (D_L, \mathcal{S}_L, R_L, X_L)$ y $\mathcal{H}_H = (D_H, \mathcal{S}_H, R_H, X_H)$ definimos la **transformada de Legendre entre estos sistemas híbridos simples** $\mathbb{F}L_{\mathcal{H}} : \mathcal{H}_L \rightarrow \mathcal{H}_H$ como la aplicación entre sistemas híbridos simples cumpliendo las siguientes condiciones

- i) $\mathbb{F}L(D_L) = D_H$ donde $\mathbb{F}L : TQ \rightarrow T^*Q$ es la Transformada de Legendre usual, es decir, $\mathbb{F}L : TQ \rightarrow T^*Q$ definida por:

$$\langle \mathbb{F}L(v_q), w_q \rangle = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} L(v_q + tw_q)$$

donde $v_q, w_q \in T_qQ$.

- ii) $\mathbb{F}L(\mathcal{S}_L) = \mathcal{S}_H$.
 iii) $\mathbb{F}L \circ R_L = R_H \circ \mathbb{F}L|_{\mathcal{S}_L}$.
 iv) $(\mathbb{F}L)_*X_L = X_H$.

Observación 4.1.23. Notar que i) es trivial ya que $\mathbb{F}L$ cubre la identidad en Q , y además obsérvese que la condición ii) puede escribirse como:

$$0 \geq dh_q \dot{q} = dh_q M^{-1} M \dot{q} = dh_q M^{-1} p = \langle p, dh_q \rangle.$$

Con esta definición, podemos probar el siguiente resultado que establece la relación entre ambos sistemas.

Proposición 4.1.24. Sea $\chi^{\mathcal{H}} = (\Lambda, \mathcal{J}, \mathcal{C})$ un flujo híbrido asociado con \mathcal{H}_L con condición inicial (q_0, \dot{q}_0) . La imagen de \mathcal{H}_L por $\mathbb{F}L_{\mathcal{H}}$ es un flujo híbrido asociado con \mathcal{H}_H con condición inicial $(q_0, p_0 = \mathbb{F}L(q_0))$.

Demostración. Como X_L y X_H están $\mathbb{F}L$ -relacionados, (es decir $\mathbb{F}L(X_L) = X_H$) si $\gamma_i(t)$ es una curva integral de X_L , $\tilde{\gamma}_i(t) = \mathbb{F}L \circ \gamma_i(t)$ es una curva integral de X_H . Tomando entonces $\gamma_0(t)$ solución con condición inicial $\gamma_0 = (q_0, \dot{q}_0)$ definida en $[\tau_0, \tau_1]$, entonces $\tilde{\gamma}_0(t)$ es solución con condición inicial $\tilde{\gamma}_0 = (q_0, p_0)$ definida en $[\tau_0, \tau_1]$.

De la misma manera, tomando $\gamma_1(t)$ solución con condición inicial $\gamma_1 = (q_1, \dot{q}_1)$ definida en $[\tau_1, \tau_2]$, entonces $\tilde{\gamma}_1(t)$ es solución con condición inicial $\tilde{\gamma}_1 = (q_1, p_1)$ definida en $[\tau_1, \tau_2]$.

Consideremos $\gamma_i(t)$ solución con condición inicial $\gamma_i = (q_i, \dot{q}_i)$ definida en $[\tau_i, \tau_{i+1}]$, entonces $\tilde{\gamma}_i(t)$ será solución con condición inicial $\tilde{\gamma}_i = (q_i, p_i)$ definida en $[\tau_i, \tau_{i+1}]$.

Veamos que $\tilde{\gamma}_i(t)$ cumple que $\tilde{\gamma}_i(\tau_{i+1}) \in \mathcal{S}_H$ y que $R_H(\tilde{\gamma}_i(\tau_{i+1})) = \tilde{\gamma}_{i+1}(\tau_{i+1})$. Por la propiedad de $\mathbb{F}L$, tenemos que:

- (i) $\tilde{\gamma}_i(\tau_{i+1}) = (\mathbb{F}L \circ \gamma_i)(\tau_{i+1}) = \mathbb{F}L(\gamma_i(\tau_{i+1}))$ y dado que $\gamma_i(\tau_{i+1}) \in \mathcal{S}_L$ entonces $\tilde{\gamma}_i(\tau_{i+1}) \in \mathcal{S}_H$ por la condición ii) de la Definición 4.1.22.
 (ii) $R_H(\tilde{\gamma}_i(\tau_{i+1})) = R_H \circ \mathbb{F}L \circ \gamma_i(\tau_{i+1}) = \mathbb{F}L \circ R_L \circ \gamma_i(\tau_{i+1}) = \mathbb{F}L \circ \gamma_{i+1}(\tau_{i+1}) = \tilde{\gamma}_{i+1}(\tau_{i+1})$.

□

4.1.5. Aplicación: sistemas holónomos a trozos

Los sistemas holónomos a trozos son sistemas mecánicos híbridos, sujetos a ligaduras holónomas entre los tiempos de impacto y preservando el momento (lineal y/o angular) en el tiempo de impacto. Estos sistemas fueron estudiados para aplicaciones a locomoción en, por ejemplo, [49], [72] y [77]. En estos sistemas, las restricciones en las posiciones cambian en cada impacto. Aunque éstos sistemas son diferenciables y holónomos entre los impactos, en general, preservan la energía y el momento angular, pero hay una pérdida de energía en los tiempos de impacto. Como en los sistemas noholónomos, a pesar de que se preserve la energía, los sistemas holónomos a trozos pueden exhibir comportamientos asintóticamente estables en su dinámica [76].

La dinámica para un sistema holónimo a trozos (híbrido) está determinada por las ecuaciones de Euler-Lagrange con efectos de impulso, preservando el momento en los impactos con \mathcal{S} , esto es,

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0, & (q^-, \dot{q}^-) \notin \mathcal{S} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t), \dot{q}(t)) \Big|_{t_i^-}^{t_i^+} = 0, & (q^-, \dot{q}^-) \in \mathcal{S} \end{cases}$$

donde $q^- = q(t_i^-)$ y t_i^-, t_i^+ denotan los tiempos justo antes y después del tiempo de impacto t_i en \mathcal{S} .

Ejemplo 4.1.25. (Sistema bola-ranura) El sistema bola-ranura fué introducido en [76] como el sistema híbrido análogo del sistema noholónimo conocido como Trineo de Chaplygin [10] (ver figura 4.1), donde la cuchilla del trineo es reemplazada por una bolilla fija en la estructura interna del sistema y moviéndose a lo largo de una ranura. Más detalles sobre la dinámica de este sistema híbrido simple y las aplicaciones pueden encontrarse en [20], [49] y [77]. Lo sorprendente de este ejemplo es que, cuando la longitud de la ranura tiende a cero, la estabilidad de los puntos fijos de este sistema coinciden con los del Trineo de Chaplygin [76].

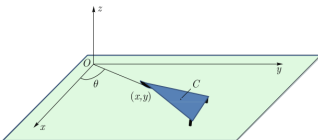


Figura 4.1: Trineo de Chaplygin

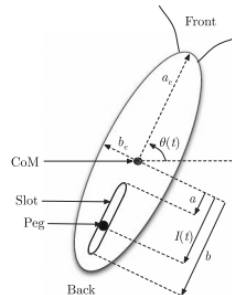


Figura 4.2: Sistema bola-ranura

Consideremos un cuerpo rígido con masa m y momento de inercia I , con una ranura recta de longitud d en el centro, como se muestra en la Figura 4.2.

El frente termina a una distancia a del centro de masa G (a puede ser negativo) y cuando llega a un extremo de la ranura a una distancia b del centro de masa, ésta es instantáneamente reemplazada en el otro extremo de la ranura (es decir, el impacto es a $b = a + d$). El cuerpo se mueve libremente en el plano sin fricción, sujeto a una condición holónoma de una bola P que corre a lo largo de la ranura, estando ésta fija en el plano. Su posición relativa al centro de masa está dada por $l(t) \in (a, b)$ y la orientación del cuerpo por $\theta(t)$. El espacio de configuraciones del sistema es $Q = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ donde las variables del espacio de configuración l y θ describen los dos grados de libertad del sistema.

El Lagrangiano para este sistema (en coordenadas polares) está dado por

$$L(l, \theta, \dot{l}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}m(\dot{l}^2 + \dot{\theta}^2 l^2) + \frac{I}{2}\dot{\theta}^2. \quad (4.1.26)$$

La dinámica para el sistema antes del tiempo de impacto t está determinado por las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\ddot{l} = l\dot{\theta}^2, \quad \ddot{\theta} = -\frac{2ml\dot{\theta}}{ml^2 + I}. \quad (4.1.27)$$

La superficie de impacto está dada por

$$\mathcal{S}_{\mathbf{L}} = \{(l, \theta, \dot{l}, \dot{\theta}) \in TQ \mid l^+ = a \text{ y } l^- = a + d\}.$$

Por la ley de la preservación del momento en el tiempo de impacto se tiene que $l^+ = l^-$ y

$$\dot{\theta}^+ (m(l^+)^2 + I) = \dot{\theta}^- (m(l^-)^2 + I).$$

Como en [49], nosotros nos restringimos al caso en que $l(t)$ está prescripta. Usando las ecuaciones anteriores obtenemos la relación $\dot{\theta}^+(ma^2 + I) = \dot{\theta}^-(ma(a + d) + I)$ y por lo tanto

$$\dot{\theta}^+ = \dot{\theta}^- \left(\frac{ma(a + d) + I}{m(a + d)^2 + I} \right) := \dot{\theta}^- A. \quad (4.1.28)$$

donde A es una matriz unidimensional y constante. Finalmente, la función de impacto está dada por

$$R_{\mathbf{L}}(\theta^-, \dot{\theta}^-) = (\theta^-, \dot{\theta}^- A). \quad (4.1.29)$$

Calculemos ahora el Hamiltoniano $H(l, \theta, p_l, p_\theta)$ asociado al Lagrangiano (4.1.26). Como $p_l = \frac{\partial L}{\partial \dot{l}} = m\dot{l}$ y $p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \dot{\theta}(ml^2 + I)$ entonces $H : T^*(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1) \rightarrow \mathbb{R}$ está dado por

$$H(l, \theta, p_l, p_\theta) = \frac{1}{2m}p_l^2 + \frac{1}{2} \frac{p_\theta^2}{(ml^2 + I)}.$$

Por otro lado, dado que $\mathcal{S}_{\mathbf{L}}$ depende sólo de Q , $\mathcal{S}_{\mathbf{H}} = \mathcal{S}_{\mathbf{L}}$, esto es,

$$\mathcal{S}_{\mathbf{H}} = \{(l, \theta, p_l, p_\theta) \in T^*Q \mid l^+ = a, \quad l^- = b = a + d\}.$$

Las ecuaciones de Hamilton para H vienen dadas por

$$\frac{\partial H}{\partial p_l} = \frac{p_l}{m}, \quad \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2 + I}, \quad -\frac{\partial H}{\partial l} = \frac{mlp_\theta^2}{(ml^2 + I)^2}, \quad -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0. \quad (4.1.30)$$

El campo Hamiltoniano asociado a H está dado por

$$X_{\mathbf{H}}(l, \theta, p_l, p_\theta) = \left(l, \theta, p_l, p_\theta, \frac{p_l}{m}, \frac{p_\theta}{ml^2 + I}, \frac{mlp_\theta^2}{(ml^2 + I)^2}, 0 \right).$$

Veamos ahora, que podemos aplicar la Proposición 4.1.24 al sistema híbrido Lagrangiano simple determinado por $(TQ, \mathcal{S}_{\mathbf{L}}, R_{\mathbf{L}}, X_{\mathbf{L}})$ y obtener como solución el sistema híbrido Hamiltoniano simple determinado por $(T^*Q, \mathcal{S}_{\mathbf{H}}, R_{\mathbf{H}}, X_{\mathbf{H}})$:

- i) $\mathbb{F}L(D_{\mathbf{L}}) = D_{\mathbf{H}}$: ya que $\mathbb{F}L$ es un difeomorfismo, en particular es suryectiva.
- ii) $\mathbb{F}L(\mathcal{S}_{\mathbf{L}}) = \mathcal{S}_{\mathbf{H}}$: dado que $S_{\mathbf{L}}$ sólo depende de las configuraciones en Q .
- iii) $\mathbb{F}L \circ R_{\mathbf{L}} = R_{\mathbf{H}} \circ \mathbb{F}L|_{\mathcal{S}_{\mathbf{L}}}$: dado que

$$R_{\mathbf{H}} \left(\theta^-, \frac{p_\theta^-}{ml^2 + I} \right) = \left(\theta^-, \frac{p_\theta^-}{ml^2 + I} A \right), \quad (4.1.31)$$

por lo tanto

$$\mathbb{F}L \circ R_{\mathbf{L}}(\theta^-, \dot{\theta}^-) = \mathbb{F}L \left(\theta^-, \dot{\theta}^- A \right) = \left(\theta^-, \frac{p_\theta^-}{ml^2 + I} A \right) = R_{\mathbf{H}} \circ \mathbb{F}L|_{\mathcal{S}_{\mathbf{L}}}.$$

- iv) $(\mathbb{F}L)_* X_{\mathbf{L}} = X_{\mathbf{H}}$: Notar que

$$\dot{l} = \frac{p_l}{m} \Leftrightarrow p_l = m\dot{l} \Rightarrow \dot{p}_l = m\ddot{l},$$

y

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2 + I} \Leftrightarrow p_\theta = \dot{\theta}(ml^2 + I) \Rightarrow \dot{p}_\theta = \ddot{\theta}(ml^2 + I) + \dot{\theta}(2ml\dot{l}).$$

Reemplazando en las ecuaciones de Euler Lagrange (4.1.27), se obtiene

$$m\ddot{l} = ml\dot{\theta}^2 = \frac{mlp_\theta^2}{(ml^2 + I)^2},$$

$$\ddot{\theta}(ml^2 + I) + \dot{\theta}(2ml\dot{l}) = 0.$$

Por lo tanto, $\dot{p}_l = \frac{mlp_\theta^2}{(ml^2 + I)^2}$ y $\dot{p}_\theta = 0$ que son las ecuaciones de Hamilton (4.1.30).

Notar que en [77], (también ver [20], [72] y [49]), l se prescribe, y por lo tanto el sistema se reduce a un grado de libertad y durante cada paso el momento angular de la bola a lo largo de la ranura se conserva, esto es $p_\theta = (ml + I)\dot{\theta} = \text{constante}$.

Integrando durante cada impacto, es decir, en $(\theta_{n-1}, \theta_n) := (\theta(t_{n-1}^+), \theta(t_n^-))$, junto con (4.1.28), se tiene un sistema lineal de ecuaciones en diferencias en las variables (θ_n, p_{θ_n})

$$\theta_n = \theta_{n-1} + B_n p_{\theta_n}, \quad (4.1.32)$$

$$p_{\theta_n} = A p_{\theta_{n-1}}. \quad (4.1.33)$$

Los puntos fijos de este sistema discreto vienen dados por un continuo de puntos fijos de la forma $(\theta^*, p_{\theta}^* = 0)$ y, por lo tanto, dado un ángulo inicial $\theta(0)$ y momento angular p_{θ_0} uno obtiene recursivamente utilizando (4.1.33) la relación $p_{\theta_n} = A^n p_{\theta_0}$. El comportamiento asintótico es determinado por A ya que los autovalores del sistema (4.1.32)-(4.1.33) son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = A$. Si $|A| < 1$ el momento angular p_{θ} se aproxima asintóticamente a cero, es decir $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n p_{\theta_n} = 0$ y por lo tanto del sistema (4.1.32) se deduce que, θ tiende a una constante, es decir, el cuerpo se mueve asintóticamente a lo largo de la línea recta. El sistema presenta una estabilidad neutra (es decir, un centro para el sistema) cuando $A = 1$ y es inestable cuando $|A| > 1$. Notar que este ejemplo muestra el mismo comportamiento de estabilidad que el sistema noholónimo del Tri-neo de Chaplygin [76], en el sentido que, el sistema preserva el momento y la energía (recordar que los sistemas Hamiltonianos no pueden exhibir estabilidad asintótica) pero la aplicación de impacto actúa como una ligadura noholónoma que da lugar a la disipación de energía y por lo tanto el sistema puede exhibir un comportamiento asintóticamente estable a pesar de que preserve la energía.

4.2. Reducción Simpléctica para Sistemas Híbridos Hamiltonianos Simples

En esta sección extenderemos el método de Reducción Simpléctica de Marsden-Weinstein [62] para sistemas híbridos Hamiltonianos simples. Para ello, en primer lugar, daremos los ingredientes básicos necesarios para poder aplicar la reducción a estos sistemas, ilustrando con algunos ejemplos que no fueron tratados en [4].

4.2.1. Reducción Simpléctica

Definición 4.2.1. Sea $\mathcal{H} = (D, \mathcal{S}, R, X)$ un sistema híbrido simple. Consideramos una acción $\Phi : G \times D \rightarrow D$ de un grupo de Lie G en el dominio D . Φ es una **acción híbrida** si $\Phi|_{\mathcal{S}}$ es una acción de G en \mathcal{S} y para todo $g \in G$

$$R \circ \Phi_g|_{\mathcal{S}} = \Phi_g \circ R. \quad (4.2.2)$$

Observación 4.2.3. Notar que la Definición 4.2.1 significa que para todo $g \in G$ tenemos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \xrightarrow{R} & D \\ \Phi_g|_{\mathcal{S}} \downarrow & & \downarrow \Phi_g \\ \mathcal{S} & \xrightarrow{R} & D \end{array}$$

En otras palabras, R es equivariante con respecto a las acciones Φ y $\Phi|_{\mathcal{S}}$.

Dado un Sistema híbrido Hamiltoniano simple, $\mathcal{H} = (T^*Q, \mathcal{S}_{\mathbf{H}}, R_{\mathbf{H}}, X_{\mathbf{H}})$, consideremos la acción en T^*Q obtenida mediante el levantamiento cotangente de la acción Φ en Q . Esto es, dado $g \in G$, y la acción $\Phi : G \times Q \rightarrow Q$, consideramos la acción de G en T^*Q denotada por

$$\Phi^{T^*Q} : G \times T^*Q \rightarrow T^*Q,$$

y definida de la siguiente manera

$$\Phi^{T^*Q}(g, (q, p)) := T^*\Phi_{g^{-1}}(q, p) = (\Phi_g(q), \Phi_{g^{-1}}^*(p))$$

$\forall g \in G$ y $(q, p) \in T^*Q$.

Definición 4.2.4. Decimos que Φ es una acción híbrida **libre y propia**, si Φ es una acción libre, propia e híbrida.

Definición 4.2.5. Un Hamiltoniano híbrido, $\mathbf{H}=(Q, H, h)$, es **G -invariante** para una acción Φ de G en Q si h y H son G -invariantes con respecto a Φ y su levantamiento cotangente respectivamente; es decir,

$$h(\Phi_g(q)) = h(q) \quad \text{y} \quad H(\Phi_{g^{-1}}^{T^*Q}(q, p)) = H(q, p),$$

para todo $g \in G$ y $(q, p) \in T^*Q$.

Observación 4.2.6. Notar que la última ecuación es que H es G -invariante por la acción levantada al cotangente, esto es

$$\langle\langle \Phi_{g^{-1}}^{T^*Q}(\cdot), \Phi_{g^{-1}}^{T^*Q}(\cdot) \rangle\rangle_{\Phi_g(q)} = \langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle_q \quad (4.2.7)$$

donde $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle_q : T_q^*Q \times T_q^*Q \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\langle\langle p, p' \rangle\rangle_q = \sum_{i,j=1}^n p_i p'_j K_{ij}(q)$$

para $p, p' \in T_q^*Q$ y $K_{ij} = M(q)^{-1}$ (con $M(q)$ la matriz inercial).

Definición 4.2.8. El **coeficiente de restitución** es una medida del grado de conservación de la energía cinética en un choque entre partículas (ver [13] para más detalles)

Definición 4.2.9. En un sistema Hamiltoniano el **impacto** está dado por la ecuación de impacto Newtoniana $P_q : T_q^*Q \rightarrow T_q^*Q$ definida por (ver [13])

$$P_q(p) = p - (1 + e) \frac{\langle \langle p, dh_q \rangle \rangle_q}{\|dh_q\|_q^2} dh_q, \quad (4.2.10)$$

donde $0 \leq e \leq 1$ es el coeficiente de restitución.

Proposición 4.2.11 (A. Ames [4]). *Si $\mathbf{H} = (Q, H, h)$ es G -invariante y la función de impacto está dada por una ecuación de impacto Newtoniana, entonces la acción levantada al cotangente Φ^{T^*Q} de G en T^*Q es una acción híbrida.*

Demostración. Veamos que para todo $g \in G$, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \xrightarrow{R} & D \\ \Phi_g^{T^*Q}|_{\mathcal{S}} \downarrow & & \downarrow \Phi_g^{T^*Q} \\ \mathcal{S} & \xrightarrow{R} & D \end{array}$$

donde $R : \mathcal{S} \rightarrow D$ está definida como $R(q, p) = (q, P_q(p))$, y $P_q(p)$ definida en (4.2.10). Es decir, tenemos que probar que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} T_q^*Q & \xrightarrow{P_q} & T_q^*Q \\ \Phi_{g^{-1}}^{T^*Q} \downarrow & & \downarrow \Phi_{g^{-1}}^{T^*Q} \\ T_{\Phi_g(q)}^*Q & \xrightarrow{P_{\Phi_g(q)}} & T_{\Phi_g(q)}^*Q \end{array}$$

para todo $g \in G$, $(q, p) \in T_q^*Q$ con $q \in h^{-1}(0)$.

Dado que h es G -invariante, se tiene que $\Phi_{g^{-1}}^{T^*Q}(dh_q) = dh_{\Phi_g(q)}$. Observemos que

$$\Phi_{g^{-1}}^{T^*Q} \circ P_q(p) = \Phi_{g^{-1}}^{T^*Q}(p) + \Phi_{g^{-1}}^{T^*Q} \left(-(1 + e) \frac{\langle \langle p, dh_q \rangle \rangle_q}{\|dh_q\|_q^2} dh_q \right) \quad (4.2.12)$$

donde esta igualdad viene dada por el hecho que $\Phi_{g^{-1}}^{T^*Q}(dh_q) = dh_{\Phi_g(q)}$, con lo cual

$$(4.2.12) = \Phi_{g^{-1}}^{T^*Q}(p) - (1 + e) \frac{\langle \langle p, dh_q \rangle \rangle_q}{\|dh_q\|_q^2} \Phi_{g^{-1}}^{T^*Q}(dh_q), \quad (4.2.13)$$

ya que $\frac{\langle \langle p, dh_q \rangle \rangle_q}{\|dh_q\|_q^2}$ es constante. Por lo tanto,

$$(4.2.13) = \Phi_{g^{-1}}^{T^*Q}(p) - (1 + e) \frac{\langle \langle p, dh_q \rangle \rangle_q}{\|dh_q\|_q^2} dh_{\Phi_g(q)}. \quad (4.2.14)$$

Usando (4.2.7) se tiene que

$$(4.2.14) = \Phi_{g^{-1}}^{T^*Q}(p) - (1+e) \frac{\langle \langle \Phi_{g^{-1}}^{T^*Q}(p), \Phi_{g^{-1}}^{T^*Q}(dh_q) \rangle \rangle_{\Phi_g(q)}}{\|\Phi_{g^{-1}}^{T^*Q}(dh_q)\|_{\Phi_g(q)}^2} dh_{\Phi_g(q)}, \quad (4.2.15)$$

entonces

$$(4.2.15) = \Phi_{g^{-1}}^{T^*Q}(p) - (1+e) \frac{\langle \langle \Phi_{g^{-1}}^{T^*Q}(p), dh_{\Phi_g(q)} \rangle \rangle_{\Phi_g(q)}}{\|dh_{\Phi_g(q)}\|_{\Phi_g(q)}^2} dh_{\Phi_g(q)}, \quad (4.2.16)$$

y por lo tanto

$$(4.2.16) = P_{\Phi_g(q)} \circ \Phi_{g^{-1}}^{T^*Q}(p) \quad (4.2.17)$$

como se deseaba. \square

Definición 4.2.18. Dada una variedad híbrida $D^{\mathcal{H}} = (D, \mathcal{S}, R)$ definida como en la Definición 4.1.5, un grupo de Lie G y una acción híbrida Φ , definimos el **espacio de órbitas híbridas** como

$$D^{\mathcal{H}}/G = (D/G, \mathcal{S}/G, \hat{R})$$

donde D/G y \mathcal{S}/G son los espacios de órbitas obtenidas mediante Φ y $\Phi|_{\mathcal{S}}$, respectivamente, y $\hat{R} : \mathcal{S}/G \rightarrow D/G$ es la función de impacto inducida en el espacio de órbitas. Es decir, si $\pi : D \rightarrow D/G$ está dada por $\pi(x) = [x] \in D/G$ (la aplicación que envía x en la Φ -órbita de x , es decir, $x \sim \Phi_g(x)$ para todo $g \in G$, siendo \sim la relación de equivalencia de x); y \hat{R} viene dada por

$$\hat{R}([x]) = [R(x)] = \pi(R(x)).$$

Proposición 4.2.19 (A. Ames [4]). Si $\Phi : G \times D \rightarrow D$ es una acción híbrida libre y propia, definida como en la Definición 4.2.4, entonces $D^{\mathcal{H}}/G$ es una variedad híbrida. Más aún; existe una submersión $\pi : D \rightarrow D/G$ tal que el siguiente diagrama conmuta y $\pi|_{\mathcal{S}}$ es también una submersión.

$$\begin{array}{ccccc} D & \xleftarrow{i} & \mathcal{S} & \xrightarrow{R} & D \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi|_{\mathcal{S}} & & \downarrow \pi \\ D/G & \xleftarrow{i_G} & \mathcal{S}/G & \xrightarrow{\hat{R}} & D/G \end{array}$$

Definición 4.2.20. Una aplicación momento Ad^* -equivariante $J : D \rightarrow \mathfrak{g}^*$ es una aplicación momento Ad^* -equivariante híbrida si el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathfrak{g}^* & & \\ & \nearrow J & \uparrow J|_{\mathcal{S}} & \nwarrow J & \\ D & \xleftarrow{i} & \mathcal{S} & \xrightarrow{R} & D \end{array}$$

Con todos estos ingredientes se puede definir un G -espacio Hamiltoniano asociado a un sistema Hamiltoniano híbrido simple.

Definición 4.2.21. Un G -espacio Hamiltoniano Híbrido está dado por

$$(D^{\mathcal{H}}, \omega_{can}, \Phi, J)$$

tal que (D, ω_{can}) es una variedad simpléctica, ω_{can} la 2-forma simpléctica canónica en T^*Q , Φ es una acción simpléctica híbrida (es decir Φ es simpléctica e híbrida) y J es una aplicación momento híbrida Ad^* -equivariante.

Proposición 4.2.22 (A. Ames [4]). Dado $\mathbf{H} = (Q, H, h)$, si h es G -invariante, entonces $J : D \rightarrow \mathfrak{g}^*$ definido por

$$\langle J(q, p), \xi \rangle = \langle p, \xi_Q(q) \rangle \quad (4.2.23)$$

es una aplicación momento híbrida Ad^* -equivariante donde ξ_Q es el generador infinitesimal asociado a ξ (ver definición 1.2.14).

Teorema 4.2.24 (A. Ames [4]). Si $\mathbf{H} = (Q, H, h)$ es G -invariante, entonces la 4-upla dada por $(D^{\mathcal{H}}, \omega_{can}, \Phi^{T^*Q}, J)$ es un G -espacio Hamiltoniano híbrido.

Definición 4.2.25. Sea $\mathcal{H} = (D, \mathcal{S}, R, X)$ un sistema híbrido simple. Supongamos que μ es un valor regular de $J : D \rightarrow \mathfrak{g}^*$. Decimos que μ es un **valor regular híbrido** si es también un valor regular de $J|_{\mathcal{S}}$. Esto es, el siguiente diagrama conmuta, donde $J^{-1}(\mu)$ y $J|_{\mathcal{S}}^{-1}(\mu)$ son subvariedades embebidas de D

$$\begin{array}{ccccc} J^{-1}(\mu) & \xleftarrow{i_{J_{\mathcal{S}}}} & J|_{\mathcal{S}}^{-1}(\mu) & \xrightarrow{R|_{J|_{\mathcal{S}}^{-1}(\mu)}} & J^{-1}(\mu) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ D & \xleftarrow{i} & \mathcal{S} & \xrightarrow{R} & D \end{array}$$

Teorema 4.2.26 (A. Ames [4]). Sea $(D^{\mathcal{H}}, \omega_{can}, \Phi, J)$ un G -espacio Hamiltoniano híbrido. Si $\mu \in \mathfrak{g}^*$ es un valor regular híbrido de J , donde J es Ad^* -equivariante y la acción de G_{μ} en $J^{-1}(\mu)$ es libre, propia e híbrida, entonces

$$D_{\mu}^{\mathcal{H}} = (D_{\mu}, S_{\mu}, R_{\mu}) := (J^{-1}(\mu)/G_{\mu}, J|_{\mathcal{S}}^{-1}(\mu)/G_{\mu}, \hat{R}|_{J|_{\mathcal{S}}^{-1}(\mu)})$$

es una variedad híbrida.

Observación 4.2.27. La variedad híbrida introducida en el Teorema anterior está referida al **espacio de fases reducido híbrido**. Para entender mejor ésta variedad híbrida, notemos que la submersión $\pi_{\mu} : J^{-1}(\mu) \rightarrow J^{-1}(\mu)/G_{\mu}$ junto con la Definición

4.2.20 y Definición 4.2.25 se tiene que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathfrak{g}^* & & \\
 & \nearrow J & \uparrow J|_{\mathcal{S}} & \nwarrow J & \\
 D_H & \xleftarrow{i_H} & \mathcal{S}_H & \xrightarrow{R} & D_H \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 J^{-1}(\mu) & \xleftarrow{i_{J_S}} & J|_{\mathcal{S}}^{-1}(\mu) & \xrightarrow{R|_{J|_{\mathcal{S}}^{-1}(\mu)}} & J^{-1}(\mu) \\
 \downarrow \pi_\mu & & \downarrow \pi_\mu|_{J|_{\mathcal{S}}^{-1}(\mu)} & & \downarrow \pi_\mu \\
 D_\mu & \xleftarrow{i_{\mathcal{S}_\mu}} & \mathcal{S}_\mu & \xrightarrow{R_\mu} & D_\mu
 \end{array}$$

donde $\pi_\mu|_{J|_{\mathcal{S}}^{-1}(\mu)}$ es también una submersión y las inclusiones i_H , i_{J_S} e $i_{\mathcal{S}_\mu}$ son las inclusiones canónicas $i_H : \mathcal{S}_H \hookrightarrow D_H$, $i_{J_S} : J|_{\mathcal{S}}^{-1}(\mu) \hookrightarrow J^{-1}(\mu)$ y $i_{\mathcal{S}_\mu} : \mathcal{S}_\mu \hookrightarrow D_\mu$, respectivamente.

Teorema 4.2.28 (A. Ames [4]). *Dado un sistema híbrido Hamiltoniano simple \mathcal{H} asociado a un Hamiltoniano G -invariante, y un G -espacio Hamiltoniano híbrido satisfaciendo las hipótesis del Teorema 4.2.26, existe un Hamiltoniano reducido $H_\mu : D_\mu \rightarrow \mathbb{R}$ y un sistema Hamiltoniano híbrido reducido \mathcal{H}_μ asociado a H_μ ,*

$$\mathcal{H}_\mu = (D_\mu, \mathcal{S}_\mu, R_\mu, X_\mu),$$

donde X_μ está determinado por las soluciones de $dH_\mu = i_{X_\mu}\omega_\mu$, con ω_μ la 2-forma simpléctica reducida, unívocamente determinada por $i_\mu^*\omega = \pi_\mu^*\omega_\mu$.

Definición 4.2.29. Si H es un Hamiltoniano G -invariante en D_H , entonces el **Hamiltoniano reducido** H_μ en D_μ está unívocamente determinado por la relación

$$H_\mu \circ \pi_\mu = H \circ i_\mu,$$

donde $\pi_\mu : J^{-1}(\mu) \rightarrow J^{-1}(\mu)/G_\mu$ es la proyección al cociente e $i_\mu : J^{-1}(\mu) \rightarrow T^*Q$ es la inclusión.

Teorema 4.2.30 (A. Ames [4]). *Dados \mathcal{H} y \mathcal{H}_μ como en el Teorema 4.2.28, si $\chi^{\mathcal{H}}(x_0)$ es el flujo híbrido asociado a \mathcal{H} con $x_0 \in J^{-1}(\mu)$, entonces el flujo híbrido $\chi^{\mathcal{H}_\mu}$ asociado al sistema híbrido Hamiltoniano reducido \mathcal{H}_μ está dado por*

$$\chi^{\mathcal{H}_\mu}(\pi_\mu(x_0)) = (\Lambda, \mathcal{J}, \pi_\mu(\mathcal{C}))$$

donde $\pi_\mu(\mathcal{C}) := \{\pi_\mu(c_i) : c_i \in \mathcal{C}\}$ y $\Lambda, \mathcal{C}, \mathcal{J}$ se definen como en Definición 4.1.6.

4.2.2. Ejemplos

En esta subsección trataremos ejemplos que no fueron analizados en [4] para mostrar cómo el proceso de reducción es aplicable.

Ejemplo 4.2.31. Péndulo Esférico

Consideremos un péndulo esférico invertido, que se mueve sobre una superficie como se muestra a continuación. La naturaleza híbrida de este sistema viene dada por el impacto del péndulo sobre la superficie.

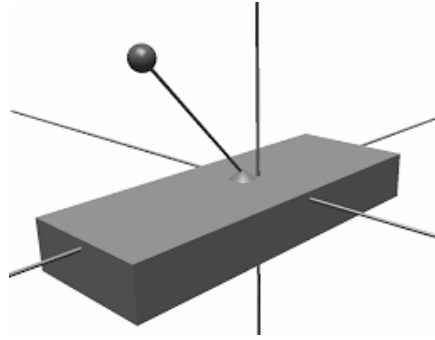


Figura 4.3: Péndulo esférico

El espacio de configuraciones (ver Figura 4.3) es $Q_P = \mathbb{S}^2$ y, usando coordenadas locales, denotamos un elemento $q \in \mathbb{S}^2$ por $q = (\theta, \varphi)$. El momento asociado a q es denotado por $p \in T_q^*\mathbb{S}^2$ descrito en coordenadas locales por $p = (p_\theta, p_\varphi)$.

El Hamiltoniano del sistema $H_P : T^*\mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ está dado por

$$H_P(\theta, \varphi, p_\theta, p_\varphi) = \frac{1}{2mR^2} \left(p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2(\theta)} \right) - mgR \cos(\theta).$$

Consideramos la función $h_P : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $h_P(\theta, \varphi) = R \cos(\theta)$ que describe el impacto de la masa del péndulo con la superficie. Se tiene entonces el Hamiltoniano híbrido dado por $\mathbf{H} = (Q_P, H_P, h_P)$. Para este Hamiltoniano híbrido, el sistema híbrido Hamiltoniano simple $\mathcal{H}_{\mathbf{H}}$ está dado por $\mathcal{H}_{\mathbf{H}} = (D_{\mathbf{H}}, \mathcal{S}_{\mathbf{H}}, R_{\mathbf{H}}, X_{\mathbf{H}})$ donde

- i) $D_{\mathbf{H}} = \{(\theta, \varphi, p_\theta, p_\varphi) \in T^*\mathbb{S}^2 : \cos(\theta) \geq 0\}$ es el dominio, donde el ángulo θ se mueve en el eje horizontal positivo,
- ii) $\mathcal{S}_{\mathbf{H}} = \{(\theta, \varphi, p_\theta, p_\varphi) \in T^*\mathbb{S}^2 : \cos(\theta) = 0 \text{ y } p_\theta \geq 0\}$ es la superficie de impacto,
- iii) $R_{\mathbf{H}}(\theta, \varphi, p_\theta, p_\varphi) = (\theta, \varphi, -ep_\theta, p_\varphi)$, donde $0 \leq e \leq 1$ es el coeficiente de restitución,

iv) El campo vectorial hamiltoniano $X_{\mathbf{H}}$ está dado por

$$X_{\mathbf{H}}(q, p) = \begin{pmatrix} \frac{p_{\theta}}{mR^2} \\ \frac{p_{\varphi}}{mR^2 \sin^2(\theta)} \\ \frac{p_{\varphi}^2 \cos(\theta)}{mR^2 \sin^3(\theta)} - mgR \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sea $G = \mathbb{S}^1$ actuando por rotaciones en el eje vertical, es decir, $\Psi : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ es la acción dada por

$$\Psi(\psi, (\theta, \varphi)) = (\theta, \varphi + \psi).$$

La acción Ψ en $D_{\mathbf{H}}$ levantada al cotangente $T^*\mathbb{S}^2$ está dada por

$$\Psi^{T^*\mathbb{S}^2}(\psi, (\theta, \varphi, p_{\theta}, p_{\varphi})) = (\theta, \varphi + \psi, p_{\theta}, p_{\varphi}).$$

$\Psi^{T^*\mathbb{S}^2}$ es una acción híbrida pues,

$$(\Psi_{\psi}^{T^*\mathbb{S}^2} \circ R_H)(\theta, \varphi, p_{\theta}, p_{\varphi}) = \Psi_{\psi}^{T^*\mathbb{S}^2} \left(\frac{\pi}{2}, \varphi, -ep_{\theta}, p_{\varphi} \right) = \left(\frac{\pi}{2}, \varphi + \psi, -ep_{\theta}, p_{\varphi} \right)$$

y

$$\Psi_{\psi}^{T^*\mathbb{S}^2}|_{\mathcal{S}_H} \left(\frac{\pi}{2}, \varphi, p_{\theta}, p_{\varphi} \right) = \left(\frac{\pi}{2}, \varphi + \psi, p_{\theta}, p_{\varphi} \right).$$

Es decir

$$(R_H \circ \Psi_{\psi}^{T^*\mathbb{S}^2}|_{\mathcal{S}_H}) \left(\frac{\pi}{2}, \varphi, p_{\theta}, p_{\varphi} \right) = \left(\frac{\pi}{2}, \varphi + \psi, -ep_{\theta}, p_{\varphi} \right).$$

Entonces cumple con la ecuación (4.2.2) de la Definición 4.2.1. Sea, $\xi \in \mathfrak{g} \cong \mathbb{R}$, el generador infinitesimal asociado a la acción dado por,

$$\xi_{\mathbb{S}^2}(\theta, \varphi) = (0, \xi) \in T_{(\theta, \varphi)}\mathbb{S}^2.$$

La aplicación momento $J : T^*\mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ está dado por

$$J(\theta, \varphi, p_{\theta}, p_{\varphi}) = p_{\varphi}.$$

J es una aplicación momento Ad^* -equivariante híbrida ya que satisface la ecuación (4.2.23) de la Proposición 4.2.22. Por lo tanto, se tiene que $(D^{\mathcal{H}}, \omega_{can}, \Psi^{T^*Q}, J)$ es un G -espacio Hamiltoniano Híbrido, siendo $D^{\mathcal{H}} = (D_H, \mathcal{S}_H, R_H)$ la variedad híbrida.

Calculemos ahora el sistema híbrido reducido. Denotamos $\mathbf{H}_{\mu} = (Q_{P_{\mu}}, H_{P_{\mu}}, h_{P_{\mu}})$ y se desea hallar el Sistema Híbrido asociado. El espacio $T^*(\mathbb{S}^2/\mathbb{S}^1)$, identificado con $T^*(\mathbb{S}^1/\mathbb{Z}^2)$, es decir, $Q_{P_{\mu}} = \mathbb{S}^1/\mathbb{Z}^2$. El Hamiltoniano reducido $H_{P_{\mu}} : T^*(\mathbb{S}^1/\mathbb{Z}^2) \rightarrow \mathbb{R}$ está dado por:

$$H_{P_{\mu}}(\theta, p_{\theta}) = \frac{p_{\theta}^2}{2mR^2} - mgR \cos(\theta) + \frac{\mu^2}{2mR^2 \sin^2(\theta)}.$$

Además $h_{P_{\mu}}(\theta) = R \cos(\theta)$. La variedad híbrida para el péndulo esférico híbrido reducido $D^{\mathcal{H}_{\mu}} = (D_{H_{\mu}}, \mathcal{S}_{H_{\mu}}, R_{H_{\mu}})$ está caracterizada por

- i) $D_{H_\mu} = \{(\theta, p_\theta) \in T^*(Q_{P_\mu}) : \cos(\theta) \geq 0\}$,
- ii) $\mathcal{S}_{H_\mu} = \{(\theta, p_\theta) \in T^*(Q_{P_\mu}) : \cos(\theta) = 0 \text{ y } p_\theta \geq 0\}$,
- iii) $R_{H_\mu}(\theta, p_\theta) = (\theta, -ep_\theta)$,
- iv) El campo vectorial X_{H_μ} dado por

$$X_{H_\mu}(\theta, p_\theta) = \left(\begin{array}{c} \frac{p_\theta}{mR^2} \\ \frac{\mu^2 \cos(\theta)}{mR^2 \sin^3(\theta)} - mgR \sin(\theta) \end{array} \right).$$

Por lo tanto, se tiene que el sistema híbrido Hamiltoniano reducido asociado al péndulo esférico híbrido está dado por $\mathcal{H}_{H_\mu} = (D_{H_\mu}, \mathcal{S}_{H_\mu}, R_{H_\mu}, X_{H_\mu})$ donde los elementos de \mathcal{H}_{H_μ} están caracterizados por (i)-(iv).

Ejemplo 4.2.32. Pelota que rebota en una superficie sinusoidal

Consideremos una pelota que rebota en una superficie sinusoidal como se describe en la Figura 4.4.

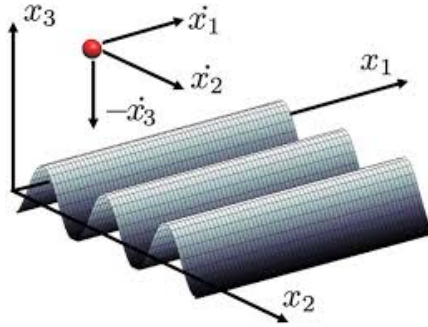


Figura 4.4: Pelota que rebota en una superficie sinusoidal

Sea $Q_B = \mathbb{R}^3$, y consideremos el Hamiltoniano $H_B : T^*\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$H_B(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + mgx_3$$

donde g es la constante gravitacional. Para este sistema definimos el impacto mediante $h_B : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $h_B(x_1, x_2, x_3) = x_3 - \sin x_2$, que describe la altura de la pelota respecto con el suelo (superficie sinusoidal). Se tiene entonces el Hamiltoniano híbrido dado por $\mathbf{H} = (Q_B, H_B, h_B)$. Para este Hamiltoniano híbrido, el sistema híbrido Hamiltoniano simple $\mathcal{H}_{\mathbf{H}}$ está dado por $\mathcal{H}_{\mathbf{H}} = (D_H, \mathcal{S}_H, R_H, X_H)$ donde

- i) $D_H = \{(x, p) \in T^*\mathbb{R}^3 : x_3 - \sin x_2 \geq 0\}$ es el dominio,
- ii) $\mathcal{S}_H = \{(x, p) \in T^*\mathbb{R}^3 : x_3 = \sin x_2 \text{ y } -p_2 \cos x_2 + p_3 \leq 0\}$ es la superficie de impacto,

iii) $R_H(x, p) = (x_1, x_2, \text{sen } x_2, p_1, p_2\Gamma_1(x_2) + p_3\Gamma_2(x_2), p_2\Gamma_2(x_2) + p_3\Gamma_3(x_2))$, donde $0 \leq e \leq 1$ es el coeficiente de restitución, $\Gamma_1(x_2) = \frac{(1-e\cos^2 x_2)}{1+\cos^2 x_2}$, $\Gamma_2(x_2) = \frac{(\cos^2 x_2 - e)}{1+\cos^2 x_2}$ y $\Gamma_3(x_2) = \frac{(\cos^2 x_2 - e)}{1+\cos^2 x_2}$,

iv) El campo vectorial hamiltoniano $X_{\mathbf{H}}$ está dado por

$$X_{\mathbf{H}}(x, p) = \left(\frac{p_1}{m} \quad \frac{p_2}{m} \quad \frac{p_3}{m} \quad 0 \quad 0 \quad -mg \right)^T.$$

Sea $G = \mathbb{R}$ actuando por traslaciones en el eje vertical; es decir, $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es la acción dada por

$$\Phi(a, (x_1, x_2, x_3)) = (x_1, x_2 + a, x_3),$$

con $a \in \mathbb{R}$ y la correspondiente acción levantada al cotangente $T^*\mathbb{R}^3$ está dada por

$$\Phi^{T^*\mathbb{R}^3}(a, (x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3)) = (x_1, x_2 + a, x_3, p_1, p_2, p_3).$$

$\Phi^{T^*\mathbb{R}^3}$ es una acción híbrida pues,

$$\begin{aligned} (\Phi_a^{T^*\mathbb{R}^3} \circ R_H)(x, p) &= \Phi_a^{T^*\mathbb{R}^3}(x_1, x_2, \text{sen } x_2, p_1, p_2\Gamma_1(x_2) + p_3\Gamma_2(x_2), p_2\Gamma_2(x_2) + p_3\Gamma_3(x_2)) \\ &= (x_1, x_2 + a, \text{sen } x_2, p_1, p_2\Gamma_1(x_2) + p_3\Gamma_2(x_2), p_2\Gamma_2(x_2) + p_3\Gamma_3(x_2)) \end{aligned}$$

con $x = (x_1, x_2, x_3)$, $p = p_1, p_2, p_3$ y

$$\Phi_a^{T^*\mathbb{R}^3}|_{S_H}(x_1, x_2, \text{sen } x_2, p_1, p_2, p_3) = (x_1, x_2 + a, \text{sen } x_2, p_1, p_2, p_3),$$

es decir

$$\begin{aligned} (R_H \circ \Phi_a^{T^*\mathbb{R}^3}|_{S_H})(x_1, x_2, \text{sen } x_2, p_1, p_2, p_3) &= \\ &= (x_1, x_2 + a, \text{sen } x_2, p_1, p_2\Gamma_1(x_2) + p_3\Gamma_2(x_2), p_2\Gamma_2(x_2) + p_3\Gamma_3(x_2)). \end{aligned}$$

Es decir, se cumple la ecuación (4.2.2) de la Definición 4.2.1. Sea $\xi \in \mathfrak{g} \simeq \mathbb{R}$, el generador infinitesimal asociado a la acción, con lo cual, la aplicación momento $J : T^*\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ está dada por

$$J(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) = p_1.$$

J es una aplicación momento Ad^* -equivariante híbrida ya que satisface la ecuación (4.2.23) de la Proposición 4.2.22. Por lo tanto, se tiene que $(D^{\mathcal{H}}, \omega_{can}, \Psi^{T^*Q}, J)$ es un G -espacio híbrido Hamiltoniano, siendo $D^{\mathcal{H}} = (D_H, \mathcal{S}_H, R_H)$ la variedad híbrida.

Calculemos ahora el sistema híbrido reducido. Denotamos $\mathbf{H}_\mu = (Q_{B_\mu}, H_{B_\mu}, h_{B_\mu})$ y se quiere hallar el sistema híbrido asociado. Sea $T^*(\mathbb{R}^3/\mathbb{R}) \simeq T^*(\mathbb{R}^2)$, es decir, $Q_{B_\mu} = \mathbb{R}^2$. El Hamiltoniano reducido $H_\mu : T^*\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ está dado por

$$H_\mu(x_2, x_3, p_2, p_3) = \frac{1}{2m}(p_2^2 + p_3^2) + \frac{\mu^2}{2m} + mgx_3.$$

Además $h_\mu(x_2, x_3) = x_3 - \text{sen } x_2$. La variedad híbrida reducida para la pelota que rebota en la superficie sinusoidal $D^{\mathcal{H}_\mu} = (D_{H_\mu}, S_{H_\mu}, R_{H_\mu})$ está dado por

- i) $D_{H_\mu} = \{(x_2, x_3, p_2, p_3) \in T^*\mathbb{R}^2 : x_3 - \sin x_2 \geq 0\}$,
- ii) $\mathcal{S}_{H_\mu} = \{(x_2, x_3, p_2, p_3) \in T^*\mathbb{R}^2 : x_3 = \sin x_2 \text{ y } -p_2 \cos x_2 + p_3 \leq 0\}$,
- iii) $R_{H_\mu}(x_2, x_3, p_2, p_3) = (x_2, x_3, p_1, p_2\Gamma_1(x_2) + p_3\Gamma_2(x_2), p_2\Gamma_2(x_2) + p_3\Gamma_3(x_2))$, donde $0 \leq e \leq 1$ es el coeficiente de restitución,
- iv) El campo vectorial X_{H_μ} dado por

$$X_{H_\mu}(x, p) = \left(\frac{p_2}{m} \quad \frac{p_3}{m} \quad 0 \quad -mg \right)^T.$$

Por lo tanto, se tiene que el Hamiltoniano reducido $\mathcal{H}_{H_\mu} = (D_{H_\mu}, \mathcal{S}_{H_\mu}, R_{H_\mu}, X_{H_\mu})$ está caracterizado por los elementos (i)-(iv).

4.2.3. Sistemas Híbridos Hamiltonianos con Términos Magnéticos

Consideremos un sistema híbrido Hamiltoniano simple $\mathcal{H} = (D_H, \mathcal{S}_H, R_H, X_H)$, con $D_H \subset T^*Q$. En esta sección consideramos que D_H es un fibrado principal, con proyección $\pi : D_H \rightarrow D_H/G$ definiendo dicho fibrado, donde G es el grupo de estructura. Denotamos por $V\pi$ el fibrado de vectores verticales con respecto a la proyección π y $V^\circ\pi$ su anulador, un subfibrado vectorial de D_H .

Recordemos que (ver Lema 2.4.17 en Capítulo 2) si H es un Hamiltoniano G -invariante y $\mu = 0 \in \mathfrak{g}^*$, existe un difeomorfismo

$$\tilde{\mathcal{S}} : J^{-1}(0) \rightarrow T^*(Q/G) \times_{Q/G} Q.$$

Proposición 4.2.33. *Dada $\mathcal{H}_\mu = (D_\mu, \mathcal{S}_\mu, R_\mu, X_\mu)$ la variedad híbrida Hamiltoniana reducida, cumpliendo las hipótesis del Teorema 4.2.26 y dada una 1-forma de conexión $\mathcal{A}_{D_L} : D_L \rightarrow \mathfrak{g}$, existe un difeomorfismo $[\phi_{\mathcal{A}_{D_L}}^\mu] : D_\mu = J^{-1}(\mu)/G_\mu \rightarrow T^*(Q/G) \times_{Q/G} Q/G_\mu$; de manera que $[\phi_{\mathcal{A}_{D_L}}^\mu]$ hace que el siguiente diagrama sea conmutativo*

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathfrak{g}^* & & \\
 & \nearrow J & \uparrow J|_{\mathcal{S}} & \nwarrow J & \\
 D_H & \xleftarrow{i_H} & \mathcal{S}_H & \xrightarrow{R} & D_H \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 J^{-1}(\mu) & \xleftarrow{i_{J\mathcal{S}}} & J|_{\mathcal{S}}^{-1}(\mu) & \xrightarrow{R|_{J|_{\mathcal{S}}^{-1}(\mu)}} & J^{-1}(\mu) \\
 \downarrow \pi_\mu & & \downarrow \pi_\mu|_{J|_{\mathcal{S}}^{-1}(\mu)} & & \downarrow \pi_\mu \\
 J^{-1}(\mu)/G_\mu & \xleftarrow{i_{\mathcal{S}_\mu}} & \mathcal{S}_\mu & \xrightarrow{R_\mu} & J^{-1}(\mu)/G_\mu \xrightarrow{[\phi_{\mathcal{A}_{D_L}}^\mu]} T^*(Q/G) \times_{Q/G} Q/G_\mu
 \end{array}$$

donde $i_H : \mathcal{S}_H \hookrightarrow D_H$, $i_{J\mathcal{S}} : J|_{\mathcal{S}}^{-1}(\mu) \hookrightarrow J^{-1}(\mu)$ y $i_{\mathcal{S}_\mu} : \mathcal{S}_\mu \hookrightarrow D_\mu$, son las inclusiones canónicas respectivamente.

Demostración. En primer lugar notemos que la parte superior del diagrama conmuta por lo visto en la Observación 4.2.27.

Por otra parte, como $[\phi_{\mathcal{A}_{D_L}}^\mu] : D_\mu = J^{-1}(\mu)/G_\mu \rightarrow T^*(Q/G) \times_{Q/G} Q/G_\mu$ es un difeomorfismo considerando la 1-forma de conexión $\mathcal{A}_{D_L} : D_L \rightarrow \mathfrak{g}$ por la Proposición 2.4.21 del Capítulo 2. Por lo tanto, podemos asociar el espacio cociente D_μ con un producto fibrado.

Entonces, juntando estos dos resultados, se tiene que el diagrama conmuta. □

Observación 4.2.34. Bajo las condiciones anteriores, dado un sistema híbrido Hamiltoniano simple se puede obtener un sistema híbrido Hamiltoniano reducido, de manera que su dominio sea un fibrado producto dotado de una estructura simpléctica. Además, las soluciones de las ecuaciones de Hamilton asociadas al sistema híbrido Hamiltoniano simple pueden proyectarse en soluciones del sistema híbrido Hamiltoniano reducido y, más aún, teniendo soluciones de las ecuaciones de Hamilton asociadas al sistema híbrido Hamiltoniano reducido (mediante un proceso de reconstrucción) se pueden obtener soluciones para el sistema híbrido Hamiltoniano simple.

La 1-forma \mathcal{A}_μ determina una 1-forma G_μ -invariante en Q , donde $\mathcal{A}_\mu : Q \rightarrow D_H$. Luego, $d\mathcal{A}_\mu$ es una 2-forma en Q , que puede proyectarse a una 2-forma \mathcal{B}_μ en Q/G_μ .

Sean las siguientes proyecciones tal como las consideramos en el Capítulo 2:

- i) $\pi_1 : T^*(Q/G) \times_{Q/G} Q/G_\mu \rightarrow T^*(Q/G)$ dada por $(\tilde{\alpha}_{[q]}, [q]) \mapsto \tilde{\alpha}_{[q]}$,
- ii) $\pi_2 : T^*(Q/G) \times_{Q/G} Q/G_\mu \rightarrow Q/G_\mu$ dada por $(\tilde{\alpha}_{[q]}, [q]) \mapsto [q]$,
- iii) $\pi_\mu : J^{-1}(\mu) \rightarrow J^{-1}(\mu)/G_\mu$ dada por $\alpha \mapsto [\alpha]$,
- iv) $\pi_0 : V^\circ\pi \rightarrow T^*(Q/G) \times_{Q/G} Q/G_\mu$ dada por $\alpha \mapsto (\tilde{\alpha}_{[q]}, [q])$, definida en el Capítulo 2.

También como en el Capítulo 2, sean $\Omega_{Q/G}$ la 2-forma en $T^*(Q/G)$ y \mathcal{B}_μ una 2-forma en Q/G_μ . Entonces se tiene una 2-forma cerrada en $T^*(Q/G) \times_{Q/G} Q/G_\mu$ dada por

$$\mathcal{B} = \pi_1^*(\Omega_{Q/G}) + \pi_2^*(\mathcal{B}_\mu) \quad (4.2.35)$$

donde $\Omega_{Q/G}$ y \mathcal{B}_μ se definieron en la Subsección 2.4.3 del Capítulo 2. Luego $\pi_2^*(\mathcal{B}_\mu)$ usualmente se denomina **término magnético**.

Definición 4.2.36. Para el difeomorfismo

$$[\tilde{\phi}_{\mathcal{A}_{D_L}}^\mu] : J^{-1}(\mu)/G_\mu \rightarrow T^*(Q/G) \times_{Q/G} Q/G_\mu$$

definido en la Proposición 4.2.33, como $T^*(Q/G) \times_{Q/G} Q/G_\mu$ está equipado con la 2-forma simpléctica \mathcal{B} , se dice que $[\tilde{\phi}_{\mathcal{A}_{D_L}}^\mu]$ es un **simplectomorfismo**.

Definición 4.2.37. Un **Sistema Híbrido Hamiltoniano Magnético** es un sistema híbrido Hamiltoniano reducido dotado de un término magnético. Éste está determinado por la 5-upla $\mathcal{H}_{H_\mu} := (T^*(Q/G) \times_{Q/G} Q/G_\mu, \mathcal{S}_\mu, R_\mu, X_{H_\mu}, \mathcal{B})$, donde

- i) $H_\mu : T^*(Q/G) \times_{Q/G} Q/G_\mu \rightarrow \mathbb{R}$ es un Hamiltoniano reducido.
- ii) $\mathcal{S}_\mu \subset T^*(Q/G) \times_{Q/G} Q/G_\mu$ es la superficie de impacto, una subvariedad de codimensión uno del espacio reducido.
- iii) $R_\mu : \mathcal{S}_\mu \rightarrow T^*(Q/G) \times_{Q/G} Q/G_\mu$, es la función de impacto reducida.
- iv) X_{H_μ} es el campo vectorial Hamiltoniano asociado a H_μ .
- v) \mathcal{B} es una 2-forma cerrada en $T^*(Q/G) \times_{Q/G} Q/G_\mu$ deformada con un término magnético $\pi_2^*(\mathcal{B}_\mu)$, definida como en la Ecuación 4.2.35.

Ejemplo 4.2.38. Partícula magnética rebotando en una esfera

Consideremos un electrón de masa m en un campo magnético donde el electrón se mueve dentro de una esfera.

Consideremos $Q = \mathbb{R}^3 \times so(2)$. Sea $M = Q/so(2)$ una variedad Riemanniana de dimensión 3, $\pi : Q \rightarrow M$ un fibrado principal, tal que $T^*\pi : T^*Q \rightarrow T^*(Q/so(2))$ es el fibrado cotangente asociado al fibrado principal.

Sea $\mathcal{A} : TQ \rightarrow \mathfrak{so}(2) \simeq \mathbb{R}$ una conexión principal en Q con $\mathcal{A}^* : \mathfrak{so}(2)^* \rightarrow T^*Q$ la conexión dual asociada a \mathcal{A} . Sea $H : T^*Q \rightarrow \mathbb{R}$ el Hamiltoniano del sistema dado por

$$H(q, p) = \frac{1}{2m} \|T^*\pi(q, p)\|_M^2 + \frac{\tilde{e}}{c} \|\mathcal{A}^*(q, p)\|_{\mathfrak{so}(2)^*}$$

donde \tilde{e} es la carga del electrón y c la velocidad de la luz. Aquí, $\|\cdot\|_M$ denota la norma inducida por la métrica de la variedad Riemanniana M y $\|\cdot\|_{\mathfrak{so}(2)^*}$ una norma en $\mathfrak{so}(2)^*$. Como $\pi(\theta \cdot q) = \pi(q)$, $\forall q \in Q$ y $\theta \in so(2)$, entonces el Hamiltoniano H es $so(2)$ -invariante, pues

$$\begin{aligned} H(\theta \cdot (q, p)) &= \frac{1}{2m} \|T^*\pi(\theta \cdot (q, p))\|_M^2 + \frac{\tilde{e}}{c} \|\mathcal{A}^*(\theta \cdot (q, p))\|_{\mathfrak{so}(2)^*} \\ &= \frac{1}{2m} \|T^*\pi(q, p)\|_M^2 + \frac{\tilde{e}}{c} \|Ad_\theta^* \cdot \mathcal{A}^*(q, p)\|_{\mathfrak{so}(2)^*} \\ &= \frac{1}{2m} \|T^*\pi(q, p)\|_M^2 + \frac{\tilde{e}}{c} \|\mathcal{A}^*(q, p)\|_{\mathfrak{so}(2)^*} \\ &= H(q, p) \end{aligned}$$

donde $Ad_\theta^* = Id_{\mathfrak{so}(2)^*}$ pues $so(2)$ es abeliano.

El Hamiltoniano del sistema $H : T^*(\mathbb{R}^3 \times so(2)) \rightarrow \mathbb{R}$ está dado por

$$H(q, p, \theta, p_\theta) = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{\tilde{e}}{c} A(q, p) \cdot p,$$

siendo A una 1-forma que cumple que $\mathcal{B} = dA$, es decir $\mathcal{B} = \nabla \times A$ y $A = (A_1, A_2, A_3)$ y donde $q = (x, y, z)$, $p = (p_x, p_y, p_z)$. Consideremos

- i) $D_H = \{(q, p) \in T^*(\mathbb{R}^3 \times so(2)) : h(q) \geq 0\}$ con $h : \mathbb{R}^3 \times so(2) \rightarrow \mathbb{R}$, una función diferenciable dada por $h(x, y, z, \theta) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2$, $r \in \mathbb{R}^+$.
- ii) $\mathcal{S}_H = \{(q, p) \in T^*(\mathbb{R}^3 \times so(2)) : h(q) = 0\}$, es decir, el medio cascarón de la esfera que define h .
- iii) $R_H(q, p) : \mathcal{S}_H \rightarrow D_H$ dada por $R_H(q, p) = (q, P_q(p))$, donde $P_q(p)$ definida como en la Definición 4.2.10,

$$R_H(x, y, z, \theta, p_x, p_y, p_z, p_\theta) = \left(x, y, z, \theta, p_x - \hat{e} \frac{x^2 p_x}{r^2}, p_y - \hat{e} \frac{y^2 p_y}{r^2}, p_z - \hat{e} \frac{z^2 p_z}{r^2}, p_\theta - \hat{e} \frac{\theta^2 p_\theta}{r^2} \right)$$

donde $\hat{e} = 1 + e$ y $0 \leq e \leq 1$ es el coeficiente de restitución.

- iv) X_H el campo vectorial Hamiltoniano asociado a H .

Por lo tanto $(D_H, \mathcal{S}_H, R_H, X_H)$ es un sistema híbrido Hamiltoniano simple.

Sea $\Phi : so(2) \times (\mathbb{R}^3 \times so(2)) \rightarrow (\mathbb{R}^3 \times so(2))$ la acción $(\theta, q) \mapsto \theta \cdot q$ y su levantada al cotangente, la acción $\Phi^{T^*(\mathbb{R}^3 \times so(2))} : so(2) \times T^*(\mathbb{R}^3 \times so(2)) \rightarrow T^*(\mathbb{R}^3 \times so(2))$ dada por

$$(\tilde{\theta}, (q, p)) \mapsto (\tilde{\theta} \cdot (q, p, \theta, p_\theta)).$$

Donde q y p están definidos como antes, $q = (x, y, z)$ y $p = (p_x, p_y, p_z)$. $\Phi^{T^*(\mathbb{R}^3 \times so(2))}$ es una acción híbrida pues cumple que

$$\begin{aligned} & \Phi^{T^*(\mathbb{R}^3 \times so(2))} \circ R_H(q, p) \\ &= \Phi_\theta^{T^*(\mathbb{R}^3 \times so(2))} \left(q, p_x - \hat{e} \frac{x^2 p_x}{r^2}, p_y - \hat{e} \frac{y^2 p_y}{r^2}, p_z - \hat{e} \frac{z^2 p_z}{r^2}, p_\theta - \hat{e} \frac{\theta^2 p_\theta}{r^2} \right) \\ &= \left(\theta \cdot x, \theta \cdot y, \theta \cdot z, \theta \cdot \theta, p_x - \hat{e} \frac{x^2 p_x}{r^2}, p_y - \hat{e} \frac{y^2 p_y}{r^2}, p_z - \hat{e} \frac{z^2 p_z}{r^2}, p_\theta - \hat{e} \frac{\theta^2 p_\theta}{r^2} \right) \\ &= R_H \circ \Phi_\theta^{T^*(\mathbb{R}^3 \times so(2))} |_{\mathcal{S}_H}(q, p) \\ &= \left(\theta \cdot x, \theta \cdot y, \theta \cdot z, \theta \cdot \theta, p_x - \hat{e} \frac{x^2 p_x}{r^2}, p_y - \hat{e} \frac{y^2 p_y}{r^2}, p_z - \hat{e} \frac{z^2 p_z}{r^2}, p_\theta - \hat{e} \frac{\theta^2 p_\theta}{r^2} \right). \end{aligned}$$

Entonces se tiene que

$$R_H \circ \Phi^{T^*(\mathbb{R}^3 \times so(2))} |_{\mathcal{S}_H} = \Phi^{T^*(\mathbb{R}^3 \times so(2))} \circ R_H,$$

donde se cumple con ecuación (4.2.2) de la Definición 4.2.1.

Sea $J : T^*(\mathbb{R}^3 \times so(2)) \rightarrow \mathfrak{so}(2)^* \simeq \mathbb{R}$ una aplicación momento híbrida, ya que satisface la ecuación (4.2.23) de la Proposición 4.2.22. Dado $\mu \in \mathfrak{so}(2)^* \simeq \mathbb{R}$ un valor regular híbrido de J , es decir $J(q, p) = \mu$, consideramos la subvariedad $J^{-1}(\mu) \subset T^*(\mathbb{R}^3 \times so(2))$.

Aplicando la Proposición 4.2.33, el espacio reducido viene dado por $J^{-1}(\mu)/G_\mu \simeq T^*(Q/G) \times_{Q/G} Q/G_\mu = T^*\mathbb{R}^3 \times_{\mathbb{R}^3} \mathbb{R}^3$, donde $G_\mu = so(2)$ es el grupo de isotropía de μ . Por lo tanto, considerando

i) $H_\mu : T^*\mathbb{R}^3 \times_{\mathbb{R}^3} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ el Hamiltoniano reducido dado por

$$H_\mu(q, p) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{\tilde{e}}{c}\mu.$$

ii) $D_{H_\mu} = \{(q, p) \in T^*\mathbb{R}^3 \times_{\mathbb{R}^3} \mathbb{R}^3 : h(q) \geq 0\}$ con $h : Q \rightarrow \mathbb{R}$, una función diferenciable dada por $h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2$, donde $q = (x, y, z)$ y r es el radio de la esfera.

iii) \mathcal{S}_{H_μ} es una subvariedad de co-dimensión 1 de $T^*\mathbb{R}^3 \times_{\mathbb{R}^3} \mathbb{R}^3$, dada por $H(x, y, z) = 0$.

iv) $R_{H_\mu} : \mathcal{S}_{H_\mu} \rightarrow D_{H_\mu}$ es la función de impacto dada por $R_{H_\mu}(q, p) = (q, P_q(p))$, donde $P_q(p)$ definida como en la Definición 4.1.29 (pero sin dependencia de θ).

v) X_{H_μ} el campo vectorial Hamiltoniano para el Hamiltoniano reducido H_μ , donde las ecuaciones de movimiento vienen dadas por las ecuaciones de Lorenz que describen el movimiento de una partícula cargada con masa m en un campo magnético $\vec{B} = (B_1, B_2, B_3)$ y están dadas por

$$m\dot{p} = \frac{\tilde{e}}{c}(p \times \vec{B}) \quad (4.2.39)$$

$$\dot{\mu} = 0 \quad (4.2.40)$$

Por lo tanto, el sistema híbrido Hamiltoniano reducido es un sistema híbrido Hamiltoniano magnético.

Observación 4.2.41. Como podemos observar, el Hamiltoniano del ejemplo anterior, que está sujeto a un término magnético B , es exactamente el Hamiltoniano modificado del ejemplo de la partícula en un campo magnético tratado en Ejemplo 2.1.8.

Ejemplo 4.2.42. Heavy Top Híbrido

El sistema mecánico Heavy Top consiste en un cuerpo rígido con un punto fijo en su extremo inferior como se muestra en la Figura 4.5. El cuerpo rígido se mueve bajo la influencia de un campo gravitacional.

El espacio de configuraciones del sistema es $Q = SO(3)$. El espacio de fases, $T^*(SO(3))$, es difeomorfo a $SO(3) \times \mathbb{R}^3$ usando una trivialización a izquierda de

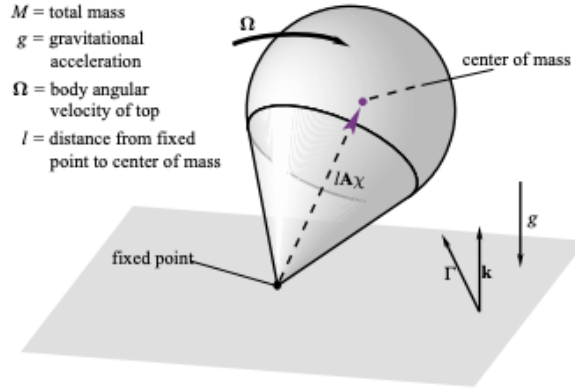


Figura 4.5: Heavy Top

$T^*(SO(3))$ (ver Sección 1.5). Bajo esta identificación la función Hamiltoniana que describe la dinámica del sistema $H : SO(3) \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ está dada por

$$H(A, \Pi) = \frac{1}{2} I_\epsilon^{-1} \Pi \cdot \Pi + MglA^{-1}k \cdot \chi$$

donde $I_\epsilon : \mathfrak{so}(3) \simeq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathfrak{so}^*(3) \simeq \mathbb{R}^3$ es el momento de inercia del cuerpo rígido perturbado con un parámetro $\epsilon \in \mathbb{R}$, dado por $I_\epsilon = (I_1 + \epsilon, I_2 + \epsilon, I_3 + \epsilon)$ donde $(I_1, I_2, I_3) \in \mathbb{R}^3$ es el momento de inercia del cuerpo rígido sin perturbación, M es la masa del cuerpo, Π es el momento angular ($\Pi = (\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3)$, $\Pi \in \mathfrak{so}^*(3) \simeq \mathbb{R}^3$), g es la constante gravitacional, $k \in \mathbb{R}^3$ un vector constante con la misma dirección que el eje z en \mathbb{R}^3 , χ un vector unitario que conecta el punto fijo en el extremo del cuerpo rígido con el centro de masa del cuerpo, l denota la longitud del segmento que va del punto fijo del cuerpo rígido al centro de masa del cuerpo rígido y $A \in SO(3)$. Aquí, “ \cdot ” : $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es el producto escalar usual en \mathbb{R}^3 .

Definimos el sistema híbrido Hamiltoniano asociado al Heavy Top de la siguiente manera. Consideremos

- i) $D_H = T^*(SO(3)) \simeq SO(3) \times \mathbb{R}^3$, el dominio,
- ii) $\mathcal{S}_H \subset SO(3) \times \mathbb{R}^3$ una subvariedad de D_H de codimensión 1, dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_H &= \{(A, \Pi) \in T^*(SO(3)) \simeq SO(3) \times \mathbb{R}^3 \mid \gamma = 0\} \\ &= \{(A, \Pi) \in SO(3) \times \mathbb{R}^3 \mid (A, \Pi) := (Id, \Pi)\} \end{aligned}$$

donde γ es uno de los ángulos de Euler (ver Sección 1.6 para más detalles), en particular γ es la rotación sobre el eje z denotada $R_z(\gamma)$, es decir, cuando $\gamma = 0$ se tiene

$$R_z(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

iii) $R_H : \mathcal{S}_H \rightarrow D_H$ viene dada por

$$(A^-, \Pi_1^-, \Pi_2^-, \Pi_3^-) \mapsto (\alpha^-, \beta^-, 0, \Pi_1^-, \Pi_2^-, \Pi_3^+)$$

donde α, β, γ corresponden a los ángulos de Euler para las rotaciones en los ejes x, y, z respectivamente y donde $\Pi_3^+ = (I_3 + \epsilon)\Omega_3$, siendo Ω_3 la velocidad angular alrededor del eje z ; que cumple

$$\begin{cases} \epsilon = -1, & \text{si } \Pi_3^- > 0, \\ \epsilon = 1, & \text{si } \Pi_3^- < 0, \\ \epsilon = 0, & \text{si } \Pi_3^- = 0. \end{cases}$$

Por lo tanto, cuando se impacta con la subvariedad \mathcal{S}_H se tiene:

$$\begin{cases} \text{si } \epsilon = -1, & R_H(\alpha^-, \gamma^-, \beta^-, \Pi_1^-, \Pi_2^-, \Pi_3^-) = (\alpha^-, \beta^-, 0, \Pi_1^-, \Pi_2^-, (I_3 - 1)\Omega_3), \\ \text{si } \epsilon = 1, & R_H(\alpha^-, \gamma^-, \beta^-, \Pi_1^-, \Pi_2^-, \Pi_3^-) = (\alpha^-, 0, \beta^-, \Pi_1^-, \Pi_2^-, (I_3 + 1)\Omega_3), \\ \text{si } \epsilon = 0, & R_H(\alpha^-, \gamma^-, \beta^-, \Pi_1^-, \Pi_2^-, \Pi_3^-) = (\alpha^-, 0, \beta^-, \Pi_1^-, \Pi_2^-, I_3\Omega_3). \end{cases}$$

iv) X_H es el campo Hamiltoniano para el Heavy Top y está dado por una transición de sistemas híbridos que irán evolucionando con respecto a la función de impacto hasta que $\gamma = 0$. Ahí, dependiendo si $\{\epsilon = -1, 1, 0\}$ tengo alguna de las tres opciones anteriores hasta que nuevamente $\gamma = 0$ y comienza un nuevo flujo para el campo Hamiltoniano. Las ecuaciones para el Heavy top con inercia perturbada vienen dadas por

$$\begin{cases} \dot{\Pi}_1 = \frac{I_2 - I_3}{(I_2 + \epsilon)(I_3 + \epsilon)} \Pi_2 \Pi_3 + Mgl(\Gamma^2 \chi^3 - \Gamma^3 \chi^2) \\ \dot{\Pi}_2 = \frac{I_3 - I_1}{(I_3 + \epsilon)(I_1 + \epsilon)} \Pi_3 \Pi_1 + Mgl(\Gamma^3 \chi^1 - \Gamma^1 \chi^3) \\ \dot{\Pi}_3 = \frac{I_1 - I_2}{(I_1 + \epsilon)(I_2 + \epsilon)} \Pi_1 \Pi_2 + Mgl(\Gamma^1 \chi^2 - \Gamma^2 \chi^1) \end{cases}$$

siendo $\Gamma = A^{-1}k$.

Consideremos $G = SO(2)$ (y al ser abeliano $G = G_\mu$) un subgrupo cerrado de $SO(3)$ cuya representación viene dada por

$$SO(2) = \left\{ A_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta & 0 \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{S}^1 \right\} \simeq \mathbb{S}^1$$

vía el difeomorfismo $A_\theta \mapsto e^{i\theta}$. Consideremos también que G actúa en $SO(3)$ por rotaciones en el eje vertical. La acción levantada a $SO(3) \times \mathbb{R}^3$ denotada por

$$\Phi^{T^*Q} : SO(2) \times (SO(3) \times \mathbb{R}^3) \rightarrow (SO(3) \times \mathbb{R}^3)$$

está dada por

$$\Phi^{T^*Q}(A_\theta, (A, \Pi)) = (A_\theta A, \Pi).$$

Φ^{T^*Q} es una acción libre, propia e híbrida, pues cumple con la Definición 4.2.1. Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2) \simeq \mathbb{R}$ el álgebra de Lie de G , donde $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{so}(2)^*$ denota su dual.

Tomemos $\kappa = e_3$ el vector canónico de la base estándar de \mathbb{R}^3 . Sea $\mu \in \mathfrak{so}(2)^*$, la aplicación momento

$$J : (SO(3) \times \mathbb{R}^3) \rightarrow \mathfrak{so}(2)^* \simeq \mathbb{R}$$

dada por $J(A, \Pi) = A\Pi \cdot e_3$. J es Ad^* -equivariante e híbrida pues cumple con la Ecuación (4.2.23) de la Definición 4.2.20. Además

$$J^{-1}(\mu) = \{(A, \Pi) \in (SO(3) \times \mathbb{R}^3) \mid A\Pi \cdot e_3 = \mu\}.$$

Notar que, para $\mu \in \mathbb{R}$, como $SO(2)$ es abeliano, el subgrupo de isotropía G_μ coincide con $SO(2)$.

Consideremos $\mathcal{A}_\mu : T(SO(3)) \rightarrow \mathbb{R}$ una conexión en el fibrado principal

$$\pi_{SO(3), G_\mu} : SO(3) \rightarrow (SO(3)/SO(2)) \simeq \mathbb{S}^2.$$

Luego de una trivialización a izquierda, la conexión trivializada $\tilde{\mathcal{A}}$ viene dada por $\tilde{\mathcal{A}} : SO(3) \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\tilde{\mathcal{A}}(A, v) = Av \cdot e_3$$

con $v \in \mathbb{R}^3$.

Consideremos la aplicación $SO(3) \rightarrow \mathbb{S}^2$ dada por $A \mapsto A^{-1} \cdot e_3$. Su proyección al tangente $\lambda : SO(3) \times \mathbb{R}^3 \rightarrow T\mathbb{S}^2$ está dada por

$$\lambda(A, v) = (A^{-1}e_3, A^{-1}e_3 \times v),$$

donde hemos identificado

$$T_s\mathbb{S}^2 \simeq \{b \in \mathbb{R}^3 \mid b \cdot s = 0\}.$$

Dado que $A^{-1}e_3 \cdot (A^{-1}e_3 \times v) = 0$, entonces $A^{-1}e_3 \times v \in T_{A^{-1}e_3}\mathbb{S}^2$.

Consideremos el difeomorfismo $[\phi_{\mathcal{A}_\mu}] : J^{-1}(\mu)/SO(2) \rightarrow T^*\mathbb{S}^2$ dada por

$$[A, \Pi] \mapsto (A^{-1}e_3, A^{-1}e_3 \times v).$$

Aquí hemos identificado $T_s^*\mathbb{S}^2$ con su propio dual y la métrica estándar de \mathbb{S}^2 .

Observar que usando la Proposición 4.2.33 podemos identificar $J^{-1}(\mu)/G_\mu$ con $T^*(Q/G) \times_{Q/G} Q/G_\mu$ es decir se tiene que $J^{-1}(\mu)/G_\mu \simeq T^*\mathbb{S}^2 \times_{\mathbb{S}^2} \mathbb{S}^2 \simeq T^*\mathbb{S}^2$.

Luego, por la Definición 4.2.36 $[\phi_{\mathcal{A}_\mu}]$ resultará un symplectomorfismo si $T^*\mathbb{S}^2$ está equipado con una 2-forma simpléctica en $T^*\mathbb{S}^2$ deformada por un término magnético B_μ asociado a \mathcal{A}_μ . Por construcción (ver ecuación (4.2.35)) B_μ está determinado por $\pi_{\mathbb{S}^2}^* \beta_\mu$ donde $\pi_{\mathbb{S}^2} : T^*\mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ es la proyección canónica y β_μ es la 2-forma en \mathbb{S}^2

caracterizada por $\pi_{SO(3),SO(2)}^* \beta_\mu = d\mathcal{A}_\mu$ y, por lo tanto, $\beta_\mu = -\mu\omega_{\mathbb{S}^2}$, donde $\omega_{\mathbb{S}^2}$ es la forma simpléctica de área en \mathbb{S}^2 , es decir,

$$\omega_{\mathbb{S}^2}(x)(u, v) = -x \cdot (u \times v), \forall x \in \mathbb{S}^2, u, v \in T_x\mathbb{S}^2 \subseteq T_x\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^3.$$

Mediante el simplectomorfismo $[\phi_{\mathcal{A}_\mu}]$ se tiene que $q = A^{-1}e_3 \in \mathbb{S}^2$, $p_q = A^{-1}e_3 \times \Pi \in T_{A^{-1}e_3}^*\mathbb{S}^2$. Además, también se tiene que $p_q = q \times \Pi$ y $q \cdot p_q = 0$.

Por lo tanto, obtenemos la forma simpléctica reducida en $T^*\mathbb{S}^2$ dada por $\Omega_{\mathbb{S}^2} + \mu\pi_{\mathbb{S}^2}^*(\omega_{\mathbb{S}^2})$, donde $\Omega_{\mathbb{S}^2}$ es la 2-forma simpléctica canónica en $T^*\mathbb{S}^2$. Entonces $[\phi_{\mathcal{A}_\mu}]$ resulta ser un simplectomorfismo.

Se tiene entonces que el sistema híbrido Hamiltoniano magnético asociado al Heavy Top híbrido viene dado por

- i) $D_{H_\mu} = T^*\mathbb{S}^2$ el dominio del Heavy Top híbrido reducido,
- ii) $\mathcal{S}_{H_\mu} \subset T^*\mathbb{S}^2$ una subvariedad de D_{H_μ} de codimensión 1, $\mathcal{S}_{H_\mu} = \mathcal{S}_H |_{(J|_{\mathcal{S}_H})^{-1}(\mu)}$. Usando que en \mathcal{S}_H , $A = Id$, se tiene que $J|_{\mathcal{S}_H}: \mathcal{S}_H \rightarrow \mathfrak{so}(2) \simeq \mathbb{R}$ viene dada por $J|_{\mathcal{S}_H}(A, \Pi) = \Pi \cdot e_3 = \Pi_3$. Por lo tanto

$$(J|_{\mathcal{S}_H})^{-1}(\mu) = \{(A, \Pi) \in SO(3) \times \mathbb{R}^3 \mid A = Id_{3 \times 3}, \Pi \cdot e_3 = \mu\}.$$

Entonces

$$\mathcal{S}_{H_\mu} = \{(q, p_q) \in T^*\mathbb{S}^2 \mid q = e_3, p_q = e_3 \times \Pi, \Pi \cdot e_3 = \mu\}.$$

- iii) $R_{H_\mu}: \mathcal{S}_{H_\mu} \rightarrow T^*\mathbb{S}^2$ viene dada por

$$R_{H_\mu}(q^-, p_q^-) = (q^+, p_q^+)$$

donde $q^+ = e_3 \in \mathbb{S}^2$ y $p_q^+ = (-\Pi_2, \Pi_1, 0)$.

- iv) El Hamiltoniano reducido $H_\mu: T^*\mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ está dado por

$$H_\mu(q, p_q) = \frac{1}{2}\Pi_\epsilon^{-1}(p_q \times q) \cdot (p_q \times q) + \mu\Pi_\epsilon^{-1}(q)(p_q \times q) + \frac{1}{2}\mu^2(\Pi_\epsilon^{-1}q) \cdot q + Mglq \cdot \chi$$

con $(p_q \times q) \in T^*\mathbb{S}^2$ satisfaciendo $q \in \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ y $q \cdot p_q = 0$.

Esta expresión se obtiene al considerar que $\mathbb{R}^3 = \text{span}\{q, p_q, q \times p_q\}$ y entonces $\Pi = \lambda_1 q + \lambda_2 p_q + \lambda_3 (q \times p_q)$. Resolviendo para $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, usando las relaciones $A\Pi \cdot e_3 = \mu$, $q = A^{-1}e_3$, $q \cdot p_q = 0$, $p_q = A^{-1}e_3 \times \Pi = q \times \Pi$, y calculando $q \cdot \Pi$, $p_q \cdot \Pi$ y $(q \times p_q) \cdot \Pi$ se obtienen $\lambda_1 = \mu$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$. Luego reemplazando Π en H se obtiene la fórmula para H_μ .

- v) $\Omega_{\mathbb{S}^2} + \mu\pi_{\mathbb{S}^2}^*(\omega_{\mathbb{S}^2})$ la 2-forma simpléctica en $T^*\mathbb{S}^2$ deformada por un término magnético.

vi) Para calcular el campo vectorial Hamiltoniano reducido, X_{H_μ} , suponemos por simplicidad en los cálculos que $\mu = 0$, pero sin embargo la metodología se puede aplicar a cualquier μ . Sin embargo, el campo de vectores X_{H_μ} y en particular, resolver para los multiplicadores de Lagrange, da lugar a expresiones muy trabajosas para hacer las cuentas a mano. Para obtener las correspondientes expresiones de las ecuaciones reducidas, se recomienda para $\mu \neq 0$ resolver el sistema resultante para los multiplicadores mediante cálculo simbólico en Maple o Matlab.

Por lo que la 2-forma simpléctica del espacio reducido $T^*\mathbb{S}^2$ es la 2-forma simpléctica canónica $\Omega_{\mathbb{S}^2}$.

Las ecuaciones definiendo $T^*\mathbb{S}^2$ como subvariedad de $T^*\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ son $\|q\|^2 - 1 = 0$ y $q \cdot p_q = 0$, por lo que el Hamiltoniano extendido tiene la forma

$$H_{ext}^0(q, p_q) = H_\mu(q, p_q) + \lambda(q \cdot p_q) + \nu(\|q\|^2 - 1)$$

donde λ y ν son los multiplicadores de Lagrange que debemos determinar.

Las ecuaciones de Hamilton para H_{ext}^0 vienen dadas por

$$\begin{aligned}\dot{q} &= q \times \Pi_\epsilon^{-1}(p_q \times q) + \lambda q + Mgl \cdot \chi \\ \dot{p}_q &= p_q \times \Pi_\epsilon^{-1}(p_q \times q) - \lambda p_q - 2\mu q\end{aligned}$$

con $(q, p_q) \in T^*\mathbb{S}^2$, $\Pi = A^{-1}e_3$.

Dado que $q \cdot \dot{q} = 0$ y $p_q \cdot \dot{q} + p_q \cdot q = 0$, entonces

$$\begin{aligned}\dot{q} &= q \times \Pi_\epsilon^{-1}(p_q \times q) + Mgl \cdot \chi \\ \dot{p}_q &= p_q \times \Pi_\epsilon^{-1}(p_q \times q).\end{aligned}$$

4.3. Reducción en Variedades de Poisson Híbridas

En esta sección presentamos la noción de variedades de Poisson híbridas para generalizar la reducción de Sistemas híbridos Hamiltonianos Simples de la Sección 4.2 a reducción híbrida de variedades de Poisson.

Definición 4.3.1. Una **Variedad de Poisson Híbrida** está caracterizada por una 4-upla $\mathcal{H}_{poiss} = (D, \mathcal{S}, R, \{\cdot, \cdot\})$ donde D es una variedad diferenciable, el *dominio*, \mathcal{S} es una subvariedad embebida de D de codimensión 1, la *superficie de impacto*, $R: \mathcal{S} \rightarrow D$ una aplicación diferenciable, la *función de impacto* y $\{\cdot, \cdot\}$ es un corchete de Poisson en D , definido como en la Sección 2.3.1.

Aquí, la dinámica asociada con una Variedad de Poisson Híbrida está descrita por un sistema no-autónomo con un impacto instantáneo. Denotamos por $\Sigma_{\mathcal{H}_{poiss}}$

la dinámica de la Variedad de Poisson Híbrida generada por \mathcal{H}_{poiss} , de la siguiente manera:

$$\Sigma_{\mathcal{H}_{poiss}} = \begin{cases} \dot{x}(t) = \{x(t), H\}, & x^-(t) \notin \mathcal{S} \\ x^+(t) = R(x^-(t)), & x^-(t) \in \mathcal{S} \end{cases}$$

donde $x : I \subset \mathbb{R} \rightarrow D$ y x^- , x^+ denotan los estados inmediatos antes y después de que la curva integral asociada a la dinámica continua intersecte a \mathcal{S} .

Definición 4.3.2. Sea $\mathcal{H}_{poiss} = (D, \mathcal{S}, R, \{\cdot, \cdot\})$ una variedad de Poisson híbrida. Consideramos una acción $\Phi : G \times D \rightarrow D$ de un grupo de Lie G en el dominio D . Φ es una **acción de Poisson híbrida** si $\Phi|_{\mathcal{S}}$ es una acción híbrida de G en \mathcal{S} y para todo $g \in G$ que cumple que $\forall F, G \in \mathcal{F}^0(D)$

$$\{F, G\} \circ \Phi_g = \{F \circ \Phi_g, G \circ \Phi_g\}$$

y además $\forall M, N \in \mathcal{F}^0(\mathcal{S})$

$$\{M, N\} \circ \Phi_g|_{\mathcal{S}} = \{M \circ \Phi_g|_{\mathcal{S}}, N \circ \Phi_g|_{\mathcal{S}}\}.$$

Observación 4.3.3. Notar que la definición 4.3.2 significa que para todo $g \in G$ tenemos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \xrightarrow{R} & D \\ \Phi_g|_{\mathcal{S}} \downarrow & & \downarrow \Phi_g \\ \mathcal{S} & \xrightarrow{R} & D \end{array}$$

En otras palabras, R es equivariante con respecto a las acciones Φ y $\Phi|_{\mathcal{S}}$.

Definición 4.3.4. Decimos que Φ es una acción de Poisson híbrida **libre y propia**, si Φ es una acción libre, propia e híbrida.

Definición 4.3.5. Dada una variedad de Poisson híbrida $\mathcal{H}_{poiss} = (D, \mathcal{S}, R, \{\cdot, \cdot\})$ definida como en 4.3.1, un grupo de Lie G y una acción de Poisson híbrida Φ , definimos el **espacio de órbitas híbridas** asociado a la acción de Poisson como

$$D^{\mathcal{H}_{poiss}}/G = (D/G, \mathcal{S}/G, \hat{R})$$

donde D/G y \mathcal{S}/G son los espacios de órbitas obtenidas mediante Φ y $\Phi|_{\mathcal{S}}$, respectivamente, y $\hat{R} : \mathcal{S}/G \rightarrow D/G$ es la función de impacto inducida en el espacio de órbitas. Es decir, si $\pi : D \rightarrow D/G$ está dada por $\pi(x) = [x] \in D/G$ (la aplicación que envía x en la Φ -órbita de x , es decir, $x \sim \Phi_g(x)$ para todo $g \in G$, siendo \sim la relación de equivalencia de x); y $\hat{R}([x]) = [R(x)] = \pi(R(x))$.

Teorema 4.3.6. Sea G un grupo de Lie y Φ una acción de Poisson híbrida que actúa en una variedad de Poisson híbrida \mathcal{H}_{poiss} . Supongamos que D/G y \mathcal{S}/G son variedades diferenciables y $\pi : D \rightarrow D/G$ y $\pi|_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}/G$ son submersiones, de

D/G y \mathcal{S}/G respectivamente. Entonces hay un único corchete de Poisson $\{\cdot, \cdot\}_{red}$ en D/G llamado corchete de Poisson reducido, tal que

$$\{F, K\}_{red} \circ \pi := \{F \circ \pi, K \circ \pi\} \quad (4.3.7)$$

y además

$$\{M, N\}_{red} \circ \pi|_{\mathcal{S}} := \{M \circ \pi|_{\mathcal{S}}, N \circ \pi|_{\mathcal{S}}\} \quad (4.3.8)$$

para todo $F, K \in \mathcal{F}^0(D/G)$ y todo $M, N \in \mathcal{F}^0(\mathcal{S}/G)$ de manera que

$$\hat{\mathcal{H}}_{poiss} = (D/G, \mathcal{S}/G, \hat{R}, \{\cdot, \cdot\}_{red})$$

es una variedad de Poisson híbrida.

Demostración. Para cada $F, K \in \mathcal{F}^0(D/G)$ y $g \in G$ como Φ es una acción de Poisson híbrida y π es G -invariante, se tiene que

$$\{F \circ \pi, K \circ \pi\} \circ \Phi_g = \{F \circ \pi \circ \Phi_g, K \circ \pi \circ \Phi_g\} = \{F \circ \pi, K \circ \pi\}$$

por lo tanto $\{F \circ \pi, K \circ \pi\}$ es G -invariante.

Para cada $M, N \in \mathcal{F}^0(\mathcal{S}/G)$ y $g \in G$ como Φ es una acción de Poisson híbrida y $\pi|_{\mathcal{S}}$ es G -invariante, se tiene que

$$\{M \circ \pi|_{\mathcal{S}}, N \circ \pi|_{\mathcal{S}}\} \circ \Phi_g = \{M \circ \pi|_{\mathcal{S}} \circ \Phi_g, N \circ \pi|_{\mathcal{S}} \circ \Phi_g\} = \{M \circ \pi|_{\mathcal{S}}, N \circ \pi|_{\mathcal{S}}\}$$

entonces $\{M \circ \pi|_{\mathcal{S}}, N \circ \pi|_{\mathcal{S}}\}$ es G -invariante.

Las funciones $\{F \circ \pi, K \circ \pi\}$ y $\{M \circ \pi|_{\mathcal{S}}, N \circ \pi|_{\mathcal{S}}\}$ pueden ser expresadas como $\varphi \circ \pi$ y $\varphi|_{\mathcal{S}} \circ \pi|_{\mathcal{S}}$ respectivamente, para $\varphi \in \mathcal{F}^0(D/G)$ y $\varphi|_{\mathcal{S}} \in \mathcal{F}^0(\mathcal{S}/G)$. Denotamos $\varphi = \{F, K\}_{red}$, que define un corchete de Poisson $\{\cdot, \cdot\}_{red}$ en D/G , que cumpliendo con las ecuaciones (4.3.7) y (4.3.8). Notar que $\{\cdot, \cdot\}_{red}$ es el único corchete de Poisson en D/G definido por π . Entonces $(D/G, \mathcal{S}/G, \hat{R}, \{\cdot, \cdot\}_{red})$ es una variedad de Poisson híbrida. \square

Definición 4.3.9. Si $H : D \rightarrow \mathbb{R}$ es una función G -invariante en D , entonces definimos la **función reducida** $H_{red} : D/G \rightarrow \mathbb{R}$ en D/G que está unívocamente determinada por la relación

$$H_{red} \circ \pi = H$$

Proposición 4.3.10. Con \mathcal{H}_{poiss} y $\hat{\mathcal{H}}_{poiss}$ como en el Teorema 4.3.6, si $\chi^{\mathcal{H}_{poiss}}(x_0)$ es el flujo híbrido de \mathcal{H}_{poiss} con $x_0 \in D$, entonces el flujo híbrido $\chi^{\hat{\mathcal{H}}_{poiss}}$ asociado a la variedad híbrida de Poisson reducida $\hat{\mathcal{H}}_{poiss}$ está dado por

$$\chi^{\hat{\mathcal{H}}_{poiss}}(\pi(x_0)) = (\Lambda, \mathcal{J}, \pi(\mathcal{C}))$$

donde $\pi(\mathcal{C}) := \{\pi(c_i) : c_i \in \mathcal{C}\}$ y $\mathcal{C}, \Lambda, \mathcal{J}$ como en la Definición 4.1.6.

Demostración. Sea $c_i^{red}(t) = \pi|_{\mathcal{S}}(c_i(t))$. Tenemos que probar que $c_i^{red}(\tau_{i+1}) \in \mathcal{S}/G$ y que $\hat{R}(c_i^{red}(\tau_{i+1})) = c_{i+1}^{red}(\tau_{i+1})$:

- i) $c_i^{red}(\tau_{i+1}) = \pi|_{\mathcal{S}}(c_i(\tau_{i+1}))$ y dado que $c_i(\tau_{i+1}) \in \mathcal{S}$ entonces $c_i^{red}(\tau_{i+1}) \in \mathcal{S}/G$.
- ii) $\hat{R}(c_i^{red}(\tau_{i+1})) = \hat{R}(\pi|_{\mathcal{S}}(c_i(\tau_{i+1}))) = \pi(R(c_i(\tau_{i+1}))) = \pi(c_{i+1}(\tau_{i+1})) = c_{i+1}^{red}(\tau_{i+1})$.

□

Observación 4.3.11. Sea $\mathcal{H}_{poiss} = (D, \mathcal{S}, R, \{\cdot, \cdot\})$ una variedad de Poisson híbrida, y $J : D \rightarrow \mathfrak{g}^*$ una aplicación momento Ad^* -equivariante híbrida para la acción de un grupo de Lie G . Sea μ un valor regular híbrido de J . Si D es simpléctica, la estructura de Poisson en $J^{-1}(\mu)/G_\mu$ es la estructura simpléctica reducida ω_μ .

Ejemplo 4.3.12. Consideremos el péndulo esférico invertido que tratamos anteriormente en el Ejemplo 4.2.31. Recordamos que el espacio de configuraciones es $Q = \mathbb{S}^2$ y, usando coordenadas locales, denotamos un elemento $q \in \mathbb{S}^2$ por $q = (\theta, \varphi)$. El momento asociado a q es denotado por $p \in T_q^*\mathbb{S}^2$ descrito en coordenadas por $p = (p_\theta, p_\varphi)$.

El Hamiltoniano del sistema $H : T^*\mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ está dado por

$$H(\theta, \varphi, p_\theta, p_\varphi) = \frac{1}{2mR^2} \left(p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2(\theta)} \right) - mgR \cos(\theta).$$

Consideremos el corchete de Poisson para éste sistema $\{\cdot, \cdot\}_{\mathbb{S}^2} : \mathcal{F}^0(\mathbb{S}^2) \times \mathcal{F}^0(\mathbb{S}^2) \rightarrow \mathcal{F}^0(\mathbb{S}^2)$ dado por

$$\{f, g\}_{\mathbb{S}^2} = \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial g}{\partial p_\theta} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{\partial g}{\partial p_\varphi} - \frac{\partial f}{\partial p_\theta} \frac{\partial g}{\partial \theta} - \frac{\partial f}{\partial p_\varphi} \frac{\partial g}{\partial \varphi}$$

Por lo que $\mathcal{H}_{poiss} = (D, \mathcal{S}, R, \{\cdot, \cdot\}_{\mathbb{S}^2})$ es un variedad de Poisson híbrida, para $D = D_H$, $\mathcal{S} = \mathcal{S}_H$ y $R = R_H$ definidas como en el Ejemplo 4.2.31.

Utilizando el corchete de Poisson y recordando que $\dot{q} = \{q, H\}$ y que $\dot{p} = \{p, H\}$, obtenemos las ecuaciones de Hamilton que están dadas por

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \{\theta, H\} = \frac{p_\theta}{mR^2}, \\ \dot{\varphi} &= \{\varphi, H\} = \frac{p_\varphi}{mR^2 \sin^2 \theta}, \\ \dot{p}_\theta &= \{p_\theta, H\} = \frac{p_\varphi^2 \cos \theta}{mR^2 \sin^3 \theta} - mgR \sin \theta, \\ \dot{p}_\varphi &= \{p_\varphi, H\} = 0. \end{aligned}$$

Sea $G = \mathbb{S}^1$ actuando por rotaciones en el eje vertical, es decir, $\Phi : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ es la acción dada por

$$\Phi(\psi, (\theta, \varphi)) = (\theta, \varphi + \psi)$$

y su acción levantada al cotangente $T^*\mathbb{S}^2$, es decir $\Phi^{T^*\mathbb{S}^2} : \mathbb{S}^1 \times T^*\mathbb{S}^2 \rightarrow T^*\mathbb{S}^2$ dada por

$$\Phi^{T^*\mathbb{S}^2}(\psi, (\theta, \varphi, p_\theta, p_\varphi)) = (\theta, \varphi + \psi, p_\theta, p_\varphi).$$

Veamos que la acción es Poisson híbrida, es decir que cumple que

$$\{f, g\}_{\mathbb{S}^2} \circ \Phi^{T^*\mathbb{S}^2} = \{f \circ \Phi^{T^*\mathbb{S}^2}, g \circ \Phi^{T^*\mathbb{S}^2}\}_{\mathbb{S}^2}, \quad (4.3.13)$$

para funciones $f, g : T^*\mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Para ello, consideremos las funciones coordenadas $F_1(\theta, \varphi, p_\theta, p_\varphi) = \theta$, $F_2(\theta, \varphi, p_\theta, p_\varphi) = \varphi$, $F_3(\theta, \varphi, p_\theta, p_\varphi) = p_\theta$ y $F_4(\theta, \varphi, p_\theta, p_\varphi) = p_\varphi$. Luego, calculando el lado izquierdo de la igualdad (4.3.13) se tiene

$\{\cdot, \cdot\}_{\mathbb{S}^2}$	θ	φ	p_θ	p_φ
θ	0	0	1	0
φ	0	0	0	1
p_θ	-1	0	0	0
p_φ	0	-1	0	0

Es decir,

$$\{f, g\}_{\mathbb{S}^2} \circ \Phi^{T^*\mathbb{S}^2} = \begin{cases} 1, & \text{si } f = \theta \text{ y } g = p_\theta \text{ o sí } f = \varphi \text{ y } g = p_\varphi \\ -1, & \text{si } f = p_\theta \text{ y } g = \theta \text{ o sí } f = p_\varphi \text{ y } g = \varphi \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Calculemos ahora el lado derecho de la igualdad (4.3.13)

$\{\cdot, \cdot\}_{\mathbb{S}^2}$	$\theta \circ \Phi^{T^*\mathbb{S}^2}$	$\varphi \circ \Phi^{T^*\mathbb{S}^2}$	$p_\theta \circ \Phi^{T^*\mathbb{S}^2}$	$p_\varphi \circ \Phi^{T^*\mathbb{S}^2}$
$\theta \circ \Phi^{T^*\mathbb{S}^2}$	0	0	1	0
$\varphi \circ \Phi^{T^*\mathbb{S}^2}$	0	0	0	1
$p_\theta \circ \Phi^{T^*\mathbb{S}^2}$	-1	0	0	0
$p_\varphi \circ \Phi^{T^*\mathbb{S}^2}$	0	-1	0	0

que, como puede observarse, da exactamente lo mismo que en el caso anterior. Por lo que la acción es Poisson híbrida. Calculemos ahora la variedad de Poisson híbrida reducida. Sea $D/G = T^*\mathbb{S}^2/\mathbb{S}^1 \approx T^*(\mathbb{S}^2/\mathbb{Z}^1)$, donde $\mathbb{S}^2/\mathbb{Z}^1 \simeq (0, 2\pi)$. El Hamiltoniano reducido $H_{red} : T^*\mathbb{S}^2/\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ se obtiene como

$$H_{red}(\theta, p_\theta, p_\varphi) = H(\theta, \varphi, p_\theta, p_\varphi) \circ \pi(\theta, \varphi, p_\theta, p_\varphi),$$

y está dado por

$$H_{red}(\theta, p_\theta, p_\varphi) = \frac{1}{2mR^2} \left(p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2(\theta)} \right) - mgR \cos(\theta),$$

donde $\pi : T^*\mathbb{S}^2 \rightarrow T^*\mathbb{S}^2/\mathbb{S}^1$ es la proyección dada por

$$\pi(\theta, \varphi, p_\theta, p_\varphi) = (\theta, p_\theta, p_\varphi).$$

El corchete de Poisson reducido está dado por

$$\{f, g\}_{red} = \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial g}{\partial p_\theta} - \frac{\partial f}{\partial p_\theta} \frac{\partial g}{\partial \theta} - \frac{\partial f}{\partial p_\varphi} \frac{\partial g}{\partial \varphi}$$

Entonces, utilizando el corchete de Poisson reducido, podemos obtener las ecuaciones de Hamilton reducidas que están dadas por

$$\dot{\theta} = \{\theta, H_{red}\} = \frac{p_\theta}{mR^2} \quad (4.3.14)$$

$$\dot{p}_\theta = \{p_\theta, H_{red}\} = \frac{p_\varphi^2 \cos \theta}{mR^2 \sin^3 \theta} - mgR \sin \theta \quad (4.3.15)$$

$$\dot{p}_\varphi = \{p_\varphi, H_{red}\} = 0. \quad (4.3.16)$$

Por lo que $\hat{\mathcal{H}}_{poiss} = (D/G, \mathcal{S}/G, \hat{R}, \{\cdot, \cdot\}_{red})$ es la variedad de Poisson híbrida reducida, para

- i) $D/G = \{(\theta, 0, p_\theta, p_\varphi) \in T^*\mathbb{S}^2/\mathbb{S}^1 : \cos(\theta) \geq 0\}$,
- ii) $\mathcal{S}/G = \{(\theta, 0, p_\theta, p_\varphi) \in T^*\mathbb{S}^2/\mathbb{S}^1 : \cos(\theta) = 0 \text{ y } p_\theta \geq 0\}$,
- iii) $\hat{R}(\theta, 0, p_\theta, p_\varphi) = (\theta, -ep_\theta)$

Observación 4.3.17. Notar que, de la ecuación (4.3.16), como $\dot{p}_\varphi = 0$ se tiene que $p_\varphi = \mu = cte$ y sustituyendo en ecuación (4.3.15) se obtienen exactamente las ecuaciones reducidas del Ejemplo 4.2.31.

4.4. Reducción de Routh para Sistemas Híbridos Lagrangianos

En esta sección vamos a generalizar la reducción de Routh conocida a este tipo de sistemas híbridos. Consideraremos para ello las distintas situaciones: $Q = P \times G$ (con G abeliano y no abeliano y P una variedad arbitraria) y para Q una variedad arbitraria.

4.4.1. Reducción clásica de Routh para Sistemas Híbridos Lagrangianos

En esta sección recordaremos las nociones básicas para la Reducción de Routh en sistemas híbridos Lagrangianos simples considerando $Q = P \times G$, siendo G un grupo abeliano, como se describe en [4].

Definición 4.4.1. Un **Lagrangiano híbrido cíclico** es un lagrangiano híbrido $\mathbf{L} = (Q, L, h)$, donde L y h son cíclicas; es decir, si $(\theta, \varphi) \in P \times G$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad y \quad \frac{\partial h}{\partial \varphi} = 0$$

Definición 4.4.2. Para un Lagrangiano híbrido cíclico, $\mathbf{L} = (P \times G, L, h)$, podemos obtener una función de impacto reducida $h_\mu : P \rightarrow \mathbb{R}$. Definimos el **Routhiano Híbrido** por

$$\mathbf{L}_\mu = (P, L_\mu, h_\mu),$$

que es a su vez un Lagrangiano híbrido.

Definición 4.4.3. Dado un Lagrangiano $L : T(P \times G) \rightarrow \mathbb{R}$ que es cíclico, el **Routhiano** $L_\mu : TP \rightarrow \mathbb{R}$ está dado por

$$L_\mu(\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) = [L(\theta, \dot{\theta}) - \mu^T \dot{\varphi}] \Big|_{J_L^{-1}(\mu)}$$

donde μ es el valor regular híbrido definido en Definición 4.2.25 pero para el Lagrangiano L y $J_L : TQ \rightarrow \mathfrak{g}^*$ una aplicación momento Lagrangiana Ad^* -equivariante híbrida cumpliendo las propiedades de la Proposición 4.2.22.

Definición 4.4.4. En un sistema híbrido Lagrangiano simple el **impacto** puede venir dado por la ecuación de impacto Newtoniana $\bar{P} : T(P \times G) \rightarrow T(P \times G)$ dada por

$$\bar{P}(q, \dot{q}) = \dot{q} - (1 + e) \frac{dh_q \dot{q}}{dh_q M(q)^{-1} dh_q^T} M(q)^{-1} dh_q^T \quad (4.4.5)$$

donde $M(q)$ es la matriz de masa del sistema.

Lema 4.4.6 (A. Ames [4]). *Dado $\bar{P}(q, \dot{q})$ como en la Ecuación (4.4.5), $P_\mu(\theta, \dot{\theta})$ está dada por*

$$\bar{P}_\mu(\theta, \dot{\theta}) = \dot{\theta} - (1 + e) \frac{d(h_\mu)_\theta \dot{\theta}}{d(h_\mu)_\theta M_\mu(\theta)^{-1} d(h_\mu)_\theta^T} M_\mu(\theta)^{-1} d(h_\mu)_\theta^T \quad (4.4.7)$$

siendo $M_\mu(\theta) = M_\theta(\theta) - M_{\varphi, \theta}^T(\theta) M_\varphi^{-1}(\theta) M_{\varphi, \theta}(\theta)$.

Definición 4.4.8. Para el Routhiano Híbrido L_μ el **sistema híbrido Routhiano** asociado está dado por

$$\mathcal{H}_\mu = (D_{\mathbf{L}_\mu}, \mathcal{S}_{\mathbf{L}_\mu}, R_{\mathbf{L}_\mu}, X_{\mathbf{L}_\mu})$$

con $D_{\mathbf{L}_\mu} = TP$ el dominio reducido, $\mathcal{S}_{\mathbf{L}_\mu} \subset TP$ una subvariedad de TP de codimensión 1, $X_{\mathbf{L}_\mu}$ el campo vectorial Routhiano usual asociado al Routhiano L_μ y $R_{\mathbf{L}_\mu} : \mathcal{S}_{\mathbf{L}_\mu} \rightarrow TP$ dada por $R_{\mathbf{L}_\mu}(\theta, \dot{\theta}) = (\theta, \bar{P}_\mu(\theta, \dot{\theta}))$, para $\bar{P}_\mu(\theta, \dot{\theta})$ la función de impacto definida como en la Ecuación (4.4.7).

Proposición 4.4.9 (A. Ames [4]). *Si \mathbf{L} es cíclico, entonces el siguiente diagrama conmuta $\forall \mu \in \mathfrak{g}^*$*

$$\begin{array}{ccc} J_L^{-1}(\mu)|_{\mathcal{S}_L} & \xrightarrow{R_{\mathbf{L}}|_{J_L^{-1}(\mu)|_{\mathcal{S}_L}}} & J_L^{-1}(\mu)|_{D_L} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathcal{S}_{\mathbf{L}\mu} & \xrightarrow{R_{\mathbf{L}\mu}} & D_{\mathbf{L}\mu} \end{array}$$

donde $\pi : TQ \rightarrow TP$ es la proyección al primer factor de $TP \times TG$.

Teorema 4.4.10 (A. Ames [4]). *Sea \mathbf{L} un Lagrangiano híbrido, \mathbf{L}_μ el Routhiano híbrido asociado, con \mathcal{H} y \mathcal{H}_μ , sus sistemas híbridos Lagrangianos asociados respectivamente. Si $\chi^{\mathcal{H}}(x_0) = (\Lambda, \mathcal{J}, \mathcal{C})$ es un flujo híbrido de \mathcal{H} con $x_0 \in J_L^{-1}(\mu)$, entonces*

$$\chi^{\mathcal{H}_\mu}(\pi(x_0)) = (\Lambda, \mathcal{J}, \pi(\mathcal{C}))$$

es un flujo híbrido de \mathcal{H}_μ , donde $\pi(\mathcal{C}) = \{\pi(c_i) : c_i \in \mathcal{C}\}$.

4.4.2. Ejemplos

Ejemplo 4.4.11. Péndulo Esférico

Consideremos el Ejemplo del péndulo esférico invertido tratado en el Ejemplo 4.2.31. El espacio de configuraciones es $Q_P = \mathbb{S}^2$ y, usando coordenadas locales, denotamos un elemento $q \in \mathbb{S}^2$ por $q = (\theta, \varphi)$. La velocidad asociada a q es denotada por $\dot{q} \in T_q\mathbb{S}^2$ descrito en coordenadas locales por $\dot{q} = (\dot{\theta}, \dot{\varphi})$. El Lagrangiano del sistema $L_P : T\mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ está dado por

$$L_P(\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) = \frac{mR^2}{2} \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2(\theta) \right) + mgR \cos(\theta).$$

Consideramos, $h_P(\theta, \varphi) = R \cos(\theta)$ como en el Ejemplo 4.2.31. Se tiene entonces el Lagrangiano híbrido dado por $\mathbf{L} = (Q_P, L_P, h_P)$. Para este Lagrangiano híbrido, el sistema híbrido Lagrangiano simple $\mathcal{H}_{\mathbf{L}}$ está dado por $\mathcal{H}_{\mathbf{L}} = (D_{\mathbf{L}}, \mathcal{S}_{\mathbf{L}}, R_{\mathbf{L}}, X_{\mathbf{L}})$ donde

- i) $D_{\mathbf{L}} = \{(\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) \in T\mathbb{S}^2 : \cos(\theta) \geq 0\}$ es el dominio, donde el ángulo θ se mueve en el eje horizontal positivo,
- ii) $\mathcal{S}_{\mathbf{L}} = \{(\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) \in T\mathbb{S}^2 : \cos(\theta) = 0 \text{ y } \dot{\theta} \geq 0\}$,
- iii) $R_{\mathbf{L}}(\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) = (\theta, \varphi, -e\dot{\theta}, \dot{\varphi})$, donde $0 \leq e \leq 1$ es el coeficiente de restitución,
- iv) El campo vectorial Lagrangiano $X_{\mathbf{L}}$ está dado por

$$X_{\mathbf{L}}(\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) = \left(\dot{\theta} \quad \dot{\varphi} \quad \frac{R \sin(\theta) \dot{\varphi}^2 \cos(\theta) - g \sin(\theta)}{R} \quad 0 \right)^T.$$

Notar que, L_P es cíclica respecto de φ , pues $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$ y además h_P también lo es. Sea

$$J_L(\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mR^2 \sin^2(\theta) \dot{\varphi}.$$

Tomando $J_L(\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) = \mu$, se tiene que $\dot{\varphi} = \frac{\mu}{mR^2 \sin^2(\theta)}$. Calculemos ahora el sistema híbrido reducido. El Routhiano, $L_{P_\mu} : T(\mathbb{S}^1/\mathbb{Z}^2) \rightarrow \mathbb{R}$ está dado por:

$$L_{P_\mu}(\theta, \dot{\theta}) = \frac{mR^2}{2} \left(\dot{\theta}^2 + \frac{\mu^2 \sin^2(\theta)}{m^2 R^4 \sin^4(\theta)} \right) + mgR \cos(\theta) - \frac{\mu^2}{mR^2 \sin^2(\theta)}.$$

Operando, se obtiene que L_{P_μ} tiene la siguiente expresión

$$L_{P_\mu}(\theta, \dot{\theta}) = \frac{mR^2}{2} \dot{\theta}^2 + mgR \cos(\theta) - \frac{\mu^2}{2mR^2 \sin^2(\theta)}.$$

Además $h_{P_\mu}(\theta) = h_P(\theta, \mu) = R \cos(\theta)$. El sistema híbrido Routhiano para el péndulo esférico reducido es descrito por

- i) $D_{\mathbf{L}_\mu} = \{(\theta, \dot{\theta}) \in T(Q_{P_\mu}) : \cos(\theta) \geq 0\}$,
- ii) $\mathcal{S}_{\mathbf{L}_\mu} = \{(\theta, \dot{\theta}) \in T(Q_{P_\mu}) : \cos(\theta) = 0 \text{ y } \dot{\theta} \geq 0\}$,
- iii) $R_{\mathbf{L}_\mu}(\theta, \dot{\theta}) = (\theta, -ep_\theta)$
- iv)

$$X_{\mathbf{L}_\mu}(\theta, \dot{\theta}) = \left(\dot{\theta} \quad \frac{\mu^2 \cos(\theta)}{m^2 R^4 \sin^3(\theta)} - \frac{g}{R} \sin(\theta) \right)^T.$$

Por lo tanto, se tiene que el sistema híbrido Lagrangiano reducido asociado al péndulo esférico está dado por $\mathcal{H}_{\mathbf{L}_\mu} = (D_{\mathbf{L}_\mu}, \mathcal{S}_{\mathbf{L}_\mu}, R_{\mathbf{L}_\mu}, X_{\mathbf{L}_\mu})$ donde los elementos $\mathcal{H}_{\mathbf{L}_\mu}$ están caracterizados por (i)-(iv).

Ejemplo 4.4.12. Pelota que rebota en una superficie sinusoidal

Consideremos el Ejemplo de la pelota que rebota en una superficie sinusoidal tratado en el Ejemplo 4.2.32. Sea $Q_B = \mathbb{R}^3$, y consideremos el Lagrangiano $L_B : T\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$L_B(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - mgx_3$$

donde g es la constante gravitacional. Como en el Ejemplo 4.2.32 $h_B(x_1, x_2, x_3) = x_3 - \sin x_2$. Se tiene entonces el Lagrangiano híbrido $\mathbf{L} = (Q_B, L_B, h_B)$. Para este Lagrangiano híbrido, el sistema híbrido Lagrangiano simple $\mathcal{H}_{\mathbf{L}}$ está dado por $\mathcal{H}_{\mathbf{L}} = (D_{\mathbf{L}}, \mathcal{S}_{\mathbf{L}}, R_{\mathbf{L}}, X_{\mathbf{L}})$ donde

- i) $D_{\mathbf{L}} = \{(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 : x_3 - \text{sen } x_2 \geq 0\}$ es el dominio,
 ii) $\mathcal{S}_{\mathbf{L}} = \{(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 : x_3 = \text{sen } x_2 \text{ y } \dot{x}_3 - \cos x_2 \dot{x}_2 \leq 0\}$,
 iii) $R_{\mathbf{L}}(x, \dot{x}) = (x, P_{\mathbf{L}}(x, \dot{x}))$ donde

$$P_{\mathbf{L}}(x, \dot{x}) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \frac{(1-e \cos^2(x_2))\dot{x}_2 + (1+e) \cos x_2 \dot{x}_3}{1+\cos^2 x_2} \\ \frac{(1+e) \cos^2(x_2)\dot{x}_2 + (-e+\cos^2 x_2)\dot{x}_3}{1+\cos^2 x_2} \end{pmatrix}$$

con $0 \leq e \leq 1$ es el coeficiente de restitución,

- iv) y el campo vectorial Lagrangiano $X_{\mathbf{L}}$ está dado por

$$X_{\mathbf{L}}(x, \dot{x}) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 & \dot{x}_2 & \dot{x}_3 & 0 & 0 & -g \end{pmatrix}^T.$$

Notar que, L_B es cíclica con respecto a x_1 pues $\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0$ y además $\frac{\partial h}{\partial x_1} = 0$. Entonces sea

$$J_L(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m\dot{x}_1.$$

Tomando $J_L(x, \dot{x}) = \mu$, se tiene que $\dot{x}_1 = \frac{\mu}{m}$. Calculemos ahora el sistema híbrido reducido.

El Routhiano: $L_{\mu} : T(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$ está dado por

$$L_{\mu}(x_2, x_3, \dot{x}_2, \dot{x}_3) = \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_3^2 - mgx_3 - \frac{\mu^2}{m}.$$

Además $h_{L_{\mu}}(x_2, x_3) = h_B(\mu, x_2, x_3) = x_3 - \text{sen } x_2$. El sistema híbrido Routhiano para la pelota que rebota en la superficie sinusoidal es descrito por

- i) $D_{\mathbf{L}_{\mu}} = \{(x_2, x_3, \dot{x}_2, \dot{x}_3) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : x_3 - \text{sen } x_2 \geq 0\}$,
 ii) $\mathcal{S}_{\mathbf{L}_{\mu}} = \{(x_2, x_3, \dot{x}_2, \dot{x}_3) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : x_3 = \text{sen } x_2 \text{ y } \dot{x}_3 - \cos x_2 \dot{x}_2 \leq 0\}$,
 iii) $R_{\mathbf{L}_{\mu}}(x_2, x_3, \dot{x}_2, \dot{x}_3) = (x_2, x_3, P_{L_{\mu}}(x_2, x_3, \dot{x}_2, \dot{x}_3))$ donde

$$P_{L_{\mu}}(x_2, x_3, \dot{x}_2, \dot{x}_3) = \begin{pmatrix} \frac{(1-e \cos^2(x_2))\dot{x}_2 + (1+e) \cos x_2 \dot{x}_3}{1+\cos^2 x_2} \\ \frac{(1+e) \cos^2(x_2)\dot{x}_2 + (-e+\cos^2 x_2)\dot{x}_3}{1+\cos^2 x_2} \end{pmatrix},$$

- iv) y el campo vectorial $X_{\mathbf{L}_{\mu}}$ dado por

$$X_{\mathbf{L}_{\mu}}(x_2, x_3, \dot{x}_2, \dot{x}_3) = \begin{pmatrix} \dot{x}_2 & \dot{x}_3 & 0 & -g \end{pmatrix}^T.$$

Por lo tanto, se tiene que el sistema híbrido Lagrangiano reducido $\mathcal{H}_{\mathbf{L}_{\mu}} = (D_{L_{\mu}}, \mathcal{S}_{L_{\mu}}, R_{L_{\mu}}, X_{L_{\mu}})$ está caracterizado por (i)-(iv).

Observación 4.4.13. Veamos ahora, que podemos aplicar la Proposición 4.1.24 al sistema híbrido Lagrangiano simple para el Péndulo esférico determinado por $(TQ, \mathcal{S}_L, R_L, X_L)$ y obtener como solución el sistema híbrido Hamiltoniano simple determinado por $(T^*Q, \mathcal{S}_H, R_H, X_H)$:

- i) $\mathbb{F}L(D_L) = D_H$: sí, ya que $\mathbb{F}L$ es un difeomorfismo, en particular es suryectiva.
- ii) $\mathbb{F}L(\mathcal{S}_L) = \mathcal{S}_H$: sí, dado que S_L sólo depende de las configuraciones en Q .
- iii) $\mathbb{F}L \circ R_L = R_H \circ \mathbb{F}L|_{\mathcal{S}_L}$: dado que

$$R_H \left(\theta, \varphi, \frac{p_\theta}{mR^2}, \frac{p_\varphi}{mR^2 \sin \theta} \right) = \left(\theta, \varphi, -e \frac{p_\theta}{mR^2}, \frac{p_\varphi}{mR^2 \sin \theta} \right), \quad (4.4.14)$$

por lo tanto

$$\mathbb{F}L \circ R_L(\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) = \mathbb{F}L \left(\theta, \varphi, -e\dot{\theta}, \dot{\varphi} \right) = \left(\theta, \varphi, -e \frac{p_\theta}{mR^2}, \frac{p_\varphi}{mR^2 \sin \theta} \right) = R_H \circ \mathbb{F}L|_{\mathcal{S}_L}.$$

- iv) $(\mathbb{F}L)_* X_L = X_H$:

Dado que

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mR^2} \Leftrightarrow p_\theta = mR^2 \dot{\theta} \Rightarrow \dot{p}_\theta = mR^2 \ddot{\theta},$$

y

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mR^2 \sin^2 \theta} \Leftrightarrow p_\varphi = \dot{\varphi} (mR^2 \sin^2 \theta)$$

entonces,

$$\dot{p}_\varphi = \ddot{\varphi} (mR^2 \sin^2 \theta) + \dot{\varphi} (2mR^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta}).$$

Reemplazando en las ecuaciones de Euler-Lagrange para el péndulo esférico, se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{p}_\theta &= mR^2 \ddot{\theta} = \frac{p_\varphi^2 \cos \theta}{mR^2 \sin^3 \theta} - mgR \sin \theta, \\ \dot{p}_\varphi &= \ddot{\varphi} (mR^2 \sin^2 \theta) + \dot{\varphi} (2mR^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta}) = 0, \end{aligned}$$

por lo tanto, $\dot{p}_\theta = \frac{p_\varphi^2 \cos \theta}{mR^2 \sin^3 \theta} - mgR \sin \theta$ y $\dot{p}_\varphi = 0$ que son las ecuaciones de Hamilton para éste ejemplo.

Observación 4.4.15. Veamos ahora, que podemos aplicar la Proposición 4.1.24 al sistema híbrido Lagrangiano simple para la pelota que rebota en la superficie sinusoidal determinado por $(TQ, \mathcal{S}_L, R_L, X_L)$ y obtener como solución el sistema híbrido Hamiltoniano simple determinado por $(T^*Q, \mathcal{S}_H, R_H, X_H)$:

- i) $\mathbb{F}L(D_L) = D_H$: sí, ya que $\mathbb{F}L$ es un difeomorfismo, en particular es suryectiva.

ii) $\mathbb{F}L(\mathcal{S}_{\mathbf{L}}) = \mathcal{S}_{\mathbf{H}}$: sí, dado que $\mathcal{S}_{\mathbf{L}}$ sólo depende de las configuraciones en Q .

iii) $\mathbb{F}L \circ R_{\mathbf{L}} = R_{\mathbf{H}} \circ \mathbb{F}L|_{\mathcal{S}_{\mathbf{L}}}$: dado que

$$\begin{aligned} R_H \left(x_1, x_2, \text{sen } x_2, \frac{p_1}{m}, \frac{p_2}{m}, \frac{p_3}{m} \right) &= \\ &= \left(x_1, x_2, \text{sen } x_2, \frac{p_1}{m}, \frac{p_2}{m} \Gamma_1(x_2) + \frac{p_3}{m} \Gamma_2(x_2), \frac{p_2}{m} \Gamma_2(x_2) + \frac{p_3}{m} \Gamma_3(x_2) \right), \end{aligned}$$

por lo tanto considerando $\dot{x} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$

$$\begin{aligned} \mathbb{F}L \circ R_{\mathbf{L}}(x, \dot{x}) &= \mathbb{F}L(x_1, x_2, \text{sen } x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2 \Gamma_1(x_2) + \dot{x}_3 \Gamma_2(x_2), \dot{x}_2 \Gamma_2(x_2) + \dot{x}_3 \Gamma_3(x_2)) \\ &= \left(x_1, x_2, \text{sen } x_2, \frac{p_1}{m}, \frac{p_2}{m} \Gamma_1(x_2) + \frac{p_3}{m} \Gamma_2(x_2), \frac{p_2}{m} \Gamma_2(x_2) + \frac{p_3}{m} \Gamma_3(x_2) \right) \\ &= R_{\mathbf{H}} \circ \mathbb{F}L|_{\mathcal{S}_{\mathbf{L}}}. \end{aligned}$$

iv) $(\mathbb{F}L)_* X_{\mathbf{L}} = X_{\mathbf{H}}$:

Dado que

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = \frac{p_1}{m} &\Leftrightarrow p_1 = m\dot{x}_1 \Rightarrow \dot{p}_1 = 0, \\ \dot{x}_2 = \frac{p_2}{m} &\Leftrightarrow p_2 = m\dot{x}_2 \Rightarrow \dot{p}_2 = 0, \\ \dot{x}_3 = \frac{p_3}{m} &\Leftrightarrow p_3 = m\dot{x}_3 \Rightarrow \dot{p}_3 = -mg. \end{aligned}$$

Reemplazando en las ecuaciones de Euler-Lagrange para la pelota que rebota en la superficie sinusoidal, se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= 0, \\ \dot{p}_2 &= 0, \\ \dot{p}_3 &= -mg, \end{aligned}$$

que corresponden con las ecuaciones de Hamilton para éste ejemplo.

4.4.3. Reducción de Routh para Sistemas Híbridos Lagrangianos en una clase de variedades producto

En ésta sección describiremos la reducción de Routh para sistemas híbridos Lagrangianos cuyo espacio de configuración es de la forma $Q = P \times G$, donde P es una variedad arbitraria, G el grupo de Lie, *no necesariamente abeliano* y el Lagrangiano L está definido en $TQ = TP \times TG$, es decir, $L : TP \times TG \rightarrow \mathbb{R}$.

Observación 4.4.16. Recordemos que podemos identificar TG con $G \times \mathfrak{g}$, es decir, $v_g \mapsto (g, \xi)$, con $\xi = g^{-1}v_g \in \mathfrak{g}$. Por lo tanto, el fibrado tangente $TQ = TP \times TG$ es isomorfo a $TP \times G \times \mathfrak{g}$ y entonces el Lagrangiano $L : TP \times G \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$ tendrá coordenadas (v_s, g, ξ) .

Sea $\mathcal{H} = (D_L, \mathcal{S}_L, R_L, X_L)$ un sistema híbrido Lagrangiano. Consideramos la acción a izquierda de G en Q , dada por

$$\Phi_{g'}^Q(s, g) = (s, g'g)$$

y su acción levantada al tangente, $\Phi^{TQ} : G \times TQ \rightarrow TQ$, dada por

$$(g', (v_s, v_g)) \mapsto (v_s, g'g, \xi).$$

Definición 4.4.17. Un Lagrangiano híbrido $\mathbf{L} = (Q, L, h)$ se dice que es **G -invariante** si existe una acción Φ de G en Q tal que h y L son G -invariantes con respecto a Φ y su levantamiento tangente, respectivamente, es decir,

$$h(\Phi_{g'}^Q(s, g)) = h(s, g), \quad \text{y} \quad L(\Phi_{g'}^{TQ}(v_s, v_g)) = L(v_s, g, \xi)$$

para todo $g \in G$ y $(v_s, g\xi) \in TQ$.

Definición 4.4.18. Una aplicación momento J_L , Ad^* -equivariante, se dice que es una aplicación momento **Ad^* -equivariante híbrida** si el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathfrak{g}^* & & \\ & \nearrow J_L & \uparrow J_L|_{\mathcal{S}_L} & \nwarrow J_L & \\ D_L & \xleftarrow{i_L} & \mathcal{S}_L & \xrightarrow{R} & D_L \end{array}$$

donde J_L está definida por

$$\langle J_L(v_s, g\xi), \eta \rangle = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} L(v_s, g(\xi + tAd_{g^{-1}}\eta)). \quad (4.4.19)$$

Proposición 4.4.20. Si $\mathbf{L} = (Q, L, h)$ es G -invariante y la función de impacto está dada por una ecuación de impacto Newtoniana (4.4.5), entonces la acción levantada al tangente $\Phi_{g'}^{TQ}$ de G en D_L es una acción híbrida.

Demostración. Veamos que para todo $g \in G$, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_L & \xrightarrow{R_L} & D_L \\ \Phi_{g'}^{TQ}|_{\mathcal{S}_L} \downarrow & & \downarrow \Phi_{g'}^{TQ} \\ \mathcal{S}_L & \xrightarrow{R_L} & D_L \end{array}$$

donde $R_L : \mathcal{S}_L \rightarrow D_L$ está definida como $R_L(q, \dot{q}) = (q, \bar{P}(q, \dot{q}))$, y $\bar{P}(q, \dot{q})$ definida en (4.4.4), es decir, tenemos que probar que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} T_q Q & \xrightarrow{\bar{P}} & T_q Q \\ \Phi_{g'}^{TQ} \downarrow & & \downarrow \Phi_{g'}^{TQ} \\ T_{\Phi_{g'}(q)} Q & \xrightarrow{\bar{P}_{\Phi_{g'}(q)}} & T_{\Phi_{g'}(q)} Q \end{array}$$

para todo $g' \in G$, $(q, \dot{q}) \in T_q Q$ con $q \in h^{-1}(0)$.

Dado que h es G -invariante, se tiene que $\Phi_{g'^{-1}}^{TQ}(dh_q) = dh_{\Phi_{g'}(q)}$. Observemos que

$$\Phi_{g'^{-1}}^{TQ} \circ \bar{P}(\dot{q}) = \Phi_{g'^{-1}}^{TQ}(\dot{q}) + \Phi_{g'^{-1}}^{TQ} \left(-(1+e) \frac{dh_q \dot{q}}{dh_q M(q)^{-1} dh_q^T} M(q)^{-1} dh_q^T \right), \quad (4.4.21)$$

donde ésta igualdad viene dada por el hecho que $\Phi_{g'^{-1}}^{TQ}(dh_q) = dh_{\Phi_{g'}(q)}$, con lo cual

$$(4.4.21) = \Phi_{g'^{-1}}^{TQ}(\dot{q}) - (1+e) \frac{dh_q \dot{q}}{dh_q M(q)^{-1} dh_q^T} M(q)^{-1} \Phi_{g'^{-1}}^{TQ}(dh_q), \quad (4.4.22)$$

ya que $\frac{dh_q \dot{q}}{dh_q M(q)^{-1} dh_q^T} M(q)^{-1}$ es constante.

Por lo tanto

$$(4.4.22) = \Phi_{g'^{-1}}^{TQ}(\dot{q}) - (1+e) \frac{dh_q \dot{q}}{dh_q M(q)^{-1} dh_q^T} M(q)^{-1} dh_{\Phi_{g'}(q)}. \quad (4.4.23)$$

Usando (4.2.7) se tiene que

$$(4.4.23) = \Phi_{g'^{-1}}^{TQ}(\dot{q}) - (1+e) \frac{\Phi_{g'^{-1}}^{TQ}(dh_q) \Phi_{g'^{-1}}^{TQ}(\dot{q})}{\Phi_{g'^{-1}}^{TQ}(dh_q) M(q)^{-1} \Phi_{g'^{-1}}^{TQ}(dh_q)} M(q)^{-1} dh_{\Phi_{g'}(q)}, \quad (4.4.24)$$

entonces

$$(4.4.24) = \Phi_{g'^{-1}}^{TQ}(\dot{q}) - (1+e) \frac{dh_{\Phi_{g'}(q)} \Phi_{g'^{-1}}^{TQ}(\dot{q})}{dh_{\Phi_{g'}(q)} M(q)^{-1} dh_{\Phi_{g'}(q)}} M(q)^{-1} dh_{\Phi_{g'}(q)}, \quad (4.4.25)$$

y por lo tanto

$$(4.4.25) = \bar{P}_{\Phi_{g'}(q)} \circ \Phi_{g'^{-1}}^{TQ}(\dot{q}) \quad (4.4.26)$$

como se deseaba. \square

Definición 4.4.27. Sea $\mathcal{H} = (D_L, \mathcal{S}_L, R_L, X_L)$ un sistema híbrido Lagrangiano. Supongamos que μ es un valor regular de $J_L : D_L \rightarrow \mathfrak{g}^*$. Decimos que μ es un **valor regular híbrido** si es también un valor regular de $J_L|_{\mathcal{S}_L}$. Esto es que el siguiente diagrama conmuta, donde $J_L^{-1}(\mu)$ y $J_L^{-1}|_{\mathcal{S}_L}(\mu)$ son subvariedades embebidas de D_L

$$\begin{array}{ccccc} J_L^{-1}(\mu) & \xleftarrow{i_{J_L \mathcal{S}}} & J_L^{-1}|_{\mathcal{S}_L}(\mu) & \xrightarrow{R_L|_{J_L^{-1}|_{\mathcal{S}_L}(\mu)}} & J_L^{-1}(\mu) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ D_L & \xleftarrow{i_L} & \mathcal{S}_L & \xrightarrow{R_L} & D_L \end{array}$$

Teorema 4.4.28. Sea $\mathcal{H} = (D_L, \mathcal{S}_L, R_L, X_L)$ un sistema híbrido Lagrangiano. Sea $\mu \in \mathfrak{g}^*$ un valor regular híbrido de J_L , donde J_L es Ad^* -equivariante y sea la acción de G_μ en $J_L^{-1}(\mu)$ libre, propia e híbrida, entonces

$$\mathcal{H}_\mu = (D_\mu, \mathcal{S}_\mu, R_\mu) := (J_L^{-1}(\mu)/G_\mu, J_L^{-1}|_{\mathcal{S}_L}(\mu)/G_\mu, \hat{R}_L|_{J_L^{-1}|_{\mathcal{S}_L}(\mu)})$$

es un sistema híbrido Lagrangiano reducido.

Demostración. Como $\mu \in \mathfrak{g}^*$ es valor regular híbrido de J_L , entonces $J_L^{-1}|_{\mathcal{S}_L}(\mu)$ es una variedad y, en particular, una subvariedad de $J_L^{-1}(\mu)$. Sea $G_\mu = \{g \in G : Ad_{g^{-1}}^* \mu = \mu\}$ el grupo de isotropía de μ , entonces la acción Φ de G en D_L , que es una acción híbrida, por la Ad^* -equivarianza de J_L , se restringe a una acción de G_μ en $J_L^{-1}(\mu)$

$$\Phi : G_\mu \times J_L^{-1}(\mu) \rightarrow J_L^{-1}(\mu).$$

Más aún, como esta acción es libre y propia entonces $D_\mu = J_L^{-1}(\mu)/G_\mu$ es una variedad. Nuevamente, por ser J_L Ad^* -equivariante, Φ se puede restringir a la acción $\Phi|_{\mathcal{S}_L}$ de $J_L^{-1}|_{\mathcal{S}_L}(\mu)$

$$\Phi|_{\mathcal{S}_L} : G_\mu \times J_L^{-1}|_{\mathcal{S}_L}(\mu) \rightarrow J_L^{-1}|_{\mathcal{S}_L}(\mu)$$

Sea $x \in J_L^{-1}|_{\mathcal{S}_L}(\mu)$, es decir, $x \in \mathcal{S}_L$ tal que $J_L(x) = \mu$, y para $g \in G_\mu$, $\Phi_g(x) \in \mathcal{S}_L$ y

$$J_L(\Phi_g(x)) = Ad_{g^{-1}}^*(\mu) = \mu$$

entonces $\Phi_g(x) \in J_L^{-1}|_{\mathcal{S}_L}(\mu)$. Por lo tanto se prueba que $\hat{R}_L|_{J_L^{-1}|_{\mathcal{S}_L}(\mu)}$ es equivariante con respecto a la acción de G_μ en $J_L^{-1}|_{\mathcal{S}_L}(\mu)$ y a la acción de G_μ en $J_L^{-1}(\mu)$, es decir, se prueba que el siguiente diagrama conmuta para $g \in G$

$$\begin{array}{ccc} J_L^{-1}|_{\mathcal{S}_L}(\mu) & \xrightarrow{\hat{R}_L|_{J_L^{-1}|_{\mathcal{S}_L}(\mu)}} & J_L^{-1}(\mu) \\ \Phi_g|_{\mathcal{S}_L} \downarrow & & \downarrow \Phi_g \\ J_L^{-1}|_{\mathcal{S}_L}(\mu) & \xrightarrow{\hat{R}_L|_{J_L^{-1}|_{\mathcal{S}_L}(\mu)}} & J_L^{-1}(\mu) \end{array}$$

□

Corolario 4.4.29. *Dado un sistema híbrido Lagrangiano $\mathcal{H} = (D_L, \mathcal{S}_L, R_L, X_L)$ asociado a un Lagrangiano G -invariante L , satisfaciendo las hipótesis del Teorema 4.4.28, entonces existe un sistema híbrido Lagrangiano reducido \mathbf{L}_μ definido como en la Definición 4.4.2 y un sistema híbrido Lagrangiano reducido asociado a \mathbf{L}_μ*

$$\mathcal{H}_\mu = (D_\mu, \mathcal{S}_\mu, R_\mu, X_\mu)$$

donde el Lagrangiano reducido (Routhiano) está dado por

$$L_\mu := (L(v_s, g\xi) - \langle \nu, \xi \rangle) \Big|_{\xi = \Lambda_\mu^{(v_s)}(\nu)(\nu)}$$

Demostración. Bajo estas hipótesis y utilizando el Teorema 4.4.28 existe un Routhiano híbrido \mathbf{L}_μ definido como en la Definición 4.4.2 y un sistema híbrido Routhiano asociado a \mathbf{L}_μ . Además (ver para más detalles [61], [37]), las ecuaciones de Routh, X_μ , utilizando una conexión están dadas por

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_\mu}{\partial \dot{x}} \right) - \left(\frac{\partial L_\mu}{\partial x} \right) = 0 \quad (4.4.30)$$

$$\dot{\nu} = ad_{\Lambda_\mu^{(v_s)}(\nu)}^* \nu \quad (4.4.31)$$

para $x \in P$, $\nu = Ad_{g^*}^* \mu$ y $\Lambda^{(v_s)} : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}$ que es una aplicación diferenciable que depende de $v_s \in TP$ tal que $\mathbb{F}_2 L_\mu(v_s, \Lambda^{(v_s)}(\nu)) \equiv \nu$ para $(v_s, \nu) \in TP \times \mathfrak{g}$ arbitrarios y $\mathbb{F}_2 L_\mu : TP \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}^*$ dada por

$$\langle \mathbb{F}_2 L_\mu(v_s \xi), \eta \rangle = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} L_\mu(v_s, \xi + t\eta)$$

□

Definición 4.4.32. Si L es un Lagrangiano G -invariante en D_L , entonces el **Lagrangiano reducido** L_μ en D_μ está unívocamente determinado por la relación

$$L_\mu \circ \pi_\mu = L \circ i_\mu,$$

donde $\pi_\mu : D_L \rightarrow D_L/G$ es la proyección canónica al cociente.

Teorema 4.4.33. Con \mathcal{H} y \mathcal{H}_μ como en el Teorema 4.4.28, si $\chi^{\mathcal{H}}(x_0)$ es el flujo híbrido de \mathcal{H} con $x_0 \in J_L^{-1}(\mu)$, entonces el flujo híbrido $\chi^{\mathcal{H}_\mu}$ asociado al sistema híbrido Lagrangiano reducido \mathcal{H}_μ está dado por

$$\chi^{\mathcal{H}_\mu}(\pi_\mu(x_0)) = (\Lambda, \mathcal{J}, \pi_\mu(\mathcal{C}))$$

donde $\pi_\mu(\mathcal{C}) := \{\pi_\mu(c_i) : c_i \in \mathcal{C}\}$ y Λ, \mathcal{J} como en la Definición 4.1.6.

Demostración. Sea $c_i^\mu(t) = \pi_\mu(c_i(t))$. Necesitamos probar que

- i) $c_i^\mu(\tau_{i+1}) \in \mathcal{S}_\mu$
- ii) $R_\mu(c_i^\mu(\tau_{i+1})) = c_{i+1}^\mu(\tau_{i+1})$
- iii) $\dot{c}_i^\mu(t) = X_\mu(c_i^\mu(t))$

Consideremos primero el caso en el que $i = 0$. Como $x_0 = c_0(\tau_0) \in J_L^{-1}(\mu)$, sabemos que $c_0(t) \in J_L^{-1}(\mu)$ para todo $t \in [\tau_0, \tau_1]$; como $c_0(\tau_1) \in \mathcal{S}_L$ implica que $c_0(\tau_1) \in J_L^{-1}(\mu)|_{\mathcal{S}_L}$. Entonces se tiene que

- i) $c_0(\tau_1) \in J_L^{-1}(\mu)|_{\mathcal{S}_L} \Rightarrow \pi_\mu(c_0(\tau_1)) = c_0^\mu(\tau_1) \in \mathcal{S}_\mu$.

ii) Por la equivarianza de R_μ tenemos

$$R_\mu(c_0^\mu(\tau_1)) = R_\mu(\pi_\mu(c_0(\tau_1))) = \pi_\mu(R_L(c_0(\tau_1))) = \pi_\mu(c_1(\tau_1)) = c_1^\mu(\tau_1).$$

iii) Esta última condición $\dot{c}_0^\mu(t) = X_\mu(c_0^\mu(t))$ se cumple por construcción.

Finalmente, se tiene que $c_1(\tau_1) \in J_L^{-1}(\mu)$. Por lo tanto, se puede ver (por inducción aplicado para i) que $i, i+1 \in \Lambda$ y entonces $c_i(\tau_i) \in J_L^{-1}(\mu)$ como se quería. \square

Observación 4.4.34. Como se observa anteriormente, la reducción se realiza mediante el grupo de isotropía G_μ . Otra manera de realizar la reducción en este tipo de variedades producto, donde en grupo G no es abeliano es cocientando por todo el grupo G . En ese caso, D_μ resultaría $TP \times \mathfrak{g}$ y el Lagrangiano reducido $L_\mu : TP \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$; que como puede verse extiende los resultados que se exponen en [A. Ames [4]].

4.4.4. Reducción de Routh para Sistemas Híbridos Lagrangianos

En esta sección describiremos la version general de la reduccion de Routh para sistemas híbridos Lagrangianos considerando que Q es una variedad arbitraria.

Definición 4.4.35. Dado un sistema híbrido Lagrangiano, $\mathcal{H} = (D_L, \mathcal{S}_L, R_L, X_L)$, consideremos la acción en TQ obtenida mediante el levantamiento de una acción en Q . Dado $g \in G$, para una acción $\Phi : G \times Q \rightarrow Q$ consideremos la acción de G en TQ denotada por

$$\Phi^{TQ} : G \times TQ \rightarrow TQ,$$

y definida de la siguiente manera

$$\Phi^{TQ}(g, (q, \dot{q})) := T\Phi_{g^{-1}}(q, \dot{q}) = (\Phi_g(q), \Phi_{g^{-1}}^{TQ}(\dot{q}))$$

$\forall g \in G$ y $(q, \dot{q}) \in TQ$.

Proposición 4.4.36. Para $L = (Q, L, h)$, si h es G -invariante, entonces $J_L : D \rightarrow \mathfrak{g}^*$ definido por

$$\langle J_L(q, \dot{q}), \xi \rangle = \langle \mathbb{F}L(q, \dot{q}), \xi_Q(q) \rangle \quad (4.4.37)$$

es una aplicación momento híbrida Ad^* -equivariante, donde ξ_Q es el generador infinitesimal asociado a ξ (ver Definición 1.2.14).

Teorema 4.4.38. Dado un sistema híbrido Lagrangiano $\mathcal{H} = (D_L, \mathcal{S}_L, R_L, X_L)$ asociado a un Lagrangiano G -invariante L , satisfaciendo las hipótesis del Teorema 4.4.28, entonces existe un Lagrangiano reducido $L_\mu : D_\mu \rightarrow \mathbb{R}$ y un sistema híbrido Lagrangiano reducido asociado a L_μ

$$\mathcal{H}_\mu^L = (D_\mu^L, \mathcal{S}_\mu^L, R_\mu^L, X_\mu^L),$$

donde X_μ son las ecuaciones de Routh definidas en Ecuación (4.4.30).

Definición 4.4.39. Si L es un Lagrangiano G -invariante en D_L y $\mathcal{A}_{D_L} : D_L \rightarrow \mathfrak{g}$ una 1-forma de conexión, entonces el **Lagrangiano reducido** L_μ en D_μ está definido como

$$L_\mu(q, \dot{q}) := L(q, \dot{q}) - \langle \mathcal{A}_{D_L}, \mu \rangle.$$

Generalmente, al Lagrangiano reducido L_μ se lo suele denominar **Routhiano**.

Consideremos un sistema híbrido Lagrangiano simple $\mathcal{H} = (D_L, \mathcal{S}_L, R_L, X_L)$, con $D_L \subset TQ$. Asumiremos que D_L es un fibrado principal, con proyección $\pi : D_L \rightarrow D_L/G$ definiendo dicho fibrado, donde G es el grupo de estructura y L es un Lagrangiano G -regular definido como en la Definición 2.5.6.

Proposición 4.4.40. Sean $\mathcal{H}_\mu^L = (D_\mu^L, \mathcal{S}_\mu^L, R_\mu^L, X_\mu^L)$ la variedad híbrida Lagrangiana reducida cumpliendo las hipótesis de la Teorema 4.4.28, $\mathcal{A}_{D_L} : D_L \rightarrow \mathfrak{g}$ una 1-forma de conexión y L un lagrangiano G -regular, invariante con $\mu \in \mathfrak{g}^*$. Entonces existe un difeomorfismo

$$J_L^{-1}(\mu)/G_\mu \cong T(Q/G) \times_{Q/G} Q/G_\mu :$$

de manera que hace conmutar al siguiente diagrama, siendo $D_\mu^L \simeq T(Q/G) \times_{Q/G} Q/G_\mu$.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathfrak{g}^* & & \\
 & \swarrow J_L & \uparrow J_L|_{\mathcal{S}} & \nwarrow J_L & \\
 D_L & \xleftarrow{i_L} & \mathcal{S}_L & \xrightarrow{R} & D_L \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 J_L^{-1}(\mu) & \xleftarrow{i_{J_L \mathcal{S}}} & J_L|_{\mathcal{S}}^{-1}(\mu) & \xrightarrow{R|_{J_L|_{\mathcal{S}}^{-1}(\mu)}} & J_L^{-1}(\mu) \\
 \downarrow \pi_\mu & & \downarrow \pi_\mu|_{J_L|_{\mathcal{S}}^{-1}(\mu)} & & \downarrow \pi_\mu \\
 T(Q/G) \times_{Q/G} Q/G_\mu & \xleftarrow{i_{\mathcal{S}_L \mu}} & \mathcal{S}_\mu^L & \xrightarrow{R_\mu} & T(Q/G) \times_{Q/G} Q/G_\mu
 \end{array}$$

donde las inclusiones i_L , $i_{J_L \mathcal{S}}$ e $i_{\mathcal{S}_L \mu}$ son las inclusiones canónicas $i_L : \mathcal{S}_L \hookrightarrow D_L$, $i_{J_L \mathcal{S}} : J_L|_{\mathcal{S}}^{-1}(\mu) \hookrightarrow J_L^{-1}(\mu)$, $i_{\mathcal{S}_L \mu} : \mathcal{S}_\mu^L \hookrightarrow D_\mu$.

Demostración. Notar que la parte superior del diagrama conmuta por lo visto en Teorema 4.4.28.

Consideremos la siguiente aplicación:

$$\Pi_\mu : J_L^{-1}(\mu) \rightarrow T(Q/G) \times_{Q/G} Q$$

dada por

$$v_q \mapsto (T\pi(v_q), q),$$

que es suave. Definimos su inversa $(\Pi_\mu)^{-1}$ como sigue: dado un punto $(v_{[q]}, q) \in T(Q/G) \times_{Q/G} Q$, elegimos $v_q \in TQ$ tal que $T\pi(v_q) = v_{[q]}$. Por la G -regularidad del Lagrangiano L , existe un único $\xi \in \mathfrak{g}$ tal que $J_L(v_q + \xi_Q(q)) = \mu$. Entonces, definimos la aplicación suave $(\Pi_\mu)^{-1}(v_{[q]}, q) = v_q + \xi_Q(q)$.

Veamos que está bien definida: sea $w_q \in TQ$ tal que $T\pi(w_q) = w_{[q]}$, se tiene que $w_q = v_q + \eta_Q(q)$ para algún $\eta \in \mathfrak{g}$, entonces

$$\mu = J_L(v_q + \xi_Q(q)) = J_L(w_q - \eta_Q(q) + (\xi - \eta)_Q(q)).$$

Por otro lado, podemos ver que Π_μ es G_μ equivariante con respecto a la acción de G_μ sobre $T(Q/G) \times_{Q/G} Q$ dada por $g \cdot (v_{[q]}, q) = (v_{[q]}, g \cdot q)$, ya que

$$\begin{aligned} \Pi_\mu(\Phi^{TQ}(g, v_q)) &= \Pi_\mu(g \cdot v_q) \\ &= (T\pi_g(v_q), q) \\ &= (v_{[q]}, g \cdot q) \\ &= G_\mu(\Pi_\mu(v_q)) \end{aligned}$$

donde Φ^{TQ} es la acción levantada al tangente. Entonces, la aplicación

$$[\Pi_\mu] : J_L^{-1}(\mu)/G_\mu \rightarrow T(Q/G) \times_{Q/G} Q/G_\mu$$

es un difeomorfismo. □

4.4.5. Ejemplos

Ejemplo 4.4.41. Pelota que rebota en una superficie sinusoidal

Volvamos al ejemplo de la pelota que rebota en una superficie sinusoidal tratado en el Ejemplo 4.2.32, pero ahora adicionando una conexión. Sea $Q_B = \mathbb{R}^3$, el Lagrangiano $L_B : T\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ está dado por

$$L_B(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - mgx_3$$

donde g es la constante gravitacional. Como en el Ejemplo 4.2.32

$h_B(x_1, x_2, x_3) = x_3 - \sin x_2$. Se tiene entonces el sistema híbrido Lagrangiano simple dado por $\mathbf{L} = (Q_B, L_B, h_B)$. Para este sistema híbrido Lagrangiano simple, el sistema híbrido Lagrangiano $\mathcal{H}_{\mathbf{L}}$ está dado por $\mathcal{H}_{\mathbf{L}} = (D_L, \mathcal{S}_L, R_L, X_L)$ donde

- i) $D_L = \{(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 : x_3 - \sin x_2 \geq 0\}$ es el dominio,
- ii) $\mathcal{S}_L = \{(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 : x_3 = \sin x_2 \text{ y } \dot{x}_3 - \cos x_2 \dot{x}_2 \leq 0\}$,
- iii) $R_L(x, \dot{x}) = (x, P_B(x, \dot{x}))$ donde

$$P_L(x, \dot{x}) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \frac{(1-e \cos^2(x_2))\dot{x}_2 + (1+e) \cos x_2 \dot{x}_3}{1+\cos^2 x_2} \\ \frac{(1+e) \cos^2(x_2)\dot{x}_2 + (-e+\cos^2 x_2)\dot{x}_3}{1+\cos^2 x_2} \end{pmatrix}$$

iv) El campo vectorial Lagrangiano X_L está dado por

$$X_L(x, \dot{x}) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 & \dot{x}_2 & \dot{x}_3 & 0 & 0 & -mg \end{pmatrix}^T$$

Ahora bien, L_B es cíclica con respecto a x_1 pues $\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0$ y además $\frac{\partial h}{\partial x_1} = 0$. Entonces sea

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = J_L(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) = m\dot{x}_1$$

Tomando $J_L(x, \dot{x}) = \mu$, donde J_L es la aplicación momento, se tiene que $\dot{x}_1 = \frac{\mu}{m}$. Calculemos ahora el sistema híbrido reducido. El Routhiano $L_\mu : T\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, utilizando una conexión \mathcal{A} , está dado por:

$$L_\mu(x_2, x_3, \dot{x}_2, \dot{x}_3) = L_B - \langle \mathcal{A}, \mu \rangle |_{\mu=m\dot{x}_1}$$

donde la conexión está dada por $\mathcal{A} = \alpha(x_2, x_3)\dot{x}_2 + \beta(x_2, x_3)\dot{x}_3$. Entonces el Routhiano viene dado por

$$L_\mu(x_2, x_3, \dot{x}_2, \dot{x}_3) = \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_3^2 - mgx_3 - \mu\alpha(x_2, x_3)\dot{x}_2 - \mu\beta(x_2, x_3)\dot{x}_3.$$

Además $h_{L_\mu}(x_2, x_3) = x_3 - \sin x_2$. El sistema híbrido Routhiano para la pelota que rebota en la superficie sinusoidal está dado por

- i) $D_{L_\mu} = \{(x_2, x_3, \dot{x}_2, \dot{x}_3) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : x_3 - \sin x_2 \geq 0\}$,
- ii) $\mathcal{S}_{L_\mu} = \{(x_2, x_3, \dot{x}_2, \dot{x}_3) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : x_3 = \sin x_2 \text{ y } \dot{x}_3 - \cos x_2 \dot{x}_2 \leq 0\}$,
- iii) $R_{L_\mu}(x_2, x_3, \dot{x}_2, \dot{x}_3) = (x_2, x_3, P_{L_\mu}(x_2, x_3, \dot{x}_2, \dot{x}_3))$ donde

$$P_{L_\mu}(x_2, x_3, \dot{x}_2, \dot{x}_3) = \begin{pmatrix} \frac{(1-e \cos^2(x_2))\dot{x}_2 + (1+e) \cos x_2 \dot{x}_3}{1+\cos^2 x_2} \\ \frac{(1+e) \cos^2(x_2)\dot{x}_2 + (-e+\cos^2 x_2)\dot{x}_3}{1+\cos^2 x_2} \end{pmatrix}$$

iv) Calculemos ahora las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_\mu}{\partial x_2} &= -\mu \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} \dot{x}_2 - \mu \frac{\partial \beta}{\partial x_2} \dot{x}_3, \\ \frac{\partial L_\mu}{\partial \dot{x}_2} &= m\dot{x}_2 - \mu\alpha(x_2, x_3), \\ \left(\frac{d}{dt}\right) \left(\frac{\partial L_\mu}{\partial \dot{x}_2}\right) &= m\ddot{x}_2 - \mu \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \frac{\partial \alpha}{\partial x_3} \dot{x}_3\right), \end{aligned}$$

y entonces

$$m\ddot{x}_2 = \mu \frac{\partial \alpha}{\partial x_3} \dot{x}_3 - \mu \frac{\partial \beta}{\partial x_2} \dot{x}_3.$$

De manera análoga se tiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial L_\mu}{\partial x_3} &= -mg - \mu \frac{\partial \alpha}{\partial x_3} \dot{x}_2 - \mu \frac{\partial \beta}{\partial x_3} \dot{x}_3, \\ \frac{\partial L_\mu}{\partial \dot{x}_3} &= m\dot{x}_3 - \mu\beta(x_2, x_3), \\ \left(\frac{d}{dt}\right) \left(\frac{\partial L_\mu}{\partial \dot{x}_3}\right) &= m\ddot{x}_3 - \mu \left(\frac{\partial \beta}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \frac{\partial \beta}{\partial x_3} \dot{x}_3\right),\end{aligned}$$

y entonces

$$m\ddot{x}_3 = -g + \mu \frac{\partial \beta}{\partial x_2} \dot{x}_2 - \mu \frac{\partial \alpha}{\partial x_3} \dot{x}_2.$$

Por lo que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_\mu}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L_\mu}{\partial x_2} &= \mu \frac{\partial \alpha}{\partial x_3} \dot{x}_3 - \mu \frac{\partial \beta}{\partial x_2} \dot{x}_3 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_\mu}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L_\mu}{\partial x_2} &= -g + \mu \frac{\partial \beta}{\partial x_2} \dot{x}_2 - \mu \frac{\partial \alpha}{\partial x_3} \dot{x}_2\end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene que el sistema híbrido Lagrangiano reducido

$\mathcal{H}_{L_\mu} = (D_{L_\mu}, \mathcal{S}_{L_\mu}, R_{L_\mu}, X_{L_\mu})$ está caracterizado por (i)-(iv).

4.5. Equivalencia entre Sistemas Híbridos Lagrangianos Reducidos y Sistemas Híbridos Hamiltonianos reducidos

De manera análoga a cómo se relacionan un sistema híbrido Lagrangiano simple con un sistema híbrido Hamiltoniano simple induciendo la noción de Transformada de Legendre, se puede relacionar un sistema híbrido Lagrangiano reducido con un sistema híbrido Hamiltoniano reducido, como sigue.

Definición 4.5.1. Dados $\mathcal{H}_\mu^L = (D_\mu^L, \mathcal{S}_\mu^L, R_\mu^L, X_\mu^L)$ y $\mathcal{H}_\mu = (D_\mu, \mathcal{S}_\mu, R_\mu, X_\mu)$ definimos la **transformada de Legendre entre sistemas híbridos reducidos** $[\mathbb{F}L_\mu] : \mathcal{H}_\mu^L \rightarrow \mathcal{H}_\mu$ como la aplicación entre sistemas híbridos reducidos cumpliendo las siguientes condiciones:

- i) $[\mathbb{F}L_\mu](D_\mu^L) = D_\mu$ donde $[\mathbb{F}L_\mu] : J_L^{-1}(\mu)/G_\mu \rightarrow J^{-1}(\mu)/G_\mu$ es la transformada de Legendre reducida usual, dada por

$$(v_{[q]}, [q]) \mapsto (\tilde{\alpha}_{[q]}, [q]),$$

donde $\tilde{\alpha}_{[q]}$ está definido por $\langle \tilde{\alpha}_{[q]}, \tilde{v}_{[q]} \rangle = \langle \alpha_q, v_q \rangle$ para cada v_q tal que $T\pi(v_q) = \tilde{v}_{[q]}$, con $\pi : Q \rightarrow Q/G$.

- ii) $[\mathbb{F}L_\mu](\mathcal{S}_\mu^L) = \mathcal{S}_\mu$.
- iii) $[\mathbb{F}L_\mu] \circ R_\mu^L = R_\mu \circ [\mathbb{F}L_\mu]|_{\mathcal{S}_\mu^L}$.
- iv) $([\mathbb{F}L_\mu])_* X_\mu^L = X_\mu$.

Proposición 4.5.2. *Sea $\chi^{\mathcal{H}_\mu^L} = (\Lambda, \mathcal{J}, \pi(\mathcal{C}))$ un flujo híbrido asociado con \mathcal{H}_μ^L con condición inicial $(\pi(q_0), \pi(\dot{q}_0))$. La imagen de \mathcal{H}_μ^L sobre $[\mathbb{F}L_{\mathcal{H}}]$ es un flujo híbrido asociado con \mathcal{H}_μ con condición inicial $(\pi(q_0), \pi(p_0)) = [\mathbb{F}L_\mu](\pi(q_0))$.*

Demostración. Como X_μ^L y X_μ están $\mathbb{F}L_\mu$ -relacionados, si $\pi(\gamma_i(t))$ es una curva integral de X_μ^L , $\pi(\tilde{\gamma}_i(t)) = \mathbb{F}L_\mu \circ \pi(\gamma_i(t))$ es una curva integral de X_μ . Tomando entonces $\pi(\gamma_0(t))$ solución con condición inicial $\pi(\gamma_0) = (\pi(q_0), \pi(\dot{q}_0))$ definida en $[\tau_0, \tau_1]$, entonces $\pi(\tilde{\gamma}_0(t))$ es solución con condición inicial $\pi(\tilde{\gamma}_0) = (\pi(q_0), \pi(p_0))$ definida en $[\tau_0, \tau_1]$.

De la misma manera, tomando $\pi(\gamma_1(t))$ solución con condición inicial $\pi(\gamma_1) = (\pi(q_1), \pi(\dot{q}_1))$ definida en $[\tau_1, \tau_2]$, entonces $\pi(\tilde{\gamma}_1(t))$ es solución con condición inicial $\pi(\tilde{\gamma}_1) = (\pi(q_1), \pi(p_1))$ definida en $[\tau_1, \tau_2]$.

Consideremos $\pi(\gamma_i(t))$ solución con condición inicial $\pi(\gamma_i) = (\pi(q_i), \pi(\dot{q}_i))$ definida en $[\tau_i, \tau_{i+1}]$, entonces $\pi(\tilde{\gamma}_i(t))$ será solución con condición inicial $\pi(\tilde{\gamma}_i) = (\pi(q_i), \pi(p_i))$ definida en $[\tau_i, \tau_{i+1}]$.

Veamos que $\pi(\tilde{\gamma}_i(t))$ cumple que $\pi(\tilde{\gamma}_i)(\tau_{i+1}) \in \mathcal{S}_\mu$ y que $R_\mu(\pi(\tilde{\gamma}_i)(\tau_{i+1})) = \pi(\tilde{\gamma}_{i+1})(\tau_{i+1})$. Por la propiedad de $\mathbb{F}L_\mu$, tenemos que:

- (i) $\pi(\tilde{\gamma}_i)(\tau_{i+1}) = (\mathbb{F}L_\mu \circ \pi(\gamma_i))(\tau_{i+1}) = \mathbb{F}L_\mu(\pi(\gamma_i)(\tau_{i+1}))$ y dado que $\pi(\gamma_i)(\tau_{i+1}) \in \mathcal{S}_\mu^L$ entonces $\pi(\tilde{\gamma}_i)(\tau_{i+1}) \in \mathcal{S}_\mu$.
- (ii) $R_\mu(\pi(\tilde{\gamma}_i)(\tau_{i+1})) = R_\mu \circ \mathbb{F}L_\mu \circ \pi(\gamma_i)(\tau_{i+1}) = \mathbb{F}L_\mu \circ R_\mu^L \circ \pi(\gamma_i)(\tau_{i+1}) = \mathbb{F}L_\mu \circ \pi(\gamma_{i+1})(\tau_{i+1}) = \pi(\tilde{\gamma}_{i+1})(\tau_{i+1})$.

□

Observación 4.5.3. Volvamos al ejemplo del Péndulo esférico. Veamos que podemos aplicar la Proposición 4.5.2 al sistema híbrido Lagrangiano reducido determinado por $(D_\mu^L, \mathcal{S}_\mu^L, R_\mu^L, X_\mu^L)$ y obtener como solución el sistema híbrido Hamiltoniano reducido determinado por $(D_\mu, \mathcal{S}_\mu, R_\mu, X_\mu)$:

- i) $\mathbb{F}L_\mu(D_\mu^L) = D_\mu$: Dado que $\mathbb{F}L_\mu$ es un difeomorfismo, en particular es suryectiva.
- ii) $\mathbb{F}L_\mu(\mathcal{S}_\mu^L) = \mathcal{S}_\mu$: Dado que \mathcal{S}_μ^L sólo depende de las configuraciones en Q .

iii) $\mathbb{F}L_\mu \circ R_\mu^L = R_\mu \circ \mathbb{F}L_\mu|_{\mathcal{S}_\mu^L}$: dado que

$$R_\mu \left(\theta, \frac{p_\theta}{mR^2} \right) = \left(\theta, -e \frac{p_\theta}{mR^2} \right), \quad (4.5.4)$$

por lo tanto

$$\mathbb{F}L_\mu \circ R_\mu^L(\theta, \dot{\theta}) = \mathbb{F}L_\mu \left(\theta, -e\dot{\theta} \right) = \left(\theta, -e \frac{p_\theta}{mR^2} \right) = R_\mu \circ \mathbb{F}L_\mu|_{\mathcal{S}_\mu^L}.$$

iv) $(\mathbb{F}L_\mu)_* X_\mu^L = X_\mu$

Dado que

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mR^2} \Leftrightarrow p_\theta = mR^2 \dot{\theta} \Rightarrow \dot{p}_\theta = mR^2 \ddot{\theta},$$

reemplazando en las ecuaciones de Euler-Lagrange para el péndulo esférico reducido, se obtiene

$$\dot{p}_\theta = mR^2 \ddot{\theta} = \frac{p_\theta^2 \cos \theta}{mR^2 \sin^3 \theta} - mgR \sin \theta,$$

y por lo tanto, $\dot{p}_\theta = \frac{p_\theta^2 \cos \theta}{mR^2 \sin^3 \theta} - mgR \sin \theta$ que son las ecuaciones de Hamilton para el Péndulo esférico reducido.

Definición 4.5.5. Dados un sistema híbrido Lagrangiano reducido y un sistema híbrido Hamiltoniano reducido, definimos la **Transformada del Routhiano**, $\mathbb{F}\mathcal{R}^\mu : T(Q/G) \times_{Q/G} Q/G_\mu \rightarrow T^*(Q/G) \times_{Q/G} Q/G_\mu$, como

$$\mathbb{F}\mathcal{R}^\mu = [\tilde{\phi}_{\mathcal{A}_{D_L}}^\mu] \circ [\mathbb{F}L_\mu] \circ [\Pi_\mu],$$

donde $[\tilde{\phi}_{\mathcal{A}_{D_L}}^\mu]$ está definido como en la Proposición 4.2.33, $[\mathbb{F}L_\mu]$ definido como en la Definición 4.5.1 y $[\Pi_\mu]$ definida como en la Proposición 4.4.40.

Proposición 4.5.6. Dados $\mathcal{H}_\mu^L = (D_\mu^L, \mathcal{S}_\mu^L, R_\mu^L, X_\mu^L)$ un sistema híbrido Lagrangiano reducido y $\mathcal{H}_\mu = (D_\mu, \mathcal{S}_\mu, R_\mu, X_\mu)$ un sistema híbrido Hamiltoniano reducido, usando los ingredientes anteriores, se tiene que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{S}_L & \xleftarrow{R_L} & D_L & \xrightarrow{\mathbb{F}L} & D_H & \xleftarrow{R} & \mathcal{S}_H \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ J_L|_{\mathcal{S}^{-1}(\mu)} & \xrightarrow{R|_{J_L|_{\mathcal{S}^{-1}(\mu)}}} & J_L^{-1}(\mu) & \xrightarrow{\quad} & J^{-1}(\mu) & \xleftarrow{R|_{J|_{\mathcal{S}^{-1}(\mu)}}} & J|_{\mathcal{S}^{-1}(\mu)} \\ \downarrow \pi_\mu|_{J_L|_{\mathcal{S}^{-1}(\mu)}} & & \downarrow \pi_\mu & & \downarrow \pi_\mu & & \downarrow \pi_\mu|_{J|_{\mathcal{S}^{-1}(\mu)}} \\ \mathcal{S}_\mu^L & \longrightarrow & T(Q/G) \times_{Q/G} Q/G_\mu & \xrightarrow{\mathbb{F}\mathcal{R}^\mu} & T^*(Q/G) \times_{Q/G} Q/G_\mu & \longleftarrow & \mathcal{S}_\mu \end{array}$$

Demostración. La parte derecha del diagrama conmuta por lo visto en la Proposición 4.2.33 y la parte izquierda por lo visto en la Proposición 4.4.40. Luego, considerando el difeomorfismo de la transformada del Routhiano definido en la Definición 4.5.5, se tiene que el diagrama conmuta, como queríamos ver. \square

Definición 4.5.7. Un **Sistema Híbrido Lagrangiano Magnético** es un sistema híbrido Lagrangiano dotado de un término magnético, y está determinado por $\mathcal{H}_\mu^L := (T(Q/G) \times_{Q/G} Q/G_\mu, \mathcal{S}_\mu^L, R_\mu^L, X_\mu^L, \mathcal{B}_L)$, donde:

- i) $L_\mu : T(Q/G) \times_{Q/G} Q/G_\mu \rightarrow \mathbb{R}$ es un Routhiano.
- ii) $\mathcal{S}_\mu^L \subset T(Q/G) \times_{Q/G} Q/G_\mu$.
- iii) $R_\mu^L : \mathcal{S}_\mu^L \rightarrow T(Q/G) \times_{Q/G} Q/G_\mu$
- iv) X_μ^L es el campo vectorial Routhiano asociado a L_μ .
- v) \mathcal{B}_L es una 2-forma cerrada en $T(Q/G) \times_{Q/G} Q/G_\mu$ definido como

$$\mathcal{B}_L = (\mathbb{F}\mathcal{R}^\mu)^*(\pi_1^*(\Omega_{Q/G}) + \pi_2^*(\mathcal{B}_\mu)),$$

deformado con un término magnético.

Observación 4.5.8. Por todo lo visto anteriormente, se tiene que existe una analogía tanto entre los sistemas híbridos Lagrangianos y los sistemas híbridos Hamiltonianos; como en sistemas híbridos Lagrangianos reducidos y los sistemas híbridos Hamiltonianos reducidos.

4.5.1. Ejemplos

Ejemplo 4.5.9. Consideremos $Q = \mathbb{R}^3 \times so(2)$. Sean $M = Q/S^1$ una variedad Riemanniana de dimensión 3, $G = S^1$ un grupo de Lie, $\pi : Q \rightarrow Q/S^1$ un fibrado principal, tal que $T\pi : TQ \rightarrow T^*(Q/S^1)$ el fibrado tangente asociado al fibrado principal. Sea $\mathcal{A} : TQ \rightarrow \mathfrak{so}(2)$ una conexión principal en Q . Sea $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ el Lagrangiano del sistema dado por

$$L(q, \dot{q}) = \frac{m}{2} \| T\pi(q, \dot{q}) \|_M^2 + \frac{\tilde{e}}{c} \| \mathcal{A}(q, \dot{q}) \|_{\mathfrak{so}(2)}$$

donde \tilde{e} es la carga del electrón y c la velocidad de la luz. Como $\pi(\theta \cdot q) = \pi(q)$, $\forall q \in Q$ y $\theta \in S^1$, entonces el Lagrangiano L es invariante, pues

$$\begin{aligned} L(\theta \cdot (q, \dot{q})) &= \frac{m}{2} \| T\pi(\theta \cdot (q, \dot{q})) \|_M^2 + \frac{\tilde{e}}{c} \| \mathcal{A}(\theta \cdot (q, \dot{q})) \|_{\mathfrak{so}(2)} \\ &= \frac{m}{2} \| T\pi(q, \dot{q}) \|_M^2 + \frac{\tilde{e}}{c} \| Ad_\theta \cdot \mathcal{A}(q, \dot{q}) \|_{\mathfrak{so}(2)} \\ &= \frac{m}{2} \| T\pi(q, \dot{q}) \|_M^2 + \frac{\tilde{e}}{c} \| \mathcal{A}(q, \dot{q}) \|_{\mathfrak{so}(2)} \\ &= L(q, \dot{q}) \end{aligned}$$

donde $Ad_\theta = Id_{\mathfrak{so}(2)}$ pues $SO(2)$ es abeliano.

- i) $D_L = \{(q, \dot{q}) \in TQ : h(q) \geq 0\}$ con $h : Q \rightarrow \mathbb{R}$, una función diferenciable dada por $h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2$, donde $q = (x, y, z)$ y r es el radio de la esfera,
- ii) $S_L = \{(q, \dot{q}) \in TQ : h(q) = 0\}$, es decir, el medio cascarón,
- iii) $R_L(q, \dot{q}) : S_L \rightarrow D_L$ dada por $R_L(q, \dot{q}) = (q, P(q, \dot{q}))$, donde $P(q, \dot{q})$ definida como en 4.4.5,

$$R_L(x, y, z, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3) = \left(x, y, z, \dot{q}_1 - (1+e)\frac{x^2\dot{q}_1}{r^2}, \dot{q}_2 - (1+e)\frac{y^2\dot{q}_2}{r^2}, \dot{q}_3 - (1+e)\frac{z^2\dot{q}_3}{r^2} \right)$$

- iv) X_L el campo vectorial Lagrangiano asociado a L .

Por lo tanto (D_L, S_L, R_L, X_L) es un sistema híbrido Lagrangiano simple.

Sea $\Phi : SO(2) \times Q \rightarrow Q$ la acción $(\theta, q) \mapsto \theta \cdot q$ y su levantada al tangente, la acción $\Phi^{TQ} : SO(2) \times TQ \rightarrow TQ$ dada por

$$(\theta, (q, \dot{q})) \mapsto (\theta \cdot q, \dot{q}),$$

que es una acción híbrida pues cumple que

$$R_L \circ \Phi^{TQ}|_{S_L} = \Phi^{TQ} \circ R_L.$$

Sea $J_L : TQ \rightarrow \mathfrak{g}^*$ la aplicación momento híbrida, ya que satisface la ecuación (4.2.23) de la Proposición 4.2.22. Dado $\mu \in \mathfrak{g}^*$ un valor regular híbrido de J_L , es decir $J(q, \dot{q}) = \mu$ y consideremos la subvariedad $J_L^{-1}(\mu) \subset TQ$. Aplicando la Proposición 4.4.40, el espacio reducido viene dado por $J_L^{-1}(\mu)/G_\mu \simeq T(Q/G) \times_{Q/G} Q/G_\mu$, donde G_μ es el grupo de isotropía de μ .

Consideremos ahora $Q = \mathbb{R}^3 \times SO(2)$. El Lagrangiano del sistema dado por

$$L(q, \dot{q}, \theta, \dot{\theta}) = \frac{m}{2}\dot{q}^2 + \frac{\tilde{e}}{c}A(q, \dot{q}) \cdot \dot{q}$$

Aplicando la Proposición 4.4.40, el espacio reducido viene dado por $J_L^{-1}(\mu)/G_\mu \simeq T(\mathbb{R}^3/G) \times_{\mathbb{R}^3/G} \mathbb{R}^3/G_\mu = T\mathbb{R}^3 \times_{\mathbb{R}^3} \mathbb{R}^3$. que será el espacio reducido. Por lo tanto, considerando

- i) $L_\mu : T\mathbb{R}^3 \times_{\mathbb{R}^3} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ el Lagrangiano reducido dado por

$$L_\mu(q, \dot{q}) = \frac{m}{2}\dot{q}^2 + \frac{\tilde{e}}{c}\mu$$

- ii) $D_{L_\mu} = \{(q, \dot{q}) \in T\mathbb{R}^3 \times_{\mathbb{R}^3} \mathbb{R}^3 : h(q) \geq 0\}$ con $h : Q \rightarrow \mathbb{R}$, una función diferenciable dada por $h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2$, donde $q = (x, y, z)$ y r es el radio de la esfera,
- iii) S_{L_μ} es una subvariedad de co dimensión 1 de $T\mathbb{R}^3 \times_{\mathbb{R}^3} \mathbb{R}^3$,

- iv) $R_{L_\mu} : \mathcal{S}_{L_\mu} \rightarrow D_{L_\mu}$ dada por $R_L(q, \dot{q}) = (q, P(q, \dot{q}))$, donde $P(q, \dot{q})$ definida como en la Definición 4.4.4,
- v) X_{L_μ} el campo vectorial Lagrangiano para el Lagrangiano reducido L_μ , donde las ecuaciones de movimiento son del tipo fuerzas de ley de Lorenz que describen el movimiento de una partícula cargada con masa m en un campo magnético $\vec{B} = (B_1, B_2, B_3)$ y están dadas por

$$m\ddot{q} = \frac{\tilde{e}}{c}(\dot{q} \times \vec{B}) \quad (4.5.10)$$

$$\dot{\mu} = 0 \quad (4.5.11)$$

Por lo tanto, el sistema híbrido Lagrangiano reducido es un sistema híbrido Lagrangiano magnético.

Observación 4.5.12. Como podemos observar, el Lagrangiano del ejemplo anterior, está sujeto a un término magnético B y es exactamente el Lagrangiano modificado del ejemplo de la partícula en un campo magnético tratado en el Ejemplo 2.2.2.

Capítulo 5

Existencia de Órbitas Periódicas en Sistemas Híbridos Reducidos

Las simetrías son utilizadas en un amplio rango de sistemas no lineales para extraer información de los aspectos cualitativos del sistema, en particular, sistemas cuya dinámica está determinada por funciones Lagrangianas o Hamiltonianas. Para sistemas híbridos que poseen dinámica continua determinada por una función Lagrangiana, y también poseen una variable cíclica, sus grados de libertad pueden reducirse por el llamado método *reducción de Routh híbrida*.

En este capítulo, estudiaremos condiciones suficientes para la existencia de órbitas periódicas en sistemas híbridos que provienen de la reducción de Routh híbrida y que además exhiben simetrías tiempo-reversible. Exploraremos algunos aspectos de estabilidad de estas órbitas mediante la caracterización de los autovalores de la matriz Jacobiana asociada a la correspondiente aplicación de Poincaré. Aplicaremos también los resultados para encontrar soluciones periódicas en sistemas de control híbridos Routhianos infraactuados.

5.1. Sistemas híbridos Routhianos simples

Cuando el espacio de configuraciones es $Q = P \times G$ (es decir, $D = TQ = TP \times TG$) con G un grupo de Lie abeliano y P una variedad diferenciable, en [4] y [8] A. Ames y S. Sastry introducen la noción de sistemas híbridos Routhianos. Esto se basa en dos propiedades de invarianza permitiendo la reducción por simetrías: un Lagrangiano cíclico regular $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ y una función $h : Q \rightarrow \mathbb{R}$, con h cíclica y definida en la misma coordenada que L . Estas dos propiedades de invarianza permiten definir el Routhiano $R_c^\mu : TP \rightarrow \mathbb{R}$ y la función reducida $\bar{h} : P \rightarrow \mathbb{R}$.

A. Ames y S. Sastry mostraron que si γ es la trayectoria para un sistema híbrido

Lagrangiano simple comenzando en $\gamma_0 \in J^{-1}(\mu)$, con $J : TQ \rightarrow \mathfrak{g}^*$ la aplicación momento asociada que preserva el momento μ (ver [62] para más detalles), entonces la trayectoria para el sistema híbrido Routhiano simple comenzando en $\pi(\gamma_0)$ con $\pi : TQ \rightarrow TP$ proyectado sobre el primer factor de $TQ = TP \times TG$, está determinado por $\pi(\gamma(t))$.

Definición 5.1.1. Un sistema híbrido simple $\mathcal{H} = (D, X, \mathcal{S}, R)$ es un **sistema híbrido Routhiano simple** si está determinado por $\mathcal{H}^{R_c^\mu} := (TP, X_{R_c^\mu}, \mathcal{S}^\mu, R^\mu)$, donde $X_{R_c^\mu} : TP \rightarrow T(TP)$ es el campo vectorial Routhiano, \mathcal{S}^μ es la superficie de impacto reducida dada por $\mathcal{S} |_{(J_L|_{\mathcal{S}})^{-1}(\mu)}$ con μ el momento determinado por la cantidad conservada que surge de la coordenada cíclica y $R^\mu : \mathcal{S}^\mu \rightarrow TP$ es la aplicación de impacto en \mathcal{S}^μ dada por $R |_{(J_L|_{\mathcal{S}})^{-1}(\mu)}$.

Definición 5.1.2. La **dinámica del sistema híbrido Routhiano simple** generado por $\mathcal{H}^{R_c^\mu}$ está dada por

$$\Sigma_{\mathcal{H}^{R_c^\mu}} : \begin{cases} \dot{\gamma}(t) = X_{R_c^\mu}(\gamma(t)), & \text{si } \gamma^-(t) \notin \mathcal{S}^\mu, \\ \gamma^+(t) = R^\mu(\gamma^-(t)), & \text{si } \gamma^-(t) \in \mathcal{S}^\mu, \end{cases} \quad (5.1.3)$$

donde $\gamma(t) = (x^a(t), \dot{x}^a(t)) \in TP$.

Notar que, como antes, $R^\mu : \mathcal{S}^\mu \rightarrow TP$ es continua y si denotamos por $\overline{R^\mu}(\mathcal{S}^\mu)$ la clausura de $R^\mu(\mathcal{S}^\mu)$ entonces podemos asumir $\overline{R^\mu}(\mathcal{S}^\mu) \cap \mathcal{S}^\mu = \emptyset$ y por lo tanto, un impacto no conduce inmediatamente a otro impacto. Asumiremos que $\mathcal{H}^{R_c^\mu}$ satisface (ver Sección 4.1 [86] para más detalles)

(A1) $\mathcal{S}^\mu \neq \emptyset$ y existe un subconjunto abierto $U \subset TP$ y una función diferenciable $\bar{h} : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{S}^\mu = \{x \in U \mid \bar{h}(x) = 0\}$ con $\frac{\partial \bar{h}}{\partial x}(s) \neq 0$ para todo $s \in \mathcal{S}^\mu$ (esto es, \mathcal{S}^μ es una subvariedad embebida de TS de co-dimensión 1).

(A2) Una trayectoria $\gamma : [0, T] \rightarrow TP$ cruza la superficie \mathcal{S}^μ en $t_i^- = \inf\{t > 0 \mid \gamma(t) \in \mathcal{S}^\mu\}$. Nosotros le permitimos a la trayectoria γ que no sea diferenciable pero sí continua en t_i^- . Esto es que, la velocidad antes del impacto \dot{x}^- puede ser diferente a la velocidad \dot{x}^+ después del impacto en \mathcal{S}^μ , es decir, $\dot{x}(t_i^-) \neq \dot{x}(t_i^+)$.

La condición de que la configuración a derecha después del impacto no permanezca en \mathcal{S}^μ (que es, $\overline{R^\mu}(\mathcal{S}^\mu) \cap \mathcal{S}^\mu = \emptyset$), se convierte en la condición de la existencia de velocidades de estado que el sistema tiene moviéndose fuera de la superficie de impacto a derecha después del impacto, que es, $\nabla \bar{h}(\gamma(t_i)) \cdot \dot{\gamma}(t_i^+) \leq 0$, con $\bar{h} : TP \rightarrow \mathbb{R}$ como en **A1**.

Una **trayectoria** de un sistema híbrido Routhiano está determinada por la dinámica asociada con el Routhiano hasta el instante cuando el estado cruza la superficie de impacto \mathcal{S}^μ . Nos referimos al instante como el **tiempo de impacto**. Hay un cambio instantáneo en la componente de velocidad del estado en el tiempo de impacto. La aplicación de impacto da nuevas condiciones iniciales para que la dinámica continua evolucione hasta que un nuevo impacto ocurra.

Observación 5.1.4. Definimos un sistema híbrido Routhiano simple a partir de un sistema híbrido simple como en [4]-[7]. Sin embargo nuestra definición es un poco diferente, pero no es contradictoria con la que se da en [4] y [5]. La restricción que define \mathcal{S}^μ es diferenciable y satisface ambas conjeturas **A1**, **A2**, (esto no está determinado por restricciones unilaterales como las consideradas en [4]-[7] y [13] ya que utilizamos el enfoque usado para sistemas con efectos de impulso siguiendo [45] y [86]). Usualmente, y especialmente en locomoción bípeda, la aplicación de impacto está dada por la ubicación de los pies en el suelo y proviene de una ecuación de impacto Newtoniana [5], [7], [13]. En esta sección sólo asumimos (como en [45] y [86]) que R^μ es diferenciable y está embebida en \mathcal{S}^μ satisfaciendo **A1**, **A2**.

Las soluciones para los sistemas dinámicos híbridos Routhianos simples $\Sigma_{\mathcal{H}R_c^\mu}$, son consideradas continuas a derecha y con límite finito a izquierda en cada impacto con \mathcal{S}^μ . Más precisamente, de manera análoga a como se definió antes:

Definición 5.1.5. Una **solución** para un sistema híbrido Routhiano $\Sigma_{\mathcal{H}R_c^\mu}$ es una curva $\gamma : [t_0, t_f) \rightarrow TP$, $t_f \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $t_f > t_0$, única para una condición inicial dada, que depende continuamente de ella, satisfaciendo **A2**, y tal que:

- (i) $\gamma(t)$ es continua a derecha en $[t_0, t_f)$,
- (ii) los límites a izquierda y derecha, denotados por $\gamma^-(t)$ y $\gamma^+(t)$, respectivamente, existen en cada punto $t \in (t_0, t_f)$,
- (iii) existe un subconjunto cerrado y discreto $\mathcal{I} \subset [t_0, t_f)$, los **tiempos de impacto**, tal que, para cada $t \notin \mathcal{I}$, $\gamma(t)$ es diferenciable, $\dot{\gamma}(t) = X_{R_c^\mu}(\gamma(t))$, y $\gamma(t) \notin \mathcal{S}^\mu$; y para $t \in \mathcal{I}$, $\gamma^-(t) \in \mathcal{S}^\mu$ y $\gamma^+(t) = R^\mu(\gamma^-(t))$.

Notar que la continuidad a derecha de las soluciones implica que $\gamma(t) = \gamma^+(t)$ para todo punto en su dominio de definición. Si $\alpha_0 \in TP$ denota la condición inicial a tiempo t_0 , la solución en t_0 es denotada por $\gamma(t_0, \alpha_0)$. Cuando $\alpha_0 \notin \mathcal{S}^\mu$, $\gamma(t_0, \alpha_0) = \alpha_0$ y cuando $\alpha_0 \in \mathcal{S}^\mu$, $\gamma(t_0, \alpha_0) = R^\mu(\alpha_0) = \gamma(t_0, R^\mu(\alpha_0))$ (ver Sección 4.1 en [86] para más detalles).

Observación 5.1.6. Las ecuaciones de Euler-Lagrange para R_c^μ involucran menos variables, que son más fáciles de resolver. Si el Lagrangiano L es regular, entonces uno procede resolviendo éstas primero, y entonces usando la restricción del momento $\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}$ se reconstruyen las soluciones buscadas de Euler-Lagrange para L .

Una preocupación especial es cuando tomamos traslaciones de esta técnica de reducción para sistemas híbridos. La razón es que las colisiones con la superficie de impacto, en general, modificarán el valor de la aplicación momento. Por lo tanto, si $\mathcal{J} = \{I_i\}_{i \in \Lambda}$ es el intervalo híbrido (ver Definición 6.3.5), el Routhiano tiene que estar definido en cada I_i tomando en cuenta el valor del momento μ_i después de la colisión a tiempo τ_i . Notar que esto también tiene influencia en la aplicación de impacto R reducida.

Denotemos:

- i) μ_i el momento del sistema en $I_i = [\tau_i, \tau_{i+1}]$,
- ii) R_{μ_i} la reducción de $R \mid_{(J_L|_S)^{-1}(\mu_i)}$,
- iii) \mathcal{S}_{μ_i} está dado por $\mathcal{S} \mid_{(J_L|_S)^{-1}(\mu_i)}$.

Con lo cual, hay una secuencia de sistemas híbridos Routhianos.

$$\begin{array}{ccc}
 [\tau_0, \tau_1] & \xrightarrow{\text{Red.}} & (S, R_c^{\mu_0}, \mathcal{S}_{\mu_0}, R_{\mu_0}) \\
 \text{Coll.} \downarrow & & \downarrow \text{Coll.} \\
 [\tau_1, \tau_2] & \xrightarrow{\text{Red.}} & (S, R_c^{\mu_1}, \mathcal{S}_{\mu_1}, R_{\mu_1}) \\
 \text{Coll.} \downarrow & & \downarrow \text{Coll.} \\
 (\dots) & \xrightarrow{\text{Red.}} & (\dots)
 \end{array}$$

Similarmente como en [8], el proceso de reconstrucción del flujo híbrido reducido para el flujo del Lagrangiano híbrido implica una integración recursiva en cada etapa del diagrama previo en la variable cíclica usando la solución del sistema híbrido Routhiano reducido, esto implica obligadamente la restricción del momento en la solución reconstruida.

Ejemplo 5.1.7. El robot saltarín de una pierna 2D

El robot saltarín de una pierna 2D consiste en un resorte cargado en un péndulo invertido junto con un cuerpo rígido planar sujeto en la cima del resorte (ver Figura 5.1). Este modelo es un esquema de la representación para el estado de fases de un robot bípedo corriendo o saltando con un pie en el suelo (ver [3] para más detalles). El punto común del vínculo es el centro de masa del cuerpo rígido (es decir, el resorte de la pierna está sujeto a la cadera junto con el centro de masa).

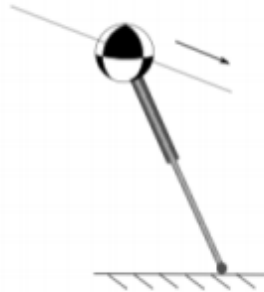


Figura 5.1: El robot saltarín de una pierna 2D

El espacio de configuraciones del sistema es $Q = (\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1) \times \mathbb{S}^1$, localmente parametrizado por las coordenadas $q = (\xi, \varphi, \theta)$ que describen la longitud del resorte,

el ángulo del resorte con respecto al suelo (es decir, el ángulo formado entre la línea que conecta el punto de apoyo del centro de masa y el eje vertical gravitacional) y la inclinación del cuerpo rígido, respectivamente. Denotamos por m la masa del cuerpo rígido, I su momento de inercia, el resorte se considera sin masa y l_0 denota la longitud de la pierna sin carga del resorte.

El movimiento está dividido en dos fases: la posición inicial con punto de apoyo fijo, la pierna bajo compresión y el cuerpo balanceándose hacia adelante (es decir, θ es creciente); y una fase de trayectoria que ocurre cuando el cuerpo rígido se mueve, describiendo un movimiento balístico bajo la influencia de la gravedad. La transición entre ambas fases ocurre cuando el resorte está descomprimido (es decir, está descargado) hasta el momento en que el resorte toca el suelo nuevamente. Ambas fases definen el sistema híbrido.

El Lagrangiano que describe el cambio de fases está dado por la energía cinética menos la energía potencial que es dada por el resorte potencial $V(\xi)$ y la potencial gravitacional, es decir,

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}m(\dot{\xi}^2 + \xi^2\dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - (mg\xi \cos \varphi + V(\xi)).$$

Para describir la superficie de impacto y la aplicación de impacto, notemos que la trayectoria comienza cuando la longitud del resorte alcanza su longitud máxima (es decir, $\xi = l_0$). Por lo tanto la superficie de impacto está dada por

$$\mathcal{S} = \{(\xi, \varphi, \theta, \dot{\xi}, \dot{\varphi}, \dot{\theta}) \in TQ | \xi = l_0\}.$$

Asumimos que en el comienzo la posición inicial de la pierna está cuando el ángulo es $-\varphi_0$. Utilizando coordenadas polares $x = \xi \sin \varphi$, $y = \xi \cos \varphi$ y dado que $y^+ = l_0 \cos(-\varphi_0) = l_0 \cos(\varphi_0)$, la aplicación de impacto está dada por

$$R(x^-, y^-, \theta^-, \dot{x}^-, \dot{y}^-, \dot{\theta}^-) = (-l_0 \sin \varphi_0, l_0 \cos \varphi_0, -\theta^-, \dot{x}^-, -\dot{y}^-, -\dot{\theta}^-).$$

Notar que el Lagrangiano y las restricciones que definen la superficie de impacto, $h(q) = \xi - l_0$, son cíclicas en θ . Por lo tanto denotando μ a la cantidad conservada, el Routhiano $R_c^\mu : T(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ está dado por

$$R_c^\mu(\xi, \varphi, \dot{\xi}, \dot{\varphi}) = \frac{m}{2}(\dot{\xi}^2 + \xi^2\dot{\varphi}^2) - \frac{\mu^2}{2I} - mg\xi \cos \varphi - V(\xi).$$

Notar que el Routhiano R_c^μ básicamente describe el movimiento del péndulo invertido con resorte (SLIP) que fue usado como un modelo que razonablemente proporciona una plantilla para los movimientos del plano del centro de masa (COM) de diversos sistemas de piernas como fue referido en [49] y estudiado más en detalle en [39] y [35]. La fase aérea consiste en un movimiento de proyectil (o balístico) para el

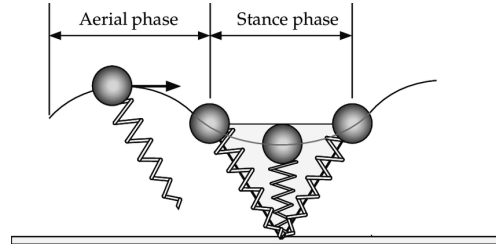


Figura 5.2: Péndulo invertido con resorte 2D

COM (donde la única fuerza externa es la gravedad) al final del cual, cuando $\xi = l_0$, la siguiente fase de postura comienza como se muestra en la Figura 5.2.

Las ecuaciones de Routh para R_c^μ están dadas por

$$\ddot{\xi} = \xi\dot{\varphi}^2 - g \cos \varphi - \frac{1}{m} \frac{\partial V}{\partial \xi}, \quad \ddot{\varphi} = \frac{g}{\xi} \operatorname{sen} \varphi - \frac{2\dot{\varphi}\dot{\xi}}{\xi}$$

que definen el campo vectorial Routhiano

$$X_{R_c^\mu}(s) = \left(s, \dot{\xi}, \dot{\varphi}, \xi\dot{\varphi}^2 - g \cos \varphi - \frac{1}{m} \frac{\partial V}{\partial \xi}, \frac{g}{\xi} \operatorname{sen} \varphi - \frac{2\dot{\varphi}\dot{\xi}}{\xi} \right)^T,$$

donde $s(t) = (\xi(t), \dot{\xi}(t), \varphi(t), \dot{\varphi}(t)) \in T(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1)$. Por lo tanto el sistema híbrido Routhiano simple $\Sigma_{\mathcal{H}R_c^\mu}$ está dado por

$$\Sigma_{\mathcal{H}R_c^\mu} : \begin{cases} \dot{s}(t) = X_{R_c^\mu}(s(t)), & \text{si } s^-(t) \notin \mathcal{S}^\mu, \\ s^+(t) = R^\mu(s^-(t)), & \text{si } s^-(t) \in \mathcal{S}^\mu, \end{cases} \quad (5.1.8)$$

donde

$$\mathcal{S}^\mu = \{(\xi, \dot{\xi}, \varphi, \dot{\varphi}) \in T(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1) | \xi = l_0\}$$

y

$$R^\mu(x^-, y^-, \dot{x}^-, \dot{y}^-) = (-l_0 \operatorname{sen} \varphi_0, l_0 \cos \varphi_0, \dot{x}^-, -\dot{y}^-).$$

5.2. Simetría tiempo reversible y soluciones periódicas en sistemas híbridos Routhianos simples

En esta sección estudiaremos cómo imponer simetrías en un campo vectorial Routhiano $X_{R_c^\mu}$ describiendo la dinámica a tiempo continuo de un sistema híbrido Routhiano simple y en la aplicación de impacto para conseguir movimientos periódicos en esta clase de sistemas híbridos.

5.2.1. Simetría tiempo reversible para sistemas híbridos Routhianos simples

Como fue visto en [56] (ver también [3]), la noción de simetría tiempo reversible juega un rol fundamental en sistemas mecánicos que son invariantes sobre la transformación $(q, \dot{q}, t) \mapsto (q, -\dot{q}, -t)$. Esta simetría implica que para una trayectoria en el espacio de fases $\gamma(t) = (q(t), \dot{q}(t))$ con condición inicial $\gamma_0 = (q_0, \dot{q}_0)$ entonces $\beta(t) = (q(-t), -\dot{q}(-t))$ es también solución para el sistema con condición inicial $\beta_0 = (q_0, -\dot{q}_0)$. En particular, en el espacio de configuraciones, si tenemos la trayectoria $q(t)$, también se tiene que es trayectoria $q(-t)$.

Definición 5.2.1. [56] Un difeomorfismo $\mathcal{R} : TP \rightarrow TP$ es llamado **simetría tiempo reversible** para el campo vectorial de Routh $X_{R_c^\mu}$ con Routhiano $R_c^\mu : TP \rightarrow \mathbb{R}$ si \mathcal{R} es una involución, que es $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} = Id$, y se satisface que

$$\frac{d\mathcal{R}}{dt}(\gamma(t)) = -X_{R_c^\mu}(\mathcal{R}(\gamma(t))). \quad (5.2.2)$$

Esto es, el campo vectorial de Routh satisface $X_{R_c^\mu}(\mathcal{R}(q, \dot{q})) = -d\mathcal{R}(q, \dot{q}) \cdot X_{R_c^\mu}(q, \dot{q})$.

Al campo vectorial de Routh que satisface la condición 5.2.2 lo llamamos **campo vectorial de Routh reversible** sobre la simetría tiempo reversible \mathcal{R} .

Observación 5.2.3. Notar que el nombre “tiempo reversible” está dado por el hecho de que la ecuación (5.2.2) puede ser escrita como

$$\mathcal{R} \circ X_{R_c^\mu}^t = X_{R_c^\mu}^{-t} \circ \mathcal{R},$$

donde $-t$ significa el tiempo reversible del campo vectorial $X_{R_c^\mu}^t$.

Proposición 5.2.4. Consideremos una simetría tiempo reversible \mathcal{R} para $X_{R_c^\mu}$. Si γ^* es un punto fijo de \mathcal{R} que es $\gamma(0) = \gamma^*$ para γ una curva integral de $X_{R_c^\mu}$ pasando por γ^* , entonces $\mathcal{R}(\gamma(t)) = \gamma(-t)$.

Demostración. Consideremos $\tilde{\gamma}(t) = \mathcal{R}(\gamma(-t))$, entonces $\tilde{\gamma}(0) = \mathcal{R}(\gamma(0)) = \mathcal{R}(\gamma^*) = \gamma^*$. Esto es, γ y $\tilde{\gamma}$ satisfacen la misma condición inicial.

Notar que $\dot{\tilde{\gamma}}(t) = -d\mathcal{R} \cdot \dot{\gamma}(-t)$, pero $\gamma(t)$ es una solución de $X_{R_c^\mu}$, entonces $\dot{\tilde{\gamma}}(t) = -d\mathcal{R} \cdot X_{R_c^\mu}(\gamma(-t))$.

Por ser \mathcal{R} una simetría tiempo reversible para $X_{R_c^\mu}$, entonces se tiene que $\dot{\tilde{\gamma}}(t) = X_{R_c^\mu}(\mathcal{R}(\gamma(-t)))$, y por definición de $\tilde{\gamma}(t)$, se tiene que $\dot{\tilde{\gamma}}(t) = X_{R_c^\mu}(\tilde{\gamma}(t))$. Por lo tanto, $\tilde{\gamma}(t)$ es una solución para $X_{R_c^\mu}$ con condición inicial γ^* . Por unicidad de soluciones para un problema con valores iniciales, $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t)$, que es $\mathcal{R}(\gamma(-t)) = \gamma(t)$. Como \mathcal{R} es una involución, $\mathcal{R}(\gamma(t)) = \gamma(-t)$. \square

Teorema 5.2.5. Sea $R_c^\mu : TP \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación Routhiana invariante bajo la aplicación $\mathcal{R} : TP \rightarrow TP$,

$$\mathcal{R}(q(t), \dot{q}(t)) = (F(q(t)), -dF(q) \cdot \dot{q}(t)) \quad (5.2.6)$$

con $F : Q \rightarrow Q$ una involución diferenciable. Si γ es una solución tal que $\gamma^* = (q^*, \dot{q}^*)$ es un punto fijo de \mathcal{R} , entonces $\mathcal{R}(\gamma(t)) = \gamma(-t)$. En particular $F(q(t)) = q(-t)$.

Demostración. Sea $\gamma(t)$ una solución de las ecuaciones de Routh para R_c^μ con condición inicial $\gamma(0) = \gamma^*$ y consideremos la aplicación $\tilde{\gamma}(t) = \mathcal{R}(\gamma(-t))$. Dado que γ^* es un punto fijo de \mathcal{R} ambas curvas en TP , $\gamma(t)$ y $\tilde{\gamma}(t)$, satisfacen las mismas condiciones iniciales. Como R_c^μ es invariante bajo \mathcal{R} , $R_c^\mu(\tilde{\gamma}(t)) = R_c^\mu(\mathcal{R}(\gamma(-t))) = R_c^\mu(\gamma(-t))$ y dado que las ecuaciones de Routh son invariantes bajo $(q, \dot{q}, t) \mapsto (q, -\dot{q}, -t)$, $R_c^\mu(\tilde{\gamma}(t)) = R_c^\mu(\gamma(t))$. Por lo tanto, $\tilde{\gamma}(t)$ y $\gamma(t)$ satisfacen las mismas ecuaciones de Routh. Luego, por unicidad de soluciones del problema a valores iniciales, se tiene que $\mathcal{R}(\gamma(t)) = \gamma(-t)$. Luego, se tiene que $F(q(t)) = q(-t)$. \square

5.2.2. Existencia de órbitas periódicas

Ahora, basados en las propiedades del Routhiano, encontramos condiciones suficientes para la existencia de soluciones periódicas en sistemas híbridos Routhianos simples en analogía con los resultados para sistemas Hamiltonianos invariantes estudiados en [23].

Teorema 5.2.7. *Sea $\Sigma_{\mathcal{H}R_c^\mu}$ un sistema híbrido dinámico Routhiano simple con Routhiano $R_c^\mu : TP \rightarrow \mathbb{R}$ invariante bajo $\mathcal{R} : TP \rightarrow TP$ definido como en Ecuación (5.2.6). Si γ es una solución tal que γ^* es un punto fijo de \mathcal{R} , γ cruza la superficie de impacto \mathcal{S} en $t_i^- = \inf\{t > 0 \mid \gamma(t) \in \mathcal{S}\}$ y la aplicación de impacto está definida como $R(\gamma^-(t_i)) = \mathcal{R}(\gamma^-(t_i))$ entonces $\gamma(t)$ es una solución periódica para $\Sigma_{\mathcal{H}R_c^\mu}$ con período $2t_i^-$.*

Demostración. Como R_c^μ es invariante bajo \mathcal{R} , por el Teorema 5.2.5, \mathcal{R} debe satisfacer $\mathcal{R}(\gamma(t)) = \gamma(-t)$. En particular, para $t = t_i^-$, usando la notación $\gamma(t_i^-) = \gamma^-(t_i)$, tenemos $\mathcal{R}(\gamma^-) = \gamma(-t_i^-) = \gamma^-(-t_i)$. Dado que por definición $R(\gamma^-) = \gamma^+(t)$ se tiene que $\gamma(t_i^+) = \gamma(-t_i)$ y por lo tanto, justo después del impacto, $\gamma(t)$ es reiniciada comenzando en $\gamma(-t_i)$ entonces, ésta es periódica con período $2t_i^-$. \square

La ventaja de este resultado es que podemos encontrar órbitas periódicas mirando justamente la función del Routhiano, por ejemplo usando la aplicación de Poincaré. También, dependiendo de la cantidad de puntos fijos, éste provee una familia de soluciones periódicas en lugar de una sólo órbita periódica.

Ejemplo 5.2.8. El robot saltarín de una pierna 2D - continuación

Consideremos el sistema híbrido 2D dado por un robot saltarín planar como en el Ejemplo 5.1.7. Hemos visto que después de emplear la reducción de Routh, este sistema se convierte en el conocido péndulo invertido con resorte 2D.

Consideremos la función $F : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ como $F(\xi, \varphi) = (\xi, -\varphi)$. F es una involución diferenciable. Usando F podemos construir la aplicación de simetría $\mathcal{R} : T(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1) \rightarrow T(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1)$ usando (5.2.6) como

$$\mathcal{R}(\xi, \varphi, \dot{\xi}, \dot{\varphi}) = (\xi, -\varphi, -\dot{\xi}, \dot{\varphi}).$$

Es fácil chequear que $R_c^\mu \circ \mathcal{R} = R_c^\mu$.

Los puntos fijos de \mathcal{R} están dados por $\gamma^* = (\xi^*, 0, 0, \dot{\varphi}^*)$, para un ξ^* y $\dot{\varphi}^*$. Sea t_i^- el instante donde γ cruza la superficie de impacto \mathcal{S}^μ y definiendo $R^\mu(t_i^-) = R^\mu(\xi^-, \varphi^-, \dot{\xi}^-, \dot{\varphi}^-) = \mathcal{R}(\xi^-, \varphi^-, \dot{\xi}^-, \dot{\varphi}^-) = (l_0, -\varphi_0, -\dot{\xi}^-, \dot{\varphi}^-)$. Por lo tanto, por el Teorema 5.2.7, existe una solución periódica del sistema híbrido Routhiano reducido determinado por R_c^μ y R^μ para el robot saltarín 2D, con período $2t_i^-$.

5.2.3. Aplicación de Poincaré

El método de secciones de Poincaré provee un método sistemático para testear si existen o no ciclos límites en un sistema dinámico. En primer lugar definimos la hipersuperficie E transversal a la órbita del sistema que es llamada *sección de Poincaré*. La *aplicación de Poincaré* $\mathcal{P} : E \rightarrow E$ es construida de la siguiente manera: dado $x \in E$, supongamos que la solución $\phi(t, x)$ interseca E transversalmente en tiempo $t = T_I(x)$. Entonces la aplicación de Poincaré está definida como $\mathcal{P}(x) := \phi(T_I(x), x)$. Si, por otro lado, la solución nunca interseca a E , entonces la aplicación de Poincaré no puede definirse en ese punto.

Si $x^* \in E$ es tal que $\mathcal{P}(x^*) = x^*$, entonces x^* es llamado *punto fijo*. Por definición de \mathcal{P} , esto significa que cuando una trayectoria comienza en x^* , la solución retorna a x^* en tiempo $T_I(x^*)$, significando que la solución $\phi(t, x^*)$ es periódica con período $T = T_I(x^*)$. El conjunto de puntos trazado en el plano es llamado *órbita periódica* o también *ciclo límite*. Existe una correspondencia uno a uno entre los puntos fijos de la aplicación de Poincaré y las órbitas periódicas. En realidad, los puntos fijos corresponden a la intersección de la órbita periódica con E , o dicho de otra manera, los puntos fijos corresponden a condiciones iniciales en E para los que la solución correspondiente dé lugar a una órbita periódica.

Denotamos los puntos de E en los que la solución impacta en tiempo t_k como $x[k] : x(t_k) := \phi(t_k, x_0)$. Entonces, por la definición de aplicación de Poincaré, $x[k+1] = \mathcal{P}(x[k])$, que es un sistema de tiempos discretos que evoluciona en la Sección de Poincaré E .

La aplicación de Poincaré $\mathcal{P} : E \rightarrow E$ convierte el problema de encontrar ciclos límites en encontrar puntos de equilibrio para un sistema de tiempos discretos que evolucionan en la Sección de Poincaré, específicamente, $x[k+1] = \mathcal{P}(x[k])$, con $x[0] \in E$. La estabilidad de los ciclos límites puede ser determinada analizando la estabilidad de los puntos de equilibrio $x^* = \mathcal{P}(x^*)$.

El método de Poincaré es conceptualmente igual por crecimiento a la dimensión del sistema: la Sección de Poincaré E está definida como una hipersuperficie transversal a la órbita periódica y la aplicación de Poincaré $\mathcal{P} : E \rightarrow E$ está definida por iniciar la ecuación diferencial en E y seguir una solución resultante hasta la primera intersección con E en el sentido opuesto como se ilustra en la Figura 5.3; si la intersección no ocurre, la aplicación de Poincaré no está definida en el punto. Luego las órbitas periódicas de la ecuación diferencial corresponden a puntos fijos de la aplicación de Poincaré, ellos corresponden a encontrar solución a $\mathcal{P}(x) - x = 0$. Una vez que un punto fijo es encontrado, la equivalencia entre los puntos fijos y los puntos de equilibrio del sistema de tiempos discretos $x[k + 1] = \mathcal{P}(x[k])$, $x[0] \in E$, puede explorarse para estudiar la estabilidad o inestabilidad de la órbita analizando los autovalores de la matriz Jacobiana de la linealización en el equilibrio.

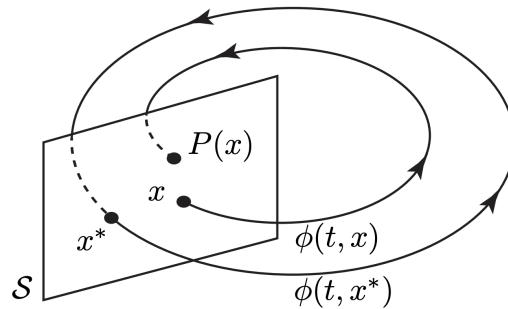


Figura 5.3

5.2.4. Análisis de estabilidad para órbitas periódicas

Sea $\gamma(t)$ una solución periódica para $\Sigma_{\neq \mathbb{R}^c}$ (con período $2t_i^-$) asociado a una simetría tiempo reversible $\mathcal{R} : TP \rightarrow TP$ y $\gamma^* = \gamma(0)$ un punto fijo de \mathcal{R} . Para el análisis de estabilidad de esta órbita, usamos el método de la aplicación de Poincaré [46], [70].

Sea \mathcal{P} la aplicación de Poincaré correspondiente a la órbita periódica $\gamma(t)$, que es, $\mathcal{P} : \mathcal{S}_{\gamma^*}^\mu \rightarrow \mathcal{S}_{\gamma^*}^\mu$, siendo $\mathcal{S}_{\gamma^*}^\mu$ (es decir, la superficie de impacto reducida en el punto fijo γ^*) la **sección de Poincaré**, una hipersuperficie en γ^* , de co-dimensión uno del espacio de configuración reducido, donde asumimos que $\gamma^* \in \mathcal{S}_{\gamma^*}^\mu$.

Dado que γ es una órbita periódica y $\gamma(0) = \gamma^*$, por definición de aplicación de Poincaré, $\mathcal{P}(\gamma^*) = \gamma^*$. Empleando el método de aplicación de Poincaré para el análisis de estabilidad tenemos que $\gamma(t)$ es asintóticamente estable en γ^* si los autovalores de la matriz Jacobiana de \mathcal{P} (es decir, su aplicación tangente) en γ^* , denotado por $\mathcal{TP} : T_{\gamma^*}\mathcal{S}_{\gamma^*}^\mu \rightarrow T_{\gamma^*}\mathcal{S}_{\gamma^*}^\mu$, están en el interior del círculo unitario (es decir, si el sistema discreto $\gamma_{n+1} = \mathcal{P}(\gamma_n)$ es asintóticamente estable en γ^*).

Denotamos por $\text{Fix}(f)$ el conjunto de puntos fijos asociados a la función $f : TP \rightarrow TP$, que es,

$$\text{Fix}(f) = \{x \in TP \mid f(x) = x\}.$$

Dado que \mathcal{R} es un difeomorfismo, $\text{Fix}(\mathcal{R})$ es una subvariedad embebida de TP y asumimos que tiene dimensión constante, $r = \dim(\text{Fix}(\mathcal{R})) < \dim(TS)$. Por lo tanto, existe una hipersuperficie $\mathcal{S}_{\gamma^*}^\mu$ de γ^* tal que $T_\gamma \text{Fix}(\mathcal{R}) \subset T_\gamma \mathcal{S}_{\gamma^*}^\mu$. Denotamos por $\{q^\alpha\} = (q^1, \dots, q^r)$ con $1 \leq \alpha \leq r$ las coordenadas locales de la subvariedad $\text{Fix}(\mathcal{R})$. Por lo tanto, en este conjunto de coordenadas locales, si $\gamma^* \in TP$, se tiene que $\gamma^* = (\gamma_1^*, \dots, \gamma_r^*, 0, \dots, 0) \in \text{Fix}(\mathcal{R})$, entonces $\mathcal{P}(\gamma^*, 0) = \gamma^*$.

Definición 5.2.9 ([86]). Sea $\phi(t, \alpha_0)$ una solución para $\Sigma_{\mathcal{H}^{\mathbb{R}^c_\mu}}$. Entonces la aplicación $T_{R^\mu} : TP \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ dada por

$$T_{R^\mu}(\alpha_0) = \begin{cases} \inf\{t \leq 0 \mid \phi(t, \alpha_0) \in \mathcal{S}^\mu\} & \text{si existe } t : \phi(t, \alpha_0) \in \mathcal{S}^\mu, \\ \infty & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (5.2.10)$$

es llamada **aplicación de impacto tiempo reversible**.

Luego, denotamos por λ_i los autovalores de la matriz Jacobiana \mathcal{TP} , y

$$\Lambda_0 = \{\#\lambda_i \text{ tal que } |\lambda_i| = 0\}, \quad \Lambda_1 = \{\#\lambda_i \text{ tal que } |\lambda_i| = 1\}$$

donde $\#$ significa “cantidad”.

Lema 5.2.11. Sea $\gamma(t)$ una solución periódica para un sistema híbrido simple $\Sigma_{\mathcal{H}}$ como en la Ecuación 4.1.2, y $\mathcal{P} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ la aplicación de Poincaré correspondiente a $\gamma(t)$. Si $\text{rango}(R) = \beta$ es constante, entonces $\Lambda_0 \geq n - 1 - \beta$.

Demostración. Consideremos la aplicación $N : R(\mathcal{S}) \rightarrow \mathcal{S}$ dada por $N(x) = \phi(T_R(x), x)$. Por lo tanto, $\mathcal{P}(x) = N(R(x))$ y se tiene que

$$\mathcal{TP}(\gamma^*) = dN(R(\gamma^*)) \cdot dR(\gamma^*).$$

Dado que $\text{rango } dN(R(\gamma^*)) \cdot dR(\gamma^*) \leq \text{rango } (dR(\gamma^*)) = \beta$ y $\dim(\mathcal{S}) \leq n - 1$, por el Teorema del rango constante y el hecho de que el núcleo de \mathcal{TP} es precisamente el espacio de autovalores de 0, se tiene que $\Lambda_0 \geq n - 1 - \beta$. \square

Teorema 5.2.12. Sea $\Sigma_{\mathcal{H}^{\mathbb{R}^c_\mu}}$ un sistema híbrido Routhiano simple que satisface $\mathcal{R}(\gamma(t)) = \gamma(-t)$ con $\gamma(0) = \gamma^*$ un punto fijo de \mathcal{R} . Si $\gamma(t)$ es una solución periódica transversal de $\mathcal{S}_{\gamma^*}^\mu$ en γ^* , entonces $\Lambda_1 \geq r$.

Demostración. Por la hipótesis de transversalidad, podemos emplear el Teorema 3.3 en [43] y entonces existe un subconjunto abierto $\mathcal{O} \subset TP$ de γ^* con $\mathcal{S}_{\gamma^*}^\mu \subset \mathcal{O}$, donde cada trayectoria que comienza en \mathcal{O} cruza \mathcal{S}^μ y donde existe una aplicación

de Poincaré $\mathcal{P} : \mathcal{S}_{\gamma^*}^\mu \rightarrow \mathcal{S}_{\gamma^*}^\mu$. Denotamos por $\mathcal{P} = [\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_{n-1}]$ la aplicación de Poincaré en coordenadas locales $(x^a, \dot{x}^a) \in TP$, satisfaciendo $\mathcal{P}(\gamma^*, 0) = \gamma^*$ donde $\gamma^* \in \text{Fix}(\mathcal{R})$. Como \mathcal{R} es una simetría tiempo reversible, cada solución que comienza en γ^* es una órbita periódica.

Es fácil chequear que $\mathcal{TP}_{ij}(\gamma^*) = \delta_{ij}$ con $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ y $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$, para $i = 1, \dots, n-1$ y $j = 1, \dots, r$, donde \mathcal{TP}_{ij} denota la (i, j) -entrada para la matriz Jacobiana de \mathcal{P} . En realidad, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{TP}_{ii}(\gamma^*) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{P}_i(\gamma_1^*, \dots, \gamma_i^* + h, \dots, \gamma_k^*, 0, \dots, 0) - \mathcal{P}_i(\gamma_1^*, \dots, \gamma_i^*, \dots, \gamma_k^*, 0, \dots, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma_i^* + h - \gamma_i^*}{h} = 1, \end{aligned}$$

y para $i \neq j$,

$$\begin{aligned} \mathcal{TP}_{ij}(\gamma^*) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{P}_i(\gamma_1^*, \dots, \gamma_j^* + h, \dots, \gamma_k^*, 0, \dots, 0) - \mathcal{P}_i(\gamma_1^*, \dots, \gamma_i^*, \dots, \gamma_k^*, 0, \dots, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma_i^* - \gamma_i^*}{h} = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto \mathcal{TP} tiene los últimos r autovalores λ_i con $|\lambda_i| = 1$. \square

Ejemplo 5.2.13. El robot saltarín de una pierna 2D: continuación

Consideremos la situación del Ejemplo 5.2.8, que es un sistema 4-dimensional en $T(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1)$. Los puntos fijos de \mathcal{R} son $\gamma^* = (\xi^*, 0, 0, \dot{\varphi}^*)$. Entonces $\dim(\text{Fix}(\mathcal{R})) = 2$.

Por el Teorema 5.2.12, $\Lambda_1 \geq 2$. Entonces $\mathcal{TP}(\gamma^*)$ es de la forma

$$\mathcal{TP}(\gamma^*) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}.$$

Dado que $\text{rango}(R^\mu) = 2$, $\Lambda_0 \geq 1$. Por lo tanto $\mathcal{TP}(\gamma^*)$, en una apropiada elección de coordenadas, tiene la forma

$$\mathcal{TP}(\gamma^*) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & * & 0 \\ 0 & 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces el conjunto de autovalores de \mathcal{TP} es $\{1, 1, \lambda, 0\}$. Luego, si $|\lambda| < 1$, la órbita periódica es marginalmente estable.

Observación 5.2.14. Notar que en el ejemplo anterior podemos caracterizar la estabilidad neutral de la solución periódica γ . Sería interesante considerar perturbaciones en sistemas híbridos Routhianos simples, similarmente a lo tratado en [75], mientras las perturbaciones preserven la simetría, en el sentido de que podemos rotar la neutralidad de una órbita periódica estable en un ciclo límite estable, y emplear una aproximación a la reducción [83], [84] podemos emplear en el caso de perturbaciones que no preservan la simetría. Ésto se explorará en un trabajo futuro considerando una adaptación del método para sistemas híbridos dado en [35] y [83], respectivamente.

5.3. Aplicación de existencia de órbitas periódicas en sistemas híbridos de control Routhianos

Ahora, aplicaremos los resultados dados en la sección previa a sistemas de control subactuados. Estudiamos la noción de dinámica cero híbrida dada en [86] junto con una simetría tiempo reversible y podemos obtener una caracterización con facilidades para buscar soluciones periódicas en sistemas híbridos de control Routhianos.

5.3.1. Sistemas mecánicos de control subactuados

Un sistema de control subactuado es un sistema donde la cantidad de actuadores es menor que la dimensión del espacio de configuración.

Consideremos una aplicación Lagrangiana $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$, con $\dim(Q) = n$ y cíclica con respecto a una de sus coordenadas. Asumimos que la variable cíclica es la última por simplicidad en la expresión, que es, $q^i = (x^a, \theta)$, $a = 1, \dots, n-1$, siendo θ cíclica. En el sentido de crear una ley de control para controlar el sistema híbrido Routhiano simple, agregamos un control en las ecuaciones dinámicas, es decir, la dinámica ahora está dada por las **ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange subactuadas** [10]

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} &= u_\alpha, & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\beta} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\beta} &= 0, \end{aligned}$$

donde $\alpha = 1, \dots, k$; $\beta = k+1, \dots, n-1$, con $u(t) = (u_1(t), \dots, u_k(t)) \in U$ control impuesto y donde U es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^k , el conjunto de controles admisibles. Asumimos que el último de los grados de libertad no está controlado, es decir, en el espacio de configuraciones la variable cíclica θ está sin controlar.

Empleando la reducción de Routh, como la variable cíclica está sin controlar, entonces las ecuaciones reducidas están ahora controladas por las ecuaciones de Routh

para el Routhiano $R_c^\mu : TP \rightarrow \mathbb{R}$, que son,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial R_c^\mu}{\partial \dot{x}^a} \right) - \frac{\partial R_c^\mu}{\partial x^a} &= u_\alpha, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial R_c^\mu}{\partial \dot{x}^\beta} \right) - \frac{\partial R_c^\mu}{\partial x^\beta} &= 0. \end{aligned}$$

Las ecuaciones anteriores descienden de un modelo de sistema de control afín de la forma

$$\dot{\gamma} = X_{R_c^\mu}(\gamma) + C(\gamma)u := X(\gamma, u) \quad (5.3.1)$$

donde C es una matriz constante, $X_{R_c^\mu}$ el campo vectorial de Routh y $X : TP \times U \rightarrow T(TP)$ un campo vectorial, llamado **campo vectorial de control**. La 5-upla $\mathbf{H}_c^{R_c^\mu} = (TP, U, \mathcal{S}^\mu, R^\mu, X)$ con \mathcal{S}^μ y R^μ como en la Definición 5.1.1 y $X : TP \times U \rightarrow T(TS)$ definido en (5.3.1) es llamado **sistema híbrido de control Routhiano**. Un sistema híbrido Routhiano simple es un sistema híbrido de control Routhiano con $U = \{0\}$.

5.3.2. Dinámica cero híbrida y soluciones periódicas para sistemas híbridos Routhianos simples de control

Definición 5.3.2 ([53]). Consideremos el campo vectorial de control $X(\gamma, w)$ dado en (5.3.1). La subvariedad embebida \mathcal{Z} de TP dada por

$$\mathcal{Z} = \{\tilde{\gamma} \in TS \mid \exists! u^*(\tilde{\gamma}) \text{ tal que } X(\tilde{\gamma}, u^*(\tilde{\gamma})) \in T_{\tilde{\gamma}}\mathcal{Z}\}$$

es llamada la **subvariedad dinámica cero** de TP y $\dot{\tilde{\gamma}} = X(\tilde{\gamma}, u^*(\tilde{\gamma}))$ es la **dinámica cero asociada** en \mathcal{Z} .

Teorema 5.3.3. *Consideremos un sistema de control $\dot{\gamma} = X(\gamma, u)$ como en (5.3.1) con campo vectorial Routhiano asociado $X_{R_c^\mu}$ y \mathcal{Z} la subvariedad de dinámica cero asociada. Si \mathcal{Z} es invariante bajo la simetría tiempo reversible \mathcal{R} para $X_{R_c^\mu}$,*

$$C(\mathcal{R}(\gamma))\Gamma(u) = -(d\mathcal{R}(\gamma)C(\gamma))u \quad (5.3.4)$$

para todo $\gamma \in TP$ y $\Gamma : U \rightarrow U$ es una aplicación uno a uno invertible, entonces si γ^* es un punto fijo de \mathcal{R} en \mathcal{Z} la solución $\gamma(t) : I \rightarrow TP$ con condición inicial $\gamma(0) = \gamma^*$ permanece en \mathcal{Z} y $\mathcal{R}(\gamma(t)) = \gamma(-t) \forall t \in I$. Más aún, para todo $\gamma \in \mathcal{Z}$ se tiene que $u^*(\mathcal{R}(\gamma)) = \Gamma(u^*(\gamma))$ y

$$\mathcal{X}(\mathcal{R}(\gamma)) = -d\mathcal{R}(\gamma) \cdot \mathcal{X},$$

donde \mathcal{X} y \mathcal{R} denotan las restricciones en \mathcal{Z} de X y \mathcal{R} respectivamente.

Demostración. Si $\gamma^* \in \mathcal{Z}$ es un punto fijo de \mathcal{R} , por definición de dinámica cero $X(\gamma, u^*(\gamma)) \in T_\gamma\mathcal{Z} \forall \gamma \in \mathcal{Z}$, por consiguiente $\gamma(t) \in \mathcal{Z} \forall t \in I$. Más aún, por Teorema 5.2.5 $\mathcal{R}(\gamma(t)) = \gamma(-t)$.

Ahora, dado que \mathcal{Z} es invariante bajo \mathcal{R} , que es $\mathcal{R}(\gamma) \in \mathcal{Z} \forall \gamma \in \mathcal{Z}$, entonces

$$-d\mathcal{R}(\gamma) \cdot X(\gamma, u^*(\gamma)) \in T_{\mathcal{R}(\gamma)}\mathcal{Z}. \quad (5.3.5)$$

Por definición de dinámica cero

$$X(\mathcal{R}(\gamma), u^*(\mathcal{R}(\gamma))) \in T_{\mathcal{R}(\gamma)}\mathcal{Z}.$$

Usando que $C(\mathcal{R}(\gamma))\Gamma(u(\gamma)) = -(d\mathcal{R}(\gamma)C(\gamma))u(\gamma)$ y el hecho que \mathcal{R} es una simetría tiempo reversible para $X_{R_c^\mu}$, $-d\mathcal{R}(\gamma) \cdot X_{R_c^\mu}(\gamma) = X_{R_c^\mu}(\mathcal{R}(\gamma))$. Por lo tanto,

$$X_{R_c^\mu}(\mathcal{R}(\gamma)) + C(\mathcal{R}(\gamma))\Gamma(u^*(\gamma)) \in T_{\mathcal{R}(\gamma)}\mathcal{Z}.$$

Finalmente por Definición 5.3.2 el control $u^*(\gamma)$ es único, (5.3.5) es equivalente a $X_{R_c^\mu}(\mathcal{R}(\gamma)) + C(\mathcal{R}(\gamma))\Gamma(u^*(\gamma))$. Por lo tanto $\forall \gamma \in \mathcal{Z}$, $\Gamma(u^*(\gamma)) = u^*(\mathcal{R}(\gamma))$ y dado que \mathcal{R} es una simetría tiempo reversible para $X_{R_c^\mu}$, se tiene que $-d\mathcal{R}(\gamma) \cdot X(\gamma, u^*(\gamma)) = X(\mathcal{R}(\gamma), u^*(\mathcal{R}(\gamma))) \in T_{\mathcal{R}(\gamma)}\mathcal{Z}$. \square

La siguiente definición está en analogía con [86] para la clase de sistemas híbridos de control Routhianos:

Definición 5.3.6. Sea $\mathcal{H}_c^{R_c^\mu}$ un sistema híbrido de control Routhiano simple y \mathcal{Z} la subvariedad de dinámica cero para $X_{R_c^\mu}$ impuesta por $u^*(\gamma)$. Denotando $\mathcal{W} = \mathcal{Z} \cap S^\mu$, la subvariedad \mathcal{Z} es llamada **invariante híbrida** si $R^\mu(\mathcal{W}) \subset \mathcal{Z}$.

Definición 5.3.7. Consideremos el sistema híbrido de control Routhiano $\widetilde{\mathcal{H}}_c^{R_c^\mu} = (\mathcal{Z}, U, \mathcal{W}, R^\mu|_{\mathcal{Z}}, \mathcal{X})$ generando la dinámica del sistema híbrido de control

$$\Sigma_{\widetilde{\mathcal{H}}_c^{R_c^\mu}} : \begin{cases} \dot{\gamma}(t) = \mathcal{X}(\gamma(t), u^*(\gamma(t))), & \gamma^-(t) \notin \mathcal{X} \\ \gamma^+(t) = R^\mu|_{\mathcal{Z}}(\gamma^-(t)), & \gamma^-(t) \in \mathcal{W}. \end{cases} \quad (5.3.8)$$

La dinámica del sistema híbrido de control $\Sigma_{\widetilde{\mathcal{H}}_c^{R_c^\mu}}$ es llamada la **dinámica híbrida cero** asociada al sistema híbrido de control Routhiano $\mathcal{H}_c^{R_c^\mu}$.

Teorema 5.3.9. Consideremos la situación y las hipótesis del Teorema 5.3.3 pero donde ahora γ es una solución de $\Sigma_{\widetilde{\mathcal{H}}_c^{R_c^\mu}}$ satisfaciendo $\gamma(0) = \gamma^*$ con $\gamma^* \in \mathcal{Z}$ un punto fijo de la simetría tiempo reversible \mathcal{R} para $X_{R_c^\mu}$ con \mathcal{Z} invariante híbrido. Si además γ cruza la superficie de impacto \mathcal{W} en $t_i^- = \inf\{t > t_{i-1} | \gamma(t) \in \mathcal{W}\}$ y la aplicación de impacto está definida como $R^\mu(\gamma^-(t_i)) = \mathcal{R}(\gamma^-(t_i))$ entonces $\gamma(t)$ es una solución periódica de \mathcal{Z} para el sistema híbrido de control Routhiano simple $\Sigma_{\widetilde{\mathcal{H}}_c^{R_c^\mu}}$ con período $2t_i^-$.

Demostración. Por el Teorema 5.3.3 $\gamma(t) \in \mathcal{Z}$ y $\mathcal{R}(\gamma(t)) = \gamma(-t) \forall t \in I$. En particular, para $t_i = t_i^-$, denotando $\gamma(t_i^-) = \gamma^-(t_i) \in \mathcal{W}$, tenemos $\mathcal{R}(\gamma^-) = \gamma^-(-t_i)$. Como $R^\mu(\gamma^-(t_i)) = \mathcal{R}(\gamma^-(t_i))$, $R^\mu(\gamma^-) = \gamma^+(t)$ y entonces $\gamma(t_i^+) = \gamma(-t_i)$. Por lo tanto, después del impacto, la solución $\gamma(t)$ se reinicia en $\gamma(-t_i)$, entonces es periódica con período $2t_i^-$. \square

Notar que por el resultado previo, dependiendo de la cantidad de puntos fijos, se tiene una familia de soluciones periódicas en vez de una sola órbita periódica.

Ejemplo 5.3.10. Péndulo invertido con resorte controlado 2D

Consideremos el robot saltarín 2D con dos grados de libertad sin controlar, uno en el ángulo de inclinación y el otro en la altitud del cuerpo rígido (es decir, nosotros solo controlamos la longitud del resorte). Empleando los resultados del Ejemplo 5.1.7 las ecuaciones de Routh controladas están dadas por

$$\ddot{\xi} = \xi\dot{\varphi}^2 - g \cos \varphi - \frac{1}{m} \frac{\partial V}{\partial \xi} + u, \quad \ddot{\varphi} = \frac{g}{\xi} \sin \varphi - \frac{2\dot{\varphi}\dot{\xi}}{\xi}$$

donde u es un torque aplicado al largo del resorte. Considerando el potencial elástico como $V(\xi) = \frac{1}{2}\kappa(\xi - l_0)^2$, con $\kappa \in \mathbb{R}^+$ la constante del resorte.

Siguiendo el Ejemplo 5.2.8 consideramos la involución diferenciable $F(\xi(t), \varphi(t)) = (\xi(t), -\varphi(t))$ y $\mathcal{R}(\gamma(t)) = (\xi(t), -\varphi(t), -\dot{\xi}(t), \dot{\varphi}(t))$. Fijamos los puntos de \mathcal{R} como $\gamma^* = (\xi^*, 0, 0, \dot{\varphi}^*)$. El Routhiano R_c^μ es invariante bajo \mathcal{R} y $X_{R_c^\mu}$ es un campo vectotial Routhiano tiempo reversible. Entonces $\mathcal{R}(\gamma(t)) = (\xi(-t), -\varphi(t), -\dot{\xi}(t), \dot{\varphi}(-t))$, como consecuencia del Teorema 5.2.5.

Ahora, definimos la subvariedad de dinámica cero como

$$\mathcal{Z} = \left\{ (\xi, \varphi, \dot{\xi}, \dot{\varphi}) \in T(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1) \mid \xi = h(\varphi), \dot{\xi} = \frac{\partial h}{\partial \varphi} \dot{\varphi} \right\}$$

donde h es una función de φ . Notar que esta elección de h deja \mathcal{Z} invariante bajo \mathcal{R} y por lo tanto la dinámica cero puede ser escrita como

$$\ddot{\varphi} = \frac{1}{h(\varphi)} \left(g \sin \varphi - 2\dot{\varphi}^2 \frac{\partial h}{\partial \varphi} \right).$$

Notar que $C(\gamma) \circ \mathcal{R}(\gamma) = -d\mathcal{R}(\gamma)C(\gamma)$ y entonces $\Gamma(u) = u$.

El control impuesto $u^*(\varphi, \dot{\varphi})$ en \mathcal{Z} es

$$u^*(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{\partial^2 h}{\partial \varphi^2} \dot{\varphi} + \frac{\partial h}{\partial \varphi} \frac{g \sin \varphi}{h(\varphi)} - \frac{2\dot{\varphi}^2}{h(\varphi)} \left(\frac{\partial h}{\partial \varphi} \right)^2 - h(\varphi) \dot{\varphi}^2 + g \cos \varphi + \frac{\kappa(h(\varphi) - l_0)}{m}$$

y es fácil chequear que éste satisface $u^*(-\varphi, \dot{\varphi}) = u^*(\varphi, \dot{\varphi})$, que es, $u^*(\mathcal{R}(\gamma)) = \Gamma(u^*(\gamma))$. La aplicación \mathcal{R} en \mathcal{Z} está dada por

$$\mathcal{R}(\varphi, \dot{\varphi}) = (h(\varphi), -\varphi, -\frac{\partial h}{\partial \varphi} \dot{\varphi}, \dot{\varphi}).$$

Luego $\tilde{\gamma}^* = (h(0), 0, -\frac{\partial h}{\partial \varphi}|_{\varphi=0} \cdot \dot{\varphi}^*, \dot{\varphi}^*)$ es un punto fijo de \mathcal{R} en \mathcal{Z} , la solución $\gamma(t)$ con $\gamma(0) = \tilde{\gamma}^*$ permanece en \mathcal{Z} . Finalmente, si definimos la superficie de impacto \mathcal{S} como en el Ejemplo 5.2.8 y la aplicación de impacto como $R^\mu(\xi^-, \varphi^-, \dot{\xi}^-, \dot{\varphi}^-) = \mathcal{R}(\xi^-, \varphi^-, \dot{\xi}^-, \dot{\varphi}^-) = (l_0, -\varphi_0, -\dot{\xi}^-, \dot{\varphi}^-)$ entonces $\mathcal{W} = \{(\varphi, \dot{\varphi}) \in \mathcal{Z} | h(\varphi) = l_0\}$ y \mathcal{Z} es invariante híbrido porque h es una función dada. Por lo tanto, $\gamma(t)$ es una solución periódica para el sistema híbrido de control Routhiano simple.

Capítulo 6

Sistemas Híbridos Cosimplécticos

En este capítulo, estudiaremos sistemas híbridos que describen la evolución de Lagrangianos no-autónomos y donde la superficie de impacto involucra el tiempo. El objetivo fundamental es brindar una teoría general de la reducción por simetrías de sistemas híbridos dependientes en el tiempo, donde la dinámica continua está dada por aplicaciones Lagrangianas que dependen del tiempo.

Aunque el enfoque y los ejemplos en este trabajo están basados en el caso de coordenadas cíclicas, el objetivo que aquí presentamos puede ser generalizado a simetrías más generales (que son, simetrías por acciones de grupos no abelianos).

En primer lugar, introduciremos los resultados básicos de geometría de los sistemas mecánicos dependientes en el tiempo y, seguidamente las variedades cosimplécticas y el Teorema de reducción cosimpléctica usual. Luego, definiremos los sistemas mecánicos híbridos dependientes en el tiempo, la relación entre formalismos Lagrangiano y Hamiltoniano y los sistemas híbridos dependientes en el tiempo con simetrías. Por último, daremos el esquema del proceso de reducción para esta clase de sistemas híbridos, discutiendo el proceso de reconstrucción de las soluciones de manera numérica y analítica. La teoría será ilustrada con dos ejemplos de sistemas híbridos dependientes en el tiempo: una partícula que se mueve en una superficie con borde, donde el borde es movable; y una partícula que se mueve sobre una superficie rugosa que produce disipación.

6.1. Geometría de Sistemas Mecánicos dependientes en el tiempo

Sea Q el espacio de configuraciones del sistema mecánico, una variedad diferenciable de dimensión n con coordenadas locales $q = (q^1, \dots, q^n)$. Sea TQ el fibrado tangente de Q , descrito localmente por posiciones y velocidades para el sistema

$(q^i, \dot{q}^i) \in TQ$ con $\dim(TQ) = 2n$. Sea T^*Q su fibrado cotangente, descrito localmente por posiciones y momentos para el sistema $(q^i, p_i) \in T^*Q$ con $\dim(T^*Q) = 2n$. El fibrado tangente y el fibrado cotangente en un punto $q \in Q$ son denotados como T_qQ y T_q^*Q respectivamente.

Consideremos un Lagrangiano dependiente en el tiempo $L : \mathbb{R} \times TQ \rightarrow \mathbb{R}$, y denotemos por $\mathbb{F}L : \mathbb{R} \times TQ \rightarrow \mathbb{R} \times T^*Q$ la transformada de Legendre asociada a L

$$\begin{aligned} \mathbb{F}L : \mathbb{R} \times TQ &\rightarrow \mathbb{R} \times T^*Q, \\ (t, q, \dot{q}) &\mapsto (t, q, p := \partial L / \partial \dot{q}). \end{aligned}$$

Asumimos que el Lagrangiano es **hiperregular**, es decir $\mathbb{F}L$ es un difeomorfismo entre $\mathbb{R} \times TQ$ y $\mathbb{R} \times T^*Q$. Si L es hiperregular, uno puede trabajar sobre las velocidades $\dot{q} = \dot{q}(t, q, p)$ en términos de (t, q, p) y definir una función Hamiltoniana (la "energía total") $H : \mathbb{R} \times T^*Q \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$H(t, q, p) = p^T \dot{q}(t, q, p) - L(q, \dot{q}(t, q, p)),$$

donde usamos la inversa de la Transformada de Legendre para expresar $\dot{q} = \dot{q}(t, q, p)$.

Ejemplo 6.1.1. Una importante clase de éstos sistemas son descritos por Lagrangianos de la forma "energía cinética menos energía potencial"

$$L(t, q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} - V(q, t),$$

donde $M(q)$ es una matriz definida positiva y $V(q, t)$ es la energía potencial, que puede depender del tiempo. La transformada de Legendre asigna \dot{q} a $p = M(q)\dot{q}$ y L es hiperregular ya que $M(q)$ es definida positiva. El Hamiltoniano es

$$H(t, q, p) = p^T K(q)p + V(q, t)$$

con $K(q)$ la matriz inversa de $M(q)$.

Usaremos las ideas de la formulación de la mecánica que está basada en la noción de **variedades cosimpléticas**.

Definición 6.1.2. Una estructura **casi cosimplética** en una variedad Q de dimensión impar $2n+1$ es un par (η, Ω) , donde η es una 1-forma y Ω es una 2-forma tal que $\eta \wedge \Omega^n$ es una forma de volumen en Q . La estructura se dice que es **cosimplética** si η y Ω son cerradas.

Definición 6.1.3. Una **variedad cosimplética** es una variedad M dotada de una estructura cosimplética (η, Ω) .

Cada estructura cosimpléctica (η, Ω) en Q induce un isomorfismo de $C^\infty(Q)$ -modulos $\flat_{(\eta, \Omega)} : \mathfrak{X}(Q) \rightarrow \Omega^1(Q)$ definido por

$$\flat_{(\eta, \Omega)}(X) = i_X \Omega + \eta(X)\eta, \quad (6.1.4)$$

para cada campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(Q)$. Un isomorfismo de fibrados vectoriales (denotado por el mismo símbolo) $\flat_{(\eta, \Omega)} : TQ \rightarrow T^*Q$ es también inducido. Entonces $\mathbf{T} = \flat_{(\eta, \Omega)}^{-1}(\eta)$ en Q es llamado el **campo vectorial de Reeb** de la variedad cosimpléctica (Q, η, Ω) y está caracterizado por la siguiente condición:

$$i_{\mathbf{T}}\Omega = 0, \quad \eta(\mathbf{T}) = 1.$$

Definición 6.1.5. Una aplicación suave $\Psi : Q \rightarrow Q'$ entre dos variedades cosimplécticas (Q, η, Ω) y (Q', η', Ω') se dice que es **cosimpléctica** si $\Psi^*\eta' = \eta$ y $\Psi^*\Omega' = \Omega$. En ese caso, el campo vectorial de Reeb \mathbf{T} de Q es Ψ -proyectable y su proyección es el campo vectorial de Reeb \mathbf{T}' de Q' , es decir,

$$T\Psi \circ \mathbf{T} = \mathbf{T}' \circ \Psi.$$

Primero describiremos la mecánica Hamiltoniana. Para describir la dinámica no-autónoma de los sistemas Hamiltonianos, uno puede considerar la variedad $\mathbb{R} \times T^*Q$ equipada con la **estructura canónica cosimpléctica**

$$\Omega = dq \wedge dp, \quad \eta = dt,$$

con $\mathbf{T} = \partial_t$ el campo vectorial de **Reeb**. Notar que \mathbf{T} es el único campo vectorial en $\mathbb{R} \times T^*Q$ tal que $i_{\mathbf{T}}\Omega = 0$ y $i_{\mathbf{T}}dt = 1$, con la expresión como la de arriba.

Dado un Hamiltoniano $H(t, q, p)$, el **campo vectorial Hamiltoniano** X_H es el campo vectorial en $\mathbb{R} \times T^*Q$ definido por

$$i_{X_H}\Omega = dH - \mathbf{T}(H)\eta, \quad i_{X_H}\eta = 0.$$

Finalmente, la evolución del campo vectorial correspondiente al Hamiltoniano H , denotado por Z_H , está definido por

$$Z_H = \mathbf{T} + X_H = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p},$$

y sus curvas integrales son solución de las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q},$$

donde la componente " ∂_t " de Z_H es el conjunto de parámetros de solución del "tiempo" t .

En el esquema Lagrangiano, asumiendo la condición de hiperregularidad mencionada antes, puede ser usado un proceso similar. La variedad $\mathbb{R} \times TQ$ da lugar a la estructura cosimplética

$$\Omega_L = \mathbb{F}L^*(dq \wedge dp) = dq \wedge d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right), \quad \eta = dt, \quad (6.1.6)$$

con dependencia del tiempo en el Lagrangiano¹. Aquí $(\cdot)^*$ denota el pull-back estándar de formas diferenciales.

Construimos la función **energía** $E_L: \mathbb{R} \times TQ \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$E_L(t, q, \dot{q}) = \langle \mathbb{F}L(t, q, \dot{q}), \dot{q} \rangle - L(t, q, \dot{q}),$$

y obtenemos el campo vectorial Hamiltoniano asociado a la estructura cosimplética (6.1.6) y el Hamiltoniano E_L . Ésto da lugar al campo vectorial de evolución, que denotaremos Z_L , y está dado por

$$Z_L = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q} \frac{\partial}{\partial q} + \Gamma(t, q, \dot{q}) \frac{\partial}{\partial \dot{q}},$$

donde $\Gamma(t, q, \dot{q})$ es obtenido despejando \ddot{q} de las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Finalmente, es bien conocida la equivalencia entre la dinámica Lagrangiana y la Hamiltoniana vía $\mathbb{F}L$ en el caso en que L sea hiperregular. El siguiente resultado extiende la relación para sistemas dependientes del tiempo.

Proposición 6.1.7. *La transformada de Legendre $\mathbb{F}L$ mapea Z_L en Z_H . En otro sentido $(\mathbb{F}L)_*Z_L = Z_H$, donde*

$$(\mathbb{F}L)_*: T(\mathbb{R} \times TQ) \rightarrow T(\mathbb{R} \times T^*Q)$$

es el push-forward (la transformada inducida en el espacio tangente) de $\mathbb{F}L$.

Demostración. Apliquemos el Lema 1.1.19 a $\varphi = \mathbb{F}L$ y $\alpha = \Omega$. Luego se tiene que

$$(\mathbb{F}L)^*(i_{Z_H}\Omega) = i_{(\mathbb{F}L^{-1})_*Z_H}(\mathbb{F}L^*\Omega).$$

Si comenzamos a analizar el lado izquierdo de la igualdad obtenemos

$$\begin{aligned} (\mathbb{F}L)^*(i_{Z_H}\Omega) &= (\mathbb{F}L)^*(dH - \mathbf{T}(H)\eta) \\ &= (\mathbb{F}L)^*(dH) - (\mathbb{F}L)^*(\mathbf{T}(H)\eta) \\ &= d((\mathbb{F}L)^*H) - \mathbf{T}(\mathbb{F}L(H))\eta \\ &= d(E_L) - \mathbf{T}(E_L)\eta \\ &= i_{Z_L}\Omega_L \end{aligned}$$

¹Nosotros usaremos el mismo símbolo η para las dos 1-formas en diferentes variedades.

Por otro lado, el lado derecho de la igualdad puede escribirse como

$$i_{(\mathbb{F}L^{-1})_*Z_H}(\mathbb{F}L^*\Omega) = i_{(\mathbb{F}L^{-1})_*Z_H}(\Omega_L)$$

Por lo tanto se tiene que

$$Z_L = (\mathbb{F}L^{-1})_*Z_H$$

o lo que es lo mismo

$$(\mathbb{F}L)_*Z_L = Z_H.$$

Veamos ahora si ocurre lo mismo para $\alpha = \eta$. Analizando el lado izquierdo de la igualdad, tenemos

$$\begin{aligned} (\mathbb{F}L)^*(i_{Z_H}\eta) &= (\mathbb{F}L)^*(\eta(Z_H)) \\ &= (\mathbb{F}L)^*(Z_H) \\ &= Z_L \end{aligned}$$

Por otro lado, el lado derecho de la igualdad puede escribirse como

$$\begin{aligned} i_{(\mathbb{F}L^{-1})_*Z_H}(\mathbb{F}L^*\eta) &= i_{(\mathbb{F}L^{-1})_*Z_H}(\eta_L) \\ &= \eta_L((\mathbb{F}L^{-1})_*Z_H) \\ &= (\mathbb{F}L^{-1})_*Z_H \end{aligned}$$

Por lo tanto se tiene nuevamente que

$$Z_L = (\mathbb{F}L^{-1})_*Z_H$$

o lo que es lo mismo

$$(\mathbb{F}L)_*Z_L = Z_H.$$

□

6.2. Teorema de reducción cosimpléctica

6.2.1. Acciones cosimplécticas

Definición 6.2.1. Sea G un grupo de Lie. Una acción $\phi : G \times M \rightarrow M$ de un grupo de Lie G en una variedad cosimpléctica (M, η, Ω) se dice que es **cosimpléctica** si $\phi_g : M \rightarrow M$ es una aplicación cosimpléctica, $g \in G$.

Definición 6.2.2. Dada una acción cosimplética $\phi : G \times M \rightarrow M$, una aplicación diferenciable $J : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ se dice que es una **aplicación momento** si el generador infinitesimal $\xi_M \in \mathfrak{X}(M)$ de la acción asociada para algún $\xi \in \mathfrak{g}$ es el campo vectorial Hamiltoniano de la función $J_\xi : M \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $J_\xi(q) = J(q) \cdot \xi$.

Definición 6.2.3. La aplicación momento J se dice que es **Ad*-equivariante** si es equivariante con respecto a la acción ϕ y la acción coadjunta $\text{Ad}^* : G \times \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$, es decir,

$$J(\phi_g(q)) = \text{Ad}_{g^{-1}}^*(J(q)), \quad \text{para algún } q \in M.$$

Definición 6.2.4. Un elemento $\nu \in \mathfrak{g}^*$ se dice que es un **valor débilmente regular** de J si $J^{-1}(\nu)$ es una subvariedad cerrada en M y para cada $q \in J^{-1}(\nu)$ el espacio tangente $T_q(J^{-1}(\nu))$ coincide con el núcleo de $T_q J$.

6.2.2. Teorema de reducción Cosimplética

Sea $\nu \in \mathfrak{g}^*$ un valor débilmente regular de una aplicación momento Ad^* -equivariante $J : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ para una acción $\phi : G \times M \rightarrow M$. Si G_ν denota el grupo de isotropía de ν con respecto a la acción coadjunta, es decir

$$G_\nu = \{g \in G : \text{Ad}_g^* \nu = \nu\},$$

entonces ϕ induce una acción $\phi : G_\nu \times J^{-1}(\nu) \rightarrow J^{-1}(\nu)$ de G_ν en la subvariedad $J^{-1}(\nu)$ (ver [1] para más detalles).

Siguiendo [2] decimos que la acción es **cocientable** si el espacio de órbitas $M_\nu = J^{-1}(\nu)/G_\nu$ admite una estructura de variedad diferenciable y la proyección canónica $\pi_\nu : J^{-1}(\nu) \rightarrow M_\nu$ es una submersión suryectiva. Por supuesto, un caso en que ocurre esto es cuando la acción es libre y propia. Si la acción $\phi : G \times M \rightarrow M$ es libre y propia, entonces ϕ induce una acción de G_ν en $J^{-1}(\nu)$ que es también libre y propia, para cada $\nu \in \mathfrak{g}^*$.

Teorema 6.2.5 (Teorema de reducción cosimplética, [2]). *Sea $\phi : G \times M \rightarrow M$ una acción cosimplética de un grupo de Lie G en una variedad cosimplética (M, η, Ω) . Supongamos que $J : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ es una aplicación momento Ad^* -equivariante asociada a ϕ tal que*

$$\mathbf{T}(J) = 0 \tag{6.2.6}$$

donde \mathbf{T} es el campo vectorial de Reeb de M . Sea $\nu \in \mathfrak{g}^*$ un valor débilmente regular de J tal que la acción inducida de G_ν en $J^{-1}(\nu)$ sea cocientable. Entonces, $M_\nu = J^{-1}(\nu)/G_\nu$ es una variedad cosimplética con estructura cosimplética (η_ν, Ω_ν) caracterizada por

$$\pi_\nu^* \eta_\nu = i_\nu^* \eta, \quad \pi_\nu^* \Omega_\nu = i_\nu^* \Omega, \tag{6.2.7}$$

donde $\pi_\nu : J^{-1}(\nu) \rightarrow M_\nu$ es la proyección canónica y $i_\nu : J^{-1}(\nu) \hookrightarrow M$ es la inclusión canónica.

Más aún, la restricción $\mathbf{T}\Big|_{J^{-1}(\nu)}$ de \mathbf{T} es tangente para $J^{-1}(\nu)$ y π_ν -proyectable en el campo vectorial de Reeb \mathbf{T}_ν de M_ν .

6.3. Sistemas mecánicos híbridos simples dependientes en el tiempo

En lo que sigue extenderemos las definiciones dadas en [7, 8] para Lagrangianos dependientes del tiempo.

Definición 6.3.1. Un **sistema Lagrangiano híbrido simple dependiente en el tiempo** (t-HLS) es una tupla $\mathcal{L} = (Q, L, \mathcal{S}, R)$ donde

- i) Q es una variedad diferenciable,
- ii) $L : \mathbb{R} \times TQ \rightarrow \mathbb{R}$ es un Lagrangiano dependiente en el tiempo,
- iii) \mathcal{S} es una subvariedad embebida de $\mathbb{R} \times TQ$ de co-dimensión uno, la **superficie de impacto**,
- iv) $R : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R} \times TQ$ es una aplicación diferenciable, la **aplicación de impacto**.

Asimismo, uno define un **sistema Hamiltoniano híbrido simple dependiente en el tiempo** (t-HHS) como una tupla $\mathcal{H} = (Q, H, \mathcal{S}, R)$, donde $H : \mathbb{R} \times T^*Q \rightarrow \mathbb{R}$ es un Hamiltoniano dependiente del tiempo y los elementos de la variedad híbrida son ahora definidos en T^*Q en lugar de en TQ .

Ejemplo 6.3.2. Billar con paredes móviles

Consideremos una partícula con masa m en el plano que se mueve libremente sobre una superficie definida por un círculo cuyo radio oscila en el tiempo dado por la función $f(t)$, es decir,

$$x^2 + y^2 = f(t).$$

Aquí $Q = \mathbb{R}^2$, el Lagrangiano $L : \mathbb{R} \times T\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ está dado por

$$L(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \exp\left(\frac{c}{m}t\right) \left[\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \right],$$

y la superficie de impacto es un subconjunto de $\mathbb{R} \times T\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ dado por

$$\mathcal{S} = (\mathbb{R} \times TQ) \cap \{x^2 + y^2 = f(t), (\dot{x}, \dot{y}) \cdot (x, y) \geq 0\}.$$

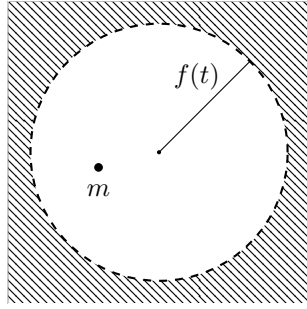


Figura 6.1: Un “billar” con paredes móviles

Este conjunto \mathcal{S} describe la situación en que la partícula se mueve hasta que golpea el borde exterior del billar ². Bajo la hipótesis de la elasticidad en la colisión, la aplicación de impacto está dada por [50]

$$(t, x, y, \dot{x}^-, \dot{y}^-) \mapsto (t, x, y, \dot{x}^+, \dot{y}^+)$$

con

$$\begin{aligned} \dot{x}^+ &= \dot{x}^- + \frac{f(t) - 2(x\dot{x}^- + y\dot{y}^-)}{f(t)}x, \\ \dot{y}^+ &= \dot{y}^- + \frac{f(t) - 2(x\dot{x}^- + y\dot{y}^-)}{f(t)}y. \end{aligned}$$

Ejemplo 6.3.3. Billar con disipación

Discutiremos ahora una nueva aplicación de Lagrangianos dependientes en el tiempo para sistemas con disipación. Consideremos la siguiente variación del ejemplo anterior. Una partícula que se mueve sobre un billar en el plano definido por la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. La superficie del billar asumimos que es áspera en el sentido que la fricción es proporcional a la velocidad (la disipación es del tipo de **Rayleigh**, ver por ejemplo [10]). Las ecuaciones de movimiento de la partícula sobre esta variedad son entonces

$$m\ddot{x} = -c\dot{x}, \quad m\ddot{y} = -c\dot{y}. \quad (6.3.4)$$

para alguna constante $c > 0$. Para adaptar estas ecuaciones en la forma Lagrangiana, podemos construir el siguiente Lagrangiano dependiente en el tiempo $L : \mathbb{R} \times T\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$L(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \exp\left(\frac{c}{m}t\right) \left[\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \right].$$

Notar que las ecuaciones de Euler-Lagrange para L son las ecuaciones de movimiento deseadas. La superficie de impacto y la aplicación de impacto son obtenidas

²Para simplicidad en la definición de superficie de impacto, asumimos que la partícula sólo golpea el borde cuando el borde es movido hacia afuera. Algunos ejemplos de este tipo de situaciones pueden ser obtenidos con funciones crecientes como $f(t) = 1 + t$ o $f(t) = 2 - \exp(-t)$.

reemplazando $f(t) = 1$ en el Ejemplo 6.3.2. Notar que la aplicación de impacto en este caso coincide con la dada por la función $h: Q \rightarrow \mathbb{R}$ en [8] en el caso del impacto plástico (es decir, cuando el coeficiente de restitución es $e = 1$).

Ya hemos visto en la Proposición 6.1.7 que en el caso hiperregular hay una equivalencia entre las descripciones Lagrangiana y Hamiltoniana de un sistema mecánico. Ahora extenderemos esta equivalencia a sistemas híbridos dependientes del tiempo. Necesitamos la siguiente definición:

Definición 6.3.5. Un **flujo híbrido** para \mathcal{L} es una tupla $\chi^{\mathcal{L}} = (\Lambda, \mathcal{J}, \mathcal{C})$, donde

- a) $\Lambda = \{0, 1, 2, \dots\} \subseteq \mathbb{N}$ es un conjunto de puntos finito (o infinito),
- b) $\mathcal{J} = \{I_i\}_{i \in \Lambda}$ un conjunto de intervalos, llamado **intervalos híbridos** donde $I_i = [\tau_i, \tau_{i+1}]$ si $i, i+1 \in \Lambda$ y $I_{N-1} = [\tau_{N-1}, \tau_N]$ o $[\tau_{N-1}, \tau_N)$ o $[\tau_{N-1}, \infty)$ si $|\Lambda| = N$, N finito, con $\tau_i, \tau_{i+1}, \tau_N \in \mathbb{R}$ y $\tau_i \leq \tau_{i+1}$,
- c) $\mathcal{C} = \{c_i\}_{i \in \Lambda}$ es una colección de soluciones del campo vectorial Z_L específicamente la dinámica de tiempo continua, es decir, $\dot{c}_i = Z_L(c_i(t))$ para todo $i \in \Lambda$, y tal que para cada $i, i+1 \in \Lambda$,

- (i) $c_i(\tau_{i+1}) \in \mathcal{S}$,
- (ii) $R(c_i(\tau_{i+1})) = c_{i+1}(\tau_{i+1})$.

Análogamente, uno puede definir la noción de flujo híbrido $\chi^{\mathcal{H}}$ para un t-HHS \mathcal{H} .

La relación entre ambos flujos híbridos está dado por el siguiente resultado, donde para más claridad usaremos la notación $\mathcal{L} = (Q, L, \mathcal{S}, R)$, $\mathcal{H} = (Q, H, \mathcal{S}_H, R_H)$.

Proposición 6.3.6. Si $\chi^{\mathcal{L}} = (\Lambda, \mathcal{J}, \mathcal{C})$ es el flujo híbrido para \mathcal{L} , $\mathcal{S}_H = \mathbb{F}L(\mathcal{S})$, y R_H está definido en el sentido que $\mathbb{F}L \circ R = R_H \circ \mathbb{F}L|_{\mathcal{S}}$, entonces $\chi^{\mathcal{H}} = (\Lambda, \mathcal{J}, (\mathbb{F}L)(\mathcal{C}))$ con $(\mathbb{F}L)(\mathcal{C}) = \{(\mathbb{F}L)(c_i)\}_{i \in \Lambda}$.

Demostración. Por la Proposición 6.1.7 si $c_i(t)$ es una curva integral de Z_L , $\tilde{c}_i(t) = (\mathbb{F}L \circ c_i)(t)$ es una curva integral para Z_H . En este sentido, si consideramos una solución $c_0(t)$ con valor inicial $c_0 = (q_0, \dot{q}_0)$ definida en $[\tau_0, \tau_1]$, entonces $\tilde{c}_0(t)$ es una solución con valor inicial $\tilde{c}_0 = (q_0, p_0)$ definido en $[\tau_0, \tau_1]$. Igualmente para una solución $c_1(t)$ definida en $[\tau_1, \tau_2]$, tenemos una solución correspondiente $\tilde{c}_1(t)$ definido en el mismo intervalo híbrido $[\tau_1, \tau_2]$. Procediendo inductivamente, uno encuentra $c_i(t)$ definido en $[\tau_i, \tau_{i+1}]$. Sólo queda chequear que $\tilde{c}_i(t)$ satisface $\tilde{c}_i(\tau_{i+1}) \in \mathcal{S}_H$ y $R_H(\tilde{c}_i(\tau_{i+1})) = \tilde{c}_{i+1}(\tau_{i+1})$, pero usando las propiedades de $\mathbb{F}L$, tenemos que,

- (i) $\tilde{c}_i(\tau_{i+1}) = (\mathbb{F}L \circ c_i)(\tau_{i+1}) = \mathbb{F}L(c_i(\tau_{i+1}))$ y dado que $c_i(\tau_{i+1}) \in \mathcal{S}$ entonces $\tilde{c}_i(\tau_{i+1}) \in \mathcal{S}_H$.
- (ii) $R_H(\tilde{c}_i(\tau_{i+1})) = R_H \circ \mathbb{F}L \circ c_i(\tau_{i+1}) = \mathbb{F}L \circ R \circ c_i(\tau_{i+1}) = \mathbb{F}L \circ c_{i+1}(\tau_{i+1}) = \tilde{c}_{i+1}(\tau_{i+1})$.

□

6.4. Simetrías en sistemas mecánicos híbridos simples dependientes en el tiempo

Sea $\mathcal{L} = (Q, L, \mathcal{S}, R)$ un t-LHS. El punto de partida para la reducción por simetrías es una acción $\psi: G \times Q \rightarrow Q$ de algún grupo de Lie G en la variedad Q . Hay un levantamiento natural de la acción ψ para el espacio $\mathbb{R} \times T^*Q$,

$$\begin{aligned} \Psi^{T^*Q}: G \times (\mathbb{R} \times T^*Q) &\rightarrow (\mathbb{R} \times T^*Q), \\ (g, (t, q, p)) &\mapsto (t, T^*\psi_{g^{-1}}(q, p)). \end{aligned}$$

La acción Ψ^{T^*Q} cuenta con las siguientes propiedades (ver [2]):

- (i) Ψ^{T^*Q} es una acción cosimplética, lo que significa que, si denotamos $\Psi_g^{T^*Q} \equiv \Psi^{T^*Q}(g, \cdot)$, $(\Psi_g^{T^*Q})^*\Omega = \Omega$ y $(\Psi_g^{T^*Q})^*\eta = \eta$.
- (ii) Admite una aplicación momento **Ad*-equivariante**

$$J: \mathbb{R} \times T^*Q \rightarrow \mathfrak{g}^*$$

dado por

$$\langle J(t, q, p), \xi \rangle = \langle p, \xi_Q \rangle \quad \forall \xi \in \mathfrak{g},$$

donde $\xi_Q(q) := \frac{d}{dt}\psi_{\exp(t\xi)}q$ es el **generador infinitesimal** de $\xi \in \mathfrak{g}$.

Asimismo, hay una acción levantada para $\mathbb{R} \times TQ$ denotada por Ψ^{TQ}

$$\begin{aligned} \Psi^{TQ}: G \times (\mathbb{R} \times TQ) &\rightarrow (\mathbb{R} \times TQ), \\ (g, (t, q, \dot{q})) &\mapsto (t, T\psi_g(q, \dot{q})). \end{aligned}$$

De manera análoga al Capítulo 4 por una **acción híbrida** en el t-LHS $\mathcal{L} = (Q, L, \mathcal{S}, R)$ nos referimos a una acción de un grupo de Lie $\psi: G \times Q \rightarrow Q$ tal que

- (i) L es invariante bajo Ψ^{TQ} , es decir $L \circ \Psi^{TQ} = L$.
- (ii) Ψ^{TQ} se restringe a la acción en \mathcal{S} .

(iii) R es equivariante con respecto a la acción previa, específicamente

$$R \circ \Psi_g^{TQ} |_{\mathcal{S}} = \Psi_g^{TQ} \circ R.$$

En el caso de la acción híbrida, Ψ^{TQ} admite una aplicación momento Ad^* -equivariante (Lagrangiana) $J_L : \mathbb{R} \times TQ \rightarrow \mathfrak{g}^*$ dada por

$$J_L = J \circ \mathbb{F}L.$$

Esto da lugar directamente a la invarianza de L , que implica que $\mathbb{F}L$ es un difeomorfismo equivariante, es decir

$$\mathbb{F}L \circ \Psi_g^{TQ} = \Psi_g \circ \mathbb{F}L.$$

De manera análoga al Capítulo 4 la aplicación momento equivariante híbrida da la noción de **aplicación momento híbrida**. Para ejemplificar, en el caso de $\mathbb{R} \times T^*Q$, J es una **aplicación momento híbrida** si el diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathfrak{g}^* & & \\
 & J \nearrow & \uparrow J|_{\mathcal{S}} & \nwarrow J & \\
 \mathbb{R} \times T^*Q & \xleftarrow{i} & \mathcal{S} & \xrightarrow{R} & \mathbb{R} \times T^*Q
 \end{array} \tag{6.4.1}$$

conmuta, donde i denota la inclusión canónica de \mathcal{S} a $\mathbb{R} \times T^*Q$.

La situación de interés para nosotros es cuando la acción es de un grupo abeliano, es decir $G = \mathbb{S}^1$ (el caso que $G = \mathbb{R}$ es análogo; y si G es un producto uno puede realizar un proceso iterado): esto corresponde a la noción clásica de coordenadas cíclicas. Asumiremos ahora que $Q = \mathbb{S}^1 \times M$ donde M es llamado el **espacio de formas** y la acción está dada por

$$\begin{aligned}
 \psi_\alpha : \mathbb{S}^1 \times M &\rightarrow \mathbb{S}^1 \times M, \\
 (\theta, x) &\mapsto (\theta + \alpha, x).
 \end{aligned} \tag{6.4.2}$$

Si bien esta es una suposición sólida siempre local, se tiene que el procedimiento anterior, se aplica al dominio de interés de un problema específico. Los resultados más generales cuando la variedad no es un producto global o un grupo de Lie arbitrario (no necesariamente abeliano) se pueden obtener usando las mismas herramientas, pero implican más tecnicismos como la introducción de una conexión principal.

Ejemplo 6.4.3. Billar con paredes móviles

Introduciendo coordenadas polares, el Lagrangiano viene dado por

$$L(t, r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) = \exp\left(\frac{c}{m}t\right) \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

donde θ es una coordenada cíclica. En otras palabras, L es invariante bajo la acción levantada al tangente

$$(t, r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) \mapsto (t, r, \theta + \alpha, \dot{r}, \dot{\theta}).$$

Teniendo en cuenta que en la aplicación de impacto $2(x\dot{x}^- + y\dot{y}^-)$ no es más que $2r\dot{r}^-$, se deduce que R satisface la condición de equivarianza. Esto significa que tenemos una acción híbrida con aplicación momento $\xi \in \mathfrak{g} = \mathbb{R}$, $\xi_{\mathbb{R}^2} = \xi\partial_\theta$:

$$J_L(t, r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}) = \mu = \exp\left(\frac{c}{m}t\right)mr^2\dot{\theta}, \quad (6.4.4)$$

que es precisamente el momento angular.

Veamos cómo queda el impacto

$$\dot{x}^+ = \dot{x}^- + \frac{\dot{f}(t) - 2(x\dot{x}^- + y\dot{y}^-)}{f(t)}x, \quad (6.4.5)$$

$$\dot{y}^+ = \dot{y}^- + \frac{\dot{f}(t) - 2(x\dot{x}^- + y\dot{y}^-)}{f(t)}y. \quad (6.4.6)$$

- a) Primero veamos qué ocurre cuando $f(t) = \text{const.}$, por ejemplo $f(t) = 1$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \dot{x}^+ &= \dot{x}^- - 2(x\dot{x}^- + y\dot{y}^-)x, \\ \dot{y}^+ &= \dot{y}^- - 2(x\dot{x}^- + y\dot{y}^-)y. \end{aligned}$$

Elevando al cuadrado ambos lados, y observando que

$$2x\dot{x} + 2y\dot{y} = \frac{d}{dt}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dt}(r^2) = 2r\dot{r},$$

encontramos

$$(\dot{x}^+)^2 = (\dot{x}^-)^2 + (2r\dot{r}^-)^2x^2 - 4x\dot{x}^-r\dot{r}^-,$$

y simétricamente para \dot{y}^+ . Sumando $(\dot{x}^+)^2 + (\dot{y}^+)^2$ concluimos que

$$\begin{aligned} (\dot{r}^+)^2 &= (\dot{r}^-)^2 + (2r\dot{r}^-)^2(x^2 + y^2) - 4(x\dot{x}^- + y\dot{y}^-)r\dot{r}^- \\ &= (\dot{r}^-)^2 + 4r^2(\dot{r}^-)(r^2 - 1). \end{aligned}$$

Esto significa que, como la colisión ocurre en $r = 1$, se tiene que $(\dot{r}^+)^2 = (\dot{r}^-)^2$, entonces la solución que se obtiene (físicamente) es $\dot{r}^+ = -\dot{r}^-$.

Para $\theta = \arctan(y/x)$, tenemos

$$\begin{aligned} \dot{\theta}^+ &= \frac{1}{1 + (y/x)^2} \left(\frac{\dot{y}^+x - y\dot{x}^+}{x^2} \right) \\ &= \frac{1}{r^2} (\dot{y}^-x - y\dot{x}^-) = \dot{\theta}^-. \end{aligned}$$

donde hemos reemplazado la expresión para \dot{x}^+ , \dot{y}^+ y usamos que $x^2 + y^2 = r^2$ y $(y\dot{x}^- - \dot{y}^-x) = -r^2\dot{\theta}^-$.

- b) Cuando $f(t)$ no es constante uno puede proceder en el mismo sentido, elevando al cuadrado ambos lados de (6.4.5) y (6.4.6), usando la misma identificación y agregando ambos sumandos; obtenemos la siguiente regla para el impacto \dot{r} :

$$(\dot{r}^+)^2 = (\dot{r}^-)^2 + \frac{r}{f(t)}(\dot{f}(t) - 2r\dot{r}^-) \left(2\dot{r}^- + \frac{(\dot{f}(t) - 2r\dot{r}^-)r}{f(t)} \right),$$

Cuando $f(t) = 1$ recuperamos $\dot{r}^+ = -\dot{r}^-$. Un cálculo computacional simple muestra que la regla de impacto para $\dot{\theta}$ no depende de $f(t)$. Es decir, encontramos nuevamente $\dot{\theta}^+ = \dot{\theta}^-$.

Es decir, la aplicación de impacto en coordenadas polares tiene la forma

$$(\dot{r}^+)^2 = (\dot{r}^-)^2 + \frac{r}{f(t)}(\dot{f}(t) - 2r\dot{r}^-) \left(2\dot{r}^- + \frac{(\dot{f}(t) - 2r\dot{r}^-)r}{f(t)} \right), \quad (6.4.7)$$

$$\dot{\theta}^+ = \dot{\theta}^-.$$

La hipótesis de la condición de elasticidad implica, en particular, que la aplicación momento se preserva.

Ejemplo 6.4.8. Billar con disipación

Aquí la acción híbrida tiene una aplicación momento

$$J_L(t, r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}) = \exp\left(\frac{c}{m}t\right)mr^2\dot{\theta}. \quad (6.4.9)$$

Notar que en este caso J_L es una constante del movimiento tiempo dependiente producido por el amortiguamiento del momento angular, esto es, $mr^2\dot{\theta}$ decae exponencialmente en el tiempo por el efecto producido por la fricción. El mapa de retorno se obtiene tomando $f(t) = 1$ en la expresión (6.4.9)

$$(\dot{r}^-, \dot{\theta}^-) \mapsto (\dot{r}^+ = -\dot{r}^-, \dot{\theta}^+ = \dot{\theta}^-).$$

De nuevo, el valor de la aplicación momento no se modifica con la colisión.

6.5. Reducción de ciertas simetrías para sistemas mecánicos híbridos simples dependientes en el tiempo

En esta sección estudiaremos la reducción de simetrías para sistemas híbridos Lagrangianos dependientes en el tiempo. Comenzaremos explorando el esquema Hamiltoniano y luego, definiendo el Routhiano, procederemos con el caso Lagrangiano.

Reducción de t-HHS. Consideremos un t-HLS $\mathcal{L} = (Q, L, \mathcal{S}, R)$ equipado con una acción híbrida ψ . Daremos la reducción para el t-HHS $\mathcal{H} = (Q, H, \mathcal{S}_H, R_H)$ asociado, discutido en la Proposición 6.3.6. Consideramos un **valor regular híbrido** $\mu \in \mathfrak{g}^*$ de $J: \mathbb{R} \times T^*Q \rightarrow \mathfrak{g}^*$, donde μ es un valor regular de ambos J y $J|_{\mathcal{S}}: \mathcal{S} \rightarrow \mathfrak{g}^*$. Combinando esta definición con el diagrama conmutativo (6.4.1), el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} J^{-1}(\mu) & \xleftarrow{i} & J|_{\mathcal{S}}^{-1}(\mu) & \xrightarrow{R_H|_{\mathcal{S}}} & J^{-1}(\mu) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R} \times T^*Q & \xleftarrow{i} & \mathcal{S} & \xrightarrow{R_H} & \mathbb{R} \times T^*Q \end{array}$$

conmuta, donde $J^{-1}(\mu)$ y $J|_{\mathcal{S}}^{-1}(\mu)$ son subvariedades embebidas de $\mathbb{R} \times T^*Q$ y \mathcal{S} , respectivamente.

Podemos aplicar el análogo híbrido del Teorema de reducción cosimpléctica para el t-HHS \mathcal{H} . Notar que, como L es invariante bajo Ψ^{TQ} , entonces también el Hamiltoniano H lo es bajo Ψ^{T^*Q} . Como resultado obtenemos que:

- (i) El espacio reducido $J^{-1}(\mu)/G_\mu$ (con G_μ el grupo de isotropía de μ) es una variedad cosimpléctica, y la estructura cosimpléctica reducida está caracterizada en términos de la submersión $J^{-1}(\mu) \rightarrow J^{-1}(\mu)/G_\mu$ y la inclusión $J^{-1}(\mu) \hookrightarrow \mathbb{R} \times T^*Q$.
- (ii) Si denotamos por H_μ la reducción de $H|_{J^{-1}(\mu)}$ a $J^{-1}(\mu)/G_\mu$, la evolución del campo vectorial Z_H proyecta en Z_{H_μ} .

En nuestra situación, como asumimos que $G = \mathbb{S}^1$, tenemos la identificación

$$J^{-1}(\mu)/G_\mu \simeq \mathbb{R} \times T^*(Q/G),$$

y la estructura cosimpléctica reducida es precisamente la estructura cosimpléctica canónica en $\mathbb{R} \times T^*(Q/G)$. Combinando las observaciones de arriba, concluimos que el t-HHS \mathcal{H} se reduce en un t-HHS \mathcal{H}_μ con $\mathcal{H}_\mu = (Q/G, H_\mu, (\mathcal{S}_H)_\mu, (R_H)_\mu)$.

Aquí, la superficie de impacto reducida $(\mathcal{S}_H)_\mu$ y la aplicación de impacto reducida $(R_H)_\mu$ son las reducciones de las restricciones del conjunto de nivel $J^{-1}(\mu)$ de \mathcal{S}_H y R_H , respectivamente. El proceso es muy similar al descrito en [7] para la reducción al fibrado cotangente de sistemas híbridos.

El esquema de reducción del lado Lagrangiano puede ahora ser obtenido por un Hamiltoniano adaptando el esquema en [58] para el conjunto cosimpléctico. La idea clave es que, como L es invariante bajo Ψ^{TQ} , la transformada de Legendre $\mathbb{F}L$ es un difeomorfismo tal que:

- (i) es equivariante con respecto a Ψ^{TQ} y Ψ^{T^*Q} ,

- (ii) preserva los conjuntos de nivel de la aplicación del momento, es decir, $\mathbb{F}L(J_L^{-1}(\mu)) = J^{-1}(\mu)$,
- (iii) relaciona ambas estructuras cosimplécticas, es decir, $(\mathbb{F}L)^*\Omega = \Omega_L$ y $(\mathbb{F}L)^*\eta = \eta$ ($\mathbb{F}L$ es a veces referido como un **cosimplectomorfismo**).

Luego la aplicación $\mathbb{F}L$ se reduce al cosimplectomorfismo $(\mathbb{F}L)_{\text{red}}$ entre espacios reducidos. Por lo tanto tenemos la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R} \times TQ & \xrightarrow{\mathbb{F}L} & \mathbb{R} \times T^*Q \\
 \text{Red.} \downarrow & & \downarrow \text{Red.} \\
 J_L^{-1}(\mu)/G_\mu & \xrightarrow{(\mathbb{F}L)_{\text{red}}} & J^{-1}(\mu)/G_\mu
 \end{array}$$

En el caso particular de coordenadas cíclicas ($G = \mathbb{S}^1$), el espacio reducido $J_L^{-1}(\mu)/G_\mu$ puede ser identificado con $\mathbb{R} \times T(Q/G)$ y la dinámica reducida es Lagrangiana con respecto a la aplicación Lagrangiana reducida en $T(Q/G)$, conocida como **Routhiano** o **aplicación de Routh**, y que es denotada por L_μ . El siguiente diagrama ilustra la situación

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R} \times TQ & \xrightarrow{\mathbb{F}L} & \mathbb{R} \times T^*Q \\
 \text{Red.} \downarrow & & \downarrow \text{Red.} \\
 \mathbb{R} \times T(Q/G) & \xrightarrow{\mathbb{F}L_\mu} & \mathbb{R} \times T^*(Q/G)
 \end{array}$$

El caso abeliano discutido puede ser extendido a una situación más general sin considerar tal estructura abeliana del grupo y la exploraremos en un trabajo a futuro usando las mismas ideas que en [58].

6.5.1. El Routhiano y la reducción de t-HLS

Describimos ahora la construcción del Routhiano L_μ . Usando las notaciones en (6.4.2), el Lagrangiano tiene una coordenada cíclica θ , es decir L es una aplicación de la forma $L(t, \theta, x, \dot{x})$. La conservación de la aplicación momento $J_L = \mu$ está dada por $\partial L / \partial \dot{\theta} = \mu$, y uno puede usar esta relación para expresar $\dot{\theta}$ como una función de las variables restantes (las coordenadas no cíclicas) y sus velocidades, y el valor regular prescrito de la aplicación momento μ . Por lo que, podemos escribir $\dot{\theta} = \dot{\theta}(t, x, \dot{x}, \mu)$.

El Routhiano es nuevamente definido como

$$L_\mu(t, x, \dot{x}) = \left[L(t, \dot{\theta}, x, \dot{x}) - \mu \dot{\theta} \right] \Big|_{\dot{\theta} = \dot{\theta}(t, x, \dot{x}, \mu)},$$

donde la notación significa que tenemos cada punto $\dot{\theta}$ expresado como una función de (t, x, \dot{x}, μ) . Esta función depende solamente de (t, x, \dot{x}) , y por lo tanto puede ser interpretada como una nueva función Lagrangiana en el espacio reducido $\mathbb{R} \times T(Q/G)$. Nosotros también llamamos a esta función reducida Routhiano. La importancia del Routhiano viene de la siguiente Proposición (ver [10] para más detalles).

Proposición 6.5.1. *En la situación anterior:*

- (a) *Cada solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange para L con momento μ proyecta en soluciones del Routhiano L_μ .*
- (b) *Cada solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange para L_μ es la proyección de ecuaciones de Euler-Lagrange para L con momento μ .*

Las ecuaciones de Euler-Lagrange para L_μ involucran menos variables, ellas son más fáciles de resolver. Uno procede usualmente resolviendo éstas primero, y entonces usando la restricción del momento $\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \mu$ para reconstruir las soluciones buscadas de las ecuaciones de Euler-Lagrange para L .

Una preocupación especial es cuando tomamos traslaciones de esta técnica de reducción para sistemas híbridos. La razón es que las colisiones con la superficie de impacto, en general, modificarán el valor de la aplicación momento ³. Por lo tanto, si $\mathcal{J} = \{I_i\}_{i \in \Lambda}$ es el intervalo híbrido (ver Definición 6.3.5), el Routhiano tiene que estar definido en cada I_i tomando en cuenta el valor del momento μ_i después de la colisión a tiempo τ_i . Notar que esto también tiene influencia en la aplicación de impacto R reducida.

Denotemos:

- i) μ_i el momento del sistema en $I_i = [\tau_i, \tau_{i+1}]$,
- ii) R_{μ_i} la restricción de $R |_{J^{-1}(\mu_i)}$,
- iii) \mathcal{S}_{μ_i} la restricción de $J_L |_{\mathcal{S}^{-1}(\mu_i)}$.

Con lo cual, hay una secuencia de t-HLS's reducidos.

$$\begin{array}{ccc}
 [\tau_0, \tau_1] & \xrightarrow{\text{Red.}} & (Q/G, L_{\mu_0}, \mathcal{S}_{\mu_0}, R_{\mu_0}) \\
 \text{Coll.} \downarrow & & \downarrow \text{Coll.} \\
 [\tau_1, \tau_2] & \xrightarrow{\text{Red.}} & (Q/G, L_{\mu_1}, \mathcal{S}_{\mu_1}, R_{\mu_1}) \\
 \text{Coll.} \downarrow & & \downarrow \text{Coll.} \\
 (\dots) & \xrightarrow{\text{Red.}} & (\dots)
 \end{array}$$

³En los ejemplos consideraremos sólo colisiones elásticas en los que la aplicación momento se preserva.

El hecho de que el momento pueda, en general, cambiar con las colisiones hace que el proceso de reconstrucción sea más desafiante. Si uno quisiera, como es usual, usar la solución reducida para reconstruir la dinámica original, uno necesita calcular los datos híbridos reducidos después de cada colisión. Esto significa que una vez que se ha obtenido la solución reducida entre dos eventos de colisión, es decir $t = \tau_n$ y $t = \tau_{n+1}$, uno debería reconstruir esta solución para obtener el nuevo momento después de la colisión en τ_{n+1} y usar este nuevo momento para construir un nuevo sistema híbrido reducido cuya solución se obtiene hasta que la nueva colisión ocurra en τ_{n+2} , y así siguiendo.

Similarmente como en [8], el proceso de reconstrucción del flujo híbrido reducido para el flujo del Lagrangiano híbrido implica una integración recursiva en cada etapa del diagrama previo en la variable cíclica usando la solución del t-HLS reducido, esto implica obligadamente la restricción del momento en la solución reconstruida.

Ejemplo 6.5.2. Billar con disipación

Usando la relación (6.4.9), el Routhiano toma la forma

$$L_\mu(t, r, \dot{r}) = \frac{1}{2} \exp\left(\frac{c}{m}t\right) m \dot{r}^2 - \frac{\mu^2}{2mr^2} \exp\left(-\frac{c}{m}t\right).$$

La superficie de impacto reducida es $\mathcal{S}_\mu = \{r^2 = 1, \dot{r} > 0\}$. La aplicación de impacto (con $f(t) = 1$) implica que su reducción es $(r, \dot{r}^-) \mapsto (r, \dot{r}^+ = -\dot{r}^-)$. Se obtiene entonces el siguiente t-HLS $\mathcal{L} = (Q_{\text{red}}, L_\mu, \mathcal{S}_\mu, R_\mu)$, con $Q_{\text{red}} \simeq \mathbb{R}^+$ parametrizado en coordenadas radiales r .

Ejemplo 6.5.3. Billar con paredes móviles

Un cálculo directo, usando (6.4.4), muestra que

$$L_\mu(t, r, \dot{r}) = \frac{1}{2} \exp\left(\frac{c}{m}t\right) m \dot{r}^2 - \frac{\mu^2}{2mr^2} \exp\left(-\frac{c}{m}t\right).$$

La aplicación de impacto reducida está determinada por la expresión (6.4.7) para \dot{r}^+ (notar que la expresión en el cociente solo involucra r , \dot{r} y $f(t)$). La superficie de impacto reducida es $\mathcal{S}_\mu = \{r^2 = f(t), \dot{r} > 0\}$. Uno obtiene el siguiente t-HLS $\mathcal{L} = (Q_{\text{red}}, L_\mu, \mathcal{S}_\mu, R_\mu)$, con $Q_{\text{red}} \simeq \mathbb{R}^+$ parametrizado en coordenadas radiales r .

Las figuras 6.2 y 6.4 muestran los resultados numéricos usando PYTHON de dos diferentes valores de la disipación para el parámetro c . Los parámetros restantes son los mismos en las dos simulaciones: $m = 1$, $r(0) = 0.5590$, $\dot{r}(0) = 2.8621$, $\theta(0) = 1.1071$ (rad), $\dot{\theta}(0) = -3.0400$ (rad/s), y la función $f(t)$ está dada por

$$f(t) = 2 - \exp(t/10).$$

La dinámica reducida (dada por un sistema híbrido para L_μ) se resuelve numéricamente y usando para integrar (numéricamente) la ecuación de reconstrucción

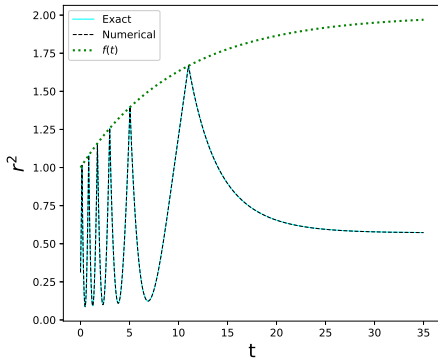


Figura 6.2: Simulación para $c = 0.25$

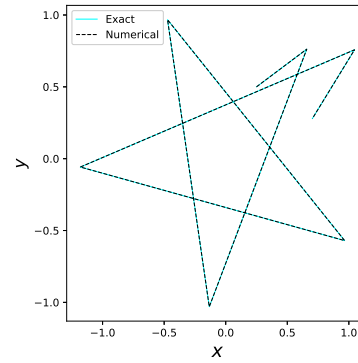


Figura 6.3: Simulación para $c = 0.25$

(6.4.9)

$$\dot{\theta} = \exp\left(-\frac{c}{m}t\right) \frac{\mu}{mr^2},$$

con μ determinado para las condiciones iniciales. Además (6.3.4) admite una solución explícita,

$$x(t) = x_0 \exp\left(-\frac{c}{m}t\right), \quad y(t) = y_0 \exp\left(-\frac{c}{m}t\right),$$

y entonces una comparación con la solución analítica puede ser obtenida fácilmente. Notar que los tiempos de impacto en que la partícula rebota son obtenidos numéricamente y también, en este caso, “analíticamente”.

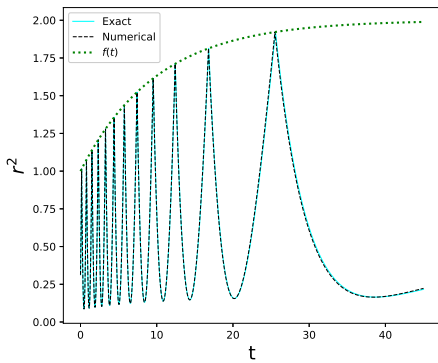


Figura 6.4: Simulación para $c = 0.10$

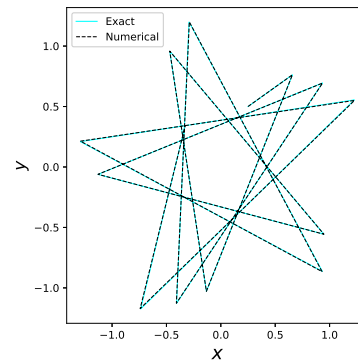


Figura 6.5: Simulación para $c = 0.10$

Conclusiones y Trabajo a futuro

Conclusiones

En esta tesis hemos desarrollado resultados en el área de reducción por simetrías para distintas clases de sistemas mecánicos. Nos hemos enfocado principalmente en su aplicación a sistemas de orden superior, sistemas híbridos y cosimplécticos. Tres casos donde aún quedan problemas abiertos por estudiar.

En el Capítulo 2 nos hemos centrado en estudiar los sistemas dinámicos Lagrangianos, Hamiltonianos y de Poisson de orden 1, ilustrando con dos ejemplos. El primer ejemplo es clásico en la literatura de Mecánica Geométrica, una partícula en un campo magnético, y el segundo ejemplo, no estudiado en la literatura aún, e introducido en esta Tesis, es un sistema de dos cuerpos rígidos interconectados bajo la influencia de un campo magnético. En particular estudiamos la reducción de los mismos haciendo hincapié en la obtención de un término magnético. Cuando la dinámica del sistema mecánico en cuestión está gobernada por una función Hamiltoniana, estudiamos la reducción de Marsden-Weinstein, y cuando la dinámica viene dada por una función Lagrangiana, la reducción de Routh.

En la reducción al fibrado cotangente hemos completado los resultados previos para la demostración del teorema de reducción, que no aparecía explícitamente desarrollado en la literatura. En particular, hemos desarrollado los Lemas 2.4.13, 2.4.14, 2.4.16, 2.4.17, 2.4.19, 2.4.22, 2.4.23 y 2.4.24. Mediante ellos, caracterizamos el espacio cociente como un producto fibrado dotado de una 2-forma cerrada y deformada con un término magnético. Por otro lado, aplicando el proceso de reducción de Routh al fibrado tangente, dado un Lagrangiano $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ que es regular, y vía la transformada de Legendre se puede también caracterizar el espacio cociente como un fibrado producto.

Siguiendo [37] estudiamos los sistemas Lagrangianos y Hamiltonianos con términos magnéticos, analizando las correspondientes ecuaciones de movimiento. Además hemos ilustrado la teoría con el ejemplo de la partícula en un campo magnético.

En el Capítulo 3 hemos estudiado sistemas mecánicos de orden superior en sus versiones Lagrangiana y Hamiltoniana. En la Subsección 3.1.1 repasamos las ideas

básicas del fibrado tangente de orden superior y definimos un Lagrangiano de orden k . Además, hemos expuesto la descripción variacional de los mismos y presentamos las ecuaciones de movimiento para éstos. Hemos también analizado los sistemas Lagrangianos de orden superior con simetrías.

Vía la transformada de Ostrogradski-Legendre hemos construido el Hamiltoniano de orden superior y las ecuaciones de Hamilton que describen la dinámica asociada a este Hamiltoniano.

El resultado original del Capítulo 3 consistió en extender los resultados de la reducción al cotangente de sistemas Hamiltonianos de orden 1 a un fibrado cotangente de orden superior, obteniendo así (mediante la incorporación de una conexión en un fibrado principal convenientemente elegido) la caracterización del espacio reducido con un fibrado producto. Además, caracterizamos la 2-forma resultante del espacio reducido y definimos en la Definición 3.3.13 un término magnético de orden superior dando lugar a la respuesta de la pregunta planteada en el artículo [30] sobre la definición de un término magnético de orden superior. Del lado Lagrangiano observamos los problemas que ocurrían a la hora de relacionar esto vía la transformada de Legendre de orden superior que sigue siendo una pregunta abierta y continuaremos su estudio como un trabajo futuro derivado de esta tesis.

Por último en el Capítulo 3, generalizamos la idea de sistemas Lagrangianos y Hamiltonianos magnéticos estudiados en [37] para sistemas de orden superior y derivamos intrínsecamente las ecuaciones de Euler-Lagrange de orden superior para estos, notando que, si $k = 1$ recuperábamos las ecuaciones para orden 1.

En el Capítulo 4 estudiamos la reducción de los sistemas mecánicos Híbridos. Comenzamos por presentar dichos sistemas y repasar las nociones básicas para los sistemas híbridos Hamiltonianos simples y los sistemas híbridos Lagrangianos simples. En la subsección 4.1.4 definimos la transformada de Legendre para esta clase de sistemas y demostramos, en la Proposición 4.1.24, que el flujo híbrido de un sistema híbrido Lagrangiano es transformado en uno Hamiltoniano mediante la transformación de Legendre. Ilustramos esta teoría con una aplicación de sistemas holónomos a trozos mediante el ejemplo del sistema bola-ranura.

También estudiamos la reducción simpléctica tratada en [4] extendiendo los resultados de manera de lograr una caracterización del espacio reducido como un producto fibrado y definiendo sistemas híbridos Hamiltonianos magnéticos. Ilustramos esta teoría con dos ejemplos de interés: una partícula magnética rebotando en una esfera (Ejemplo 4.2.38) y el heavy top híbrido (Ejemplo 4.2.42).

En la Sección 4.3 estudiamos variedades de Poisson híbridas y el proceso de reducción de los mismos. Como una aplicación de la teoría hemos estudiado la reducción de un péndulo invertido híbrido Ejemplo 4.3.12 tratado en [4] pero para un sistema de Poisson mostrando que las soluciones obtenidas son las análogas a las del Ejemplo 4.2.31.

Por último estudiamos la reducción para sistemas híbridos Lagrangianos, reducción de Routh, en sus dos versiones: $Q = P \times G$ (con G un grupo no abeliano) extendiendo así los resultados obtenidos en [8] a sistemas híbridos a un caso de variedades producto y para una variedad Q general, definiendo los sistemas híbridos con términos magnéticos, que provienen al igual que como vimos anteriormente (de un proceso de reducción). Ilustramos esta teoría con diversos ejemplos dependiendo del contexto en el que nos encontrábamos.

En la Sección 4.5 demostramos la equivalencia entre los sistemas híbridos Lagrangianos reducidos y los sistemas híbridos Hamiltonianos reducidos, mostrando que la transformada de Legendre reducida envía flujos reducidos Lagrangianos en flujos reducidos Hamiltonianos.

En el Capítulo 5 estudiamos las condiciones suficientes para la existencia de órbitas periódicas en sistemas híbridos que provienen de la reducción de Routh híbrida y además exhiben simetrías de tiempo reversibles. Comenzamos dando los conceptos generales de sistemas híbridos Routhianos simples ilustrando con el ejemplo del robot saltarín de una pierna, en el Ejemplo 5.1.7.

En la Sección 5.2 definimos la simetría tiempo reversible y probamos en la Proposición 5.2.4 y en el Teorema 5.2.5 algunas propiedades de los mismos. Basadas en las propiedades del Routhiano, encontramos condiciones suficientes para la existencia de órbitas periódicas para esta clase de sistemas híbridos y demostramos en el Teorema 5.2.7 la existencia de órbitas periódicas. Continuamos ilustrando lo visto nuevamente con el Ejemplo 5.2.8 del robot saltarín de una pierna.

En la Sección 5.2.4 recordamos los conceptos básicos de la aplicación de Poincaré y mediante ello, analizamos la estabilidad de las órbitas periódicas, brindando condiciones suficientes para la obtención de dichas órbitas en el Teorema 5.2.12. Finalizando esta subsección concluimos el Ejemplo 5.2.13 del Robot saltarín de una pierna.

Por último, aplicamos los resultados anteriores a sistemas de control subactuados. Estudiamos la noción de dinámica cero híbrida dada en [86] junto con una simetría tiempo reversible y obtuvimos una caracterización para buscar soluciones periódicas en sistemas híbridos de control Routhianos subactuados. Brindamos en el Teorema 5.3.9 condiciones para la existencia de las órbitas, ilustrando estos resultados con el Ejemplo 5.3.10 del péndulo invertido con resorte controlado.

En el Capítulo 6 estudiamos sistemas híbridos que describen la evolución de Lagrangianos no-autónomos y donde la superficie de impacto involucra el tiempo. En primer lugar repasamos los resultados básicos de la geometría de sistemas mecánicos dependientes en el tiempo, de variedades cosimplécticas y el Teorema de reducción cosimpléctica. Extendimos en la Proposición 6.1.7, los resultados del Teorema 3.6.2 en [1] que relaciona los campos Lagrangianos y Hamiltonianos dependientes en el tiempo. Estudiamos el Teorema de reducción cosimpléctica y sus hipótesis para lue-

go poder generalizarlo a sistemas híbridos. En la Sección 6.3 definimos los sistemas híbridos dependientes en el tiempo en sus versiones Lagrangiana y Hamiltoniana y dotamos a estos espacios de los elementos necesarios para poder realizar una reducción por simetrías, del lado Hamiltoniano reducción del tipo Marsden-Weinstein y del lado Lagrangiano del tipo reducción de Routh. A lo largo de todo el capítulo, fuimos ilustrando con dos ejemplos de interés: un Billar con disipación y un Billar con paredes móviles. Por último, para el Billar con paredes móviles, realizamos simulaciones mediante PYTHON para ilustrar las trayectorias del sistema híbrido reducido.

Trabajo a futuro

En el Capítulo 3 hemos estudiado y generalizado la reducción en el fibrado $T^*(T^{k-1}Q)$ e identificado el espacio reducido como un producto fibrado. Nos preguntamos, ¿qué ocurre del lado Lagrangiano? Pudimos observar que no es sencillo, como ocurre en el caso de orden 1, que vía la transformada de Legendre se pueden relacionar los espacios. Resulta imposible caracterizar el espacio reducido y constriuir el Routhiano como una combinación entre el Lagrangiano y el momento de orden superior (como lo hacíamos en orden 1) ya que estas aplicaciones viven en espacios diferentes; entonces nos gustaría seguir estudiando este tema y analizar si es posible construir el Routhiano de alguna otra manera para poder extender la reducción de Routh a orden superior.

En los Capítulos 4, 5 y 6 estudiamos los sistemas híbridos en sus diferentes variantes que modelan el andar de los robots bípedos entre otros ejemplos de interés en ingeniería. Nuestro propósito de investigación como trabajo a futuro consiste en estudiar la dinámica, la geometría subyacente y el diseño sistemático de leyes de control por retroalimentación para un “legged system”, con dos aplicaciones concretas que incluyen bípedos que caminan en superficies que se mueven en el tiempo y modelos de exoesqueletos para evitar que el pie resbale en superficies peligrosas, como por ejemplo, superficies mojadas y poder diseñar un control de lazo cerrado para que el cuerpo se mantenga estable y por lo tanto el robot camine estable.

Para eso, nos gustaría primero estudiar la geometría, dinámica e integrabilidad de un legged system a través de la teoría geométrica de Hamilton-Jacobi para un sistema híbrido cuya dinámica continua viene dada por una función Hamiltoniana con aplicaciones a modelos que se utilizan para locomoción bípeda. La teoría geométrica de Hamilton-Jacobi para sistemas híbridos nunca ha sido estudiada ni abordada.

Concretamente, algunos de nuestros intereses son: la unificación de la teoría geométrica de Hamilton-Jacobi de tiempo discreto y continuo para desarrollar la teoría geométrica de Hamilton-Jacobi para sistemas híbridos, la aplicación a 2D SLIP, la integrabilidad de las ecuaciones de Hamilton-Jacobi y la descripción en términos de estratificaciones de los espacios de configuración.

Como consecuencia de los resultados obtenidos en el Capítulo 5, estamos interesados en desarrollar leyes de control para el caminar estable de bípedos basados en la creación de un tipo de simetrías para describir la dinámica de los bípedos como soluciones periódicas de un sistema mecánico híbrido, e introducir un nuevo método para lograr la estabilidad asintótica al caminar en bípedos que caminan en superficies que se mueven en el tiempo y modelos de exoesqueletos para evitar que el pie resbale en superficies que producen deslizamiento.

También, querríamos realizar una extensión del método de simetrías desarrollado en el Capítulo 5 de esta Tesis para sistemas dependientes del tiempo y su aplicación a la creación de leyes de control por retroalimentación para mantener estable un bípedo que camina en una superficie que se mueve en el tiempo, como así también la extensión de tal método para sistemas Routhianos con disipación.

Bibliografía

- [1] R. Abraham and J. E. Marsden. *Foundations of mechanics*. Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Advanced Book Program, Reading, Mass, 1978.
- [2] C. Albert. *Le théorème de réduction de Marsden-Weinstein en géométrie cosymplectique et de contact*. J. Geom. Phys., 6(4):627–649, 1989.
- [3] R. Alerndorfer, D. Koditscheck, and P. Holmes. *Stability analysis of legged locomotion models by symmetry-factored return maps*. The international Journal of Robotics Research. 23 (10-11): 979-999, 2004.
- [4] A. Ames. *A categorical theory of hybrid systems*. PhD thesis, University of California, Berkeley, 2006.
- [5] A. D. Ames, R. D. Gregg, and M. W. Spong, *A geometric approach to three-dimensional hipped bipedal robotic walking*, in Proc. of the 45th IEEE Conference on Decision and Control. 2006.
- [6] A. Ames, R. Gregg, E. Wendel, and S. Sastry. *On the geometric reduction of controlled three-dimensional bipedal robotic walkers*. In 3rd Workshop on Lagrangian and Hamiltonian Methods for Nonlinear Control, 2006.
- [7] A. Ames and S. Sastry. *Hybrid cotangent bundle reduction of simple hybrid mechanical systems with symmetry*. in Proceedings of the 25th American Control Conference Minneapolis MN 2006.
- [8] A. Ames and S. Sastry. *Hybrid Routhian reduction of Lagrangian hybrid systems*. in Proceedings of the 25th American Control Conference Minneapolis MN 2006.
- [9] G. Birkhoff. *The restricted problem of three bodies*. Rend. Circ. Mat. Palermo 39, 265- 334, 1915.
- [10] A. M. Bloch. *Nonholonomic Mechanics and Control*, Series IAM. New York: Springer-Verlag, vol. 24. 2nd Edition 2015.
- [11] A. M. Bloch, W. Clark and L. Colombo *Quasivelocities and symmetries in simple hybrid systems*, Decision and Control (CDC), IEEE 56th Annual Conference on, 1529- 534, 2017.

- [12] A. M. Bloch, J. E. Marsden, and D. V. Zenkov, *Quasivelocities and symmetries in nonholonomic systems*, Dynamical Systems: An International Journal, vol. 24, no. 2, pp. 187–222, 2009.
- [13] B. Brogliato, , *Nonsmooth Impact Dynamics: Models, Dynamics and Control*. Springer-Verlag, vol. 220, 1996.
- [14] S. Burden, S. Revzen and S. Sastry. *Reduction Near Periodic Orbits of Hybrid Dynamical Systems*. IEEE Transactions on Automatic Control. Vol 60. No 10, 2626-2639, 2015.
- [15] F. Cantrijn and W. Sarlet, *Higher-order Noether symmetries and constants of the motion*. J. Phys. A 14, no. 2, 479-492, 1981.
- [16] S. Capriotti. *Routh reduction and Cartan mechanics*. J. Geom. Phys. 114, 23-64, 2017.
- [17] J. Carinena and C. López, *The time-evolution operator for higher-order singular Lagrangians*. Internat. J. Modern Phys. A 7, no. 11, 2447-2468, 1992.
- [18] H. Cendra, J. E. Marsden and T. S. Ratiu *Lagrangian Reduction by stages*, Memoirs of the American Mathematical Society 152, no. 722, July 2001, 108 pp. (Received by the AMS, April, 1999; Updated January 22, 2009).
- [19] W. Clark, A. Bloch and L. Colombo. *A Poincaré-Bendixon Theorem for Hybrid Systems*, arXiv preprint arXiv: 1801.09014.
- [20] M. Coleman and P. Holmes. *Motions and stability of a piecewise holonomic system: the discrete Chaplygin sleigh*. Regul. Chaotic Dyn. 4, no. 2, 55-77, 1999.
- [21] S. Collins, A. Ruina, R. Tedrake and M. Wisse. *Efficient bipedal robots based on passive-dynamic walkers*, Science 307 (5712), 1082-1085, 2015.
- [22] L. Colombo and M. E. Eyrea Irazu. *Symmetries and periodic orbits in simple hybrid Routhian systems*. Submitted for publication.
- [23] L. Colombo, W. Clark and A. Bloch. *Time reversal symmetries and zero dynamics for simple hybrid Hamiltonian control systems*. Annual American Control Conference (ACC), 2218-2223, 2018.
- [24] S. Coogan and M. Arcak. *Finite abstraction of mixed monotone systems with discrete and continuous inputs*. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, Vol. 23, 254-271, 2017.
- [25] J. Cortes, M. de León, M. Martín de Diego and S. Martínez. *Mechanical systems subjected to generalized non-holonomic constraints*, E. Soc. Lond. Proc. Ser. A Math. Phys. Eng. no. 2007, 651-670 Sci. 457, 2001.
- [26] J. Cortes and A. Vinogradov. *Hamiltonian theory of constrained impulsive motion*, (English summary) J. Maths. Phys. 47, no. 4,042905, 30 pp., 2006.

- [27] M. Crampin and T. Mestdag. *Routh's procedure for non-abelian symmetry groups*. J. Math. Phys, 49(3):032901, 28, 2008.
- [28] M. Crampin, W. Sarlet and F. Cantrijn, *Higher order differential equations and higher order Lagrangian Mechanics*. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. Vol 99, 565-587, 1986.
- [29] M. Crampin and D. Saunders, *On the geometry of higher-order ordinary differential equations and the Wuenschmann invariant*. Groups, geometry and physics, 79-92, Monogr. Real Acad. Ci. Exact. Fs.-Qum. Nat. Zaragoza, 29, 2006.
- [30] M. De León and E. Lacomba. *Lagrangian submanifolds and higher-order mechanical systems*. J. Phys. A.: Math. Gen. 22, 3809,3820, 1989.
- [31] M. De León and P.R. Rodrigues. *Symplectic reduction of higher order Lagrangian systems with symmetry*, 6546, doi: 10.1063/1.530890, American Institute of Physics, 1994.
- [32] M. De León and P.R. Rodrigues, *Methods of Differential Geometry in Analytical Mechanics*. North-Holland, Amsterdam 1989.
- [33] M. De León and P.R. Rodrigues, *Generalized Classical Mechanics and Field Theory*. North-Holland, Amsterdam, 1985.
- [34] M. de León and M. Saralegi. *Cosymplectic reduction for singular momentum maps*. J. Phys. A, 26(19):5033–5043, 1993.
- [35] A. De, S. Burden and D. Koditschek. *A hybrid dynamical extension of averaging and its application to the analysis of legged gait stability*. The International Journal of Robotics Research. DOI:10. 1177/0278364918756498, 2018.
- [36] E. Frazzoli. *Robust Hybrid Control for Autonomous Vehicle Motion Planning*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, 2001.
- [37] E. García-Toraño. *Geometric aspects of reduction for dynamical systems with symmetry*. PhD thesis, Universiteit Gent, 2014.
- [38] E. García-Toraño Andres, B. Langerock and F. Cantrijn. *Aspects of reduction and transformation of Lagrangian systems with symmetry*. J. Geom. Mech. 6, no. 1, 1-23, 2014.
- [39] R. M. Ghigliazza, R. Altendorfer, P. Holmes, and D. Koditschek. *Asimply stabilized running model*. SIAM Journal on Applied Dynamical Systems, 2(2):187-218, 2003.
- [40] R. Goebel, R. Sanfelice, and A. Teel. *Hybrid dynamical systems*. Princeton University Press. 2012.
- [41] R. Goebel and R. G. Sanfelice and A. R. Teel. *Hybrid Dynamical Systems: Modeling, Stability, and Robustness*. Princeton University Press, 2012.

- [42] H. Goldstein. *Classical mechanics*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., second edition. Addison-Wesley Series in Physics, 1980.
- [43] J. Goodman and L. Colombo. *On the Existence and Uniqueness of Poincare Maps for Systems with Impulse Effects*. arXiv preprint arXiv:1810.05426, 2018.
- [44] X. Gracia, J. Pons and N. Roman-Roy. *Higher-order Lagrangian systems: geometric structures, dynamics, and constraints*. J. Math. Phys. 32, no. 10, 2744-2763, 1991.
- [45] J. Grizzle, G. Abba, and F. Plestan. *Asymptotically stable walking for biped robots: analysis via systems with impulse effects*, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 46, no. 1, pp. 51-64, 2001.
- [46] J. Guckenheimer and P. Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [47] K. Hamed and J. Grizzle. *Reduced-order framework for exponential stabilization of periodic orbits on parameterized hybrid zero dynamics manifolds: Application to bipedal locomotion*. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems 25, 227-245, 2017.
- [48] D. Holm, T. Schamch and C. Storia. *Geometric Mechanics and Symmetry*. Oxford University, 2009.
- [49] P. Holmes, R. Full, D. Koditschek and J. Guckenheimer. *The dynamics of legged locomotion: models, analyses, and challenges*. SIAM Review 48, no. 2, 207-304, 2006.
- [50] A. Ibrort, M. de León, E. A. Lacomba, J. C. Marrero, D. Martín de Diego, and P. Pitanga. *Geometric formulation of mechanical systems subjected to time-dependent one-sided constraints*. J. Phys. A, 31(11):2655–2674, 1998.
- [51] A. Ibrort, M. de León, E. A. Lacomba, J. C. Marrero, D. Martín de Diego, and P. Pitanga. *Geometric formulation of Carnot's theorem*. J. Phys. A, 34, no. 8, 1691-1712, 2001.
- [52] A. Ibrort, M. de León, E. A. Lacomba, D. Martín de Diego, and P. Pitanga. *Mechanical systems subjected to impulse constraints*. J. Phys. A, 30, no. 16, 5835-5854, 1997.
- [53] A. Isidori. *Nonlinear control systems*. Springer, 1995.
- [54] S. Johnson. *Simple hybrid systems* Int. J. Bifurcation and Chaos, 04, 1655, 1994.
- [55] E. Lacomba and W. Tulczyjew. *Geometric formulation of mechanical systems with one-sided constraints*, J. Phys. A 23, no. 13, 2801-2813, 1990.
- [56] J. Lamb and A. Roberts. *Time reversal symmetry in dynamical systems: A survey*. Physica D 112, 1-39, 1998.

- [57] A. Lamperski and A. Ames. *Lyapunov-like conditions for the existence of Zeno behavior in hybrid and Lagrangian hybrid systems*. In Proc. IEEE Conf. on Decision and Control, pages 115-120, 2007.
- [58] B. Langerock, F. Cantrijn and J. Vankerschaver. *Routhian reduction for quasi-invariant Lagrangians*. J. Math. Phys. 51, no. 2, 022902, 2010.
- [59] B. Langerock, E. Garcia-Torano and F. Cantrijn. *Routh reduction and the class of magnetic Lagrangian systems*. J. Math. Phys. 53, no. 6, 062902, 2012.
- [60] T. Lee, K. Sreenath, and V. Kumar. *Geometric Control of Cooperating Multiple Quadrotor UAVs with a Suspended Payload*. IEEE Conference on Decision and Control (CDC), 5510–5515, Florence, Italy, 2013.
- [61] J. E. Marsden, G. Misiolek, J. P. Ortega, M. Perlmutter and T. S. Ratiu *Hamiltonian Reduction by stages*, Springer Lecture Notes in Mathematics, Volume 1913, 2007.
- [62] J. Marsden and T. Ratiu, *Introduction to Mechanics and Symmetry*, 2nd ed., ser. Texts in Appl. Math. New York: Springer, vol. 17, 1999.
- [63] J. Marsden and T. Ratiu, *Reduction of Poisson Manifolds*, Letters in Mathematical Physics 11, 161-169, 1986.
- [64] J. E. Marsden and A. Weinstein. *Reduction of symplectic manifolds with symmetry*. Rep. Mathematical Phys, 5(1):121–130, 1974.
- [65] J. E. Marsden and M. West. *Discrete Mechanics and Variational Integrators*. Acta numérica 10, 357-514, 2001.
- [66] T. McGeer. *Passive dynamic walking*. Int. J. Robot. Res. 9 (2), 62-82, 1990.
- [67] P.J. Meyer and D. Dimarogonas. *Compositional abstraction refinement for control synthesis*. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, Vol. 27, pp. 437-451, 2018.
- [68] A. Morimoto, *Prolongations of G-structures to tangent bundles of higher order*. Nagoya Math. J. Vol 38, 153-179, 1970.
- [69] L. A. Pars. *A treatise on analytical dynamics*. John Wiley & Sons Inc., New York, 1965.
- [70] L. Perko. *Differential equations and dynamical systems*. 2nd Edition, Springer, 2001.
- [71] H. Poincaré. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*. Tome I, II, III (French) Dover Publications, Inc., New York, N.Y., 1957.
- [72] J. Proctor and P. Holmes. *Steering by transient destabilization in piecewise-holonomic models of legged locomotion..* Regul. Chaotic Dyn. 13, no. 4, 267-282, 2008.

- [73] H. Razavi. *Symmetry Method for Limit Cycle Walking of Legged Robots*. PhD thesis, University of Michigan, 2016.
- [74] H. Razavi, A. M. Bloch, X. Da and A. Ijspeert. *Symmetric Virtual Constraints for Periodic Walking of Legged Robots*, 55th IEEE Conference on Decision and Control (CDC), 2016.
- [75] H. Razavi, A. Bloch, C. Chevallereau, and J. W. Grizzle. *Symmetry in legged locomotion: A new method for designing stable periodic gaits*. Journal of Autonomous Robots, 41 (5), 1119-1142, 2017.
- [76] A. Ruina. *Nonholonomic stability aspects of piecewise holonomic systems*. Rep. Math. Phys. 42, no. 1-2, 91-100, 1998.
- [77] J. Schmitt and P. Holmes. *Mechanical models for insect locomotion: dynamics and stability in the horizontal plane I. Theory*. Biol. Cybern. 83, 501-515, 2000.
- [78] E. Sidorov and M. Zacksenhouse. *Lyapunov based estimation of the basin of attraction of Poincare maps with applications to limit cycle walking*. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, Vol. 33, 179-194, 2019.
- [79] A. Siravuru, S. Viswanathan, K. Sreenath, and A. Sanyal. *The Reaction Mass Biped: Geometric Mechanics and Control*. Journal of Intelligent and Robotic Systems (JINT), 89(1-2):155-173, 2018.
- [80] S. Spedicato and G. Notarstefano. *An optimal control approach to the design of periodic orbits for mechanical systems with impacts*. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, Vol. 23, 111-121, 2017.
- [81] K. Sreenath, N. Michael, and V. Kumar. *Trajectory Generation and Control of a Quadrotor with a Cable-Suspended Load – A Differentially-Flat Hybrid System*. IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), 2013.
- [82] K. Sreenath, H. Park, I. Poulakakis, and J. Grizzle. *Compliant Hybrid Zero Dynamics Controller for achieving Stable, Efficient and Fast Bipedal Walking on MABEL*. The International Journal of Robotics Research (IJRR), 30(9):1170-1193, 2011.
- [83] P. Tabuada, A. Ames, A. Julius and G. Pappas. *Approximate reduction of dynamic systems*. Systems & Control Letters 57 (7), 538-545, 2008.
- [84] P. Tabuada, A. Ames, A. Julius and G. Pappas. *Approximate reduction of dynamical systems*, in the Proc. 45th IEEE Conf. Decision and Control, San Diego, USA, 2006.
- [85] E. Wendel and A. D. Ames. *Rank Deficiency and Superstability of Hybrid Systems*. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, Vol. 6(2), 787-805, 2012.
- [86] E. Westervelt, J. Grizzle, C. Chevallereau, J. Ho Choi, and B. Morris. *Feedback control of dynamic bipedal robot locomotion*. Taylor & Francis/CRC, 2007.