



Universidad Nacional de La Plata  
Facultad de Ciencias Exactas

Tesis para obtener el grado académico de  
Licenciado en Física

ESTUDIO DEL ACOPLAMIENTO EFECTIVO ENTRE  
SKYRMIONES MAGNÉTICOS MEDIADOS POR DINÁMICA  
ELECTRÓNICA

Esteban Andrés Iroulart

Director: Dr. Héctor Diego Rosales

LA PLATA, ARGENTINA  
- MARZO DE 2021 -



# Prefacio

Esta Tesis es presentada como parte de los requisitos para obtener el grado académico de Licenciado en Física de la Universidad Nacional de La Plata.

Esteban Andrés Iroulart.  
e-mail: [estebaniroulart13@gmail.com](mailto:estebaniroulart13@gmail.com)  
La Plata, marzo de 2021.



# Resumen

En este trabajo, se estudiaron distintos tipos de interacciones efectivas entre skyrmiones mediadas por la dinámica de electrones itinerantes.

Se analizó el comportamiento de la energía del estado fundamental electrónico del sistema y la fuerza efectiva entre skyrmiones, generada por la dinámica electrónica, en función del llenado electrónico y de la distancia entre centros de los skyrmiones. Se analizaron en particular tres tipos de skyrmiones: ferromagnéticos, ferrimagnéticos y antiferromagnéticos, y se compararon los resultados con los de dominios ferromagnéticos.

Además, se estudió la densidad electrónica en cada una de las texturas magnéticas para determinar si éstas pueden generar algún tipo de localización de los estados electrónicos.

Para los tres tipos de skyrmiones estudiados, se obtuvo que, a llenados electrónicos bajos, la energía presenta un comportamiento oscilatorio con la distancia; se generan mínimos locales de energía para ciertos valores regulares de la distancia entre centros, es decir, distancias tales que la configuración de skyrmiones es energéticamente más estable. En particular, las oscilaciones en la energía para el caso de los skyrmiones antiferromagnéticos presentan mayor amplitud en comparación con los otros casos. A medida que se aumenta el llenado, se obtiene que para el caso de skyrmiones ferromagnéticos y dominios ferromagnéticos, el comportamiento oscilatorio de la energía con la distancia se pierde. En cambio, para el caso de skyrmiones antiferromagnéticos, se genera un interesante patrón regular de mínimos y máximos locales bien definidos.

Por otro lado, se evaluó la densidad electrónica en cada sitio para los skyrmiones ferromagnéticos, skyrmiones antiferromagnéticos y dominios ferromagnéticos en función del llenado electrónico. Se podría indicar, en base a lo obtenido, que la configuración para skyrmiones antiferromagnéticos tiende a ser más estable que la de skyrmiones o dominios ferromagnéticos, estando esto en acuerdo con lo obtenido previamente para la energía electrónica.

En base a los resultados adquiridos, se puede destacar la estabilidad de los skyrmiones antiferromagnéticos por encima de los otros tipos de texturas magnéticas, lo cual los hace candidatos prometedores para el uso de dispositivos electrónicos y otras potenciales aplicaciones.



# Agradecimientos

A las 5 personas de mi familia, mis padres Claudia y Luis María, por el constante apoyo, ánimo y confianza a 450km de distancia. Por hacerme quien soy y por estar siempre a mi lado. A mis hermanos Juan, Paula y Bautista por haberme acompañado ya sea en la distancia como en la cercanía, en mis mejores días o mis peores, por aguantarme, y por saber aconsejarme siempre.

Al resto de mi familia, extendida por el mundo, desde Córdoba a París, todos mis tios, primos, abuelos, y familia sin título oficial, por estar siempre, por recibirme siempre con los brazos abiertos, por hacer de cada visita una recarga de pilas, ánimo y entusiasmo para seguir. Por cada consejo, cada mate, cada asado, cada canción de TOCH. Para los que están presentes acá leyendo esto y para los que no.

A mi gente de La Plata: Santi, Pau P., Mati, Lucas, Lau, Juan, Ati, Mari, Pau C., Javi, Luci y Colo. Por hacer de estos años los mejores de vida, por acompañarme todos y cada uno de los días, por cada abrazo, consejo, mate, birra, quake, fútbol, y demás. Cada uno por separado se merece más que una mención, pero como queremos que esta tesis tenga dimensión finita, solo agradezco en especial a los últimos tres, por hacer de su departamento de 47 mi hogar (y no cobrarme alquiler).

A todos mis amigos de Chaves, en especial a Santi, Nicolino, Valen, Facu, Toti, Irucha y Majó, por estar siempre acompañándome, explícita o implícitamente, especialmente en los primeros años (y los más difíciles).

¡A mis panas de Córdoba! Especialmente a Colo, Ceci y Augusto, por hacerme sentir querido y requerido por sus pagos. Por llenarme de alegría cada vez que voy, por medio de mates, fernet, vino o lo que sea, volviendo cada vez más pleno a mi rutina.

A mi director Diego, por su excelente atención, paciencia y disponibilidad. Por hacer de este trabajo una larga pero linda experiencia.

A un grupo extenso de personas que por la facultad conocí, desde compañeros, personal no docente y personal docente. Por hacer de la facultad un lugar más cálido y donde puedo sentirme muy a gusto. Dentro del último grupo, destaco a Nacho y Pedro, los auto (o no tanto) proclamados mejor JTP y AD del Departamento, por entender perfectamente la función del docente y acompañarnos a sus alumnos en los últimos años de cursada.

Al CONICET, por permitirme continuar con mi trabajo de investigación al otorgarme una beca doctoral.

Por último pero no menos importante, a mi mejor amigo, Mati K, por acompañarme todos los años previos a la carrera y el primer año de la misma, y por servirme de motivación e inspiración de ahí en adelante. Esto es para vos, flaco.





# Índice general

<b>Prefacio</b>	<b>iii</b>
<b>Resumen</b>	<b>v</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>vii</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación . . . . .	1
1.2. Interacciones magnéticas . . . . .	3
1.2.1. Interacción de intercambio . . . . .	3
1.2.2. Acoplamiento Zeeman . . . . .	4
1.2.3. Interacción Dzyaloshinskii-Moriya . . . . .	4
1.2.4. Acoplamiento de Hund . . . . .	5
1.3. Órdenes magnéticos . . . . .	5
1.3.1. Ferromagnetos . . . . .	5
1.3.2. Antiferromagnetos . . . . .	5
1.3.3. Ferrimagnetos . . . . .	6
1.3.4. Dominios magnéticos . . . . .	6
1.3.5. Frustración magnética . . . . .	7
1.4. Modelo de tight-binding . . . . .	8
1.5. Skyrmiones magnéticos . . . . .	11
1.5.1. Origen y observaciones . . . . .	11
<b>2. Skyrmiones en sistemas magnéticos</b>	<b>13</b>
2.1. Primeras observaciones experimentales . . . . .	13
2.2. Tipos de skyrmiones . . . . .	16
2.2.1. Skyrmiones ferromagnéticos . . . . .	16
2.2.2. Skyrmiones antiferromagnéticos . . . . .	16
2.2.3. Skyrmiones ferrimagnéticos . . . . .	17
2.3. Carga topológica . . . . .	17
2.3.1. Dispositivos electrónicos y potenciales aplicaciones . . . . .	19

## ÍNDICE GENERAL

---

<b>3. Modelo y resultados</b>	<b>21</b>
3.1. Configuraciones y ansatz utilizados	21
3.1.1. Skyrmiones	21
3.1.2. Dominios magnéticos	24
3.2. Modelo	25
3.2.1. Hamiltoniano	25
3.2.2. Cálculo de la energía del estado fundamental	25
3.2.3. Densidad electrónica	27
3.3. Resultados	28
3.3.1. Acoplamiento de Hund débil: $J_H = 0.2$	30
3.3.1.1. Skyrmiones ferromagnéticos	30
3.3.1.2. Skyrmiones antiferromagnéticos	34
3.3.1.3. Skyrmiones ferrimagnéticos	36
3.3.1.4. Dominios ferromagnéticos	36
3.3.2. Acoplamiento de Hund fuerte: $J_H = 8$	41
3.3.2.1. Dominios ferromagnéticos	43
3.3.3. Condiciones de contorno abiertas	47
3.3.4. Densidad electrónica local	48
3.3.4.1. Skyrmiones ferromagnéticos	48
3.3.4.2. Skyrmiones antiferromagnéticos	51
3.3.4.3. Dominios ferromagnéticos	53
<b>4. Conclusiones y perspectivas futuras</b>	<b>55</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>57</b>

# Capítulo 1

## Introducción

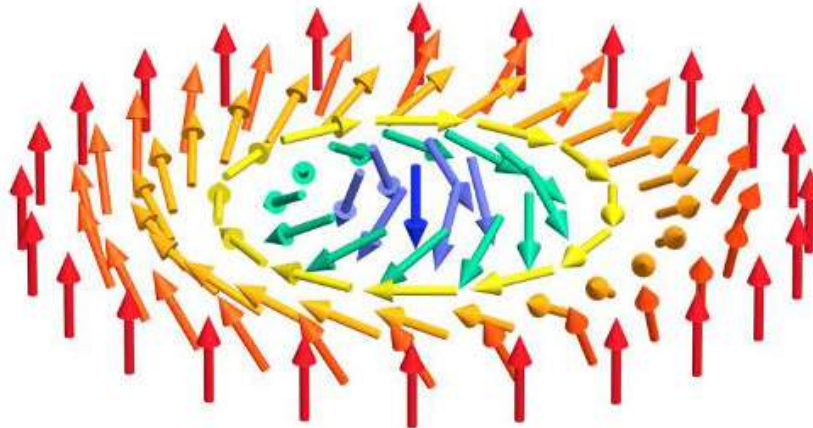
### 1.1. Motivación

En los últimos años, un tema que ha adquirido gran relevancia y presenta constante e intensa investigación es el estudio de los sistemas magnéticos con texturas conocidas como skyrmiones [1, 2]. Los skyrmiones son texturas de espín tipo partícula que poseen gran estabilidad topológica, pueden arreglarse espontáneamente en redes [3], y pueden ser manipulados por corrientes eléctricas de muy baja densidad [4, 5]. La protección topológica nos asegura la robustez de los skyrmiones frente a fluctuaciones térmicas, lo cual es extremadamente beneficioso en un contexto de aplicación tecnológica. Estas propiedades hacen de los skyrmiones candidatos prometedores como soportes de información para futuros dispositivos de información/procesamiento [6, 7, 8].

Desde el punto de vista experimental, arreglos de skyrmiones fueron observadas por primera vez en compuestos B20 tales como MnSi[2, 10, 11], FeGe[12, 13] y FeCoSi[14, 15], cuyas estructuras cristalinas no centro-simétricas permiten una interacción de Dzyaloshinskii-Moriya antisimétrica [16].

Las dos dificultades más recurrentes encontradas en los skyrmiones presentes en sistemas ferromagnetos (conocidos como skyrmiones ferromagnéticos) son que las interacciones dipolares prohíben skyrmiones de tamaño ultra pequeño [17] y hacen extremadamente difícil estabilizar skyrmiones individuales sin la asistencia de campos magnéticos [5, 18, 19]. En los sistemas antiferromagnetos, dos subsistemas magnéticos equivalentes acoplados que se alinean antiparalelamente entre sí con magnetización neta igual a cero, los campos dipolares se anulan. Esta propiedad es muy interesante para los skyrmiones, ya que puede solucionar los dos problemas anteriormente mencionados. Más aún, una consecuencia de la topología de los skyrmiones ferromagnéticos en su dinámica es la deflexión respecto a la dirección de una fuerza aplicada, conocida como el **efecto Hall de skyrmiones**[20, 21]. Este efecto se debe a la interacción entre los skyrmiones y los electrones, resultando en una fuerza de Lorentz que los deflecta de manera perpendicular al desplazamiento producido por la corriente. En contraste, este efecto es compensado en los antiferromagnetos y por ende la cancelación del movimiento transversal puede permitir un movimiento eficiente del skyrmion a lo largo de la dirección de la fuerza aplicada, crucial para la mayoría de las aplicaciones basadas en la utilización de skyrmiones.

Con estos puntos en mente, entender cómo estabilizar skyrmiones antiferromagnéticos cons-



**Figura 1.1.** Configuración de un skyrmion. Extraído de [9].

tituye el primer paso para una fundamental aunque tecnológicamente relevante investigación [22].

En este trabajo, se propone estudiar el comportamiento de la energía del estado fundamental electrónico para un sistema compuesto por dos skyrmiones (ferromagnéticos, antiferromagnéticos o ferrimagnéticos) así como dominios magnéticos, acoplados a un fondo electrónico a cierto llenado electrónico, en función de la distancia entre centros de cada una de las texturas. Se analizó además la influencia de distintos parámetros presentes en la muestra.

En primer lugar, se emplea una red discreta de sitios con geometría tipo cinta en donde se ubican los skyrmiones. Estas texturas se generan a partir de una serie de configuraciones que reproducen las características principales de los mismos. Se consideran los tres tipos de skyrmiones ya mencionados y además se comparan los resultados con dominios magnéticos. Estas texturas sirven de fondo que interactúa con los electrones itinerantes que se mueven libremente por la red.

Luego, mediante la diagonalización exacta de un Hamiltoniano de tight-binding electrónico que rescata las características básicas del sistema, se estudia la energía potencial efectiva entre las diferentes texturas topológicas y la densidad electrónica en función de los distintos parámetros del modelo.

La tesis está organizada de la siguiente manera:

- En este Capítulo 1 se presentan las principales definiciones de sistemas magnéticos: interacciones magnéticas y ordenes magnéticos. Además, se examina la utilidad del modelo de tight-binding. Por último, se introduce la noción de skyrmiones magnéticos.
- En el Capítulo 2 se profundiza el concepto de skyrmiones: observaciones, materiales, clasificación y características, así como el empleo de los mismos en potenciales dispositivos electrónicos.
- En el Capítulo 3 se muestra el desarrollo y el modelo del trabajo, junto con los resultados

obtenidos.

- Finalmente, en el Capítulo 4 se presentan las conclusiones y perspectivas a futuro de esta línea de investigación.

## 1.2. Interacciones magnéticas

En esta sección se describirán brevemente algunos tipos de interacciones presentes en los sistemas de interés: la interacción de intercambio, la interacción de Dzyaloshinskii-Moriya, el acoplamiento Zeeman con un campo magnético aplicado y el acoplamiento de Hund entre electrones itinerantes y sitios magnéticos.

### 1.2.1. Interacción de intercambio

La interacción de intercambio surge del fenómeno de **ordenamiento magnético de largo alcance**. Esta resulta de las interacciones electrostáticas entre partículas idénticas [23].

Para entender su origen, se puede considerar dos electrones en posiciones  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$ . La función de onda que representa el sistema es un producto de estados de electrones individuales  $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \psi_a(\vec{r}_1)\psi_b(\vec{r}_2)$ , siendo  $\psi_a$  y  $\psi_b$  funciones de onda representantes del primer y segundo electrón, respectivamente. Dado que estos electrones son indistinguibles, la función de onda conjunta debe satisfacer  $\hat{P}\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = -\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ , con  $\hat{P}$  el operador permutación, y el signo menos es debido al carácter fermiónico de los electrones. Claramente,  $\psi$  no satisface esta simetría: se deben construir estados producto antisimetrizados (ya que se trata de electrones, en el caso de bosones deberían de ser estados simetrizados).

Para el problema conjunto, se debe tener en cuenta que la función de onda consta de un producto entre una parte espacial  $\phi$ , y una parte asociada al espín  $\chi$ , ambas incluyendo a ambos electrones y sólo pueden incluirse combinaciones con simetría alternada. Es decir, ya que la función de onda completa debe ser antisimétrica, sólo se admiten las combinaciones donde una de las funciones de onda (espacial o de espín) es simétrica y la otra es antisimétrica.

El estado antisimétrico en la función de onda de espín que corresponde al estado singlete ( $S = 0$ ) y el simétrico, al estado triplete ( $S = 1$ ). Por lo tanto, las combinaciones podrán ser

$$\begin{aligned}\psi_0 &= \phi_S \chi_A = \frac{1}{\sqrt{2}} [\phi_a(\vec{r}_1)\phi_b(\vec{r}_2) + \phi_a(\vec{r}_2)\phi_b(\vec{r}_1)] \chi_0 \\ \psi_1 &= \phi_A \chi_S = \frac{1}{\sqrt{2}} [\phi_a(\vec{r}_1)\phi_b(\vec{r}_2) - \phi_a(\vec{r}_2)\phi_b(\vec{r}_1)] \chi_1.\end{aligned}\tag{1.1}$$

La energía de esos estados es

$$\begin{aligned}E_0 &= \int \psi_0^* \hat{H} \psi_0 d^2r \\ E_1 &= \int \psi_1^* \hat{H} \psi_1 d^2r.\end{aligned}\tag{1.2}$$

donde  $\hat{H}$  es el Hamiltoniano de los espines de los electrones. Teniendo en cuenta que para el estado singlete y triplete valen, respectivamente  $\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = -\frac{3}{4}$  y  $\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = \frac{1}{4}$ , se puede reescribir

## 1. Introducción

---

el Hamiltoniano  $\hat{H}$  como un Hamiltoniano efectivo dependiente sólo del espín

$$\hat{H} = \frac{1}{4}(E_0 - E_1) - (E_0 - E_1)\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 \quad (1.3)$$

Descartando el término constante, se tiene:

$$\hat{H}_{spin} = 2J\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 \quad (1.4)$$

siendo  $J$  la constante de intercambio, descrita en términos de las funciones de onda electrónicas

$$J = \frac{E_0 - E_1}{2} = \int \psi_1^*(r_1)\psi_2^*(r_2)\hat{H}\psi_1(r_1)\psi_2(r_2)dr_1dr_2 \quad (1.5)$$

como este tipo de interacciones generalmente ocurren a primeros vecinos, se puede generalizar a

$$\hat{H} = - \sum_{\langle ij \rangle} J_{ij}\vec{S}_i \cdot \vec{S}_j \quad (1.6)$$

donde  $J_{ij}$  es la constante de intercambio entre el espín  $i$ -ésimo y el  $j$ -ésimo. Aquí se omite el factor 2 debido a que la suma incluye dos veces cada par de espines.

### 1.2.2. Acoplamiento Zeeman

El acoplamiento Zeeman es la interacción entre un campo magnético y un cuerpo portando un momento magnético, que puede ser intrínseco (espín) u orbital. Para un electrón con espín  $\vec{S}$  en presencia de un campo magnético  $\vec{H}$ , el Hamiltoniano debido al efecto Zeeman es

$$H_{ZE} = -\vec{S} \cdot \vec{H} \quad (1.7)$$

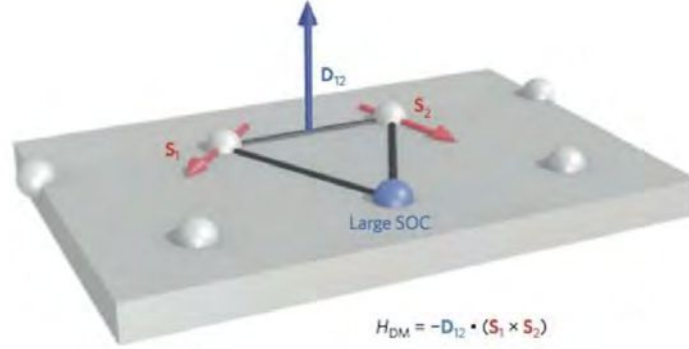
### 1.2.3. Interacción Dzyaloshinskii-Moriya

La interacción debida a la ruptura de la simetría es llamada la interacción de **Dzyaloshinskii-Moriya** (DMI). Esta fue propuesta por I. Dzyaloshinskii en 1958 emergiendo como resultado de la simetría cristalina en  $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$ , donde surgen momentos magnéticos espontáneos no nulos en ciertos estados magnéticos [24]. Luego, fue generalizada por T. Moriya dos años más tarde. Por la teoría de Moriya [25], quien mostró cómo el acoplamiento spin-órbita en sistemas con bajo orden magnético da lugar a mecanismos de interacción antisimétricos entre espines vecinos  $\vec{S}_i$  y  $\vec{S}_j$ , se pudo determinar la dirección de la interacción DM, cuyo Hamiltoniano es de la forma

$$H_{DM} = \sum_{\langle i,j \rangle} \vec{D}_{ij} \cdot (\vec{S}_i \times \vec{S}_j) \quad (1.8)$$

siendo  $\vec{D}_{ij}$  el vector de de Dzyaloshinskii-Moriya, orientado en el que la simetría de inversión está rota. Bajo operaciones de inversión, dos espines  $\vec{S}_i$  y  $\vec{S}_j$  se mantienen sin cambios. El producto vectorial cambia el signo del Hamiltoniano, reflejando así la antisimetría de la interacción.

Cuando está presente, esta interacción favorece energéticamente configuraciones donde cada espín es perpendicular a sus vecinos y al vector  $\vec{D}_{ij}$ . Sin embargo, bajo ciertas condiciones, la interacción DM es el factor clave para estabilizar skyrmiones magnéticos [24, 25, 26].



**Figura 1.2.** Representación de la interacción de Dzyaloshinskii-Moriya entre dos espines  $\vec{S}_1$  y  $\vec{S}_2$ . El vector  $D_{12}$  de interacción apunta en la dirección perpendicular al plano formado por los mismos.

#### 1.2.4. Acoplamiento de Hund

La interacción que describe el acoplamiento entre electrones itinerantes y espines localizados se conoce como **Acoplamiento de Hund** [26]. En el caso de una red de espines, el Hamiltoniano debido a este acoplamiento es

$$H_H = -J_H \sum_i \vec{S}_i \cdot \vec{s}_i \quad (1.9)$$

donde  $\vec{S}_i$  representa los momentos magnéticos localizados en el sitio  $i$  y  $\vec{s}_i = \frac{1}{2} \sum_{a,b} \hat{c}_{i,a}^\dagger \vec{\sigma}^{ab} \hat{c}_{i,b}$  representa el espín de los electrones itinerantes, con  $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$  siendo  $\sigma_i$  ( $i=x,y,z$ ) las matrices de Pauli, y  $J_H$  la constante de acoplamiento, parámetro que determina qué tan fuertemente acoplados están dichos espines.

### 1.3. Órdenes magnéticos

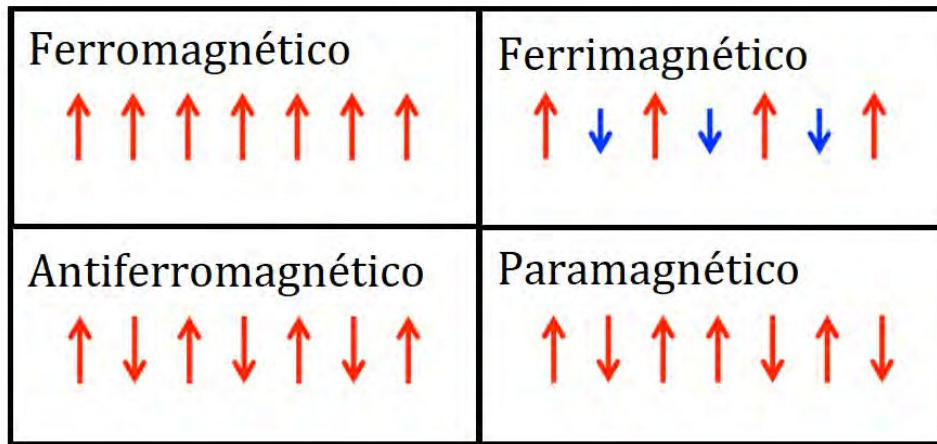
A continuación se describen brevemente los tipos de órdenes magnéticos más simples que serán de importancia en el trabajo. Estos están esquematizados en la figura 1.3.

#### 1.3.1. Ferromagnetos

Un material **ferromagnético** puede tener una magnetización diferente de cero aún en ausencia de campo magnético externo y en este estado de magnetización todos los espines apuntan en la misma dirección. Este efecto es generalmente producido por la **interacción de intercambio** entre los espines.

#### 1.3.2. Antiferromagnetos

Si la interacción de intercambio es negativa ( $J < 0$ ), el campo molecular es orientado de manera que favorece la alineación antiparalela de los momentos magnéticos a primeros vecinos. Eso es lo que se denomina **antiferromagnetismo**. Generalmente, este tipo de orden se encuentra



**Figura 1.3.** Distintos tipos de ordenes magnéticos: Ferromagnético, antiferromagnético, ferrimagnético y paramagnético.

en redes bipartitas, es decir, redes que están compuestas por dos redes interpenetradas. De esta manera, en las redes bipartitas los momentos magnéticos en una de las subredes apuntan todos en una dirección y en la otra subred en dirección opuesta. A este tipo de estado magnético se lo conoce como **estado de Néel** [27].

### 1.3.3. Ferrimagnetos

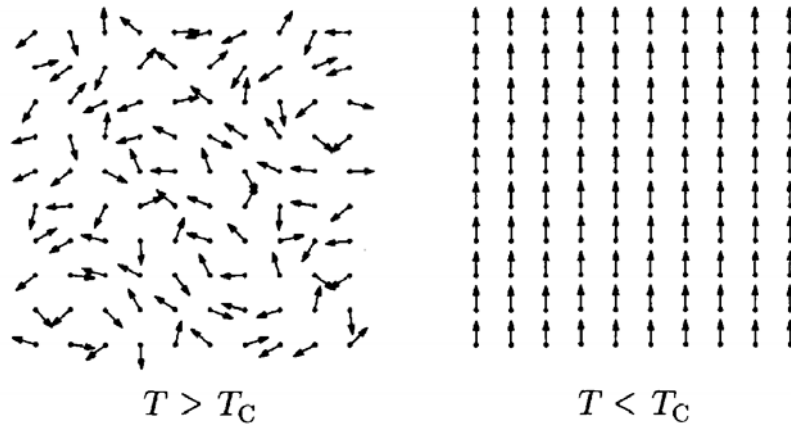
La discusión antes vista para el antiferromagneto asume que en una red bipartita las dos subredes son equivalentes, pero si no lo fueran (cristalográficamente, esto es posible), entonces la magnetización de las dos subredes no sería igual y por lo tanto no se cancelarían. Esto daría como resultado que aunque el orden magnético es en esencia antiferromagnético el sistema tiene una magnetización neta. Este fenómeno es conocido como **ferrimagnetismo**.

Como el campo molecular de cada subred es diferente, entonces la magnetización espontánea de cada subred tendrá diferentes dependencias con la temperatura y puede ocurrir, por ejemplo, que una subred domine la magnetización a bajas temperaturas y la otra lo haga a temperaturas más altas. Cuando esto ocurre se puede variar la magnetización del sistema variando la temperatura de manera que al aumentar la temperatura el sistema puede pasar de tener magnetización positiva a cero y luego volverse negativa. Finalmente, a temperaturas más altas el sistema se desordena y la magnetización es nuevamente cero. La temperatura a la cual la magnetización cambia de signo se conoce como **temperatura de compensación**.

### 1.3.4. Dominios magnéticos

P. Weiss propuso que un ferromagneto contiene un número de pequeñas regiones, llamadas **dominios** (o islas), dentro de las cuales la magnetización local alcanza un valor de saturación [28]. La dirección de la magnetización de diferentes dominios no necesita ser paralela. Estos dominios están separados por **paredes de dominio**.





**Figura 1.4.** Transición de fase ferromagnética. A la izquierda, el estado de alta temperatura (o desordenado) presentando simetría rotacional. Esta simetría se rompe una vez alcanzadas temperaturas debajo de la temperatura de Curie  $T_C$  (imagen derecha).

Si diferentes regiones de un sistema macroscópico rompen la simetría en diferentes formas, en la interfaz entre ambas regiones la rigidez se puede romper. En general, se esperan paredes de dominio, vórtices, dislocaciones y otras singularidades. En los materiales ferromagnéticos, las más importantes son las paredes de dominio.

La existencia de dominios explica el hecho de que en algunos materiales es posible, a temperatura ambiente, alcanzar la magnetización de saturación de toda la muestra (correspondiente a  $\mu_0 M \sim 1T$ ) por la aplicación de un campo magnético muy chico (tanto como  $H \sim 10^{-6}T$ ) [23]. En el mismo material ferromagnético, es también posible para la magnetización sea nula a campo cero. Esto también es una manifestación de los dominios: la magnetización está saturada dentro de ellos, pero su dirección en cada dominio es tal que la magnetización neta del material es cero.

Dentro de las ideas para la formación de dispositivos de almacenamiento de memoria, un concepto popular es el de *racetrack memory* de paredes de dominio (DWRM, por sus siglas en inglés) [29], un cable nanoscópico en el cual los dominios magnéticos se mueven por corrientes de espín polarizadas (figura 1.5). El problema principal de estos dispositivos son las impurezas en los nano-cables. Éstas impiden que la pared de dominio viaje y, para sobrepasarlas, se deben aplicar corrientes de alta densidad, lo cual lleva al calentamiento del nano-cable por efecto Joule, revelando el límite de este enfoque [30].

### 1.3.5. Frustración magnética

Un concepto sumamente importante en los sistemas magnéticos es el de **frustración magnética**. Los sistemas magnéticamente frustrados son aquellos en los cuales no es posible satisfacer simultáneamente todas las interacciones del sistema. A menudo, esto conduce a que no exista un único estado fundamental, sino que existen varios estados en los que no se minimiza la energía; en este caso, se dice que el sistema está **degenerado**. En otros, la competencia entre interacciones conduce a que se establezcan configuraciones no convencionales como los skyrmiones magnéticos.

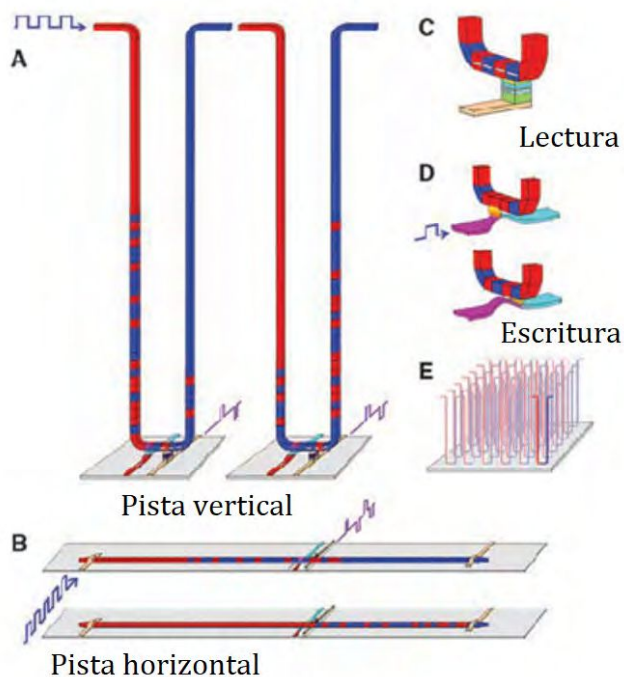


Figura 1.5. Dispositivo racetrack memory de paredes de dominio [29].

Por ejemplo, si se considera la red triangular antiferromagnética (figura 1.6), y dos espines adyacentes se acomodan antiparalelamente, el tercero no tiene una orientación definida, para la cual la energía sea mínima. El sistema no puede alcanzar un estado que satisfaga sus vínculos microscópicos, pero sí posee una multiplicidad de estados igualmente “insatisfechos”. Como resultado, un sistema frustrado muestra metaestabilidad, efectos de histéresis, y relajación hacia el equilibrio dependiente del tiempo [23].

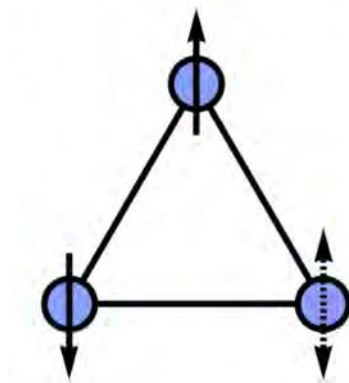
## 1.4. Modelo de tight-binding

Por último, se introduce aquí el modelo más simple para estudiar la dinámica electrónica en redes discretas, conocido como el modelo de **tight-binding**, donde se asume al sistema como una red discreta, y se supone que los electrones están fuertemente localizados en los sitios cristalinos y sólo pueden estar en un sitio de la red. La energía cinética de los mismos se incluye permitiendo al electrón saltar (hacer *hopping*) de un sitio a otro.

En el formalismo de segunda cuantificación, se puede escribir al Hamiltoniano de hopping en términos de operadores de creación (y aniquilación)  $\hat{c}_i^\dagger$  ( $\hat{c}_i$ ) que crean (aniquilan) una partícula en el sitio  $i$ . Éste tiene la forma [31]

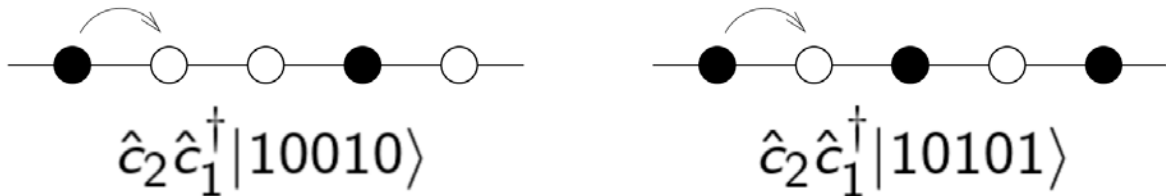
$$H_{hop} = - \sum_{\langle ij \rangle} t_{ij} (\hat{c}_i^\dagger \hat{c}_j + h.c.) \quad (1.10)$$

siendo  $\hat{c}_i^\dagger$  y  $\hat{c}_j$  los operadores de creación y aniquilación fermiónicos en los sitios  $i$  y  $j$ , respec-



**Figura 1.6.** Esquema que representa un sistema geométricamente frustrado en una disposición triangular en la que la interacción entre los momentos magnéticos es antiferromagnética. La doble flecha punteada denota la incapacidad del tercer espín para seleccionar un estado una vez que se establece un par antiferromagnético.

tivamente. Aquí el subíndice  $\langle ij \rangle$  de la suma indica que se suma sólo sobre primeros vecinos  $i$ ,  $j$  y  $h.c$  (hermítico conjugado) representa en este caso el hopping reverse  $\hat{c}_j^\dagger \hat{c}_i$  del sitio  $i$  al sitio  $j$ . La amplitud de hopping  $t_{ij}$  es controlada por el solapamiento de los orbitales atómicos entre sitios vecinos. Se considera aquí el caso unidimensional, pero el resultado se puede generalizar a más dimensiones, siendo el proceso análogo.



**Figura 1.7.** Descripción compacta del formalismo de operadores en segunda cuantificación. El proceso mostrado tendrá distintos elementos de matriz, pero están descriptos por el mismo operador  $\hat{c}_2^\dagger \hat{c}_1$ .

Para este modelo, una aproximación típica es asumir que los electrones sólo pueden saltar a entre sitios a primeros vecinos. En general, es posible a vecinos más lejanos, pero sus amplitudes de probabilidad son muy pequeñas (decrecen exponencialmente con la distancia). Por ello, en muchos casos sólo se tiene en cuenta el *hopping* a primeros vecinos. Debido a la simetría traslacional de la red, todos los saltos a primeros vecinos deberán tener la misma intensidad de *hopping*. Si se asume que ésta es un número real  $t$  independiente de la posición, el Hamiltoniano es

$$\hat{H} = -t \sum_{\langle ij \rangle} (\hat{c}_i^\dagger \hat{c}_j + \hat{c}_j^\dagger \hat{c}_i) = -t \sum_i (\hat{c}_i^\dagger \hat{c}_{i+1} + \hat{c}_{i+1}^\dagger \hat{c}_i) \quad (1.11)$$

## 1. Introducción

Dentro de este formalismo, y debido a la invarianza traslacional de este Hamiltoniano, se puede resolver mediante la utilización de la **transformada de Fourier discreta**, utilizada típicamente para describir una función periódica en el espacio real, que tendrá un set de vectores de onda en el espacio recíproco. Aquí, se tiene justamente el caso inverso, el espacio real es discreto y el espacio recíproco es continuo y periódico (la zona de Brillouin  $ZB$ ). Se pueden reescribir los operadores fermiónicos como:

$$\hat{c}_k = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2\pi}} \sum_j \hat{c}_j e^{ikx} \quad (1.12)$$

$$\hat{c}_j = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2\pi}} \int_{ZB} \hat{c}_k e^{ikx} dk \quad (1.13)$$

Como  $\{\hat{c}_i, \hat{c}_j\} = \delta_{ij}$ , es fácil ver que se debe satisfacer

$$\{\hat{c}_k, \hat{c}_{k'}\} = \delta(k - k') \quad (1.14)$$

y se ve que el primer término del Hamiltoniano toma entonces la forma

$$\sum_j \hat{c}_j^\dagger \hat{c}_{j+1} = \sum_j \frac{1}{\sqrt{2\pi/a}} \int_{ZB} dk \hat{c}_k e^{-ikja} \frac{1}{\sqrt{2\pi/a}} \int_{ZB} dk' \hat{c}_{k'} e^{ik'(j+1)a} \quad (1.15)$$

el cuál puede reescribirse como

$$\sum_j \frac{1}{2\pi/a} \int_{ZB} dk' \int_{ZB} dk \hat{c}_k^\dagger \hat{c}_{k'} e^{i(k'-k)ja} = \int_{ZB} dk \hat{c}_k^\dagger \hat{c}_k e^{ika} \quad (1.16)$$

Realizando el proceso análogo para el hermítico conjugado del término de la ecuación 1.15, se llega que el Hamiltoniano se escribe finalmente como

$$\hat{H} = \int_{ZB} dk \varepsilon(k) \hat{c}_k^\dagger \hat{c}_k \quad (1.17)$$

donde

$$\varepsilon(k) = -2t \cos(ka) \quad (1.18)$$

siendo además periódica en  $k$ , con una periodicidad de  $\frac{2\pi}{a}$ , como se ve en el gráfico de la figura 1.8, lo cual es esperado para ondas de Bloch.

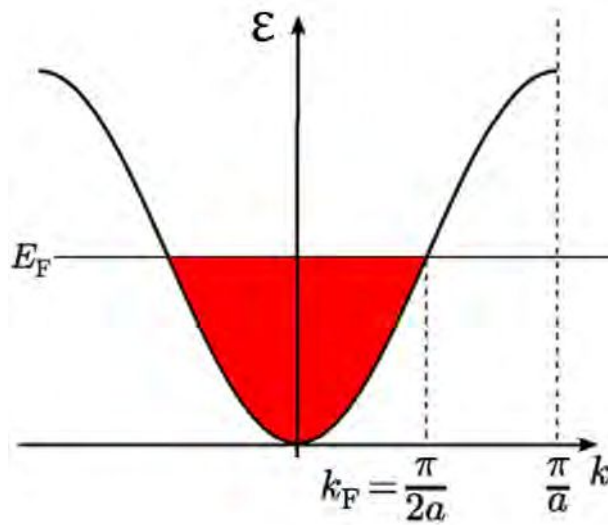
En el espacio recíproco, se puede construir al estado fundamental en términos de los operadores  $\hat{c}_k$  según

$$|GS\rangle = \prod_{k \in S_F} \hat{c}_k^\dagger |0\rangle \quad (1.19)$$

donde  $S_F \equiv \{k : \varepsilon(k) < \varepsilon_F\}$  es la superficie de Fermi, con  $\varepsilon_F$  la energía de Fermi. En este caso, a temperatura  $T = 0$ <sup>(i)</sup>, la energía del estado fundamental depende del llenado electrónico debido a que resulta de sumar la energía de todos los niveles ocupados por debajo del nivel de Fermi

$$E_{GS} = \sum_{\varepsilon_k < \varepsilon_F} \varepsilon_k \quad (1.20)$$

<sup>(i)</sup>En este trabajo, se tomó al sistema como a temperatura  $T=0$ . En el caso contrario, a temperatura finita, habría que tener en cuenta la distribución de Fermi  $f(\varepsilon)$ .



**Figura 1.8.** Relación de dispersión de la ecuación 1.18, graficado en la Zona de Brillouin unidimensional. En rojo, se muestra como todos los niveles de energía hasta el nivel de Fermi (con energía  $E_F$ ) son ocupados.

## 1.5. Skyrmiones magnéticos

### 1.5.1. Origen y observaciones

En los últimos años, un tema que ha adquirido gran relevancia es el estudio de las propiedades topológicas de sistemas magnéticos y/o electrónicos de baja dimensionalidad. Estas propiedades tienen la particularidad de permanecer inalteradas bajo deformaciones continuas de los parámetros microscópicos del modelo conduciendo a fases de gran estabilidad, y de esta manera, desempeñan un rol muy importante tanto en el campo aplicado como en el de investigación básica.

En esta línea, los sistemas con las texturas magnéticas conocidas como **skyrmiones magnéticos** han adquirido gran importancia. Los skyrmiones son texturas de espín tipo partícula que poseen gran estabilidad topológica, pueden arreglarse espontáneamente en redes, y pueden ser manipulados por corrientes eléctricas de muy baja densidad.

Los skyrmiones han sido originalmente predichos en los años 1960 por Tony Skyrme en el contexto de física de partículas [32, 33]. Él propuso una descripción en teoría de campos de piones interactuantes y mostró que existen soluciones tipo partícula con atributos de bariones [34, 35]. Más adelante, se mostró que estas soluciones exhiben características de fermiones, mientras que los piones en sí mismo son bosones. Los **solitones**, descritos por un modelo  $\sigma$  no lineal, son las versiones tridimensionales de lo que se volvió conocido como skyrmiones. En este contexto, los skyrmiones son configuraciones de mínima energía de campos estáticos clásicos no-lineales y se puede mostrar que estas soluciones corresponden a solitones topológicos [36].

Las teorías que describen estos sistemas conducen al estudio de excitaciones topológicas que desempeñan un rol fundamental en muchas áreas de la física [37]. En el transcurso de las

## 1. Introducción

---

últimas décadas (en el contexto de materia condensada, y, más precisamente, en el estudio de fenómenos magnéticos y sistemas de espines), el término skyrmion ha ganado progresivamente aceptación para designar cualquier solución o configuración de campo que está localizada, es topológicamente estable y tiene el aspecto de vórtice [38]. Se debe aclarar que estas soluciones no tienen ningún vínculo con el modelo de Skyrme en física de partículas mencionado antes, excepto por el hecho de que en ambos contextos las soluciones corresponden a solitones con propiedades topológicas análogas.

En general, este tipo de texturas está asociadas a la presencia de la interacción DM, por lo que se espera que aparezcan en sistemas sin simetría de inversión como es el caso del MnSi [2, 10, 11], FeGe [12, 13], semiconductores con estructura  $B20$  y el  $\text{Cu}_2\text{OSeO}_3$  [39, 40].

Sin embargo, hoy en día, los skyrmiones se hallan en varios campos de la física, como en condensados de Bose-Einstein [20, 41, 42], sistemas con efecto Hall cuántico [43], cristales líquidos [20, 44], física de partículas [45], teoría de cuerdas [46], y como será considerado aquí, magnetismo [2], entre otros [47].

## Capítulo 2

# Skyrmiones en sistemas magnéticos

En este capítulo, se presenta a los skyrmiones magnéticos en más detalle, mencionando el origen de los mismos y los materiales en los que se han observado, dando lugar a skyrmiones ferromagnéticos, antiferromagnéticos y ferrimagnéticos. Por último, se describe el estado actual de algunos dispositivos en donde se emplean skyrmiones individuales involucrando la creación, aniquilación y manipulación de los mismos.

### 2.1. Primeras observaciones experimentales

En 1975, A. A. Belavin y A. M. Polyakov encontraron las soluciones correspondientes a distintos sectores topológicos para un sistema ferromagnético [48]. Más adelante, en 1989, A.N. Bogdanov y D.A. Yablonskii predijeron la existencia de redes de skyrmiones en ferromagnetos anisotrópicos no-centrosimétricos al aplicar campos magnéticos [49]. Estos skyrmiones se observaron por primera vez experimentalmente estudiando el **efecto Hall cuántico**. Sin embargo, la existencia de skyrmiones formando redes fue verificada experimentalmente sólo recientemente. En 2009, se encontró evidencia clara de que los skyrmiones aparecen formando una red en la llamada fase A del compuesto MnSi (ferromagneto metálico) [2]. La evidencia proviene de experimentos de dispersión de neutrones a pequeños ángulos (SANS, de sus siglas en inglés) que revelan un patrón hexagonal de skyrmiones.

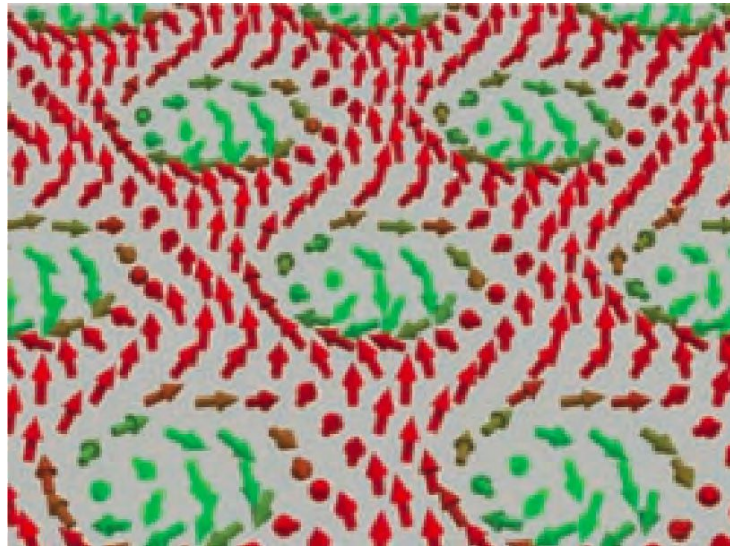
Recientemente se han realizado observaciones directas, tanto de skyrmiones aislados como de redes de skyrmiones, mediante microscopía electrónica de transmisión de Lorentz (Lorentz TEM, de sus siglas en inglés) [51]. En general, este tipo de textura está asociada a la ausencia de simetría de inversión, por lo que se presenta en sistemas no centrosimétricos, como es el caso de cristales magnéticos de MnSi [2],  $\text{Fe}_{0,5}\text{Co}_{0,5}\text{Si}$  (y en general para semiconductores  $\text{Fe}_{1-x}\text{Co}_x\text{Si}$ ) [14, 15], FeGe, en semiconductores con estructura B20 y el aislador  $\text{Cu}_2\text{OSeO}_3$  [39, 40].

Una de las mayores ventajas de usar TEM es que esta técnica ofrece una observación directa de la estructura magnética de la muestra. Por otro lado, esta necesita ser transparente, y esto sólo puede lograrse si las muestras son muy delgadas [51]. Además, otra propiedad que complica las observaciones es que con TEM sólo se mide la componente en el plano de la magnetización.

La imagen de espacio real de la fase A se muestra en el figura 2.3. Como en los bordes y en el centro del skyrmion la magnetización es opuesta o en el sentido del campo magnético,

## 2. Skyrmiones en sistemas magnéticos

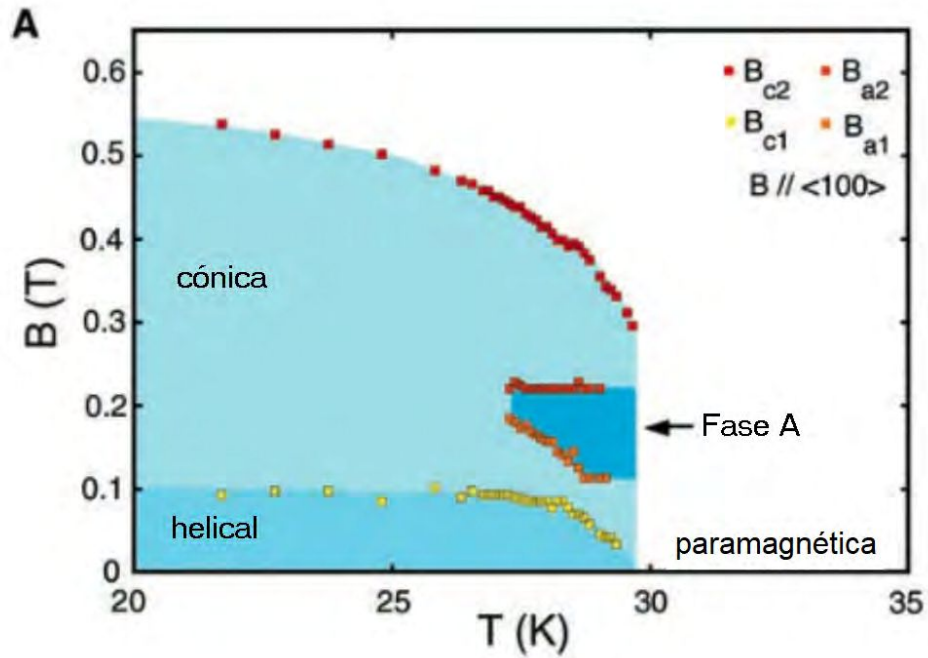
---



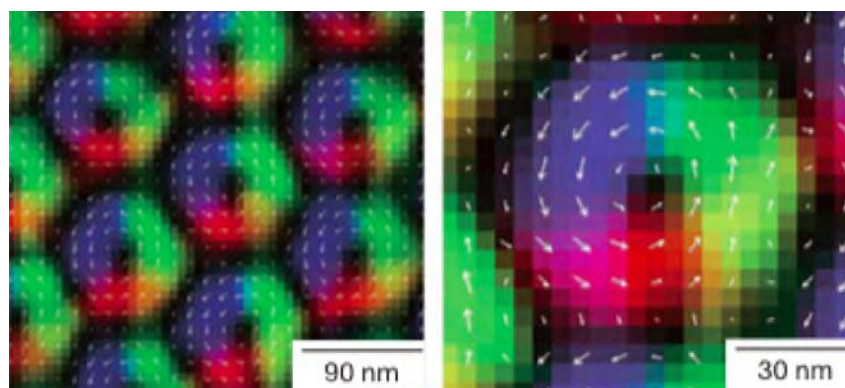
**Figura 2.1.** Red de skyrmiones modelada en la fase A del MnSi [2].

la magnetización no es especificada. Lo que sí se aprecia en la figura es cómo se envuelve (el *winding*) la magnetización alrededor del centro del skyrmion [52].





**Figura 2.2.** Diferentes fases magnéticas del MnSi. El diagrama de fases incluye la fase A que corresponde a la fase skyrmiónica.[50]



**Figura 2.3.** Imagen real amplificada de un skyrmion en un campo magnético de  $B = 50mT$  usando microscopía electrónica de transmisión de Lorentz (TEM). [51]

### 2.2. Tipos de skyrmiones

#### 2.2.1. Skyrmiones ferromagnéticos

Los skyrmiones magnéticos presentes en un medio ferromagnético, popularmente conocidos como **skyrmiones ferromagnéticos**, son caracterizados por una densidad de magnetización constantemente cambiante que está orientada opuesta en su centro, comparada con la región adyacente, resultando en una topología de espacio real no trivial. Estos objetos pueden ocurrir en redes periódicas, o como partículas individuales [52, 49].

#### 2.2.2. Skyrmiones antiferromagnéticos

Los **skyrmiones antiferromagnéticos** pueden entenderse como combinación de dos skyrmiones con espines mutuamente opuestos, es decir, espines vecinos tienden a alinearse antiparalelamente. Por ende, estarían caracterizados por una carga topológica nula. Sin embargo, en el presente caso, las subredes de skyrmiones no están espacialmente separados, sino que están intercalados, resultando en una carga topológica  $\pm 1$ ; estos skyrmiones antiferromagnéticos siguen siendo entonces skyrmiones desde el punto de vista topológico. No obstante, estos exhiben diferente dinámica que los ferromagnéticos.

Debido a la carga topológica compensada por la magnetización, un skyrmion antiferromagnético puede moverse sin el efecto Hall de skyrmiones [53, 54].

Como es típico para texturas de espín antiferromagnéticas, los skyrmiones antiferromagnéticos pueden ser propulsados mucho más rápidamente que para los skyrmiones convencionales. Velocidades del orden de kilómetros por segundo han sido simuladas [55, 54, 53]. Esto hace a los skyrmiones antiferromagnéticos los candidatos ideales para ser utilizados como portadores de información en dispositivos de almacenamiento de datos.

En términos de la interacción de DM requerida, la estabilización de skyrmiones antiferromagnéticos no es problemática [56, 57, 58, 59]. Un skyrmion con espines mutuamente revertidos (y por lo tanto un skyrmion con polaridad opuesta y una diferencia en helicidad de  $\pi$ ) es energéticamente preferido por la interacción de DM en un sistema.

En 2015, H.D. Rosales, D.C. Cabra y P. Pujol [56] estudiaron un modelo de Heisenberg antiferromagnético en la red triangular, en el que está presente la interacción de Dzyaloshinskii-Moriya. Mostraron (mediante el empleo de simulaciones de Monte-Carlo y la aproximación de Luttinger-Tisza) que al aplicar un campo externo, aparece una novedosa fase a la que denominaron AF-SkX. La misma consiste en tres redes de skyrmiones interpenetradas.

Más recientemente, en 2020, S. Gao, H.D. Rosales, et al [59] combinaron mediciones de dispersión de neutrones con simulaciones Monte Carlo, y mostraron que una red fraccional de skyrmiones antiferromagnéticos (ver figura 2.4) es estabilizada en  $\text{MnSc}_2\text{S}_4$  a través de acoplamientos anisotrópicos. Con su trabajo, demostraron que los skyrmiones antiferromagnéticos teóricamente propuestos pueden estabilizarse en materiales reales, representando así un gran paso hacia la implementación de los mismos en dispositivos de espintrónica.

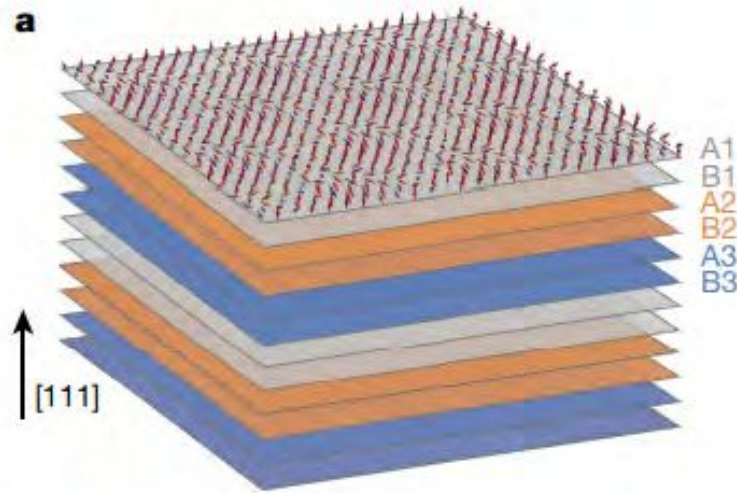


Figura 2.4. Redes fraccionales de skyrmiones antiferromagnéticos [59].

### 2.2.3. Skyrmiones ferrimagnéticos

Los **skyrmiones ferrimagnéticos** consisten en dos skyrmiones acoplados, con espines mutuamente revertidos, similar al caso de skyrmiones antiferromagnéticos. Sin embargo, los momentos magnéticos tienen diferentes magnitudes en las dos subredes, llevando a una magnetización neta no nula.

Comparados a los skyrmiones antiferromagnéticos, los ferrimagnéticos tienen la ventaja de una conveniente detección y la posibilidad de localización debido a su magnetización descompensada [60]. Considerando su electrodinámica emergente, estos prometen ventajas similares a los skyrmiones antiferromagnéticos [61]. No obstante, están limitados por el uso de temperaturas particulares, lo que limita la aplicabilidad de la espintrónica [62].

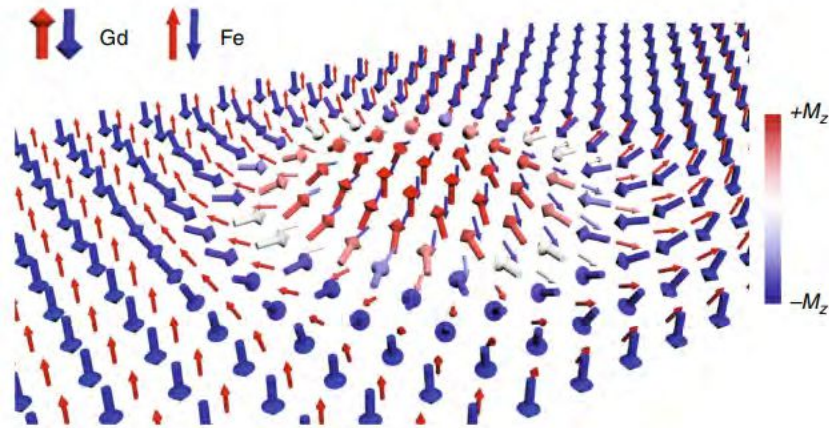
Una primera muestra de las ventajas de estas texturas se ha recientemente obtenida en materiales ferrimagnéticos, más precisamente en láminas ferrimagnéticas de Gd-FeCo [61], como se muestra en la figura (2.5)

## 2.3. Carga topológica

La configuración skyrmiónica es físicamente estable. Esto quiere decir que la configuración de espines de un skyrmion puede minimizar la energía del sistema y por ende el sistema favorece esta configuración. Más aún, los skyrmiones son **topológicamente protegidos**: pequeñas deformaciones del sistema no pueden transformar la estructura de los espines en alguna estructura trivial. Esta propiedad topológica se hace más explícita con la definición de una **carga topológica**.

La carga topológica, o número de skyrmion, es el *winding number* que cuenta cuantas veces la configuración se envuelve alrededor de la esfera unidad [63]. Esta es definida, para un sistema

## 2. Skyrmiones en sistemas magnéticos

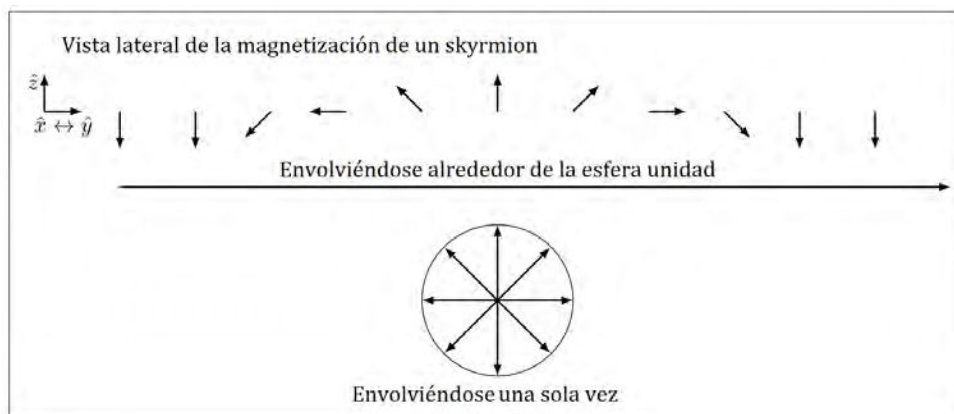


**Figura 2.5.** Esquema de un skyrmion ferrimagnético en una pista magnética, observado en las láminas de GdFeCo [5].

bidimensional, como

$$Q = \frac{1}{4\pi} \iint \vec{S} \cdot \left( \frac{\partial \vec{S}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{S}}{\partial y} \right) dx dy \quad (2.1)$$

Si se envuelve la estructura de la magnetización de un skyrmion (figura 2.6) alrededor de la esfera unidad, ésta se recorre una única vez. Esto le da a la estructura del skyrmion una carga topológica un valor de 1. Dependiendo de si el centro del skyrmion es paralelo o anti-paralelo al campo magnético externo la carga topológica de un skyrmion puede dar  $\pm 1$  [64]. En la figura 2.6 se muestra esquemáticamente la idea general detrás de la definición. En esta se representa un skyrmion desde una vista lateral.

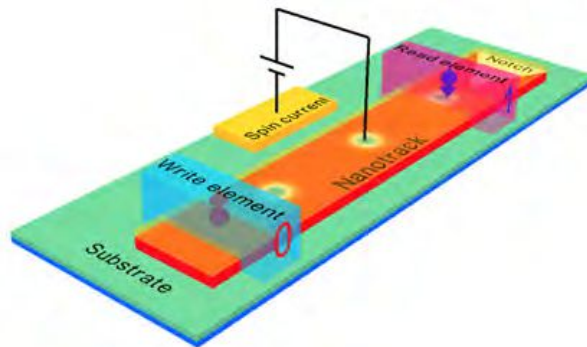


**Figura 2.6.** Skyrmion envolviéndose alrededor de una esfera [64]

### 2.3.1. Dispositivos electrónicos y potenciales aplicaciones

Desde su descubrimiento, los skyrmiones magnéticos han ganado atención creciente no sólo por sus interesantes propiedades físicas sino también por sus potenciales aplicaciones tecnológicas. Esto se debe fundamentalmente a la demostración de que estos objetos tienen un gran potencial tecnológico en el área de la espintrónica para el desarrollo de futuras generaciones de dispositivos magnéticos de memoria y procesamiento de información. Desde este punto de vista las cualidades más destacadas de los skyrmiones son su gran estabilidad, pequeño tamaño y la necesidad de corrientes eléctricas muy bajas para crearlos, destruirlos o moverlos [20, 6, 7, 65, 66, 67].

En el estado actual de la tecnología es posible, no solo crear skyrmiones aislados sino también redes bidimensionales de skyrmiones por medio de la impresión de nanodiscos magnéticos sobre láminas magnetizadas [3]. Debido a una propiedad topológica de los skyrmiones (cuantificada mediante su carga topológica) es posible emplearlos como elementos de computación para representar los bits “1” y “0”, asociados a la existencia y ausencia de skyrmiones respectivamente. Debido a estas características es que se los estudia en el campo de la espintrónica para el diseño de dispositivos de almacenamiento de información de bajo consumo [68, 69].

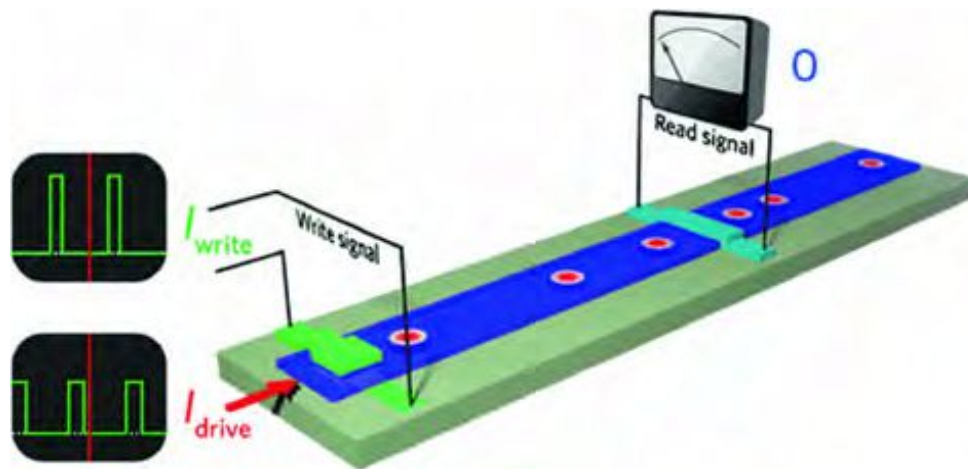


**Figura 2.7.** Esquema de un RM basado en skyrmiones. En él, los skyrmiones se mueven a lo largo de la pista en sólo una dirección. El elemento lector puede posicionarse al final de la pista. El skyrmion es aniquilado al moverse a través de éste, pero su información es leída en uno o más dispositivos de memoria [70].

Uno de los dispositivos en los que se espera una aplicación de los skyrmiones son los llamados “*racetrack memory*” (RM) [72]]. Esta idea ha recibido mucha atención y ha sido tópicos de investigación para muchos grupos debido a que tiene la significativa ventaja en comparación con los dispositivos RM de paredes de dominio [73, 74] (figura 1.5) debido a que pueden superponerse a las impurezas más fácilmente, debido a las propiedades de los skyrmiones con respecto a estímulos y perturbaciones externas y cómo se puede controlar su movimiento, desplazándose por medio de corrientes de espín así como ondas de espines [75]. Más aún, el skyrmion individual tiene un tamaño mucho más pequeño que el dominio convencional. El valor típico de su tamaño varía de 3nm a 150nm dependiendo de los parámetros intrínsecos del material. Además, la densidad de corriente para manejar skyrmiones está 4 o 5 órdenes de magnitud por debajo de la requerida para mover los convencionales dominios ferromagnéticos [76]. Estas propiedades, incluyendo el

## 2. Skyrmiones en sistemas magnéticos

---



**Figura 2.8.** Racetrack memory basada en skyrmiones[71]

tamaño, la alta estabilidad y la movilidad benefician el desarrollo de los futuros dispositivos RM basados en skyrmiones [72]. Investigaciones recientes han demostrado la creación y el movimiento inducidos por corriente, así como la detección eléctrica de skyrmiones individuales en geometrías confinadas, aún a temperatura ambiente [77]. Estos avances ponen grandes expectativas en la fabricación de RM basados en skyrmiones (figura 2.8) [71].

Otra de las posibles aplicaciones apunta al desarrollo de compuertas lógicas basadas en skyrmiones. El mecanismo básico que permite este desarrollo es la conversión entre un par de paredes de dominio y skyrmiones conectando líneas de transmisión de diferentes anchos [78]. Por medio de este mecanismo es posible realizar la duplicación y unión de skyrmiones, y usar estos procesos para el desarrollo de compuertas lógicas [79].

# Capítulo 3

## Modelo y resultados

### 3.1. Configuraciones y ansatz utilizados

En este capítulo se presenta el modelo empleado para estudiar la energía de interacción, entre skyrmiones, mediada por los electrones itinerantes. Para el término del acoplamiento de Hund, se consideraron configuraciones magnéticas de skyrmiones ferromagnéticos, antiferromagnéticos y ferrimagnéticos. Para ello, se emplearon distintos ansatz que permiten reproducir el comportamiento de dichos skyrmiones.

#### 3.1.1. Skyrmiones

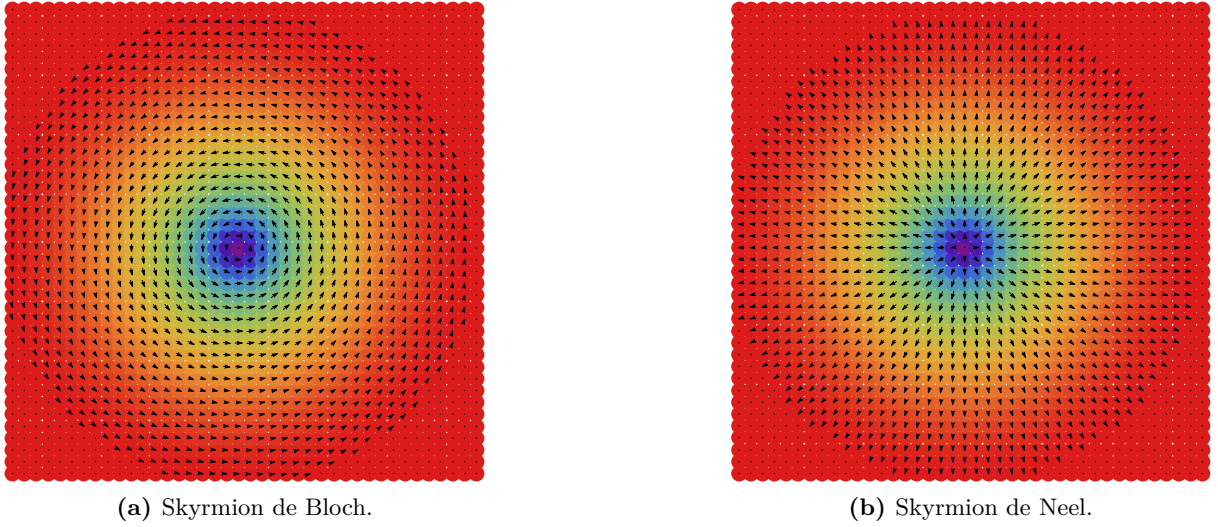
Para estudiar la dinámica de electrones itinerantes inmersos en un fondo magnético, se emplearon distintos ansätze para modelar la estructura de tipos de skyrmiones. Para ellos se parametriza el espín en un dado sitio de la red en términos de coordenadas esféricas como sigue

$$S[\theta, \phi] = (\sin(\theta) \cos(q\phi + \chi), \sin(\theta) \sin(q\phi + \chi), \cos(\theta) + m) / N \quad (3.1)$$

siendo  $N$  la norma  $\|(\sin(\theta) \cos(\phi), \sin(\theta) \sin(\phi), \cos(\theta) + m)\|$  y  $\vec{m} = (0, 0, m)$  la contribución homogénea a la magnetización. Esta función de espín está parametrizada por los ángulos  $\theta$  y  $\phi$  (ángulo polar y azimutal respectivamente). La estructura de skyrmion ferromagnético centrado en el origen puede ser descripta de manera muy sencilla por una función lineal del ángulo  $\theta$  en función de la distancia  $r$  como sigue [49].

$$\theta(r) = \pi \left(1 - \frac{r}{R}\right) H(R - r) \quad (3.2)$$

donde  $H$  es la función de Heaviside,  $R$  es el radio del skyrmion, y  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  representa la coordenada radial; esta función define, dentro de un radio, cómo los espines se van modulando desde el origen ( $\theta = \pi$ ), se tuercen a medida que crece  $r$ , hasta llegar al borde del skyrmion ( $r = R$ ) donde los espines apuntan en la dirección  $z$  ( $\theta = 0$ ). Para valores  $r > R$ ,  $\theta$  queda fijamente en el valor 0, garantizando que el entorno del skyrmion está completamente polarizado

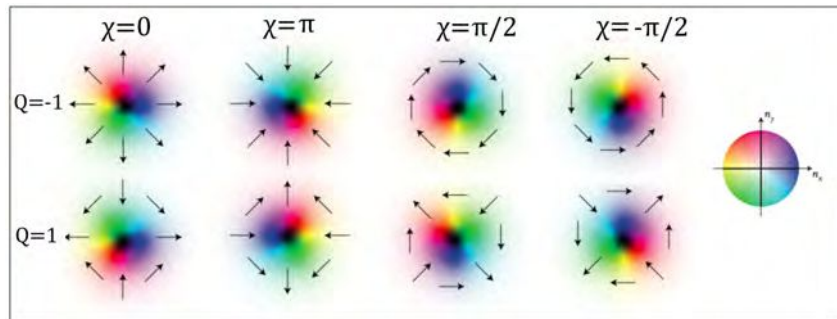


**Figura 3.1.** Skyrmiones ferromagnéticos tipo Bloch o Neel.

con el campo externo. El ángulo  $\phi$ , queda definido como una función partida:

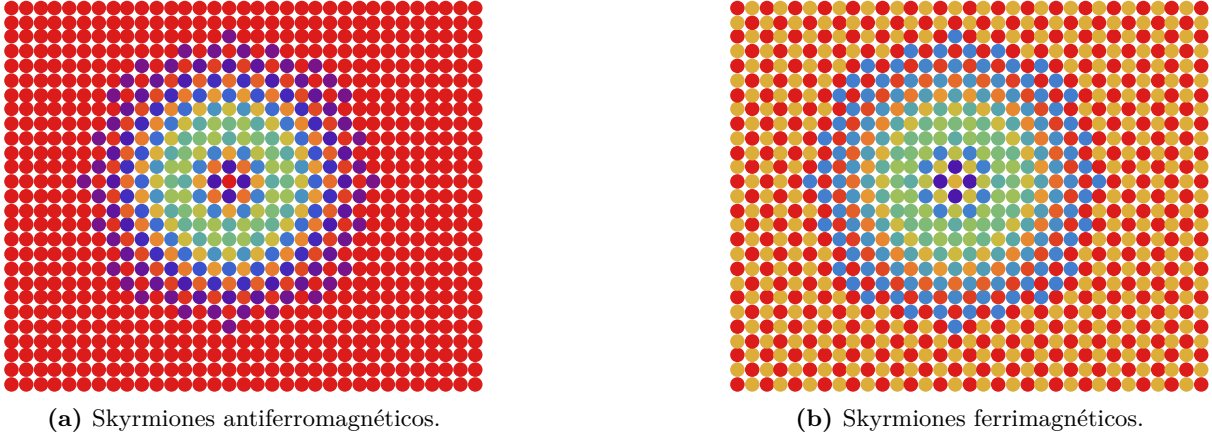
$$\phi[x, y] = \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } y \geq 0 \\ 2\pi - \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } y < 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

En la ecuación (3.1) aparece el parámetro  $\chi$ , que se conoce como la helicidad. Ésta depende de la interacción DM inducida, y esto depende en qué sentido la simetría de inversión es rota. Esta cantidad sirve, junto con la carga topológica, para categorizar distintos tipos de skyrmiones, como se muestra en la figura 3.2. El valor de  $\chi = \frac{\pi}{2}$ , determina skyrmiones de **Bloch** (figura 3.1). En la figura 3.2 se muestra una representación esquemática de skyrmiones para distintos valores de  $\chi$ .



**Figura 3.2.** Distintas estructuras de skyrmiones con distinta carga topológica  $Q$  y helicidad  $\chi$  [64]





**Figura 3.3.** Ansatz para skyrmiones antiferromagnéticos y ferrimagnéticos.

Por otro lado, el parámetro  $q$  determina la carga topológica de cada skyrmion. Reemplazando la ecuación (3.1) en la definición de carga  $Q$  se tiene,

$$\begin{aligned}
 Q &= \frac{q}{2} \int_0^\infty \sin(\theta(r)) \frac{d\theta(r)}{dr} dr \\
 &= -\frac{q}{2} \cos(\theta(r)) \Big|_0^\infty \\
 &= -q
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Así, dependiendo de si el centro del skyrmion es paralelo o antiparalelo al campo magnético tenemos  $Q = 1$  o  $Q = -1$ .

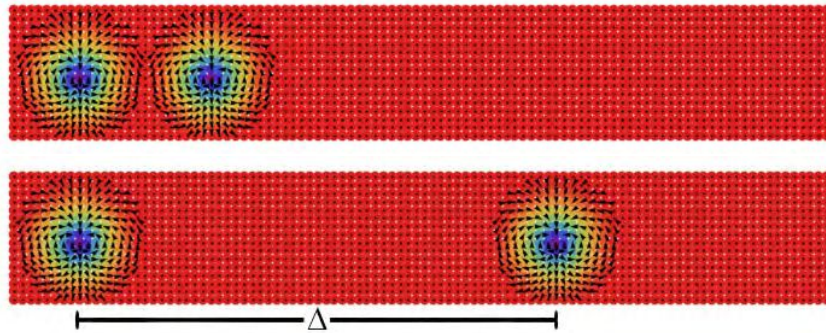
Si bien se trabajó en redes bidimensionales, para expresar el valor de la componente en  $z$  se usó la función *ColorData* de Mathematica 12.0, que genera una cierta variedad de colores (en este caso, “arco iris”) dependiendo de los parámetros de entrada. Se representa así al **color violeta** como el asociado al valor más bajo de la componente  $S_z$ , y el **color rojo** para el más alto.

Para generar skyrmiones antiferromagnéticos, el carácter alternante se introduce en la definición de la función angular  $\theta$  haciendo  $\theta(r) \rightarrow \theta(r)(-1)^{x+y}$  [80]. De esta manera, sitios vecinos poseen un comportamiento alternado en la componente  $z$  de los spines. Como ejemplo, en la figura (3.3a) se muestra un skyrmion antiferromagnético.

Por último, para generar skyrmiones ferrimagnéticos, se empleó el ansatz de skyrmiones antiferromagnético pero se consideró que la red cuadrada está formada por dos subredes cuadradas interpenetradas como se muestra en la figura (3.3b) en donde una de las subredes tiene  $|S(r)| = 1$  y la otra  $|S(r)| = 1/2$ , generando una magnetización neta no nula.

Considerando la motivación del presente trabajo, se simuló arreglos con dos skyrmiones, separados a una cierta distancia entre centros  $\Delta$  (ver gráfico 3.4). Se varió la distancia  $\Delta$  y se exportaron los valores de las coordenadas de los vectores de espín.

Consecuentemente, se puede construir una tabla de valores de  $S_x, S_y, S_z$  para cada valor de

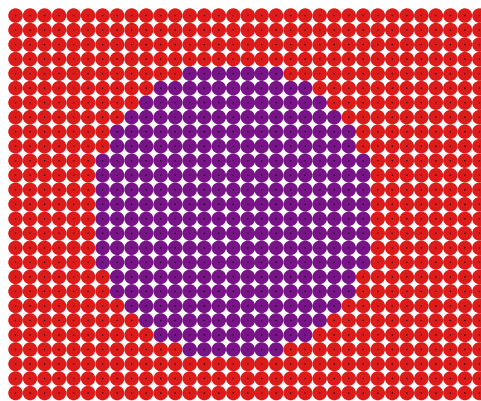


**Figura 3.4.** Ansatz utilizado. Se detalla en el mismo la variable  $\Delta$ , la distancia entre centros de los skyrmiones.

$\Delta$ . Luego, se procede a leer dichas tablas a un código en lenguaje *Fortran 90*, el cual tiene la función de diagonalizar el Hamiltoniano del problema (ver sección 3.2).

### 3.1.2. Dominios magnéticos

Para poder comparar características de los distintos tipos de skyrmiones con dominios ferromagnéticos, de gran importancia en experimentos reales, se generaron configuraciones circulares de estas últimas estructuras en el software previamente utilizado para skyrmiones (figura 3.5). Como los dominios ferromagnéticos constan sólo de momentos magnéticos apuntando en el mismo sentido, los ángulos que parametrizan la función de espín son constantes dentro de un cierto radio. Dicho esto, se toma al valor del ángulo  $\phi$  nulo, mientras que el ángulo con el eje  $\hat{z}$  se escribe como  $\theta = \pi H(R - r)$ , siendo igual a  $\pi$  dentro de un radio  $R$ , que será tomado idéntico al radio del skyrmion, y nulo fuera del mismo.



**Figura 3.5.** Configuración utilizada para un dominio ferromagnético.

## 3.2. Modelo

### 3.2.1. Hamiltoniano

Una vez realizadas las configuraciones magnéticas de skyrmiones, se estudió el problema electrónico y magnético acoplado con el siguiente Hamiltoniano:

$$\hat{H} = \hat{H}_e + \hat{H}_M \quad (3.5)$$

donde  $\hat{H}_M$  es el Hamiltoniano que describe los grados de libertad de la red magnética. Este incluye las interacciones de intercambio y de Dzyaloshinskii-Moriya previamente mencionadas en la sección 1.2

$$\hat{H}_M = \hat{H}_I + \hat{H}_{DM} = - \sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j + \sum_{\langle ij \rangle} \vec{D}_{ij} \cdot (\vec{S}_i \times \vec{S}_j) \quad (3.6)$$

mientras que  $\hat{H}_e$  es el Hamiltoniano asociado a los grados de libertad electrónicos, conteniendo el término de *hopping* de los electrones a primeros vecinos y el acoplamiento de Hund (local en cada sitio) entre los momentos magnéticos de la red y el espín de los electrones, y está dado por

$$\hat{H}_e = \hat{H}_{hop} + \hat{H}_H = - \sum_{\langle ij \rangle} t_{ij} (\hat{c}_{i,\sigma}^\dagger \hat{c}_{j,\sigma} + h.c.) - \frac{J_H}{2} \sum_i \vec{S}_i \cdot \hat{c}_{i,\mu}^\dagger \vec{\sigma}^{\mu\nu} \hat{c}_{i,\nu} \quad (3.7)$$

donde  $\hat{c}_{i,\sigma}^\dagger$  y  $\hat{c}_{j,\sigma}$  son los operadores de creación y aniquilación fermiónicos en los sitios  $i$  y  $j$  respectivamente con espín  $\sigma = \uparrow, \downarrow$  y  $t_{ij}$  es la *integral de transferencia*, relacionada con la amplitud del *hopping* y el ancho de las bandas de energías.

Para estudiar este problema, vamos a emplear una aproximación similar a la aproximación de **Born-Oppenheimer** que consiste en realizar una separación de escala de tiempos característicos entre el movimiento de los núcleos atómicos y el de los electrones. En nuestro caso, la aproximación consiste en asumir que el tiempo de relajación de la textura magnética  $\tau_M$  es mucho mayor que el tiempo característico de relajación de los electrones  $\tau_M > \tau_e$ . Así, los momentos magnéticos son estáticos (es decir, la configuración magnética está fija, ya que los skyrmiones son rígidos y no se deforman) y que los electrones se mueven en la red interactuando localmente en cada sitio magnético (vale aclarar que esta aproximación es válida en muchos sistemas reales [61]). Con esta simplificación, se toma el Hamiltoniano  $\hat{H}_M$  de la configuración magnética de la red como fijo, y sólo se consideran los grados de libertad electrónicos, trabajando así sólo con  $\hat{H}_e$ .

### 3.2.2. Cálculo de la energía del estado fundamental

Para calcular la energía del estado fundamental electrónico, es mucho más sencillo y transparente expresar al Hamiltoniano del problema en forma matricial de la siguiente manera

$$\hat{H} = \hat{\psi}^\dagger \cdot M \cdot \hat{\psi} \quad (3.8)$$

### 3. Modelo y resultados

---

siendo  $\hat{\psi}$  el vector que contiene los operadores creación y aniquilación fermiónicos

$$\hat{\psi} = \begin{pmatrix} \hat{c}_{1,\uparrow} \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{c}_{N_s,\uparrow} \\ \hat{c}_{1,\downarrow} \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{c}_{N_s,\downarrow} \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

con  $N_s$  la cantidad total de sitios de la red. La matriz  $M$ , que depende de la amplitud de *hopping*  $t$  y de la constante de Hund  $J_H$ , contiene la información de la configuración magnética.

Sea  $U$  una matriz de transformación lineal entre operadores fermiónicos  $\{\hat{c}_{i,\sigma}\}$  a unos nuevos operadores fermiónicos  $\{\hat{f}_n\}$  ( $n = 1, \dots, 2N_s$ ):

$$\hat{\psi} = U \cdot \hat{\Phi} \quad (3.10)$$

Se tiene entonces

$$\hat{H} = \hat{\Phi}^\dagger \cdot U^\dagger \cdot M \cdot U \cdot \hat{\Phi} = \hat{\Phi}^\dagger \cdot M_d \cdot \hat{\Phi} \quad (3.11)$$

siendo  $M_d$  diagonal. El Hamiltoniano se escribe en términos de los elementos diagonales entonces como

$$\hat{H}' = \sum_{n=1}^{2N_s} \epsilon_n \hat{f}_n^\dagger \hat{f}_n \quad (3.12)$$

con  $\hat{f}_n$  los elementos de matriz de  $\hat{\Phi}$ .

Como los operadores fermiónicos  $\hat{c}_i$  satisfacen las reglas de anticonmutación

$$\{\hat{c}_i, \hat{c}_j^\dagger\} = \delta_{ij} \quad (3.13)$$

y se transforma a un nuevo conjunto de operadores fermiónicos  $f_n$  que deben preservar las mismas reglas, pues se trata también de operadores de creación y aniquilación, la matriz  $U$  debe ser unitaria, es decir, debe satisfacer

$$U \cdot U^\dagger = I_d \quad (3.14)$$

con  $I_d$  la matriz identidad de dimensión  $d$ , que en este caso será  $2N_s$ .

El estado fundamental electrónico  $|GS\rangle$  se puede escribir como el producto directo de los estados electrónicos  $|n\rangle$

$$|GS\rangle = \otimes_{n=1}^{N_{max}} |n\rangle \quad (3.15)$$

ya que el Hamiltoniano es suma de términos, puesto que son electrones libres (o no interactuantes).  $N_{max}$  es el número máximo de estados ocupados, lo que define el nivel de Fermi. Por lo tanto, la energía del estado fundamental puede calcularse tomando el valor medio del Hamiltoniano original en Eq. (3.8)

$$E_{GS} = \langle GS | \hat{H} | GS \rangle = \sum_{n=1}^{N_{max}} \epsilon_n \quad (3.16)$$

La matriz  $M$  del Hamiltoniano en la ecuación (3.8) se diagonalizó numéricamente utilizando un código de Fortran 90, empleando la subrutina **ZHEEVD** y las Librerías Matemáticas de Intel (MKL), obteniéndose así el espectro de energías  $\epsilon_n$ . A partir de esto, se determinó la energía del estado fundamental de los skyrmiones y la fuerza efectiva entre ellos en función de la distancia entre centros.

Gran parte del estudio consistió en analizar cómo varía la energía del estado fundamental con el llenado electrónico  $n^{(i)}$ , y no la energía de Fermi, pues una vez modificada la configuración magnética de la red a medida que se separan los skyrmiones, la energía de Fermi cambia (cambia el Hamiltoniano). El número de estados ocupados, sin embargo, se mantiene constante ante este cambio. Este número varía desde 1 hasta el número máximo de electrones  $2N_S$ , que para el dado problema es de 6400. Se estudió entonces como varía la energía y la fuerza de los skyrmiones en función de  $\Delta$ , para distintos valores del llenado  $n$ .

### 3.2.3. Densidad electrónica

Con el fin de realizar un estudio más profundo de los grados de libertad electrónicos para las distintas texturas magnéticas empleadas, se calculó la densidad de carga electrónica local (u ocupación electrónica) de tres de los cuatro tipos de redes estudiadas: skyrmiones ferromagnéticos, skyrmiones antiferromagnéticos y dominios ferromagnéticos. El objetivo principal fue determinar si las distintas texturas magnéticas pueden generar algún tipo de localización de los estados electrónicos.

La densidad total de carga en el sitio  $i$  está dada por el valor de expectación del operador número

$$\rho_i = \langle \hat{\rho}_i \rangle = \langle \hat{c}_{i,\uparrow}^\dagger \hat{c}_{i,\uparrow} + \hat{c}_{i,\downarrow}^\dagger \hat{c}_{i,\downarrow} \rangle \quad (3.17)$$

A continuación, realizamos un proceso análogo al cálculo de la energía, reescribiendo el operador carga como

$$\hat{\rho}_i = \hat{\psi}^\dagger \cdot O \cdot \hat{\psi} \quad (3.18)$$

con  $O$  una matriz cuyos elementos, para el sitio  $i$ , están dados por

$$O^{jk} = \delta_{j,i} \delta_{k,i} + \delta_{j,i+N_S} \delta_{k,i+N_S} \quad (3.19)$$

Utilizando la transformación unitaria  $U$  nos queda:

$$\hat{\rho}_i = \hat{\Phi}^\dagger \cdot U^\dagger \cdot O \cdot U \cdot \hat{\Phi} \quad (3.20)$$

considerando la expresión anterior para los elementos de matriz de la matriz  $O$ , el valor medio del operador densidad de carga puede expresarse en términos de los elementos de matriz de  $U$ :

$$\rho_i = \langle \hat{\rho}_i \rangle = \sum_{l=1}^n U_{l,i}^\dagger U_{i,l} + U_{l,i+N_S}^\dagger U_{i+N_S,l} \quad (3.21)$$

<sup>(i)</sup>Cabe mencionar que  $n$  no es estrictamente el llenado electrónico (que tradicionalmente denota la fracción de estados ocupados hasta el nivel de Fermi  $\frac{N_e}{2N_S}$ , con  $N_S$  la cantidad de sitios en la red, tomando valores entre 0 y 1) sino que directamente se utilizó el número de niveles electrónicos ocupados  $N_e$ .

### 3. Modelo y resultados

---

donde la suma se realiza hasta la ocupación máxima  $n$ , o número de niveles ocupados, por lo que dependerá del llenado electrónico. Como  $U$  es unitaria, se ve que  $U_{l,i}^\dagger U_{i,l} = |U_{i,l}|^2$  y, *ergo*:

$$\rho_i = \sum_{l=1}^n |U_{i,l}|^2 + |U_{i+N_s,l}|^2 \quad (3.22)$$

por lo que, una vez conocidos los elementos de matriz de la matriz de transformación  $U$ , se pueden determinar la densidad de carga en cada sitio.

### 3.3. Resultados

En primer lugar, se determinó la energía del estado fundamental electrónico  $E_{GS}$  en función de la distancia entre centros de los skyrmiones  $\Delta$  <sup>(i)</sup> para un dado llenado  $n$ . Debido a que en las texturas magnéticas utilizadas, una gran fracción de sitios presentan orden ferromagnético y solo una pequeña fracción de las mismas contiene a los skyrmiones, la variación de la energía con la distancia queda reducida por efecto de la contribución ferromagnética. Para destacar el efecto del acoplamiento de Hund, es necesario suprimir el efecto de la energía de fondo. Así, la cantidad que se estudia es:

$$E_{elec} = E(J_H) - E(0) \quad (3.23)$$

donde  $E(0)$  es la energía del sistema para  $J_H = 0$ , la cual se vio en detalle en la sección 1.4. En el caso de una red rectangular de lados  $L_x, L_y$ , es fácil ver que las energías de un Hamiltoniano tight-binding están dadas por

$$E(0) = -2t \sum'_{n_x, n_y} \left( \cos \frac{2\pi n_x}{L_x} + \cos \frac{2\pi n_y}{L_y} \right) \quad (3.24)$$

donde  $\sum'$  indica que la suma está restringida a los  $n_x, n_y$  tal que el número total de estados ocupados es igual a  $n$ . Además, se calculó una fuerza efectiva entre skyrmiones que se denota  $F_{eff}$ , obtenida a partir de la derivada de la energía con respecto a la distancia  $\Delta$ ,

$$F_{eff} = -\frac{dE_{elec}}{d\Delta} \quad (3.25)$$

A lo largo de todo el trabajo, se consideró  $t$  como escala de energía y fue fijada a  $t = 1$ . Se estudiaron tanto los casos de **acoplamiento débil** ( $J_H = 0.2$ ) como de **acoplamiento fuerte** ( $J_H = 8$ ), con el fin de acentuar el efecto de la presencia de los electrones con los espines de la red. Para la mayoría de los cálculos se empleó una red discreta rectangular de ancho  $L_x = 16$  y  $L_y = 200$  siendo el número de sitios  $N_s = L_x \times L_y = 3200$ . También se realizaron cálculos con otros tamaños confirmando los resultados obtenidos. La elección de estos valores fue con el objetivo de obtener la mayor separación posible entre skyrmiones. Se analizaron pares de los tres tipos de skyrmiones tipo Bloch mencionados, de carga topológica  $Q = -1$ , radio  $R = 8$  y una

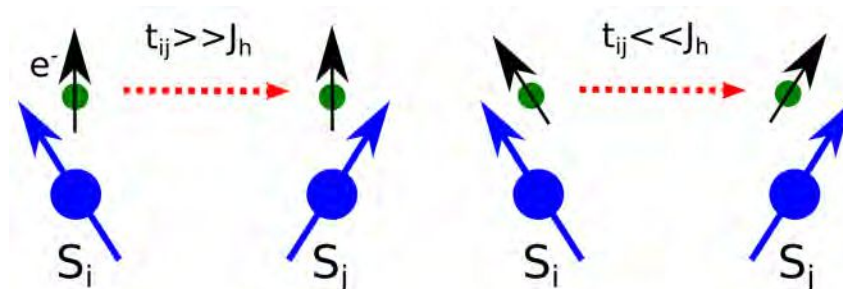
---

<sup>(i)</sup>Se redefine aquí, para ser utilizada en esta sección, la variable  $\Delta$ , de modo tal que el gráfico comience en 0, esta será  $\Delta - 2R$ , con  $R$  el radio del skyrmion.

magnetización homogénea de  $\vec{m} = (0, 0, 0.2)$ . Se comparó además con dominios ferromagnéticos del mismo radio que los skyrmiones, con el objetivo de destacar el carácter topológico de estos últimos.

#### 3.3.1. Acoplamiento de Hund débil: $J_H = 0.2$

El primer caso analizado fue el de acoplamiento débil  $J_H < t$  entre los electrones y la textura magnética. En este caso, de los términos del Hamiltoniano en la ecuación (3.8), el término dominante corresponde al término cinético de los electrones (hopping). En principio, se esperaría que la textura magnética tenga poca influencia en las propiedades electrónicas y el sistema se comporte como un modelo *tight-binding* homogéneo (ver figura 3.6). Sin embargo, se verá que aún siendo pequeño el acoplamiento  $J_H$ , surgen configuraciones energéticamente más favorables que otras, que estabilizan a los skyrmiones en posiciones específicas.



**Figura 3.6.** Representación gráfica de la influencia del término de Hund en el caso débil (izquierda) y fuerte (derecha).

##### 3.3.1.1. Skyrmiones ferromagnéticos

En primer lugar se consideran skyrmiones ferromagnéticos tipo Bloch. En el gráfico 3.7(a, izquierda) se observa que para  $n = 1$ , el mínimo en la energía  $E_{elec}$  ocurre a  $\Delta = 0$  (el mínimo valor posible) indicando que para un único estado electrónico ocupado, la configuración de mínima energía ocurre cuando los skyrmiones están dispuestos uno al lado del otro en la cinta. En este caso, como es de esperar, existe una fuerza efectiva atractiva entre skyrmiones (figura 3.7(a, derecha)) que se repite periódicamente a lo largo de la dirección  $L_x$  de la cinta, ya que el sistema posee condiciones de contorno periódicas.

Para  $n = 2$ , aparece un mínimo local de energía en el centro de la red (un pozo de potencial) indicando que, para este llenado, existe una configuración energéticamente estable de skyrmiones separados una cierta distancia, como se muestra en el gráfico 3.7(b). Esta configuración de skyrmiones es rígida en el sentido de que para acercar o alejar los skyrmiones es necesario superar una barrera de energía que en el caso de la figura 3.7(b) ocurre a la distancia  $\Delta \simeq 55$ .

En los gráficos 3.7(c-e) se muestra que si se aumenta la cantidad de electrones, para llenados aún relativamente bajos (alrededor de  $n = 6$ ), la energía se comporta de manera oscilatoria con  $\Delta$ , es decir, existen varias distancias para las cuales se minimiza localmente la energía. Se ve que además, estas oscilaciones tienen una amplitud decreciente. Esto se mantiene hasta llenados alrededor de  $n = 20$  (gráfico 3.8(a)) y se vuelve más notable para un llenado mayor, como puede verse para  $n = N_s$  en la figura 3.8(b).

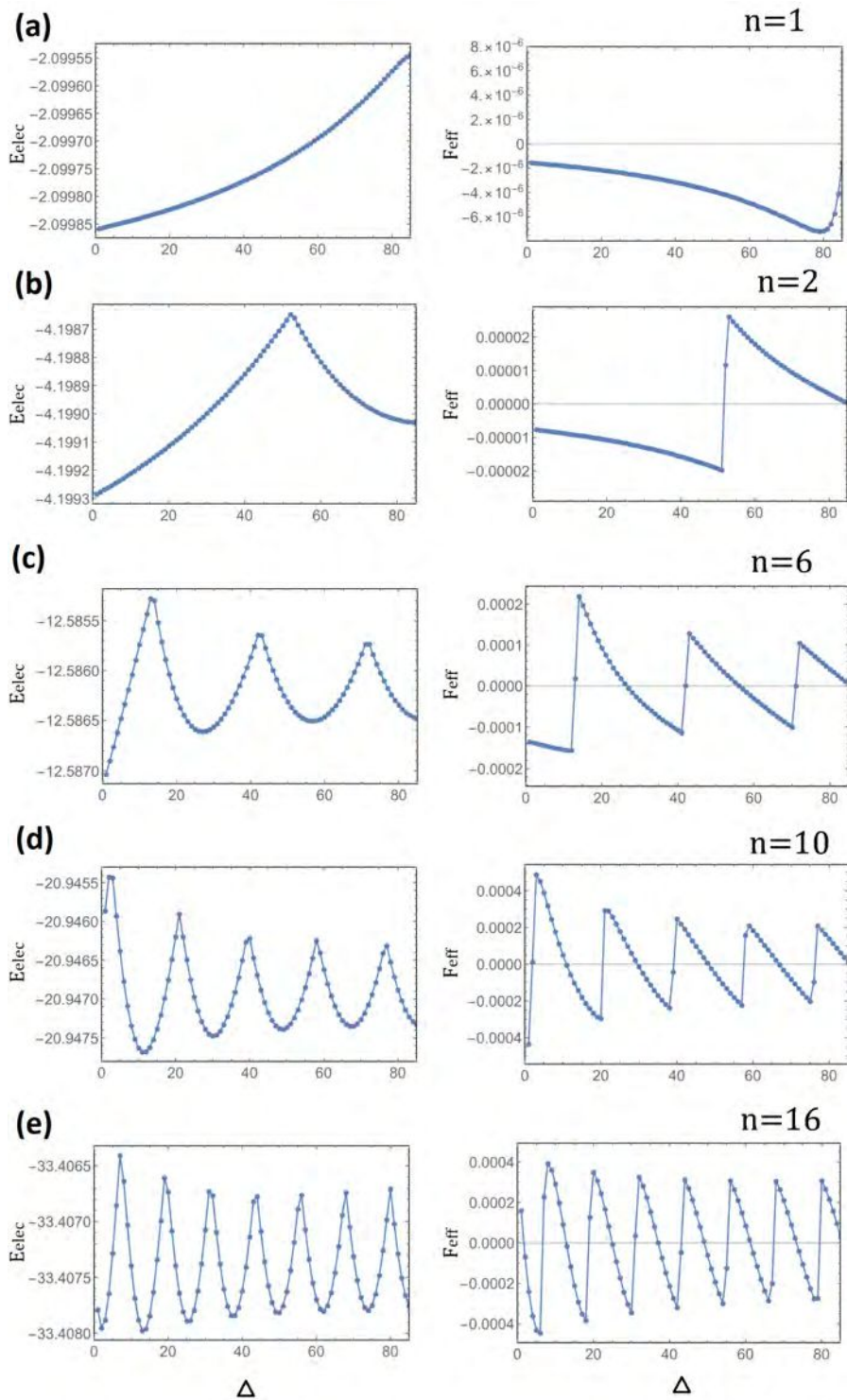
Este resultado sugiere que, al aumentar el llenado de electrones, se generan mínimos locales en donde los skyrmiones son energéticamente más estables. Podría ser plausible entonces crear skyrmiones a esas distancias específicas y los skyrmiones permanecerían en estas posiciones fijas.



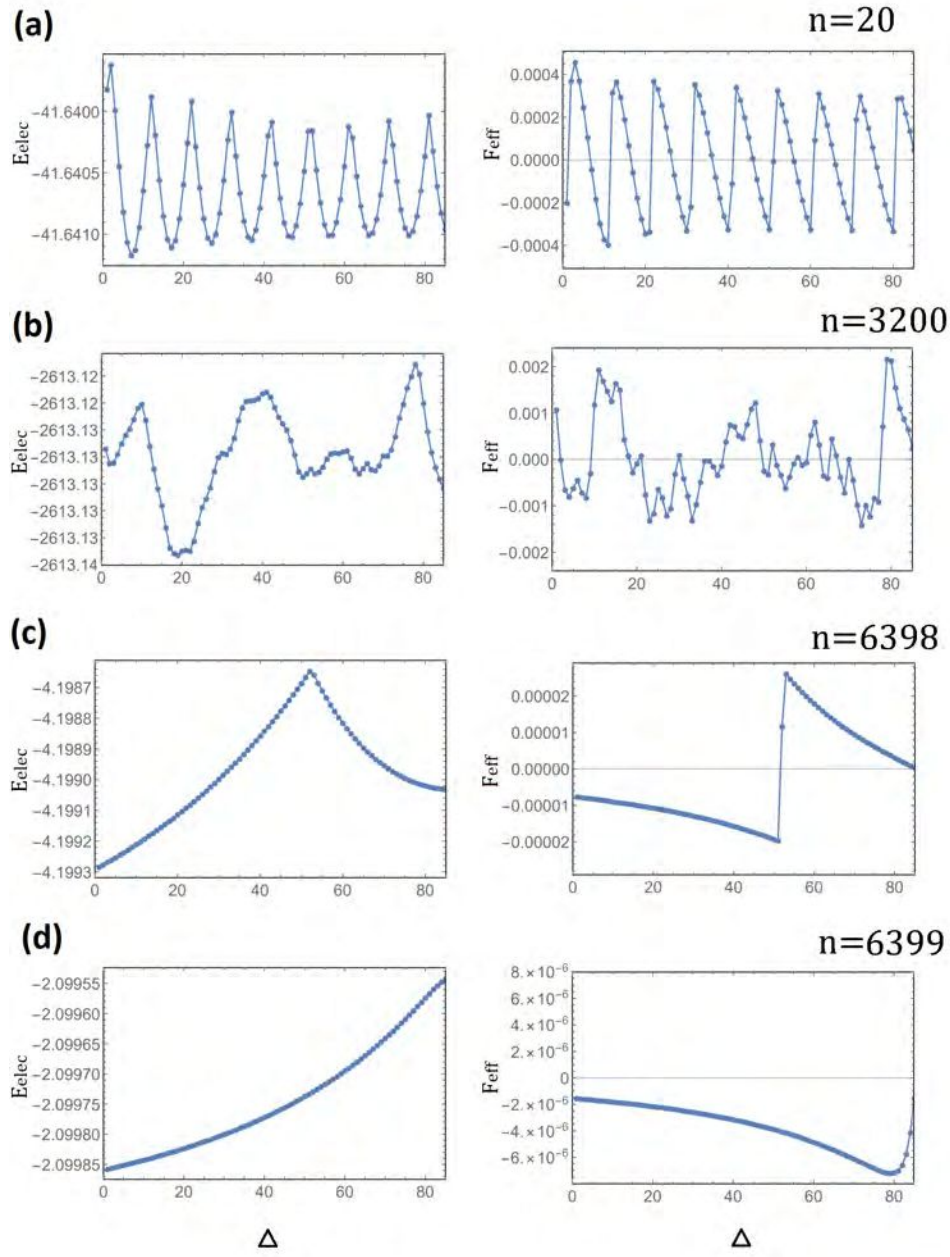
Para llenados más altos este tipo de comportamiento se vuelve más irregular. En particular, no se observa la periodicidad con la distancia. En este caso, podrían ser más importantes las condiciones de contorno a lo largo de la cinta, por lo que requeriría estudiar cintas de mayor longitud, fuera del alcance de este trabajo.

Cabe destacar, además, que para valores del llenado cercanos a  $n_{max} = 6400$ , el comportamiento de la energía con la distancia entre skyrmiones vuelve a repetirse, dando cuenta de la **simetría electrón-hueco** de la red discreta del problema, comportándose la energía análogamente a los primeros llenados. Esto se muestra en las figuras 3.8(c) y 3.7(d), siendo idénticas a 3.7(b) y 3.7(a), respectivamente.

### 3. Modelo y resultados



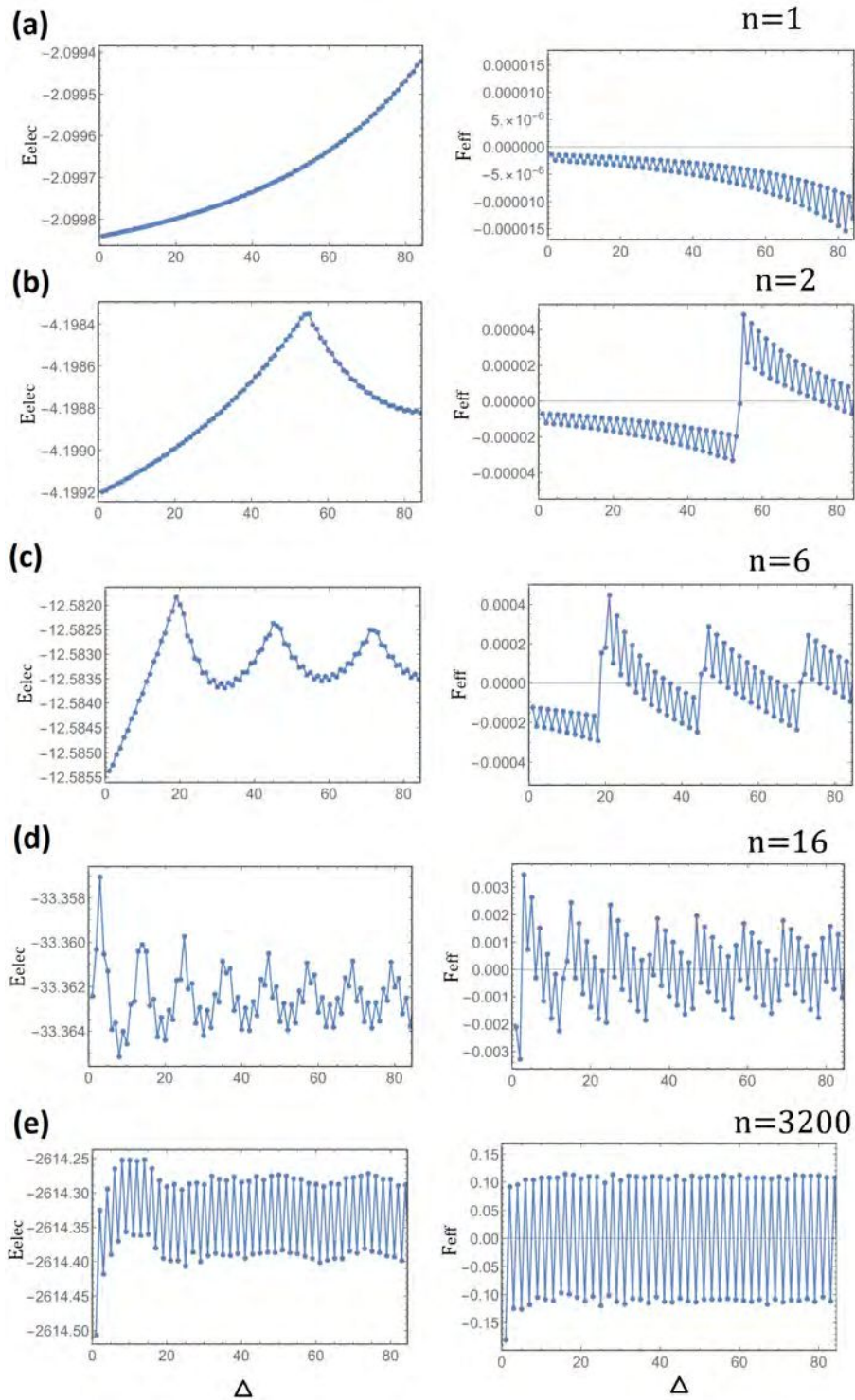
**Figura 3.7.** Energía del estado fundamental electrónico  $E_{elec}$  (izquierda) y de la fuerza efectiva  $F_{eff}$  (derecha) entre skyrmiones en función del corrimiento  $\Delta$  para un llenado de  $n = 1, 2, 6, 10$  y  $16$  para skyrmiones **ferromagnéticos**.



**Figura 3.8.** Energía del estado fundamental electrónico  $E_{elec}$  (izquierda) y de la fuerza efectiva  $F_{eff}$  (derecha) entre skyrmiones en función del corrimiento  $\Delta$  para un llenado de  $n = 20, 3200, 6398$  y  $6399$  para skyrmiones **ferromagnéticos**.

#### 3.3.1.2. Skyrmiones antiferromagnéticos

Para el caso de skyrmiones antiferromagnéticos (figura 3.1a), en el gráfico 3.9 (a)) se observa que para llenado  $n = 1$  hay nuevamente una fuerza atractiva; esto se repite periódicamente, como en el caso de los skyrmiones ferromagnéticos. Sin embargo, pequeñas oscilaciones a cortas distancias reflejan el carácter antiferromagnético de los skyrmiones. Para el caso de  $n = 2$  (figura 3.9(b)) se genera un pozo de potencial en la red, que indicaría nuevamente posiciones estables de los skyrmiones antiferromagnéticos para un cierto valor del corrimiento entre skyrmiones  $\Delta$ . Más allá de la similitud a simple vista, se observa que para el caso de skyrmiones ferromagnéticos el alto de las barreras de energía es del orden de  $1 \times 10^{-3}$  (para  $n = 6$  por ejemplo) mientras que para los skyrmiones antiferromagnéticos es del orden  $2 \times 10^{-3}$ . Esto sugiere, aún habiendo un acoplamiento débil entre los electrones y los espines de la red, que los skyrmiones antiferromagnéticos serían más estables energéticamente que los skyrmiones ferromagnéticos, pues los pozos de energía potencial en estos últimos son menos energéticos. Esta distinción será más notable en el caso de acoplamiento fuerte (ver sección 3.3.2).



**Figura 3.9.** Energía del estado fundamental electrónico  $E_{elec}$  (izquierda) y de la fuerza efectiva  $F_{eff}$  (derecha) entre skyrmiones en función del corrimiento  $\Delta$  para un llenado de  $n = 1, 2, 6, 16$  y  $3200$  para skyrmiones **antiferromagnéticos**.

#### 3.3.1.3. Skyrmiones ferrimagnéticos

Por último, se estudiaron skyrmiones ferrimagnéticos 3.3b. En este caso, como es de esperar, el comportamiento es muy similar al del caso de skyrmiones antiferromagnéticos.

Ocurre análogamente a los casos anteriores, que al tener un electrón, hay nuevamente una fuerza atractiva; esto se repite periódicamente, como se muestra en el gráfico 3.10(a). Se repite además el comportamiento para un llenado de  $n = 2$ , donde se genera un mínimo local de energía para un cierto valor de  $\Delta$ , como se ve en el gráfico 3.10(b).

El patrón se repite para llenados intermedios, mientras que cambia para llenados del orden de  $n = 20$ . Se ve que el comportamiento en llenados aún mayores se pierde, como por ejemplo para  $n = N_S$ (gráfico 3.10(e)).

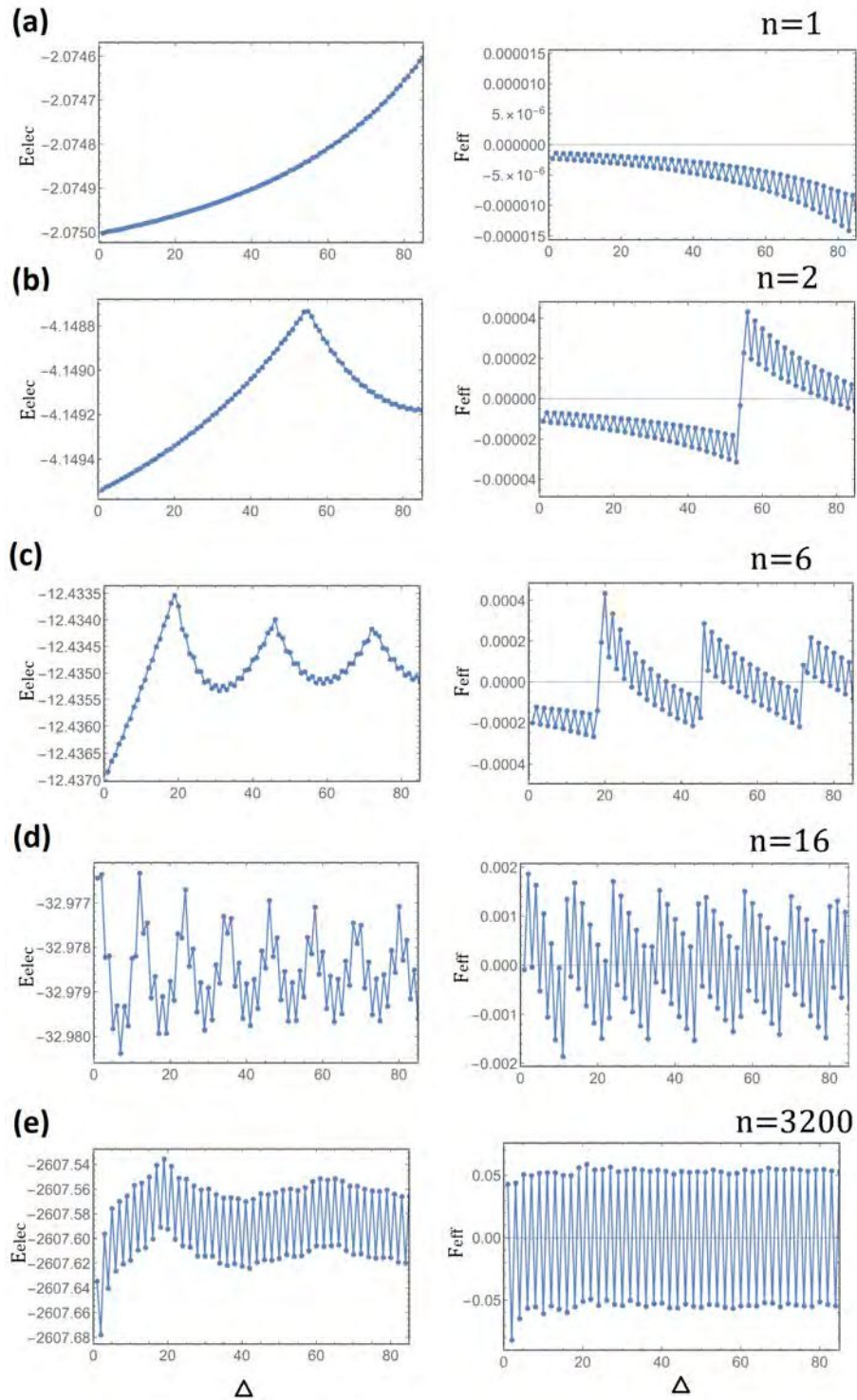
#### 3.3.1.4. Dominios ferromagnéticos

Con el objetivo de comparar los resultados obtenidos se estudio la energía del estado fundamental electrónico  $E_{elec}$  en función del corrimiento  $\Delta$  entre centros de dominios ferromagnéticos (homogéneos) de radio  $R = 8$ . Se utilizó primero un acoplamiento de Hund de  $J_H = 0.2$

En las figuras 3.11 y 3.12 se muestran los resultados para llenados  $n = 1, 2, 6, 10$  y  $16$  y  $n = 100$  y  $3200$ , respectivamente. Se observa que, para los primeros llenados, se comportan de manera análoga a los tres tipos de skyrmiones ya estudiados. Más aún, presentan similitudes con los skyrmiones antiferromagnéticos (ver figura 3.9). Sin embargo, esta tendencia se pierde para llenados por encima de  $n = 100$  (como se ve por ejemplo en las figuras 3.12(a) para  $n = 100$  y 3.12(b) para  $n = N_S$ ).

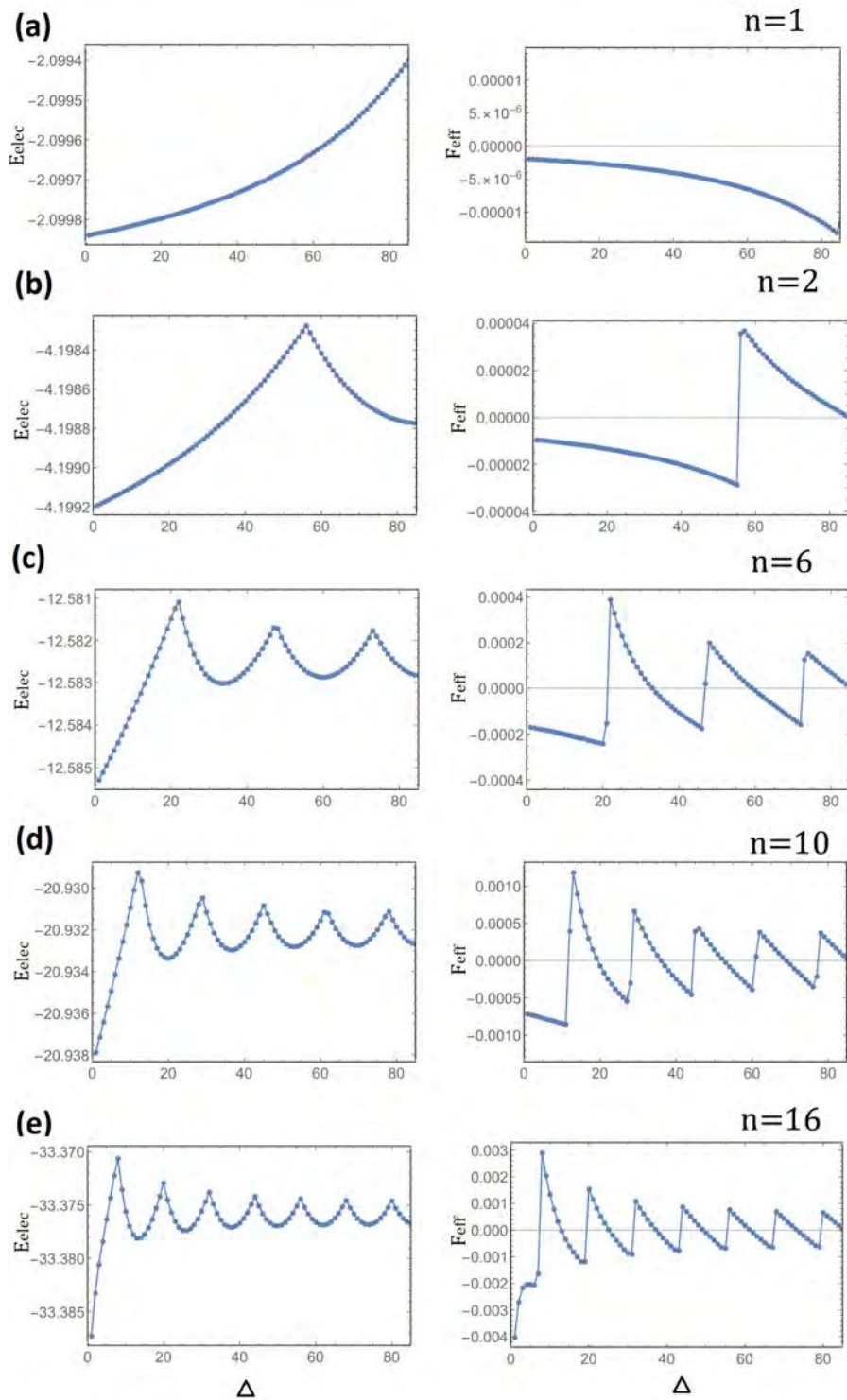
Con el fin de caracterizar el comportamiento de la energía en función de  $\Delta$ , se realizó en un mismo gráfico la superposición de valores de la energía electrónica para distintos llenados, usando la función **ListDensityPlot** del software, generando esta un gráfico de densidad de puntos para las tablas obtenidas, como se aprecia en el gráfico 3.13, donde se utilizó una escala de “colores solares”, representando el color más claro el valor más alto de la densidad y el oscuro el más bajo. En este gráfico se comparan los casos de skyrmiones ferromagnéticos (columna izquierda), antiferromagnéticos (columna central) y el de dominios ferromagnéticos (columna derecha). Se puede apreciar claramente que, para llenados bajos, existe una región muy marcada donde surgen mínimos locales a distancias regulares en los tres casos considerados. Sin embargo, a medida que aumenta el llenado, este comportamiento en la energía se vuelve más difuso e irregular. Esta irregularidad de los mínimos implica que los skyrmiones tienen menor anclaje en determinadas posiciones de la cinta y, por lo tanto, mayor movilidad.

Hasta aquí, se han analizado la energía potencial efectiva entre skyrmiones debida al acoplamiento con electrones itinerantes. En general, se observa que a bajo llenado se establecen mínimos locales que favorecen posiciones específicas de los skyrmiones. Un resultado destacado es que la configuración espacial de skyrmiones antiferromagnéticos es más estable o más rígida que para el caso ferromagnético debido a que los pozos de potencial poseen barreras de potencial más altas.



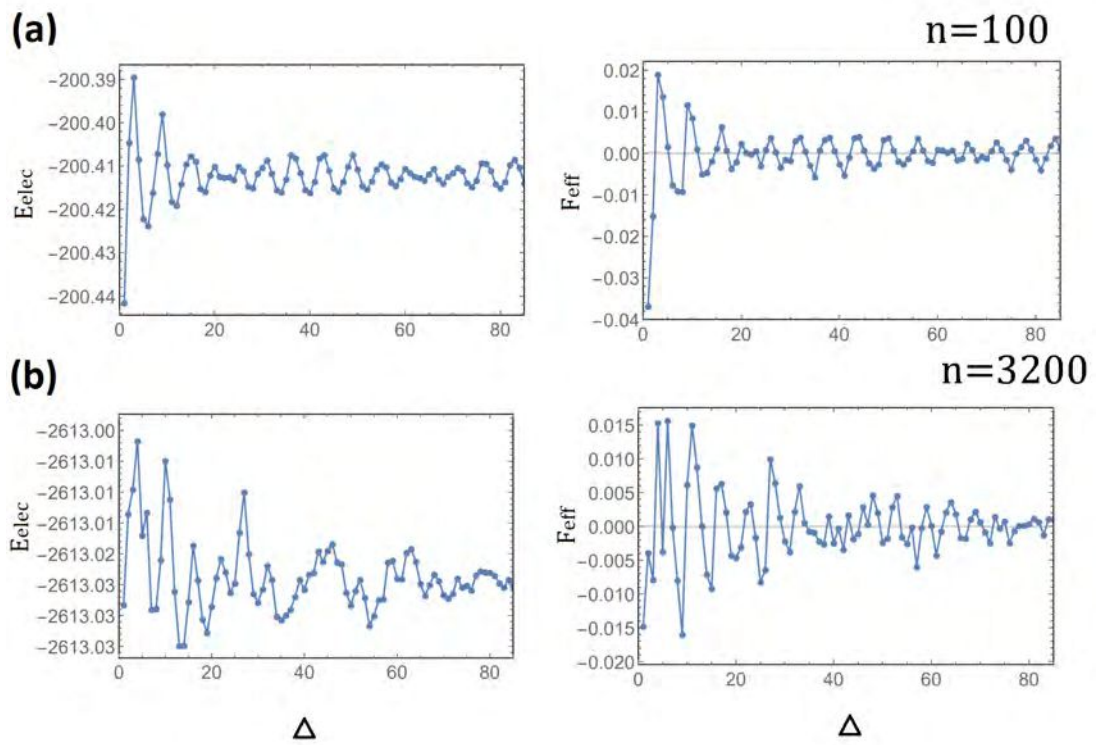
**Figura 3.10.** Energía del estado fundamental electrónico  $E_{elec}$  (izquierda) y de la fuerza efectiva  $F_{eff}$  (derecha) entre skyrmiones en función del corrimiento entre skyrmiones  $\Delta$  para un llenado de  $n = 1, 2, 10, 16$  y  $3200$  para skyrmiones **ferrimagnéticos**

### 3. Modelo y resultados



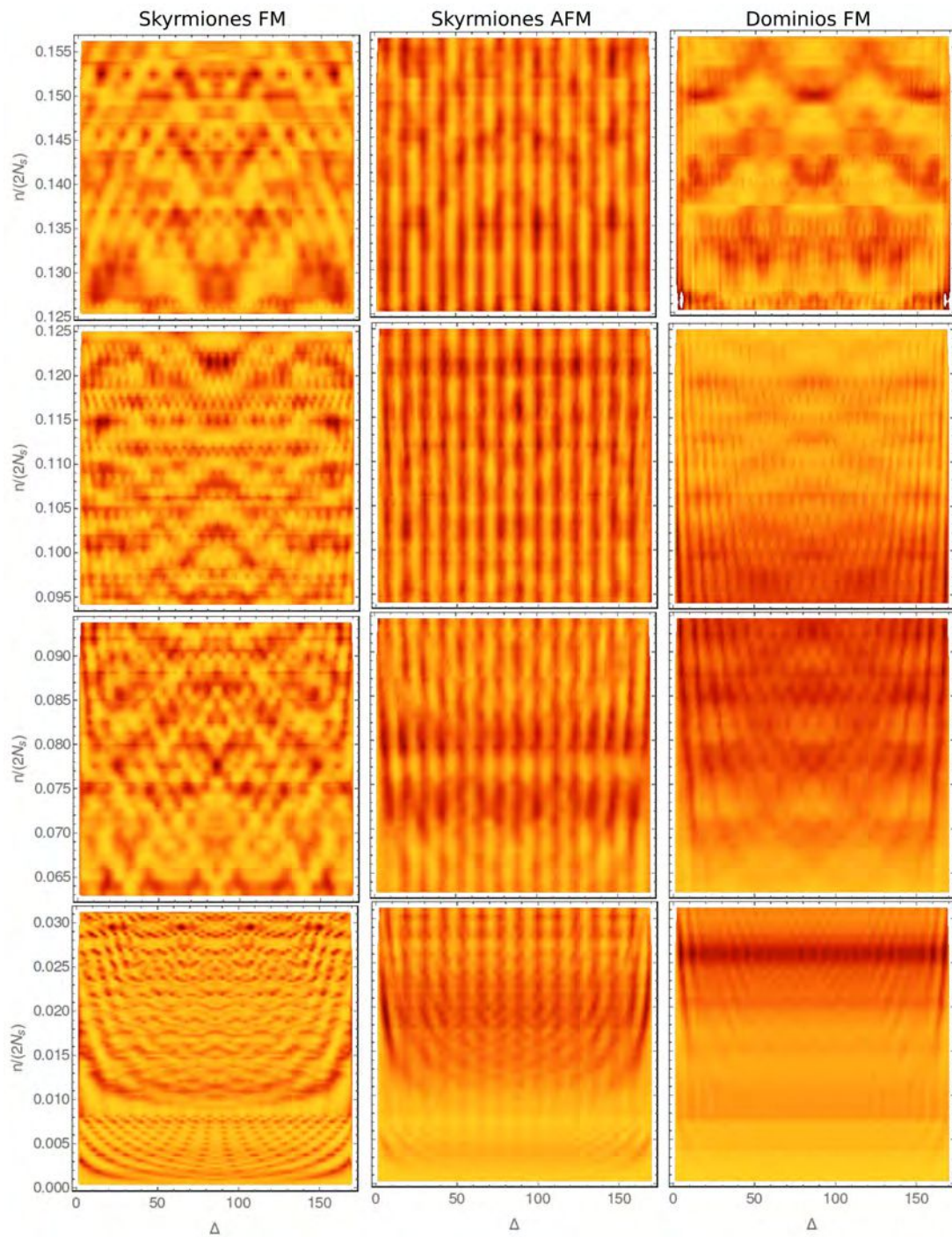
**Figura 3.11.** Energía del estado fundamental electrónico  $E_{elec}$  (izquierda) y de la fuerza efectiva  $F_{eff}$  (derecha) entre dominios en función del corrimiento entre dominios  $\Delta$  para un llenado de  $n = 1, 2, 6, 10$  y  $16$  para **dominios ferromagnéticos** con  $J_H = 0.2$ .





**Figura 3.12.** Energía del estado fundamental electrónico  $E_{elec}$  (izquierda) y de la fuerza efectiva  $F_{eff}$  (derecha) entre dominios en función del corrimiento entre dominios  $\Delta$  para un llenado de  $n = 100$  y  $n = 3200$  en **dominios ferromagnéticos** con  $J_H = 0.2$ .

### 3. Modelo y resultados

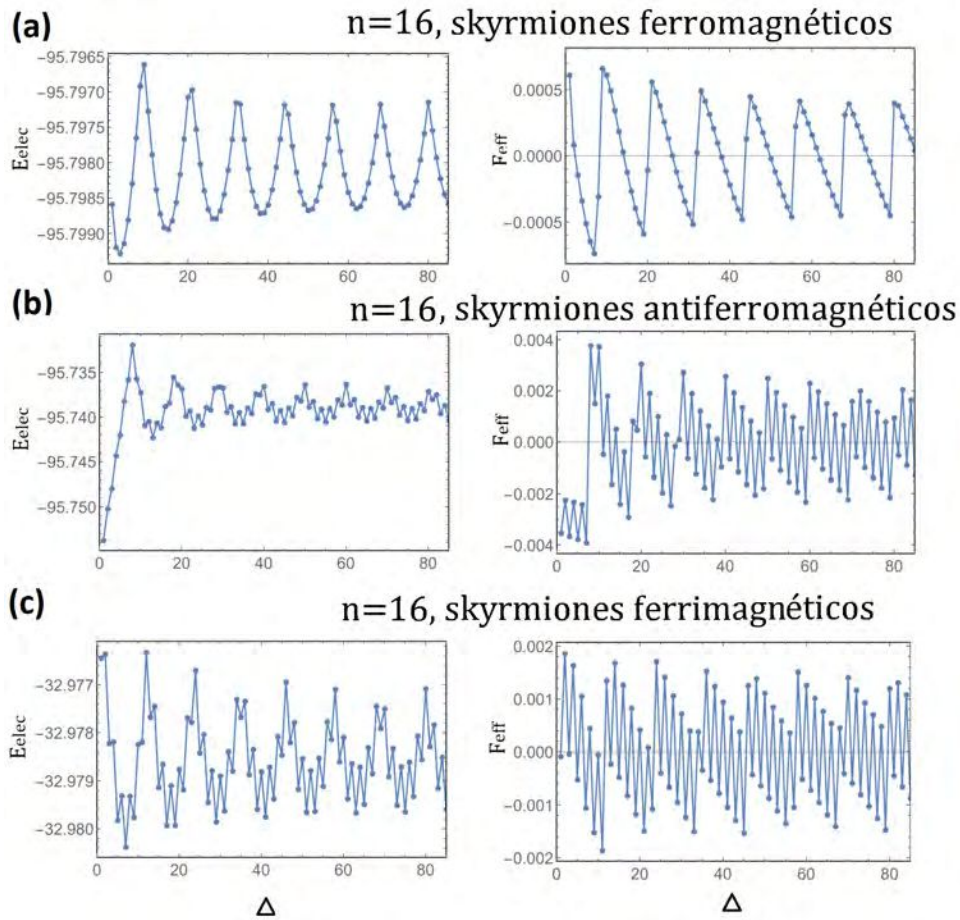


**Figura 3.13.** Gráfico de densidad de Energía en función de la distancia entre skyrmiones  $\Delta$  y el llenado  $n/(2N_s)$  para  $J_H = 0.2$ . Caso ferromagnético (columna izquierda), antiferromagnético (columna central) y dominios ferromagnéticos (columna derecha).

### 3.3.2. Acoplamiento de Hund fuerte: $J_H = 8$

A continuación, se muestran los resultados para el caso de acoplamiento fuerte entre electrones y espines de la red, con un valor de  $J_H = 8$ . Este valor implica que, a priori, el espín del electrón debe acomodarse sitio a sitio para estar alineado localmente con cada espín de la textura magnética. Se espera que en este caso se observen grandes diferencias respecto del caso de  $J_H < 1$ , según el tipo de skyrmion o dominio magnético.

En el caso de skyrmiones ferromagnéticos, al ser una configuración suave, la energía no debería diferir de manera drástica respecto del caso  $J_H < 1$ . Sin embargo, en el caso de skyrmiones antiferromagnéticos y ferrimagnéticos, el electrón debe pagar un importante costo energético al saltar de un sitio a otro.



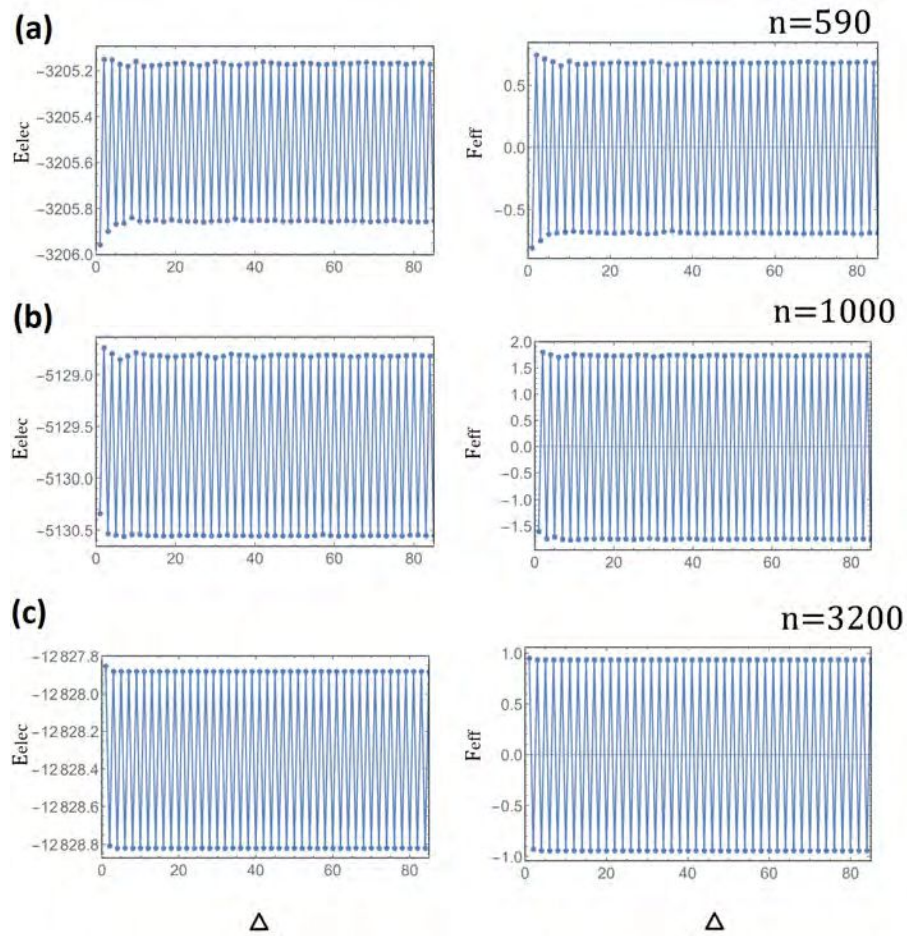
**Figura 3.14.** Energía del estado fundamental electrónico  $E_{elec}$  (izquierda) y de la fuerza efectiva  $F_{eff}$  (derecha) entre skyrmiones en función del corrimiento  $\Delta$  para un llenado de  $n = 16$ , correspondiente a medio llenado, para skyrmiones **ferromagnéticos** (a), **antiferromagnéticos** (b) y **ferrimagnéticos** (c) con  $J_H = 8$ .

En las figuras 3.14(a),(b) y (c) se muestran la energía en función de  $\Delta$  para los tres tipos de skyrmiones a un llenado fijo  $n = 16$ . Se ve que, para un acoplamiento fuerte, los skyrmiones

### 3. Modelo y resultados

antiferromagnéticos muestran oscilaciones con una amplitud mayor a los otros dos tipos de skyrmiones, profundizándose el efecto ya distinguido en la sección 3.3.1. Podría entonces destacarse a los skyrmiones antiferromagnéticos, pues serían más estables y se requeriría más energía para apartarlos de su mínimos locales de energía.

Se analizó en especial el caso de skyrmiones antiferromagnéticos para llenados altos, Se muestra en las figuras 3.15 (a), (b) y (c) los resultados para llenados  $n = 590$ , 1000 y 3200, respectivamente. Se aprecia como se forma un patrón estable de máximos y mínimos regulares en la energía, de gran amplitud en comparación con lo visto para los otros tipos de skyrmiones. Este notable resultado indica que la configuración energética de los skyrmiones antiferromagnéticos es mucho más rígida y estable que las antes presentadas.



**Figura 3.15.** Energía del estado fundamental electrónico  $E_{elec}$  (izquierda) y de la fuerza efectiva  $F_{eff}$  (derecha) entre skyrmiones en función del corrimiento  $\Delta$  para un llenado de (a)  $n = 590$ , (b)  $n = 1000$  y (c)  $n = 3200$ , para un acoplamiento de Hund de  $J_H = 8$ .

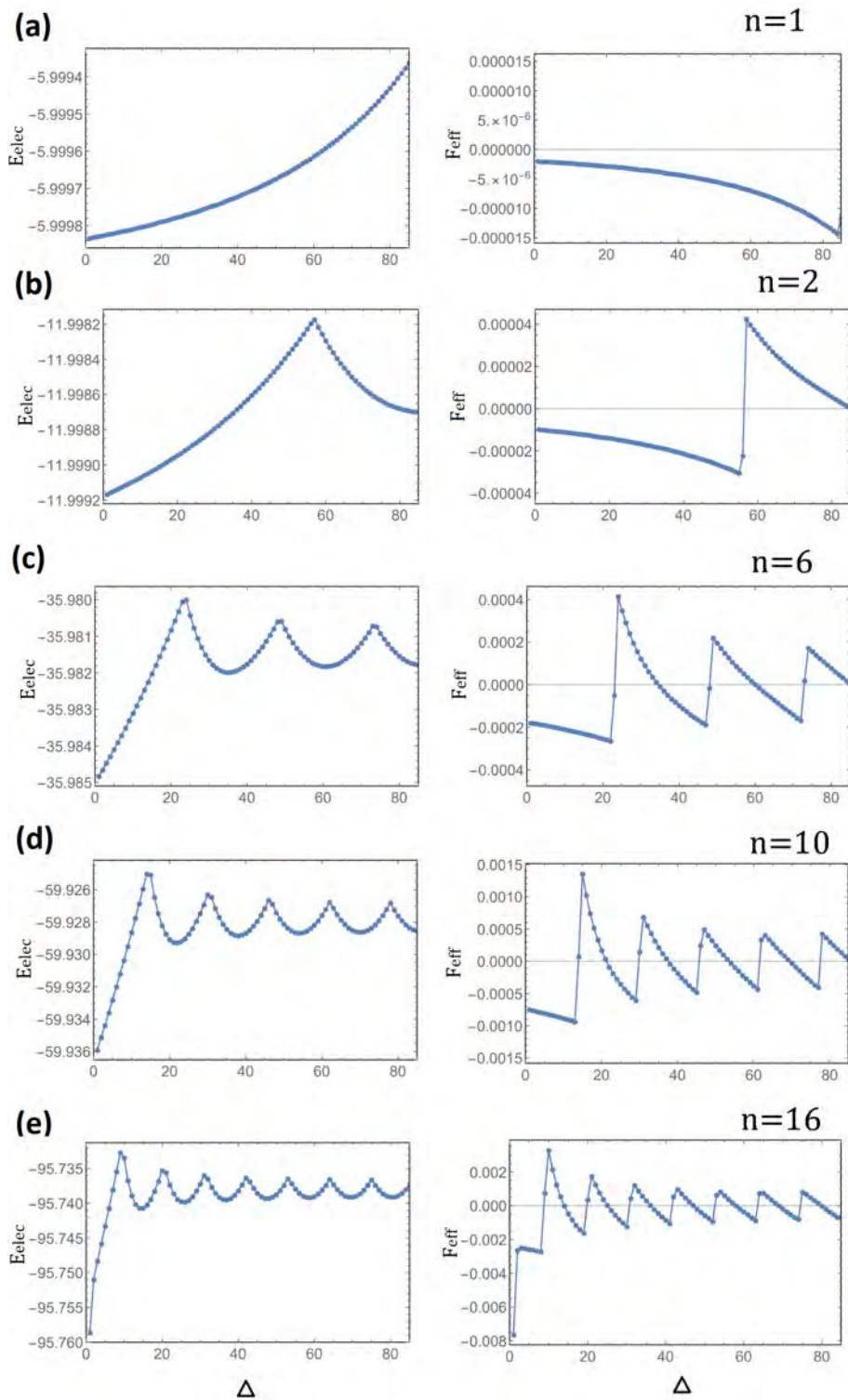
### 3.3.2.1. Dominios ferromagnéticos

Se analizó la energía del estado fundamental electrónico  $E_{elec}$  en función de la distancia entre centros  $\Delta$  de dominios ferromagnéticos de radio  $R = 8$  para un acoplamiento de Hund de  $J_H = 8$ . Se muestran en las figuras 3.16 y 3.17 algunos resultados los obtenidos. Se ve que, para los primeros llenados, se comportan de manera análoga a los tres tipos de skyrmiones ya estudiados. Más aún, presentan similitudes con los skyrmiones antiferromagnéticos (figura 3.9). Sin embargo, esta tendencia se pierde para llenados por encima de  $n = 22$ , pues se ve que la energía tiende a un valor fijo (o de saturación), en donde la fuerza efectiva misma es constante (como se ve por ejemplo en las figuras 3.17(a) para  $n = 100$  y 3.17(b) para medio llenado). Esto, en contraste, remarca la diferencia con el comportamiento irregular de los skyrmiones, como ya se vio en la sección previa.

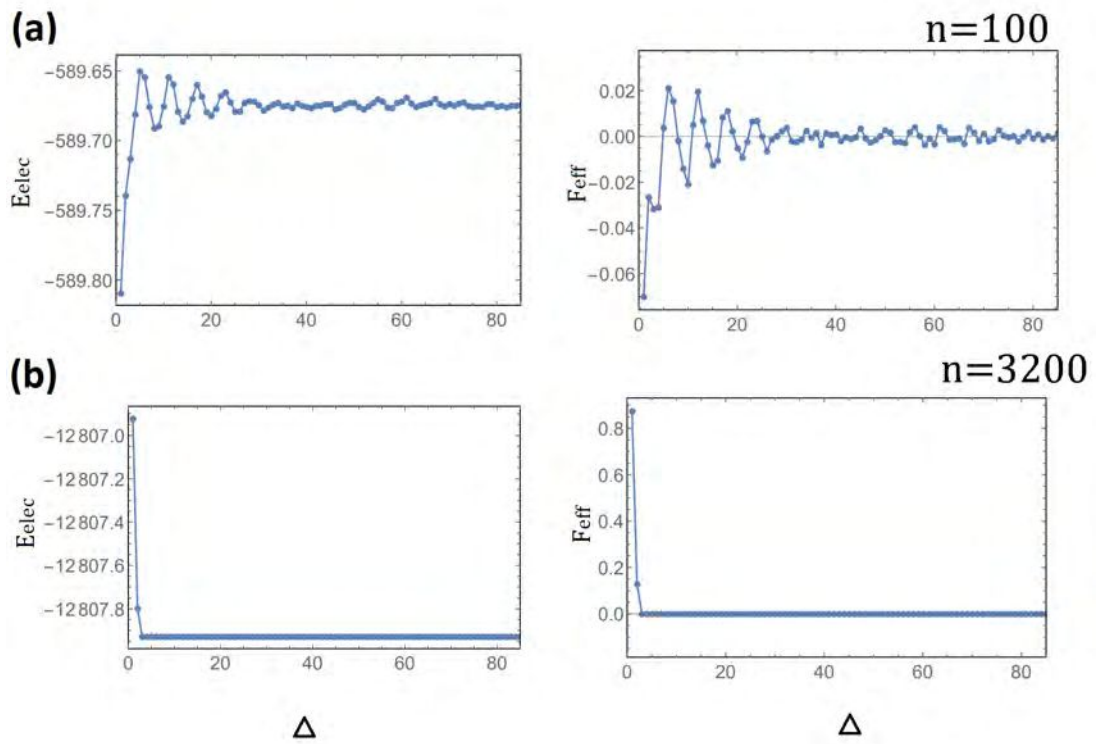
El resultado general para los casos estudiados se muestran en la figura 3.18. En ésta se observa claramente que a llenados bajos, hay un comportamiento general muy similar entre los tres casos: mínimos de energía espaciados regularmente. El hecho de que a simple vista los casos de skyrmiones antiferromagnéticos y dominios ferromagnéticos se vean similares entre sí, y distintos con el caso de skyrmiones ferromagnéticos, se debe a que, a medida que aumenta el llenado, se vuelven más pronunciadas las barreras de energía, escondiendo el carácter oscilatorio de la energía mostrado en la figura 3.14.

El resultado más novedoso y destacado surge a llenados mayores, donde es evidente que en el caso de skyrmiones antiferromagnéticos se generan **canaletas** (un patrón de mínimos y máximos locales bien definidos regularmente a lo largo del eje del llenado electrónico) en energía que vuelven extremadamente estables a los skyrmiones antiferromagnéticos, mientras que en el caso ferromagnético, el perfil de energía se mantiene irregular aunque presentando mínimos locales difusos. En el caso de dominios ferromagnéticos, el patrón de mínimos locales se borra completamente, siendo el perfil de energía constante. En este caso, los dominios ferromagnéticos pueden desplazarse libremente por toda la cinta.

### 3. Modelo y resultados



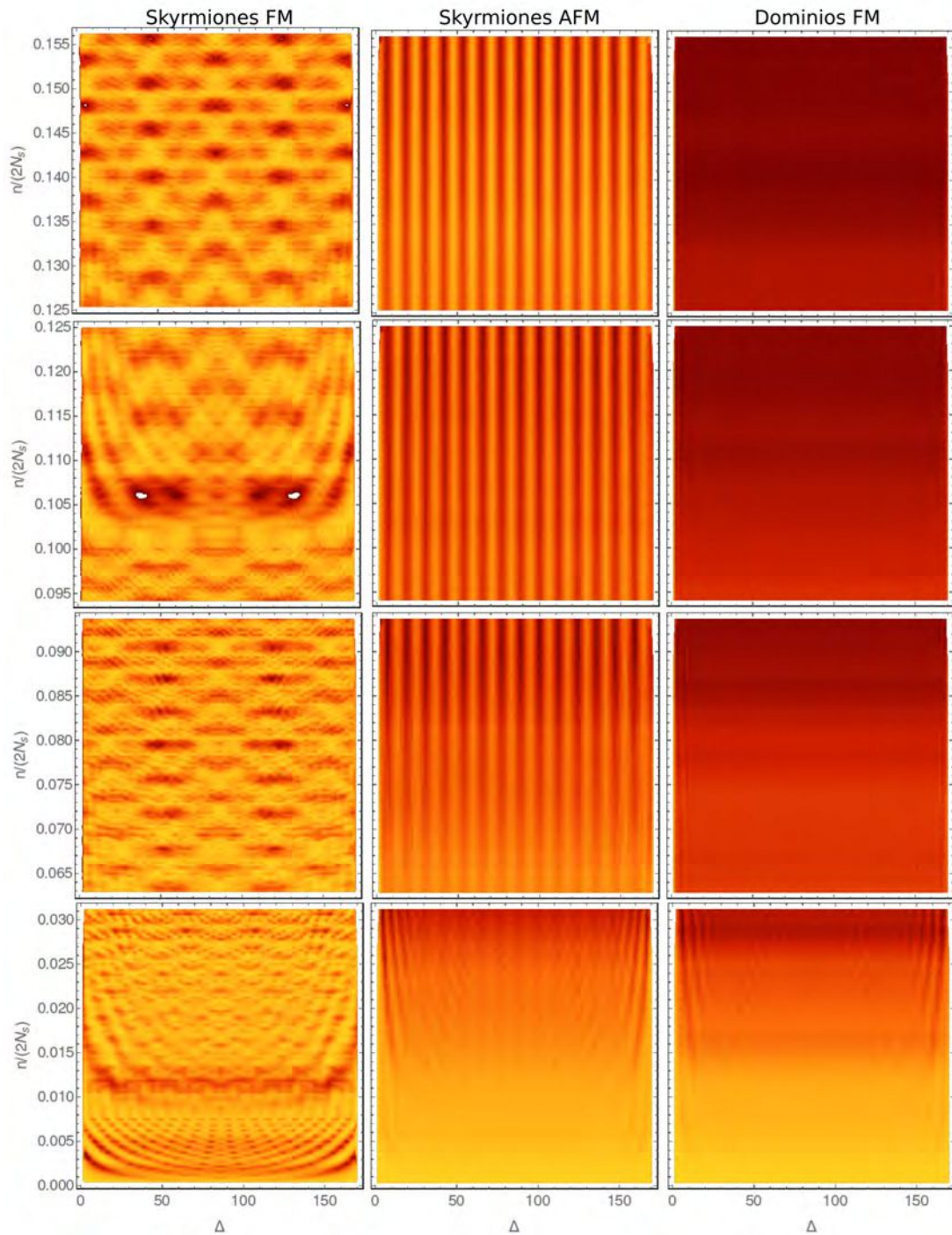
**Figura 3.16.** Energía del estado fundamental electrónico  $E_{elec}$  (izquierda) y de la fuerza efectiva  $F_{eff}$  (derecha) entre dominios en función del corrimiento  $\Delta$  para un llenado de  $n = 1, 2, 6, 10$  y  $16$  para **dominios ferromagnéticos** con  $J_H = 8$ .



**Figura 3.17.** Energía del estado fundamental electrónico  $E_{elec}$  (izquierda) y de la fuerza efectiva  $F_{eff}$  (derecha) dominios en función del corrimiento entre dominios  $\Delta$  para un llenado de  $n = 100$  y  $3200$ , correspondiente a medio llenado, para **dominios ferromagnéticos** con  $J_H = 8$ .

### 3. Modelo y resultados

---

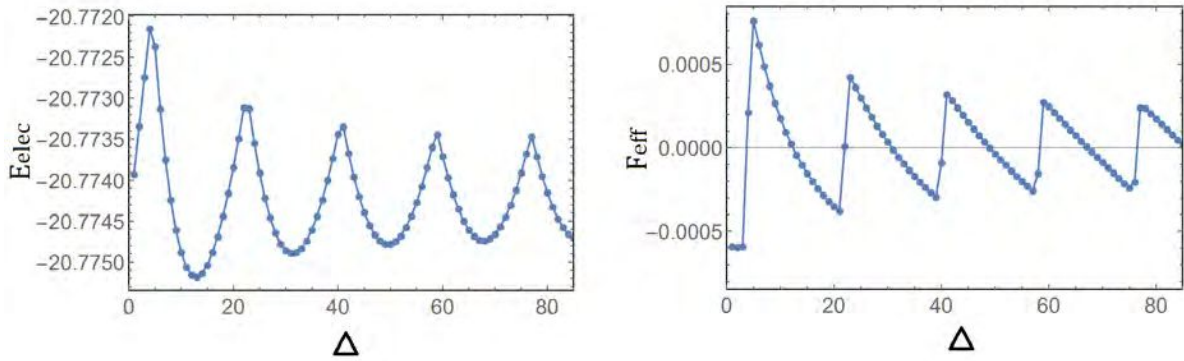


**Figura 3.18.** Gráfico de densidad de la Energía en función de la distancia  $\Delta$  y el llenado  $n/(2N_s)$ . Caso ferromagnético (columna izquierda), antiferromagnético (columna central) y dominios ferromagnéticos (columna derecha).

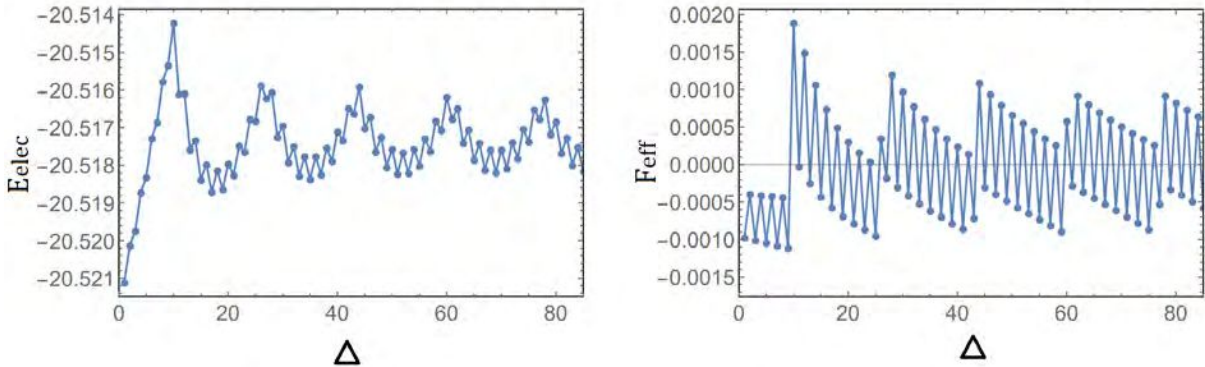


### 3.3.3. Condiciones de contorno abiertas

Como complemento y con el objetivo de descartar resultados ligados a la geometría del sistema o condiciones de contorno impuestas, se analizó la influencia de emplear condiciones de contorno abiertas en la red. Esto es equivalente a considerar una cinta abierta por los bordes en la parte angosta ( $L_y$ ). Se obtuvo que el comportamiento de la energía en función de la distancia entre centros de skyrmiones es similar al del caso de condiciones de contorno periódicas previamente estudiado, como se puede ver en las figuras 3.20 y 3.20, siendo estos muy similares a los ya vistos con condiciones de contorno periódicas, 3.7(d) y 3.10(c). Para los skyrmiones antiferromagnéticos, también se repite esta tendencia.



**Figura 3.19.** Energía del estado fundamental electrónico  $E_{elec}$  (izquierda) y de la fuerza efectiva  $F_{eff}$  (derecha) entre skyrmiones en función del corrimiento  $\Delta$  para un llenado de  $n = 10$ , para skyrmiones **ferromagnéticos** con condiciones de contorno abiertas



**Figura 3.20.** Energía del estado fundamental electrónico  $E_{elec}$  (izquierda) y de la fuerza efectiva  $F_{eff}$  (derecha) entre skyrmiones en función del corrimiento  $\Delta$  para un llenado de  $n = 10$ , para skyrmiones **ferrimagnéticos** con condiciones de contorno abiertas

Dado esto, se podría concluir que el comportamiento de la red con condiciones de contorno periódicas podría ser relevante para explicar experimentos en muestras donde los efectos de borde no puedan ser descartados.

#### 3.3.4. Densidad electrónica local

Por último, se estudió la densidad electrónica local  $\langle \hat{\rho}_i \rangle$  (ecuación (3.17)) para las tres texturas antes presentadas, con el objetivo de analizar cómo influye el tipo de textura magnética en la distribución electrónica en toda la muestra. Se obtuvieron numéricamente las densidades electrónicas por sitio para los skyrmiones ferromagnéticos, los antiferromagnéticos y los dominios ferromagnéticos.

Se utilizó una escala de color *arco iris* del programa *Mathematica* para expresar el valor del parámetro de la densidad electrónica  $\rho$ , en donde el **color rojo** representa la densidad más alta, y el **color violeta** representa el valor más bajo, en una escala de 0 a 1.

##### 3.3.4.1. Skyrmiones ferromagnéticos

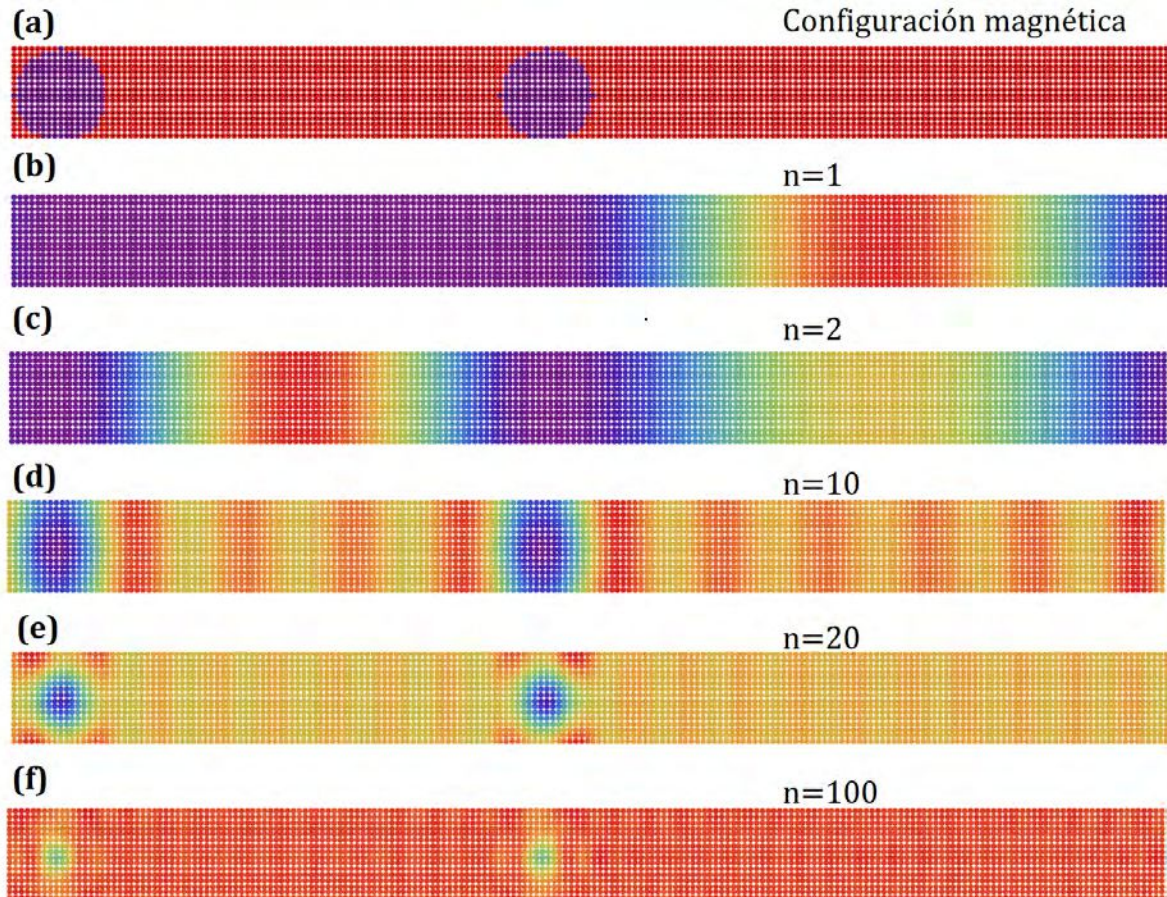
En la figura 3.21(b) se muestran las distribuciones electrónicas para  $n = 1, 2, 10, 20$  y 100 junto a la textura magnética (panel 3.21(a)), para un corrimiento fijo de  $\Delta = 70$ , variando el llenado.

Para  $n = 1$  se observa que la densidad electrónica es nula en los sitios ocupados por los skyrmiones y la región entre los mismos; es decir, es imposible para el electrón ocupar dicha región (asemejándose al comportamiento al problema un electrón en una caja con potencial infinito, gráfico 3.22), por lo que tiende a ocupar sitios en la región a la derecha de la cinta, donde el comportamiento de la densidad se asemeja a una función Gaussiana. Como la red es periódica, la región más externa de la derecha también es impenetrable.

Para el caso de  $n = 2$ , éste tenderá a ocupar la región skyrmiones: se generan entonces dos máximos para la densidad electrónica. Más aún, se ve que para ciertos llenados se generan más regiones donde la densidad de probabilidad es mayor (como por ejemplo, el gráfico 3.21(d) para  $n = 10$ ). Este comportamiento continua al aumentar la cantidad de electrones. A medida que ésta aumenta, más se asemeja éste a una distribución continua.

Cuando se aumenta el llenado hasta  $n = 20$ , la densidad electrónica en la región entre skyrmiones se asemeja a una densidad continua, mientras que es notorio que en la frontera del skyrmion se generan nuevos máximos de densidad electrónica. Esto puede deberse a que esta es la región con mayor **quiralidad**. Se muestra además, que la región más interna del skyrmion sigue siendo la de menor ocupación electrónica, mostrando así el carácter estable de la configuración del skyrmion ferromagnético. Aún así, cabe destacar que la densidad no es estrictamente nula, sino que es muy baja, puesto que el color es azul y no violeta como para los primeros llenados.

Por último, para un llenado relativamente alto como  $n = 100$ , se obtuvo que la densidad electrónica en las regiones fuera del skyrmion es aproximadamente constante (color rojo casi en su totalidad), mientras que los sitios donde se encuentran los skyrmiones presentan una densidad electrónica alta.



**Figura 3.21.** (a) Skyrmiones **ferromagnéticos** separados a  $\Delta = 70$ . En los gráficos (b), (c), (d), (e) y (f) se muestra la densidad electrónica de cada sitio para skyrmiones **ferromagnéticos** separados a  $\Delta = 70$  con  $n = 1, 2, 6, 10, 20$  y  $100$ , respectivamente.

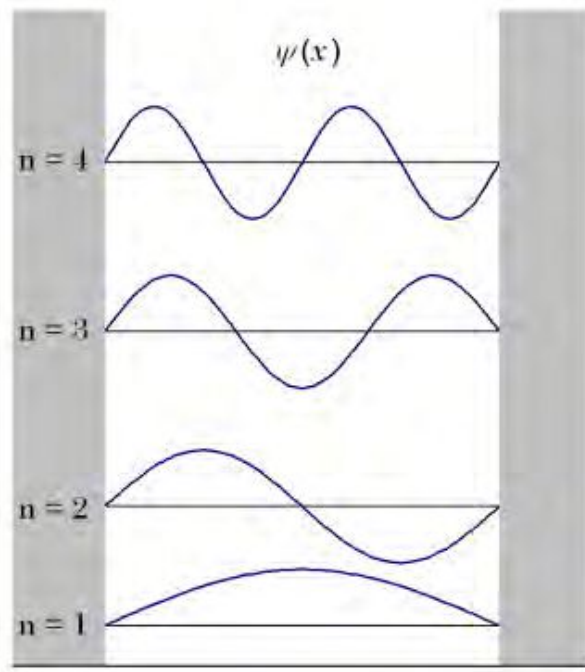
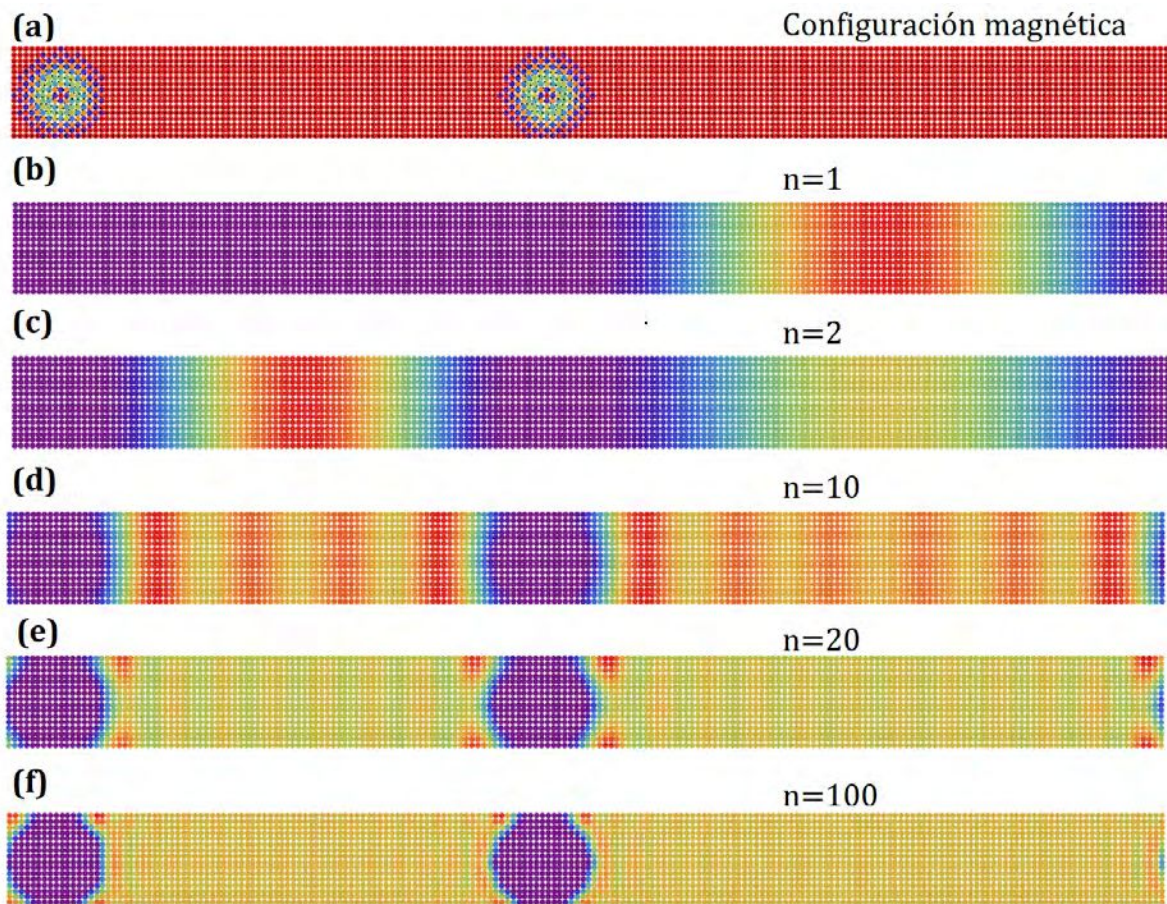


Figura 3.22. Autofunciones del problema de un electrón en una caja

### 3.3.4.2. Skyrmiones antiferromagnéticos

En el gráfico 3.23(b) se muestran las distribuciones electrónicas para llenados  $n = 1, 2, 10, 20$  y 100 para el caso de  $\Delta = 70$  junto a la configuración skyrmiones antiferromagnéticos (gráfico 3.23(a)) separados la misma distancia. El comportamiento para bajos llenados se asemeja al de los skyrmiones ferromagnéticos, siendo la región del skyrmion de densidad electrónica nula, mientras que dependiendo de llenado, se crean modos electrónicos a lo largo de la cinta, similares a los del problema ya mencionado del electrón en una caja con potencial infinito.



**Figura 3.23.** (a) Skyrmiones **antiferromagnéticos** separados a  $\Delta = 70$ . En los gráficos (b), (c), (d), (e) y (f) se muestra la densidad electrónica de cada sitio para skyrmiones **antiferromagnéticos** separados a  $\Delta = 70$  con  $n = 1, 2, 6, 10, 20$  y 100, respectivamente.

A medida que se aumenta el llenado, el comportamiento cambia. Se nota que para un llenado de  $n = 20$  (figura 3.23) que la región dentro del skyrmion sigue presentando densidad electrónica nula, tendiéndose esta a acumularse en el borde de los skyrmiones.

Aún para un llenado relativamente alto como  $n = 100$ , los electrones siguen acomodándose en el borde del skyrmion antiferromagnético como se muestra en la figura 3.23, pero no penetran

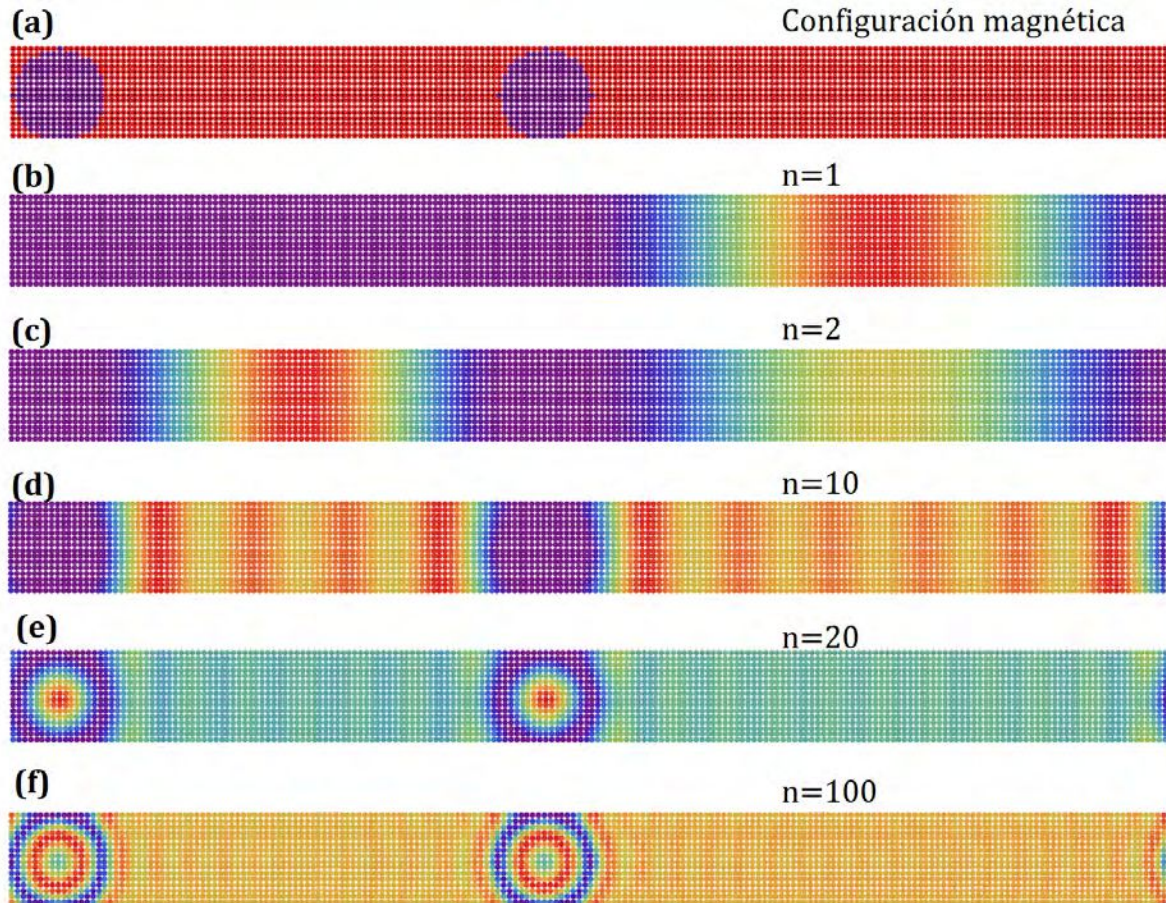
### 3. Modelo y resultados

---

en su estructura alternante, debido al intercambio de espines (comportándose los skyrmiones antiferromagnéticos como una esfera rígida). Esto da cuenta de que el carácter antiferromagnético del skyrmion, que fortalece su robustez frente a la presencia de los electrones, lo cual lo destaca por sobre los otros casos.

### 3.3.4.3. Dominios ferromagnéticos

Por último, se estudió la densidad electrónica dentro de los dominios ferromagnéticos. En la figura 3.24 se muestran las densidades electrónicas para una configuración magnética formada por dos dominios ferromagnéticos separados a una distancia de  $\Delta = 70$ .



**Figura 3.24.** (a) **Dominios ferromagnéticos** separados a  $\Delta = 70$ . En los gráficos (b), (c), (d), (e) y (f) se muestra la densidad electrónica de cada sitio con  $n = 1, 2, 10, 20$  y  $100$ , respectivamente.

Nuevamente, para llenados bajos, el comportamiento es similar al de los skyrmiones: los electrones no penetran los dominios, sino que tienden a acomodarse en la región entre los mismos, generándose ciertos modos electrónicos dependiendo del llenado.

La diferencia con los skyrmiones se hace más notoria a medida que se aumenta el llenado. En la figura 3.24(e) se ve que para  $n = 20$ , la densidad electrónica forma modos esféricamente simétricos dentro de los dominios y mantiene la tendencia de ubicarse en la región entre los mismos. Esto se observa también para  $n = 100$  (gráfico 3.24(f)) donde se generan modos tanto dentro de los dominios ferromagnéticos como fuera de él.





## Capítulo 4

# Conclusiones y perspectivas futuras

En este trabajo, se estudió la interacción efectiva entre skyrmiones magnéticos mediada por la dinámica de electrones itinerantes. Se analizó el acoplamiento efectivo (potencial efectivo) entre skyrmiones generado por esta dinámica electrónica. Este análisis se basa en el mismo mecanismo que origina el acoplamiento efectivo entre impurezas magnéticas en medios electrónicos.

Se utilizó una red discreta de espines con geometría rectangular y tamaño  $L_x \times L_y = 200 \times 16$  (número de sitios), en donde se ubicaron los skyrmiones. Estas texturas fueron generadas a partir de una serie de *ansätze* que reproducen las características principales de los mismos. Se estudió un modelo de *tight-binding* acoplado a una textura magnética a través de la interacción de Hund. Se aplicó una aproximación tipo Born-Oppenheimer para el sector magnético y se procedió a diagonalizar numéricamente el Hamiltoniano de *tight-binding* electrónico del sistema (incluyendo la interacción de Hund  $J_H$  entre espines electrónicos y espines localizados de la textura) obteniendo el espectro de autovalores y autovectores. Con esto, se determinó la energía del estado fundamental electrónico del sistema  $E_{elec}$  (a temperatura  $T = 0$ ) y la fuerza efectiva  $F_{eff}$  entre skyrmiones generada por la dinámica electrónica, en función del llenado electrónico  $n$  (número de niveles ocupados) y de la distancia entre centros de los skyrmiones  $\Delta$ . Se analizaron en particular dos casos,  $J_H = 0.2, 0.8$  y tres texturas magnéticas que incluían: skyrmiones ferromagnéticos, ferrimagnéticos y antiferromagnéticos, y a su vez se compararon los resultados con los de dominios ferromagnéticos del mismo tamaño. Se calculó además la densidad electrónica por sitio en tres de estas cuatro texturas.

En base a los resultados obtenidos, se concluye que a bajos llenados se generan mínimos regulares de energía para ciertos valores de  $\Delta$  (siendo los llenados con  $n$  entre 5 y 20 tales que esta exhibe un comportamiento oscilatorio con la distancia). Mientras que para llenados mayores, se pierde este patrón en el caso de los skyrmiones y dominios ferromagnéticos. En cambio, en el caso de skyrmiones antiferromagnéticos, se generan pozos de energía locales, cuya barrera de potencial es de mayor amplitud que las de las otras texturas estudiadas, comportamiento que se amplifica si se emplea un acoplamiento de Hund fuerte ( $J_H = 8$ ). En particular, se ve en el gráfico de densidad de puntos de la energía en función del llenado y la distancia entre skyrmiones presentado en la figura 3.18 que para llenados relativamente altos, en los skyrmiones antiferromagnéticos se generan “canaletas” en la energía (a lo largo del eje llenado electrónico  $n$ ), sugiriendo nuevamente rigidez en este tipo de texturas, en contraparte con lo observado en

#### 4. Conclusiones y perspectivas futuras

---

los skyrmiones ferromagnéticos. Cabe además destacar que para llenados cercanos al máximo, la red muestra simetría electrón-hueco, comportándose igual que para llenados complementarios.

Los resultados obtenidos evaluando la densidad electrónica en cada sitio indicarían que la configuración para skyrmiones antiferromagnéticos tiende a ser más estable que la de skyrmiones o dominios ferromagnéticos. Se observa que, para llenados altos, la densidad electrónica de cada sitio permanece nula dentro de la región del skyrmion antiferromagnético, siendo más alta en el borde de los mismos. En cambio, para los otros dos casos, el comportamiento es distinto. Si bien en los skyrmiones ferromagnéticos la densidad electrónica tiende a tener un valor más alto en el borde, ésta no es nula dentro de su estructura. Más aún, en los dominios ferromagnéticos, emergen modos electrónicos esféricamente simétricos dentro de cada dominio. Esta tendencia de los skyrmiones antiferromagnéticos a poseer una configuración más estable en determinadas posiciones de la cinta magnética es coherente con lo observado en el comportamiento de la energía en función de  $\Delta$ .

Por otro lado, se analizó el problema con condiciones de contorno abiertas en una de las direcciones de la cinta, equivalente a tener una cinta abierta en dicha dirección. Se obtuvo que los valores de la energía del estado fundamental electrónico no difieren significativamente de los obtenidos previamente con condiciones de contorno periódicas. Esto indicaría que el análisis realizado con condiciones de contorno periódicas puede ser relevante para situaciones experimentales, donde las muestras son finitas.

Como perspectivas futuras, se proponen distintas variaciones del problema estudiado en este trabajo. Entre éstas, se encuentran el análisis del efecto del tamaño del radio del skyrmion  $R$ , la inclusión de otro tipo de texturas como pares skyrmion-antiskyrmion o pares skyrmiones de distinta carga o cargas superiores y el estudio de la conductividad Hall para distintas configuraciones topológicas.

# Bibliografía

- [1] U. K. Roessler, A. Bogdanov, and C. Pfeiderer, *Nature* **442**, 797 (2006).
- [2] S. Mühlbauer, B. Binz, F. Jonietz, C. Pfeiderer, A. Rosch, A. Neubauer, R. Georgii, and P. Böni, *Science* **323**, 915 (2009).
- [3] L. Sun, R. Cao, B. Miao, Z. Feng, B. You, D. Wu, W. Zhang, A. Hu, and H. Ding, *Physical review letters* **110**, 167201 (2013).
- [4] W. Jiang, W. Zhang, G. Yu, M. B. Jungfleisch, P. Upadhyaya, H. Somaily, J. E. Pearson, Y. Tserkovnyak, K. L. Wang, O. Heinonen, *et al.*, *AIP Advances* **6**, 055602 (2016).
- [5] S. Woo, K. Litzius, B. Krüger, M.-Y. Im, L. Caretta, K. Richter, M. Mann, A. Krone, R. M. Reeve, M. Weigand, *et al.*, *Nature materials* **15**, 501 (2016).
- [6] G. Finocchio, F. Büttner, R. Tomasello, M. Carpentieri, and M. Kläui, *Journal of Physics D: Applied Physics* **49**, 423001 (2016).
- [7] K. Everschor-Sitte, J. Masell, R. M. Reeve, and M. Kläui, *Journal of Applied Physics* **124**, 240901 (2018).
- [8] C. Back, V. Cros, H. Ebert, K. Everschor-Sitte, A. Fert, M. Garst, T. Ma, S. Mankovsky, T. Monchesky, M. Mostovoy, *et al.*, *Journal of Physics D: Applied Physics* **53**, 363001 (2020).
- [9] K. Everschor, *Current-induced dynamics of chiral magnetic structures: skyrmions, emergent electrodynamics and spin-transfer torques*, Ph.D. thesis, Universität zu Köln (2012).
- [10] Y. Ishikawa and M. Arai, *Journal of the Physical Society of Japan* **53**, 2726 (1984).
- [11] B. Lebech, P. Harris, J. S. Pedersen, K. Mortensen, C. Gregory, N. Bernhoeft, M. Jermy, and S. Brown, *Journal of magnetism and magnetic materials* **140**, 119 (1995).
- [12] B. Lebech, J. Bernhard, and T. Freltoft, *Journal of Physics: Condensed Matter* **1**, 6105 (1989).
- [13] H. Wilhelm, M. Baenitz, M. Schmidt, U. Röbber, A. Leonov, and A. Bogdanov, *Physical review letters* **107**, 127203 (2011).
- [14] J. Beille, J. Voiron, and M. Roth, *Solid state communications* **47**, 399 (1983).
- [15] Y. Onose, N. Takeshita, C. Terakura, H. Takagi, and Y. Tokura, *Physical Review B* **72**, 224431 (2005).
- [16] M. Heide, G. Bihlmayer, and S. Blügel, *Physical Review B* **78**, 140403 (2008).
- [17] F. Büttner, I. Lemesh, and G. S. Beach, *Scientific reports* **8**, 1 (2018).
- [18] O. Boulle, J. Vogel, H. Yang, S. Pizzini, D. de Souza Chaves, A. Locatelli, T. O. Mentes, A. Sala, L. D. Buda-Prejbeanu, O. Klein, *et al.*, *Nature nanotechnology* **11**, 449 (2016).

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [19] C. Moreau-Luchaire, C. Moutafis, N. Reyren, J. Sampaio, C. Vaz, N. Van Horne, K. Bouzehouane, K. Garcia, C. Deranlot, P. Warnicke, *et al.*, *Nature nanotechnology* **11**, 444 (2016).
- [20] N. Nagaosa and Y. Tokura, *Nature nanotechnology* **8**, 899 (2013).
- [21] K. Litzius, I. Lemesh, B. Krüger, P. Bassirian, L. Caretta, K. Richter, F. Büttner, K. Sato, O. A. Tretiakov, J. Förster, *et al.*, *Nature Physics* **13**, 170 (2017).
- [22] W. Legrand, D. Maccariello, F. Ajejas, S. Collin, A. Vecchiola, K. Bouzehouane, N. Reyren, V. Cros, and A. Fert, *Nature materials* **19**, 34 (2020).
- [23] S. Blundell, “Magnetism in condensed matter,” (2003).
- [24] I. Dzyaloshinsky, *Journal of Physics and Chemistry of Solids* **4**, 241 (1958).
- [25] T. Moriya, *Physical review* **120**, 91 (1960).
- [26] Y. Liu, *Skyrmion dynamics for spintronic devices*, Ph.D. thesis, UC Riverside (2013).
- [27] N. W. Ashcroft, N. D. Mermin, *et al.*, *Solid state physics*, Vol. 2005 (holt, rinehart and winston, new york London, 1976).
- [28] P. Weiss, *J. Phys. Theor. Appl.* **6**, 661 (1907).
- [29] S. S. Parkin, M. Hayashi, and L. Thomas, *Science* **320**, 190 (2008).
- [30] S. Parkin and S.-H. Yang, *Nature nanotechnology* **10**, 195 (2015).
- [31] O. Madelung, *Introduction to solid-state theory*, Vol. 2 (Springer Science & Business Media, 2012).
- [32] T. Skyrme, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences* **226**, 521 (1954).
- [33] G. E. Brown and M. Rho, *The multifaceted skyrmion* (World Scientific, 2010).
- [34] T. H. R. Skyrme, *Nuclear Physics* **31**, 556 (1962).
- [35] T. Skyrme, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences* **247**, 260 (1958).
- [36] N. Manton, *Communications in Mathematical Physics* **111**, 469 (1987).
- [37] M. Nagao, Y.-G. So, H. Yoshida, M. Isobe, T. Hara, K. Ishizuka, and K. Kimoto, *Nature nanotechnology* **8**, 325 (2013).
- [38] J.-y. Choi, W. J. Kwon, and Y.-i. Shin, *Physical review letters* **108**, 035301 (2012).
- [39] S. Seki, X. Yu, S. Ishiwata, and Y. Tokura, *Science* **336**, 198 (2012).
- [40] T. Adams, A. Chacon, M. Wagner, A. Bauer, G. Brandl, B. Pedersen, H. Berger, P. Lemmens, and C. Pfleiderer, *Physical Review Letters* **108**, 237204 (2012).
- [41] T.-L. Ho, *Physical review letters* **81**, 742 (1998).
- [42] U. Al Khawaja and H. Stoof, *Nature* **411**, 918 (2001).
- [43] S. L. Sondhi, A. Karlhede, S. Kivelson, and E. Rezayi, *Physical Review B* **47**, 16419 (1993).
- [44] J.-i. Fukuda and S. Žumer, *Nature communications* **2**, 1 (2011).
- [45] G. S. Adkins, C. R. Nappi, and E. Witten, *Nuclear Physics B* **228**, 552 (1983).
- [46] A. Vilenkin and E. P. S. Shellard, *Cosmic strings and other topological defects* (Cambridge University Press, 2000).
- [47] J. P. Liu, Z. Zhang, and G. Zhao, *Skyrmions: topological structures, properties, and applications* (CRC Press, 2016).
- [48] A. Belavin and A. Polyakov, *JETP lett* **22**, 245 (1975).
- [49] A. N. Bogdanov and D. Yablonskii, *Zh. Eksp. Teor. Fiz* **95**, 178 (1989).

- 
- [50] F. Jonietz, S. Mühlbauer, C. Pfleiderer, A. Neubauer, W. Münzer, A. Bauer, T. Adams, R. Georgii, P. Böni, R. A. Duine, *et al.*, *Science* **330**, 1648 (2010).
- [51] U. K. Röfler, A. A. Leonov, and A. N. Bogdanov, in *Journal of Physics: Conference Series*, Vol. 200 (IOP Publishing, 2010) p. 022029.
- [52] X. Yu, Y. Onose, N. Kanazawa, J. Park, J. Han, Y. Matsui, N. Nagaosa, and Y. Tokura, *Nature* **465**, 901 (2010).
- [53] J. Barker and O. A. Tretiakov, *Physical review letters* **116**, 147203 (2016).
- [54] X. Zhang, Y. Zhou, and M. Ezawa, *Nature communications* **7**, 1 (2016).
- [55] C. Jin, C. Song, J. Wang, and Q. Liu, *Applied Physics Letters* **109**, 182404 (2016).
- [56] H. D. Rosales, D. C. Cabra, and P. Pujol, *Physical Review B* **92**, 214439 (2015).
- [57] S. A. Osorio, H. D. Rosales, M. B. Sturla, and D. C. Cabra, *Physical Review B* **96**, 024404 (2017).
- [58] M. E. Villalba, F. A. Gómez Albarracín, H. D. Rosales, and D. C. Cabra, *Physical Review B* **100**, 245106 (2019).
- [59] S. Gao, H. D. Rosales, F. A. Albarracín, *et al.*, *Nature* **586**, 37 (2020).
- [60] S. K. Kim, K.-J. Lee, and Y. Tserkovnyak, *Physical Review B* **95**, 140404 (2017).
- [61] S. Woo, K. M. Song, X. Zhang, Y. Zhou, M. Ezawa, X. Liu, S. Finizio, J. Raabe, N. J. Lee, S.-I. Kim, *et al.*, *Nature communications* **9**, 1 (2018).
- [62] B. Göbel, I. Mertig, and O. A. Tretiakov, *Physics Reports* (2020).
- [63] S. A. Osorio, *Transiciones de fase no convencionales en sistemas fuertemente correlacionados*, Ph.D. thesis, Universidad Nacional de La Plata (2020).
- [64] B. van Dijk, *Skyrmions and the dzyaloshinskii-moriya interaction*, Master's thesis (2015).
- [65] A. Fert, N. Reyren, and V. Cros, *Nature Reviews Materials* **2**, 1 (2017).
- [66] Y.-H. Liu and Y.-Q. Li, *Journal of Physics: Condensed Matter* **25**, 076005 (2013).
- [67] S.-Z. Lin, C. Reichhardt, and A. Saxena, *Applied Physics Letters* **102**, 222405 (2013).
- [68] J. Sampaio, V. Cros, S. Rohart, A. Thiaville, and A. Fert, *Nature nanotechnology* **8**, 839 (2013).
- [69] R. Tomasello, E. Martinez, R. Zivieri, L. Torres, M. Carpentieri, and G. Finocchio, *Scientific reports* **4**, 1 (2014).
- [70] X. Zhang, G. Zhao, H. Fangohr, J. P. Liu, W. Xia, J. Xia, and F. Morvan, *Scientific reports* **5**, 1 (2015).
- [71] H. Du and M. Tian, in *The Role of Topology in Materials* (Springer, 2018) pp. 113–140.
- [72] A. Fert, V. Cros, and J. Sampaio, *Nature nanotechnology* **8**, 152 (2013).
- [73] X. Yu, N. Kanazawa, W. Zhang, T. Nagai, T. Hara, K. Kimoto, Y. Matsui, Y. Onose, and Y. Tokura, *Nature communications* **3**, 1 (2012).
- [74] T. Schulz, R. Ritz, A. Bauer, M. Halder, M. Wagner, C. Franz, C. Pfleiderer, K. Everschor, M. Garst, and A. Rosch, *Nature Physics* **8**, 301 (2012).
- [75] X. Zhang, M. Ezawa, D. Xiao, G. Zhao, Y. Liu, and Y. Zhou, *Nanotechnology* **26**, 225701 (2015).
- [76] S. Sor, S. Blügel, and G. P. Müller (2017).
- [77] W. Jiang, P. Upadhyaya, W. Zhang, G. Yu, M. B. Jungfleisch, F. Y. Fradin, J. E. Pearson, Y. Tserkovnyak, K. L. Wang, O. Heinonen, *et al.*, *Science* **349**, 283 (2015).
- [78] Y. Zhou and M. Ezawa, *Nature communications* **5**, 1 (2014).
- [79] X. Zhang, M. Ezawa, and Y. Zhou, *Scientific reports* **5**, 1 (2015).

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [80] S. A. Díaz, J. Klinovaja, D. Loss, and S. Hoffman, arXiv preprint arXiv:2102.03423 (2021).