

# COMPLEJIDAD ESTADÍSTICA E INFORMACIÓN DE FISHER EN REGÍMENES CAÓTICOS

## STATISTICAL COMPLEXITY AND FISHER INFORMATION IN CHAOTIC REGIMES

G.L. Ferri<sup>1,\*</sup>, A. Plastino<sup>2</sup> y F. Pennini<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup>*Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de La Pampa  
Uruguay 151, Santa Rosa, La Pampa, Argentina.*

<sup>2</sup>*Instituto de Física La Plata (CONICET-IFLP), Facultad de Ciencias Exactas,  
Universidad Nacional de La Plata (UNLP), C.C. 727, (1900) La Plata, Argentina*

<sup>3</sup>*Departamento de Física, Universidad Católica del Norte,  
Av. Angamos 0610, Antofagasta, Chile. glferri@exactas.unlpam.edu.ar*

Usamos una forma de la medida de complejidad estadística cuya versión original fue propuesta por López Ruiz, Mancini, y Calbet (LMC) [Phys. Lett. A **209**, 321 (1995)], conjuntamente con la medida de información de Fisher con el fin de explorar detalles finos que caracterizan una dinámica caótica. Podemos distinguir fácilmente entre i) periodicidad y caos, y ii) entre distintos regímenes caóticos, pertenecientes a distintos atractores. Las herramientas usadas son sensibles para detectar el fenómeno de intermitencia.

**Palabras clave:** Complejidad estadística, Información de Fisher, Caos.

A form of the statistical complexity measure, whose original version was advanced by López Ruiz, Mancini, and Calbet (LMC) [Phys. Lett. A **209**, 321 (1995)], is here used in conjunction with Fisher's information measure so as to explore fine details of the characterization of chaotic dynamics. We easily distinguish between i) periodicity and chaos or ii) between distinct chaotic dynamics belonging to different attractors, because our tools are quite sensitive to intermittency-phenomena.

**Keywords:** Statistical Complexity, Fisher information measure, Chaos.

PACS numbers: 05.45.-a

### 1. INTRODUCCIÓN

Muchos trabajos se dedican actualmente a una variedad de aplicaciones físicas de la medida de información de Fisher ( $F$ ) (Refs. [1–4]). En este trabajo nos proponemos abordar el estudio de la dinámica de un sistema no lineal empleando la medida de Fisher conjuntamente con el concepto de complejidad estadística  $C$  [5, 6], con el fin de capturar detalles finos de la dinámica caótica. Confeccionamos una representación de los cambios significativos en la dinámica de un sistema no lineal en el plano  $F - C$ , motivados por el reciente éxito de otras representaciones planares de herramientas en análisis de señales (Véanse por ejemplo, Refs. [7, 8]). Las herramientas usuales para cuantificar diferencias en el comportamiento dinámico incluyen, entre otras, los exponentes de Lyapunov, dimensión del atractor, entropías dinámicas, entropías topológicas, medidas de información, etc. (Véase, por ejemplo, Refs. [9–12], y las referencias en su interior). En este trabajo vamos a mostrar que la conjunción entre la medida de información de Fisher y la complejidad estadística nos brinda un procedimiento práctico, fácil de computar, que provee una mejor visualización de la intrincada dinámica caótica que las herramientas anteriores, y además ve-

remos que la complejidad estadística es particularmente sensible a las intermitencias y a los cambios conocidos como crisis interior [9, 10] en los cuales la dinámica alterna entre dos atractores caóticos.

### 2. CONCEPTOS TEÓRICOS

#### Medida de información de Fisher

Si  $f(x)$  es una distribución continua de probabilidad, la medida de información de Fisher  $F$  asociada a  $f$  es [1]

$$F[f] = \int dx \frac{|\nabla f|^2}{f}. \quad (1)$$

Sea  $P = \{p_j\}_{j=1}^N$  un conjunto discreto de probabilidades normalizado, la medida de Fisher correspondiente es [11]

$$F[P] = (1/4) \sum_{j=1}^{N-1} [2(p_{j+1} - p_j)^2 / (p_{j+1} + p_j)]. \quad (2)$$

El factor  $1/4$  se incluye a modo de normalización de modo que el máximo valor alcanzable por  $F$  es la unidad, y esto

ocurre cuando casi todos los  $p_j$ -s son ceros y sólo algunos  $p_j$ -s son finitos. Si  $p_j = p_{j+1} = 0$  para algún  $j$ , el  $j$ -ésimo término de la Eq. (2) se anula. Definiendo  $\Delta p_j = p_{j+1} - p_j$ , notamos que  $\lim_{(\Delta p_j \rightarrow 0)} [(\Delta p_j)^2 / (p_j + \Delta p_j / 2)] = 0$ . Se ha demostrado en [11] que  $F$  distingue entre caos y periodicidad en el mapa logístico.

### Medidas de complejidad estadística

En 1995, López-Ruiz, Mancini, and Calbet (LMC) propusieron lo que hoy podría llamarse la forma canónica de la *medida de complejidad estadística* (SC) [5], como el producto de una medida de “desorden”, o entropía multiplicado por un desequilibrio para un tratamiento exhaustivo de estas medidas, véase la Ref. [12], y las referencias en su interior). Como medida entrópica usamos la entropía de Shannon [13]

$$S[P] = - \sum_{j=1}^N p_j \ln p_j, \quad (3)$$

normalizada al intervalo  $[0, 1]$  es decir:  $H[P] = S[P] / \ln N$ . Como medida de desequilibrio usamos la divergencia de Jensen-Shannon [14]

$$Q[P] = Q_0 D^{JS}[P, P_e], \quad (4)$$

donde

1.  $P_e$  es la distribución uniforme,
2.  $D^{JS}$  está definida por

$$D^{JS}[P, P_e] = S \left[ \frac{P + P_e}{2} \right] - \frac{1}{2} S[P] - \frac{1}{2} \ln N, \quad (5)$$

3. y, finalmente,  $Q_0$  es un factor de normalización [11]

$$Q_0 = -2 \left[ \left( \frac{N+1}{N} \right) \ln(N+1) - 2 \ln(2N) + \ln N \right]^{-1}. \quad (6)$$

Nuestra particular version de la complejidad es finalmente:

$$C = H[P]Q[P]. \quad (7)$$

Nótese que en el trabajo original de LMC se empleó una versión diferente del desequilibrio, la distancia euclídea entre la distribución de probabilidad  $P$  y la distribución de uniforme  $P_e$  [5].

### 3. APLICACIONES A MAPAS

Un sistema dinámico es un sistema físico que evoluciona con el tiempo  $t$  [9, 10]. Una evolución a tiempo discreto se

describe usualmente mediante un conjunto de ecuaciones algebraicas (mapas)  $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}(\alpha, \mathbf{x}_k)$ , donde  $\mathbf{x}$  es un vector de dimensión finita  $n$ , y  $\alpha$  un parámetro de control (o un conjunto de ellos) [9, 10]. En sucesivos instantes discretos de tiempo  $t_k$  and  $t_{k+1}$ ,  $\mathbf{x}_k$  y  $\mathbf{x}_{k+1}$  representan, respectivamente, el estado del sistema. Ejemplos de mapas son el muy conocido mapa logístico ( $n = 1$ ) y el mapa de Henon ( $n = 2$ ) [9, 10]. El conjunto de puntos  $\mathbf{x}_k$  en el espacio de estados, es una órbita del mapa. El comportamiento asintótico del sistema dinámico, representado por el mapa cuando  $t \rightarrow \infty$  es el estado estacionario del sistema. Con frecuencia éste estado estacionario puede corresponder a un conjunto acotado que puede ser o bien una solución estática (punto fijo) o a una dinámica (solución periódica, quasi-periódica o caótica). En estos casos la órbita se aproxima a un conjunto atractor. El comportamiento de la órbita antes de alcanzar el estado estacionario es el “transiente” [9, 10].

Sea  $\Omega$  un subconjunto del espacio de estados que contiene al atractor. Construimos un histograma con la fracción de veces que una órbita estacionaria de longitud finita cae dentro de “cajas” de igual tamaño en  $\Omega$ , y luego hacemos tender  $t$  a infinito mientras el tamaño de las cajas tiende a cero. Se obtiene así una función  $\rho(\mathbf{x})$ , tal que, para cada subconjunto  $\Sigma \in \Omega$ , la fracción de tiempo que una órbita típica pasa en  $\Sigma$  es  $\int_{\Sigma} \rho(\mathbf{x}) d^n x$ . La cantidad  $\rho(\mathbf{x})$  es la *densidad natural invariante* de la función distribución de probabilidad (FDP) de equilibrio [9, 10]. Si el estado estacionario es una solución estática, el atractor es un punto aislado en el espacio de estados y la FDP de equilibrio es una delta de Dirac. En el caso de una solución periódica, el atractor es un conjunto finito de puntos disjuntos, y  $\rho$  es la suma de un número finito de deltas de Dirac. Finalmente, si el estado estacionario es una solución no periódica o caótica,  $\rho$  puede tener un soporte compacto en  $\Omega$ . A medida que va cambiando el parámetro de control  $\alpha$ , la FDP de equilibrio va cambiando también. En la mayoría de los casos son de naturaleza puramente cuantitativa, pero para valores bien definidos de  $\alpha$  la dinámica experimenta cambios cualitativos. En este caso hablamos de bifurcaciones del mapa. En el presente trabajo analizamos la clase de cambios que uno encuentra en las distribuciones de equilibrio, usando las medidas de información  $F$  y  $C$  ya descriptas.

#### Mapa logístico

El mapa logístico

$$x_{n+1} = \alpha x_n (1 - x_n), \quad (8)$$

con  $0 < x_n < 1$ , y  $0 < \alpha \leq 4$  tiene un conjunto atractor que se reduce a un punto fijo si  $\alpha < 3$ . Este punto fijo es  $x = 0$  si  $0 < \alpha < 1$ , y  $x = 1 - 1/\alpha$ , si  $1 < \alpha < 3$ . En  $\alpha = 3$  comienza una cascada de doblamiento de períodos que finaliza en  $\alpha_{\infty} = 3,5699456$ , donde la dinámica se

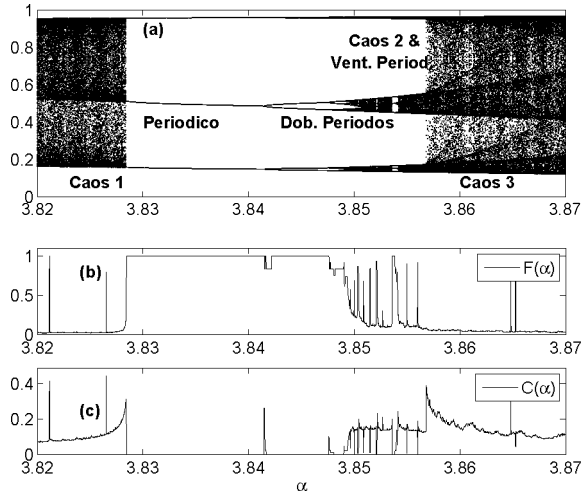


Figura 1: (a) Diagrama de bifurcaciones para el mapa logístico en la vecindad de la ventana de período tres; (b) Medida de Información de Fisher  $F$  para la PDF de equilibrio, vs.  $\alpha$ ; (c) Complejidad estadística  $C(\alpha)$  vs.  $\alpha$

convierte en caótica. Pero la dinámica no es caótica para todos los valores de control  $\alpha_\infty < \alpha < 4$ . Por ejemplo, hay un atractor de período-seis en una ventana alrededor de  $\alpha = 3,64$ , Un atractor de período-cinco en una ventana alrededor de  $\alpha = 3,72$  y también un atractor de período tres en una ventana alrededor de  $\alpha = 3,84$ , la más notable de todas. Elegimos un entorno de esta ventana de período-tres para escudriñar los cambios en la dinámica del mapa logístico y testear las bondades del abordaje conjunto entre la medida de Fisher  $F(\alpha)$  y la complejidad  $C(\alpha)$ . Miremos ahora la Fig. 1(a). Con una resolución suficientemente fina se puede detectar la presencia de ventanas periódicas adicionales. El atractor de período-tres aparece a causa de una bifurcación del tipo silla-nodo en  $\alpha_1 \simeq 3,828445\dots$  y “existe” dentro de un intervalo  $\alpha_1 < \alpha < 3,842\dots$ . La dinámica (caótica) presente antes de  $\alpha_1$  la llamamos “caos 1” en Fig. 1a. Cuando  $\alpha$  se incrementa más allá de 3,842, la solución de período-tres experimenta una nueva cascada de bifurcaciones de doblamiento de períodos que finaliza nuevamente en una dinámica caótica en  $\alpha = 3,845\dots$ . El nuevo atractor caótico consiste en tres estrechos segmentos disjuntos. En la Fig. 1a. está señalado como “caos 2”. En  $\alpha_2 = 3,856807$  este atractor caótico es reemplazado por otro (señalado como “caos 3”) que “vive” en un segmento más amplio, que incluye las tres partes del atractor anterior. Para  $3,845 < \alpha < \alpha_2$  la dinámica alterna entre caos (“caos 2”) y pequeñas ventanas periódicas.

La Fig. 1a muestra el diagrama de bifurcaciones del mapa logístico en el intervalo  $3,82 < \alpha < 3,87$ , para 2000 valores igualmente espaciados de  $\alpha$  con  $\delta\alpha = 2,5 \times 10^{-5}$ . Para cada valor de  $\alpha$ : 1) iteramos el mapa  $10^5$  veces,

luego de haber descartado un transiente de  $10^4$  iteraciones, y 2) subdividimos el intervalo  $[0, 1]$  en  $10^3$  celdas iguales de amplitud  $10^{-3}$ , y construimos un histograma sobre la base de cuántos iterados “caen” dentro de cada celda. El histograma normalizado es la distribución de equilibrio  $P = \{p_j\}_{j=1}^N$ , donde  $N$  es inicialmente igual a  $10^3$ . Muchos de estos  $p_j$  se anulan. Para una dinámica  $n$ -periódica, tenemos solamente  $n$  (de los  $N$ ) valores no nulos de  $p_j$ . En las zonas caóticas, son muchos los valores de  $p_j$  con valor finito en la distribución de equilibrio. Antes de evaluar la complejidad estadística de esta FDP, eliminamos todos los  $p_j$  con valor nulo, y nos quedamos con una FDP que contiene  $\tilde{N}$  elementos, con  $\tilde{N} \equiv \tilde{N}(\alpha) < N$ . Si la dinámica es de período  $n$ , nuestra FDP consiste en  $\tilde{N} = n$  valores idénticos de  $p_j$  y por lo tanto la complejidad es nula.

La Fig. 1b permite apreciar algunos aspectos importantes. La medida de Fisher  $F(\alpha)$  detecta claramente la aparición de ventanas periódicas. Para un valor de  $\alpha$  que produce una dinámica periódica, la PDF consiste en unos pocos picos disjuntos, por lo tanto  $F$  debe ser grande ya que está asociada a las derivadas de la PDF. Esto ya ha sido hecho en [11]. Por otro lado, en las ventanas periódicas, uno espera, y en efecto es lo que se encuentra, que la complejidad se anula, ya que una señal periódica no es compleja. Lo que sigue son aspectos nuevos:

- En el gráfico existen picos para  $F(\alpha)$  asociados a valores bajos de complejidad. Lo interesante aquí es que estos picos están asociados a valores de  $\alpha$  para los cuales las ventanas periódicas no se distinguen en el diagrama de bifurcaciones. Para distinguir las necesitaríamos de una resolución más fina en el diagrama. De este modo, a un cierto grado de resolución,  $F$  provee más información que el diagrama en sí mismo.
- Ambas medidas  $F$  y  $C$  detectan el doblamiento de períodos, la última de una manera más notable.
- Enfocando la atención en los bordes entre diferentes regímenes dinámicos, por ejemplo en el periódico-caótico ó en el caótico-caótico con diferente atractor, vemos que  $C$  experimenta allí, saltos notables. En particular, esto demuestra que es capaz de distinguir entre diferentes regímenes caóticos.
- $F$  es insensible a cambios de una dinámica caótica a otra también caótica pero caracterizada por un atractor distinto. Véanse detalles de la transición  $\text{caos}_2$ - $\text{caos}_3$  en la Fig. 4.

En  $\alpha_1 = 3,828445\dots$  hay una transición entre caos y un régimen de período tres. Para valores de  $\alpha$  ligeramente menores que  $\alpha_1$  una órbita típica consiste en intermitencias entre largos intervalos de tiempo con un movimiento casi periódico interrumpido con intermitencias que exploran esporádicamente el resto del atractor. En esta zona

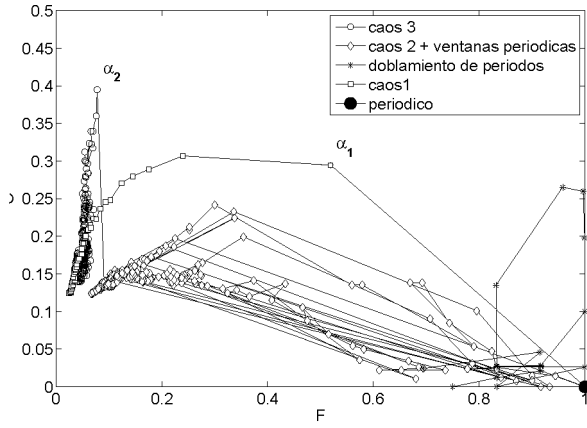


Figura 2: Plano Fisher Complejidad

de intermitencias entre un régimen caótico y uno periódico, la complejidad es alta, y disminuye a medida que  $\alpha$  se aleja de este valor crítico y predomina la dinámica caótica. Vemos también que si  $\alpha$  es incrementado a través del valor  $\alpha_2 = 3,856807\dots$  el atractor experimenta un cambio brusco. Para valores de  $\alpha$  ligeramente menores que  $\alpha_2$ , el atractor es caótico y consiste en tres estrechos intervalos a través de los cuales circula sucesivamente la órbita. Para valores de  $\alpha$  ligeramente mayores que  $\alpha_2$ , el atractor es caótico, pero ahora consiste en un intervalo mucho más grande que incluye a los tres pequeños del atractor previo a  $\alpha_2$ . Este cambio es conocido en dinámica no lineal como “crisis interior” [9]. Una órbita típica sobre el atractor para  $\alpha$  ligeramente mayor que  $\alpha_2$  permanece haciendo ciclos entre los tres intervalos pre crisis por largos intervalos de tiempo seguidos por “explosiones” intermitentes en las cuales la órbita explora una región mucho más amplia en el intervalo completo del nuevo atractor, luego retorna al antiguo por un periodo de tiempo largo con respecto a la duración de la “explosión”. En la región analizada del diagrama de bifurcación del mapa logístico, el borde izquierdo de la ventana tiene una dinámica intermitente:

$$\text{caos}_1 \rightarrow \text{aproximadamente periódico} \rightarrow \text{caos}_1.$$

y en el borde derecho:

$$\text{caos}_2 \rightarrow \text{caos}_3 \rightarrow \text{caos}_2$$

La complejidad estadística es notablemente más grande cuando la órbita alterna intermitentemente entre dos atractores, (uno o ambos caóticos) que cuando es puramente caótico, y distingue claramente entre *distintas clases de caos*.

En la Fig. 2 mostramos un punto de vista complementario, en el introducimos el plano “Fisher-Complejidad” para caracterizar diferentes regímenes dinámicos. Podemos apreciar fácilmente que cada régimen distinto queda

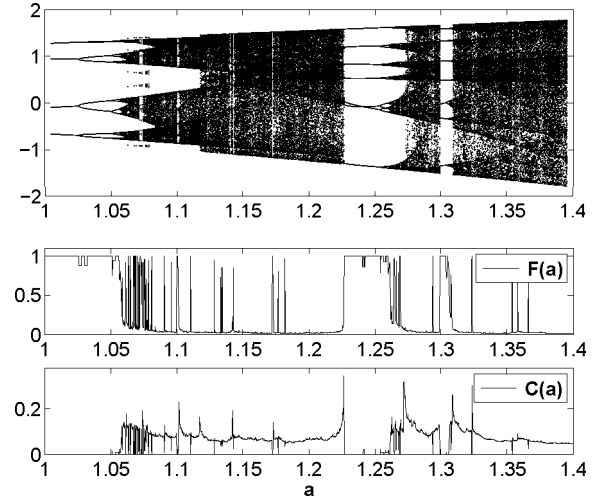


Figura 3: (a) Diagrama de bifurcaciones para el mapa de Henon; (b) Medida de Información de Fisher  $F$  para la PDF de equilibrio, vs.  $a$ ; (c) Complejidad estadística  $C(a)$  vs.  $a$

ubicado en distintas regiones de este plano. Por ejemplo, se puede apreciar, en el caso de la transición caos-periodicidad cerca de  $\alpha_1$ , que  $F$  crece rápidamente, mientras que  $C$  tiene valores altos antes de ese valor del parámetro de control. En la transición “caos<sub>2</sub>”  $\rightarrow$  “caos<sub>3</sub>” es  $C$  quien crece rápidamente en  $\alpha_2$  y luego va disminuyendo a medida que el parámetro de control se aleja del valor crítico, indicando que la dinámica es más compleja en la zona post-transición donde la dinámica alterna entre dos atractores. Nótese también que los doblamientos de período tienen un valor relativamente alto de la complejidad y también un valor alto de la medida de Fisher. La complejidad de una dinámica puramente caótica (caos<sub>1</sub>, caos<sub>2</sub> y caos<sub>3</sub>) es baja y la de una dinámica periódica es nula.  $F$  es alta en régimen periódico y baja en el caos, etc.

### Mapa de Hénon

$F$  y  $C$  muestran un comportamiento similar al analizar el mapa de Henon [9, 10] dado por

$$x_{n+1} = 1 + y_n - ax_n^2; \quad y_{n+1} = bx_n; \quad b = 0,3, \quad (9)$$

donde construimos la serie temporal con la variable  $x$ . El parámetro  $a$  se hizo variar desde 1 hasta 1,4 en dos mil pasos igualmente espaciados. Para cada paso se hicieron  $10^5$  iteraciones luego de descartar un transiente de  $10^4$  iteraciones. Con estos valores construimos un histograma sobre  $10^3$  celdas de igual tamaño en el intervalo  $[-2, 2]$  para encontrar la PDF de equilibrio. En la Fig. 3 vemos el diagrama de bifurcaciones del mapa de Henon junto a  $C(a)$  y  $F(a)$ . En la Fig. podemos ver detalles de la

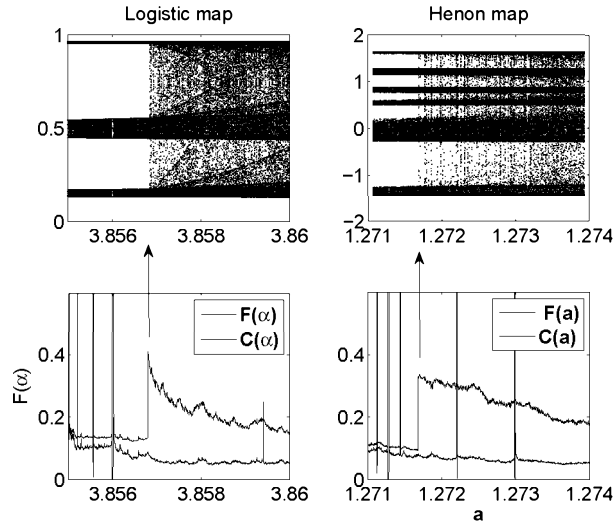


Figura 4: Detalle del comportamiento de la medida de Fisher y de la complejidad durante la transición “caos<sub>2</sub>” → “caos<sub>3</sub>”

transición “caos<sub>2</sub>” → “caos<sub>3</sub>”, para ambos mapas donde se puede apreciar el aumento notable de la complejidad en la transición, y también que  $F$  es insensible a este cambio.

#### Mapa de Ikeda

Finalmente, consideremos el mapa de Ikeda [9]

$$z_{n+1} = a - bz_n \exp\left(i\kappa - \frac{i\eta}{1 + |z_n|^2}\right); \quad z = x + iy \in \mathbb{C}. \quad (10)$$

con  $a = 0,85$ ,  $b = 0,9$ , y  $\kappa = 0,4$ . La serie temporal es construida con la parte real de  $z$ . el parámetro de control es  $\eta$ , que lo hacemos variar entre 7.2 y 7.4, en dos mil pasos igualmente espaciados, atravesando el valor crítico  $\eta_c = 7,26884894$  [9]. Para cada valor de  $\eta$  iteramos el mapa  $10^5$  veces luego de descartar un transiente de  $10^4$  iteraciones. Con estos valores construimos un histograma sobre  $10^3$  celdas de igual tamaño en el intervalo  $[-1.4, 1.1]$  para encontrar la PDF de equilibrio. La dinámica es caótica para todos los valores de  $\eta$  excepto el caso de pequeñas ventanas periódicas, pero en  $\eta_c = 7,26884894$  se produce un crecimiento brusco en el tamaño del atractor, una crisis interior [9]. Para  $\eta < \eta_c$ , el atractor ocupa el rango desde  $-0,2$  hasta  $+0,6$ , aproximadamente. Cuando  $\eta$  atraviesa  $\eta_c$  la órbita, permanece principalmente dentro de ese intervalo, pero esporádicamente explora una región más grande, aproximadamente entre  $-1,4$  y  $+1,0$ . La frecuencia de estas visitas al atractor más grande, o intermitencias, aumenta a medida que  $\eta$  continúa creciendo hasta que la dinámica se establece plenamente en el nuevo atractor. En la Fig. 5 vemos el diagrama de bifurcación

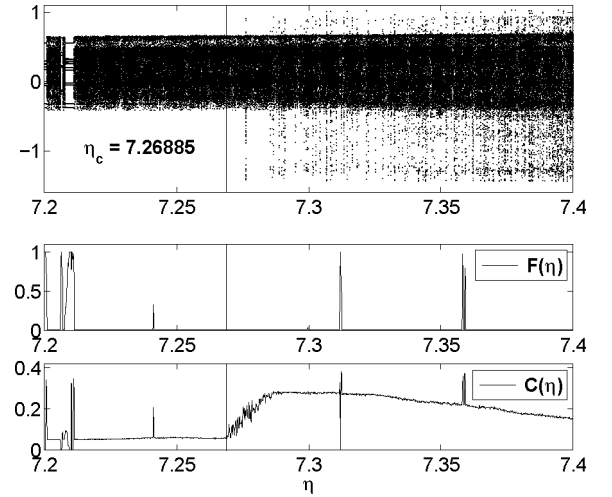


Figura 5: (a) Diagrama de bifurcación del mapa de Ikeda en función del parámetro  $\eta$ ; (b) Medida de Fisher  $F$  vs.  $\eta$ ; (c) Complejidad  $C$  vs.  $\eta$ .

correspondiente, junto a la medida de Fisher  $F$  y la complejidad estadística  $C$  correspondientes a la distribución de equilibrio.  $F$  no distingue entre diferentes regímenes caóticos, pero  $C$  distingue claramente la presencia de  $\eta_c$ .  $C$  es alta en la zona de transición entre ambos atractores y disminuye a medida que se establece el nuevo. Para  $\eta \simeq 7,32$  y  $\eta \simeq 7,36$  encontramos picos en  $F$ , indicativos de ventanas periódicas (que no se alcanzan a distinguir en el diagrama de bifurcaciones). En particular, en  $\eta \simeq 7,36$  este pico en  $F$  no va acompañado de una disminución en  $C$ , que también tiene un pico en ese lugar. Esto se debe a que en esta zona la periodicidad aparece luego de un muy largo transiente. Para algunos valores de  $\eta$  dentro de esta ventana, no se alcanza una órbita periódica aún después de algunos miles de iteraciones. De este modo, cuando  $F$  y  $C$  crecen simultáneamente, uno está detectando ventanas periódicas con un transiente muy largo.

#### 4. CONCLUSIONES

En este trabajo hemos abordado el estudio de sistemas dinámicos bien conocidos a fin de poder estimar la potencia de la conjunción entre la medida de Fisher y la complejidad estadística como un par de herramientas para analizar sistemas dinámicos no lineales (SDNL). Nuestros resultados sugieren que se trata de un recurso eficiente para la investigación de SDNL. Aunque la medida de información de Fisher  $F$ , por sí misma puede distinguir entre caos y periodicidad [11], es incapaz de distinguir claramente entre un régimen caótico y otro. Las cosas mejoran sustancialmente cuando se complementa con la complejidad estadística  $C$ . La complejidad se anula en

la dinámica periódica, es pequeña en regímenes caóticos plenamente desarrollados y es alta durante las intermitencias y en las crisis interiores, o sea cuando la dinámica alterna entre distintos tipos de atractores. El plano Fisher-complejidad permite una clara e inambigua visualización de los fenómenos no lineales de interés ubicando en distintas zonas del plano los distintos tipos de dinámica que puede desplegar el sistema.

#### Agradecimientos

F. Pennini agradece la financiación parcial por parte de FONDECYT, grant 1080487.

- 
- [1] B.R.Frieden, Robert A. Gatenby (Eds.) *Exploratory Data Analysis Using Fisher Information* (Springer-Verlag, London, 2007); R. Frieden, *Science from Fisher information* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 2004); B.R. Frieden, B.H. Soffer, *Phys. Rev. E* **52**, 2274 (1995).
- [2] F. Pennini, A. Plastino, *Phys. Rev. E* **69**, 057101 (2004).
- [3] F. Pennini, A.R. Plastino, A. Plastino, *Physica A* **258**, 446 (1998).
- [4] Michael J.W Hall, *Phys. Rev. A* **62**, 012107 (2000).
- [5] R. López-Ruiz, H.L. Mancini, X. Calbet, *Phys. Lett. A* **209**, 321 (1995).
- [6] J.P. Crutchfield, K. Young, *Phys. Rev. Lett.* **63**, 105 (1989); D.P. Feldman, J.P. Crutchfield, *Phys. Lett. A* **238**, 244 (1998); X. Calbet, R. López-Ruiz, *Phys. Rev. E* **63**, 066116 (2001); C. Anteneodo, A.R. Plastino, *Phys. Lett. A* **223**, 348 (1997); J.S. Shiner, M. Davison, P.T. Landsberg, *Phys. Rev. E* **62**, 3000 (2000).
- [7] C. Vignat, J.-F. Bercher, *Phys. Lett. A* **312**, 27 (2003).
- [8] M. Fuentes, H. Larrondo, M. T. Martin, A. Plastino, O. A. Rosso, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 154102 (2007).
- [9] Ott, E. *Chaos in Dynamical Systems*, Cambridge University Press, N.Y. (1993); J.C. Sprott, *Chaos and Time Series Analysis*, Oxford University Press, Oxford (2004).
- [10] A.H. Nayfeh and B. Balachandran, *Applied nonlinear dynamics*. Wiley, New York, (1998).
- [11] M.T. Martin, J. Perez, A. Plastino, *Physica A* **291**, (2001).
- [12] M.T. Martin, A.L. Plastino, O.A. Rosso, *Physica A* **369**, 439 (2006).
- [13] C.E. Shannon, *The mathematical theory of communication*, University of Illinois Press, Illinois, USA, (1949).
- [14] A. Majtey, P.W. Lamberti, M.T. Martin, A. Plastino, *Eur. Phys. J. D* **32**, 413 (2005).