



**UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA**

**FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS**

**DEPARTAMENTO DE FÍSICA**

---

**Trabajo de Tesis Doctoral:**

***Funciones de estructura antisimétricas  
de hadrones holográficos***

---

**Tesista: Lic. Gustavo Michalski**

**Director: Dr. Martin Schwelling**

**Año: 2019**



# Agradecimientos

Al Dr. Nicolás Kovensky, quien es coautor de los trabajos aquí presentados y con quien tuve el gusto de trabajar gran parte del doctorado. Al Dr. Martin Schvellinger, por ser un gran director y mejor persona aún. A los Dres. David Jorin y Ezequiel Koile con quienes compartimos varias discusiones desde el comienzo de mi doctorado.

Al Instituto de Física La Plata (IFLP-CONICET-UNLP) y Departamento de Física de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional de La Plata (DF-FCE-UNLP), donde los trabajos de esta tesis fueron desarrollados.



# Resumen

En esta tesis se estudió a través de la correspondencia AdS/CFT el proceso de dispersión inelástica profunda de leptones cargados sobre hadrones de la teoría  $\mathcal{N} = 4$  súper Yang-Mills con grupo de *gauge*  $SU(N)$  en el régimen de acoplamiento fuerte. Los hadrones considerados fueron el glueball, de espín 0, y el glueballino, de espín 1/2. Partiendo de las amplitudes de dispersión de cuerdas cerradas de la teoría de supercuerdas IIB en un fondo  $AdS_5 \times S^5$  se obtuvieron las funciones de estructura de los hadrones en distintos regímenes de la variable de Bjorken  $x$ . En el régimen  $1/\sqrt{\lambda} \ll x < 1$ , el cálculo se corresponde a amplitudes de supergravedad del tipo IIB, mientras que para valores de  $x$  chico (*i.e.*  $e^{-\sqrt{\lambda}} \ll x \ll 1/\sqrt{\lambda}$ ) es necesario calcular las amplitudes de dispersión en la teoría de supercuerdas. Se estudió el rol central que tiene el término de Chern-Simons en la presencia de las funciones de estructura antisimétricas para ambos tipos de hadrones. Por último, en el régimen de  $x$  exponencialmente chico, donde la física de Regge se vuelve relevante, el análisis dual se hizo a través de la técnica del Pomerón, obteniendo las funciones de estructura en dicho régimen y realizando comparaciones con datos experimentales obtenidos del protón. Como resultado se obtuvieron buenos ajustes y predicciones para la función antisimétrica  $g_1$ .



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>I Base teórica</b>	<b>5</b>
<b>1. Aspectos básicos de holografía y teoría de cuerdas</b>	<b>7</b>
1.1. $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills	8
1.2. Teoría de supercuerdas y supergravedad IIB	10
1.3. La correspondencia AdS/CFT	12
<b>2. DIS en teorías cuánticas de campos</b>	<b>17</b>
2.1. Cinemática del DIS	18
2.2. Sección eficaz y funciones de estructura	20
2.2.1. Tensor leptónico	21
2.2.2. Tensor hadrónico	22
2.3. Amplitud de Compton y el teorema óptico	24
2.4. Modelo de partones en QCD	27
2.5. DIS en teorías de super Yang-Mills	29
2.6. Región de Regge: el Pomerón	32
<b>3. DIS holográfico en teorías de super Yang-Mills</b>	<b>35</b>
3.1. Regímenes cinemáticos de DIS	39
3.2. Reducción dimensional: supergravedad <i>gaugeada</i>	41
3.3. DIS en el régimen $1/\sqrt{\lambda} \ll x < 1$	44
3.3.1. Blanco escalar	45
3.3.2. Blanco fermiónico	47
3.3.3. Análisis de las funciones de estructura	48

<b>II Contribuciones originales</b>	<b>51</b>
<b>4. Régimen <math>x</math> chico</b>	<b>53</b>
4.1. Blanco escalar: Dilatón . . . . .	55
4.1.1. Contribución simétrica . . . . .	56
4.1.2. Funciones de estructura simétricas (blanco de espín 0) . . . . .	60
4.1.3. Contribución antisimétrica . . . . .	61
4.1.4. Funciones de estructura antisimétricas (blanco de espín 0) . . . . .	65
4.2. Blanco fermiónico: Dilatino . . . . .	66
4.2.1. Contribución simétrica . . . . .	66
4.2.2. Funciones de estructura simétricas (blanco de espín 1/2) . . . . .	69
4.2.3. Contribución antisimétrica . . . . .	70
4.2.4. Funciones de estructura antisimétricas (blanco de espín 1/2) . . . . .	72
4.3. Discusión de resultados . . . . .	74
<b>5. Régimen <math>x</math> exponencialmente chico</b>	<b>77</b>
5.1. Caso escalar . . . . .	79
5.1.1. <i>Kernel</i> conforme . . . . .	81
5.1.2. Intercambio de campo de <i>gauge</i> . . . . .	82
5.2. Caso fermiónico . . . . .	83
5.3. Comparación con datos experimentales . . . . .	85
5.4. Comentarios finales . . . . .	90
<b>Conclusiones</b>	<b>93</b>
<b>A. Relación entre generadores de <math>SU(4)</math> y <math>SO(6)</math></b>	<b>97</b>
<b>B. Derivación del término de Chern-Simons</b>	<b>99</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>101</b>



# Introducción

El estudio de la estructura interna de los hadrones presenta al día de hoy un desafío interesante para la física, tanto en el plano teórico como experimental. A más de 45 años de que la cromodinámica cuántica (QCD) fuera propuesta como la teoría que explica la interacción entre quarks y gluones [1], la naturaleza fuertemente acoplada de la misma hace que los cálculos en forma analítica sean, en una gran cantidad de situaciones físicamente relevantes, complicados de llevar a cabo. El objetivo de esta tesis será estudiar la estructura interna de los hadrones en forma analítica y desde primeros principios, partiendo de la teoría de cuerdas y utilizando técnicas de holografía. Esto lo haremos a través del denominado proceso de dispersión inelástica profunda o *deep inelastic scattering* (DIS). El DIS se basa en hacer dispersar un leptón (en el caso del DIS electromagnético un leptón cargado, como un electrón) contra un blanco hadrónico. La interacción es mediada por un fotón virtual de alta energía que *prueba* la estructura fuertemente acoplada del hadrón. En el régimen donde el fotón virtual absorbido fragmenta el hadrón original en varios estados hadrónicos finales se dice que la dispersión es *profundamente inelástica*. El diagrama de Feynman asociado al DIS se muestra esquemáticamente en la figura 1.

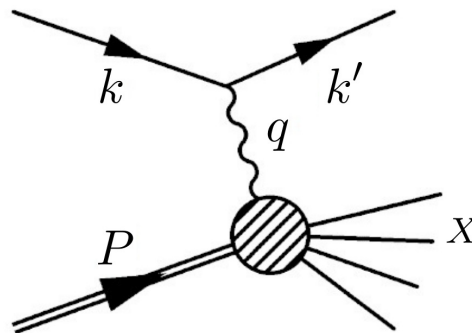


Figura 1: Proceso de *deep inelastic scattering*. El hadrón blanco de cuadrivector  $P$  es dispersado por el fotón virtual de cuadrivector  $q$  emitido por el leptón de cuadrivector  $k$ . Como resultado el leptón queda con cuadrivector  $k'$  mientras que el hadrón se fragmenta en estados hadrónicos indicados por  $X$ .

Para entender este proceso es necesario estudiar la amplitud de dispersión del leptón cargado con

el hadrón, que puede escribirse como la contracción de dos tensores. El primero es el tensor leptónico, que contiene la información de la interacción electromagnética entre el leptón y el fotón virtual, y puede estudiarse desde la electrodinámica cuántica (QED) en el régimen perturbativo. El segundo es el tensor hadrónico  $W^{\mu\nu}$ , que contiene la información de la interacción fuerte, por lo que en un principio debería ser estudiado a través de la cromodinámica cuántica. A su vez  $W^{\mu\nu}$  admite una descomposición en tensores de Lorentz, que depende del espín del hadrón y que se expresa como una suma de tensores acompañados por funciones escalares denominadas *funciones de estructura*. Estas funciones contienen toda la información de la estructura hadrónica del blanco y dependen solamente de dos parámetros: la energía del fotón virtual  $q^2$  y la variable de Bjorken  $x \equiv -q^2/(2P \cdot q)$ , donde  $P$  es el cuadrimomento del hadrón. A su vez, según si los tensores que acompañan son simétricos o antisimétricos respecto de la permutación de los índices de Lorentz, las funciones de estructura se clasifican entre simétricas o antisimétricas.

Desde el punto de vista de la teoría cuántica de campos tanto el  $W^{\mu\nu}$  como las funciones de estructura deberían ser derivadas desde QCD. Sin embargo el DIS contiene procesos regidos por la dinámica suave (*soft*) de QCD, por lo que sería necesario realizar cálculos no perturbativos, lo cual es extremadamente complicado de lograr. Afortunadamente, en ciertos regímenes paramétricos las funciones de estructura del DIS pueden obtenerse utilizando la dualidad de teorías de *gauge* y teorías de cuerdas, conocida como AdS/CFT.

Esta dualidad, propuesta por Maldacena a fines de la década de los 90 en [2], establece una relación holográfica entre teorías de campos en cuatro dimensiones (en principio conformes, de allí *CFT*) con teorías de supercuerdas en diez dimensiones en espacios curvos (en principio  $AdS_5 \times S^5$ ). La misma se utiliza como un diccionario que asocia procesos de teorías de campos en el borde plano del espacio anti de Sitter con procesos gravitatorios que se dan en su interior. Una peculiaridad de esta dualidad es que la relación entre las intensidades de los acoplamientos en el interior (*bulk*) del AdS y los del borde es inversa. Esto quiere decir que cuando el acoplamiento en la teoría de campos es fuerte, el acoplamiento de las teorías de gravedad es débil, y viceversa<sup>1</sup>.

Este último resultado hizo pensar en su momento que AdS/CFT podría ser una herramienta útil para estudiar la cromodinámica cuántica, dado el carácter fuertemente acoplado de esta teoría a energías intermedias y bajas. A pesar de que ha habido distintos avances en esta dirección<sup>2</sup>, al día de la fecha no se ha logrado encontrar un dual holográfico exacto que describa todas las propiedades de QCD. Sin embargo, en el proceso de entender mejor las teorías cuánticas de campos fuertemente acopladas se han encontrado distintos resultados *universales*. Por universales queremos decir que el resultado no depende explícitamente del modelo dual que se elija, si no de ciertas características comunes a diversos modelos. Un ejemplo de esto es el cálculo de las funciones de estructura de mesones escalares y vectoriales [7, 8, 9], que presentan el mismo comportamiento en al menos tres modelos duales distintos [10, 6, 11].

En el contexto de la dualidad AdS/CFT, Polchinski y Strassler propusieron a principio de los años 2000

<sup>1</sup>Generalizaciones de la dualidad AdS/CFT en distintas direcciones pueden verse por ejemplo en [3, 4, 5], entre otros.

<sup>2</sup> El ejemplo más significativo de modelo holográfico dual cercano a QCD es el modelo de Sakai y Sugimoto [6] basado en la teoría de supercuerdas del tipo IIA, el cual contiene un sistema de  $N_f$  D8 y anti-D8-branas de sabor y  $N$  D4-branas de color, y que describe importantes propiedades de la física de bajas energías asociada a las interacciones fuertes, incluido el lagrangiano quiral.

en [12], una forma de estudiar el proceso de DIS de manera holográfica. La idea es asociar el DIS de la teoría de campos en el borde con la amplitud de dispersión de ciertos estados de la teoría de supercuerdas en el *bulk*. De esta manera pudieron calcular las funciones de estructura simétricas del glueball y el glueballino de la teoría de campos  $\mathcal{N} = 4$  super Yang-Mills. Su propuesta dio lugar a un número importante de trabajos realizados en esta dirección, donde se calcularon las funciones de estructura de diversos blancos [13, 14, 15, 16, 17, 7, 8, 9, 18, 19, 20].

El DIS puede ser estudiado en distintos regímenes según el valor que toma la variable de Bjorken, que cumple  $0 \leq x \leq 1$ . Desde el punto de vista holográfico, y sin ser demasiado formal, cuánto más chico es el valor de  $x$  respecto de la constante de 't Hooft  $\lambda = g_{YM}^2 N$ , más relevante se vuelve la física de la teoría de cuerdas. Sin entrar en demasiado detalle, puesto que esto será mejor desarrollado en el capítulo 3, podemos separar al DIS en tres regímenes duales bien distintos:

- El primero es el régimen de  $x$  grande,  $1/\sqrt{\lambda} \ll x < 1$ , donde la teoría dual se reduce a la supergravedad IIB.
- En segundo lugar el régimen denominado  $x$  chico,  $e^{-\sqrt{\lambda}} \ll x \ll 1/\sqrt{\lambda}$ , donde el DIS es dual a procesos que incluyen el estudio de amplitudes de dispersión de cuerdas en escalas donde la curvatura del espacio no es relevante. Debido a esto el cálculo puede realizarse en forma análoga a como se haría en el espacio plano.
- El último régimen es el de  $x$  exponencialmente chico,  $0 \leq x \sim e^{-\sqrt{\lambda}}$ , donde la física de Regge se hace relevante y es necesario calcular las amplitudes de cuerdas en espacios curvos. Esto puede llevarse a cabo bajo ciertas aproximaciones utilizando la técnica del Pomerón desarrollada en [13, 14].

La idea de esta tesis es mostrar la investigación realizada por el autor de la misma, junto con su director y colegas, donde se profundizó en el estudio del DIS holográfico en los regímenes de  $x$  chico y exponencialmente chico, enfocándose principalmente en el cálculo de las funciones de estructura antisimétricas del glueball y del glueballino. Se estudió la teoría de campos de super Yang-Mills (SYM) con grupo de *gauge*  $SU(N)$  y acoplamiento fuertemente, donde el parámetro de 't Hooft es grande, y en el límite planar donde  $1 \ll \lambda \ll N$ . En dichas condiciones SYM es dual a la teoría de supercuerdas del tipo IIB en un fondo  $AdS_5 \times S^5$  en acoplamiento débil.

Como primer resultado original calcularemos las funciones de estructura antisimétricas  $F_3$  y  $g_1$  en el régimen de  $x$  chico, mostrando que las mismas surgen en forma holográfica debido a la presencia del término de supergravedad de Chern-Simons. Esto lo haremos tanto desde el cálculo de las amplitudes de cuerdas como también de una forma más sencilla que implica simplemente el cálculo de amplitudes de supergravedad.

Para el régimen exponencialmente chico los resultados son más interesantes. Las funciones de estructura simétricas del glueballino fueron estudiadas en este régimen por Brower et al en [21]. En dicho trabajo propusieron comparar sus resultados con datos experimentales de la función de estructura  $F_2$  del protón, realizando un ajuste entre el modelo obtenido desde la teoría de cuerdas y los datos que se acomodaban al

régimen de DIS estudiado. Motivados por dicho resultado, en el último capítulo de la presente tesis calcularemos la función de estructura antisimétrica  $g_1$  en el régimen exponencialmente chico, y mostraremos que ajusta muy bien con los datos obtenidos para el protón en 2017 por la colaboración COMPASS del CERN [22]. A raíz de los resultados de dicho ajuste podemos dar predicciones de la función  $g_1$  del protón para regímenes que aún no han sido estudiados en forma experimental.

A continuación daremos el orden de los contenidos de la tesis. En la primera parte introduciremos los conceptos básicos necesarios para comprender el DIS holográfico. El capítulo 1 consta de un breve repaso de la dualidad AdS/CFT, en el capítulo 2 describiremos el proceso de DIS en teorías cuánticas de campos, y en el capítulo 3 daremos la descripción holográfica del DIS en teorías de super Yang-Mills, mostrando como ejemplo los resultados obtenidos en el régimen de supergravedad. Los siguientes capítulos se encuentran enmarcados en la segunda parte de la tesis, y contienen los resultados originales. En el capítulo 4 mostraremos como obtener las funciones de estructura en el régimen de  $x$  chico, y en particular obtendremos las funciones de estructura antisimétricas. El capítulo 5 contiene los cálculos hechos en el régimen del Pomerón, donde se muestra el resultado original para la función de estructura  $g_1$ .

## Publicaciones

Las publicaciones en las que se basa esta tesis son las siguientes:

- N. Kovensky, G. Michalski y M. Schvellinger, “DIS off glueballs from string theory: the role of the chiral anomaly and the Chern-Simons term”  
JHEP 1804 (2018) 118 doi:10.1007/JHEP04(2018)118 [arXiv:1711.06171 [hep-th]], 35 páginas. [23].
- N. Kovensky, G. Michalski and M. Schvellinger, “Deep inelastic scattering from polarized spin-1/2 hadrons at low  $x$  from string theory”  
JHEP 1810 (2018) 084 doi:10.1007/JHEP10(2018)084 [arXiv:1807.11540 [hep-th]], 39 páginas. [24].

Durante el desarrollo de la beca doctoral se publicó un tercer trabajo que se decidió no incluir en la tesis debido a que el tema, si bien afin, no está del todo correlacionado con la investigación de los dos primeros artículos. El mismo es

- N. Kovensky, G. Michalski and M. Schvellinger, “ $1/N$  corrections to F1 and F2 structure functions of vector mesons from holography”  
Phys. Rev. , D99(4):046005 (2019) [arXiv:1809.10515 [hep-th]], 23 páginas. [20].

**Parte I**

**Base teórica**



# Capítulo 1

## Aspectos básicos de holografía y teoría de cuerdas

Esta tesis se desarrolló en el marco de la dualidad AdS/CFT [2, 25, 26], que relaciona, en su formato más estudiado, teorías de campos conformes (es decir, teorías donde la constante de acoplamiento es constante) en cuatro dimensiones con teorías de supercuerdas en diez dimensiones. La dualidad se utiliza como un *diccionario* que relaciona los operadores de la teoría cuántica de campos en el borde del espacio AdS con los campos de la teoría de gravedad en el interior del AdS, permitiendo de esta forma obtener observables de la primera mediante cálculos asociados a amplitudes de dispersión en la segunda, y viceversa.

Un concepto central de la dualidad AdS/CFT es la holografía. El principio holográfico plantea la idea de que las teorías de gravedad en una región pueden ser descritas por una teoría que vive en el borde de dicha región [27, 28]. En el caso de la dualidad AdS/CFT la interpretación holográfica se expresa explícitamente en forma geométrica: la teoría cuántica de campos vive en el borde plano de cuatro dimensiones del espacio anti de Sitter de cinco dimensiones ( $AdS_5$ ), mientras que la teoría de gravedad vive en el interior del mismo.

Además de relacionar ambas teorías, la dualidad tiene un uso más pragmático: permite obtener resultados de la teoría cuántica de campos en el régimen de acoplamiento fuerte. Esto se debe a que AdS/CFT plantea una relación de acoplamiento *strong-weak* entre la teoría de campos y la de gravedad, de forma tal que cuando una está fuertemente acoplada, la otra se encuentra en el régimen débilmente acoplado. Al estudiar la teoría cuántica de campos en el régimen no perturbativo tenemos que la teoría de cuerdas dual se encuentra en el régimen de supergravedad, donde en general resulta sencillo calcular los observables que se desean estudiar.

Una teoría cuántica de campos que ha sido largamente estudiada en el contexto de la dualidad, ya desde su origen [2], es  $\mathcal{N} = 4$  super Yang-Mills ( $\mathcal{N} = 4$  SYM), una teoría de campos conforme supersimétrica con campos en la representación adjunta del grupo de *gauge*  $SU(N)$ . El dual holográfico en este caso corresponde a la teoría de supercuerdas del tipo IIB en un fondo  $AdS_5 \times S^5$ . De ahí que la dualidad tome el nombre AdS/CFT.

Al ser una teoría conforme,  $\mathcal{N} = 4$  SYM puede ser estudiada en cualquier régimen de acoplamiento.

En particular nos enfocaremos en esta tesis en el régimen de acoplamiento fuerte, ya que es el que más se asemeja a QCD en un sentido<sup>1</sup>. En este caso la teoría dual es el límite de bajas energías de la teoría de supercuerdas IIB: la supergravedad IIB.

## 1.1. $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills

La teoría  $\mathcal{N} = 4$  super Yang-Mills es una teoría de *gauge* en cuatro dimensiones máximamente supersimétrica, definida en el espacio plano de Minkowski [29, 30, 4]. El grupo de *gauge* es  $SU(N)$ , donde  $N$  indica el número de grados de libertad de color, y posee además la simetría global  $SU(4)_R$ , llamada simetría  $R$ . El contenido de campos incluye seis escalares reales  $X^i$  ( $i = 1, \dots, 6$ ), cuatro fermiones de Weyl complejos  $\lambda_\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, 4$ ), y los campos de *gauge*  $A_\mu^A$  ( $A = 1, \dots, N^2 - 1; \mu = 0, \dots, 3$ ). Todos los campos se encuentran en la representación adjunta de  $SU(N)$ , mientras que bajo la acción del grupo de la simetría  $R$  los escalares transforman en la representación **6**, los fermiones están en la representación fundamental, con la parte quiral  $(0, 1/2)$  transformando en **4** y la parte  $(1/2, 0)$  en **4\***, mientras que los vectores son *singletes* [25]. Juntos forman el multiplete de  $\mathcal{N} = 4$ :

$$(A_\mu^A, \lambda_\alpha, X^i).$$

El lagrangiano de la teoría queda completamente determinado por la supersimetría [29], siendo el mismo

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \text{Tr} \left\{ -\frac{1}{2g_{\text{YM}}^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\theta_I}{8\pi^2} (F \cdot *F) - \sum_a i \bar{\lambda}^\alpha \bar{\sigma}^\mu D_\mu \lambda_\alpha - \sum_i (D_\mu X^i)^2 \right. \\ \left. + \sum_{\alpha, \beta, i} g_{\text{YM}} C_i^{\alpha\beta} \lambda_\alpha [X^i, \lambda_\beta] + \sum_{\alpha, \beta, i} g_{\text{YM}} \tilde{C}_{i\alpha\beta} \bar{\lambda}^\alpha [X^i, \bar{\lambda}^\beta] + \frac{g_{\text{YM}}^2}{2} \sum_{i,j} [X^i, X^j]^2 \right\}, \quad (1.1) \end{aligned}$$

donde  $g_{\text{YM}}$  es la constante de acoplamiento de la teoría,  $\theta_I$  es el ángulo del instantón, y las constantes  $C_i^{\alpha\beta}$  y  $\tilde{C}_{i\alpha\beta}$  están relacionadas con las matrices de Clifford-Dirac del  $SU(4)_R$ . A su vez  $F_{\mu\nu} = \partial_{[\mu} A_{\nu]} + i[A_\mu, A_\nu]$ , mientras que  $*F_{\mu\nu}$  es el dual de Hodge, y  $D_\mu \lambda = \partial_\mu \lambda + i[A_\mu, \lambda]$ .

El lagrangiano (1.1) posee invarianza de escala a nivel clásico, simetría que junto al grupo de Poincaré forma el grupo conforme  $SO(2, 4)$ . Si además consideramos las transformaciones de supersimetría, el grupo que se obtiene es el superconforme  $SU(2, 2|4)$ . Este grupo resulta ser una simetría a nivel cuántico, ya que al estudiar las correcciones radiativas se encuentra que la función  $\beta$  es idénticamente nula. Este no es el caso para la simetría  $R$ , que se encuentra rota a dicho nivel, por lo que  $\mathcal{N} = 4$  SYM presenta una anomalía conocida como la *anomalía quiral* [31], que estudiaremos con más atención en la sección 2.5 del capítulo 2.

Al ser una teoría conforme la constante de acoplamiento no varía con la escala, lo que permite trabajar tanto en acoplamiento débil como en acoplamiento fuerte. En el primer caso la teoría puede ser estudiada

<sup>1</sup>En la sección 2.5 del capítulo 2 mostraremos cómo modificar  $\mathcal{N} = 4$  SYM para que la conexión con QCD sea aún mayor.



en forma perturbativa, mientras que en el segundo es necesario recurrir a otras técnicas. En las siguientes secciones mostraremos cómo la dualidad AdS/CFT permite estudiar el régimen fuertemente acoplado de las teorías de campos conformes.

### La variable de 't Hooft y la expansión planar

En las teorías de Yang-Mills resulta útil pensar al número de colores  $N$  como un parámetro más de la teoría, y definir la variable de 't Hooft  $\lambda \equiv g_{YM}^2 N$ . De esta forma se puede definir el límite planar

$$\lambda \text{ fijo}, \quad N \rightarrow \infty, \quad (1.2)$$

que corresponde a realizar una expansión topológica en los diagramas de Feynman de la teoría. Esto se debe a que todos los campos están en la representación adjunta del  $SU(N)$ , por lo que los propagadores vienen acompañados de términos  $\lambda/N$ , mientras que los términos de interacción son proporcionales a  $N/\lambda$ . Para ver esto alcanza con tomar la notación de doble línea en los campos, escribiendo  $A_j^i = A^B (T^B)_j^i$ , donde  $T^B$  son los generadores del  $SU(4)$ , con  $B = 1, \dots, 15$ . La forma que toma el propagador y los vértices de interacción se muestran en la figura 1.1. Si nos enfocamos por ejemplo en el primer término de los campos de *gauge* presente en el lagrangiano (1.1), vemos que el mismo toma efectivamente la forma

$$\mathcal{L}_F = -\frac{N}{\lambda} \text{Tr}[F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}]. \quad (1.3)$$

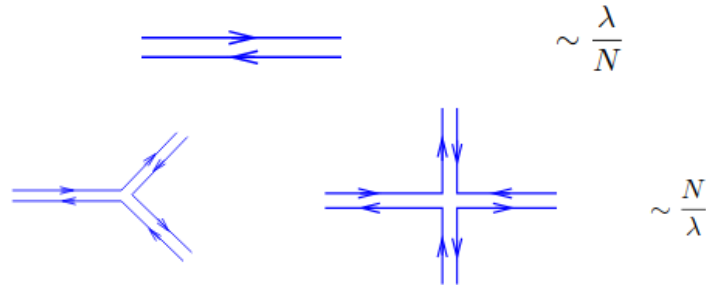


Figura 1.1: Representación del propagador y los vértices de interacción en la notación de doble línea. Los propagadores van con potencias  $\lambda/N$  mientras que los vértices tienen la potencia inversa. La figura está tomada de [32].

Se puede mostrar que el número de potencias de  $N$  y  $\lambda$  que aparecen en un diagrama  $D$  toma la forma [33, 4]

$$D \sim N^{F-E+V} \lambda^{E-V} = N^\chi \lambda^{E-V}, \quad (1.4)$$

donde  $E$  es el número de propagadores (o bordes),  $V$  de vértices y  $F$  la cantidad de *loops* (o caras). Aquí  $\chi = F - E + V$  es la característica de Euler. Vemos entonces que la expansión en  $1/N$  corresponde a

una expansión topológica en los diagramas de Feynman. Si el diagrama forma una superficie con  $h$  manijas (género de la superficie bidimensional), tenemos que  $\chi = 2 - 2h$ , por lo que el diagrama queda caracterizado por la cantidad de manijas presentes. Los diagramas planares corresponden a aquellos donde no hay cruces entre los distintos trazos, y por lo tanto tienen  $h = 0$ , lo que implica  $\chi = 2$ . Este tipo de diagramas son los que dominan en el límite planar (1.2) [34]. En la figura 1.2 se muestra un ejemplo de un diagrama planar y uno no planar.



Figura 1.2: Dos diagramas de Feynman que podrían ser relevantes en el cálculo perturbativo. Sin embargo el segundo tiene una manija y por lo tanto un factor de supresión  $1/N^2$  respecto al primero que se acentúa al tomar el límite  $N \rightarrow \infty$ .

En esta tesis trabajaremos siempre bajo el límite de Maldacena, donde

$$N \rightarrow \infty, \quad 1 \ll \lambda \ll N, \quad (1.5)$$

por lo que solo consideraremos los diagramas planares.

## 1.2. Teoría de supercuerdas y supergravedad IIB

La descripción geométrica de la teoría de supercuerdas en el formalismo de Ramond-Neveu-Schwarz parte de los campos bosónicos de la hoja de mundo  $x^M$  ( $M = 0, \dots, D$ ), agregando un conjunto de campos fermiónicos  $\psi_{\pm}^M$  que pueden ser entendidos como funciones de las coordenadas de la hoja de mundo  $\xi_1, \xi_2$ . Aquí  $\pm$  indica las dos posibles quiralidades en la hoja de mundo. La teoría tiene dos sectores: Neveu-Schwarz (NS) y Ramond (R). El estado fundamental del sector NS es bosónico en espacio-tiempo, mientras que el de R es fermiónico. La supersimetría se obtiene tras aplicar la proyección GSO [35, 36, 30].

Existen dos teorías de supercuerdas máximamente supersimétricas que pueden ser construidas de esta forma, ambas definidas en diez dimensiones ( $D = 10$ ), conocidas como la tipo IIA y la tipo IIB. El número de supersimetrías es  $\mathcal{N} = 2$ , es decir que posee 32 generadores de supercargas, mientras que la notación A/B refiere a no quiral/quiral, respectivamente. Las cuerdas en este caso son cerradas, y el contenido de los campos proviene de los cuatro sectores posibles: NS-NS, R-R, NS-R y R-NS.

A diferencia de las teorías de cuerdas bosónicas, las teorías supersimétricas no poseen un taquión en el nivel fundamental de la torre de estados. En el caso de IIB, el sector no masivo (o fundamental) se

corresponde con los campos de la teoría de supergravedad IIB, es decir que la supergravedad IIB surge como el límite de bajas energías de la teoría de supercuerdas IIB. Por límite de bajas energías nos referimos al límite  $\alpha' \rightarrow 0$ , donde  $\alpha' = l_s^2$  es la constante de la cuerda de longitud  $l_s$ .

El contenido de campos de la supergravedad IIB en el sector bosónico viene dado por un gravitón  $g_{MN}$ , un dilatón  $\Phi$ , un tensor antisimétrico de rango dos  $B_{MN}$ , y tres potenciales  $C_0, C_2, C_4$  de rango 0, 2, 4 respectivamente. La supersimetría impone una condición sobre la 5-forma asociada al tensor de fuerzas de  $C_4$ : la misma debe ser autodual respecto del operador de Hodge.

El valor de expectación del dilatón fija la constante de acoplamiento de la cuerda según  $e^{\langle\Phi\rangle} = g_s$ . Recordemos que en las amplitudes de dispersión de las cuerdas el orden de  $g_s$  indica el orden topológico de superficie que se está considerando: a nivel árbol es una esfera, mientras que a primer orden en  $g_s$  debemos considerar un toro, y así sucesivamente.

El sector fermiónico está compuesto por dos gravitinos  $\lambda_{M\alpha}^I$  de espín 3/2 y dos dilatinos  $\psi_\alpha^I$  de espín 1/2 ( $I = 1, 2$  corre sobre los generadores de las supercargas), ambos siendo fermiones quirales de Majorana-Weyl<sup>2</sup>.

Si bien la condición de autodualidad no permite escribir un lagrangiano para la supergravedad IIB, podemos expresar al mismo sin cumplir esta condición en forma explícita, pidiéndola como una condición extra sobre la 5-forma. De esta manera se obtiene la acción del sector bosónico

$$S_{\text{IIB}} = +\frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int d^{10}x \sqrt{g} e^{-2\Phi} (2R + 8(\partial\Phi)^2 - |H_3|^2) - \frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int d^{10}x \left[ \sqrt{g} \left( |F_1|^2 + |F_3|^2 + \frac{1}{2} |\mathcal{F}_5|^2 \right) + A_4^+ \wedge H_3 \wedge F_3 \right], \quad (1.6)$$

donde  $\kappa_{10}$  esta relacionado con la constante de Newton en diez dimensiones  $G_{10}$  según  $\kappa_{10} = \sqrt{8\pi G_{10}}$ , mientras que los campos de fuerza están definidos según  $F_i = dC_i$  con  $i = 0, 2, 4$ ,  $H = dB$ , y

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_3 &= F_3 - C_0 H_3 \\ \mathcal{F}_5 &= F_5 - \frac{1}{2} A_2 \wedge H_3 + \frac{1}{2} B_2 \wedge F_3. \end{aligned}$$

Como ya indicamos, a esta acción debemos sumarle la condición de autodualidad de la 5-forma:  $\mathcal{F}_5 = *\mathcal{F}_5$ . Con estos ingredientes tenemos la acción necesaria para describir el sector bosónico de la supergravedad IIB.

### Dp-branas y la solución $AdS_5 \times S^5$

Otros objetos relevante de la teoría de cuerdas son las Dp-branas, hipersuperficies  $(p+1)$ -dimensionales sobre las cuales se mueven los extremos de las cuerdas abiertas. Las mismas son masivas y por lo tanto fuente de curvatura del espacio-tiempo.

<sup>2</sup>Notar que hemos intercambiado la notación usual y tomamos  $\psi$  como el dilatino. Esto lo hacemos para mantener la notación de nuestros trabajos [23, 24].

Consideremos el caso particular donde se colocan  $N$  D3-branas paralelas y superpuestas, en un fondo plano Minkowski de 10 dimensiones. En este caso la solución es conocida [37], y está dada por

$$\begin{aligned} ds^2 &= H(r)^{-1/2} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + H(r)^{1/2} (dr^2 + r^2 d\Omega_5^2), \\ \mathcal{F}_5 &= (1 + *) dx^0 \wedge \dots \wedge dx^3 \wedge dH^{-1}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

donde  $\mu, \nu = 0, \dots, 3$  son las coordenadas paralelas a las D3-branas,  $\eta_{\mu\nu}$  es la métrica de Minkowski en cuatro dimensiones,  $r$  es la coordenada que indica la distancia a las  $N$  D3-branas y  $d\Omega_5$  es el elemento de volumen de una esfera-5. El factor de curvatura de la métrica es

$$H(r) = 1 + \frac{R^4}{r^4}, \quad (1.8)$$

con el radio de curvatura  $R$  definido en función del número de branas y de los parámetros de la teoría de cuerdas, según  $R^4 \equiv 4\pi g_s \alpha'^2 N$ . Además de la métrica y la 5-forma, la solución consta de un dilatón con valor constante  $e^{\langle\Phi_0\rangle} = g_s$ . El resto de los campos están apagados.

La solución de supergravedad se encuentra al considerar el límite  $\alpha' \rightarrow 0$ . Si a su vez consideramos la solución muy cerca de las  $N$  D3-branas, es decir con  $r \ll R$ , obtenemos  $H(r) = R^4/r^4$ . El llamado “límite de horizonte cercano” se obtiene al tomar ambos límites de manera tal que  $r/\alpha'$  se mantenga constante. En este caso la métrica de (1.7) toma la forma

$$ds^2 = \frac{r^2}{R^2} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \frac{R^2}{r^2} dr^2 + R^2 d\Omega_5^2, \quad (1.9)$$

que no es otra cosa que la métrica producto de dos espacios de cinco dimensiones:  $AdS_5$  y la esfera  $S^5$ , ambos con radio  $R = (4\pi g_s \alpha'^2 N)^{1/4}$ .

A lo largo de esta tesis trabajaremos con la coordenada radial inversa  $z = R^2/r$ , de forma que la métrica del  $AdS_5$  queda

$$ds_{AdS_5}^2 = \frac{R^2}{z^2} (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dz^2). \quad (1.10)$$

En estas coordenadas el  $AdS_5$  presenta un borde en el límite  $z \rightarrow 0$ , dado por un espacio Minkowski de cuatro dimensiones. Por otro lado, es importante remarcar que el grupo de isometría de  $AdS_5$  es el  $SO(2, 4)$ , mientras que el de la esfera-5 es simplemente el  $SO(6)$ .

### 1.3. La correspondencia AdS/CFT

Basado en la construcción de ingeniería de branas que comentamos en la sección anterior, Maldacena relacionó la teoría de cuerdas cerradas en el espacio  $AdS_5 \times S^5$  que resulta de tomar el límite de horizonte cercano de las  $N$  D3-branas descrito en la sección anterior, con la teoría de cuerdas abiertas asociadas a las mismas [2]. Esta dualidad entre teoría de cuerdas cerradas y abiertas, es más conocida como la dualidad teorías de *gauge* y gravedad o simplemente la dualidad AdS/CFT.

En su versión original, la dualidad relacionó las dos teorías hasta aquí desarrolladas: la teoría de campos  $\mathcal{N} = 4$  SYM con grupo de *gauge*  $SU(N)$  y la teoría de supergravedad IIB en un fondo  $AdS_5 \times S^5$ . En esta sección no reconstruiremos los pasos con los que Maldacena llegó a esta conjetura, sino que simplemente daremos un breve repaso de los indicios de esta relación y explicaremos cuáles son las características principales de la dualidad.

La identificación entre ambas teorías se da tanto en los parámetros como en las simetrías de las mismas. La constante de acoplamiento de Yang-Mills se asocia con el parámetro  $h$  del género (genus) de la cuerda según<sup>3</sup>  $g_{YM}^2 = 4\pi g_s$ , que a su vez está determinado por el valor de expectación del dilatón constante, por lo que tenemos

$$g_{YM}^2 = 4\pi g_s = 4\pi e^{\langle \Phi_0 \rangle}. \quad (1.11)$$

Esta identificación nos permite relacionar a la constante de 't Hooft con la constante de la cuerda a través del radio del  $AdS_5$ , según

$$\sqrt{\lambda} = \frac{R^2}{\alpha'}, \quad (1.12)$$

por lo que tenemos una relación clara entre las constantes de acoplamiento.

Otro parámetro importante en ambas teorías es el número  $N$ , que aparece tanto en el rango del grupo de *gauge*  $SU(N)$  como en el número de D3-branas, y se relaciona con el flujo (cuantizado) de la 5-forma sobre la esfera  $S^5$ , según

$$\int_{S^5} \mathcal{F}_5 = N. \quad (1.13)$$

En cuanto a las simetrías, podemos ver que existe una fuerte conexión entre el grupo de simetrías interno de cada teoría. Recordemos que  $\mathcal{N} = 4$  SYM contiene el subgrupo bosónico  $SO(2, 4) \times SO(6)_R$ , relacionado con las simetrías de Poincaré y la simetría  $R$  de las supercargas. En el lado gravitatorio, el grupo  $SO(2, 4)$  no es otra cosa que el grupo de simetrías del  $AdS_5$ , mientras que  $SO(6)$  corresponde a la simetría de rotación de la 5-esfera. Además, si consideramos las transformaciones superconformes obtenemos para la teoría de campos el grupo superconforme  $SU(2, 2|4)$ , con 32 generadores de supersimetría. Este grupo surge dualmente como el grupo  $SU(2, 2|4)$  debido a que 16 de las 32 supersimetrías de Poincaré son preservadas por la  $N$  D3-branas, y se agregan 16 supersimetrías conformes que surgen al considerar la región del límite de horizonte cercano del  $AdS_5 \times S^5$  (y no al considerar la geometría completa) [4].

### Regímenes de la dualidad

Hasta ahora hemos planteado el formato *fuerte* de la dualidad, en el cuál tenemos una equivalencia válida para todo régimen de ambas teorías (sea este perturbativo o no). En otras palabras, la dualidad conecta la teoría conforme para todo valor del rango del grupo de *gauge*  $N$  y para cualquier acoplamiento

<sup>3</sup>Este es un resultado ya conocido de la física de  $Dp$ -branas [36].

$g_{YM}$ , con la teoría de cuerdas IIB completa, incluyendo el régimen cuántico. Sin embargo, sólo sabemos tratar a las teorías de campos en su régimen perturbativo. Algo similar sucede del lado con gravedad, ya que no se sabe cómo cuantizar las cuerdas en un fondo curvo como  $AdS_5 \times S^5$ , debido a la presencia de los campos del sector R-R. Es natural entonces enfocarse en ciertos límites o regiones paramétricas donde sabemos tratar alguna de las teorías.

En la teoría de campos este caso corresponde al régimen perturbativo, el cual podemos estudiar cuando la constante de 't Hooft es chica:  $\lambda \ll 1$ . Por otro lado, en la teoría de cuerdas, la aproximación de gravedad clásica es factible cuando el radio de curvatura  $R$  del  $AdS_5$  y de la esfera 5 es mucho mayor que la escala de longitud de la cuerda:  $R^4/l_s^4 = R^4/\alpha'^2 = \lambda \gg 1$ .

Vemos que el régimen de gravedad clásica y el régimen perturbativo de la CFT son incompatibles. Lejos de ser un problema, esto nos indica que cuando un lado está débilmente acoplado, el otro está fuertemente acoplado, y *vice versa*. Ésta es una propiedad central de la dualidad, ya que permite resolver problemas de acoplamiento fuerte de la teoría de campos vía supergravedad clásica.

Procedamos entonces a analizar los regímenes de interés. El primero que surge en forma natural es el límite de 't Hooft, que consiste en tomar  $N \rightarrow \infty$ , dejando fija la constante de 't Hooft  $\lambda = N g_{YM}^2$ . Recordemos que en la teoría de campos, esto correspondía a realizar una expansión en  $1/N$ , donde sólo sobreviven los diagramas planares. Utilizando la identificación entre  $g_{YM}$  y  $g_s$  de (1.11) la constante de acoplamiento de la teoría de cuerdas nos queda:  $4\pi g_s = \lambda/N \ll 1$ . El límite de 't Hooft corresponde entonces a una teoría de cuerdas débilmente acoplada, donde podemos realizar una expansión en *loops* de orden  $g_s$ . De esta forma, tenemos una relación entre una teoría de cuerdas clásica y la expansión en  $1/N$  de la teoría de *gauge*.

Podemos simplificar más aún la situación si, además de mantener fija la constante de 't Hooft, tomamos el límite de  $\lambda$  grande, teniendo entonces:  $1 \ll \lambda \ll N$ . Dado que  $\lambda$  está fija y que  $N \rightarrow \infty$ , resulta que  $\alpha' \rightarrow 0$ . En este caso, la teoría de campos es no perturbativa, mientras que la teoría de cuerdas se reduce a la teoría de supergravedad, donde es natural una expansión en  $\alpha'$ .

Esquemáticamente pueden definirse tres regímenes principales de la conjetura, como se muestra en la tabla 1. Sin embargo, como veremos más adelante, la distinción entre estos no es tan rígida. En esta tesis trabajaremos siempre en el límite planar  $1 \ll \lambda \ll N$ , pero nos será de interés estudiar los modos de cuerdas en el fondo  $AdS_5$  y no simplemente estudiar la supergravedad, por lo que no estaremos parados estrictamente en uno de estos regímenes. Esto quedará mejor explicado en el capítulo 3.

## Ansatz de Witten

Como ya explicamos en la introducción del capítulo, la idea de holografía surge al pensar que la teoría de campos vive en el borde del espacio, ubicado en el origen de la coordenada radial  $z$  del  $AdS_5$ , mientras que en el *bulk* tenemos la teoría de gravedad. La realización de esta idea se puede llevar a cabo a través del *Ansatz* de Witten<sup>4</sup> que permite relacionar los operadores del de la CFT con los campos de la teoría en el *bulk*.

<sup>4</sup>A veces llamado también *Ansatz* WGKP, ya que Gubser, Klebanov y Polyakov plantearon de manera independiente la misma idea en [26].

Teoría de campos	Teoría de gravedad
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\mathcal{N} = 4</math> SYM conforme para todo <math>N</math> y <math>g_{YM}</math></li> <li>• <math>g_s = g_{YM}^2</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Teoría de cuerdas IIB cuántica en <math>AdS_5 \times S^5</math></li> <li>• <math>R^4 = 4\pi g_s N \alpha'^2</math></li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\mathcal{N} = 4</math> SYM en el límite de 't Hooft, con <math>\lambda</math> fijo</li> <li>• Expansión en <math>1/N</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Teoría de cuerdas IIB clásica en <math>AdS_5 \times S^5</math></li> <li>• Expansión en <math>g_s</math> de <i>loops</i></li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\mathcal{N} = 4</math> SYM en el límite <math>\lambda</math> grande (<math>N \rightarrow \infty</math>)</li> <li>• Expansión en <math>1/\sqrt{\lambda}</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Supergravedad IIB clásica en <math>AdS_5 \times S^5</math></li> <li>• Expansión en <math>\alpha'</math></li> </ul>

Tabla 1: Regímenes de la dualidad AdS/CFT.

Partiendo de las coordenadas (1.10), consideremos una fuente  $\phi_0 = \phi_0(x^\mu)$  definida en el espacio plano del borde.  $\phi_0$  actúa como fuente de algún operador  $\hat{\mathcal{O}}(x^\mu)$  de la CFT, por lo que tiene asociado la función generatriz

$$Z_{CFT}[\phi_0] = \left\langle \exp \left( \int_{\partial AdS} \phi_0(x^\mu) \hat{\mathcal{O}}(x^\mu) \right) \right\rangle. \quad (1.14)$$

La idea holográfica es pensar que esta fuente  $\phi_0(x^\mu)$  es el valor en el borde de un campo  $\phi(x^\mu, z)$  que se propaga en el interior del  $AdS_5$ . Dado que en este sistema de referencia el borde se encuentra en  $z \rightarrow 0$ , tenemos

$$\phi_0(x^\mu) = \phi(x^\mu, z)|_{\partial AdS} = \phi(x^\mu, 0), \quad (1.15)$$

El *Ansatz* consiste en proponer que la función generatriz de las funciones de Green conexas de la CFT está relacionada con la función de partición  $Z_{string}[\phi]$  de la teoría de cuerdas evaluada en todos los  $\phi(x^\mu, z)$  cuyo límite es  $\phi_0(x^\mu)$ :

$$Z_{CFT}[\phi_0] = Z_{string}[\phi \rightarrow \phi_0], \quad (1.16)$$

que para el régimen  $1 \ll \lambda \ll N$ , se reduce a:

$$\left\langle \exp \left( \int_{\partial AdS} \phi_0(x^\mu) \hat{\mathcal{O}}(x^\mu) \right) \right\rangle = \exp(-S_{sugra}[\phi \rightarrow \phi_0]), \quad (1.17)$$

donde  $S_{sugra}$  es la acción de supergravedad.

Con esta misma idea se puede plantear el *Ansatz* de Witten para diversos casos. En esta tesis en particular relacionaremos al tensor hadrónico de la teoría de campos con la acción *on-shell* de supergravedad, como mostraremos en el capítulo 3.





## Capítulo 2

# DIS en teorías cuánticas de campos

La dispersión inelástica profunda (DIS) es un proceso utilizado para estudiar la estructura interna de los hadrones. El mismo se basa en la dispersión de un leptón con un blanco hadrónico, en el régimen cinemático donde el hadrón se rompe en sus distintos constituyentes o partones, dando lugar a un conjunto de hadrones en el estado final del proceso. La interacción no se da directamente entre el leptón y el hadrón, sino que el primero emite un fotón virtual de alta energía que luego es absorbido por el segundo.

Este proceso se viene estudiando desde hace más de cincuenta años en distintos aceleradores, y permitió por ejemplo entender la composición partónica del protón [38, 39]. Para una revisión y referencias ver [40] y más recientemente [41]. Al día de hoy diferentes colaboraciones siguen estudiando en forma experimental la estructura de bariones a través del DIS tanto electromagnético, que corresponde al proceso donde la dispersión se da con un leptón, como al DIS de neutrinos [42]. Este tipo de experimentos son de carácter inclusivo, esto quiere decir que no se miden los estados finales de los hadrones, sino que se conocen los estados del hadrón y el leptón incidente, y se mide la energía y el momento del leptón saliente luego de la dispersión.

Pensando en el proceso total tenemos dos tipos de interacciones. Por un lado la interacción que media al leptón y el fotón virtual que está regida por QED, como sería de esperar. Ahora, cuando el fotón impacta sobre el hadrón, debido a la alta energía que posee llega a probar la estructura hadrónica, por lo que la física de esta interacción se describe en términos de QCD. Este último punto es fundamental, puesto que el carácter no perturbativo de la fuerza fuerte (en el régimen paramétrico relevante al DIS) hace que sea imposible estudiar la estructura hadrónica puramente desde la teoría cuántica de campos a nivel perturbativo. Sin embargo, como veremos en este capítulo, toda la información de la sección eficaz de la dispersión puede reducirse al producto de dos tensores, uno proveniente del sector de QED y por lo tanto totalmente conocido, y otro con la información del proceso fuertemente acoplado. Este último puede ser representado por un conjunto de *funciones de estructura*, que solo dependen de parámetros cinemáticos del proceso, y que pueden ser estudiados en distintos regímenes de energía. Existen diferentes técnicas que permiten estudiar desde distintos enfoques a las funciones de estructura, por ejemplo desde QCD perturbativa<sup>1</sup> o

---

<sup>1</sup>Algunos de los trabajos pioneros son [43, 44, 45, 46], así como los trabajos de BFKL [47, 48, 49, 50, 51, 52], entre otros.

desde métodos computacionales<sup>2</sup>. Como indicamos en la introducción, en esta tesis mostraremos el enfoque holográfico que permite obtener expresiones analíticas de las mismas, dentro del espacio paramétrico que se detallará en el capítulo 3. Sin embargo debemos primero entender bien el proceso desde la teoría de campos. Por eso en este capítulo estudiaremos distintos aspectos y observables del DIS de hadrones de espín 0 y 1/2, puramente desde la teoría cuántica de campos. Lo haremos primero en forma genérica, siguiendo principalmente el trabajo de Manohar [40], y luego indagaremos en el enfoque necesario para estudiar el DIS en la teoría de super Yang-Mills que resulta de interés en la descripción holográfica dual.

## 2.1. Cinemática del DIS

Comencemos por describir la situación cinemática del proceso. Por un lado tenemos un hadrón con cuadrimomento  $P^\mu$  como blanco, el cual es dispersado por un leptón con energía  $E$  y cuadrimomento  $k^\mu$ , generando un estado hadrónico final que denotaremos  $X$ . Como mencionamos, el leptón emite un fotón virtual de alta energía con cuadrimomento  $q^\mu$ , que impacta al hadrón. Si el hadrón no se rompe entonces el proceso es una dispersión elástica, mientras que si estamos en la régimen de energía y momento donde el hadrón se fragmenta, entonces el proceso es un DIS.

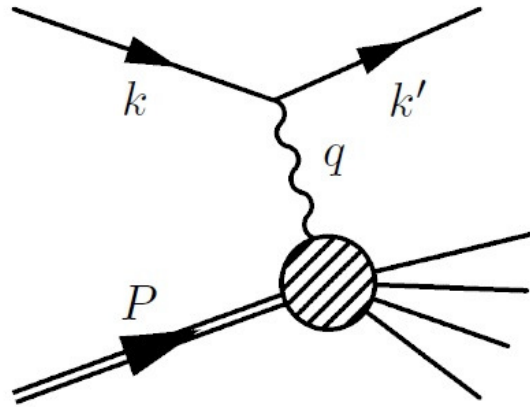


Figura 2.1: Diagrama de Feynman asociado al proceso de Dispersión Inelástica Profunda. El hadrón blanco está representado por la línea doble, mientras que los hadrones resultantes  $X$  se indican con las líneas simples.  $k$  y  $k'$  representan los cuadrimomentos del leptón incidente y del dispersado, respectivamente.

El diagrama de Feynman asociado se puede observar en la figura 2.1, donde varias variables cinemáti-

<sup>2</sup>Por ejemplo *lattice* [53, 54].

cas entran en juego. Tomando las coordenadas<sup>3</sup>  $y^\mu = (t, y_1, y_2, y_3)$  de forma tal que  $\hat{y}_3$  apunte en la dirección del leptón incidente, y considerando el sistema de referencia con el blanco en reposo, las variables cinemáticas vienen dadas por:

- $M$ : la masa del hadrón blanco, con la condición *on-shell* de  $M^2 = -P^2$ .
- $E$  y  $E'$ : la energía del leptón incidente y saliente respectivamente.
- $k$  y  $k'$ : el momento del leptón incidente y saliente respectivamente. Si suponemos que la masa del leptón es despreciable entonces  $k^\mu = (E, 0, 0, E)$ .  
Análogamente tenemos  $k'^\mu = (E', E' \sin \theta \cos \phi, E' \sin \theta \sin \phi, E' \cos \theta)$ .
- $P$ : el cuadrimomento del hadrón en reposo,  $P^\mu = (M, 0, 0, 0)$ .
- $q$ : el momento del fotón virtual intercambiado, que por conservación se expresa  $q^\mu = (k - k')^\mu$ . Dado que el fotón es virtual tenemos  $q^2 = 2EE'(1 - \cos \theta)$  distinto de cero.
- $v$ : la energía perdida del leptón,  $v = E - E'$ .
- $x$ : la llamada variable de Bjorken definida como  $x = -\frac{q^2}{2P \cdot q}$ .
- $y$ : la fracción de energía perdida por el leptón  $y = v/E = P \cdot q/P \cdot k$ .

La variable  $x$  fue introducida por Bjorken y tiene un rol fundamental en el DIS ya que como veremos luego QCD predice que las funciones de estructura dependen solamente de dos parámetros: la energía  $q^2$  y  $x$ . Más aún, a primer orden en  $q^2$  las funciones solo dependen de  $x$ , propiedad conocida como *escaleo* de Bjorken.

Con las variables ya descritas podemos definir el DIS como el proceso de dispersión de un leptón por un hadrón en el régimen de  $x$  fijo y  $q \equiv \sqrt{-q^2} \ll M, \Lambda$ , donde  $\Lambda$  es cualquier escala característica de la teoría cuántica de campos que se quiere estudiar, por ejemplo la escala de confinamiento  $\Lambda_{QCD}$ .

Luego de la dispersión la masa del estado final hadrónico  $M_X$  viene dada por

$$M_X^2 = -(P + q)^2 = M^2 - 2P \cdot q - q^2, \quad (2.1)$$

de donde se desprende que

$$x = -\frac{q^2}{2P \cdot q} = 1 + \frac{M_X^2 - M^2}{2P \cdot q}, \quad (2.2)$$

por lo que vemos que la variable de Bjorken está acotada entre  $0 \leq x \leq 1$ . El caso  $x = 1$  corresponde a  $M_X = M$ , es decir que la dispersión es elástica.

<sup>3</sup>En esta sección llamaremos  $\vec{y}$  a las coordenadas espaciales para no confundirlas con la variable de Bjorken.

## 2.2. Sección eficaz y funciones de estructura

Siguiendo el diagrama de Feynman de la figura 2.1 podemos construir la amplitud de dispersión  $\mathcal{M}$  del proceso. La misma resulta

$$i\mathcal{M} = (-ie)^2 \left( \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{q^2} \right) \langle k' | J_\ell^\mu(0) | k, s_\ell \rangle \langle X | J_h^\nu(0) | P, \zeta \rangle , \quad (2.3)$$

donde  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-, +, +, +)$  es la métrica del espacio plano de cuatro dimensiones y  $s_\ell$  es la polarización del leptón incidente,  $\zeta$  la polarización del hadrón, mientras que  $J_\ell$  y  $J_h$  representan las corrientes electro-magnéticas leptónica y hadrónica respectivamente. Notar que hemos dejado la constante de acoplamiento  $e$  afuera de  $J_\ell$ . Para un blanco de espín 1/2 tenemos  $s_\ell = \pm 1/2$ .

Experimentalmente lo que se suele medir es la sección eficaz en función de la energía del leptón saliente y del ángulo de dispersión:  $d^2\sigma/dE'd\Omega$ . La sección eficaz diferencial puede construirse a partir de la amplitud  $\mathcal{M}$ , elevándola al cuadrado y agregando los factores del espacio de fase. Dado que la polarización final del leptón y del hadrón no son medidas es necesario sumar sobre todos los estados salientes. Con esto obtenemos la sección eficaz diferencial

$$\begin{aligned} d\sigma &= \sum_X \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2E'} (2\pi)^4 \delta^4(k + P - k' - P_X) \frac{|\mathcal{M}|^2}{(2E)(2M)} \\ &= \sum_X \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2E'} \frac{(2\pi)^4 \delta^4(k + P - k' - P_X) e^4}{(2E)(2M) q^4} \\ &\quad \times \langle P, \zeta | J_h^\mu(0) | X \rangle \langle X | J_h^\nu(0) | P, \zeta \rangle \langle k, s_\ell | J_{\ell\mu}(0) | k' \rangle \langle k' | J_{\ell\nu}(0) | k, s_\ell \rangle , \end{aligned} \quad (2.4)$$

donde hemos usado que  $\langle \alpha | J^\mu | \beta \rangle^* = \langle \beta | J^\mu | \alpha \rangle$ , dado que la corriente es un operador hermítico.

La sección eficaz puede ser reescrita en términos de dos tensores. El tensor leptónico definido como

$$\ell^{\mu\nu} = \sum_{\text{espín final}} \langle k' | J_{\ell\mu}(0) | k, s_\ell \rangle \langle k, s_\ell | J_{\ell\nu}(0) | k' \rangle , \quad (2.5)$$

contiene toda la información de la interacción entre el leptón entrante y saliente con el fotón virtual. Por otro lado, el tensor hadrónico se define como

$$W^{\mu\nu}(P, q) = \frac{1}{4\pi} \int d^4y e^{iq \cdot y} \langle P, \zeta' | [J_h^\mu(0), J_h^\nu(0)] | P, \zeta \rangle , \quad (2.6)$$

donde  $\zeta$  y  $\zeta'$  indican la polarizaciones del hadrón entrante y saliente. Insertando la suma sobre estados intermedios  $X$  y utilizando la invariancia de traslación  $\langle P, \zeta | J(y) | X \rangle = \langle P, \zeta | J(0) | X \rangle \exp[i(P - P_X) \cdot y]$  se obtiene

$$\begin{aligned} W^{\mu\nu}(P, q) &= \frac{1}{4\pi} \sum_X [(2\pi)^4 \delta^4(q + P - P_X) \langle P, \zeta' | J_h^\mu(0) | X \rangle \langle X | J_h^\nu(0) | P, \zeta \rangle \\ &\quad - (2\pi)^4 \delta^4(q + P - P_X) \langle P, \zeta' | J_h^\nu(0) | X \rangle \langle X | J_h^\mu(0) | P, \zeta \rangle] . \end{aligned} \quad (2.7)$$

Reemplazando las expresiones de  $\ell^{\mu\nu}$  y  $W^{\mu\nu}$  en (2.4) obtenemos

$$d\sigma = \frac{e^4}{q^4} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2E'} \frac{4\pi \ell_{\mu\nu} W^{\mu\nu}(p, k - k')}{(2E)(2M)}, \quad (2.8)$$

de donde se deduce finalmente

$$\frac{d^2\sigma}{dE'd\Omega} = \frac{e^4}{16\pi^2 q^4} \left( \frac{E'}{ME} \right) \ell_{\mu\nu} W^{\mu\nu}(p, q). \quad (2.9)$$

Tenemos entonces una expresión para la sección eficaz donde toda la información del DIS está contenida en el tensor leptónico y en el hadrónico, por lo que es necesario estudiar estos tensores con mayor atención.

### 2.2.1. Tensor leptónico

Como se mencionó anteriormente el tensor leptónico se puede calcular puramente desde QED, obteniendo una expresión completa y analítica. Dado que los estados entrantes y salientes son en este caso fermiones podemos escribir el tensor como

$$\ell^{\mu\nu} = \sum_{\text{espín final}} \bar{u}(k') \gamma^\nu u(k, s) \bar{u}(k, s) \gamma^\mu u(k'), \quad (2.10)$$

donde  $u(k)$  son espinores de Dirac normalizados en  $2E$ , mientras que  $\gamma^\mu$  son las matrices de Dirac en cuatro dimensiones. De esta forma, la suma sobre los espines finales se puede resolver utilizando la identidad

$$\sum_{\text{espín final}} u(k') \bar{u}(k') = \not{k}' + m. \quad (2.11)$$

Por otro resulta útil definir el cuadvivector de polarización  $s^\mu$  de una partícula de espín 1/2 según

$$s^\mu = \frac{1}{2} \bar{u}(k, s) \gamma^\mu \gamma_5 u(k, s), \quad (2.12)$$

donde hemos omitido el factor  $1/m$  que suele incluirse en la definición usual, pero esta forma resulta más conveniente al momento de escribir la sección eficaz dependiente del espín [40]. La matriz  $\gamma_5$  está definida de forma usual:  $\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ .

Reemplazando (2.12) y usando la propiedad

$$u(k, s) \bar{u}(k, s) = (\not{k} + m) \frac{1 + \gamma_5 \not{s}/m}{2}, \quad (2.13)$$

en (2.10), el tensor leptónico toma la forma

$$\begin{aligned} \ell^{\mu\nu} &= \text{Tr} \left[ (\not{k}' + m) \gamma^\nu (\not{k} + m) \frac{1 + \gamma_5 \not{s}/m}{2} \gamma^\mu \right] \\ &\approx 2(k^\mu k'^\nu + k^\nu k'^\mu - g^{\mu\nu} k \cdot k' - i\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} q_\alpha s_\beta), \end{aligned} \quad (2.14)$$

donde hemos despreciado los términos que acompañaban a la masa del fermión  $m$ . Conseguimos de esta forma la expresión completa para  $\ell^{\mu\nu}$ , que resulta bastante sencilla y compacta. Se puede notar que los términos no dependientes de la polarización del espín son simétricos en los índices de Lorentz  $\mu\nu$ , mientras que el término que acompaña a la polarización es antisimétrico. De aquí se desprende que un leptón no polarizado solo interactúa con la parte simétrica de  $W_{\mu\nu}$ .

### 2.2.2. Tensor hadrónico

La estructura del hadrón puede ser totalmente investigada desde el tensor  $W^{\mu\nu}$ , pues toda la información del blanco está en dicho tensor. Como mencionamos, a diferencia del caso del tensor leptónico, el tensor hadrónico no puede ser totalmente estudiado con técnicas perturbativas de teorías cuánticas de campos, ya que involucra procesos fuertemente acoplados. A pesar de que la interacción *a priori* es electromagnética, y que QED puede ser estudiada perturbativamente, la alta energía del fotón virtual logra probar la estructura fuertemente acoplada de la interacción entre los partones, por lo que surgen efectos no perturbativos asociados. Gracias a un número de simetrías que posee el tensor hadrónico, veremos que la estructura puede ser escrita en términos de un conjunto de (pseudo)vectores y (pseudo)tensores característicos del sistema, multiplicados por funciones escalares que solo dependen de  $x$  y  $q^2$ : las funciones de estructura. La cantidad de funciones dependerá del espín del blanco.

La descomposición más general del  $W^{\mu\nu}$  se da en términos de tensores de rango 2 invariantes ante transformaciones del grupo de Lorentz  $SO(1, 3)$ . Para ello debemos entender primero cuáles son los vectores y tensores disponibles en dicha expansión. Sin caer en redundancias tenemos definidos dos vectores dados por los momentos  $P_\mu$  y  $q_\mu$ , un único tensor simétrico dado por la métrica  $g_{\mu\nu}$ , y siempre podemos incluir el tensor totalmente antisimétrico de Levi-Civita<sup>4</sup>  $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ . Si consideramos además la posibilidad de que el blanco hadrónico tenga espín distinto de cero entonces tenemos también un pseudovector dado por la polarización del mismo<sup>5</sup>  $S_\mu$ .

Por otro lado tenemos un conjunto de simetrías físicas que el tensor hadrónico debe respetar. En un principio el  $W^{\mu\nu}$  debe ser invariante ante el grupo de Lorentz  $SO(1, 3)$ , pero además debemos exigir las condiciones físicas:

- invarianza ante inversión temporal,
- invarianza ante traslaciones,
- hermiticidad de las corrientes,
- *crossing symmetry*,
- conservación de la corriente,

---

<sup>4</sup>En general se suele distinguir el símbolo totalmente antisimétrico de Levi-Civita con el tensor, sin embargo en espacio plano ambos coinciden.

<sup>5</sup>No debe confundirse con la polarización del leptón  $s^\mu$ , que solo aparece en el tensor leptónico.

- invarianza ante paridad.

La última simetría puede ser omitida en casos donde la paridad no se conserve, por ejemplo si se considera la dispersión de neutrinos contra blancos de QCD (mediada por los bosones  $Z_0$  y  $W_{\pm}$ ), o si se consideran teorías quirales como  $\mathcal{N} = 4$  SYM. En estos casos se suele separar el tensor hadrónico en su parte simétrica ( $S$ ) y su antisimétrica ( $A$ ):

$$W^{\mu\nu} = W_{(S)}^{\mu\nu}(x, q^2) + i W_{(A)}^{\mu\nu}(x, q^2, S), \quad (2.15)$$

donde estamos haciendo énfasis en que, como notamos antes, la parte simétrica de  $W^{\mu\nu}$  es independiente del espín, y donde hemos sacado un factor  $i$  de la definición, ya que resulta útil al momento de hacer los cálculos.

Considerando entonces las simetrías y propiedades físicas antes mencionadas, puede hacerse una expansión totalmente genérica del tensor hadrónico, considerando el espín del blanco. Para mayor detalle de cómo son estos pasos puede verse [40, 55, 56].

### Descomposición para blancos de espín 0:

Para el caso de blancos escalares no tenemos vector de polarización alguno, por lo que la dependencia tensorial del  $W^{\mu\nu}$  se puede escribir en función de  $P$  y  $q$ . Obtenemos entonces la siguiente expresión

$$\begin{aligned} W^{\mu\nu}(x, q^2) = & \left( \eta^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) F_1(x, q^2) - \left( P^\mu - \frac{P \cdot q}{q^2} q^\mu \right) \left( P^\nu - \frac{P \cdot q}{q^2} q^\nu \right) \frac{F_2(x, q^2)}{P \cdot q} \\ & - i \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} q_\rho P_\sigma \frac{F_3(x, q^2)}{2P \cdot q}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

descripta totalmente por dos funciones asociadas al sector simétrico,  $F_1(x, q^2)$  y  $F_2(x, q^2)$ , y una función del sector antisimétrico,  $F_3(x, q^2)$ . haciendo abuso de nomenclatura diremos a veces que estas son las funciones simétricas y antisimétricas, sin embargo vale la pena remarcar que son funciones escalares sin dependencia alguna en los índices de Lorentz. Estas tres funciones describen por completo la estructura hadrónica de cualquier blanco escalar, aunque la forma particular que tenga cada una dependerá del mismo.

Utilizando la conservación de la corriente puede mostrarse que el tensor leptónico cumple  $q_\mu \ell^{\mu\nu} = 0$ , por lo que los factores con  $q^\mu$  en (2.16) pueden descartarse sin perder generalidad al momento de calcular la sección eficaz proporcional a  $W_{\mu\nu} \ell^{\mu\nu}$ . De esta forma el tensor hadrónico del blanco escalar se puede reescribir en forma más resumida como

$$W^{\mu\nu}(x, q^2) = \eta^{\mu\nu} F_1(x, q^2) + P^\mu P^\nu \frac{2x}{q^2} F_2(x, q^2) + i \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} q_\rho P_\sigma \frac{x}{q^2} F_3(x, q^2). \quad (2.17)$$

### Descomposición para blancos de espín 1/2:

Para el caso de un blanco fermiónico de espín 1/2 tenemos ahora un pseudotensor más con el que armar la dependencia tensorial debido a la presencia del vector de espín. Teniendo en cuenta nuevamente

el conjunto de simetrías y de condiciones físicas sobre el tensor hadrónico, encontramos que podemos escribir al mismo según [55, 56]

$$\begin{aligned}
W_{(S)}^{\mu\nu} &= \left( \eta^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) \left[ F_1(x, q^2) + \frac{M}{2} \frac{S \cdot q}{P \cdot q} g_5(x, q^2) \right] \\
&\quad - \frac{1}{P \cdot q} \left( P^\mu - \frac{P \cdot q}{q^2} q^\mu \right) \left( P^\nu - \frac{P \cdot q}{q^2} q^\nu \right) \left[ F_2(x, q^2) + \frac{M}{P \cdot q} \frac{S \cdot q}{q^2} g_4(x, q^2) \right] \\
&\quad - \frac{M}{2P \cdot q} \left[ \left( P^\mu - \frac{P \cdot q}{q^2} q^\mu \right) \left( S^\nu - \frac{S \cdot q}{P \cdot q} P^\nu \right) + \left( P^\nu - \frac{P \cdot q}{q^2} q^\nu \right) \left( S^\mu - \frac{S \cdot q}{P \cdot q} P^\mu \right) \right] \\
&\quad g_3(x, q^2) \\
&= \eta^{\mu\nu} \left( F_1(x, q^2) + \frac{M}{2} \frac{S \cdot q}{P \cdot q} g_5(x, q^2) \right) - \frac{q}{P \cdot q} P^\mu P^\nu \left( F_2(x, q^2) + \frac{M}{P \cdot q} \frac{S \cdot q}{q^2} g_4(x, q^2) \right) \\
&\quad - \frac{M}{2P \cdot q} \left[ (P^\mu S^\nu + P^\nu S^\mu) + 2 \frac{S \cdot q}{P \cdot q} P^\mu P^\nu \right] g_3(x, q^2), \tag{2.18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{(A)}^{\mu\nu} &= -\frac{M}{P \cdot q} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} q_\rho \left[ S_\sigma g_1(x, q^2) + \left( S_\sigma - \frac{S \cdot q}{P \cdot q} P_\sigma \right) g_2(x, q^2) \right] - \frac{\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} q_\rho P_\sigma}{2P \cdot q} F_3(x, q^2), \tag{2.19}
\end{aligned}$$

donde en el caso simétrico hemos descartado los términos proporcionales a  $q^\mu$ . Nuevamente aparecen las funciones simétricas  $F_1$  y  $F_2$ , y la antisimétrica  $F_3$ , pero ahora acompañadas de cinco funciones  $g_i$  asociadas a la polarización: las funciones simétricas  $g_{3,4,5}$  y las antisimétricas  $g_{1,2}$ .

Dado que tanto el tensor leptónico como el hadrónico dependen de la polarización de espín solo en su parte antisimétrica, la contracción  $W^{\mu\nu} \ell_{\mu\nu}$  tiene solo términos con ambas polarizaciones o con ninguna presente. Entonces se pueden estudiar las funciones de estructura simétricas si se hace colisionar un leptón no polarizado contra un hadrón no polarizado. Si en cambio se desea estudiar la totalidad de las funciones de estructura, es necesario que tanto el proyectil como el blanco estén polarizados, que será nuestro caso de interés.

### 2.3. Amplitud de Compton y el teorema óptico

Para comprender mejor el significado físico de las funciones de estructura resulta conveniente estudiar la amplitud de dispersión del *forward Compton scattering* (FCS) asociada al proceso de dispersión del fotón virtual con el hadrón en el DIS. Esto quiere decir que tomaremos como estados entrantes y salientes al fotón virtual y el hadrón blanco del DIS, como se muestra en la figura 2.2.

La amplitud de este proceso está dada por el tensor hadrónico  $T_{\mu\nu}$  que incluye el producto temporal



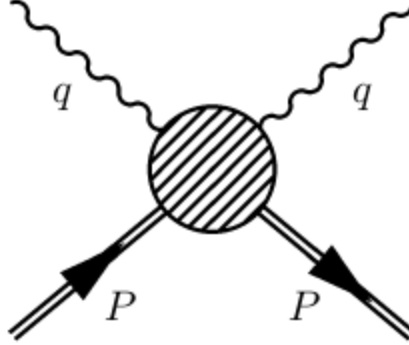


Figura 2.2: Dispersión de Compton (FCS) asociada al proceso de DIS, donde tanto el hadrón como el fotón que colisionan tienen el mismo momento y polarización que en el caso del DIS.

ordenado de las corrientes hadrónicas<sup>6</sup>

$$T_{\mu\nu} = i \int d^4y e^{iqy} \langle P, \zeta' | \hat{T} \{ J_\mu(y) J_\nu(0) \} | P, \zeta \rangle, \quad (2.20)$$

y que posee las mismas simetrías que el  $W_{\mu\nu}$  explicadas al principio de la sección 2.2.2. Debido a esto,  $T_{\mu\nu}$  puede ser expandido de la misma forma que el tensor hadrónico, con funciones de estructura que denotaremos  $\bar{F}_i$  y  $\bar{g}_i$ . Estas funciones pueden relacionarse con las del  $W^{\mu\nu}$  mediante el teorema óptico, que indica para este caso que la suma de todos los estados finales posibles de la amplitud de DIS equivale a  $2\pi$  veces la parte imaginaria de la amplitud del FCS, como se muestra esquemáticamente en la figura 2.3. Formalmente el teorema óptico surge al considerar la identidad para las amplitudes de dispersión dada por

$$2\text{Im } \mathcal{M}_{i \rightarrow f} = \sum_k \mathcal{M}_{i \rightarrow k} \mathcal{M}_{f \rightarrow k}^* (2\pi)^4 \delta(i - k) = \sum_k |\mathcal{M}_{i \rightarrow k}|^2 (2\pi)^4 \delta(i - k), \quad (2.21)$$

donde la última igualdad vale solamente si el estado inicial y el final coinciden, como es en nuestro caso. Del teorema óptico se desprende a la siguiente relación para los tensores hadrónicos del FCS y el DIS

$$W_{(S)}^{\mu\nu} = 2\pi \text{Im} \left[ T_{(S)}^{\mu\nu} \right], \quad W_{(A)}^{\mu\nu} = 2\pi \text{Im} \left[ T_{(A)}^{\mu\nu} \right], \quad (2.22)$$

por lo que a su vez se cumple la relación para las funciones de estructura

$$F_i(x, q^2) = 2\pi \text{Im} \left[ \bar{F}_i(x, q^2) \right], \quad (2.23)$$

y lo mismo para las funciones  $g_i$ .

<sup>6</sup>A partir de esta sección omitiremos el subíndice  $h$  en la notación de la corriente hadrónica, ya que la corriente leptónica no volverá a aparecer.

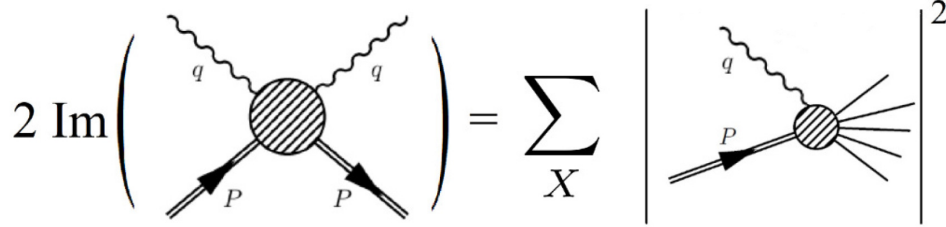


Figura 2.3: Visualización del teorema óptico que relaciona la amplitud del FCS con la amplitud del sector hadrónico del DIS. Aquí  $X$  son los estados finales luego de que el fotón impacte sobre el hadrón, por lo que son estados *on-shell*.

Resultará útil más adelante escribir la parte imaginaria del tensor  $T^{\mu\nu}$  siguiendo el teorema óptico. Aplicando la identidad como la suma de estados intermedios  $X$  y utilizando la identidad (2.21) se obtiene

$$\begin{aligned} \text{Im}(T^{\mu\nu}) &= \pi \sum_{X, P_X} \langle P, \zeta | J^\nu(0) | X, P_X \rangle \langle X, P_X | \tilde{J}^\mu(q) | P, \zeta \rangle \\ &= 2\pi^2 \sum_X \delta(M_X^2 + (P+q)^2) \langle P, \zeta | J^\nu(0) | X, P+q \rangle \langle X, P+q | J^\mu(0) | P, \zeta \rangle, \end{aligned} \quad (2.24)$$

donde la suma se aplica sobre todos los posibles estados  $X$  *on-shell* con masa asociada  $M_X$ . Además hemos expresado el tensor hadrónico en función de la transformada de Fourier de la corriente  $\tilde{J}^\mu(q) = \int d^4y e^{iq \cdot y} J^\mu(y)$ .

Escribiendo la amplitud de Compton en función de las llamadas amplitudes de helicidad podemos darle significado físico a las funciones de estructura. Por ejemplo, considerando un hadrón con helicidad  $H$  y un fotón de helicidad  $h$ , podemos estudiar el proceso hadrón-fotón a hadrón-fotón a través de la amplitud  $\mathcal{A}(h, H, h', H')$ , que posee toda la información de la helicidad de los estados entrantes ( $h, H$ ) y salientes ( $h', H'$ ). El estudio de este proceso debe satisfacer ciertas condiciones. Una de ellas es la conservación del momento angular, de donde surge la restricción  $h + H = h' + H'$ . Debido a esto las posibles amplitudes de helicidad están relacionadas entre sí.

Por ejemplo, para el caso de un blanco de espín 1/2 en un proceso donde se conserva paridad se obtienen solamente cuatro amplitudes de helicidad independientes, que a su vez resultan estar directamente relacionadas con las funciones de estructura del FCS. Utilizando la notación de  $H = 1/2$  como  $\uparrow$  y  $H = -1/2$  como  $\downarrow$ , y considerando las tres posibles helicidades del fotón virtual  $h = \pm 1$  y  $h = 0$ , se obtienen las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(+, \uparrow, +, \uparrow) &= \bar{F}_1 - \bar{g}_1, & \mathcal{A}(+, \downarrow, +, \downarrow) &= \bar{F}_1 + \bar{g}_1, \\ \mathcal{A}(0, \uparrow, 0, \uparrow) &= \frac{\bar{F}_2}{2x\bar{F}_1}, & \mathcal{A}(+, \downarrow, 0, \uparrow) &= 2\sqrt{2} \frac{MP}{q} (\bar{g}_1 + \bar{g}_2). \end{aligned} \quad (2.25)$$

De esta forma podemos obtener las funciones de estructura del proceso de DIS en función de la parte imaginaria de distintas combinaciones de amplitudes de helicidad del FCS. Por ejemplo para las funciones  $F_1$  y  $g_1$  tenemos

$$F_1 = \frac{1}{4\pi} \text{Im}[\mathcal{A}(+, \uparrow, +, \uparrow) + \mathcal{A}(+, \downarrow, +, \downarrow)], \quad (2.26)$$

$$g_1 = -\frac{1}{4\pi} \text{Im}[\mathcal{A}(+, \uparrow, +, \uparrow) - \mathcal{A}(+, \downarrow, +, \downarrow)]. \quad (2.27)$$

Vemos entonces que  $F_1$  es igual a la sección eficaz de la dispersión de un fotón con polarización transversal contra un blanco no polarizado, mientras que  $g_1$  está asociado a lo que se conoce como asimetría de espín, dada por la resta en la ecuación (2.27) en la dispersión contra un fotón con polarización transversal. Con este enfoque puede analizarse cada una de las funciones de estructura, aunque para el interés de esta tesis es suficiente con entender las dos mencionadas.

## 2.4. Modelo de partones en QCD

El modelo de partones permite tener una visión simple de la física de los hadrones, que sirve para interpretar las funciones de estructura del DIS. El mismo fue propuesto por Fenyman en [57]. La idea es considerar que el hadrón está constituido por un número de partones *on-shell*, formados por quarks y gluones, en el límite de la dispersión inelástica profunda. De esta forma la sección eficaz se puede calcular en función de la dispersión de gluones y quarks. En particular, al trabajar en el marco de altas energías podemos tratar a los partones como no masivos y (debido a la libertad asintótica de QCD) como libres, pudiendo además realizar los cálculos en forma perturbativa.

En este marco podemos estudiar la interacción del fotón con los constituyentes del hadrón blanco. Al orden más bajo en la expansión de la interacción fuerte, solo los quarks interactúan con el fotón, debido a que los gluones no tienen carga. Supondremos que los partones llevan una fracción  $\xi$  del momento total del hadrón  $P$ . Así la contribución al  $W^{\mu\nu}$  de la dispersión sobre un quark viene dada por el diagrama de Feynman de la figura 2.4. El cálculo es totalmente análogo al de  $\ell^{\mu\nu}$  reemplazando  $k \rightarrow \xi P, k' \rightarrow P'$  y  $q \rightarrow -q$ , multiplicando por la carga  $Q$  al cuadrado, y agregando la integral sobre el espacio de fases del estado final que tiene el  $W^{\mu\nu}$ . Tomando el vector de espín de los partones con helicidad  $H_p$  como  $s_\mu = H_p \xi P_\mu$ , se obtiene la siguiente expresión para el tensor hadrónico asociado a este proceso

$$W_{\mu\nu} = \frac{Q^2}{2\xi P \cdot q} [2\xi^2 P^\mu P^\nu - g^{\mu\nu} \xi P \cdot P' + i H_p \xi \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} q_\rho q_\sigma] \delta(\xi - x), \quad (2.28)$$

que podemos comparar con (2.18) y (2.19) para obtener las funciones de estructura. Dado que estamos considerando partones no masivos, podemos tomar la sustitución  $S_\mu \rightarrow H P_\mu / M$  donde recordemos que  $H$  es la helicidad del hadrón entero. De esta forma obtenemos las funciones de estructura para el partón

$$\begin{aligned} F_1(x, q^2) &= \frac{Q^2}{2} \delta(\xi - x), & F_2(x, q^2) &= Q^2 \xi \delta(\xi - x), \\ g_1(x, q^2) &= \frac{Q^2}{2} H_p H \delta(\xi - x), & g_2(x, q^2) &= 0. \end{aligned} \quad (2.29)$$

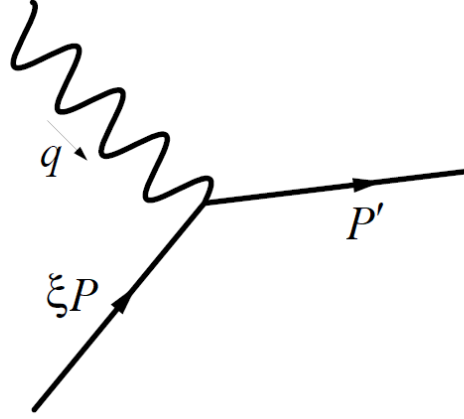


Figura 2.4: Dispersión del fotón sobre un quark del hadrón blanco con momento incidente  $\xi P$  y momento saliente  $P'$ .

De la misma forma se puede calcular la contribución de los anti-quarks. Luego la función de estructura total se obtiene integrando sobre la distribución de quarks  $q_+(\xi)$ , que representa la probabilidad de encontrar un quark en el nucleón con fracción de momento  $\xi$  y con helicidad igual a la del nucleón ( $HH_p = +$ ),  $q_-(\xi)$  el análogo con helicidad opuesta ( $HH_p = -$ ), y la distribución de antiquarks  $\bar{q}_\pm(\xi)$ . El resultado es

$$\begin{aligned}
 F_1(x, q^2) &= \sum_i \frac{Q_i^2}{2} (q_+(x) + q_-(x) + \bar{q}_+(x) + \bar{q}_-(x)), \\
 F_2(x, q^2) &= \sum_i Q_i^2 x (q_+(x) + q_-(x) + \bar{q}_+(x) + \bar{q}_-(x)), \\
 g_1(x, q^2) &= \sum_i \frac{Q_i^2}{2} (q_+(x) - q_-(x) + \bar{q}_+(x) - \bar{q}_-(x)), \\
 g_2(x, q^2) &= 0,
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

donde la suma se hace sobre los distintos tipo de sabor de los quarks. Lo más importante de este resultado es la dependencia únicamente en  $x$  de las funciones de estructura, siendo independientes de  $q^2$ , esto es lo que se conoce como *escaleo* [58]. Dado que estamos estudiando el DIS electromagnético en QCD, es natural que no surjan funciones de estructura que violan paridad. Otro resultado interesante es que las funciones de estructura cumplen ciertas relaciones entre sí, conocidas como las relaciones de Callan-Gross [59]:

$$F_2(x, q^2) = 2x F_1(x, q^2). \tag{2.31}$$

Nuevamente podemos interpretar las funciones de estructura  $F_1$  y  $g_1$ , ahora de forma un poco más completa.  $F_1$  es la probabilidad de encontrar un quark en el hadrón con fracción de momento  $x$ ,  $g_1$  da la diferencia

de probabilidades de encontrar un quark con fracción de momento  $x$  con el espín paralelo y antiparalelo al hadrón. Por último vale la pena remarcar que  $g_2$  no tiene una interpretación física del todo clara, pero es exactamente nula en el modelo de partones [40].

## 2.5. DIS en teorías de super Yang-Mills

Dado que en esta tesis calcularemos las funciones de estructura en forma holográfica, es necesario remarcar una vez más que que no lo haremos para el caso de QCD, puesto que dicha teoría no tiene al día de hoy un dual holográfico conocido. Sin embargo es posible que ciertas propiedades de las funciones de estructura resulten ser universales. Esto quiere decir que sean independientes del modelo holográfico dual. Un ejemplo de esto es la relación proporcional que muestran las funciones de estructura de distintos modelos holográficos de mesones [7, 8, 9, 18, 19, 20]. Se vuelve entonces muy interesante y hasta cierto punto imperativo investigar la teoría  $\mathcal{N} = 4$  SYM dentro del límite en que lo haremos en esta tesis. La idea será estudiar el proceso de DIS de la teoría  $\mathcal{N} = 4$  super Yang-Mills en el límite planar (es decir  $N$  grande), descrita en la sección 1.1 del capítulo 1. Dado que el dual holográfico de  $\mathcal{N} = 4$  SYM sí es conocido, podremos hacer los cálculos que involucran los procesos *soft* en el régimen de acoplamiento fuerte en forma holográfica bajo la descripción de la teoría de cuerdas dual en acoplamiento débil, como mostraremos en el capítulo 3 y los que le siguen.

Resulta fundamental en este contexto entender las diferencias y similitudes que presenta  $\mathcal{N} = 4$  SYM con QCD, y en particular ver qué modificaciones podemos imponer sobre  $\mathcal{N} = 4$  SYM para lograr que dichas teorías sean lo más parecidas posible. La situación ideal sería poder trabajar en sectores donde ambas sean similares como lo es por ejemplo el sector gluónico, que en ambos casos es una teoría de *gauge*  $SU(N)$  con campos de *gauge* no abelianos. Sin embargo el proceso de DIS dista bastante de este caso, pues involucra un sector  $U(1)$  electromagnético que interactúa con estados hadrónicos confinados. Esto requiere al menos dos aspectos que  $\mathcal{N} = 4$  SYM pura no contiene, por un lado un grupo de *gauge*  $U(1)$  independiente del  $SU(N)$ , y por otro una escala de confinamiento.

Estudiaremos entonces en esta sección cómo modificar  $\mathcal{N} = 4$  SYM para obtener estas dos propiedades, de forma tal de poder emular lo mejor posible el proceso de DIS en teorías tipo QCD.

### Acoplamiento electromagnético

La idea es tomar la teoría  $\mathcal{N} = 4$  super Yang-Mills descrita en el capítulo 1, y entender cómo podemos acoplarla a un campo de *gauge*  $U(1)$ , obteniendo así un acoplamiento electromagnético.

La forma convencional de lograr esto, que puede encontrarse por ejemplo en [60], es agregar a la teoría un campo de *gauge*  $U(1)$  acoplado a la corriente conservada asociada a uno de los subgrupos diagonales  $U(1)_R$  de la simetría  $R$  global  $SU(4)_R$ . De los quince generadores de la simetría  $R$ , tres de ellos son diagonales:  $T_3$ ,  $T_8$  y  $T_{15}$ . Resulta conveniente elegir el subgrupo  $U(1)$  generado por el  $T^3 = \text{diag}(1/2, -1/2, 0, 0)$ , puesto que bajo este generador dos de los fermiones de Weyl obtienen una carga  $\pm 1/2$ , mientras que dos de los campos escalares complejos obtienen carga  $1/2$ . La corriente conservada

asociada a dicho generador viene dada por

$$J_\mu^{EM} = \frac{1}{2} \left[ \lambda_1^\dagger \bar{\sigma}_\mu \lambda_1 - \lambda_2^\dagger \bar{\sigma}_\mu \lambda_2 + \sum_{p=3,4} X_{1p}^\dagger (-i \vec{D}_\mu + i \tilde{D}_\mu) X_{1p} \right], \quad (2.32)$$

donde estamos usando la notación de  $\lambda_p$ ,  $p = 1, \dots, 4$ , para los cuatro fermiones de Weyl y  $X_{pq} = -X_{qp}$ ,  $p, q = 1, \dots, 4$ , para los seis escalares reales, todos transformando en la representación adjunta del  $SU(N)$ . La derivada covariante  $D_\mu$  ahora involucra tanto los campos de *gauge* del  $SU(N)$  como el campo de *gauge* electromagnético  $A^\mu$  asociado al  $U(1)$ .

Considerando que la interacción es lineal en el campo de *gauge*, debemos agregar a la teoría un término de la forma  $\mathcal{L}_{\text{int}} = Q J_\mu^3 A^\mu$ , donde  $J_\mu^3$  es la componente  $T^3$  de la corriente  $R$  en  $\mathcal{N} = 4$  SYM, y donde  $Q$  es la carga eléctrica. A su vez debemos agregar un término de Dirac que represente al leptón  $\ell$  de masa  $m_\ell$  que dispersa con el hadrón. Este término no tiene interacción directa alguna con el lagrangiano de SYM, pero sí con el campo de *gauge* a través de la derivada covariante. Finalmente, agregando un término cinético para el campo de *gauge*, el lagrangiano que construimos queda de la forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{SYM}} + \mathcal{L}_{\text{int}} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 - \bar{\ell} (\not{D} + m_\ell) \ell, \quad (2.33)$$

donde ahora estamos tomando al tensor del campo electromagnético  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ . A esta teoría se la denomina “SYM-EM”, y permite estudiar distintos procesos donde se acopla el contenido de gluones y quarks fuertemente acoplados en  $\mathcal{L}_{\text{SYM}}$  con electrones o muones  $\ell$ . Además del DIS, este tipo de interacciones sirven para estudiar por ejemplo el plasma de quarks y gluones [60, 61, 62, 63, 64, 65].

La elección del generador  $T^3$  como el generador asociado a la simetría  $U(1)$  no es única. De hecho, lo más general sería elegir una combinación lineal de los generadores de Cartan del  $SU(4)_R$ . Sin embargo esta elección en particular tiene varias ventajas frente a otras posibilidades al momento de comparar con QCD. Por un lado asegura que la carga de los fermiones y los escalares tenga la misma magnitud. Por otro, tiene un rol central en el comportamiento de la anomalía quirral.

## Anomalía quirral

En el capítulo 1 comentamos que  $\mathcal{N} = 4$  SYM no preserva la simetría  $SU(4)_R$  a nivel cuántico, dando lugar a la anomalía quirral. QCD está libre de dicho tipo de anomalías, sin embargo la elección del generador  $T_3$  vuelve a resolver dicho problema.

La anomalía se puede calcular en forma exacta en el régimen perturbativo al estudiar la función de tres puntos de las corrientes a un *loop*. El diagrama de Feynman asociado se conoce como el diagrama triángulo, donde el *loop* está formado por tres fermiones quirales. El valor de dicha anomalía resulta ser [31, 66, 67]

$$\partial_\rho \langle J_\mu^A(y_1) J_\nu^B(y_2) J_\rho^C(y_3) \rangle = -\frac{N^2 - 1}{48\pi^2} i d^{ABC} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta \delta^4(y_1 - y_3) \delta^4(y_2 - y_3), \quad (2.34)$$

donde  $y_1, y_2, y_3$  son los puntos donde se insertan las corrientes, los índices  $A, B, C$  pertenecen al grupo  $SU(4)_R$ , y donde  $d_{ABC}$  es el símbolo totalmente simétrico definido en función de los generadores del

grupo y la relación con el símbolo antisimétrico  $f_{ABC}$  según  $\text{Tr}(T^A T^B T^C) = \frac{1}{4}(if^{ABC} + d^{ABC})$ . Esta ecuación puede reescribirse en términos de los campos de *gauge*

$$(D^\mu J_\mu(y))^A = \frac{N^2 - 1}{48\pi^2} id^{ABC} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu \left( A_\nu^B \partial_\rho A_\sigma^C + \frac{1}{4} f^{CDE} A_\nu^B A_\rho^D A_\sigma^E \right). \quad (2.35)$$

Si ahora consideramos que prendemos solamente los generador asociados a la corriente electromagnética  $J_\mu^3$ , la función de tres puntos se anula, ya que el símbolo totalmente simétrico en este caso resulta  $d_{333} = 0$ . De esta forma obtenemos una teoría libre de anomalías.

La anomalía quiral tiene una interpretación dual en el lado gravitatorio, asociado al término de super-gravedad de Chern-Simons en cinco dimensiones, que mostraremos con más detalle en la sección 3.2 del capítulo 3.

### Teoría de Super Yang-Mill confinante

Para obtener una teoría confinante es necesario incluir una escala de energías en la teoría. Una forma sencilla de conseguir esto es agregando una escala  $m$  como término de masa de los campos del supermultiplete de  $\mathcal{N} = 4$  SYM, obteniendo de esta manera una teoría con fase de confinamiento, como mostraron Polchinski y Strassler en [68]. La inclusión de esta escala rompe en forma explícita las  $\mathcal{N} = 4$  supersimetrías, obteniendo una teoría con  $\mathcal{N} = 1$  supersimetrías, distinta a  $\mathcal{N} = 1$  super Yang-Mills pura. En esta nueva teoría los campos no masivos corresponden a los de una teoría de *gauge* confinante con libertad asintótica, mientras que a escalas del orden de  $m$  hay ahora fermiones y escalares en la representación adjunta, que son masivos. Estos no afectan el confinamiento, pero regulan la teoría en el ultravioleta.

Lo interesante de este mecanismo es que nos permite jugar con el valor asintótico que tendrá la constante de acoplamiento de 't Hooft, permitiendo estudiar distintos aspectos de la teoría de campos resultante. Una vez fijada la constante de acoplamiento<sup>7</sup>  $\alpha(\mu)$  a una energía  $\mu$ , se genera en forma dinámica la escala de confinamiento  $\Lambda$ , cuyo valor dependerá de  $m$ . Para energías mucho mayores que  $\Lambda$  la constante de acoplamiento se hace asintóticamente casi constante, o lo que es lo mismo, la teoría recupera el comportamiento conforme. Yendo para el infrarojo, el comportamiento dependerá del valor asintótico elegido para  $\alpha(\mu)$ .

Tenemos tres casos interesantes, que se muestran esquemáticamente en la figura 2.5. Si  $\alpha N$  tiene un valor grande en el ultravioleta, entonces la teoría es conforme hasta escalas  $m \sim \Lambda$ ; si en cambio el valor de  $\alpha N$  en el ultravioleta es chico, entonces la teoría es conforme hasta la escala  $m'$  y luego corre en forma logarítmica hasta la escala  $\Lambda \sim m e^{-2\pi/3\alpha(m)N}$ ; por último tenemos el caso donde la teoría de campos es exactamente  $\mathcal{N} = 1$  SYM, que se obtiene en el caso de  $m \rightarrow \infty$ ,  $\alpha(m) \rightarrow 0$  y  $\Lambda$  fijo.

De esta forma podemos construir tanto una teoría que tenga acoplamiento débil como fuerte en el ultravioleta. Para el caso débilmente acoplado no podemos usar la dualidad AdS/CFT, puesto que en tal caso la teoría de cuerdas está fuertemente acoplada. Sin embargo en este régimen podemos usar teoría

<sup>7</sup>Aquí estamos usando  $\alpha \equiv g_{YM}^2/4\pi$ , por lo que la constante de 't Hooft se escribe  $\lambda = N\alpha$ . A su vez hay que destacar que ahora la constante de acoplamiento corre con la escala de energías del problema  $\mu$ , por lo que tiene una dependencia  $\alpha(\mu)$ .

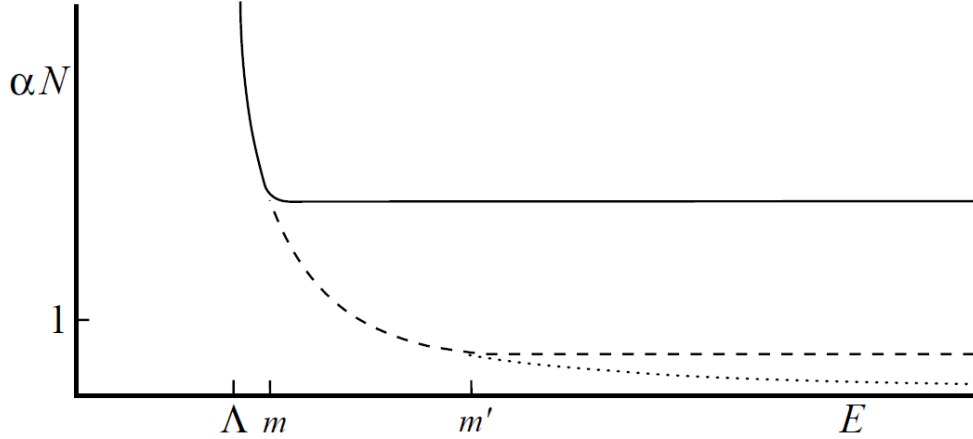


Figura 2.5: Dependencia del acoplamiento en función de la energía para SYM luego de introducir la escala de energía  $m$ . La curva sólida muestra el caso donde el valor asintótico de  $\alpha N$  es grande, y el desacoplamiento se da para  $m \sim \Lambda$ . La línea discontinua indica el caso donde el acoplamiento es chico en el UV, y el desacoplamiento se da para  $m' \gg \Lambda$ . La línea punteada representa la teoría  $\mathcal{N} = 1$  SYM, que es asintóticamente libre. La figura está tomada de [12].

perturbativa para  $\mu > \Lambda$ , tanto a energías por encima como por debajo de  $\mu = m$ . Sin embargo el caso de interés para nosotros es cuando la teoría de *gauge* está fuertemente acoplada, por lo que la teoría de cuerdas dual estará débilmente acoplada y podemos utilizar los métodos de holografía para estudiar el proceso de DIS. En este régimen hay esencialmente una única escala introducida, la escala de confinamiento, puesto que  $\Lambda \sim m$ .

Dejaremos el estudio holográfico del caso de acoplamiento fuerte para el capítulo 3 y los que le siguen, que constituyen el punto central de esta tesis.

## 2.6. Región de Regge: el Pomerón

Antes de pasar al estudio puramente holográfico del DIS discutiremos brevemente la física del proceso en una región paramétrica particular, conocida como la región de Regge. Recordemos que al aplicar el teorema óptico el diagrama que nos interesa estudiar es el asociado a la dispersión de Compton, que se muestra en la figura 2.2. En dicho diagrama de cuatro partículas podemos definir las variables de Mandelstam usuales  $s$ ,  $t$  y  $u$ , donde  $s$  corresponde a la energía del proceso en el sistema centro de momentos. El límite de Regge es aquel en el cual  $s \gg \Lambda^2$  y  $|t| \lesssim \Lambda^2$ , donde  $\Lambda$  nuevamente es una escala característica del problema. Tomando la definición de  $s = -(P+q)^2$ , podemos relacionar esta variable con el parámetro



de Bjorken  $x$  según

$$s = M^2 + q^2 \left( \frac{1}{x} - 1 \right). \quad (2.36)$$

De esta forma, el límite de Regge está directamente asociado con la región paramétrica del DIS que corresponde a valores de  $x$  chicos. Notemos a su vez que para el DIS tenemos  $s = -u$  y  $t = 0$ . Cuando  $x$  se hace muy chico, la física de Regge domina en la amplitud de dispersión, por lo que entender el régimen  $x \rightarrow 0$  se vuelve sumamente importante [13], por lo que analizaremos un poco la física desde la teoría de campos en esta sección.

Los datos experimentales de QCD sugieren que las amplitudes de dispersión de hadrones en este régimen se pueden escribir como  $\mathcal{A}(s, t) \sim s^{\alpha(t)}$ , donde las funciones  $\alpha(t)$  son denominadas *trayectorias de Regge* [69]. Es interesante notar que este comportamiento es idéntico al que se encuentra en la amplitud de dispersión de cuerdas en espacios planos. Sin embargo, por fuera del régimen de Regge esto ya no es así: las amplitudes de QCD son suprimidas por términos de potencias de  $s$ , mientras que las amplitudes de cuerdas lo hacen en forma exponencial.

Estudiar desde QCD esta amplitud resulta muy complicado, sin embargo el análisis se hace un poco más sencillo si tomamos el límite del número de colores muy grande,  $N \rightarrow \infty$ , y al mismo tiempo  $s \rightarrow \infty$ . En este caso las amplitudes de Regge son dominadas por el intercambio de una partícula conocida como el *Pomerón*. El Pomerón es un estado coherente sin color con propiedades universales compuesto enteramente por una trayectoria de partículas gluónicas con espín cada vez mayores. Perturbativamente, la contribución del Pomerón puede ser estudiada a través del método de BFKL [48, 51, 52, 70], que consiste en sumar los diagramas tipo escalera donde se intercambian cada vez más estados gluónicos entre los estados que dispersan.

En forma ilustrativa podemos estudiar el caso de la dispersión de dos partícula  $A$  y  $B$ , cuya amplitud se puede escribir en forma genérica como

$$\mathcal{A} \sim \int \frac{dp_{\perp}}{p_{\perp}} \int \frac{dp'_{\perp}}{p'_{\perp}} \Phi_A(p_{\perp}) \mathcal{K}(p_{\perp}, p'_{\perp}, s) \Phi_B(p'_{\perp}), \quad (2.37)$$

donde  $p_{\perp}$  es el momento transverso, intercambiado por el Pomerón y  $\Phi_{A,B}$  son dos funciones que contienen toda la información de los campos que están dispersando, conocidas como los *factores de impacto*. Estos factores están convolucionados por un núcleo (*kernel*)  $\mathcal{K}$ , que en este caso se denomina el *kernel* de BFKL. En el régimen perturbativo, donde la constante de 't Hooft  $\lambda$  es chica, y tras tomar el límite  $N \rightarrow \infty$ , el *kernel* del Pomerón toma la forma

$$\mathcal{K}(p_{\perp}, p'_{\perp}, s) \approx \frac{s^{j_0}}{\sqrt{4\pi\mathcal{D} \log s}} e^{-\log^2(p'_{\perp}/p_{\perp})/(4\mathcal{D} \log s)}, \quad (2.38)$$

donde  $j_0 = 1 + \frac{\log 2}{\pi^2} \lambda$  y  $\mathcal{D} = \frac{7\zeta(3)}{8\pi^2}$ . Podemos ver que recuperamos el comportamiento de Regge e interpretar a  $j_0$  como el valor del espín de la partícula intercambiada, en este caso un bosón de *gauge* de  $\mathcal{N} = 4$  SYM, que sufre una modificación pequeña en su trayectoria de Regge, proporcional a  $\lambda$ . Por otro lado, en esta

aproximación  $\mathcal{K}$  puede interpretarse como un *kernel* de difusión en la dirección de  $p_{\perp}$ , con un tiempo característico de difusión proporcional a  $\log s$ .

Veremos en el capítulo 5 que este resultado se puede reobtener en forma dual desde teoría de cuerdas en el régimen de  $x$  *exponencialmente* chico<sup>8</sup>, donde el intercambio viene dado por un conjunto de estados asociados al gravitón.

---

<sup>8</sup>Los distintos regímenes de  $x$  y su significado se explicarán en el capítulo 3.

## Capítulo 3

# DIS holográfico en teorías de super Yang-Mills

En este capítulo estudiaremos el proceso de DIS para teorías confinantes fuertemente acopladas, siguiendo la técnica holográfica propuesta por Polchinski y Strassler [12, 71]. Además haremos una breve descripción de cómo obtener los términos de interacción de supergravedad relevantes en el cálculo holográfico del proceso, mostrando cómo se reducen de los términos en diez dimensiones. Finalmente mostraremos cómo calcular las funciones de estructura de un blanco escalar y un blanco fermiónico para el caso donde la variable de Bjorken es grande, es decir  $x \simeq 1$ .

Como se mencionó en el capítulo 2, para poder calcular el tensor hadrónico asociado al *forward Compton scattering* de teorías fuertemente acopladas es necesario utilizar técnicas no perturbativas, dado que se trata de un proceso *soft*. Con este espíritu Polchinski y Strassler propusieron una representación del proceso de DIS holográfico basándose en la dualidad AdS/CFT enfocada en el régimen de acoplamiento fuerte de la teoría de campos y en el límite de  $N$  grande.

La teoría de campos a estudiar es la que denominamos SYM-EM, representada por el lagrangiano (2.33), en el régimen de acoplamiento fuerte, es decir cuando el valor asintótico de  $\lambda$  es grande. Como vimos, los hadrones en este caso corresponden a campos masivos, cuya masa es proporcional a la escala de confinamiento  $\Lambda$ , y el acoplamiento electromagnético se genera *gaugeando* un subgrupo  $U(1)$  de la simetría  $R$ . Dado que nos enfocaremos siempre en escalas de energía mucho mayores al confinamiento  $\Lambda$ , podemos considerar que la simetría conforme se restaura, y en el ultravioleta la teoría se comporta como  $\mathcal{N} = 4$  SYM.

A su vez, el dual holográfico de esta teoría corresponde a la teoría de supercuerdas IIB en un fondo asintóticamente  $AdS_5 \times S^5$ , modificado de forma tal de truncar al  $AdS_5$  en  $z_0 = 1/\Lambda$ , donde  $z$  es la coordenada radial. A este modelo donde el espacio se corta en forma abrupta se lo conoce como el *hard-wall*. Como veremos más adelante, la dinámica cerca de la truncación no será relevante para estos procesos, debido nuevamente a que trabajaremos con energías mucho mayores que la escala  $\Lambda$ , por lo que no es

necesario estudiar con detalle lo que sucede en esta región y podremos considerar el  $AdS_5$  completo. Esto está asociado a que en el proceso de DIS el momento del fotón es mucho mayor que la escala de confinamiento:  $q \gg \Lambda$ .

La idea es entonces poder calcular el tensor  $W^{\mu\nu}$  dado por la ecuación (2.6) en forma holográfica. Para ello debemos pensar qué proceso es dual al que queremos calcular. El diccionario holográfico nos indica que la inserción de una corriente electromagnética en el borde induce una perturbación no normalizable de la métrica en el *bulk*. Dado que esta perturbación se debe acoplar a la corriente en el borde, uno de sus índices debe estar sobre  $AdS_5$  y el otro sobre la  $S^5$ , de forma tal de comportarse como un vector desde el punto de vista de la teoría en el borde. A las coordenadas del espacio-tiempo de diez dimensiones las denotaremos como  $M, N = 0, \dots, 9$ , las del  $AdS_5$  como<sup>1</sup>  $m, n = 0, \dots, 3, z$ , y las de la esfera como  $a, b = 1, \dots, 5$ . De esta forma, la perturbación de la métrica con un índice en la esfera y otro en el  $AdS_5$  tiene la forma

$$\delta h_{MN} = A_{[M}^B(x^\mu, z) K_{N]}^B(\Omega) \rightarrow A_m^B(x^\mu, z) K_a^B(\Omega), \quad (3.1)$$

donde  $B = 1, \dots, 15$  es el índice que etiqueta al grupo  $SO(6)$  de isometrías de la esfera. Como explicaremos mejor más adelante,  $A_m^B$  es lo que se conoce como un gravifotón, mientras que  $K_a^B$  representa los quince vectores de Killing de la esfera. En el caso de la descripción holográfica de un proceso electromagnético se elige el  $K_a^3 \equiv v_a$ , es decir que se elige el vector constante que genera la isometría del ángulo azimutal de la 5-esfera, por lo que la perturbación toma la forma

$$\delta h_{MN} = A_m^3 K_a^3 \equiv A_m v_a. \quad (3.2)$$

Esta elección no es casual. En la sección 2.5 vimos que de los quince generadores de la simetría  $SU(4)_R$  debíamos elegir el generador  $T^3$  para simular una interacción electromagnética. Según la dualidad AdS/CFT, la simetría  $R$  de la teoría de campos se ve reflejada en la simetría  $SO(6)$  del dual gravitatorio, cuyos generadores son justamente los vectores de Killing  $K_a^B$ . De esta forma estamos eligiendo el generador que corresponde a haber *gaugeado* el  $U(1)_R$  asociado a la corriente electromagnética, etiquetada según  $B = 3$ . En el apéndice A se explica la relación entre los generadores del  $SU(4)$  y el  $SO(6)$ .

Por otro lado, los estados hadrónicos  $|P, H\rangle$  de la teoría de campos son creados por operadores  $\mathcal{O}_{H,P}$ . Estos últimos son duales a los estados en el *bulk* cuya masa de Kaluza-Klein (que se genera tras integrar la 5-esfera) está dada por la dimensión conforme de los estados  $|P, H\rangle$ . En esta tesis solo estudiaremos dos campos de la teoría del borde como blancos: el glueball, partícula escalar correspondiente a un estado compuesto de gluones de  $SU(N)$ , y su compañero supersimétrico el glueballino formado por un *singlete* de color dado por un *gaugino*  $\lambda_\alpha$  del supermultiplete de *gauge* de  $\mathcal{N} = 4$  SYM. Estos blancos son duales al dilatón  $\Phi$  y al dilatino  $\Psi$  respectivamente, en la supergravedad IIB [30].

Lo que queremos hacer entonces es relacionar el tensor hadrónico con la interacción en el *bulk* entre los estados normalizables duales a los operadores  $\mathcal{O}_h$  y el gravifotón  $A_m$ . Considerando el término de

<sup>1</sup>Aquí queremos decir que  $m$  toma el valor de  $z$  o de las coordenadas comunes del espacio de Minkowski en cuatro dimensiones  $\mu = 0, \dots, 3$ . Por ejemplo,  $x^m = (z, x^\mu)$ .

interacción de supergravedad entre el fotón y los estados hadrónicos<sup>2</sup>  $S_{int}(A, \Phi, \Phi)$ , el *Ansatz* de Witten (1.14) nos da la relación entre dicha acción evaluada en el borde del  $AdS$ , ubicado en  $z \rightarrow 0$ , con la función de un punto de la corriente hadrónica  $J^\mu$  entre los estados entrantes  $i$  y salientes  $f$  según

$$\langle \mathcal{O}_H(i) | J^\mu(x) | \mathcal{O}_H(f) \rangle \equiv \frac{\delta}{\delta A_\mu(x, 0)} (S_{int} [A_m(x, z), \Phi_i(x, z), \Phi_f^*(x, z)]) |_{A_\mu(x, 0)=0}, \quad (3.3)$$

con la acción de interacción evaluada en las correspondientes soluciones *on-shell*, y donde  $\tilde{J}^\mu$  se refiere a la transformada de Fourier de la corriente.

La imagen entonces es la siguiente: en el borde tenemos el proceso de DIS original donde la corriente electromagnética genera una perturbación del gravifotón en la dirección radial del  $AdS_5$ . Este gravifotón luego interactúa en el *bulk* con los estados duales al blanco de la teoría de campos. El diagrama de Feynman-Witten asociado puede verse en la figura 3.1, donde se muestra el diagrama del FCS correspondiente a un hadrón de momento  $P$  dispersado por un fotón virtual que genera un estado saliente con momento  $P_X$ , mientras que el proceso dual corresponde a un dilaton que es dispersado por el gravifotón inducido.

El siguiente paso es comprender la naturaleza de la interacción en el  $AdS_5$ , para ello debemos estudiar las soluciones de los campos. La solución del campo de gauge en el *bulk* se obtiene luego de resolver las ecuaciones de Einstein-Maxwell en  $AdS_5$ , como explicaremos en la siguiente sección. Las mismas contienen dos tipos de soluciones: estados normalizables y no normalizables. Dado que esta perturbación llega al borde, nos interesa solo la solución del primer tipo. Por otro lado, el *Ansatz* de Witten (3.3) indica que el valor en el borde de este campo debe ser igual al valor la fuente acoplada a la corriente electromagnética. Imponiendo las condiciones de contorno

$$A_\mu^3(x^\mu, z \rightarrow 0) = n_\mu e^{iq \cdot x}, \quad A_z^3(x^\mu, z \rightarrow 0) = 0, \quad (3.4)$$

las soluciones de los campos de gauge no normalizables resultan

$$A_\mu^3(x^\mu, z) = n_\mu e^{iq \cdot x} qz K_1(qz), \quad A_z^3(x^\mu, z) = i(n \cdot q) e^{iq \cdot x} z K_0(qz), \quad (3.5)$$

donde  $q^\mu$  es el momento del gravifotón y las  $K_i$  son funciones de Bessel de segunda clase. Sin pérdida de generalidad se puede elegir la condición de polarización transversal:  $n \cdot q = 0$ , por lo que  $A_z = 0$ . Ahora bien, la función de Bessel de segunda clase  $K_1(qz)$  decae exponencialmente a medida que  $qz$  crece en el *bulk*, esto indica que la interacción debe ocurrir en un  $z_{int} \sim 1/q$ . A su vez, dado que en el DIS el momento del fotón es mucho más grande que la masa de los hadrones, tenemos la relación  $q \gg \Lambda$ , lo que indica que la interacción se da lejos del *cutoff* del  $AdS_5$ :  $z_{int} \ll z_0$ . Por esto podemos considerar el fondo completo del  $AdS_5$  y a la teoría dual como una teoría conforme, ya que estaremos siempre lejos del *cutoff*.

Por otro lado tenemos que obtener las soluciones de los campos de materia que representan al hadrón dual en el *bulk*. Como ya indicamos, los mismos están dados por el dilatón  $\Phi$  y el dilatino  $\Psi$  en diez dimensiones, cuyas soluciones se expanden en modos de Kaluza-Klein sobre la  $S^5$ , según

$$\Phi(x^\mu, z, \Omega) = \phi_\Delta(x^\mu, z) Y_\Delta(\Omega), \quad \Psi(x^\mu, z, \Omega) = \psi_\Delta(x^\mu, z) \Theta_\Delta(\Omega) \quad (3.6)$$

<sup>2</sup>Aquí estamos considerando el caso de interacción fotón-dilatón, pero en general habría que considerar la interacción del gravifotón con el campo dual al estado hadrónico que se quiera estudiar.

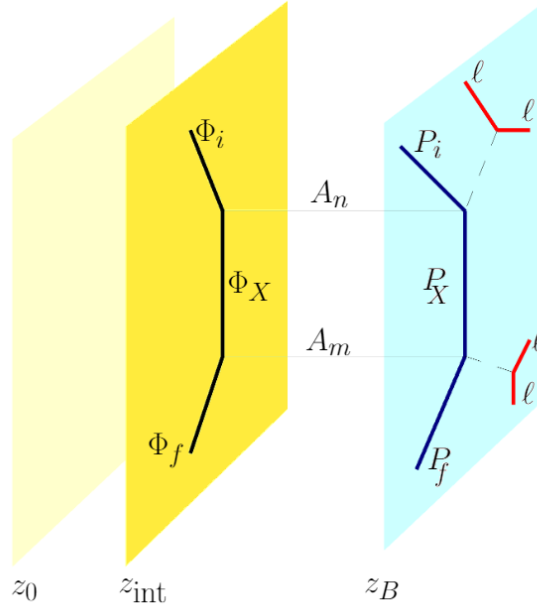


Figura 3.1: Diagrama de Feynman-Witten asociado al proceso de DIS en el canal  $s$ . El proceso de DIS se da en el borde  $z_B$ , donde el hadrón entrante con momento  $P_i$  es dispersado y sale con momento  $P_f$ , generando un estado con momento  $P_X$ . El proceso dual se da en  $z_{\text{int}}$  donde un dilaton es dispersado. El gravifotón  $A_m$  es intercambiado, y  $z_0$  indica el *cutoff* del  $AdS_5$ .

donde  $\Delta$  coincide con la dimensión de escalo de los operadores duales del borde, y donde el primer término corresponde a la solución en el  $AdS_5$  y el segundo representa los armónicos escalares/espinoriales sobre la esfera.

Tras imponer condiciones de contorno de Dirichlet, se obtiene que la masa de los hadrones en el  $AdS_5$  viene dada por la dimensión conforme  $\Delta$ . Las soluciones en  $AdS_5$  surgen tras resolver las ecuaciones de Klein-Gordon y de Dirac respectivamente, quedándonos esta vez con las soluciones normalizables, puesto que no queremos que los campos sean fuentes de corrientes en el borde en este caso. Las ecuaciones de movimiento se resuelven en términos de funciones de Bessel, el equivalente a las ondas planas en  $AdS_5$ . Haciendo esto se obtiene

$$\phi(x^\mu, z) = e^{iP \cdot x} c_i \frac{\sqrt{P\Lambda}}{R^4} z^2 J_{\Delta-2}(Pz), \quad (3.7)$$

$$\psi(x^\mu, z) = e^{iP \cdot x} \tilde{c}_i \frac{\sqrt{P\Lambda}}{R^{9/2}} z^{5/2} [J_{\tau-2}(Pz)P_+ + J_{\tau-1}(Pz)P_-] u(P), \quad (3.8)$$

donde  $P$  es el momento del hadrón,  $c_i$  es una constante,  $\tau = \Delta - 1/2$  es el *twist* del dilatino y  $P_\pm \equiv \frac{1}{2} (1 \pm \gamma^5)$  son los proyectores con  $\gamma^5 \equiv \gamma^{\hat{z}}$ ,  $\hat{z}$  indicando que estamos trabajando con índices en el espacio

plano<sup>3</sup>. Además,  $u$  son los espinores de Dirac en cuatro dimensiones. Estas soluciones tienen una masa de Kaluza-Klein dada por

$$m_\phi^2 = R^{-2}\Delta(\Delta - 4), \quad m_\psi^2 = R^{-1}(\Delta - 2), \quad (3.10)$$

respectivamente.

Las componentes de la 5-esfera de las soluciones de los campos de materia vienen dados por armónicos escalares/espinoriales, que cumplen la ecuación de autoestados:

$$v^a \partial_a Y(\Omega) = i Q Y(\Omega), \quad (3.11)$$

y lo mismo para  $\Theta(\Omega)$ . Esta condición da lugar al término de acoplamiento mínimo entre los campos de cinco dimensiones. La idea es partir del término cinético en diez dimensiones y perturbar la métrica y los campos según (3.2) y (3.6). Para el dilatino tenemos

$$\begin{aligned} S_{10D}^\Phi &\rightarrow \int d^{10}x \sqrt{-g} h_{MN} \partial^M \Phi \partial^N \Phi^* \\ &= \int d^{10}x \sqrt{-g} h_{am} (\partial^a \Phi \partial^m \Phi^* + \partial^m \Phi \partial^a \Phi^*) \\ &= iQ \int d^{10}x \sqrt{-g} A_m (\Phi \partial^m \Phi^* - \Phi^* \partial^m \Phi), \end{aligned} \quad (3.12)$$

donde hemos usado (3.11) para llegar desde el término cinético al término de acoplamiento mínimo. Este tipo de interacción será la que domine la dinámica dentro del *bulk*, y la que debemos usar al momento de aplicar la prescripción holográfica (3.3). El resto de las interacciones que serán de importancia serán mostradas la siguiente sección.

Tenemos entonces todas las herramientas para entender proceso de FCS (y por ende el DIS) en el *bulk*: el estado inicial del hadrón con momento  $P$  viene dado por la solución de la ecuación (3.7) en caso de ser un blanco escalar, o (3.8) en caso de tener espín 1/2. El hadrón, cuya carga está dada por (3.11), interactúa con el gravifotón de momento  $q$  dado por (3.5) a través de la interacción (3.12). Este proceso se da en el plano  $z_{int} = 1/q$ . Este proceso genera un conjunto de estados salientes (o intercambiados si pensamos en el FCS) cuya naturaleza depende de la escala de energías del proceso. En particular, la naturaleza del estado saliente dependerá del juego entre la energía del sistema del centro de masa y la escala de la cuerda  $\alpha'$ .

### 3.1. Regímenes cinemáticos de DIS

Veremos ahora cómo surgen distintos regímenes que se deben estudiar para entender el proceso del DIS dual. Supongamos que la interacción estuviera totalmente gobernada por un término de interacción

<sup>3</sup>Al trabajar con espinores en espacio curvo hay que considerar que los índices  $m, n$  se relacionan con los de espacio plano  $\hat{m}, \hat{n}$  mediante los *vielbein* según

$$g_{mn} = e_m^{\hat{m}} e_n^{\hat{n}} \eta_{\hat{m}\hat{n}}. \quad (3.9)$$

de tres campos, como el de (3.12). En ese caso tendremos un DIS con un estado saliente  $X$  con momento  $P_X$ , que en el proceso de FCS será un estado intermedio propagado.

Cuando la escala de energías característica del proceso sea baja es de esperar que este estado esté dado por cuerdas no masivas, es decir por estados de supergravedad. Sin embargo al aumentar la energía podría ser posible empezar a excitar modos masivos, en cuyo caso es necesario salir de la aproximación de supergravedad y considerar la torre de estados posibles de la cuerda. Esto se puede ver explícitamente al calcular la energía del sistema del centro de masa en diez dimensiones, dada por la variable de Mandelstam  $\tilde{s}$ , y al considerar el corrimiento al rojo que genera la geometría curva del  $AdS$ , dado por

$$\tilde{P}_\mu = \frac{z}{R} p_\mu, \quad (3.13)$$

que relaciona el momento  $\tilde{P}_\mu$  que ve un observador local inercial en diez dimensiones con el momento  $P_\mu$  de la teoría de campos del borde del  $AdS_5$ . Utilizando esta relación se puede ver que

$$\tilde{s} = -g_{MN} P_X^M P_X^N \leq -(P+q)^2 \approx \frac{z_{int}^2}{R^2} q^2 \left( \frac{1}{x} - 1 \right) \sim \frac{1}{\alpha' \sqrt{\lambda}} \left( \frac{1}{x} - 1 \right), \quad (3.14)$$

donde hemos usado que  $P^2 \ll q^2$ , y que  $z_{int} \sim 1/q$ . La ecuación (3.14) relaciona la energía del proceso con  $\alpha'$  y lo hace a través de la variable de Bjorken que caracteriza el proceso de DIS. A simple vista vemos que hay dos regímenes: el caso donde  $\alpha' \tilde{s} \ll 1$ , es decir donde solo se producen estados de cuerdas no masivos, que corresponde a tomar  $x \simeq 1$ ; y el caso donde  $\alpha' \tilde{s} \sim 1$ , donde la dinámica de los estados masivos se hace relevante, y que corresponde a  $x \ll 1/\sqrt{\lambda}$ .

En el caso de  $x$  chico, que en la descripción de teorías de campos se corresponde al régimen de Regge, tenemos que calcular el proceso involucrando la dispersión de cuerdas cerradas en un fondo con geometría curva. Sin embargo, como  $\tilde{s}$  es del orden de la escala de la cuerda, es razonable pensar que el proceso de dispersión está localizado. Más aún, como la escala es chica respecto del radio del  $AdS$ , se puede en este régimen tomar la amplitud de cuerdas en espacios planos y luego convolucionar las soluciones de los campos correspondientes al espacio curvo [71]. Sin embargo, por razones que quedarán más claras en el capítulo 5, esta aproximación local se rompe explícitamente cuando  $x$  es del orden de  $e^{-\sqrt{\lambda}}$ , por lo que en este caso hay que lidiar de alguna forma con la amplitud en el fondo curvo.

Tendremos entonces tres regímenes diferenciados:

1.  $x$  grande:  $1/\sqrt{\lambda} \ll x < 1$ , el proceso está totalmente descrito por supergravedad.
2.  $x$  chico:  $e^{-\sqrt{\lambda}} \ll x \ll 1/\sqrt{\lambda}$ , los estados de cuerdas se vuelven relevantes pero alcanza con hacer una descripción local.
3.  $x$  exponencialmente chico:  $x \sim e^{-\sqrt{\lambda}}$ , la aproximación local deja de ser válida y hay que considerar la dispersión en espacios curvos.

Desde el punto de vista de la teoría de campos ya discutimos en el capítulo 2 el significado físico de los valores de  $x$ . Vemos aquí sin embargo que el impacto en el proceso dual es de gran interés, ya que



representa física de muy distintas escalas, que requiere técnicas totalmente distintas para ser resuelta en cada caso. En lo que resta de este capítulo estudiaremos el caso de  $x \simeq 1$ , y en los siguientes haremos énfasis en los cálculos de  $x$  chico, que constituyen la contribución original de esta tesis.

Antes de estudiar el proceso de DIS en forma holográfica sin embargo debemos entender bien cómo surgen los términos de interacción entre los campos del *bulk*, como hicimos por ejemplo en (3.12). Para ello debemos estudiar la reducción dimensional que lleva de diez a cinco dimensiones.

### 3.2. Reducción dimensional: supergravedad *gaugeada*

Hasta aquí hemos mostrado como el DIS de teorías de super Yang-Mills se describe holográficamente en función de amplitudes de dispersión de supergravedad (o de cuerdas, según los regímenes descriptos en la sección anterior) en cinco dimensiones. A su vez, el blanco hadrónico es representado dualmente en función de soluciones normalizables de campos en el  $AdS_5$ , mientras que el fotón virtual es descrito como una perturbación particular de la métrica en diez dimensiones, con un índice perturbado correspondiente al  $AdS_5$  mientras que el otro corresponde a la  $S^5$ .

Sin embargo, dado que la dualidad AdS/CFT relaciona a la teoría en espacio plano con una teoría de gravedad en diez dimensiones, estudiaremos en esta sección la reducción dimensional que permite llegar desde la supergravedad IIB en diez dimensiones con un fondo  $AdS_5 \times S^5$  a la supergravedad *gaugeada* en  $AdS_5$  con grupo de *gauge*  $SU(4) \sim SO(6)$ , mediante la compactificación de la 5-esfera.

Este proceso fue estudiado en la década de los ochenta, previo a la idea de holografía, en [72]. En dicho trabajo se estudió la compactificación sobre la 5-esfera de la supergravedad IIB, realizando una expansión de los campos en armónicos sobre la esfera y encontrando el espectro de masas de los campos de la teoría resultante, mostrando que la compactificación es consistente. Dado que los autores estaban interesados en estudiar el espectro de masas, en dichos trabajos solo consideraron términos cuadráticos en la expansión de modos, sin embargo el proceso de compactificación con términos de interacción puede encontrarse en trabajos más recientes como [73]. El contenido de campos que se encuentra es amplio, sin embargo para la descripción del DIS holográfico que interesa en esta tesis basta con estudiar los términos asociados al gravifotón, dilatón y dilatino.

El gravifotón surge como una perturbación particular de la métrica y de la 4-forma de R-R, que denotaremos como  $h_{MN}$  y  $a_{MNOP}$  respectivamente. Esto se debe a que las ecuaciones de movimiento de dichos campos están acopladas, por lo que no puede apagarse un solo campo. En forma genérica se puede expandir al  $h_{MN}$  y a la  $a_{MNOP}$  en función de los armónicos escalares  $Y(\Omega)$  y vectoriales  $Y_a(\Omega)$  sobre la esfera  $S^5$ , y de funciones escalares, vectoriales o tensoriales sobre el  $AdS_5$ . En particular tomando los modos

$$h_{ma} = \sum_k B_m^{(k)}(x) Y_a^{(k)}(\Omega), \quad a_{mabc} = \sum_k \tilde{B}_m^{(k)}(x) \epsilon_{abc}{}^{de} \nabla_d Y_e^{(k)}(\Omega), \quad (3.15)$$

donde  $\epsilon_{abcde}$  es el tensor de Levi-Civita en  $S^5$  y  $k \geq 1$  etiqueta la representación del  $SO(6)$ , se puede

mostrar que la combinación lineal de las perturbaciones

$$A_m^{(k)} \equiv B_m^{(k)} - \frac{16}{R} \tilde{B}_m^{(k)} \quad (3.16)$$

cumple las ecuaciones de movimiento de un campo de Maxwell-Proca, cuya masa viene dada por  $m_k^2 = (k^2 - 1)/R$ . El caso no masivo corresponde al modo más bajo  $k = 1$ , para el cual los armónicos vectoriales vienen dados por los quince vectores de Killing  $K_a^A$  de la  $S^5$ , y podemos escribir a la perturbación simplemente como los quince bosones de *gauge*  $A_m^A$  asociados a la simetría  $SO(6)$  de la esfera. Escribiendo  $B(x)_m^A$  en función de  $A_m^A(x)$  obtenemos la perturbación (3.1). Lo mismo puede hacerse para  $\tilde{B}(x)_m^A$ . De esta forma vemos cómo surge el gravifotón en la teoría de cinco dimensiones. Su ecuación de movimiento es la de Maxwell en el fondo curvo  $AdS_5$ , cuyas soluciones no normalizables son las expresadas en (3.5).

### Términos cinéticos

En diez dimensiones el término cinemático del dilatón viene dado por

$$S_{10D}^\Phi = \frac{1}{2\kappa_{10}} \int d^{10}x \sqrt{-g} (\partial\Phi)^2, \quad (3.17)$$

donde  $\kappa_{10}$  es la constante de Newton, relacionada con el número de branas  $N$  según<sup>4</sup>

$$\kappa_{10} = 2 g_s \alpha'^2 = \frac{1}{2\pi N}. \quad (3.18)$$

Para obtener el término cinético en cinco dimensiones basta con considerar una perturbación de la forma  $\Phi \rightarrow \Phi_0 + \Phi$ , donde  $\Phi_0$  es el valor de fondo del campo, y luego expandir la perturbación en los modos de Kaluza-Klein sobre la esfera según (3.6). De esta forma se obtiene

$$\begin{aligned} S_{5D}^\phi &= \frac{1}{2\kappa_{10}} \int d^5\Omega \sqrt{-g_{S^5}} |Y|^2 \int d^5x \sqrt{-g_{AdS}} (\partial_m\phi)^2 \\ &\equiv \frac{1}{2\kappa_5} \int d^5x \sqrt{-g_{AdS}} (\partial_m\phi)^2, \end{aligned} \quad (3.19)$$

donde hemos usado la relación de ortonormalidad de los armónicos  $Y(\Omega)$ , y hemos definido la constante en cinco dimensiones según

$$\kappa_5^2 \equiv \kappa_{10}^2 / \text{vol}(S^5) = \kappa_{10}^2 / \pi^3. \quad (3.20)$$

El caso del dilatino es análogo,

$$\begin{aligned} S_{10D}^\Psi &= \frac{1}{2\kappa_{10}} \int d^{10}x \sqrt{-g} \bar{\Psi} \Gamma^M D_M \Psi \\ \rightarrow S_{5D}^\psi &= \frac{1}{2\kappa_5} \int d^5x \sqrt{-g_{AdS}} \bar{\psi} \gamma^m D_m \psi, \end{aligned} \quad (3.21)$$

<sup>4</sup>En lo que resta de esta sección fijaremos el radio del  $AdS$  en  $R = 1$ .

con  $\Gamma^M$  representando a las matrices de Dirac en diez dimensiones, que pueden expresarse en función de las matrices de Pauli  $\sigma_i$  y las matrices Dirac  $\gamma^m$  y  $\tau^a$  en cinco dimensiones, correspondientes al  $AdS_5$  y a la esfera  $S^5$  respectivamente. Dicha descomposición toma la forma

$$\Gamma^m \equiv \gamma^m \otimes \mathbb{1}_4 \otimes \sigma^1, \quad \Gamma^a \equiv \mathbb{1}_4 \otimes \tau^a \otimes (-\sigma^2). \quad (3.22)$$

### Términos de interacción

Los términos de acoplamiento mínimo con el gravifotón surgen de perturbar nuevamente los términos cinéticos, pero considerando ahora tanto perturbaciones de los campos como de la métrica. Esto ya lo mostramos para el caso del dilatón en (3.12). La única diferencia es que, siguiendo la notación de Polchinski y Strassler en [12], debemos reescalar los campos absorbiendo la constante de Newton en cinco dimensiones:  $\Phi' = \sqrt{2} \kappa_5 \Phi$ . A este término lo denominaremos  $S_{A\phi\psi}$ .

Para el dilatino el proceso es análogo, pero aplicando esta vez la ecuación de autovalores de los armónicos espinoriales  $v^a \partial_a \Theta(\Omega) = iQ \Theta(\Omega)$ , por lo que se obtiene

$$S_{10D}^\Psi \rightarrow S_{A\psi\psi} = iQ \int d^{10}x \sqrt{-g} A_m \bar{\Psi} \gamma^m \Psi, \quad (3.23)$$

Además de los términos de acoplamiento mínimo tenemos otro tipo de interacciones que serán relevantes. Por un lado, no hemos considerado aún la perturbación del término cinético de la 4-forma de R-R. El mismo posee una estructura de la forma  $g \mathcal{F}_5 \mathcal{F}_5$ , que da lugar a un término cúbico en los campos  $A_m^B$ ,  $B = 1 \dots, 15$ . La reducción completa, partiendo desde amplitudes de cuerdas, se muestra en el apéndice B. El resultado final es el conocido término de Chern-Simons no abeliano

$$S_{CS} = \frac{i\kappa}{96\pi^2} d_{ABC} \int d^5x \varepsilon^{mnpq} A_m^A \partial_n A_o^B \partial_p A_q^C, \quad (3.24)$$

donde  $A, B, C$  son índices del grupo  $S0(6) \sim SU(4)$ ,  $d_{ABC}$  es el símbolo totalmente simétrico y  $\kappa$  es un entero. Este término tiene algunas propiedades particulares que serán de importancia para lo que resta de la tesis, por lo que vale la pena detenerse a comentarlas. Por un lado, el término de Chern-Simons solo está presente si se consideran perturbaciones no-abelianas del gravifotón, por lo que debemos considerar los quince posibles campos de *gauge* del  $SU(4) \sim S0(6)$ , y no solo los que están asociados al generador  $T^{35}$ . A su vez, rompe explícitamente la invarianza de la acción en cinco dimensiones ante el grupo  $SU(4)$ . Esta simetría está asociada, dualidad mediante, con la simetría global  $SU(4)_R$ , rota a nivel cuántico por la anomalía quiral. Vemos entonces que este término está directamente asociado con la anomalía quiral. Mas aún, el cálculo holográfico de la función de tres puntos de la corriente da como resultado un término idéntico al de la anomalía quiral mostrado en (2.35), con la identificación  $\kappa = N^2 - 1$ , donde  $N$  es el número de colores del grupo de *gauge*  $SU(N)$ . Este resultado fue mostrado por Witten en [25]. Como veremos en los capítulos siguientes, el término de Chern-Simons tendrá un rol fundamental en el cálculo de las funciones de estructura antisimétricas.

<sup>5</sup>Recordemos que  $T^3$  está relacionado con el fotón, como indicamos al pasar de (3.2) a (3.1)

Siguiendo con las interacciones posibles, nos resta estudiar en los términos fermiónicos las fluctuaciones de la métrica que se surgen de los *vielbein*. Estos están presente tanto en la definición de las matrices de Dirac en espacio curvo

$$\Gamma^M = \Gamma^{\hat{M}} e_{\hat{M}}^M, \quad (3.25)$$

donde  $\hat{M}$  indica los índices en espacio plano, como así también en la conexión de espín  $\omega_{\hat{a}\hat{b}}^m$  que surge en la derivada covariante actuando sobre los fermiones [16]. Al considerar estas perturbaciones surge un término extra de interacción fermiónica con el gravifotón, comúnmente denominado el término de Pauli

$$S_P = \beta^A \int d^5x \sqrt{-g_{AdS}} F_{mn}^A \bar{\psi} [\gamma^m, \gamma^n] \psi, \quad (3.26)$$

donde  $\beta^A$  es alguna constante y  $F_{mn}^A$  es el tensor antisimétrico usual asociado al campo de *gauge*  $A_m^A$ .

Finalmente los términos de la acción de supergravedad *gaugeada* en cinco dimensiones que nos serán de interés resultan ser

$$S_{5D} = \frac{1}{2\kappa_5} \int d^5x \sqrt{-g_{AdS}} \left( \mathcal{R} - \frac{1}{2} (\partial_m \phi)^2 - \bar{\psi} \gamma^m D_m \psi - \frac{1}{4} F_{mn}^2 \right) + S_{A\phi\phi} + S_{A\psi\psi} + S_{CS} + S_P, \quad (3.27)$$

con  $\mathcal{R}$  el tensor de Ricci en cinco dimensiones, y donde  $S_{A\phi\phi}$  y  $S_{A\psi\psi}$  son las acciones de interacción (3.12) y (3.23) respectivamente. Aquí la derivada covariante actuando sobre los fermiones puede escribirse como:  $\mathcal{D} = g^{mn} e_n^{\hat{a}} \gamma_{\hat{a}} \left( \partial_m + \frac{1}{2} \omega_m^{\hat{a}\hat{b}} \Gamma_{\hat{a}\hat{b}} \right)$ .

Con la acción (3.27) podremos estudiar en las siguientes secciones las interacciones de los campos de supergravedad necesarias para poder calcular las amplitudes de dispersión del proceso de DIS y encontrar de esta forma las funciones de estructura del glueball y del glueballino.

### 3.3. DIS en el régimen $1/\sqrt{\lambda} \ll x < 1$

En esta sección estudiaremos el DIS holográfico enfocándonos en el régimen de  $x$  grande, donde la dinámica está gobernada por la acción de supergravedad (3.27), y las cuerdas no se hacen presentes en forma manifiesta. La idea será mostrar cómo podemos calcular las funciones de estructura en este régimen considerando dicha acción y utilizando el *Ansatz* (3.3). Comenzaremos por estudiar el caso del blanco escalar, dual al glueball, y luego pasaremos al caso fermiónico, dual al glueballino. Dado que no se tratan de contribuciones originales mostraremos los pasos generales. Los detalles de las cuentas pueden encontrarse en [12] para el caso escalar y en [16, 17] para el caso de espín 1/2.

En rigor calcularemos en forma holográfica el tensor hadrónico  $T^{\mu\nu}$  asociado al FCS, y luego aplicando el teorema óptico calcularemos las funciones de estructura hadrónicas  $F_i$  y  $g_i$ . Los estado entrante y saliente

están caracterizados por un modo de supergravedad dual al estado hadrónico  $|P, h\rangle$ . Dado que estamos en el régimen de  $x$  grande, el proceso de DIS dual se hace intercambiando un campo de supergravedad  $X$ , dual al estado hadrónico  $|P_X, X\rangle$ , que debe ser sumado. El diagrama de Feynman-Witten asociado al caso del dilatón se muestra en la figura 3.2.

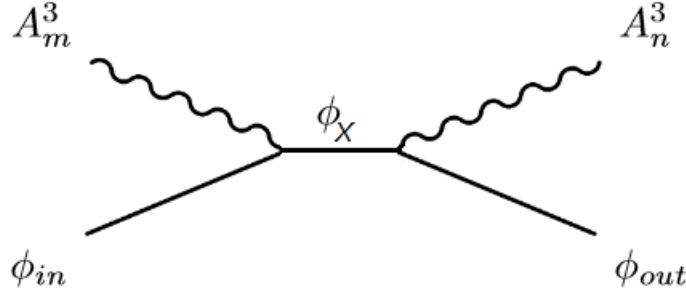


Figura 3.2: Diagrama de Feynman-Witten del proceso dual del FCS en el *bulk*. En este caso se muestran los estados entrantes y salientes del dilatón, interactuando con el gravifotón que proviene del borde. El estado intercambiado es también un dilatón  $X$ .

### 3.3.1. Blanco escalar

El primer paso es calcular en forma dual el elemento de matriz  $\langle P_X, X | J^\mu(x) | P, h \rangle$ , con el que luego podremos reconstruir el tensor hadrónico según (2.24). A partir de la prescripción de Witten para la corriente hadrónica (3.3), tomando la expresión para acción de interacción entre el dilatón y el gravifotón (3.12) y aplicando la transformada de Fourier en la corriente, puede mostrarse fácilmente la relación holográfica

$$n_\mu \langle P_X, X | \tilde{J}^\mu(q) | P, Q \rangle = iQ \int d^{10}x \sqrt{-g} A_m (\Phi_i \partial^m \Phi_X^* - \Phi_X^* \partial^m \Phi_i), \quad (3.28)$$

donde  $Q$  es la carga del dilatón, que se deriva de la ecuación de autoestados de los armónicos escalares (3.11). En esta expresión debemos tener cuidado con los momentos de cada campo. El dilatón inicial tiene momento  $P^\mu$ , asociado al momento del hadrón en el borde. El gravifotón tiene momento  $q^\mu$ , que cumple  $q^2 \gg P^2, \Lambda$  y cualquier otra esa escala que aparezca en la interacción. Finalmente, el estado intermedio tiene momento  $P_X^\mu$ , que tras integrar sobre el espacio en cuatro dimensiones se relaciona con los dos momentos anteriores según  $P_X^\mu = (P + q)^\mu$ , dando así la conservación del momento.

Resta evaluar la acción *on-shell* sobre las soluciones de los campos en  $AdS_5 \times S^5$ . Las soluciones no normalizables del campo de *gauge* se encuentran en (3.5), mientras que las soluciones del dilatón en cinco dimensiones  $\phi_\Delta(x, z)$  se muestran en (3.7). A partir de aquí trabajaremos con estados con una dada dimensión conforme  $\Delta$  inicial, que omitiremos en la notación.

El cálculo se puede simplificar un poco si recordamos que la interacción se da en  $z_{int} \ll z_0$ , por lo que el argumento de la función de Bessel  $J_{\Delta-2}(Pz)$  de la solución del campo entrante  $\phi_{in}$  puede considerarse pequeño cerca de  $z_{int} = 1/q$ . Expandiendo la función de Bessel obtenemos

$$\phi_{in}(x, z) \approx e^{iP \cdot x} \frac{c_i}{R^4 \Lambda} (z/z_0)^\Delta, \quad (3.29)$$

donde  $c_i$  es una constante adimensional. Sin embargo el estado intermedio  $\phi_X$  no puede aproximarse de esta forma, debido a que el argumento de la función Bessel ahora es de la forma  $s^{1/2} = \sqrt{(P+q)^2}$ , y puede tomar el mismo orden que  $q$ .

Reemplazando las soluciones del campo de *gauge* y de los estados entrantes e intermedios en (3.28), y utilizando la relación

$$\langle P_X, X | \tilde{J}^\mu(q) | P, Q \rangle = (2\pi)^4 \delta^4(P_x - q - P) \langle P_X, X | J^\mu(0) | P, Q \rangle, \quad (3.30)$$

se obtiene

$$\begin{aligned} n_\mu \langle P+q, X | J^\mu(0) | P, Q \rangle &= 2Q c_i c_X s^{1/4} \Lambda^{\frac{\Delta+\Delta'+1}{2}} q n_\mu \left( P^\mu + \frac{q^\mu}{2x} \right) \\ &\times \int d^5\Omega \sqrt{g_{S^5}} Y_\Delta(\Omega) Y_{\Delta'}^*(\Omega) \int_0^{1/\Lambda} dz z^\Delta J_{\Delta'-2}(s^{1/2}z) K_1(qz), \end{aligned} \quad (3.31)$$

donde  $\Delta$  es la dimensión conforme del estado entrante y  $\Delta'$  la del estado intercambiado. La integral angular es simplemente la relación de ortonormalidad de los armónicos escalares, lo que garantiza que  $\Delta = \Delta'$ , por lo que no hay *mixing*: el estado intercambiado debe tener el mismo  $\Delta$  que el que ingresa. Esto define una regla de selección para la interacción entre dos dilatones y un gravifotón. Dado que queremos estudiar el comportamiento en el ultravioleta, el límite de la integral radial puede considerarse tendiendo a infinito, que es lo mismo que considerar el caso donde  $\Lambda \rightarrow 0$ , por lo que la integral puede resolverse analíticamente. Substrayendo el  $n^\mu$  en ambos lados, y tras resolver ambas integrales, el resultado es

$$\langle P+q, X | J^\mu(0) | P, Q \rangle = 2^\Delta Q c_i c_X \Gamma(\Delta) \left( P^\mu + \frac{q^\mu}{2x} \right) \Lambda^{\Delta-1/2} \frac{s^{\Delta/2-3/4} q^2}{(s+q^2)^\Delta}. \quad (3.32)$$

Para obtener la parte imaginaria del tensor  $T^{\mu\nu}$  según (2.24) resta multiplicar la expresión recién obtenida por su conjugado, y luego sumar sobre todas las excitaciones radiales  $X$ . Dado que estamos estudiando el modelo del *hard-wall*, podemos calcular la densidad de estados pidiendo que la función de Bessel  $J_{\Delta-2}(s^{1/2}z)$  se anule tanto en el borde como en el *cutoff*  $z_0$ , obteniendo de esta forma la masa discreta:  $M_n = n\pi\Lambda$ . Como estamos trabajando en  $q$  grande podemos considerar

$$\sum_n \delta(M_n^2 - s) \sim (\partial M_n^2 / \partial n)^{-1} \sim (2\pi s^{1/2} \Delta)^{-1}. \quad (3.33)$$

Luego de multiplicar la función de un punto por su conjugado, tomar la parte imaginaria y reemplazar la suma de estados intermedios, obtenemos

$$2\pi \text{Im}(T^{\mu\nu}) = 2\pi A_0 Q^2 \left( P^\mu + \frac{q^\mu}{2x} \right) \left( P^\nu + \frac{q^\nu}{2x} \right) \Lambda^{2\Delta-2} q^{-2\Delta} x^{\Delta+2} (1-x)^{\Delta-2}, \quad (3.34)$$

que es equivalente a  $W^{\mu\nu}$  según (2.22), y donde  $A_0 = 2^{2\Delta} \pi |c_i|^2 |c_X|^2 \Gamma(\Delta)^2$ . Esta expresión es, según (2.22), equivalente al  $W^{\mu\nu}$ , por lo que podemos obtener las funciones de estructura si la comparamos con la expansión general del tensor hadrónico para un blanco escalar (2.16). Haciendo esto obtenemos

$$\begin{aligned} F_2(x, q^2) &= A_0 Q^2 (\Lambda^2/q^2)^{\Delta-1} x^{\Delta+1} (1-x)^{\Delta-2}, \\ F_1(x, q^2) &= F_3(x, q^2) = 0. \end{aligned} \quad (3.35)$$

De esta forma pudimos calcular las funciones de estructura de un blanco escalar en el régimen de  $1/\sqrt{\lambda} \ll x < 1$ .

### 3.3.2. Blanco fermiónico

Estudiaremos ahora el DIS de un blanco fermiónico polarizado con *twist*  $\tau = \Delta - 1/2$ . En este caso el elemento de matriz que queremos calcular se puede obtener desde el término de interacción de supergravidad entre el gravifotón y el dilatino (3.23), por lo que el estado intercambiado debe ser también un dilatino. Los cálculos son análogos al caso del campo escalar, con la salvedad de que la aproximación de la solución (3.8) cerca del borde para el estado inicial  $\psi_{in}$  es ahora

$$\psi_i \approx e^{iP \cdot x} \frac{c_i}{\Lambda^{3/2}} (z/z_0)^{\tau+1/2} \left[ P_+ + \frac{Pz}{2(\tau-1)} P_- \right] u_i(P), \quad (3.36)$$

y de que las matrices de Dirac se escriben en función de su expresión en espacio plano según

$$\gamma^\mu = e^\mu_{\hat{\mu}} \gamma^{\hat{\mu}}, \quad \gamma^z = e^z_{\hat{z}} \gamma^{\hat{z}}. \quad (3.37)$$

Tras resolver las integrales en  $z$  considerando el límite superior como  $\infty$ , obtenemos la expresión para la función de un punto

$$\begin{aligned} &\langle P_X, X, \sigma' | J^\mu(0) | P, Q, \sigma \rangle \\ &= i Q c'_i c'_X s^{1/4} \Lambda^{\tau-1/2} 2^{\tau-1} M_X^{\tau-2} (M_X^2 + q^2)^{-\tau} \Gamma(\tau) \\ &\quad \times \left( q^2 \bar{u}_{X\sigma'} \gamma^\mu P_+ u_{i\sigma} - i M_X q^\mu \bar{u}_{X\sigma'} P_+ u_{i\sigma} + \frac{\tau}{\tau-1} \frac{M M_X}{M_X^2 + q^2} q^2 \bar{u}_{X\sigma'} \gamma^\mu P_- u_{i\sigma} \right. \\ &\quad \left. + i \frac{\tau}{\tau-1} \frac{M q^\mu q^2}{M_X^2 + q^2} \bar{u}_{X\sigma'} P_- u_{i\sigma} - i \frac{M q^\mu}{\tau-1} \bar{u}_{X\sigma'} P_- u_{i\sigma} \right), \end{aligned} \quad (3.38)$$

donde  $\sigma$  indica el espín del espinor entrante y  $\sigma'$  el del intercambiado. Multiplicando por su conjugado, sumando sobre los modos intermedios y sobre el espín final, utilizando las propiedades de las ecuaciones (2.11), (2.12) y (2.13), hallamos que el tensor hadrónico se descompone en su parte simétrica y antisimétrica

según

$$\begin{aligned}
W_{\mu\nu}^{(S)} &= \pi A'_0 Q^2 (\Lambda^2/q^2)^{\tau-1} x^{\tau+1} (1-x)^{\tau-2} \\
&\times \left\{ \left( \eta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) \left( \frac{1}{2} + \frac{q \cdot S}{2P \cdot q} M \right) \right. \\
&\quad - \frac{1}{P \cdot q} \left( P_\mu - \frac{P \cdot q}{q^2} q_\mu \right) \left( P_\nu - \frac{P \cdot q}{q^2} q_\nu \right) \left( 1 + \frac{q \cdot S}{P \cdot q} M \right) \\
&\quad \left. - \frac{M}{2P \cdot q} \left[ \left( P_\mu - \frac{P \cdot q}{q^2} q_\mu \right) \left( S_\nu - \frac{S \cdot q}{q^2} q_\nu \right) + \left( P_\nu - \frac{P \cdot q}{q^2} q_\nu \right) \left( S_\mu - \frac{S \cdot q}{q^2} q_\mu \right) \right] \right\} \quad (3.39)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
W_{\mu\nu}^{(A)} &= \pi A'_0 Q^2 (\Lambda^2/q^2)^{\tau-1} x^{\tau+1} (1-x)^{\tau-2} \\
&\times \left\{ -\frac{\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} q^\alpha P^\beta}{2P \cdot q} - \frac{M \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} q^\alpha S^\beta}{2P \cdot q} - \frac{M \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} q^\alpha}{2P \cdot q} \left( S^\beta - \frac{q \cdot S}{P \cdot q} P^\beta \right) \left( \frac{1}{2x} \frac{\tau+1}{\tau-1} - \frac{\tau}{\tau-1} \right) \right\} \quad (3.40)
\end{aligned}$$

con  $A'_0$  igual a  $A_0$  pero intercambiando  $\Delta$  por  $\tau$ . Comparando con las expresiones del tensor hadrónico simétrico (2.18) y antisimétrico (2.19), obtenemos las funciones de estructura para el DIS de un hadrón de espín 1/2 polarizado en el régimen de  $x$  chico

$$\begin{aligned}
2F_1 &= F_2 = F_3 = 2g_1 = g_3 = g_4 = g_5 = \pi A'_0 Q^2 (\Lambda^2/q^2)^{\tau-1} x^{\tau+1} (1-x)^{\tau-2} \\
g_2 &= \left( \frac{1}{2x} \frac{\tau+1}{\tau-1} - \frac{\tau}{\tau-1} \right) F_1. \quad (3.41)
\end{aligned}$$

Este cálculo se puede ampliar si se considera el término de interacción de Pauli (3.26) en lugar del acoplamiento mínimo. El resultado de dicho análisis se encuentra en [17]. Los resultados generales no se diferencian mucho de los hallados en esta sección, salvo por las relaciones de tipo Callan-Gross. Dejaremos el análisis del término de Pauli para el capítulo 4, donde estudiaremos su aporte para el régimen de  $x$  chico.

### 3.3.3. Análisis de las funciones de estructura

Obtuvimos las funciones de estructura simétricas y antisimétricas en el régimen de  $x$  grande, tanto para el glueball como para el glueballino en el límite planar, es decir  $1 \ll \lambda \ll N$ . Resulta interesante comparar estos resultados con los obtenidos en la sección 2.4 para el modelo partónico, y además comprender su significado desde el punto de vista de la teoría de cuerdas.

Para el caso escalar (3.35), podemos ver que solo  $F_2$  está presente, por lo que no se cumple ninguna relación del tipo Callan-Gross. Sin embargo esto sí sucede para el caso del dilatino (3.41), obteniendo una relación modificada de la ecuación (2.31) entre  $F_1$  y  $F_2$ , donde ahora no hay dependencia explícita en  $x$ . Además hay nuevas relaciones para el resto de las funciones de estructura. Es en particular interesante la relación que surge entre  $g_2$  y  $F_1$ , dado que en el modelo de partones teníamos que  $g_2$  es idénticamente nula,



lo que muestra cierta diferencia con QCD. Por otro lado, vemos que las funciones en general no cumplen la propiedad de *escaleo*, ya que dependen explícitamente de  $q^2$ .

Si consideramos que para el blanco escalar  $\tau = \Delta$ , vemos que el resultado para  $F_2$  es análogo en el caso escalar y en el caso espinorial, lo cual es esperable dado que  $F_2$  da la información del partón independiente del espín. Además es interesante notar que la expresión para todas las funciones de estructura depende de  $(\Lambda^2/q^2)^{\tau-1}$ .

Desde el punto de vista de teoría de cuerdas, uno esperaría en forma naive que la amplitud hallada decaiga exponencialmente con  $q^2$ , dado que la cuerda no tiene partones. Sin embargo, la presencia de curvatura hace que esto no sea cierto, generando la ley de potencias encontrada. En forma pictórica Polchinski y Strassler proponen que este comportamiento se puede entender de la siguiente manera: la tensión de la cuerda se comporta como  $T = \tilde{T}R^2/z^2$ , donde  $\tilde{T}$  es la tensión de la cuerda vista desde un sistema inercial en diez dimensiones mientras que  $T$  es la tensión medida desde las coordenadas en cuatro dimensiones  $x^\mu$ . La tensión en cuatro dimensiones disminuye como  $z^2$ , lo cual hace que la longitud característica de la cuerda en el espacio de cuatro dimensiones decrezca al ritmo de  $z$ , mientras que es constante para un observador inercial en diez dimensiones. En la figura 3.3 se muestra una idea de este proceso. Debido a esto, la forma la forma más eficiente para que la cuerda realice una dispersión *hard* es que llegue mediante el efecto túnel a un  $z$  tal que su tamaño sea del orden de la transferencia de momento, lo cual tiene un coste en forma de ley de potencias con la dimensión conforme del estado.

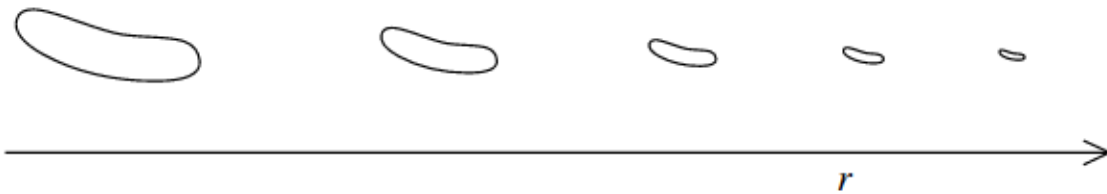


Figura 3.3: El tamaño de la cuerda es distinto para un observador parado en distintas posiciones en la dirección radial  $r = R^2/z$ , sin embargo todas las cuerdas dibujadas tienen el mismo tamaño para un observador inercial en diez dimensiones. Aquí  $r \rightarrow \infty$  corresponde al borde del  $AdS_5$ . La figura fue tomada de [12].

Una diferencia importante entre el modelo partónico y el resultado que encontramos en esta sección está relacionado con el tipo de interacción que el hadrón tiene con el fotón. En la dispersión inelástica el fotón virtual podría interactuar con una fracción del hadrón total, de hecho en el límite de partones el fotón podría impactar a un solo partón. La probabilidad de que un partón sea pequeño mientras el resto del hadrón sea grande es claramente mayor que la probabilidad de que todo el hadrón sea pequeño, por lo que dominaría esta colisión monopartónica. Sin embargo desde el punto de vista de la teoría de cuerdas, la probabilidad de que una fracción pequeña de la cuerda tenga un valor chico de  $z$  mientras el resto de la cuerda tiene un valor grande está totalmente suprimida, lo que implica que el hadrón en cuatro dimensiones no contiene partones puntuales para valores grandes la variable de 't Hooft. Esto se ve reflejado en el tipo

de interacción de la figura 3.2.

En las siguientes secciones estudiaremos cómo se modifica el DIS al empezar a considerar regiones con menor valor de la variable de Bjorken. Mostraremos resultados originales para las funciones de estructura de los blancos de espín  $1/2$ , así como el cálculo original de las funciones antisimétricas para ambos tipos de blanco.

**Parte II**

**Contribuciones originales**



## Capítulo 4

# Régimen $x$ chico

Nos enfocaremos ahora en el régimen del DIS holográfico que corresponde a la región paramétrica  $e^{-\sqrt{\lambda}} \ll x \ll 1/\sqrt{\lambda}$ , con el objetivo principal de calcular las funciones de estructura para blancos de espín 0 y 1/2. Estudiar este régimen implicará realizar el cálculo de amplitudes de dispersión de cuerdas cerradas, así como algunos cálculos de supergravedad que permitirán tener un mejor entendimiento del proceso.

Las amplitudes que nos serán de interés son las que involucran cuatro estados de supercuerdas cerradas. Esto se debe a que los estados entrantes y salientes vienen dados por dos fotones y dos dilatones (o dilatinos). Estas amplitudes pueden calcularse como el producto de dos factores [35]

$$\mathcal{A}_{close}^{(4)} = \mathcal{G} \times \mathcal{K}_{close}^{(4)}, \quad (4.1)$$

siendo  $\mathcal{K}_{close}$  el factor puramente cinemático, con la información de los momentos y las polarizaciones de los estados entrantes y salientes, mientras que el prefactor  $\mathcal{G}$  tiene la información de la expansión en potencias de  $\alpha'$  respecto de las variables de Mandlestam en diez dimensiones  $\tilde{s}$ ,  $\tilde{t}$  y  $\tilde{u}$ , según

$$\mathcal{G}(\alpha', \tilde{s}, \tilde{t}, \tilde{u}), = -\frac{\alpha'^3}{64} \frac{\Gamma(-\alpha'\tilde{s}/4)\Gamma(-\alpha'\tilde{t}/4)\Gamma(-\alpha'\tilde{u}/4)}{\Gamma(1 + \alpha'\tilde{s}/4)\Gamma(1 + \alpha'\tilde{t}/4)\Gamma(1 + \alpha'\tilde{u}/4)}. \quad (4.2)$$

En el régimen actual el proceso de DIS impone restricciones sobre las variables de Mandlestam más fuertes que para el caso de  $x$  grande. Dado que  $x \ll 1$ , tenemos

$$-\frac{q^2}{2P \cdot q} \ll 1 \Rightarrow -q^2 \approx \tilde{t} \ll 2P \cdot q \approx \tilde{s},$$

por lo que las variables cumplen ahora las relaciones

$$\tilde{t} \rightarrow 0, \quad \tilde{s} \simeq -\tilde{u} \rightarrow \infty, \quad (4.3)$$

que deben ser tenidas en cuenta a la hora de computar tanto el factor cinemático como el prefactor.

El resultado de (4.1) es válido para amplitudes de cuerdas cerradas en espacio plano. Extender este resultado al caso de espacios curvos no es nada trivial, sin embargo, como explicamos ya en la sección 3.1 del capítulo anterior, en el régimen actual podemos considerar la aproximación local. Para ello es necesario primero construir un *lagrangiano efectivo* asociado a la amplitud de cuerdas, es decir, aquel lagrangiano desde el cual se reobtiene la amplitud ya calculada. Luego, la aproximación local involucra evaluar dicho lagrangiano en las soluciones pertenecientes al espacio curvo e integrar sobre todo el  $AdS_5 \times S^5$ . El resultado final es una acción efectiva  $S_{\text{eff}}$  con la información del proceso dual al DIS en el espacio de diez dimensiones curvo.

En el régimen de supergravedad para obtener el tensor hadrónico calculamos la función de un punto de la corriente en forma dual, y luego sumamos los estados intermedios a mano. Sin embargo, en el régimen actual el tensor hadrónico dual se obtiene en forma directa al tomar la parte imaginaria de la acción efectiva [71]. Siguiendo el *Ansatz* de la ecuación (3.3) tenemos en este régimen

$$n_\nu n_\mu \text{Im} [T^{\mu\nu}] = \text{Im} [S_{\text{eff}}] |_{\tilde{t} \rightarrow 0}, \quad (4.4)$$

donde el límite de  $\tilde{t} \rightarrow 0$  denota las condiciones de la ecuación (4.3). En dicho límite el prefactor toma la forma

$$\text{Im}_{\text{exc}} [\mathcal{G}(\alpha', \tilde{s}, \tilde{t}, \tilde{u}) \tilde{s}^2] |_{\tilde{t} \rightarrow 0} = \frac{\pi\alpha'}{4} \sum_{m=1}^{\infty} \delta\left(m - \frac{\alpha'\tilde{s}}{4}\right) (m)^{\alpha'\tilde{t}/2}, \quad (4.5)$$

donde la delta selecciona la masa de la torre de estados de cuerdas, mientras que el segundo factor da el comportamiento de Regge de la amplitud de cuerdas. Es este último factor el que obliga a separar el régimen de  $x$  chico con el de  $x$  exponencialmente chico. Esto se debe a que, como veremos en el siguiente capítulo,  $\tilde{t}$  no es exactamente cero, sino que es proporcional a la variable en cuatro dimensiones (que cumple  $t = 0$ ) más un operador diferencial asociado al laplaciano en la dirección radial. El comportamiento del invariante en diez dimensiones resulta ser<sup>1</sup>:  $\alpha'\tilde{t} \sim \lambda^{-1/2}$ , lo que implica que cuando  $\alpha'\tilde{t} \log(\alpha'\tilde{s}) \gtrsim 1$ , o equivalentemente  $x \sim e^{-\sqrt{\lambda}}$ , el segundo término de (4.5) debe ser incluido. De todos modos para el régimen de este capítulo podemos considerar que  $\alpha'\tilde{t} \rightarrow 0$  e ignorar dicha contribución.

De esta forma tenemos todos los ingredientes necesarios para poder obtener las funciones de estructura. Solo hace falta estudiar los procesos que resultan de interés para el DIS y calcular el factor cinemático asociado.

A diferencia del régimen  $1/\sqrt{\lambda} \ll x < 1$ , el proceso de DIS tendrá ahora dos amplitudes asociadas. Esto se debe a que el gravifotón está compuesto por una combinación lineal de modos del gravitón y de la 5-forma. Según el modo que se considere se obtendrá una acción efectiva simétrica o antisimétrica, de donde se podrán obtener las funciones de estructura correspondientes. En el caso de  $x$  grande no había distinción alguna en el procedimiento y solo había que relacionar cada término de la función de dos puntos con los términos de la descomposición del tensor hadrónico. Esta es una diferencia importante y es parte de los resultados originales de esta tesis.

<sup>1</sup>Esta relación surge tras hacer un análisis análogo al de la ecuación (3.14).

## Método formal y método heurístico

En [71] Polchinski y Strassler calcularon las funciones de estructura simétricas en  $x$  chico para el caso del dilatón. Esto lo hicieron calculando la amplitud de cuerdas cerradas de dos gravifotones (modos de NS-NS) a dos dilatones (modos de NS-NS también). A raíz de este resultado, puede verse que hay un método menos formal pero más directo para obtener la misma acción efectiva sin tener que pasar por el formalismo de cuerdas. A este método se lo denominó “heurístico” y es parte de los resultados de las publicaciones que dan lugar a esta tesis [23, 24]. El mismo consiste en computar la amplitud de dispersión de los mismos estados pero en el régimen de supergravedad, donde la consideración de estar trabajando a altas energías se hace al tomar el diagrama del canal  $t$  como dominante, intercambiando un estado en particular. Luego, la aproximación local es tomada ‘a mano’, reemplazando la estructura no tensorial del propagador del estado intermedio por el prefactor de la teoría de cuerdas. Esto lleva al mismo resultado para la acción efectiva, como se mostrará en las siguientes secciones.

La ventaja de este método, además de ser más sencillo de calcular, es que permite entender rápidamente si se está calculando la contribución simétrica o antisimétrica de la amplitud, dado que toda la dependencia está en la naturaleza del estado que se intercambia.

Claro está que este método es menos formal, por lo que en cada caso se calculó además la amplitud de cuerdas asociada, corroborando que el resultado fuera el mismo.

Con el fin de obtener las funciones de estructura del glueball y del glueballino en este régimen, el resto del capítulo se repartirá entre los siguientes cálculos: obtener las amplitudes simétricas y antisimétricas, tanto en el formalismo de cuerdas como con el método heurístico, para el dilatón y para el dilatino. Se comenzará por el dilatón haciendo énfasis en los pasos necesarios, y en la segunda parte se repetirán los cálculos para el dilatino mostrando mayormente las diferencias centrales con el cálculo anterior.

## 4.1. Blanco escalar: Dilatón

El caso del dilatón fue estudiado primero por Polchinski y Strassler [12], quienes computaron la contribución simétrica de la amplitud de dispersión, obteniendo de esta forma las funciones de estructura  $F_1$  y  $F_2$  asociadas al glueball.

El dilatón, al ser un campo escalar, es representado como un estado de cuerdas cerradas asociados a modos de NS-NS. Dicho estado representa el campo en diez dimensiones, por lo que luego es reducido en modos de KK sobre la 5-esfera para obtener los campos en  $AdS_5$ .

Por otro lado, los otros dos estados vienen dados por el gravifotón. Como discutimos en el capítulo 3, este gravifotón surge como una combinación lineal de perturbaciones del gravitón y de la 4-forma de R-R. Esto permite escribir dos tipos de amplitudes de dispersión si consideramos los dos modos asociados al gravifotón: aquellas con dos estados de NS-NS, asociados a la perturbación de la métrica, y otra con dos

estados de R-R, asociados a la perturbación de la 4-forma<sup>2</sup>.

Recordemos que al tratarse de un blanco escalar, solo es necesario computar tres funciones de estructura para determinar el tensor hadrónico, según (2.17), por lo que además de las dos funciones antes mencionadas, resta obtener la función de la parte antisimétrica  $F_3$ . Este punto puede sonar controversial, ya que estamos estudiando en forma holográfica el DIS electromagnético, y uno no esperaría a priori obtener contribuciones antisimétricas para una partícula escalar. Esto solo es cierto en teorías como QCD acoplada a QED, donde la interacción de campos de materia con el fotón no viola paridad, por lo que en el DIS electromagnético obtendríamos  $F_3 = 0$ . Sin embargo, tenemos que recordar que aquí estamos trabajando con  $\mathcal{N} = 4$  SYM, y que esta teoría, como vimos en el capítulo 1 es una teoría quiral.

Por último, vimos en el capítulo 3 sección 3.3 que en  $x \sim 1$  no hay contribuciones a la función  $F_3$  (al menos a primer orden en comparación con  $F_1$  y  $F_2$ ), sin embargo en este nuevo régimen veremos que es posible obtener funciones antisimétricas. La existencia de esta de función antisimétrica se puede entender de dos maneras. Por un lado, se debe a la presencia del término de Chern-Simons en en la acción de supergravedad (3.27). Este término, que permite el intercambio en el canal  $t$  de un campo de *gauge* distinto al fotón  $A_\mu^3$ , está acompañado por el tensor de Levi-Civita, rompiendo explícitamente la simetría de paridad. Por otro lado, desde el punto de vista de las amplitudes de dispersión de cuerdas cerradas, la violación de paridad proviene de considerar la amplitud con estados de R-R, cosa que Polchinski y Strassler no hicieron en [12].

#### 4.1.1. Contribución simétrica

Esta subsección cuenta con dos partes. En la primera seguiremos los pasos de [12] para calcular las funciones simétricas del dilatón, mientras que en la segunda mostraremos que estos mismos cálculos pueden realizarse con un método más sencillo presentado por primera vez en forma indirecta en [16] y desarrollado luego en forma precisa en [23].

#### Método desde teoría de cuerdas

En primer lugar queremos calcular la amplitud de cuerdas cerradas en espacio plano de diez dimensiones que involucre cuatro modos de NS-NS, a los que luego asignaremos la polarización adecuada para relacionarlos con los modos del dilatón  $\Phi$  y del gravitón  $h$ , relacionado a su vez con el fotón. Siguiendo (4.1), formalmente queremos obtener la amplitud

$$\mathcal{A}(h^{(1)}, h^{(2)}, \Phi^{(3)}, \Phi^{(4)}) = \mathcal{G}(\alpha', \tilde{s}, \tilde{t}, \tilde{u}) \mathcal{K}_{cl}(1, 2, 3, 4), \quad (4.6)$$

donde  $k_i$  representan los momentos en diez dimensiones, y donde los invariantes de Mandelstam vienen dados por

$$\tilde{s} = -(k_1 + k_4)^2, \quad \tilde{t} = -(k_1 + k_2)^2, \quad \tilde{u} = -(k_1 + k_3)^2. \quad (4.7)$$

---

<sup>2</sup>No es necesario considerar casos donde los estados entrantes sean uno NS-NS y otro de R-R, pues esto viola la conservación de la cantidad de modos del sector de Ramond, dado que los otros dos modos asociados al dilatón provienen del sector NS-NS.



El factor cinemático puede escribirse en función del producto de dos factores de cuerdas abiertas  $K_{op}$ , a partir de las relaciones de KLT que asocian las amplitudes de cuerdas cerradas con el producto de dos amplitudes de cuerdas abiertas [74]. En este caso tenemos

$$K_{cl}(1, 2, 3, 4) = K_{op}(1, 2, 3, 4) \otimes K_{op}(1, 2, 3, 4), \quad (4.8)$$

con el factor cinemático de la cuerda abierta con polarización  $\xi_i^M$  dado por

$$K_{op}(1, 2, 3, 4) = -\frac{1}{4} (\tilde{s}\tilde{t}(\xi_1 \cdot \xi_4)(\xi_2 \cdot \xi_3) + \tilde{s}\tilde{u}(\xi_1 \cdot \xi_2)(\xi_3 \cdot \xi_4) + \tilde{t}\tilde{u}(\xi_1 \cdot \xi_3)(\xi_2 \cdot \xi_4) + \dots) . \quad (4.9)$$

donde los puntos indican términos que son de menor orden en el régimen actual. Tomando el producto de este término podemos construir las polarizaciones asociadas al gravitón y al dilatino según [75]

$$\xi_i^M \otimes \xi_i^N \equiv h_i^{MN}, \quad \xi_i^M \otimes \xi_i^N \equiv \sqrt{\frac{1}{8}} \Phi_i (\eta^{MN} - k_i^{(M} k_i^{N)}) . \quad (4.10)$$

Luego, evaluando la amplitud en  $\tilde{t} \rightarrow 0$ , y usando que  $\tilde{s} = -\tilde{u}$ , el factor cinemático resulta

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{cl}(1, 2, 3, 4)|_{\tilde{t} \rightarrow 0} &= i\kappa_{10}^2 \Phi_2 \Phi_4 \tilde{s}^2 \{ \tilde{s}^2 (h_1 \cdot h_3) + 2\tilde{s} [(k_3 \cdot h_1 \cdot h_3 k_2) + (k_4 \cdot h_1 \cdot h_3 \cdot k_1) \\ &\quad - (k_3 \cdot h_1 \cdot h_3 \cdot k_4) - (k_2 \cdot h_1 \cdot h_3 \cdot k_1)] + \dots \}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

donde la notación implica la contracción de índices según:  $(h_1 \cdot h_3) = (h_1^{MN} h_{3MN})$  y  $(k_i \cdot h_1 \cdot h_3 \cdot k_j) = (k_{iM} h_1^{MN} h_{3NP} k_j^P)$ , y donde los puntos indican términos subdominantes en  $\tilde{s}$ .

El siguiente paso es construir el lagrangiano efectivo cuya amplitud devuelva el resultado recién obtenido. Esto se logra reemplazando los momentos  $k_i$  por las correspondientes derivadas. Finalmente, multiplicando por el prefactor y evaluando la polarización del gravitón según la perturbación  $h \sim Av$  dada en (3.2), e integrando en todo el  $AdS_5 \times S^5$  se obtiene la acción efectiva simétrica del dilatón. Para asociarla con el proceso del FCS del dilatón tomamos la parte imaginaria, obteniendo

$$\begin{aligned} S_{\text{eff}, \phi}^{(S)} &= \kappa_5^2 \text{Im} [\mathcal{G}(\alpha', \tilde{s}, \tilde{t} \rightarrow 0, \tilde{u}) \tilde{s}^2] \times \\ &\quad \int d^5 \Omega \sqrt{g_{S_5}} \int d^5 x \sqrt{g_{AdS}} \left[ \frac{1}{2} v^a v_a \partial^{(m} \Phi^* \partial^{p)} \Phi F_m^n F_{pn} + \dots \right], \end{aligned} \quad (4.12)$$

donde los puntos indican términos subdominantes en potencias de  $\tilde{s}$ , que terminan contribuyendo también en forma subdominante a las funciones de estructura, y por lo tanto no nos resultan de interés.

Notar que en (4.12) todavía no hemos descompuesto el campo del dilatón según (3.6), si lo hacemos, nos queda la integral angular

$$\int d^5 \Omega \sqrt{g_{S_5}} v^a v_a |Y|^2 = R^2 C_\Omega \quad (4.13)$$

donde  $C_\Omega$  es una constante, y (4.12) queda escrita en función del dilatón en cinco dimensiones  $\phi(x)$ .

De esta forma pudimos obtener la acción efectiva desde el cálculo de amplitudes de dispersión de cuerdas cerradas, con la que luego calcularemos las funciones de estructura.

### Método heurístico

Procederemos ahora a obtener nuevamente la acción efectiva (4.12) con un método que no involucra en forma directa el cálculo de la amplitud de cuerdas cerradas. Los indicios de este método fueron indicados primero en [16], donde los autores estaban estudiando el *Non-forward Compton Scattering* en el régimen de supergravedad, para lo que calcularon la amplitud de cada diagrama y notaron que la estructura del diagrama del canal  $t$  era similar a la del lagrangiano efectivo con el que se construye (4.12).

La idea es calcular la amplitud de dispersión de dos dilatones a dos fotones en la teoría de supergravedad *gaugeada* en cinco dimensiones. Esta amplitud corresponde al diagrama nivel árbol en el canal  $t$ , puesto que estamos en el régimen de altas energías.

El punto de partida es la acción de supergravedad (3.27) considerando los términos que poseen al dilatón. Naturalmente hay un conjunto de campos que podrían intercambiarse conectando los dos fotones con los dos dilatones. La energía de este proceso va como  $s^j$  [76, 77, 78], donde  $j$  es el espín, por lo que tomaremos ahora la contribución dominante dada por un campo de espín 2, es decir el gravitón<sup>3</sup>. Como este campo es simétrico, el diagrama llevará a una amplitud simétrica respecto de los índices de Lorentz.

Como estamos trabajando directamente en la teoría de cinco dimensiones debemos considerar al dilatón  $\phi(x)$  como blanco, ignorando los modos de KK de la  $S^5$ , y tomaremos al fotón  $A_m^3$  asociado a la simetría de *gauge*  $U(1)$  como el campo con el que interactúa. El diagrama asociado se puede ver en la figura 4.1.

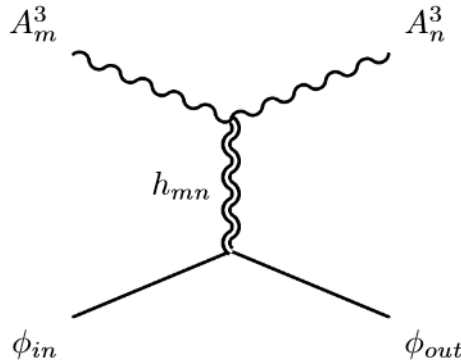


Figura 4.1: Diagrama de Feynman de supergravedad a nivel árbol en el canal  $t$ , asociado a la contribución del intercambio de un gravitón en el proceso holográfico de DIS(FCS) para  $x$  chico.

La amplitud de supergravedad puede calcularse fácilmente si tenemos en cuenta que el gravitón se

<sup>3</sup>Aquí estamos hablando del gravitón en cinco dimensiones  $h_{mn}$ , no del gravifotón que proviene de perturbar la métrica en diez dimensiones.

acopla al tensor de energía-momento de los campos,

$$\mathcal{A} = \kappa_5^2 \int d^5x d^5x' T_{mn}^\phi(x) G^{mnlk}(x, x') T_{mn}^A(x'), \quad (4.14)$$

donde el propagador del gravitón en  $AdS_5$  puede expresarse como<sup>4</sup> [79, 78]

$$G^{mnlk}(x, x') = \left( g^{mk} g^{nl} + g^{ml} g^{nk} - \frac{2}{3} g^{mn} g^{kl} \right) G_{\text{grav}}(x, x'), \quad (4.15)$$

donde  $G_{\text{grav}}(x, x')$  es una función que no será relevante en este caso, mientras que los tensores de energía-momento del dilatón y del fotón vienen dados por

$$\begin{aligned} T_{mn}^\phi &= (g_{m\alpha} g_{n\beta} + g_{m\beta} g_{n\alpha} - g_{mn} g_{\alpha\beta}) \partial^\alpha \phi^* \partial^\beta \phi, \\ T_{kl}^A &= g^{\rho\sigma} F_{k\rho} F_{l\sigma} - \frac{1}{4} g_{kl} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

La contracción de estos tensores resulta en

$$T_{mn}^\phi(x) G^{mnlk}(x, x') T_{kl}^A(x') = G_{\text{grav}}(x, x') \left[ 4 \partial^{(k} \phi^*(x) \partial^{l)} \phi(x) F_{k\rho}(x') F_{l\sigma}(x') g^{\rho\sigma} + \dots \right], \quad (4.17)$$

donde los puntos indican términos que van como  $(F_{\mu\nu}^2)$  y que resultan subdominantes<sup>5</sup>. Podemos notar que la estructura de campos e índices es idéntica a la del lagrangiano efectivo de (4.12) proveniente de la amplitud de cuerdas. Para que el resultado coincida exactamente, es necesario evaluar todos los campos en el mismo punto  $x$ , es decir considerar la aproximación de que la interacción es local, y agregar el prefactor de cuerdas. En forma heurística este paso se podría hacer tomando el siguiente cambio en la expresión (4.17)

$$G_{\text{grav}}(x, x') \rightarrow \delta^5(x - x') \mathcal{G}(\alpha', \tilde{s}, \tilde{t} \rightarrow 0, \tilde{u}) \tilde{s}^2, \quad (4.18)$$

además de agregar la constante  $C_\Omega$  que proviene de integrar sobre la  $S^5$ . Tras tomar la parte imaginaria se llega exactamente a la misma expresión que en (4.12).

Antes de pasar a la siguiente sección haremos un breve comentario sobre la identificación (4.18). El prefactor surge en forma natural al considerar la amplitud de cuerdas, pero esto no es posible desde supergravedad. En cierta medida, considerar este término está relacionado con tener en cuenta la posibilidad de intercambiar una torre de estados de cuerdas excitados, en lugar de simplemente el gravitón. Por otro lado, dado que  $G_{\text{grav}}(x, x') \propto 1/\tilde{t}$ , tiene sentido reemplazarlo por  $\mathcal{G}\tilde{s}^2$ , ya que en el límite  $\tilde{t} \rightarrow 0$  tiene la misma dependencia [12].

En cuanto a considerar la delta, la idea es seguir el espíritu de las acciones efectivas en la aproximación local. Esto solo es válido siempre que se trabaje en escalas de energía mayores que el radio de curvatura.

Más allá de la formalidad del método, podemos obtener en forma inmediata y sin tener que considerar las amplitudes relacionadas, la acción efectiva buscada.

<sup>4</sup>En lo que resta de esta sección usaremos  $g \equiv g_{AdS}$ .

<sup>5</sup>Esto se ve explícitamente al reemplazar los campos por sus soluciones en el  $AdS_5$  y hacer el conteo en potencias de  $\tilde{s}$  y  $\tilde{t}$ .

### 4.1.2. Funciones de estructura simétricas (blanco de espín 0)

En esta sección calcularemos en forma holográfica las funciones de estructura simétricas del glueball, asociadas al proceso de FCS del dilatón. El punto de partida es la acción efectiva (4.12) calculada en las secciones anteriores, que debe ser comparada con el tensor hadrónico según

$$S_{\text{eff}}^{(S)} \equiv n_\mu n_\nu^* \text{Im} \left[ T_{(S)}^{\mu\nu} \right] = \frac{1}{2\pi} \left[ W_{(S)}^{\mu\nu} \right]. \quad (4.19)$$

Los campos de *gauge* entrantes y salientes vienen dados nuevamente por (3.5), mientras que la solución del dilatón es (3.7), pero al igual que en el caso de  $x$  grande, podemos considerar la aproximación cerca del borde (3.29).

Dado que estamos en el régimen de  $x$  chico, podemos expandir el prefactor en los límites  $\tilde{t} \rightarrow 0$  y  $\tilde{s} \rightarrow \infty$ , y al tomar la parte imaginaria obtenemos el resultado de (4.5) ignorando el término local  $(m)^{\alpha' \tilde{t}/2}$ . Tomando el cambio de variables  $w = qz$  la suma proveniente de la expansión del prefactor puede expresarse como

$$\sum_m \delta \left( m - \frac{\alpha' \tilde{s}}{4} \right) = \sum_{\omega_m} \left( \frac{2q^2 R^2}{\alpha' s \omega} \right) \delta(\omega - \omega_m), \quad \omega_m^2 \equiv m \frac{2R^2 q^2}{\alpha' s}, \quad (4.20)$$

lo que permite realizar la integral radial de la acción efectiva. En (4.20) hemos usado que la variable de Mandelstam en diez dimensiones se relaciona con la de la teoría de campos según

$$\alpha \tilde{s} = \alpha' s \frac{z^2}{R^2} + \frac{\alpha'}{R^2} (\nabla_z^2 + \nabla_{S^5}^2) \approx \alpha' s \frac{z^2}{R^2}, \quad (4.21)$$

ya que en el límite de curvatura grande todos los campos son suaves en la dirección radial y por lo tanto  $z \partial_z = O(1)$ , mientras que el laplaciano adimensional en la esfera también puede ser considerado de  $O(1)$ .

Utilizando (4.19) el tensor hadrónico resulta

$$\begin{aligned} n_\mu n_\nu^* W_{(S)}^{\mu\nu} &= \frac{\pi C_\Omega |c_i|^2}{4} \left( \frac{\Lambda^2}{q^2} \right)^{\Delta-1} \sum_{m=1}^{\infty} w_m^{2\Delta+2} \left\{ \frac{1}{x} K_1^2(w_m) n^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{4x}{q^2} [K_0^2(w_m) + K_1^2(w_m)] (P \cdot n)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

El argumento de las funciones Bessel es  $w_m \sim x^{1/2} m^{1/2} / \lambda^{1/4}$ , por lo que cuando  $x \ll \lambda^{-1/2}$  la suma en  $m$  puede ser aproximada por una integral. Las mismas están dadas por

$$I_{j,n} = \int_0^\infty dw w^n K_j^2(w) = 2^{n-1} \frac{\Gamma(\nu+j)\Gamma(\nu-j)\Gamma(\nu)^2}{\Gamma(2\nu)}, \quad \nu = \frac{1}{2}(n+1), \quad (4.23)$$

y nuestro caso de interés cumple  $I_{1,n} = \frac{n+1}{n-1}I_{0,n}$ . Comparando el resultado de la ecuación (4.22) con la expresión del tensor hadrónico para blancos de espín 0 (2.17) obtenemos las funciones de estructura

$$\begin{aligned} F_1(x, q^2) &= \frac{1}{x^2} \left( \frac{\Lambda^2}{q^2} \right)^{\Delta-1} \frac{\pi^2 C_\Omega |c_i|^2}{4\sqrt{4\pi\lambda}} I_{1,2\Delta+3}, \\ F_2(x, q^2) &= 2x \frac{2\Delta+3}{\Delta+2} F_1(x, q^2). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Resulta interesante estudiar este resultado en función de lo hallado en el régimen de supergravedad (3.35). Podemos ver que la dependencia en  $\Lambda/q$  es la misma, teniendo una potencia de  $2\Delta - 2$ . La dependencia en el parámetro de Bjorken  $x$  sin embargo es totalmente distinta, siendo dominante cuando  $x \rightarrow 0$  como era de esperar al introducir correcciones en la región de  $x$  chico. Por otro lado, obtenemos en este régimen una nueva relación tipo Callan-Gross entre  $F_1$  y  $F_2$  que involucra la dimensión conforme de los operadores. Además, a diferencia del caso de supergravedad, no hay una dependencia explícita en la carga  $Q$  del hadrón, lo cual se asemeja a QCD: la nube de partones es universal y no depende de los números cuánticos del hadrón.

Con este resultado hemos concluido el estudio de las funciones simétricas del glueball. Resta ahora realizar los cálculos que involucren términos antisimétricos para encontrar la contribución a  $F_3$  en este régimen.

### 4.1.3. Contribución antisimétrica

En esta subsección mostraremos resultados originales obtenidos en [23], que nos permitirán calcular la función de estructura antisimétrica del glueball de la teoría  $\mathcal{N} = 4$  SYM con grupo de *gauge*  $SU(N)$  y grupo de simetría  $R$   $SU(4)_R$ . La idea central se basa en considerar la propagación de un campo de *gauge*  $A_m^C$  del  $SU(4)_R$ , distinto al modo particular asociado al fotón  $A_m^3$ .

Al igual que en el caso simétrico, llegaremos a la acción efectiva desde el camino formal de teoría de cuerdas y desde el método heurístico. Pero a diferencia del caso anterior, estudiaremos primero el método heurístico ya que da una idea intuitiva de la física del problema.

#### Método heurístico

Hasta ahora hemos estudiado el intercambio en el canal  $t$  del gravitón, que da la mayor contribución en energías del proceso, ya que el mismo va como  $s^j$ . El siguiente paso sería considerar el intercambio de un campo vectorial, es decir  $j = 1$ . Estos campos son los campos de *gauge* asociados a la simetría  $R$ , y darán lugar a las contribuciones dominantes de las funciones de estructura antisimétricas.

La interacción entre tres campos de *gauge* está regulada por el término de Chern-Simons presente en la acción de supergravedad *gaugeada* (3.27) estudiada en el capítulo 3. Dado que los estados entrante y saliente que provienen del borde del  $AdS_5$  son dos fotones  $A^3$ , nos queda como tercer estado un bosón  $A^C$  propagándose en el *bulk*, el cual se acopla a la corriente no-abeliana de los dilatones. Supondremos por el momento que esta corriente tiene una carga asociada  $Q^C$ . Esta carga aparece en forma explícita si

pedimos que los armónicos escalares que aparecen en la descomposición del dilatón en diez dimensiones, dada en (3.6), cumplan ser autoestados de los tres generadores diagonales<sup>6</sup>  $K^C$  de la simetría  $SO(6)$ :

$$K^C Y(\Omega) = K_a^C \partial^a Y(\Omega) = -Q^C Y(\Omega). \quad (4.25)$$

Luego debemos confirmar que estos son los únicos generadores que pueden aparecer, ya que para un generador arbitrario  $K^D$  la ecuación (4.25) no es válida en general.

La amplitud que queremos calcular entonces cuenta con un fotón y un dilatón como estados entrantes/salientes, y un campo de *gauge* genérico (sobre el que hay que sumar) como estado intercambiado. El diagrama de Feynman asociado se puede ver en la figura 4.2.

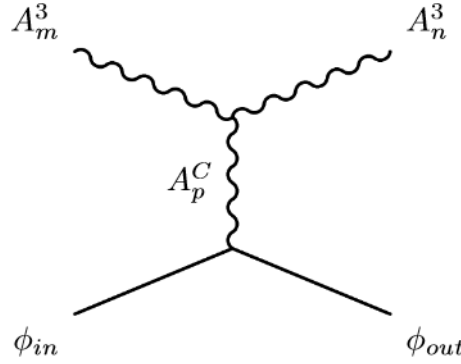


Figura 4.2: Diagrama de Feynman asociado a la contribución del intercambio de un campo de *gauge* en el proceso de DIS(FCS) para *x* chico.

Para calcular la amplitud de dispersión de supergravedad necesitamos tres ingredientes

$$\mathcal{A} = \kappa_5^2 \int d^5 x d^5 x' \mathcal{J}_C^m(x) G_{mn}^{CD}(x, x') J_D^n(x'), \quad (4.26)$$

donde  $\mathcal{J}_C^m$  es la corriente de Chern-Simons y  $J_D^n$  es la corriente del dilatón asociada al  $SU(4)_R$ . Las mismas vienen dadas por

$$\mathcal{J}_C^m(x) = \frac{i}{6} d_{ABC} \varepsilon^{mnopq} \partial_n A_o^A \partial_p A_q^B, \quad J_D^n(x') = -Q_D (\phi \partial^n \phi^* - \phi^* \partial^n \phi). \quad (4.27)$$

El propagador intermedio corresponde al de un campo de *gauge* en  $AdS_5$ , que puede expresarse como<sup>7</sup>

$$G_{mn}^{CD}(x, x') = g_{mn} \delta^{CD} G_{\text{gauge}}(x, x'). \quad (4.28)$$

<sup>6</sup>Recordemos que de los 15 generadores hay tres que son diagonales,  $K^3$  asociado a la carga eléctrica, y luego  $K^8$  y  $K^{15}$ .

<sup>7</sup>Además de este término hay una componente adicional puramente de *gauge*, que no contribuye al proceso luego de ser integrado junto con la corriente conservada [78].

Teniendo en cuenta este término, la contracción es simplemente

$$\mathcal{J}_C^m(x) G_{mn}^{CD}(x, x') J_D^n(x') = \frac{i}{6} d_{ABC} \varepsilon^{mnopq} \partial_n A_o^A \partial_p A_q^B \mathcal{Q}^C (\phi \partial_m \phi^* - \phi^* \partial_m \phi) . \quad (4.29)$$

Como mencionamos anteriormente, el bosón entrante corresponde a un fotón  $A_m^3$  asociado al generador  $K_a^3$  de uno de los subgrupos  $U(1)$  del  $SU(4)_R$ . Esto fija el símbolo totalmente simétrico, dejando como único término relevante a la componente  $d_{33C}$ . Los únicos términos no nulos de esta componente son el  $d_{338}$  y  $d_{33,15}$ , asociados a los otros dos generadores diagonales  $K^8$  y  $K^{15}$ , por lo que es correcto suponer que la corriente del dilatón tiene una carga  $\mathcal{Q}^C$ .

Para obtener la función de estructura antisimétrica  $F_3(x, q^2)$  en el régimen actual resta construir el lagrangiano efectivo. Esto lo haremos igual que en el caso simétrico, partiendo de la estructura tensorial obtenida en (4.29) y luego agregando el prefactor  $\mathcal{G}(\alpha', \tilde{s}, \tilde{t}, \tilde{u})$  y una consante  $C_\Omega$  que proviene de integrar la  $S^5$ . De esta forma la acción efectiva antisimétrica del dilatón resulta

$$S_{\text{eff}, \phi}^{(A)} = -\frac{i}{6} d_{ABC} \mathcal{Q}^C \text{Im} [\mathcal{G}(\alpha', \tilde{s}, \tilde{t} \rightarrow 0, \tilde{u}) \tilde{s}^2] \kappa_5^2 C_\Omega \times \int d^5x \varepsilon^{mnopq} \partial_m A_n^{A*} \partial_o A_p^B (\phi \partial_q \phi^* - \phi^* \partial_q \phi) , \quad (4.30)$$

donde  $A = B = 3$  y  $C = 8, 15$  para el caso que nos interesa estudiar. Así tenemos construido en forma heurística la acción efectiva antisimétrica del dilatón, de donde podremos extraer luego la función  $F_3$ .

### Método desde teoría de cuerdas

Hemos entendido como surge desde el diagrama de supergravedad la contribución antisimétrica de la acción efectiva, viendo que se debe a la presencia del término de Chern-Simons. Ahora debemos verificar que esto es cierto desde la amplitud de cuerdas cerradas en la aproximación local.

En el caso simétrico calculamos la amplitud considerando dos fotones y dos dilatones. Esta amplitud tiene en cuenta los infinitos estados intermedios de la cuerda, contados por el prefactor. Entonces uno podría preguntarse por qué no surgió de forma natural el término antisimétrico. La respuesta está en como tomamos las polarizaciones de los estados de la cuerdas entrantes. Como vimos en el capítulo 3, ecuación (3.16), el fotón surge como una combinación lineal de perturbaciones de la métrica  $y$  de la 4-forma de Ramond-Ramond, por lo que el caso anterior solo está contando la mitad del proceso.

A su vez, el sector de R-R debe ser tenido en cuenta para que surga en cinco dimensiones el término de Chern-Simos de supergravedad *gaugeada*, asociando uno de los modos a la 4-forma. En el apéndice B mostramos cómo este término surge explícitamente de calcular la amplitud de dispersión de tres cuerdas cerradas, dos asociadas a modos de R-R y una a modos de NS-NS, en un fondo  $AdS_5 \times S^5$  donde luego la esfera es integrada.

Con el mismo espíritu consideraremos ahora la amplitud de dispersión de dos modos de R-R a dos modos de NS-NS, evaluando luego en las polarizaciones del fotón y del dilatón. El punto de partida es nuevamente la amplitud factorizada

$$\mathcal{A}(\mathcal{F}_5^{(1)}, \mathcal{F}_5^{(2)}, \Phi^{(3)}, \Phi^{(4)}) = \mathcal{G}(\alpha', \tilde{s}, \tilde{t}, \tilde{u}) \mathcal{K}_{cl}(1, 2, 3, 4) \quad (4.31)$$

donde los números en cursiva indican que son campos del sector R-R. El factor cinemático fue calculado en [75] y tiene la forma

$$\mathcal{K} = -80 \kappa_{10}^2 \tilde{s} \tilde{u} \Phi_3 \Phi_4 \mathcal{F}_{MM_1 \dots M_4}^{(1)} \mathcal{F}_N^{(2) M_1 \dots M_4} k_4^M k_4^N. \quad (4.32)$$

Como estamos en el régimen de *x* chico debemos considerar nuevamente el límite (4.3) de  $\tilde{t} \rightarrow 0$ , que es trivial para este término, salvo por la consideración de intercambiar  $\tilde{u} = -\tilde{s}$ . El lagrangiano efectivo resulta

$$\mathcal{L}_{\mathcal{F}_5 \mathcal{F}_5 \phi \phi} = -20 \kappa_{10}^2 [\mathcal{G}(\alpha', \tilde{s}, \tilde{t} \rightarrow 0, \tilde{u}) \tilde{s}^2] \mathcal{F}_{MM_1 \dots M_4} \mathcal{F}_N^{M_1 \dots M_4} \partial^{(M} \Phi \partial^{N)} \Phi. \quad (4.33)$$

A continuación debemos evaluar el lagrangiano efectivo en los campos del  $AdS_5$ , tomando la perturbación de la 4-forma con un índice en el  $AdS$  y el resto en la 5-esfera. Podemos escribir dicha perturbación según [72]

$$a_{mabc} = A_m^B Z_{abc}^B, \quad \text{con } Z_{abc}^A \equiv \epsilon_{abcde} \nabla^d K^{eA}, \quad (4.34)$$

donde  $\nabla_a$  es la derivada covariante en la  $S^5$ , y el tensor de Levi-Civita viene dado por

$$\epsilon_{abcde} = \sqrt{g_{S^5}} \varepsilon_{abcde}, \quad \epsilon^{abcde} = \frac{1}{\sqrt{g_{S^5}}} \varepsilon^{abcde},$$

con  $\varepsilon$  el símbolo totalmente antisimétrico que cumple  $\varepsilon_{12345} = \varepsilon^{12345} = 1$ .

Una vez evaluado en la perturbación se obtiene un lagrangiano efectivo de la forma

$$[\mathcal{G}(\alpha', \tilde{s}, \tilde{t} \rightarrow 0, \tilde{u}) \tilde{s}^2] \kappa_5^2 \sqrt{g_{S^5}} \left( \epsilon^{abcde} \nabla_a K_b^A \nabla_c K_d^B \right) (\varepsilon^{mnpq} \partial_m A_n^A \partial_o A_p^B) \partial_{(e} \Phi \partial_{q)} \Phi. \quad (4.35)$$

El primer término entre paréntesis se puede reescribir usando la siguiente propiedad de los vectores de Killing de la esfera

$$\epsilon^{abcde} \nabla_a K_b^A \nabla_c K_d^B = \frac{4i}{R} d_{ABC} K_C^e, \quad (4.36)$$

que se deriva de la ecuación (A.8) del apéndice A. Finalmente usando la descomposición del dilatón  $\Phi$  en diez dimensiones (3.6) y la ecuación de autovalores (4.25) se obtiene que

$$\left( \epsilon^{abcde} \nabla_a K_b^A \nabla_c K_d^B \right) \partial_{(e} \phi \partial_{q)} \phi^* = \frac{4i}{R} d_{ABC} K_e^C \partial_{(e} \phi \partial_{q)} \phi^* = \frac{2i}{E} d_{ABC} J_q^C, \quad (4.37)$$

donde  $J_q^C$  es la corriente asociada a los dilatones en (4.27). Además el factor  $d_{ABC}$  combinado con el segundo paréntesis de (4.35) da lugar a la corriente de Chern-Simons. Por lo tanto, hemos encontrado la misma expresión para la acción efectiva que la calculada con el método heurístico en (4.30). Por último, recordemos nuevamente que estaremos interesados solo en el caso  $d_{33C}$ .



#### 4.1.4. Funciones de estructura antisimétricas (blanco de espín 0)

Con el lagrangiano efectivo obtenido de manera equivalente en las dos secciones anteriores estamos en condiciones de calcular la función de estructura antisimétrica del glueball. Cabe mencionar que esta función no había sido calculada en este régimen en trabajos anteriores. Como vimos en el capítulo 3 en la ecuación (3.35), en el régimen  $x$  grande esta función no está presente, sin embargo al aumentar la energía del proceso la misma adquiere un valor no nulo y que, como veremos, es del mismo orden que  $F_2$ .

En este caso debemos comparar la acción efectiva (4.30) *on-shell* con el tensor de energía-momento antisimétrico según

$$-iS_{\text{eff}}^{(A)} \equiv n_\mu n_\nu^* \text{Im} \left[ T_{(A)}^{\mu\nu} \right] = \frac{1}{2\pi} \left[ W_{(A)}^{\mu\nu} \right], \quad (4.38)$$

y seguir los pasos de la sección 4.1.1, es decir, expandir el prefactor (4.20) alrededor de  $\tilde{t} \rightarrow 0$ , tomar la aproximación de  $\tilde{s}$  (4.21) y aproximar la suma de las masas de estados intermedios por una integral. Haciendo esto se obtiene la siguiente ecuación

$$n_\mu n_\nu^* W_{(A)}^{\mu\nu} = |c_i|^2 \frac{\pi^2}{3} \frac{\mathcal{Q} \mathcal{I}_\Delta}{\sqrt{4\pi\lambda}} \left( \frac{\Lambda^2}{q^2} \right)^{\Delta-1} n_\mu n_\nu^* \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \frac{q_\rho P_\sigma}{2P \cdot q} \frac{1}{x}, \quad (4.39)$$

donde definimos  $\mathcal{Q} \equiv d_{33C} \mathcal{Q}^C = d_{338} \mathcal{Q}^8 + d_{33,15} \mathcal{Q}^{15}$ , mientras que  $\mathcal{I}_\Delta$  representa la integral en  $w$  de funciones Bessel de la forma

$$\mathcal{I}_\Delta = \int dw \omega^{2\Delta+2} K_0(\omega) K_1(\omega) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma^2(\Delta+1) \Gamma(\Delta+2)}{4 \Gamma(\Delta + \frac{3}{2})}. \quad (4.40)$$

Luego, a raíz de esta expresión y utilizando la descomposición del tensor hadrónico (2.17) encontramos la función antisimétrica del glueball

$$F_3(x, q^2) = \frac{1}{x} \left( \frac{\Lambda^2}{q^2} \right)^{\Delta-1} \frac{\pi^2 \mathcal{Q} |c_i|^2}{3\sqrt{4\pi\lambda}} \mathcal{I}_\Delta. \quad (4.41)$$

Comparando el resultado con las funciones simétricas (4.24) podemos notar que el comportamiento en  $(\Lambda/q)$  es exactamente el mismo, mientras que la dependencia en  $x$  es la misma que la  $F_2$ , por lo que el resultado de  $F_3$  en este régimen es totalmente relevante para la estructura del glueball.

Se puede hacer una comparación más precisa utilizando la relación entre las integrales (4.40) y (4.23)

$$I_{1,2\Delta+3} = \int dw^{2\delta+3} K_1^2(w) = \frac{(2\Delta+2)(\Delta+2)}{2\Delta+3} \mathcal{I}_\Delta, \quad (4.42)$$

obteniendo nuevas relaciones tipo Callan-Gross

$$F_3(x, q^2) = \frac{\mathcal{Q}}{C_\Omega} \frac{4}{3} (\Delta+1) F_2(x, q^2) = \frac{\mathcal{Q}}{C_\Omega} \frac{8}{3} \frac{(2\Delta+3)(\Delta+1)}{\Delta+2} x F_1(x, q^2). \quad (4.43)$$

Una diferencia fundamental entre  $F_3$  y las funciones simétricas surge del factor  $\mathcal{Q}$ : para que haya una función antisimétrica es necesario que el blanco esté cargado bajo la acción de los generadores  $K^8$  y  $K^{15}$  asociados a los subgrupos  $U(1)$  del  $SU(4)_R$ , mientras que esto no es necesario para las funciones simétricas, que no dependen de ninguna carga. De todas maneras discutimos anteriormente que no es de esperar encontrar una  $F_3$  en QCD cuando se estudia DIS electromagnético.

De esta forma hemos podido obtener la función de estructura antisimétrica en el régimen de  $x$  chico para el glueball. Este caso no presenta gran interés desde el punto de vista fenomenológico, puesto que estamos trabajando con un blanco escalar que tiene componentes antisimétricas al interactuar con un fotón. Sin embargo nos sirve de punto de partida para poder entender el caso más interesante, que es el de un blanco de espín  $1/2$ , ya que para dicho blanco es esperable en general encontrar funciones antisimétricas. Eso es lo que haremos en la siguiente sección, utilizando los métodos aquí aprendidos.

## 4.2. Blanco fermiónico: Dilatino

Mostraremos en esta sección como obtener las funciones de estructura simétricas y antisimétricas del glueballino, asociadas al FCS del dilatino, en el régimen de  $x$  chico. Estas son contribuciones originales, puesto que el cálculo solo estaba hecho en el régimen del capítulo 3 sección 3.3. Seguiremos una metodología análoga a la de la sección anterior, por lo que muchos pasos serán omitidos.

El blanco será un dilatino polarizado con carga eléctrica asociada al  $U(1)_R$ , que a su vez puede estar cargado frente a los otros dos subgrupos diagonales del  $SU(4)_R$ . A diferencia del caso escalar, esta última condición no es necesaria para obtener funciones de estructura antisimétricas, debido a la presencia del término de interacción fermiónico de Pauli. Notaremos luego que para el caso del dilatino es necesario entender el comportamiento de la teoría del *bulk* cerca del *cutoff*  $\Lambda$  para estudiar las funciones de estructura antisimétricas  $g_i$ .

Al igual que en la sección anterior, obtendremos las acciones efectivas tanto desde el cálculo formal de teoría de cuerdas como con el método heurístico. Para este último es necesario computar los diagramas de supergravedad considerando la propagación en el canal  $t$  de un gravitón o de un fotón, como se muestra en la figura 4.3.

Al computar la dispersión de cuerdas cerradas hay que considerar ahora que los dilatinos son modos de espín  $1/2$ , por lo que los estados de la cuerda asociados son modos provenientes del sector NS-R. Estos estarán acoplados a dos modos de NS-NS o dos modos de R-R según se quiera calcular la contribución simétrica o antisimétrica.

### 4.2.1. Contribución simétrica

Las funciones de estructura simétricas surgirán de la misma forma que en el caso del dilatón, considerando el intercambio de un gravitón en el canal  $t$ , si pensamos en el proceso heurístico presentado en la figura 4.3 (a). Mientras que desde el enfoque de las amplitudes de dispersión lo harán al considerar el sector NS-NS de la perturbación del gravifotón.

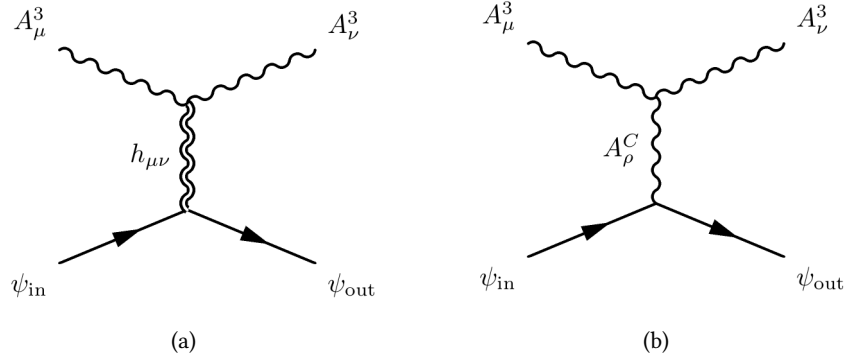


Figura 4.3: Diagrama de Feynman del FCS de dos dilatinos a dos fotones en el canal  $t$  mediados por: (a) un gravitón, (b) un campo de  $gauge$  de  $SU(4)_R$ . Nuevamente de (a) surgirán las funciones de estructura simétricas y de (b) las antisimétricas.

Comenzaremos en este caso por el cálculo heurístico, ya que es más rápido y más sencillo de estudiar, y luego veremos que coincide nuevamente con el cálculo de las amplitudes de cuerdas.

### Método heurístico

En este caso los pasos son idénticos a los de la sección del método heurístico del dilatón, con la diferencia de que ahora es necesario considerar el tensor de energía-momento del dilatino, dado por

$$T_{mn}^{\psi} = \bar{\psi} \gamma_{(m} \partial_{n)} \psi, \quad (4.44)$$

acoplado el tensor de energía-momento del fotón dado en (4.17). Entonces podemos calcular la amplitud de supergravedad del proceso

$$\mathcal{A} = \kappa_5^2 \int d^5x d^5x' T_{mn}^{\psi}(x) G^{mnkl}(x, x') T_{kl}^A(x'), \quad (4.45)$$

utilizando la expresión (4.15) para el propagador del gravitón. Juntando todo obtenemos

$$T_{mn}^{\psi}(x) G^{mnkl}(x, x') T_{kl}^A(x) = 2 G_{\text{grav}}(x, x') F_{mp}(x') F_n^p(x') \bar{\psi}(x) \gamma^n \partial^m \psi(x), \quad (4.46)$$

más términos subdominantes de orden  $O(t)$ .

Luego debemos incluir el prefactor, tomando el límite local (4.18). Los siguientes pasos son integrar sobre el  $AdS_5$  y agregar una constante  $C'_\Omega$  que proviene de la integral angular. Finalmente debemos tomar la parte imaginaria para obtener la acción efectiva simétrica del dilatino

$$S_{\text{eff},\psi}^{(S)} = 2 \kappa_5^2 \text{Im} [\tilde{s}^2 \mathcal{G}(\alpha', \tilde{s}, \tilde{t}, \tilde{u})] C'_\Omega \int d^5x \sqrt{g_{AdS_5}} F_{mp} F_n^p \bar{\psi} \gamma^{(m} \partial^{n)} \psi. \quad (4.47)$$

Se puede notar que una vez conocidos los pasos del dilatón, repetir el método heurístico para el dilatino es casi inmediato, mientras que los cálculos formales desde teoría de cuerdas tendrán algunas sutilezas importantes que lo diferencian con el caso escalar.

### Método desde teoría de cuerdas

Queremos calcular la amplitud de cuerdas cerradas en el espacio plano de diez dimensiones considerando dos modos de NS-NS y dos modos del sector NS-R. Nuevamente la misma puede escribirse, gracias a las relaciones de KLT, como el producto de dos factores cinemáticos de amplitudes de cuerdas abiertas. A diferencia del caso escalar, ahora debemos considerar un factor bosónico y otro fermiónico, según [80]

$$\mathcal{A}(1, 2, \tilde{3}, \tilde{4}) = 4 i \kappa_{10}^2 \mathcal{G}(\alpha', \tilde{s}, \tilde{t}, \tilde{u}) K_{op}^{\text{bos}}(1, 2, 3, 4) \otimes K_{op}^{\text{fer}}(\tilde{3}, 1, 2, \tilde{4}), \quad (4.48)$$

donde los números con tilde indican que se trata de modos fermiónicos. Para esta combinación particular de modos, los factores pueden encontrarse en [80, 74], y vienen dados por

$$K_{op}^{\text{bos}}(1, 2, 3, 4) = \xi_1^M \xi_2^N \xi_3^P \xi_4^Q [-1/4 \tilde{s} \tilde{u} \eta_{MN} \eta_{PQ} + \dots], \quad (4.49)$$

para el caos bosónico, y

$$K_{op}^{\text{fer}}(\tilde{3}, 1, 2, \tilde{4}) = \xi_1^{M'} \xi_2^{N'} \tilde{u}_3^\alpha u_4^\beta [\tilde{s} (k_{M'}^2 (\Gamma_{N'})_{\alpha\beta} - k_{N'}^1 (\Gamma_{M'})_{\alpha\beta} - \eta_{M'N'} (\Gamma^P)_{\alpha\beta} k_P^2) + \dots], \quad (4.50)$$

para el fermiónico. Los puntos en ambas ecuaciones indican términos subdominantes en potencias de  $\tilde{s}$ . Luego hay que considerar las polarizaciones de los campos en diez dimensiones. En este caso vienen dadas por [75]

$$h_i^{MN} \equiv \xi_i^M \otimes \xi_i^N, \quad (\Gamma^M)_{\beta}^{\alpha} \Psi_i^{\beta} \equiv u_i^{\alpha} \otimes \xi_i^M. \quad (4.51)$$

Luego, a primer orden en  $\tilde{s}$ , la amplitud toma la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(1, 2, \tilde{3}, \tilde{4}) = & 4 i \kappa_{10}^2 \mathcal{G} \tilde{s}^2 \bar{\Psi}_3 [\tilde{u}(h_1 \cdot h_2) k_1 + \tilde{s}(h_1 \cdot h_2) k_2 \\ & + 2 \tilde{u}(k_2 \cdot h_1 \cdot h_2 \cdot \Gamma) + 2 \tilde{s}(k_1 \cdot h_2 \cdot h_1 \cdot \Gamma)] \Psi_4. \end{aligned} \quad (4.52)$$

En esta última expresión podemos fijar  $k_M^1 h_2^{MN} = k_M^2 h_1^{MN} = 0$ , ya que los estados del gravitón corresponden a fotones que cumplen la condición de polarización  $n \cdot q = 0$ . Por lo que obtenemos finalmente solo los primeros dos términos de (4.52). Considerando el límite de DIS (4.3) donde  $\tilde{u} \approx -\tilde{s}$ , y reemplazando los momentos por derivadas, obtenemos un lagrangiano efectivo de la forma

$$-i \kappa_{10}^2 (\partial_P h_{MN}) (\partial_Q h^{MN}) \bar{\Psi} \Gamma^{(P} \partial^{Q)} \Psi, \quad (4.53)$$

donde solo resta reemplazar los campos en diez dimensiones por la expansión en modos de KK según (3.2) y (3.6). Una vez hecho esto, se llega exactamente a la misma expresión que (4.47), con la identificación de la constante de la esfera como

$$\int d^5 \Omega \sqrt{g_{S^5}} \bar{\Theta}(\Omega) \Theta(\Omega) K^a K_a = C'_\Omega. \quad (4.54)$$

### 4.2.2. Funciones de estructura simétricas (blanco de espín 1/2)

Al igual que en el caso del dilatón, para obtener las funciones de estructura simétricas debemos tomar la acción efectiva simétrica, en este caso dada por (4.47), y evaluarla en las soluciones de los campos en el  $AdS_5$ . La solución del gravifotón viene dada por (3.5), mientras que para el dilatino podemos tomar la solución completa (3.8).

En la sección 3.3 del capítulo 3 tomamos la solución del dilatino cerca del borde, dada por (3.36). Uno estaría tentado a hacer lo mismo en este caso, sin embargo si se toma esta última expresión se obtiene, al momento de calcular la acción *on-shell*, un término de la forma

$$\bar{u}_i P_- \gamma_{\hat{\mu}} P_+ u_i = \bar{u}_i \gamma_{\hat{\mu}} P_+ u_i = P_\mu + S_\mu, \quad (4.55)$$

donde  $S_\mu$  es el vector de polarización de espín. El segundo término de (4.55) es engañoso, y de hecho no debería estar presente. El intercambio de un gravitón está relacionado con el cálculo dual en la teoría de campos del término  $JJ \sim T$  presente en el OPE de las dos corrientes. Por lo tanto, es de esperar que no haya un término proporcional a  $S_\mu$  en el cálculo del valor de expectación del tensor de energía-momento conservado. Desde el punto de vista holográfico esto se manifiesta al no tomar la aproximación de la solución del dilatino (3.36), sino considerando la solución completa (3.8). Luego, al integrar en la coordenada  $z$ , colocando los límites correctos como  $0 < z < z_0$ , y tras tomar el límite de momento chico del gravitón, se obtiene el resultado correcto sin el término proporcional a  $S_\mu$ . Los detalles de esta cuenta son muy similares a los de [15], donde los autores estudian los factores de forma de la corriente conservada. En cierta forma esto nos enseña que el límite local no debe ser tomado a la ligera, sino que es necesario primero calcular la acción *on-shell* y luego tomar el límite. Este paso tiene consecuencias directas, puesto que al no aparecer la polarización del vector de espín tenemos como resultado que las funciones de estructura  $g_i(x, q^2)$  con  $i = 3, 4, 5$  son nulas en este régimen (al menos a primer orden en la expansión  $1/N$ ).

Tomando entonces las soluciones completas, y tras integrar en el espacio curvo de diez dimensiones, se obtiene

$$n_\mu n_\nu^* T_{(S)}^{\mu\nu} = n_\mu^* n_\nu \frac{\pi |c_i|^2 C'_\Omega}{2\sqrt{4\pi\lambda}} \left(\frac{\Lambda^2}{q^2}\right)^{\tau-1} q^{-2} \times \left[ \eta^{\mu\nu} \frac{(P \cdot q)^2}{q^2} I_{1,2\tau+3} + P^\mu P^\nu (I_{0,2\tau+3} + I_{1,2\tau+3}) \right], \quad (4.56)$$

donde estamos usando las integrales definidas en (4.23). Comparando esta expresión con la expresión del tensor hadrónico (2.18) obtenemos las funciones de estructura simétricas para el dilatino en el régimen de  $x$  chico

$$\begin{aligned} F_1(x, q^2) &= \frac{1}{x^2} \left(\frac{\Lambda^2}{q^2}\right)^{\tau-1} \frac{\pi^2 C'_\Omega |c'_i|^2}{4\sqrt{4\pi\lambda}} I_{1,2\tau+3}, \\ F_2(x, q^2) &= 2x \frac{2\tau+3}{\tau+2} F_1(x, q^2), \end{aligned} \quad (4.57)$$

junto con  $g_3 = g_4 = g_5 = 0$ .

Este es un resultado original, por lo que vale la pena comparar con el resultado obtenido para el caso del dilatón por Polchinski y Strassler [12], reflejado en las funciones de estructura  $F_1$  y  $F_2$  obtenidas en (4.24). Notemos que la dependencia en  $x$  y  $q^2$  es la misma que para el caso del glueball si intercambiamos  $\Delta$  por  $\tau$ . Esto mismo sucedía en el régimen de  $x$  grande. Por otro lado, la ecuación (4.57) da una generalización de las relaciones de Callan-Gross para blancos de espín 1/2. A su vez, a diferencia del régimen de  $x$  grande, solo pudimos obtener las funciones  $F_1$  y  $F_2$ , y esto se debe a la conservación del tensor de energía-momento en la teoría de campos.

### 4.2.3. Contribución antisimétrica

Para finalizar este capítulo resta obtener la contribución antisimétrica del tensor hadrónico asociado a blancos de espín 1/2. Nuevamente estas son contribuciones originales, y seguiremos los pasos que desarrollamos para el caso del dilatón en la sección 4.1.3. A diferencia del caso simétrico del dilatino, ahora podremos obtener funciones asociadas al vector de espín, en particular obtendremos la función antisimétrica  $g_1$ , que será de gran interés en el siguiente capítulo.

A su vez, en el sector antisimétrico tendremos una nueva contribución dada por el término de interacción de Pauli, referido en la ecuación (3.26). Este término solo contribuye a las funciones antisimétricas porque permite el intercambio de un campo de *gauge* del  $SU(4)_R$ , que como vimos en la sección 4.1.3, permite acoplarse con el término de Chern-Simons, produciendo una estructura antisimétrica en los índices de Lorentz.

### Método heurístico

Estudiaremos entonces la contribución antisimétrica al diagrama de supergravedad en el canal  $t$  donde el intercambio viene dado por un campo de *gauge*, como se muestra en la figura 4.3 (b). El vértice superior viene dado por el término de Chern-Simons (3.24) al igual que en el caso del dilatón, lo que implica que el campo de *gauge* propagado deberá ser un modo  $A_\mu^C$  con  $C = 8, 15$ . Esto último se debe por un lado a la presencia del símbolo totalmente simétrico  $d_{ABC}$ , y por otro a que estado entrante/saliente es un fotón, es decir un modo  $A_\mu^3$ .

Para el vértice inferior tenemos dos tipos de interacciones posibles: por un lado la interacción con la corriente conservada asociada al  $U(1)_R$  del dilatino, que se obtiene para el dilatino en forma análoga a los pasos de la ecuación (3.12) y que tendrá una carga asociada  $Q^C$ , que se deriva al pedir que se cumpla la ecuación (4.25) para los armónicos espinoriales  $\Theta(\Omega)$ . Por otro lado, tenemos una corriente asociada al término de Pauli (3.26), la cual no tiene una carga asociada, y puede estar presente aún cuando los dilatinos no estén cargados bajo los subgrupos diagonales del  $SU(4)_R$ .

Para calcular la amplitud de supergravedad debemos considerar la corriente del término de Chern-Simons (4.27), la cual estará acoplada tanto a la corriente de *gauge* no-abeliana del dilatino  $J_D^n$  como a la corriente del término de Pauli  $I_D^n$ , dadas por

$$J_D^n(x') = -Q_D \bar{\psi} \gamma^n \psi, \quad I_D^n(x') = \beta_D \nabla_l \left( \bar{\psi} \gamma^{[l} \gamma^n \psi \right), \quad (4.58)$$

respectivamente.

Consideraremos ahora solo la contribución de la corriente del  $SU(4)_R$ . Siguiendo los mismos pasos que para el dilatón, indicados en la sección 4.2.1, y considerando las soluciones del dilatino al igual que en la sección anterior, se obtiene la acción efectiva antisimétrica del dilatino

$$S_{\text{eff},\psi}^{(A)} = -i\frac{1}{6}\mathcal{Q}^C d_{ABC} \text{Im} [\mathcal{G} \tilde{s}^2] \tilde{C}_\Omega \int d^5x \varepsilon^{mnpq} \partial_m A_n^A \partial_o A_p^{*B} \bar{\psi} \gamma_q \psi. \quad (4.59)$$

donde  $\tilde{C}_\Omega$  es una constante que proviene de la integral angular que estamos omitiendo al hacer el análisis heurístico. La contribución del término de Pauli es análoga, intercambiando las corrientes.

### Método desde la teoría de cuerdas

Obtendremos ahora la acción efectiva antisimétrica del dilatino desde el cálculo de amplitudes de cuerdas cerradas en espacio plano, evaluadas e integradas luego en  $AdS_5 \times S^5$ . El cálculo es similar al caso simétrico, con la salvedad de que, ahora debemos considerar estados provenientes del sector R-R al momento de considerar el fotón entrante/saliente. Sin embargo, a diferencia del caso del dilatón, ahora podemos considerar un estado asociado al sector R-R y otro al sector NS-NS para los fotones, conservando el número de R debido a que los estados del dilatino provienen del sector NS-R.

Entonces, la amplitud de cuatro puntos relevante tiene dos formas

$$\mathcal{A}(\text{R-R}, \text{R-R}, \text{NS-R}, \text{R-NS}) \quad \text{ó} \quad \mathcal{A}(\text{NS-NS}, \text{R-R}, \text{NS-R}, \text{R-NS}),$$

donde los primeros dos estados corresponden al campo de *gauge* en ambas amplitudes. En esta tesis calcularemos en forma explícita la primera de ambas expresiones, mostrando que da lugar a la acción efectiva (4.59), asociada al intercambio de un gravifotón que interactúa con la corriente conservada del  $SU(4)_R$ . Luego, daremos algunos indicios de que la segunda amplitud está asociada a considerar el término de Pauli.

Queremos entonces obtener la amplitud de dispersión de dos modos NS-R a dos modos de R-R, siguiendo los pasos de la sección 4.2.1. Nuevamente haciendo uso de las relaciones de KLT podemos escribir esta amplitud como [80, 74]

$$\mathcal{A}(\tilde{1}, \tilde{2}, 3, 4) = -i \kappa_{10}^2 \mathcal{G}(\alpha', \tilde{s}, \tilde{t}, \tilde{u}) K_{op}^{\text{fer}}(\tilde{1}, \tilde{2}, \tilde{3}, \tilde{4}) \otimes K_{op}^{\text{fer}}(\tilde{3}, 1, 2, \tilde{4}), \quad (4.60)$$

donde al igual que antes los números en *italica* indican que se trata de campos del sector R-R, mientras que los números con tilde son modos fermiónicos. El primer factor cinemático viene dado por

$$K_{op}^{\text{fer}}(\tilde{1}, \tilde{2}, \tilde{3}, \tilde{4}) = \frac{\tilde{s}}{2} \bar{u}_1 \Gamma^M u_2 \bar{u}_3 \Gamma_M u_4, \quad (4.61)$$

mientras que el segundo es el mismo que el de la ecuación (4.50). La polarización del dilatino es nuevamente la de la ecuación (4.51), mientras que la de la 4-forma viene dada en función de las polarizaciones de los modos de cuerdas abiertas según

$$u_i^\alpha \otimes \bar{u}_i^\beta = (\mathcal{C}_Q \Gamma_{i(5)})^{\alpha\beta}, \quad \text{con} \quad \Gamma_{i(5)} = (\mathcal{F}_i)_{M_1 \dots M_5} \Gamma^{M_1 \dots M_5}, \quad (4.62)$$

siguiendo las convenciones de [80], donde  $C_Q$  es la matriz de conjugación de carga. Juntando todo se obtiene la amplitud

$$\mathcal{A}(\tilde{1}, \tilde{2}, \tilde{3}, \tilde{4}) = -i \kappa_{10}^2 \mathcal{G}(\alpha', \tilde{s}, \tilde{t}, \tilde{u}) \tilde{s}^2 \frac{16}{15} (\mathcal{F}_3)_{MM_2 \dots M_5} (\mathcal{F}_4)_N^{M_1 \dots M_5} \bar{\Psi}_1 \gamma^{(N} k_2^{M)} \Psi_2, \quad (4.63)$$

desde la cual podemos construir el lagrangiano efectivo. Para ello recordemos que necesitamos evaluar los campos en las soluciones del espacio curvo expandidos en modos sobre la  $S^5$ . Tomamos nuevamente la expansión del dilatino (3.6), mientras que la 5-forma se obtiene al considerar (4.34). Tras integrar en todo el espacio obtenemos la misma acción efectiva (4.59), donde además surge que la constante de la esfera es simplemente

$$\tilde{C}_\Omega = \int d^5 \Omega \sqrt{g_{S^5}} \bar{\Theta}(\Omega) \Theta(\Omega) = 1, \quad (4.64)$$

dado que los  $\Theta$  forman una base ortogonal.

El hecho de que desde esta amplitud particular se obtuviera la acción efectiva (4.59) podría haberse anticipado al estudiar la amplitud de tres puntos. Como se muestra en el apéndice B, la amplitud  $\mathcal{A}(\text{R-R}, \text{R-R}, \text{NS-NS}) \sim \mathcal{A}(\mathcal{F}, \mathcal{F}, h)$  da origen el término de interacción de Chern-Simons en la acción de supergravedad cuando es evaluada en las polarizaciones asociadas al gravitón y la 4-forma. El diagrama de Feynman asociado al acoplamiento mínimo proviene de la amplitud donde el gravitón es intercambiado en el canal  $t$ , mientras que los modos de R-R quedan como estados externos. Entonces, pensando en el método heurístico, la amplitud asociada al dilatino debe provenir de calcular  $\mathcal{A}(\text{NS-NS}, \text{NS-R}, \text{NS-R}) \sim \mathcal{A}(h, \Psi, \Psi)$ , y finalmente la amplitud del proceso total, una vez que se suprime el canal  $t$  debe ser  $\mathcal{A}(\text{R-R}, \text{R-R}, \text{NS-R}, \text{NS-R})$ .

Para el término de Pauli, por otro lado, el argumento es similar. Se puede mostrar [24] que desde la amplitud de tres puntos  $\mathcal{A}(\text{R-R}, \text{R-NS}, \text{NS-R}) \sim \mathcal{A}(\mathcal{F}, \bar{\psi}, \psi)$ , y tras considerar las correspondientes polarizaciones, se obtiene un lagrangiano efectivo con la forma del término de interacción de Pauli (3.26), por lo menos en el sector del  $AdS_5$ . Esto se debe a que, en términos de los campos en diez dimensiones, el lagrangiano efectivo es de la forma

$$L_{\mathcal{F}\bar{\Psi}\Psi} \propto \mathcal{F}_{MNOPQ} \bar{\Psi} \Gamma^{MNOPQ} \Psi, \quad (4.65)$$

y luego solo hay que tomar dos índices en el  $AdS_5$  y los otros tres en la  $S^5$ . Entonces podemos considerar que en este caso el campo que se está intercambiando es uno asociado al modo de la 5-forma de R-R. De esta manera, dado que el primer vértice se deriva desde el término de Chern-Simons, podemos concluir que debería ser posible obtener la acción efectiva asociada al término de Pauli al estudiar la amplitud  $\mathcal{A}(\text{R-R}, \text{NS-NS}, \text{NS-R}, \text{R-NS}) \sim \mathcal{A}(\mathcal{F}, h, \bar{\Psi}, \Psi)$ .

#### 4.2.4. Funciones de estructura antisimétricas (blanco de espín 1/2)

##### Contribución del término de Chern-Simons



En esta subsección calcularemos las funciones antisimétricas de un blanco de espín 1/2, partiendo de la acción efectiva antisimétrica asociada al término de acoplamiento mínimo (4.59). Al igual que en la sección 4.2.3 el punto de partida es la relación holográfica (4.38).

Siguiendo los pasos de la mencionada sección, debemos evaluar los campos en las soluciones (3.8) y (3.5), utilizar la expansión del prefactor (4.20) y luego transformar la suma de las masas en una integral continua. Tras hacer esto se obtiene

$$n_\mu n_\nu^* \text{Im} \left[ T_{(A)}^{\mu\nu} \right] = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} n_\mu n_\nu^* q_\rho P_\sigma q^{-2} \mathcal{Q} \frac{\pi |c_i|^2}{12\sqrt{4\pi\lambda}} \left( \frac{\Lambda^2}{q^2} \right)^{\tau-1} \mathcal{I}_\tau, \quad (4.66)$$

donde  $\mathcal{I}_\tau$  es la integral definida en (4.40) tomando  $\tau$  en lugar de  $\Delta$ , y nuevamente tomamos  $\mathcal{Q} = d_{33C} \mathcal{Q}^C$ .

Comparando con la expresión antisimétrica del tensor hadrónico (2.19) obtenemos las funciones antisimétricas provenientes del término de Chern-Simons y del término de acoplamiento mínimo

$$F_3^{MC}(x, q^2) = \frac{1}{x} \left( \frac{\Lambda^2}{q^2} \right)^{\tau-1} \frac{\pi^2 \mathcal{Q} |c_i|^2}{6\sqrt{4\pi\lambda}} \mathcal{I}_\tau, \quad (4.67)$$

junto con  $g_1^{MC}(x, q^2) = g_2^{MC}(x, q^2) = 0$ . Aquí  $MC$  indica que hemos calculado la contribución proveniente del término de acoplamiento mínimo.

El resultado de (4.67) es similar en varios aspectos al obtenido para la función antisimétrica  $F_3$  del dilatón (4.41), nuevamente presentando el mismo comportamiento en  $q^2$  y  $x$  si se cambia el  $\Delta$  por el *twist*  $\tau$ , igual que sucedía para las funciones simétricas. A su vez, es del mismo orden que la  $F_2$  hallada para el dilatino en (4.57), como sucedía en el caso del glueball.

Al igual que en el caso simétrico, no hay contribuciones proporcionales al  $S_\mu$  al momento de calcular (4.66). Esto se puede entender desde la teoría de campos gracias a la conservación de la corriente-R [76], y es similar al análisis que hicimos en el caso simétrico. Sin embargo, en este caso hay una diferencia fundamental, y es que esta conservación es algo propio de haber considerado el modelo del *hard-wall*. De hecho, hay ejemplos de modelos holográficos duales similares a  $\mathcal{N} = 4$  SYM en el UV pero donde la simetría  $R$  está rota en forma espontánea en el IR<sup>8</sup>. Como fue notado por [76], en dichos modelos los cálculos llevan a resultados donde  $g_1$  es efectivamente no nula. Nosotros podemos imitar este resultado si consideramos la aproximación de la solución de los campos cerca del borde, ignorando los efectos cerca del *hard-wall*. En dicho caso obtenemos

$$g_1^{MC}(x, q^2) = \frac{1}{2} F_3^{MC}(x, q^2) \sim \frac{1}{x}. \quad (4.68)$$

Con respecto a  $g_1^{MC}$ , supondremos de aquí en más que estamos trabajando en un modelo de este tipo, donde la simetría  $R$  no está conservada. Esto será importante en el siguiente capítulo, donde estudiaremos las implicaciones fenomenológicas de dicha función antisimétrica.

De esta forma obtenemos una nueva relación tipo Callan-Gross en el régimen  $\lambda^{-1/2} \gg x \gg e^{-\sqrt{\lambda}}$ . Esta puede ser comparada con las relaciones que se encuentran en  $1 > x \gg \lambda^{-1/2}$  en la ecuación (3.41).

<sup>8</sup>Para ejemplos específicos, ver [76] y las referencias respectivas que allí se encuentran.

Podemos ver que la relación  $F_3 = 2g_1$  se mantiene para  $x$  chico. Además, la función de estructura  $g_2$  se anula en el régimen  $\lambda^{-1/2} \gg x \gg e^{-\sqrt{\lambda}}$ , lo que podría resultar sorprendente siendo que en  $x \sim 1$  teníamos que  $g_2$  es del mismo orden que  $F_3$ , sin embargo esto concuerda con las discusiones que se encuentran en la bibliografía sobre el comportamiento de  $g_2$  en cada régimen, como se puede observar en la discusión presentada en [76].

### Contribución del término de Pauli

Hasta aquí hemos omitido el término de Pauli que surge del lagrangiano (4.65). El cálculo de las funciones de estructura es totalmente análogo al hecho en esta sección. El resultado que se obtiene para  $F_3^P(x, q^2)$ , donde  $P$  indica que es la función derivada del término de Pauli, es similar al obtenido en (4.67), con dos diferencias: por un lado, en lugar del término  $d_{33C}Q^C$  la función de estructura ahora es proporcional a  $d_{33C}\beta^C$ , y en segundo lugar hay un factor extra que depende del *twist* según  $(\tau - 1)$ . La relación entre la función de estructura del término de acoplamiento mínimo con la que se obtiene desde el término de Pauli es simplemente

$$\frac{F_3^P}{d_{33C}\beta^C} \propto \frac{F_3^{MC}}{d_{33C}Q^C}(\tau - 1) \quad (4.69)$$

y lo mismo para la función  $g_1$  si se considera el modelo donde la corriente  $R$  no está conservada. Esta última ecuación indica que la contribución del término de Pauli se vuelve más importante para hadrones con mayores *twist*.

La contribución total de la función antisimétrica vendrá dada por la suma  $F_3 = F_3^{MC} + F_3^P$ . Vale la pena destacar que ambas funciones tienen la misma dependencia en la variable de Bjorken  $x$  y en el momento del fotón virtual  $q^2$ , por lo que la diferencia entre ambas es solo un factor numérico del mismo orden.

Resulta interesante remarcar que desde el punto de vista dual de la teoría de cuerdas el mecanismo por el que surgen las funciones antisimétricas es totalmente distinto en el régimen de  $x$  chico que en el de  $x \sim 1$  estudiado en la sección 3.3.2 del capítulo 3. En el último régimen,  $F_3$ ,  $g_1$  y  $g_2$  (junto con  $g_3$ ,  $g_4$  y  $g_5$ ) surgen debido a la naturaleza quiral de la solución de los dilatinos no masivos cerca del borde del  $AdS_5$ . Por otro lado, en el régimen actual de  $x$  chico, las funciones antisimétricas surgen exclusivamente por la presencia del término de Chern-Simons, al igual que en el caso escalar.

### 4.3. Discusión de resultados

En este capítulo hemos estudiado las funciones de estructura del glueball y del glueballino en el régimen de  $x$  chico, es decir donde la variable de Bjorken está acotada entre  $e^{-\sqrt{\lambda}} \ll x \ll 1/\sqrt{\lambda}$ . Pudimos obtener para cada blanco las contribuciones simétricas y antisimétricas.

Se mostró además que para obtener dichas funciones es necesario calcular la amplitud de cuerdas cerradas asociada al proceso del FCS en este régimen, desde la cual pudimos construir un lagrangiano efectivo, que luego debe ser evaluado en el  $AdS_5$  para obtener de esta forma el resultado en el espacio curvo. A su vez repetimos los mismos cálculos con el método “heurístico” que surge de pensar el diagrama de supergravedad asociado al proceso del FCS en el canal  $t$ , y luego tomar el límite local asociado a la asignación (4.18). Vimos que de esta forma se obtiene el mismo lagrangiano efectivo.

Una vez construidas las acciones efectivas pudimos obtener mediante la identificación holográfica (4.4) el tensor hadrónico  $W_{\mu\nu}$ , desde el cual se desprenden las funciones de estructura.

Este análisis se hizo tanto para el sector simétrico como el antisimétrico. El primero surge de estudiar las amplitudes de cuerdas donde los modos del gravifotón están asociados a la contribución de la perturbación del gravitón, es decir a los modos del sector NS-NS. Desde el punto de vista heurístico entendimos que está asociado a la propagación de un gravitón en el canal  $t$ , acoplado a los tensores de energía-momento de los campos entrantes y salientes. Por otro lado, la contribución antisimétrica aparece al considerar la contribución del gravifotón debida a la perturbación de la 4-forma, es decir a los modos del sector R-R. Resulta interesante que desde el punto de vista de supergravedad esta contribución surge al considerar el término de Chern-Simons no abeliano, que permite la propagación de un campo de *gauge* en el canal  $t$ .

Este último resultado es curioso y presenta una diferencia importante con el régimen de  $x$  grande. En dicho régimen las funciones de estructura antisimétricas surgían debido a que la teoría de campos es quiral, y solo lo hacían para los blancos de espín 1/2, debido a la naturaleza quiral de las soluciones de los fermiones (3.36). En cambio en el régimen de  $x$  chico la contribución antisimétrica aparece tanto para el campo fermiónico como para el escalar, siempre que los mismos estén cargados frente a los subgrupos diagonales  $U(1)$  del  $SU(4)_R$  asociados a las cargas  $Q^8$  y  $Q^{15}$ . Esto se debe, como mencionamos en el párrafo anterior, a la presencia del término de Chern-Simons no abeliano.

Los resultados de las funciones de estructura simétricas para el glueball y el glueballino se muestran en las ecuaciones (4.24) y (4.57) respectivamente. Mientras que las antisimétricas se muestran en (4.41) y (4.67).

Todas las funciones de estructura presentan el mismo comportamiento en potencias de  $\Lambda/q$  de la forma  $2\tau - 2$ , siendo  $\tau = \Delta$  para el glueball de espín 0. Esto mismo sucedía en el régimen de  $x$  grande (3.41). Por otro las funciones calculadas en este régimen dominan con respecto a las del capítulo 3 sección 3.3 cuando  $x \rightarrow 0$  cosa que es de esperar.

Hemos encontrado nuevas relaciones tipo Callan-Gross. Para el glueball tenemos

$$\begin{aligned} F_2 &= 2x \frac{2\Delta + 3}{\Delta + 2} F_1, \\ F_3 &= \frac{Q}{C_\Omega} \frac{8(2\Delta + 3)(\Delta + 1)}{3(\Delta + 2)} x F_1, \end{aligned} \quad (4.70)$$

donde la primer ecuación se cumple también para el glueballino si intercambiamos  $\tau \leftrightarrow \Delta$ , mientras que la segunda lo hace solo si consideramos la contribución proveniente del acoplamiento mínimo.

Respecto de las funciones de estructura para el blanco de espín 1/2, obtuvimos que la contribución simétrica proviene tanto del término de acoplamiento mínimo de supergravedad (3.23) como del término

de Pauli (3.26). La contribución total a las funciones es la suma total de la función encontrada para cada término, cuya relación está dada por la ecuaciones (4.69). Pudimos notar que el término de Pauli es más relevante cuando el blanco tiene mayor *twist*.

Por otro lado, discutimos que para poder obtener las funciones de estructura  $g_i$  asociadas al vector de espín es necesario considerar teorías de campos donde la simetría  $R$  no esté conservada. Si se trabaja en estos modelos se encuentra la relación de Callan-Gross

$$g_1 = \frac{1}{2}F_3, \quad (4.71)$$

que también se cumple en el régimen de  $x$  grande (3.41). Mientras que  $g_2$  es idénticamente nula en este régimen como es de esperar según el modelo partónico (2.30), y a diferencia con lo encontrado en el régimen de  $x$  grande. Obtener la función  $g_1$  resulta de gran interés fenomenológico, como veremos en el siguiente capítulo.

Con esto concluimos el estudio del proceso de DIS en el régimen de  $x$  chico, y nos resta estudiar el régimen de mayor energía, donde la aproximación local se rompe dado que debemos considerar el factor  $m^{\alpha'\tilde{t}/2}$  que habíamos descartado en (4.5).

## Capítulo 5

# Régimen $x$ exponencialmente chico

Vamos a estudiar en este capítulo el proceso de DIS en el tercer y último régimen de interés:  $x \sim e^{-\sqrt{\lambda}}$ , es decir donde la variable de Bjorken  $x$  es exponencialmente chica. En términos de la energía del sistema de centro de masa en cuatro dimensiones y la constante de acoplamiento de 't Hooft, este régimen corresponde a estudiar el límite donde ambas son grandes pero mantienen la relación

$$\frac{\log s}{\sqrt{\lambda}} = \text{cte} . \quad (5.1)$$

Este límite fue comentado en el trabajo original de Polchinski y Strassler [71], y luego estudiado más a fondo en colaboración con Brower y Tan [13, 14, 21]. En los citados trabajos se estudiaron el proceso de dispersión de glueballs y también las funciones de estructura simétricas de blancos de espín 1/2.

Como explicamos en la sección 2.6, desde el punto de vista de la teoría de campos en cuatro dimensiones, en este régimen la contribución más importante al proceso de dispersión viene dada por la física de Regge, donde es necesario estudiar el intercambio de un Pomerón, que puede lograrse a través del *kernel* de BFKL (2.38).

En el lado gravitatorio, la diferencia con el régimen anterior proviene de tener que estudiar el proceso de dispersión cuando ya no es válida la aproximación local, dado que, debido a la localidad de los operadores aparecen efectos no despreciables de difusión en la coordenada radial del  $AdS_5$ . La solución surge nuevamente al introducir un *kernel* particular que permite resolver los operadores presentes. Como veremos más adelante, este núcleo tiene un comportamiento de la forma  $\tilde{s}^{j+\alpha}$ , donde  $j$  corresponde al espín de la partícula intercambiada<sup>1</sup> y  $\alpha$  es una pequeña corrección. Esto es lo esperado en el régimen de Regge, donde la trayectoria viene dada por el espín más pequeñas correcciones.

En este caso, al estudiar las funciones de estructura simétricas veremos que el rol del Pomerón viene dado por una torre de estados de espín 2 de la cuerda, es decir un gravitón *reggeizado*, cuya trayectoria de

---

<sup>1</sup>Aquí estamos pensando en el diagrama de supergravidad asociado al método heurístico, por lo que  $j$  corresponde al espín del estado intercambiado.

Regge viene dada por  $\tilde{s}^{2+\alpha}$ . Por otro lado, en el caso de las funciones antisimétricas lo que tenemos es un campo de *gauge* reggeizado, donde ahora  $j = 1$ .

Uno podría argumentar que la región paramétrica que está estudiando en este caso es muy pequeña al compararla con los regímenes anteriores, sin embargo esta región es conceptualmente interesante y permite entender un problema que hasta aquí no fue planteado en esta tesis. En [12], los autores muestran que, debido a que el tensor de energía-momento no tiene dimensión anómala presente, los momentos de las funciones de estructura  $F_1$  y  $F_2$ , definidos como

$$M_2^{(1)} = \int_0^1 dx x F_1(x, q^2), \quad M_2^{(2)} = \frac{1}{2} \int_0^1 dx F_2(x, q^2), \quad (5.2)$$

deben tener un valor no nulo al tomar el límite  $q \rightarrow \infty$ . Ahora bien, para el caso de supergravedad esto no es cierto, como se puede ver en (3.41), ya que las integrales en este caso dan lugar a momentos que decaen como  $q^{2-2\tau}$ , por lo que los momentos se anulan en el límite de  $q$  grande. Ese comportamiento es correcto para momentos más grandes, que vienen acompañados por factores extra de potencias de  $x$ , así que debe estar sucediendo que omitimos componentes de  $F_{1,2}$  que tienen un pico cerca de  $x = 0$ . Efectivamente ese es el caso cuando se analiza el resultado obtenido en el capítulo anterior para el régimen de  $x$  chico, que se observa por ejemplo en (4.24) o (4.57). Sin embargo, esto no soluciona el problema, porque ahora los  $M_2^{(i)}$  divergen, debido al comportamiento en  $x \rightarrow 0$ , por lo que es crucial entender el comportamiento para valores de  $x$  exponencialmente chico.

Pasemos entonces a estudiar más detenidamente por qué el límite de la aproximación local deja de ser válido en este régimen. El estudio en general del proceso de DIS es análogo al del capítulo anterior, considerando la amplitud de cuerdas cerradas para obtener las acciones efectivas. Para realizar dicho cálculo debemos incluir nuevamente el prefactor (4.5), y aquí es donde surge la diferencia entre ambos regímenes. En dicho término aparece un factor de la forma  $(m)^{\alpha \tilde{t}/2}$ , donde  $m$  corresponde a las masas de los estados de cuerdas intercambiados y que aparecen sumados con una delta de Dirac que los fija en  $\alpha' \tilde{s}$ . En el régimen de  $x$  chico descartamos esta contribución ya que podíamos considerar que  $\alpha' \tilde{t} \rightarrow 0$ . Sin embargo esto no es válido en el régimen actual, dado que el invariante en diez dimensiones se puede escribir como

$$\frac{\alpha' \tilde{t}}{2R^2} = \frac{1}{2} \frac{\alpha'}{R^2} z^2 t + \frac{1}{2} \frac{\alpha'}{R^2} \Delta_2 = \frac{1}{2} \frac{\alpha'}{R^2} z^2 t + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} [z^2 \partial_z^2 + z \partial_z - 4], \quad (5.3)$$

donde el segundo término no se anula aún cuando el invariante  $t$  en cuatro dimensiones sí lo hace<sup>2</sup>. Este operador da lugar al fenómeno de difusión que mencionábamos antes, rompiendo la aproximación local del proceso. Cabe destacar que aquí no estamos considerando la contribución de las direcciones angulares de la  $S^5$ , ya que el operador laplaciano adimensional de la esfera es de orden  $O(1)$ . Además es importante notar que este tipo de operadores están presentes también en  $\tilde{s}$ , sin embargo pueden descartarse al compararlos

<sup>2</sup>Aquí estamos escribiendo al invariante en la notación de operador diferencial. En forma general se puede escribir el invariante en cuatro dimensiones como  $t = \nabla_x^2$ , y luego aplicarlo sobre los campos presentes en la amplitud de dispersión. La extensión a diez dimensiones en espacio curvo contiene el factor de curvatura y la derivada en la dirección radial del  $AdS$  y en las coordenadas angulares de la  $S^5$ .

con la contribución del factor de cuatro dimensiones, como remarcamos en su momento al estudiar la expansión de  $\tilde{s}$  en (4.21).

En (5.3)  $\Delta_2$  es un caso particular del operador de Hodge-de Rham, definido en forma genérica como

$$R^2 \Delta_j = z^2 \partial_z^2 + (2j - 3)z \partial_z + j(j - 4), \quad (5.4)$$

donde  $j$  es un entero que depende del rango del campo sobre el que actúa el operador, y que en nuestro caso de interés siempre coincide con el espín de la partícula intercambiada debido a como son los acoplamientos. Este operador se diferencia del operador laplaciano ordinario simplemente por una constante que depende de  $j$ :  $\nabla_j^2 = \Delta_j + f(j)$ , y que puede ser obtenida al mirar las ecuaciones de movimiento de supergravedad de un campo de espín  $j$ . Por ejemplo, para el caso  $j = 2$ , tenemos que  $\nabla_{j=2}^2 = \Delta_{j=2}$ , por lo que concluimos que  $f(2) = 0$ . De la misma forma se encuentra que para  $j = 1$  tenemos  $f(1) = 3$ .

Las acciones efectivas ahora tendrán la misma forma que en el caso de  $x$  chico pero con este operador diferencial presente. Por ejemplo, en el caso del blanco escalar (asociado al dilatón), la acción simétrica (asociada al intercambio de un gravitón) será análoga al resultado de la ecuación (4.12) pero con un término extra que separa los campos  $\Phi$  de los campos  $F_{mn}$  de la forma:  $\left(\frac{\alpha' \tilde{s}}{4}\right)^{\alpha' \tilde{t}/2}$  evaluado en  $t = 0$  y actuando sobre los campos. En las siguientes secciones mostraremos cómo resolver este operador para hallar una expresión que sea posible de integrar, y lo haremos tanto para el caso escalar como para el caso de espín 1/2.

## 5.1. Caso escalar

Comencemos con el proceso de DIS del glueball, dual al proceso de dispersión de un gravitón con un dilatón, y consideremos el caso simétrico, donde se intercambia un gravitón ( $j = 2$ ) en el canal  $t$ . En este caso tenemos exactamente la acción (4.12) con el operador  $(\alpha' \tilde{s}/4)^{\alpha' \tilde{t}/2}$  presente luego de expandir el prefactor, como explicamos anteriormente. Esta acción puede ser transformada en un problema de mecánica cuántica auxiliar, donde tomamos la variable  $u = -\log(z/z_{\text{ref}})$  cumpliendo el rol del tiempo, y donde el operador (5.4) cumple el rol del hamiltoniano del problema:  $H = -z^2 \partial_z^2 - z \partial_z + 4 = -\partial_u^2 + 4$ . Supongamos por ahora que estamos trabajando en el límite conforme, donde el espacio es exactamente  $AdS_5$  y no hay ningún *cutoff* presente. En este caso  $z_{\text{ref}}$  es una escala arbitraria. La idea entonces es diagonalizar el hamiltoniano en términos de sus autofunciones, que en este caso son simplemente ondas planas en  $u$  con energía  $E_\nu = \nu^2 + 4$ , siendo  $\nu$  un entero. Entonces, la amplitud de dispersión puede escribirse en términos de un *kernel* que en el límite  $t \rightarrow 0$  toma la forma

$$\mathcal{K}(u, u', t = 0, j = 2) = (\alpha' \tilde{s})^{2 - \frac{2}{\sqrt{\lambda}}} \sqrt{\frac{\lambda^{1/2}}{2\pi\zeta}} e^{-\frac{\sqrt{\lambda}}{2\zeta}(u-u')^2}, \quad (5.5)$$

donde  $\zeta = \log(\alpha' \tilde{s}) = \log(\alpha' z z' s)$ , y donde estamos haciendo énfasis en el hecho de que el espín de la partícula intercambiada es  $j = 2$ . Es interesante notar que el factor  $s^2$  ya estaba presente en la amplitud

calculada en la aproximación local, reflejando el escaleo de energías esperado para el intercambio de un gravitón, mientras que ahora se introduce una corrección pequeña  $2/\sqrt{\lambda}$  en la trayectoria de Regge, como notamos al principio del capítulo. La dependencia en  $(u-u')^2$  dentro de la exponencial es lo que se conoce como el factor de difusión, y la inversa de su coeficiente da el tiempo característico de difusión. Dado que estamos trabajando en el límite conforme llamaremos a (5.5) el *kernel* conforme.

El resultado al que hemos llegado es similar al *kernel* del Pomerón de BFKL (2.38) calculado para  $\mathcal{N} = 4$  SYM pura en el régimen perturbativo. Vemos que la difusión en aquel caso se da en el momento transversal, mientras que ahora está asociada a la coordenada radial, y en ambos casos el tiempo característico de difusión viene dado por  $\tau \sim \log s$ . La diferencia más clara se da en la corrección que sufre la trayectoria de Regge: mientras que en el caso perturbativo viene dada por  $\lambda$ , aquí tenemos una contribución proporcional a  $1/\sqrt{\lambda}$ .

Volviendo al cálculo del DIS holográfico, la amplitud se obtiene luego de evaluar los campos de gauge en  $u$  y los campos del dilatón en  $u'$ , pues en este caso no tomamos la aproximación local. De esta forma se obtiene la acción efectiva *on-shell* de la que se obtienen las funciones de estructura. Por ejemplo, el término asociado a la función simétrica de  $F_1(x, q^2)$  queda de la forma<sup>3</sup>

$$\begin{aligned}
n_\mu n_\nu^* T_{\text{Sym}}^{\mu\nu}|_{F_1} &= \frac{\pi\alpha' C_\Omega R^2}{2} \int dz \sqrt{g_{\text{AdS}}} F^{mn} F_n^{p*}|_{F_1} \left(\frac{\alpha'\tilde{s}}{4}\right)^{\alpha'\tilde{t}/2|_{t=0}} \partial_m \phi^* \partial_p \phi \\
&= \frac{\pi C_\Omega}{8} \lambda^{1/2} \int \frac{dz}{z} [qz K_1(qz)]^2 (\alpha'\tilde{s})^{2+\alpha'\tilde{t}/2|_{t=0}} \left[\frac{R^4}{z} |\phi(z)|\right]^2 \\
&= \frac{\pi C_\Omega}{8} \lambda^{1/2} \int \frac{dz}{z} \frac{dz'}{z'} [qz K_1(qz)]^2 (\alpha'\tilde{s})^{2+\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\Delta_2} \delta(u(z) - u'(z')) \left[\frac{R^4}{z'} |\phi(z')|\right]^2 \\
&\equiv \frac{\pi C_\Omega}{8} \lambda^{1/2} \int du du' P_A^{(1)}(u) \mathcal{K}(u, u', t=0, j=2) P_\phi(u'), \tag{5.6}
\end{aligned}$$

donde

$$P_A^{(1)}(u(z)) = q^2 z^2 K_1^2(qz), \quad P_\phi(u(z)) = R^8 z^{-2} |\phi(z)|^2 \approx (z\Lambda)^{2\Delta-2} \tag{5.7}$$

son los factores de impacto, que tienen toda la información de los estados entrantes del proceso, y donde las contracciones se hacen con la métrica del espacio curvo. En el último paso hemos escrito todo en función de  $u$  e insertado una identidad de la forma  $\int du' \delta(u-u') = \int du' \int \frac{d\nu}{2\pi} e^{i\nu(u-u')}$ , de donde surge en forma natural el *kernel* de espín 2 (5.5). Finalmente, dado el teorema óptico, obtenemos  $F_1(x, q^2)$  tras multiplicar el resultado por un factor  $2\pi$ . Para  $F_2(x, q^2)$  se obtiene una expresión análoga, simplemente reemplazando

$$P_A^{(1)} \rightarrow P_A^{(2)}(u(z)) = q^2 z^2 (K_0^2(qz) + K_1^2(qz)) \tag{5.8}$$

e insertando un factor extra de  $2x$ . La dependencia en  $x$  en estas fórmulas está oculta en los factores  $s$  y  $\zeta$ , dado que en este régimen el invariante en cuatro dimensiones de Mandelstam cumple  $s \approx q^2/x$ . Es

<sup>3</sup>Aquí ya hemos realizado la integral angular. Notar también que hemos absorbido el factor  $4\pi$  en la definición de la constante de acoplamiento de 't Hooft  $\lambda$ .



importante resaltar que si se toma el límite de  $\lambda$  grande, se recupera el resultado del régimen de  $x$  chico pero no exponencialmente chico, estudiado en el capítulo anterior.

### 5.1.1. *Kernel conforme*

Veamos ahora cómo se modifica este resultado cuando consideramos el *cutoff*  $z_0$ , induciendo confinamiento en la teoría de campos. Los pasos en general siguen siendo válidos, pero hay que tener en cuenta que debemos ahora imponer cierta de contorno en  $z_0$  que sean consistente. Hasta aquí siempre consideramos condiciones de contorno de Dirichlet para los campos, entendiendo que *AdS* se comporta como una caja, y entonces los modos deben anularse en los bordes. Sin embargo ahora debemos considerar condiciones de contorno de Neumann para las autofunciones del hamiltoniano  $H$ . Esto se debe a que el gravitón  $h_{mn}$  se acopla al tensor de energía-momento de la teoría de campos en el borde. Dado que esta cantidad se debe conservar, no puede haber fuentes. Esto se traduce en que la condición de contorno del  $h_{\mu\nu}$  tiene que anular el flujo de las corrientes generadas por las fluctuaciones del borde. Estas corrientes pueden construirse en forma sencilla según

$$J_m \equiv K^n T_{mn}, \quad (5.9)$$

donde  $K^n$  es un vector de Killing asociado a la métrica del *AdS*<sub>5</sub>, mientras que  $T_{mn}$  es el tensor de energía-momento asociado a la fluctuación que estamos prendiendo. Esta corriente está conservada por construcción, cumpliendo  $\nabla_m J^m = 0$ . Si lo que queremos es anular los flujos hacia el borde IR (los del borde conforme se anulan automáticamente) tenemos que pedir  $J_z = 0$  para todas estas corrientes. Podemos aplicar esto a nuestra fluctuación del gravitón, reinterpretándola en términos de una fluctuación escalar efectiva. Pasando al sistema de cono de luz tenemos que  $s = -2p_1^+ p_3^-$ , y en este sistema la ecuación de movimiento para la fluctuación de la métrica toma la forma

$$0 = \Delta_2 h_{++} = z^{-2} \Delta_0(z^2 h_{++}), \quad (5.10)$$

por lo que si definimos un campo escalar  $\phi \equiv z^2 h_{++}(z)$ , este cumple la ecuación de movimiento de un escalar no masivo en *AdS*<sub>5</sub>, describiendo el único grado de libertad relevante. Eligiendo como vector de Killing cualquiera de las traslaciones en las direcciones en cuatro dimensiones  $x^\mu$ , se puede mostrar que cualquiera de las corrientes armadas cumple la propiedad

$$J_z \propto K^m \partial_m \phi \partial_z \phi, \quad (5.11)$$

por lo que la condición de contorno toma la forma

$$\partial_z(\phi)|_{z_0} = \partial_z(z^2 h_{++})|_{z_0} = 0. \quad (5.12)$$

Finalmente, esto lo deben cumplir los autoestados de  $H$ , por lo que la solución más general toma ahora la forma

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left[ e^{-i\nu u} + \left( \frac{\nu - 2i}{\nu + 2i} \right) e^{i\nu u} \right], \quad (5.13)$$

en lugar de ser simples ondas planas. Reemplazando esta expresión en el *kernel*, y tomando el límite  $t \rightarrow 0$ , el *kernel* conforme toma la forma

$$\mathcal{K}_\Lambda(u, u', t = 0, j = 2) = (\alpha' \tilde{s})^{2 - \frac{2}{\sqrt{\lambda}}} \sqrt{\frac{\lambda^{1/2}}{2\pi\tilde{\zeta}}} \left[ e^{-\frac{\sqrt{\lambda}}{2\tilde{\zeta}}(u-u')^2} + \mathcal{F}(u, u', \tilde{\zeta}) e^{-\frac{\sqrt{\lambda}}{2\tilde{\zeta}}(u+u')^2} \right] \quad (5.14)$$

donde  $\tilde{\zeta} = (4\lambda)^{-1/2}\zeta$ , y donde hemos definido la función

$$\mathcal{F}(u, u', \tilde{\zeta}) = 1 - 4\sqrt{\pi\tilde{\zeta}} e^{\eta^2} \operatorname{erfc}(\eta), \quad (5.15)$$

con

$$\eta = \frac{u + u' + 4\tilde{\zeta}}{\sqrt{4\tilde{\zeta}}}, \quad \operatorname{erfc}(\eta) = 1 - \operatorname{erf}(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_\eta^\infty dx e^{-x^2}. \quad (5.16)$$

por lo que  $-1 < \mathcal{F}(u, u', \tilde{\zeta}) < 1$ . Notemos que la forma del *kernel* (5.14) depende explícitamente del tipo de condiciones de contorno se consideran. Dado que estamos trabajando con las condiciones (5.10) dadas por el modelo del *hard-wall*, llamaremos a (5.14) como el *kernel* del *hard-wall*.

De esta forma podemos obtener el *kernel* completo para el caso conforme y no conforme para las funciones simétricas del glueball. Si bien la forma explícita de estas funciones en el régimen actual no estaban calculadas, los pasos seguidos son análogos al cálculo del *kernel* del Pomerón involucrado en la dispersión de cuatro dilatones estudiado en [13], y su expresión es muy similar a las del blanco de espín 1/2 intercambiando las soluciones de dilatones por dilatinos como veremos en la siguiente sección, por lo que la contribución original no es de tanta relevancia.

### 5.1.2. Intercambio de campo de *gauge*

Hasta aquí solo hemos estudiado el proceso proveniente de intercambiar un gravitón, que da lugar como era de esperar a las funciones simétricas. Ahora analizaremos el proceso que proviene de intercambiar un bosón de gauge reggeizado, que da lugar a la función  $F_3$  del glueball, y que es una contribución original calculada en [23]. Como notamos en la sección 4.1.3 del capítulo 4, este modo vectorial interactúa con las corrientes en lugar del tensor de energía-momento, implicando que debemos considerar el operador diferencial de espín 1. Tenemos entonces

$$\frac{\alpha' \tilde{t}}{2} = \frac{1}{2} \frac{\alpha'}{R^2} z^2 t + \frac{1}{2} \frac{\alpha'}{R^2} (\Delta_1 + 3) = \frac{1}{2} \frac{\alpha'}{R^2} z^2 t + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} [z^2 \partial_z^2 - z \partial_z]. \quad (5.17)$$

Introduciendo la variable  $y = 2u = -2 \ln(z/z_{\text{ref}})$  podemos escribir  $\Delta_1 + 3 = 4(\partial_y^2 + \partial_y)$ . Luego de diagonalizar el operador, obtenemos el *kernel* conforme de la forma

$$\mathcal{K}(y, y', t = 0, j = 1) = (\alpha' \tilde{s})^{1 - \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}} e^{-\frac{1}{2}(y+y')} \sqrt{\frac{\lambda^{1/2}}{2\pi\tilde{\zeta}}} e^{-\frac{\sqrt{\lambda}}{8\tilde{\zeta}}(y-y')^2}. \quad (5.18)$$

En este caso la pendiente de Regge es  $1 - 1/(2\sqrt{\lambda})$  dado que tanto el escaleo con la energía del centro de masa como con la curvatura son distintos al caso simétrico. Esto implica que  $F_3(x, q^2)$  crece más rápido a medida que  $x \rightarrow 0$ . Por otro lado, vemos que la difusión en  $y(z)$  sigue presente. Para considerar los efectos de introducir el *cutoff* en el  $AdS_5$  debemos considerar las condiciones de contorno del modo de gauge *reggeizado*  $A_+$ , dada por

$$\partial_z (zA_+) |_{z_0} = 0. \quad (5.19)$$

Sin embargo, las autofunciones se modifican de modo tal que esta condición es análoga a la obtenida para el modo de espín 2, por lo que el *kernel* sufre la misma modificación que en el caso anterior. Obtenemos de esta forma el *kernel* del *hard-wall*

$$\mathcal{K}_\Lambda(y, y', t=0, j=1) = (\alpha' \tilde{s})^{1 - \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}} e^{-\frac{1}{2}(y+y')} \sqrt{\frac{\lambda^{1/2}}{2\pi\zeta}} \left[ e^{-\frac{\sqrt{\lambda}}{8\zeta}(y-y')^2} + \mathcal{F}(y, y', \tilde{\zeta}) e^{-\frac{\sqrt{\lambda}}{8\zeta}(y+y')^2} \right] \quad (5.20)$$

Naturalmente la expresión final de la función de estructura viene dada por las integrales en  $y$  y  $y'$ , que son complicadas de resolver. A su vez, la expresión puede separarse en la componente conforme  $F_3^{\text{conformal}}$  más la contribución que surge de considerar la deformación inducida por el *cutoff* IR:

$$F_3 = F_3^{\text{conformal}} + F_3^{\text{deformation}}. \quad (5.21)$$

El resultado explícito surge tras seguir los mismos pasos que el caso simétrico de (5.6), junto con la inserción del *kernel* del *hard-wall* para el caso de espín 1, en lugar del *kernel* conforme. Finalmente,  $F_3(x, q^2)$  viene dada por

$$F_3(x, q^2) = \frac{\mathcal{Q}\pi^2}{12} \int dy dy' \mathcal{P}_A(y, q) P_\phi(y', \Lambda) \times \left\{ (\alpha' \tilde{s})^{1 - \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}} \sqrt{\frac{\lambda^{1/2}}{2\pi\zeta}} \left[ e^{-\frac{\sqrt{\lambda}}{8\zeta}(y-y')^2} + \mathcal{F}(y/2, y'/2, \tilde{\zeta}) e^{-\frac{\sqrt{\lambda}}{8\zeta}(y+y')^2} \right] \right\}. \quad (5.22)$$

En este caso el factor  $P_A$  fue reemplazado por

$$\mathcal{P}_A(z, q^2) = (qz)^3 K_1(qz) K_0(qz), \quad (5.23)$$

reflejando el uso del término de Chern-Simons. Nuevamente la información de la dependencia en  $x$  está codificada dentro de  $\tilde{s}$  y  $\zeta$ . Vale la pena notar que la dependencia de la contribución del *cutoff* IR depende del modelo, dado que depende de como se toman las condiciones de contorno en  $z_0$ , mientras que por otro lado la contribución conforme es independiente del modelo.

## 5.2. Caso fermiónico

Habiendo descripto ya las consideraciones generales para el caso escalar, el caso fermiónico es totalmente análogo, así que en esta sección pondremos solo los resultados importantes. Cabe destacar que el

estudio del *kernel* del Pomerón para la dispersión de dos dilatinos a dos fotones en el sector simétrico fue estudiado ampliamente en [21], mientras que el estudio del *kernel* para el sector antisimétrico, es decir el proveniente del intercambio de una partícula de espín 1 reggeizada, fue primero estudiado en [76] con un acercamiento un poco distinto al presentado en esta tesis y en [24].

El punto de partida para las funciones simétricas es ahora la acción efectiva asociada al gravitón acoplado al tensor de energía-momento del dilatino, dado en (4.47). Siguiendo los pasos de la sección anterior se obtiene por ejemplo la expresión de  $F_2$  [21]

$$F_2(x, q^2) = K \int \frac{dz}{z} \frac{dz'}{z'} P_A(z, q^2) P_\psi(z')(zz'q^2) \frac{e^{\zeta(1-\rho)}}{\sqrt{\zeta}} \left( e^{-\frac{\log^2(z/z')}{\rho\zeta}} + \mathcal{F}(z, z', \zeta) e^{-\frac{\log^2(zz'/z_0^2)}{\rho\zeta}} \right), \quad (5.24)$$

donde  $K$  es una constante de normalización que no nos resultará de interés, y además estamos siguiendo la notación de [21] donde toman  $\rho = 2/\sqrt{\lambda}$ . En este caso los factores de impacto vienen dados por

$$P_A(z, q^2) = (qz)^2 (K_1^2(qz) + K_0^2(qz)), \quad P_\psi(z') = z^{-3} |f_+(z')|^2 \sim (z'\Lambda)^{2\tau-2}, \quad (5.25)$$

con  $f_+(z')$  dado en términos del estado inicial  $\psi(x, z) = e^{iP \cdot x} [f_+(z)P_+ + f_-(z)P_-] u(P)$ , que en la última fórmula fue escrito en la expansión cerca del borde. La expresión análoga para llegar a  $F_1$ , proveniente de  $2xF_1(x, q^2)$ , puede obtenerse omitiendo las funciones de Bessel  $K_0^2$  en  $P_A$ .

Podemos ahora calcular la función antisimétrica  $F_3$  como hicimos para el caso escalar, lo cual implica considerar el *kernel* con  $j \approx 1$ . Sin embargo, es más interesante considerar la situación donde la simetría  $R$  está rota en forma espontánea en el IR, de forma tal que aparezca una contribución a la función de estructura  $g_1(x, q^2)$ , como mencionamos en la sección 4.2.4. En este caso  $g_1$  está relacionada con  $F_3$  a través de la relación (4.68):  $2g_1 = F_3$ .

Suponiendo que el *kernel* del Pomerón en este caso puede ser descrito de forma similar, obtenemos la siguiente expresión para la descripción holográfica de la función  $g_1$  en el régimen de  $x$  exponencialmente chico

$$g_1(x, q^2) = \frac{\mathcal{Q}\pi^2}{24} \int dy dy' \mathcal{P}_A(y, q) P_\psi(\rho') \times \frac{e^{\zeta(1-\rho/4)}}{\sqrt{\pi\zeta\rho}} \left( e^{-\frac{\sqrt{\lambda}(\rho-\rho')^2}{8\zeta}} + \mathcal{F}(\rho/2, \rho'/2, \tilde{\zeta}) e^{-\frac{\sqrt{\lambda}(\rho+\rho')^2}{8\zeta}} \right). \quad (5.26)$$

Puede notarse que la expresión de  $F_3$ , obtenida desde  $g_1$  a través de la relación de Callan-Gross (4.68), es análoga a la encontrada para el caso escalar.

Al igual que sucedía en el caso escalar, las expresiones analíticas de  $F_2$  y  $g_1$  están dadas en función de integrales complicadas de resolver. En la siguiente sección mostraremos una forma de aproximar los factores de impacto para poder resolver dichas integrales y comparar los resultados con datos experimentales obtenidos por distintas colaboraciones.

### 5.3. Comparación con datos experimentales

En esta sección compararemos los resultados obtenidos de las funciones de estructura del dilatino con datos experimentales obtenidos para el protón en distintos aceleradores.

Si bien el protón no es dual al dilatón, y de hecho no hay modelos consistentes al día de hoy que puedan describir en forma holográfica a bariones como el protón, la idea es intentar buscar comportamientos universales de procesos fuertemente acoplados para blancos de espín 1/2 que representen bariones de alguna forma.

En el modelo del *hard-wall*, las funciones de estructura calculadas dependen de un conjunto de parámetros, más allá de la dependencia funcional en  $x$  y  $q^2$ , como se puede ver en (5.24) para el caso simétrico. Dado que las integrales en  $z$  y  $z'$  son difíciles de resolver, los autores de [21] propusieron aproximar los factores de impacto  $P_i$  por deltas de Dirac con soporte en escalas de energía apropiadas

$$P_\psi(z') \approx \frac{1}{q'} \delta(z' - 1/q'), \quad P_A(z) \approx \frac{1}{q} \delta(z - 1/q), \quad (5.27)$$

donde  $q'$  es alguna escala del orden de la masa del barión. De esta forma, estamos perdiendo información sobre la función de onda del dilatón, y pensando simplemente en un blanco de espín 1/2 cuyo factor de forma está centrado cerca de la escala de energía de su masa. Por otro lado, el factor de forma del fotón está centrado alrededor de  $q$ , así que la aproximación es razonable. Tomando entonces (5.27), los autores de [21] estudiaron el resultado final de (5.24), que queda determinado por cuatro parámetros: la constante global  $K$ ,  $z_0$ ,  $\rho$  y  $q'$ .

La función de estructura  $F_2$  del protón fue medida, a través del proceso de DIS electromagnético, por la colaboración HERA. De los datos obtenidos por la misma, se encuentra que en el régimen de  $x$  chico hay una considerable cantidad de resultados, con distintos valores de  $q^2$ . Estos datos pueden utilizarse para realizar un ajuste de la expresión (5.24) luego de tomar la aproximación (5.27). Esto fue realizado en [21] considerando los datos de H1-ZEUS [81, 82, 83] para  $x < 10^{-2}$ . Los autores realizaron un ajuste tanto para el modelo conforme como para el modelo de *hard-wall*, buscando el mejor ajuste para cada caso. Para el modelo conforme obtuvieron

$$\rho = 0,7740 \pm 0,0103, \quad q' = 0,5575 \pm 0,0432 \text{ GeV}, \quad (5.28)$$

con un chi-cuadrado reducido (*reduced chi-square*) de  $\chi_{d.o.f.}^2 = 0,75$ . Por otro lado, el mejor ajuste para  $F_2$  utilizando el modelo de *hard-wall* resultó en

$$\rho = 0,7792 \pm 0,0034, \quad q' = 0,4333 \pm 0,0243 \text{ GeV}, \quad z_0 = 4,96 \pm 0,14 \text{ GeV}^{-1}, \quad (5.29)$$

con  $\chi_{d.o.f.}^2 = 1,07$ , lo cual representa un mejor resultado estadístico que para el caso conforme (5.28). Tanto los datos experimentales como el resultado del ajuste se pueden encontrar en la figura 5.1, tomada de [21].

El resultado obtenido luego del ajuste es más que interesante, teniendo todos los valores un resultado razonable:  $\rho$  cae dentro de la transición de acoplamiento fuerte/débil,  $q'$  es del mismo orden que la masa del protón, mientras que en el modelo del *hard-wall* tenemos  $z_0 \sim \mathcal{O}(\Lambda_{\text{QCD}}^{-1})$ , como sería de esperar.

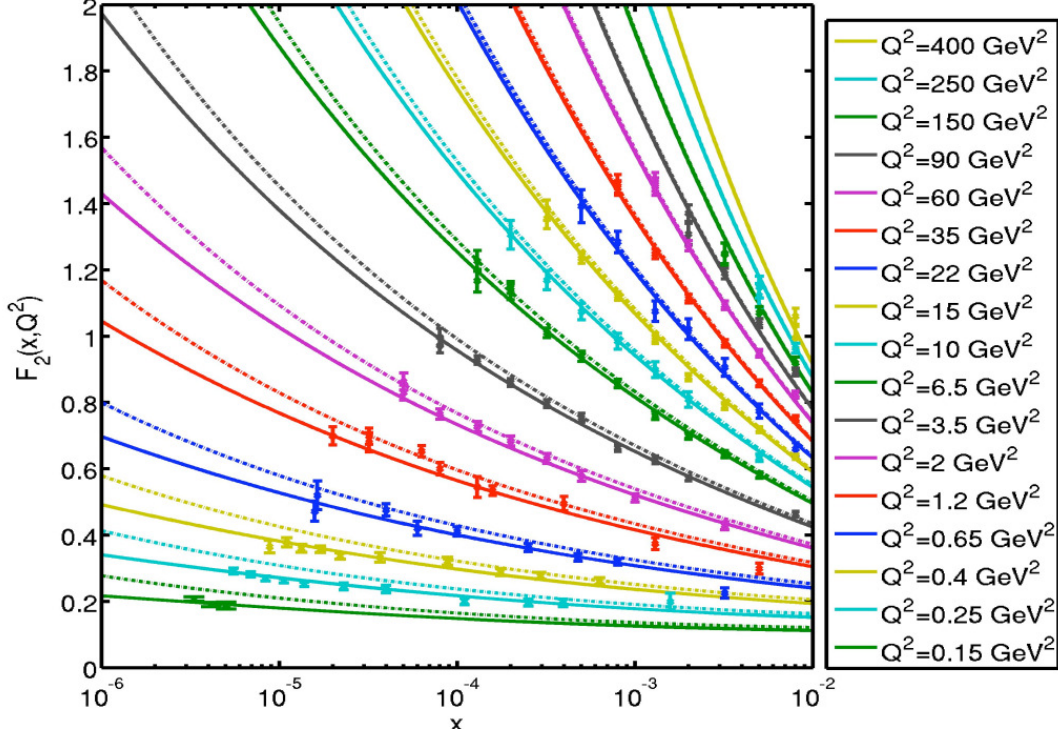


Figura 5.1: Ajuste de  $F_2(x, q^2)$  sobre los datos de H1-ZEUS para  $x$  chico. Las líneas punteada muestran el resultado del ajuste utilizando la técnica del Pomeron, mientras que las líneas continuas muestran el resultado utilizando un método no estudiado en esta tesis asociado a la suma de varios modos intercambiados. El ajuste incluye 249 puntos con  $x < 10^{-2}$  y 34 valores de  $q^2$  (expresados aquí como  $Q^2$ ) con valores entre  $0,1 - 400 \text{ GeV}^2$ , pero solo se muestran los puntos para 17 valores de  $q^2$ .

Pasemos ahora a estudiar la función antisimétrica calculada en la sección anterior. Tomando la aproximación (5.27) en la ecuación (5.26) obtenemos la expresión:

$$\begin{aligned}
 g_1(x, q^2) &= \mathcal{C} \rho^{-1/2} e^{\zeta(1-\rho/4)} \left\{ \frac{\exp\left[-\frac{\log^2(q/q')}{\rho\zeta}\right]}{\sqrt{\zeta}} + \mathcal{F}(q, q', \zeta) \frac{\exp\left[-\frac{\log^2(qq'z_0^2)}{\rho\zeta}\right]}{\sqrt{\zeta}} \right\} \\
 &\approx \mathcal{C} \frac{\rho^{-1/2}}{2x} \frac{q}{q'} e^{\zeta(-\rho/4)} \left\{ \frac{\exp\left[-\frac{\log^2(q/q')}{\rho\zeta}\right]}{\sqrt{\zeta}} + \mathcal{F}(q, q', \zeta) \frac{\exp\left[-\frac{\log^2(qq'z_0^2)}{\rho\zeta}\right]}{\sqrt{\zeta}} \right\}, \quad (5.30)
 \end{aligned}$$

que es tanto válida para el modelo de *hard-wall* como para el caso conforme si tomamos  $\mathcal{F} = 0$ , y donde hemos usado en el último paso que  $e^\zeta \approx \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{1}{x} \frac{q}{q'}$ , mientras que  $\mathcal{C}$  es una constante que depende de factores

numéricos y  $\mathcal{Q}$ .

El siguiente paso sería realizar el ajuste de la expresión (5.30) contra los datos experimentales disponibles de  $g_1$ . Sin embargo la cantidad de datos medidos de  $g_1$  en el régimen que nos resulta de interés (esto es,  $x$  chico y  $q^2$  grande) es considerablemente menor que para el caso de la  $F_2$ , como detallaremos más adelante, por lo que hacer un ajuste no lineal con cuatro parámetros libres no parece lo más conveniente. De todas formas, afortunadamente tres de los cuatro parámetros libres presentes en (5.30) son los mismos que los obtenidos en el ajuste de la función de estructura  $F_2$ , es decir los resultados de (5.28) y (5.29). Si usamos estos resultados como valores de los parámetros en  $g_1$ , solo nos queda un parámetro libre para ajustar: la constante global  $\mathcal{C}$ .

Antes de pasar a realizar este ajuste, reproducimos los ajustes presentados en [21] para la función  $F_2$ . Esto se hizo principalmente para ver si nuestra técnica de ajustes no lineales coincidía con la utilizada por ellos, y para obtener en forma independiente los parámetros que debíamos introducir en la función  $g_1$ . Utilizando el programa *gnuplot* y tomando los datos experimentales contenidos en las citas de [21], obtuvimos los mismos resultados que en (5.28) y (5.29), con diferencias en los  $\chi^2$  recién presentes en la tercera cifra. Armados con este resultado pasamos entonces a realizar nuestro ajuste de la función antisimétrica, que es una contribución original presentada en [24].

La función  $g_1$  del protón fue medida por la colaboración SMC [84], y también más recientemente por la colaboración COMPASS, con energías de 160 GeV y 200 GeV [85, 86]<sup>4</sup>. Como mencionamos anteriormente, los cálculos realizados en este capítulo son válidos en el régimen de  $x$  chico, por lo que consideramos solamente los datos en la región acotada por  $x < 0,01$ . De esta forma nos quedan diecinueve valores experimentales, que pueden usarse para realizar el ajuste de (5.30). Procediendo de esta forma obtuvimos los valores:  $\mathcal{C} = 0,0195 \pm 0,0024$  para el modelo conforme, y  $\mathcal{C} = 0,0191 \pm 0,0023$  para el del *hard-wall*. Ambos ajustes dieron un  $\chi^2_{d.o.f.} = 0,27$ , lo que indica que el modelo está sobre-ajustando el conjunto de datos, por lo que no es un ajuste bueno. El resultado de este ajuste para el caso del *hard-wall*, junto con los puntos experimentales, se muestra en la figura 5.2. Por completitud hemos incluido puntos hasta  $x = 0,035$ , obtenidos por las colaboraciones SMC [84], EMC [87], HERMES [88], SLAC E143 [89], E155 [90] y CLAS [91], todas con  $q^2 > 1$  (GeV/c)<sup>2</sup>. Podemos notar que el ajuste es mejor en la zona  $x < 0,01$ , y que luego se aparta de los puntos experimentales a medida que  $x$  crece, es decir donde el enfoque del Pomerón no es válido.

Hasta aquí el resultado no es muy alentador, ya que el ajuste realizado no fue bueno. Sin embargo, hay resultados más recientes de la colaboración COMPASS del CERN con los que resulta más interesante comparar nuestro modelo. En [22] fueron publicados datos nuevos para la función de estructura  $g_1$  del protón medidos con mayor precisión, con valores de  $q^2 < 1$  (GeV/c)<sup>2</sup> y con la variable de Bjorken dentro del rango  $4 \times 10^{-5} < x < 4 \times 10^{-2}$ , tomando valores considerablemente menores que en las mediciones anteriores. Esta región resulta más acorde para nuestro análisis, ya que todos los datos caen en la región

---

<sup>4</sup>El conjunto de datos puede encontrarse en las mencionadas referencias experimentales.

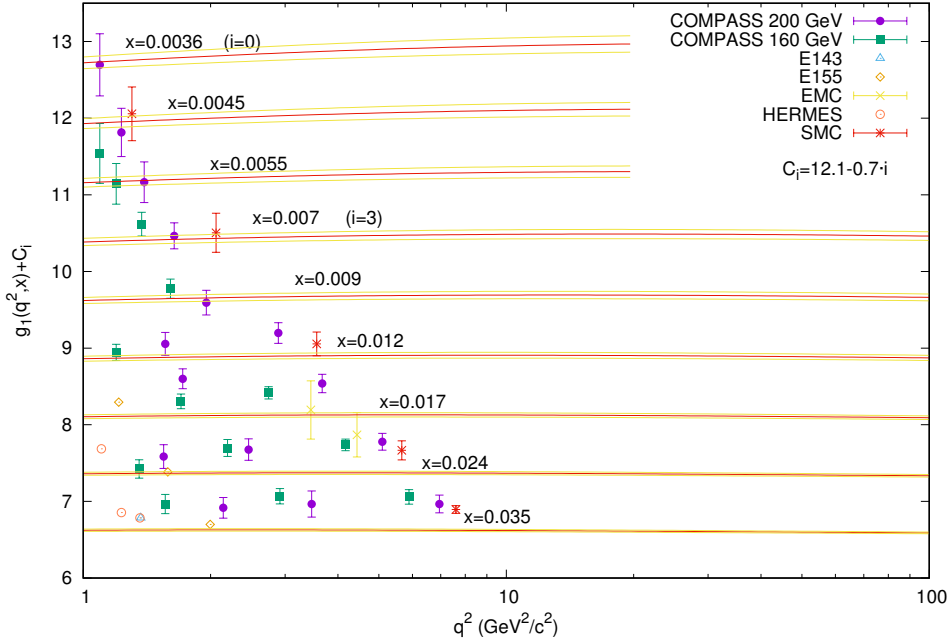


Figura 5.2: Ajuste de la función de estructura  $g_1$  como función de  $q^2$  para diferentes valores de la variable de Bjorken, comparado con los datos experimentales presentados en [86] y sus respectivas referencias. En rojo se muestra la curva resultante del ajuste, mientras que en amarillo se muestran los valores de  $g_1$  considerando el error de  $\mathcal{C}$ . El ajuste corresponde a la región con  $x < 0,01$  (el resto de los valores del parámetro de Bjorken se muestran por completitud), obteniéndose un valor de  $\mathcal{C} = 0,0195 \pm 0,0024$  para la constante global, con un  $\chi^2_{d.o.f.} = 0,27$ . Notar que seguimos la disposición de los datos utilizada en [86], sumando una constante  $C_i = 12,1 - 0,7i$  tanto a los datos de  $g_1$  como a la curva del ajuste, para cada valor fijo de  $x$ .

de  $x$  chico. Haciendo un nuevo ajuste sobre los 30 puntos disponibles obtuvimos

$$\text{modelo conforme} : \mathcal{C} = 0,0114 \pm 0,0011, \chi^2_{d.o.f.} = 0,911 \quad (5.31)$$

$$\text{modelo hard - wall} : \mathcal{C} = 0,0133 \pm 0,0020, \chi^2_{d.o.f.} = 1,670. \quad (5.32)$$

Como se puede observar no hay diferencias significativas en los resultados de  $\mathcal{C}$  en ambos modelos, y el ajuste es bueno en ambos casos, aunque el valor de  $\chi^2_{d.o.f.}$  es un poco más aceptable para el modelo conforme. Recordemos que nuestro modelo para las funciones de estructura es válido en el régimen de  $x$  chico, por lo que parece razonable que con este nuevo conjunto de datos el ajuste para  $g_1$  de un mejor resultado que respecto a los datos con valores mayores de  $x$  del ajuste de la figura 5.2.

Para ser aún más precisos hay que recordar que estamos trabajando en el límite de  $q^2$  grande, por lo que es más apropiado considerar solamente aquellos puntos donde  $q^2$  sea al menos mayor que el valor de  $q'^2$  obtenido en los ajustes de  $F_2$ , es decir que los valores presentados en (5.28) y (5.29). Restringiendo el



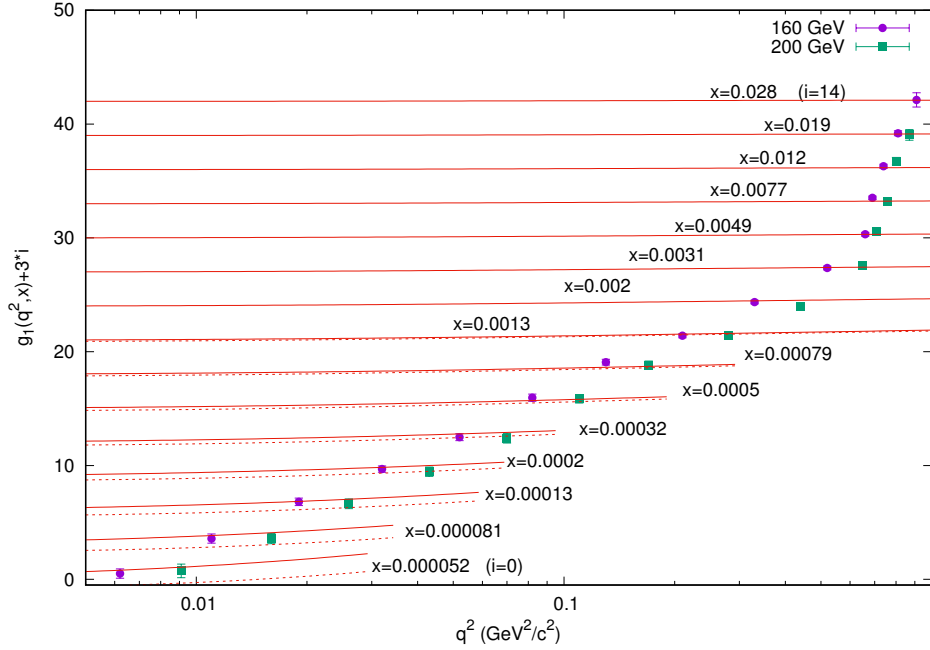


Figura 5.3: Ajuste de la función de estructura  $g_1$  realizado con los datos recientes de [22]. Las curvas continuas corresponden al ajuste del modelo conforme, con una  $C = 0,0112 \pm 0,0020$  y un  $\chi^2_{d.o.f.} = 1,140$ , mientras que las punteadas corresponden al modelo del *hard-wall*, con una  $C = 0,0120 \pm 0,0020$  y un  $\chi^2_{d.o.f.} = 1,074$ . Para valores por encima de  $x = 0,0013$  solo se muestra el ajuste del modelo conforme ya que en esta escala no se pueden observar diferencias entre ambas. En este caso no se muestra el error de  $C$  porque tampoco es visible en esta escala. Notar que para cada valor distinto de  $x$  hemos sumado una constante  $3i$ , siguiendo la convención de [22].

$q^2$  de esta forma obtenemos

$$\text{modelo conforme} : C = 0,0112 \pm 0,0020, \chi^2_{d.o.f.} = 1,140 \quad (5.33)$$

$$\text{modelo hard - wall} : C = 0,0120 \pm 0,0020, \chi^2_{d.o.f.} = 1,074, \quad (5.34)$$

que da un mejor ajuste para el modelo del *hard-wall*. De todas maneras, el valor de la constante global  $C$  no sufre cambios significativos respecto de los ajustes en toda la región de  $q^2$ , siendo siempre del orden  $C \simeq 0,01$ . Este es un resultado interesante para predecir el comportamiento de la función de estructura  $g_1$  del protón, y el principal resultado de esta serie de trabajos y tesis.

En la figura 5.3 se muestran los datos experimentales presentados en [22] junto con nuestro mejor ajuste tanto para el caso conforme como el caso del *hard-wall*. Como es de esperar, se ve que el modelo del *hard-wall* da una mejor descripción en la región donde  $q$  es mayor que  $q'$ , mientras que el modelo conforme da un ajuste aceptable para todos los puntos.

Para resumir comentaremos brevemente el rango de validez de los ajustes realizados en esta sección.

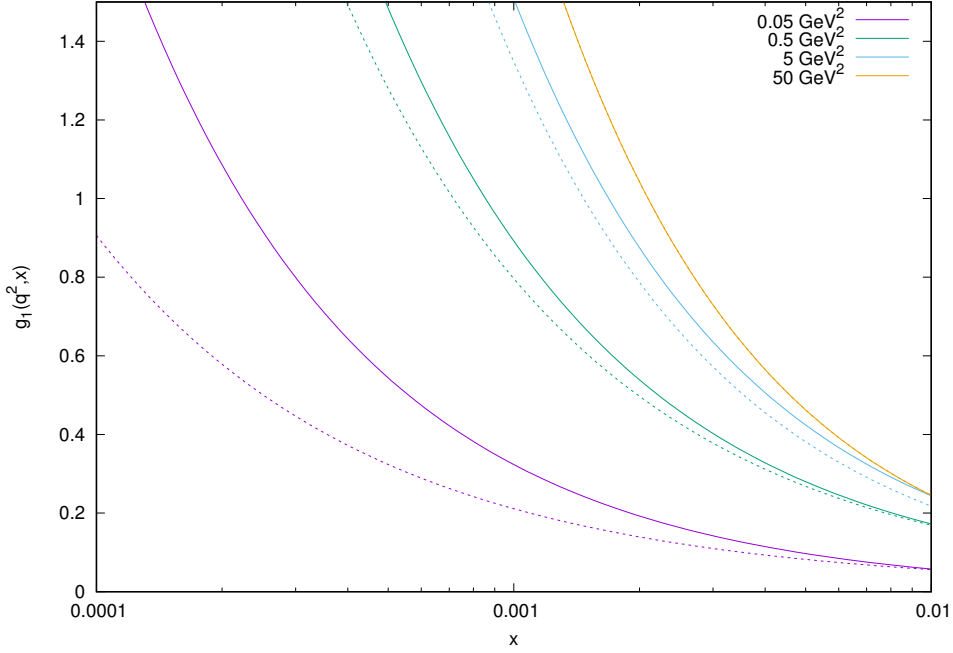


Figura 5.4: Nuestro resultado para la función de estructura  $g_1$ . Las líneas sólidas corresponden al modelo conforme, mientras que las punteadas al modelo del *hard-wall*. Se indican los distintos valores de  $q^2$  que se tomaron para cada curva.

El primer conjunto de datos (correspondientes a la figura 5.2) contiene una amplia cantidad de valores de  $x$ , todos con  $q^2$  grande respecto de  $q'^2$ . Sin embargo los puntos con  $x$  chico, es decir los que pueden ser descritos con la física del Pomerón, son pocos. Por otro lado, los datos más recientes obtenidos por COMPASS y mostrados en la figura 5.3 tienen una amplia cantidad de puntos con valores de  $x$  chico, pero todos a su vez con valores chicos de  $q^2$ . La situación ideal para aplicar el modelo del Pomerón sería tener una amplia cantidad de puntos tanto con  $x$  chico como con  $q^2$  grande, sin embargo este no es el caso con los datos experimentales disponibles al día de hoy. Sería sumamente interesante obtener nuevos datos experimentales en este régimen y ver como se comporta nuestro modelo en ese caso. Con el ajuste actual, resumido en los resultados de (5.34), y el modelo dado por la ecuación (5.30), podemos dar nuestra predicción para el comportamiento de la función de estructura antisimétrica  $g_1(x, q^2)$  en el régimen de  $x$  chico, mostrado en la figura 5.4.

## 5.4. Comentarios finales

En este capítulo calculamos las funciones de estructura en el régimen de  $x$  exponencialmente chico, asociado al límite donde tanto  $s$  como  $\lambda$  son grandes pero mantienen la relación  $\log s/\sqrt{\lambda} = \text{constante}$ . En

el mismo la aproximación local ya no es válida, ya que estamos con energías que son comparables al radio de curvatura del  $AdS$ , hecho que se hace explícito al no poder descartar el término  $m^{\alpha' i/2}$  que aparece en la amplitud de cuerdas cerradas. De esta forma debemos considerar no solo las cuerdas excitadas, sino que también el espacio curvo. Este hecho termina reflejándose en la aparición de una trayectoria de Regge en la amplitud.

Para resolver este problema utilizamos la técnica del Pomerón, introduciendo un *kernel* adecuado que pudiera resolver el operador no local que aparece en la amplitud. Esto lo pudimos hacer tanto para blancos escalares como fermiónicos, y lo resolvimos primero con un *kernel* conforme, es decir para el caso donde el espacio  $AdS$  es geodésicamente completo, o lo que es lo mismo cuando la teoría dual es conforme, mientras que también lo pudimos resolver para el caso confinante en el modelo particular del *hard-wall*. A su vez, obtuvimos la solución cuando el estado intercambiado es un gravitón reggeizado, encontrando así las funciones simétricas  $F_1$  y  $F_2$ , y notando que la amplitud sufre una corrección a la pendiente de Regge de la forma  $2 - 2/\sqrt{\lambda}$ , dada por la constante de acoplamiento de 't Hooft. Por otro lado introdujimos el resultado original de calcular la dispersión medida por un bosón de gauge, viendo que la trayectoria ahora se modifica según  $1 - 1/(2\sqrt{\lambda})$ .

Luego comparamos los resultados obtenidos para las funciones de estructura en el caso del blanco de espín  $1/2$  con distintos datos experimentales. En particular mostramos el estudio hecho en [21], donde pudieron ajustar la función simétrica  $F_2$  determinando cuatro parámetros. Luego, utilizando tres de esos parámetros como valores fijos, pudimos realizar un ajuste de la función de estructura antisimétrica  $g_1$ , comparando nuevamente con los datos disponibles del DIS electromagnético sobre el protón. Esto se hizo tras tomar la aproximación de que los factores de impacto estén dados por deltas de Dirac centradas en alguna escala de energía apropiada, perdiendo de esta forma la información particular sobre el estado del hadrón entrante. El resultado relevante de los ajustes de la función  $g_1$  se mostraron en las figuras 5.2 y 5.3, mientras que en la figura 5.4 se mostró nuestra predicción sobre el comportamiento de  $g_1$  para distintos valores de  $x$  y  $q^2$ .

Los resultados del ajuste mostrado en la figura 5.3 nos dicen que el modelo ajusta muy bien a los datos experimentales obtenidos hasta el presente, aunque no están en el rango óptimo de  $x$  chico y  $q^2$  grande. Vale la pena destacar que este resultado es totalmente original, siendo la primer comparación entre resultados provenientes puramente desde la teoría de supercuerdas con datos experimentales crudos de  $g_1$ , y donde no se han utilizado técnicas perturbativas en ningún momento. También es importante destacar que el resultado obtenido para  $g_1$  es totalmente compatible con el obtenido para la  $F_2$  en [21], por lo que este resultado contribuye a tener un entendimiento unificado del uso de técnica holográfica del Pomerón para estudiar la estructura hadrónica.

Es importante recordar que la función  $g_1$  no surge si uno toma explícitamente el modelo del *hard-wall*, ya que como discutimos en el capítulo anterior, es necesario tomar un modelo donde la simetría  $R$  se rompa en forma espontánea. Esta es una diferencia fundamental entre la teoría de campos que estamos estudiando en forma holográfica y QCD, donde  $g_1$  surge de forma natural. Sin embargo esto sirve para tener un mayor entendimiento de qué tipo de dual holográfico uno esperaría tener para describir la QCD.

Como comentario final, nos quedó pendiente la discusión sobre qué sucede en este régimen con los momentos mencionados en (5.2). Recordemos que el comportamiento de las funciones de estructura simétri-

cas, dado por  $F_2 \sim xF_1 \sim 1/x$ , diverge al integrar los momentos  $M_2^{(i)}$  con  $i \leq 2$ . Ahora bien, en el régimen de  $x$  exponencialmente chico, el Pomerón modifica la dependencia en  $x$  agregando una corrección de la forma:  $F_2 \sim x^{-1+2/\sqrt{\lambda}}$ , como se puede ver por ejemplo en (5.24). Al integrar esta expresión ahora obtenemos un resultado finito<sup>5</sup>, gracias a la corrección en la pendiente de Regge. Vemos entonces que esta región es clave para describir el comportamiento de los momentos.

---

<sup>5</sup>El resultado formal se obtiene luego de realizar las integrales en  $z$  y  $z'$ . Puede chequearse que si se reemplaza la aproximación (5.27) en (5.24) y se calcula el momento  $M_2^2$  el resultado es finito.

# Conclusiones

En esta tesis se realizó un estudio exhaustivo del proceso de *deep inelastic scattering* de leptones cargados sobre hadrones escalares y de espín  $1/2$ , calculando de forma holográfica las funciones de estructura asociadas. Los hadrones pertenecen a la teoría  $\mathcal{N} = 4$  super Yang-Mills deformada en el IR mediante la introducción de una escala  $\Lambda$  y acoplada al electromagnetismo al *gaugear* un subgrupo  $U(1)$  de la simetría R.

El DIS se analizó en forma holográfica utilizando como punto de partida el trabajo original de Polchinski y Strassler [12], y calculando el proceso dual en el espacio  $AdS_5 \times S^5$ , el cual se puede distinguir en tres regímenes caracterizados por la relación entre el parámetro de Bjorken  $x$  y la constante de acoplamiento de 't Hooft:

1.  $x$  grande:  $1/\sqrt{\lambda} \ll x < 1$
2.  $x$  chico:  $e^{-\sqrt{\lambda}} \ll x \ll 1/\sqrt{\lambda}$
3.  $x$  exponencialmente chico:  $x \sim e^{-\sqrt{\lambda}}$

los cuales a su vez se reflejan en forma dual en distintos límites de la teoría de cuerdas.

Los resultados obtenidos en esta tesis pueden separarse en dos aspectos. Por una lado se hizo una contribución puramente teórica sobre el cálculo de las funciones de estructura en cada régimen, pero además en el capítulo 5 realizamos comparaciones con datos experimentales, permitiendo de cierta manera unir resultados provenientes puramente de la teoría de cuerdas con resultados experimentales de QCD.

## Cálculo de funciones de estructura

En la primer parte de la tesis reprodujimos los resultados obtenidos en el régimen de  $x$  grande por [12] y [17], realizando el cálculo de las amplitudes de dispersión de supergravedad, y mostrando que las funciones de estructura siguen una relación tipo Callan-Gross que se encuentra en las ecuaciones (3.35) y (3.41). Resumidamente podemos indicar que las funciones son proporcionales a  $(\Lambda^2/q^2)^{\tau-1}$ , donde  $\tau$  es el *twist* del blanco hadrónico, y que su dependencia en la variable de Bjorken viene dada por  $x^{\tau+1}(1-x)^{\tau-2}$ . Notamos también que para el caso del blanco escalar, la función de estructura antisimétrica  $F_3$  es nula en este régimen.

En la segunda parte de la tesis nos enfocamos en el régimen de Regge, es decir en  $x$  chico, donde el proceso dual está gobernado por las interacciones de las supercuerdas. En este caso reprodujimos los

resultados obtenidos en [12] para el blanco de espín 0 desde las amplitudes de dispersión de cuatro cuerdas cerradas de modos de NS-NS, mostrando que los mismos se pueden obtener también a través del método que denominamos “heurístico”. El mismo consiste en computar la amplitud de dispersión en el régimen de supergravedad con un estado intercambiado en el canal  $t$ , considerado dominante a altas energías. De esta forma pudimos entender que las funciones de estructura simétricas surgen al intercambiar un gravitón en el canal  $t$ .

Como resultado original calculamos la función de estructura antisimétrica  $F_3(x, q^2)$  del glueball, que a diferencia del régimen anterior resulta ser no nula aún para el blanco escalar. Desde el punto de vista de la teoría de campos, la presencia de una función de estructura antisimétrica para una partícula escalar se justifica debido a que  $\mathcal{N} = 4$  SYM es una teoría no quirral. En particular, la presencia de  $F_3$  está directamente relacionada con la anomalía quirral de la teoría, que puede ser calculada desde la función de correlación de tres puntos de la corriente y que resulta proporcional al símbolo  $d_{ABC}$ , como se muestra en (2.35). Por otra parte, en el enfoque holográfico esta función está estrictamente relacionada con la presencia del término de Chern-Simons no abeliano en la acción de supergravedad *gaugeada*, proporcional también al símbolo  $d_{ABC}$ . Desde el enfoque “heurístico” es este término antisimétrico el que permite el intercambio de un bosón de *gauge* a través del canal  $t$  en la amplitud del DIS, dando lugar a la función antisimétrica. Desde el enfoque más formal de teoría de cuerdas  $F_3$  surge al considerar los modos del sector antisimétrico de R-R del gravifotón en la amplitud de cuerdas cerradas.

Este mismo análisis se aplicó al caso del glueballino, para el cual ninguna de las funciones de estructura había sido calculadas en este régimen previamente. El resultado obtenido se puede resumir en las siguientes relaciones de tipo Callan-Gross:

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{\tau + 2}{2\tau + 3} x^{-1} F_2 \sim x^{-2} (\Lambda^2/q^2)^{\tau-1} I_{1,2\tau+3}, \\ F_3 &= g_1 \sim (\tau + 1) F_2, \\ g_2 &= g_3 = g_4 = g_5 = 0. \end{aligned} \tag{5.35}$$

de donde podemos ver que las funciones antisimétricas son del mismo orden que  $F_2$ , que la dependencia general en  $\Lambda/q$  es idéntica al caso de  $x$  grande, y que el comportamiento en  $x$  cambia siendo ahora independiente del *twist* y teniendo siempre potencias negativas de  $-1$  o  $-2$ .

Finalmente estudiamos el sector de  $x$  exponencialmente chico, donde la física de Regge se hace más relevante. Aquí la aproximación local se rompe y es necesario pasar a técnicas más sofisticadas, como es el caso de la técnica del Pomerón holográfico. Esta consiste en introducir un *kernel* particular que permite resolver los operadores locales presentes en la amplitud de dispersión. Siguiendo los pasos de [13, 14, 21] mostramos que en este caso las amplitudes asociadas a las funciones de estructura simétricas, mediadas por el gravitón, sufren una modificación en su trayectoria de Regge de la forma  $2 - 2/\sqrt{\lambda}$ . Debido a la presencia del término de Chern-Simons pudimos estudiar la amplitud donde el intercambio se da por un boson de *gauge reggeizado*, que naturalmente da la contribución a las funciones de estructura antisimétricas. De esta forma calculamos las funciones de estructura  $F_3$  y  $g_1$ , notando que nuevamente  $g_2$  se anula, y encontrando que la trayectoria de Regge sufre en este caso una modificación de la forma  $1 - 1/(2\sqrt{\lambda})$ . Es interesante

notar que tanto para el intercambio del gravitón como de los bosones de *gauge*, en el régimen fuertemente acoplado la trayectoria de Regge sufre modificaciones proporcionales a  $1/\sqrt{\lambda}$ , en contraste con lo que sucede en el régimen débilmente acoplado que mostramos en (2.38), donde la contribución es lineal en la constante de 't Hooft.

Vemos que tanto en  $x$  chico como exponencialmente chico la función de estructura  $g_2$  se anula, cosa que no sucedía en el régimen de  $x$  grande. Este es un resultado interesante, ya que en el capítulo 2 mostramos que para el modelo de partones de QCD esta función también se anulaba. Este es un primer indicio de que cuanto más nos acercamos a la escala de Regge más se parece la física obtenida por amplitudes de cuerdas en espacios curvos con la física de QCD. Otro indicio de esto viene dado por el resultado obtenido al comparar directamente las funciones de estructura calculadas con los resultados experimentales del DIS, que discutiremos a continuación.

### Ajustes y predicciones

En la segunda parte del último capítulo de la tesis llegamos al que puede ser considerado el resultado principal de esta tesis: los ajustes realizados de la función de estructura  $g_1(x, q^2)$  contra los datos experimentales del DIS del protón. Estos datos corresponden a distintas colaboraciones, pero el resultado más importante se basa principalmente en los datos recientes de COMPASS [85, 86].

Estos ajustes se hicieron tras aproximar a los factores de impacto por deltas de Dirac centradas en alguna escala de energía apropiada, considerando de esta forma que la información relevante del hadrón está dada por su espín y por el tipo de interacciones, y no en la forma específica de las soluciones. De esta forma obtuvimos una formula cerrada para las funciones de estructura que solo tienen un parámetro libre dado por una constante global  $\mathcal{C}$ , dado en la ecuación (5.30).

Como resultado del ajuste, realizado para el modelo conforme y para el modelo del *hard-wall*, y cuyo único grado de libertad es una constante global  $\mathcal{C}$ , obtuvimos los parámetros

$$\begin{aligned} \text{modelo conforme} & : \quad \mathcal{C} = 0,0112 \pm 0,0020, \quad \chi_{d.o.f.}^2 = 1,140 \\ \text{modelo hard - wall} & : \quad \mathcal{C} = 0,0120 \pm 0,0020, \quad \chi_{d.o.f.}^2 = 1,074, \end{aligned}$$

que indican que el ajuste es bueno. El mismo se muestra en la figura 5.36. Cabe destacar que este resultado no es nada trivial. A priori no había ninguna razón por la que este modelo debiera ajustar bien resultados experimentales del DIS de hadrones de QCD. Este es el segundo indicio que nos permite pensar que en la escala de Regge las amplitudes de cuerdas en espacios curvos pueden representar aspectos de QCD.

A raíz del ajuste realizamos una predicción del comportamiento de  $g_1$  para distintos valores de  $x$  y  $q^2$ , que se muestra en la figura 5.4. Este resultado obtenido directamente desde la teoría de cuerdas es totalmente novedoso, y cabe resaltar que, como predicción, podría ser probada en un futuro si surgen nuevos datos experimentales de  $g_1$  dentro del régimen de  $x$  chico y  $q^2$  grande.

Este resultado es relevante ya que desde el punto de vista del modelo de partones la función de estructura  $g_1$  tiene una interpretación física bien explícita: está asociado a la asimetría de espín, dado por la resta en la ecuación (2.27) en la dispersión del hadrón contra un fotón con polarización transversal. La interpre-

tación de  $g_1$  es que da la diferencia de probabilidades de encontrar un quark con fracción de momento  $x$  con el espín paralelo y antiparalelo al hadrón.

### Trabajo a futuro

De esta forma concluimos el estudio de las funciones de estructura simétricas y antisimétricas del glueball y el glueballino. Sin embargo, como posible extensión de este trabajo de tesis surgen varias posibilidades. Por un lado, el estudio podría ser generalizado para partículas con otros espines, donde las técnicas aquí desarrolladas serían de total validez. Por otro, sería interesante estudiar otro tipo de modelos cuyo dual holográfico comparta distintas características con QCD. Un ejemplo particular es el modelo  $D3D7$  [10], donde el término topológico presente es el de Wess-Zumino en tres dimensiones. Este modelo resulta interesante también dado que los hadrones son mesones con grados de libertad de sabor, característica que los relaciona con los estados ligados de QCD. Otro modelo es el  $D4D8\overline{D8}$  [6] en el contexto de la teoría de supercuerdas del tipo IIA, que es una teoría no quiral. Esto permitiría extender nuestros resultados para investigar el DIS de neutrinos, es decir el sector DIS electrodébil.



## Apéndice A

# Relación entre generadores de $SU(4)$ y $SO(6)$

En este apéndice describiremos la relación explícita entre los generadores matriciales usuales de  $SU(4)_R$  con los vectores de Killing de la  $S^5$ .

El álgebra de Lie de  $SU(4)$  describe el conjunto completo de matrices hermíticas de dimensión  $4 \times 4$  con traza nula. La base canónica viene dada por los  $\{T_A, A = 1, \dots, 15\}$ , donde los tres elementos diagonales se escriben como

$$T_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, T_8 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, T_{15} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

Las matrices  $T$  cumplen las relaciones de ortonormalidad y de conmutación dadas por

$$\text{Tr}(T_A T_B) = \frac{1}{2} \delta_{AB}, [T_A, T_B] = i f_{ABC} T_C, \quad (\text{A.2})$$

donde  $f_{ABC}$  son las constantes de estructura totalmente antisimétricas. Para  $SU(n \geq 3)$  resulta útil también considerar el símbolo totalmente simétrico  $d_{ABC}$  presente si se consideran las relaciones

$$f_{ABC} = -2i \text{Tr}(T_A [T_B, T_C]), d_{ABC} = 2 \text{Tr}(T_A \{T_B, T_C\}). \quad (\text{A.3})$$

$SU(4)_R$  es el grupo de la simetría  $R$  de la teoría  $\mathcal{N} = 4$  SYM, donde  $d_{ABC}$  aparece por ejemplo en la anomalía de la función de correlación de tres puntos de la corriente  $R$ . A su vez, el símbolo  $d_{ABC}$  es exactamente el que aparece en el término de interacción de Chern-Simons en la acción de supergravedad dual a la teoría de super Yang-Mills [25]. La descripción holográfica de la interacción electromagnética se da *gaugeando* uno de los subgrupos  $U(1) \subset SU(4)$ , cuyo generador<sup>1</sup> está asociado al  $T_3$  [60]. Debido a

<sup>1</sup>Notar que se considera no nulo solamente al campo de *gauge* correspondiente a *gaugear* solo un subgrupo  $U(1)_R$  del grupo  $(U(1)_R)^3 \subset SO(6)_R \simeq SU(4)_R$ .

ésto, al estudiar el DIS electromagnético, solo nos interesa la componente  $d_{33C}$  del símbolo simétrico. Las únicas componentes no nulas son  $d_{338} = 1/\sqrt{3}$  y  $d_{33,15} = 1/\sqrt{6}$ .

Considerando la dualidad holográfica, la simetría  $R$  se realiza en el lado gravitatoria mediante el grupo de isometría  $SO(6)$  de la  $S^5$ , isomorfo a  $SU(4)$ . En este contexto uno tiene una base distinta dada por los quince vectores de Killing  $K_{[i,j]}$ . Considerando la parametrización usual de la  $S^5$  en el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^6$ , estos vectores vienen dados por los generadores de las rotaciones

$$K_{[ij]} \equiv x^i \partial_j - x^j \partial_i, \quad i, j = 1, \dots, 6, \quad (\text{A.4})$$

donde  $x^i$  son las coordenadas cartesianas en  $\mathbb{R}^6$ . Así podemos identificar los generadores  $T$  con los vectores de Killing. Por ejemplo, el mapeo de los generadores diagonales es

$$\begin{aligned} T_3 \leftrightarrow K_3 &\equiv 2i (K_{[14]} + K_{[26]}) , \quad T_8 \leftrightarrow K_8 \equiv \frac{i}{2\sqrt{3}} (K_{[14]} - K_{[26]} + 2K_{[35]}) , \\ T_{15} \leftrightarrow K_{15} &\equiv \frac{i}{\sqrt{6}} (-K_{[14]} + K_{[26]} + K_{[35]}) . \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Los vectores de Killing resultantes están normalizados según<sup>2</sup>

$$\int_{S^5} d^5\Omega \sqrt{g_{S^5}} K_A^a K_B^b g_{ab}(S^5) = -\frac{\pi^3 R^7}{6} \delta_{AB}. \quad (\text{A.6})$$

Definiendo un nuevo símbolo simétrico  $\tilde{d}_{[ii'][jj'][kk']} \equiv \varepsilon_{ii'jj'kk'}$  (que desde ya solo toma valores no nulos  $\pm 1$ ), se llega a la identidad

$$\varepsilon_{ii'jj'kk'} = \frac{3}{4\pi^3 R^6} \int_{S^5} d^5\Omega \varepsilon^{abcde} K_a^{[ii']} \partial_b K_c^{[jj']} \partial_d K_e^{[kk']}. \quad (\text{A.7})$$

Al escribir explícitamente esta identidad en la base de los  $K_A$ , (A.7) se transforma en una expresión integral para  $d_{ABC}$  en función del símbolo de Levi-Civita en cinco dimensiones y los vectores de Killing, dada por

$$d_{ABC} = \frac{3i}{2\pi^3 R^6} \int_{S^5} d^5\Omega \varepsilon^{abcde} K_a^A \partial_b K_c^B \partial_d K_e^C. \quad (\text{A.8})$$

Esto permite reescribir el término de Chern-Simons en la notación familiar. Con estas convenciones la contracción relevante del símbolo simétrico con los generadores que aparecen en las funciones de estructura antisimétricas  $F_3$  y  $g_1$  toma la forma  $d_{33C} K_C = (i/2) K_{[35]}$ . Esto quiere decir que dichas funciones son proporcionales al autovalor  $\mathcal{Q} \equiv d_{33C} Q_C = (i/2) Q_{[35]}$  del armónico esférico que describe las rotaciones internas en el plano  $(3, 5)$ , por lo que  $F_3$  y  $g_1$  serán no nulas solo para hadrones cargados respecto a  $K_{[35]}$ .

<sup>2</sup> Aquí la normalización tiene un signo poco usual debido a la inclusión de la unidad imaginaria en las definiciones.

## Apéndice B

# Derivación del término de Chern-Simons

Como mencionamos en distintos capítulos de la tesis, el término de Chern-Simons en supergravedad *gaugeada* en cinco dimensiones puede derivarse desde la teoría de cuerdas IIB en un fondo  $AdS_5 \times S^5$ .

El primer paso es calcular la amplitud de tres cuerdas cerradas, comenzando el cálculo en espacio plano. Luego debemos evaluar los campos entrantes en un *Ansatz* específico sobre el espacio curvo. Este *Ansatz* corresponde a la compactificación sobre la 5-esfera de las soluciones de supergravedad en diez dimensiones

El término relevante en la acción de supergravedad IIB en  $d = 10$  viene dado por

$$S_{10} = -\frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10}x \sqrt{-G} \left( \mathcal{R}_{10} - \frac{1}{240} \mathcal{F}_5^2 \right) + \dots, \quad (\text{B.1})$$

junto con la condición de autodualidad  $\mathcal{F}_5 = *\mathcal{F}_5$ , y donde  $G_{MN}$  es la métrica en diez dimensiones. El siguiente paso es tomar las perturbaciones de la métrica (3.2) y la 4-forma (4.34). Luego, la amplitud de cuerdas en espacio plano viene dada por la función de correlación

$$\mathcal{A} \sim \int \prod_{i=1}^3 d^2z_i \langle V_{\text{RR}}^{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(z_1, \bar{z}_1) V_{\text{RR}}^{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(z_2, \bar{z}_2) V_{\text{NSNS}}^{(-1, -1)}(z_3, \bar{z}_3) \rangle \quad (\text{B.2})$$

donde los operadores de vértices sobre la 2-esfera y las convenciones correspondientes pueden encontrarse en [75, 80, 92]. En el caso en que estamos interesados, los modos de RR corresponden a perturbaciones de la 5-forma autodual, mientras que los modos de NSNS corresponden a modos del gravitón. El resultado final, que se encuentra en [80], tiene la forma

$$\mathcal{A}(\mathcal{F}_5^{(1)}, \mathcal{F}_5^{(2)}, h) = -\frac{2i}{3} \kappa_{10}^{-2} h^{MN} \mathcal{F}_{MM_1\dots M_4}^{(1)} \mathcal{F}_N^{(2) M_1\dots M_4}, \quad (\text{B.3})$$

y corresponde a un término de interacción de supergravedad que puede obtenerse perturbando el término de  $\mathcal{F}_5^2$  utilizando  $G_{MN} \rightarrow G_{MN} + h_{MN}$ .

La extensión de este término en el escenario de espacio curvo puede escribirse como

$$\frac{1}{3}\kappa_{10}^{-2} \int_{AdS_5 \times S^5} d^{10}x \sqrt{-G} h^{MN} \mathcal{F}_{MM_1 \dots M_4}^{(1)} \mathcal{F}_N^{(2) M_1 \dots M_4} . \quad (\text{B.4})$$

Insertando las perturbaciones del gravitón y la 4-forma, puede verse fácilmente que solo sobreviven los términos cruzados del producto entre dos términos tipo  $(1 + *)$ , llegando a la siguiente estructura

$$\sqrt{-G} \mathcal{F}_{M_1 N O P Q} \mathcal{F}_{M_2}^{N O P Q} h^{M_1 M_2} \sim [\varepsilon^{m n o p q} \partial_m A_n^A \partial_o A_p^B A_q^C] [\sqrt{g_{S^5}} \epsilon_{abcde} \nabla^a K_A^b \nabla^c K_B^d K_C^e] . \quad (\text{B.5})$$

Vemos entonces que, desde el punto de vista de la teoría de diez dimensiones, el término de Chern-Simons en el  $AdS_5$  proviene de integrar la esfera  $S^5$ . El cálculo explícito de dicha integral da lugar al símbolo  $d_{ABC}$ , como se muestra en (A.8).

# Bibliografía

- [1] H. Fritzsche, Murray Gell-Mann, and H. Leutwyler. Advantages of the Color Octet Gluon Picture. *Phys. Lett.*, 47B:365–368, 1973.
- [2] Juan Martin Maldacena. The Large N limit of superconformal field theories and supergravity. *Int. J. Theor. Phys.*, 38:1113–1133, 1999. [Adv. Theor. Math. Phys.2,231(1998)].
- [3] Nissan Itzhaki, Juan Martin Maldacena, Jacob Sonnenschein, and Shimon Yankielowicz. Supergravity and the large N limit of theories with sixteen supercharges. *Phys. Rev.*, D58:046004, 1998.
- [4] Ofer Aharony, Steven S. Gubser, Juan Martin Maldacena, Hiroshi Ooguri, and Yaron Oz. Large N field theories, string theory and gravity. *Phys. Rept.*, 323:183–386, 2000.
- [5] David Mateos, Robert C. Myers, and Rowan M. Thomson. Thermodynamics of the brane. *JHEP*, 05:067, 2007.
- [6] Tadakatsu Sakai and Shigeki Sugimoto. Low energy hadron physics in holographic QCD. *Prog. Theor. Phys.*, 113:843–882, 2005.
- [7] Ezequiel Koile, Sebastian Macaluso, and Martin Schvellinger. Deep inelastic scattering structure functions of holographic spin-1 hadrons with  $N_f \geq 1$ . *JHEP*, 01:166, 2014.
- [8] Ezequiel Koile, Nicolas Kovensky, and Martin Schvellinger. Hadron structure functions at small  $x$  from string theory. *JHEP*, 05:001, 2015.
- [9] Ezequiel Koile, Nicolas Kovensky, and Martin Schvellinger. Deep inelastic scattering cross sections from the gauge/string duality. *JHEP*, 12:009, 2015.
- [10] Martin Kruczenski, David Mateos, Robert C. Myers, and David J. Winters. Meson spectroscopy in AdS / CFT with flavor. *JHEP*, 07:049, 2003.
- [11] Martin Kruczenski, David Mateos, Robert C. Myers, and David J. Winters. Towards a holographic dual of large N(c) QCD. *JHEP*, 05:041, 2004.

- [12] Joseph Polchinski and Matthew J. Strassler. Deep inelastic scattering and gauge / string duality. *JHEP*, 05:012, 2003.
- [13] Richard C. Brower, Joseph Polchinski, Matthew J. Strassler, and Chung-I Tan. The Pomeron and gauge/string duality. *JHEP*, 12:005, 2007.
- [14] Richard C. Brower, Matthew J. Strassler, and Chung-I Tan. On The Pomeron at Large 't Hooft Coupling. *JHEP*, 03:092, 2009.
- [15] Jian-Hua Gao and Bo-Wen Xiao. Polarized Deep Inelastic and Elastic Scattering From Gauge/String Duality. *Phys. Rev.*, D80:015025, 2009.
- [16] Jian-Hua Gao and Bo-Wen Xiao. Nonforward Compton scattering in AdS/CFT correspondence. *Phys. Rev.*, D81:035008, 2010.
- [17] Jian-Hua Gao and Zong-Gang Mou. Polarized Deep Inelastic Scattering Off the Neutron From Gauge/String Duality. *Phys. Rev.*, D81:096006, 2010.
- [18] David Jorin, Nicolas Kovensky, and Martin Schvellinger. Towards  $1/N$  corrections to deep inelastic scattering from the gauge/gravity duality. *JHEP*, 04:113, 2016.
- [19] David Jorin, Martin Schvellinger, and Nicolas Kovensky. Deep inelastic scattering off scalar mesons in the  $1/N$  expansion from the D3D7-brane system. *JHEP*, 12:003, 2016.
- [20] Nicolas Kovensky, Gustavo Michalski, and Martin Schvellinger.  $1/N$  corrections to  $F_1$  and  $F_2$  structure functions of vector mesons from holography. *Phys. Rev.*, D99(4):046005, 2019.
- [21] Richard C. Brower, Marko Djuric, Ina Sarcevic, and Chung-I Tan. String-Gauge Dual Description of Deep Inelastic Scattering at Small- $x$ . *JHEP*, 11:051, 2010.
- [22] M. Aghasyan et al. Longitudinal double-spin asymmetry  $A_1^P$  and spin-dependent structure function  $g_1^P$  of the proton at small values of  $x$  and  $Q^2$ . *Phys. Lett.*, B781:464–472, 2018.
- [23] Nicolas Kovensky, Gustavo Michalski, and Martin Schvellinger. DIS off glueballs from string theory: the role of the chiral anomaly and the Chern-Simons term. *JHEP*, 04:118, 2018.
- [24] Nicolas Kovensky, Gustavo Michalski, and Martin Schvellinger. Deep inelastic scattering from polarized spin-1/2 hadrons at low  $x$  from string theory. *JHEP*, 04:084, 2018.
- [25] Edward Witten. Anti-de Sitter space and holography. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 2:253–291, 1998.
- [26] S. S. Gubser, Igor R. Klebanov, and Alexander M. Polyakov. Gauge theory correlators from noncritical string theory. *Phys. Lett.*, B428:105–114, 1998.
- [27] Gerard 't Hooft. Dimensional reduction in quantum gravity. *Conf. Proc.*, C930308:284–296, 1993.

- [28] Leonard Susskind. The World as a hologram. *J. Math. Phys.*, 36:6377–6396, 1995.
- [29] R. Grimm, M. Sohnius, and J. Wess. Extended Supersymmetry and Gauge Theories. *Nucl. Phys.*, B133:275–284, 1978.
- [30] Eric D’Hoker and Daniel Z. Freedman. Supersymmetric gauge theories and the AdS / CFT correspondence. In *Strings, Branes and Extra Dimensions: TASI 2001: Proceedings*, pages 3–158, 2002.
- [31] E. J. Schreier. Conformal symmetry and three-point functions. *Phys. Rev.*, D3:980–988, 1971.
- [32] Alfonso V. Ramallo. Introduction to the AdS/CFT correspondence. *Springer Proc. Phys.*, 161:411–474, 2015.
- [33] Gerard ’t Hooft. A Planar Diagram Theory for Strong Interactions. *Nucl. Phys.*, B72:461, 1974. [,337(1973)].
- [34] Aneesh V. Manohar. Large N QCD. In *Probing the standard model of particle interactions. Proceedings, Summer School in Theoretical Physics, NATO Advanced Study Institute, 68th session, Les Houches, France, July 28-September 5, 1997. Pt. 1, 2*, pages 1091–1169, 1998.
- [35] Michael B. Green, J. H. Schwarz, and Edward Witten. *SUPERSTRING THEORY. VOL. 1: INTRODUCTION*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. 1988.
- [36] J. Polchinski. *String theory. Vol. 1: An introduction to the bosonic string*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2007.
- [37] Gary T. Horowitz and Andrew Strominger. Black strings and P-branes. *Nucl. Phys.*, B360:197–209, 1991.
- [38] R. Hofstadter. Nuclear and nucleon scattering of high-energy electrons. *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, 7:231–316, 1957.
- [39] Martin Breidenbach, Jerome I. Friedman, Henry W. Kendall, Elliott D. Bloom, D. H. Coward, H. C. DeStaebler, J. Drees, Luke W. Mo, and Richard E. Taylor. Observed Behavior of Highly Inelastic electron-Proton Scattering. *Phys. Rev. Lett.*, 23:935–939, 1969.
- [40] Aneesh V. Manohar. An Introduction to spin dependent deep inelastic scattering. In *Lake Louise Winter Institute: Symmetry and Spin in the Standard Model Lake Louise, Alberta, Canada, February 23-29, 1992*, pages 1–46, 1992.
- [41] R. Devenish and A. Cooper-Sarkar. *Deep inelastic scattering*. 2004.
- [42] L. Aliaga et al. Design, Calibration, and Performance of the MINERvA Detector. *Nucl. Instrum. Meth.*, A743:130–159, 2014.

- [43] V. N. Gribov and L. N. Lipatov.  $e^+e^-$  pair annihilation and deep inelastic  $e p$  scattering in perturbation theory. *Sov. J. Nucl. Phys.*, 15:675–684, 1972. [*Yad. Fiz.*15,1218(1972)].
- [44] V. N. Gribov and L. N. Lipatov. Deep inelastic  $e p$  scattering in perturbation theory. *Sov. J. Nucl. Phys.*, 15:438–450, 1972. [*Yad. Fiz.*15,781(1972)].
- [45] Yuri L. Dokshitzer. Calculation of the Structure Functions for Deep Inelastic Scattering and  $e^+e^-$  Annihilation by Perturbation Theory in Quantum Chromodynamics. *Sov. Phys. JETP*, 46:641–653, 1977. [*Zh. Eksp. Teor. Fiz.*73,1216(1977)].
- [46] Guido Altarelli and G. Parisi. Asymptotic Freedom in Parton Language. *Nucl. Phys.*, B126:298–318, 1977.
- [47] L. N. Lipatov. The parton model and perturbation theory. *Sov. J. Nucl. Phys.*, 20:94–102, 1975. [*Yad. Fiz.*20,181(1974)].
- [48] Victor S. Fadin, E. A. Kuraev, and L. N. Lipatov. On the Pomernanchuk Singularity in Asymptotically Free Theories. *Phys. Lett.*, 60B:50–52, 1975.
- [49] L. N. Lipatov. Reggeization of the Vector Meson and the Vacuum Singularity in Nonabelian Gauge Theories. *Sov. J. Nucl. Phys.*, 23:338–345, 1976. [*Yad. Fiz.*23,642(1976)].
- [50] E. A. Kuraev, L. N. Lipatov, and Victor S. Fadin. Multi - Reggeon Processes in the Yang-Mills Theory. *Sov. Phys. JETP*, 44:443–450, 1976. [*Zh. Eksp. Teor. Fiz.*71,840(1976)].
- [51] E. A. Kuraev, L. N. Lipatov, and Victor S. Fadin. The Pomernanchuk Singularity in Nonabelian Gauge Theories. *Sov. Phys. JETP*, 45:199–204, 1977. [*Zh. Eksp. Teor. Fiz.*72,377(1977)].
- [52] I. I. Balitsky and L. N. Lipatov. The Pomernanchuk Singularity in Quantum Chromodynamics. *Sov. J. Nucl. Phys.*, 28:822–829, 1978. [*Yad. Fiz.*28,1597(1978)].
- [53] G. Martinelli and Christopher T. Sachrajda. A Lattice Study of Nucleon Structure. *Nucl. Phys.*, B316:355–372, 1989.
- [54] A. Ali Khan et al. Light hadron spectroscopy with two flavors of dynamical quarks on the lattice. *Phys. Rev.*, D65:054505, 2002. [Erratum: *Phys. Rev.*D67,059901(2003)].
- [55] M. Anselmino, A. Efremov, and E. Leader. The Theory and phenomenology of polarized deep inelastic scattering. *Phys. Rept.*, 261:1–124, 1995. [Erratum: *Phys. Rept.*281,399(1997)].
- [56] Bodo Lampe and Ewald Reya. Spin physics and polarized structure functions. *Phys. Rept.*, 332:1–163, 2000.
- [57] Richard P. Feynman. Very high-energy collisions of hadrons. *Phys. Rev. Lett.*, 23:1415–1417, 1969. [494(1969)].



- [58] J. D. Bjorken. Asymptotic Sum Rules at Infinite Momentum. *Phys. Rev.*, 179:1547–1553, 1969.
- [59] Curtis G. Callan, Jr. and David J. Gross. High-energy electroproduction and the constitution of the electric current. *Phys. Rev. Lett.*, 22:156–159, 1969.
- [60] Simon Caron-Huot, Pavel Kovtun, Guy D. Moore, Andrei Starinets, and Laurence G. Yaffe. Photon and dilepton production in supersymmetric Yang-Mills plasma. *JHEP*, 12:015, 2006.
- [61] Babiker Hassanain, John March-Russell, and Martin Schvellinger. Warped Deformed Throats have Faster (Electroweak) Phase Transitions. *JHEP*, 10:089, 2007.
- [62] Babiker Hassanain and Martin Schvellinger. Holographic current correlators at finite coupling and scattering off a supersymmetric plasma. *JHEP*, 04:012, 2010.
- [63] Babiker Hassanain and Martin Schvellinger. Towards 't Hooft parameter corrections to charge transport in strongly-coupled plasma. *JHEP*, 10:068, 2010.
- [64] Babiker Hassanain and Martin Schvellinger. Plasma conductivity at finite coupling. *JHEP*, 01:114, 2012.
- [65] Babiker Hassanain and Martin Schvellinger. Diagnostics of plasma photoemission at strong coupling. *Phys. Rev.*, D85:086007, 2012.
- [66] Daniel Z. Freedman, Samir D. Mathur, Alec Matusis, and Leonardo Rastelli. Correlation functions in the CFT(d) / AdS(d+1) correspondence. *Nucl. Phys.*, B546:96–118, 1999.
- [67] Daniel Z. Freedman, Gianluca Grignani, Kenneth Johnson, and Nuria Rius. Conformal symmetry and differential regularization of the three gluon vertex. *Annals Phys.*, 218:75–120, 1992.
- [68] Joseph Polchinski and Matthew J. Strassler. The String dual of a confining four-dimensional gauge theory. 2000.
- [69] Jeffrey R. Forshaw and D. A. Ross. Quantum chromodynamics and the pomeron. *Cambridge Lect. Notes Phys.*, 9:1–248, 1997.
- [70] L. N. Lipatov. Small x physics in perturbative QCD. *Phys. Rept.*, 286:131–198, 1997.
- [71] Joseph Polchinski and Matthew J. Strassler. Hard scattering and gauge / string duality. *Phys. Rev. Lett.*, 88:031601, 2002.
- [72] H. J. Kim, L. J. Romans, and P. van Nieuwenhuizen. The Mass Spectrum of Chiral N=2 D=10 Supergravity on  $S^{*5}$ . *Phys. Rev.*, D32:389, 1985.
- [73] Arnaud Baguet, Olaf Hohm, and Henning Samtleben. Consistent Type IIB Reductions to Maximal 5D Supergravity. *Phys. Rev.*, D92(6):065004, 2015.

- [74] H. Kawai, D. C. Lewellen, and S. H. H. Tye. A Relation Between Tree Amplitudes of Closed and Open Strings. *Nucl. Phys.*, B269:1–23, 1986.
- [75] Mohammad R. Garousi and Robert C. Myers. Superstring scattering from D-branes. *Nucl. Phys.*, B475:193–224, 1996.
- [76] Yoshitaka Hatta, Takahiro Ueda, and Bo-Wen Xiao. Polarized DIS in N=4 SYM: Where is spin at strong coupling? *JHEP*, 08:007, 2009.
- [77] Lorenzo Cornalba, Miguel S. Costa, Joao Penedones, and Ricardo Schiappa. Eikonal Approximation in AdS/CFT: From Shock Waves to Four-Point Functions. *JHEP*, 08:019, 2007.
- [78] J. Bartels, J. Kotanski, A. M. Mischler, and V. Schomerus. Regge limit of R-current correlators in AdS Supergravity. *Nucl. Phys.*, B830:153–178, 2010.
- [79] S. D. Mathur, A. Matusis, E. D’Hoker, D. Z. Freedman and L. Rastelli. Graviton and gauge boson propagators in AdS(d+1). *Nucl. Phys. B*, 562:330, 1999.
- [80] Katrin Becker, Melanie Becker, Ilarion V. Melnikov, Daniel Robbins, and Andrew B. Royston. Some tree-level string amplitudes in the NSR formalism. *JHEP*, 12:010, 2015.
- [81] F. D. Aaron et al. Combined Measurement and QCD Analysis of the Inclusive  $e^+p$  Scattering Cross Sections at HERA. *JHEP*, 01:109, 2010.
- [82] S. Chekanov et al. Measurement of the neutral current cross-section and F(2) structure function for deep inelastic  $e + p$  scattering at HERA. *Eur. Phys. J.*, C21:443–471, 2001.
- [83] J. Breitweg et al. ZEUS results on the measurement and phenomenology of F(2) at low  $x$  and low  $Q^{*2}$ . *Eur. Phys. J.*, C7:609–630, 1999.
- [84] B. Adeva et al. Spin asymmetries  $A(1)$  and structure functions  $g_1$  of the proton and the deuteron from polarized high-energy muon scattering. *Phys. Rev.*, D58:112001, 1998.
- [85] M. G. Alekseev et al. The Spin-dependent Structure Function of the Proton  $g_1^p$  and a Test of the Bjorken Sum Rule. *Phys. Lett.*, B690:466–472, 2010.
- [86] C. Adolph et al. The spin structure function  $g_1^p$  of the proton and a test of the Bjorken sum rule. *Phys. Lett.*, B753:18–28, 2016.
- [87] J. Ashman et al. A Measurement of the Spin Asymmetry and Determination of the Structure Function  $g(1)$  in Deep Inelastic Muon-Proton Scattering. *Phys. Lett.*, B206:364, 1988. [,340(1987)].
- [88] A. Airapetian et al. Precise determination of the spin structure function  $g(1)$  of the proton, deuteron and neutron. *Phys. Rev.*, D75:012007, 2007.

- [89] K. Abe et al. Measurements of the proton and deuteron spin structure functions  $g(1)$  and  $g(2)$ . *Phys. Rev.*, D58:112003, 1998.
- [90] P. L. Anthony et al. Measurements of the  $Q^{*2}$  dependence of the proton and neutron spin structure functions  $g(1)^{*p}$  and  $g(1)^{*n}$ . *Phys. Lett.*, B493:19–28, 2000.
- [91] Y. Prok et al. Precision measurements of  $g_1$  of the proton and the deuteron with 6 GeV electrons. *Phys. Rev.*, C90(2):025212, 2014.
- [92] Hamid R. Bakhtiarizadeh and Mohammad R. Garousi. Sphere-level Ramond-Ramond couplings in Ramond-Neveu-Schwarz formalism. *Nucl. Phys.*, B884:408–437, 2014.
- [93] Y. Hatta, E. Iancu, and A. H. Mueller. Deep inelastic scattering at strong coupling from gauge/string duality: The Saturation line. *JHEP*, 01:026, 2008.