

PREPARANDO Y RECONSTRUYENDO ESTADOS CUÁNTICOS PUROS DE DIMENSIÓN ARBITRARIA D MEDIANTE EL USO DE UN MODULADOR ESPACIAL DE LUZ

PREPARING AND RECONSTRUCTING PURE QUANTUM STATES OF ARBITRARY D DIMENSION USING A SPATIAL LIGHT MODULATOR

J.J.M. Varga ^a, L. Rebón ^b, S. Ledesma ^a, C. Iemmi ^a

^a Laboratorio de Procesado de Imágenes – Departamento de Física – Facultad de Ciencias Exactas y Naturales – Universidad de Buenos Aires

^b Instituto de Física de La Plata – Facultad de Ciencias Exactas – Universidad Nacional de La Plata

Recibido: 30/11/2013; aceptado: 27/10/2014

Los qudits espaciales son sistemas cuánticos de dimensión D en donde la información se encuentra codificada en los grados de libertad de posición y momento transversal de fotones individuales. Si bien momento y posición son variables continuas, pueden utilizarse, por medio de una discretización adecuada, para definir estados cuánticos de dimensión finita arbitraria. Este método se basa en el uso de un arreglo de D rendijas, lo que determina el número de posibles caminos seguidos por el fotón. En este trabajo se presenta un nuevo método para preparar estados cuánticos puros arbitrarios de dimensión D utilizando un único modulador espacial de luz (SLM) trabajando en modo de fase. Con el fin de estudiar la fidelidad del proceso hemos implementado el método para un gran número de estados de dimensión 2 cubriendo la esfera de Bloch. Como ejemplos adicionales, mostramos la flexibilidad del método para implementar qudits de mayor dimensión en los casos $D = 3$ y 7 . Esta nueva configuración, además de más simple, compacta, menos costosa y de eliminar problemas de alineado, reduce ampliamente las pérdidas luminosas, lo cual es relevante al trabajar con fotones individuales generados por conversión paramétrica espontánea descendente (SPDC).

Palabras clave: Información cuántica, Moduladores espaciales de luz, Redes de difracción.

Spatial qudits are D -dimensional quantum systems where the information is encoded in the position and transverse momentum degrees of freedom of single photons. Although momentum and position are continuous variables, this magnitudes can be used, through appropriate discretization, to define quantum states of arbitrary finite dimension. This method relies on the use of an array of D slits, which determines the number of possible paths followed by the photon. In this paper we present a new method for preparing pure states of arbitrary dimension D using a single spatial light modulator (SLM) working in phase mode. We have implemented the method for a large number of states of dimension $D = 2$ covering the Bloch sphere. As further examples, show the flexibility of the method to implement in qudits of larger dimensions, where $D = 3$ and 7 . This new configuration, as well as being simple, compact, less expensive and eliminating alignment problems, greatly reduces light loss, which is important when working with single photons generated by spontaneous parametric down conversion (SPDC).

Keywords: Quantum information, Spatial light modulators, Diffraction gratings.

I. BREVE RESEÑA DEL GRUPO DE INVESTIGACIÓN

En el Laboratorio de Procesado de Imágenes (Dpto. de Física, FCEyN – UBA) hemos estado trabajando durante los últimos años en el estudio y desarrollo de métodos de transmisión y procesamiento de información basados en la propagación y modulación del campo electromagnético. El empleo de pantallas de cristal líquido como moduladores espaciales (SLMs) constituye una opción muy versátil que hemos venido aplicando en diversas líneas de investigación: generación de elementos ópticos difractivos [1], procesamiento de imágenes [2], polarimetría [3], microscopía [4], etc.

Dado el interés actual en áreas como la información y la computación cuántica, el desarrollo de métodos de

procesamiento óptico de la información, ha recibido una creciente atención, y se han propuesto sistemas basados en la óptica clásica para implementar procesos de información cuántica. En nuestro laboratorio, hemos venido utilizando distintos tipos de configuraciones ópticas, para la realización de simulaciones de diversos algoritmos cuánticos, utilizando una fuente de luz clásica. Los trabajos en esta línea incluyen la simulación óptica del algoritmo de Deutsch-Jozsa [5,6], del algoritmo de búsqueda de Grover, caminatas al azar cuánticas [7], protocolo de teleportación [8] y violación de desigualdades de Bell [9]. En la simulación óptica de algoritmos cuánticos, la propuesta es usar bits de posición para representar la amplitud de un estado cuántico, utilizando para ello un haz láser. La posibilidad de realizar esta analogía radica en que, tanto el campo electromagnético

de la óptica clásica como los estados cuánticos de un sistema físico, evolucionan siguiendo una ecuación de ondas, y además satisfacen el principio de superposición. Los moduladores espaciales de luz permiten modificar dinámicamente y en forma programable el frente de ondas de la luz y, por lo tanto, implementar estas simulaciones en tiempo real. En el Laboratorio de Procesado de Imágenes se cuenta la experiencia necesaria para trabajar con este tipo de elementos ópticos difractivos, además del equipamiento requerido para trabajar con fuentes de fotones individuales, como cristales no lineales, placas de coincidencia y detectores de avalancha.

El trabajo que presentamos en los Anales AFA 2014 está basado en esta técnica previa, utilizando SLMs para discretizar el grado de libertad espacial de fotones individuales [10-12]. En el mismo se muestra que podemos generar estados puros arbitrarios multidimensionales y reconstruirlos en forma eficiente.

En esta misma línea estamos trabajando en la preparación controlada de estados mixtos arbitrarios. Esto constituye la generalización total de este método para generación de estados cuánticos de alta dimensión. Lo interesante es que en cualquier caso mediante el uso de pantallas de cristal líquido es posible introducir modificaciones al estado, en cualquier etapa del proceso, controladas y programables en tiempo real.

II. INTRODUCCIÓN

Uno de los desafíos principales en el campo de la información cuántica es la habilidad de generar, modificar y medir sistemas cuánticos, los cuales son los portadores de información en los protocolos de procesado cuántico de la información y computación cuántica. Mientras los qubits (sistemas de dos niveles) son los sistemas más básicos y usuales para llevar a cabo estas tareas, los qudits (sistemas de D niveles con $D > 2$) han recibido un creciente interés debido a su mayor potencial para estas aplicaciones [13]. En particular, el uso de fotones individuales representa algunas ventajas para comunicaciones dado que los mismos son fácilmente transportables y poseen varios grados de libertad que pueden ser utilizados para el procesado cuántico de la información. Si bien los qubits fotónicos son habitualmente codificados en el grado de libertad de polarización, otros grados de libertad como momento angular orbital [14], longitudinal [15], y momento-posición transversales [16, 17] son apropiados para codificar qudits de mayor dimensión. Aunque el momento-posición transversal son variables continuas pueden ser utilizadas, mediante una discretización apropiada, para definir estados cuánticos de dimensión arbitraria D . Este método está basado en el uso de ranuras múltiples que permiten discretizar el momento transversal de los fotones individuales. Como la dimensión del espacio de Hilbert está determinada por el número de posibles caminos seguidos por el fotón, es decir por el número de ranuras, estos estados cuánticos son llamados *qudits espaciales* [16].

Una importante ventaja de esta estrategia de codificación de la información, comparada con las que utilizan

otros grados de libertad, es la posibilidad de trabajar con grandes dimensiones sin la necesidad de arreglos ópticos complejos. Recientemente, este tipo de codificación ha atraído el interés para muy variadas aplicaciones tales como protocolos de información cuántica [18], juegos cuánticos [19], y distribución cuántica de claves [20]. Por lo tanto, la habilidad de preparar, manipular y reconstruir estados arbitrarios de qudits espaciales representa un importante paso hacia la realización de experimentos de óptica cuántica. En este sentido, los avances tecnológicos realizados en moduladores espaciales de luz (SLMs) controlados electrónicamente simplifica la preparación de estos estados cuánticos. Esto se debe a que estos dispositivos son mucho más versátiles que las ranuras físicas convencionales, y permiten una manipulación en tiempo real de los coeficientes que caracterizan al estado [21]. Además, la tomografía de qudits fotónicos de altas dimensiones puede también ser llevada a cabo mediante SLMs [22] permitiendo no sólo el almacenamiento de información sino también la lectura de la misma. Aunque estos trabajos muestran que el uso de SLMs para la preparación y la tomografía de los qudits espaciales fotónicos es más simple que mediante otras técnicas, en ellos se utilizan para modular separadamente la amplitud o la fase del campo eléctrico de cada ranura. Por lo tanto, en estos esquemas, son requeridos dos SLMs alineados para la preparación o manipulación completa del estado más general. De manera similar, dos SLMs adicionales son requeridos para codificar los estados de las bases sobre las cuales se realizan las mediciones proyectivas.

En este trabajo mostramos, a modo de introducción, los resultados originales del método introducido e implementado experimentalmente en [11], el cual involucra el uso de un *único* SLM trabajando en modo de fase para controlar de manera independiente la amplitud y la fase de los coeficientes complejos que definen los qudits. Este método es, menos costoso, posee una mayor eficiencia de difracción y no requiere de sistemas de alineación y proyección para formar imagen de un modulador sobre el otro. Así son reducidas las pérdidas de intensidad luminosa lo cual es relevante al trabajar con fuentes de fotones individuales, por ejemplo, aquellas que utilizan el proceso de conversión espontánea paramétrica descendente (SPDC). El método sigue las propuestas de las Refs. [23, 24] para codificar la información de amplitud sobre un filtro puro de fase mediante un *único* SLM. Por un lado la amplitud requerida es lograda programando una red de difracción de modulación apropiada en las regiones de las ranuras. Por el otro lado, los valores de fase requeridos son obtenidos sumando una fase constante sobre la red de difracción. Luego de seleccionar el primer orden de difracción en el plano de Fourier la información es filtrada y antitransformada sobre el plano final. El resultado es una distribución de luz correspondiente a la imagen de las ranuras conteniendo la modulación compleja completa. De este modo, mostramos que un *único* SLM en modo de fase permite la preparación de qudits espaciales puros arbitrarios con alta fidelidad.

Aunque el uso de SLMs ha demostrado ventajas a fines de representar estados cuánticos de alta dimensión frente a otros esquemas, existe aún una limitación relacionada con fluctuaciones temporales de fase [25, 26]. Típicamente, el tiempo característico de las fluctuaciones es menor que el tiempo de muestreo del dispositivo de cristal líquido y son originadas por la manera en que la señal eléctrica es dispuesta sobre la pantalla. Obviamente, cuando este tipo de dispositivo es utilizado en modo de fase para representar estados cuánticos, la calidad de la codificación se ve afectada por dichas fluctuaciones.

Mediante simulaciones numéricas, utilizando el modelo de ruido descrito en [26], mostramos que es posible obtener resultados que están en acuerdo cualitativo con los obtenidos experimentalmente. Esto indica la posibilidad de realizar un estudio detallado de la influencia de este tipo de fluctuaciones en la calidad de la preparación de los estados.

II. TEORÍA

La generación de estados puros de qudits espaciales puede entenderse como sigue. Cuando un campo de fotón único paraxial y monocromático es transmitido a través de una abertura descrita por una función de transmisión compleja $T(\vec{x})$, este estado, asumido aquí como puro, es transformado como

$$|\psi\rangle = \int d\vec{x} \psi(\vec{x}) |\vec{x}\rangle \xrightarrow{T(\vec{x})} \int d\vec{x} \psi(\vec{x}) T(\vec{x}) |\vec{x}\rangle \quad (1)$$

donde $\vec{x} = (x, y)$ es la coordenada de la posición transversal y $\psi(\vec{x})$ la amplitud de probabilidad transversal normalizada del estado. Ahora, consideremos que $T(\vec{x})$ es un arreglo de D ranuras rectangulares de ancho $2a$, período d y longitud L ($\square a, d$), donde cada ranura, ℓ , posee una amplitud de transmisión β_ℓ . Entonces, $T(\vec{x})$ estará dado por

$$T(\vec{x}) = \text{rect}\left(\frac{x}{L}\right) \times \sum_{\ell=0}^{D-1} \beta_\ell \text{rect}\left(\frac{y - \eta_\ell d}{2a}\right) \quad (2)$$

donde $\eta_\ell = \ell + (D-1)/2$. Sin pérdida de generalidad y por simplicidad, asumiremos que $\psi(\vec{x})$ es constante a lo largo de la región de las ranuras. Por lo tanto, el estado del fotón transmitido en (1) será [25]

$$|\psi\rangle = \sum_{\ell=0}^{D-1} \tilde{\beta}_\ell |\ell\rangle \quad (3)$$

donde $\tilde{\beta}_\ell = \beta_\ell / \sqrt{\sum_{j=0}^{D-1} |\beta_j|^2}$ y $|\ell\rangle$ denota el estado del fotón que atraviesa la ranura ℓ -ésima.

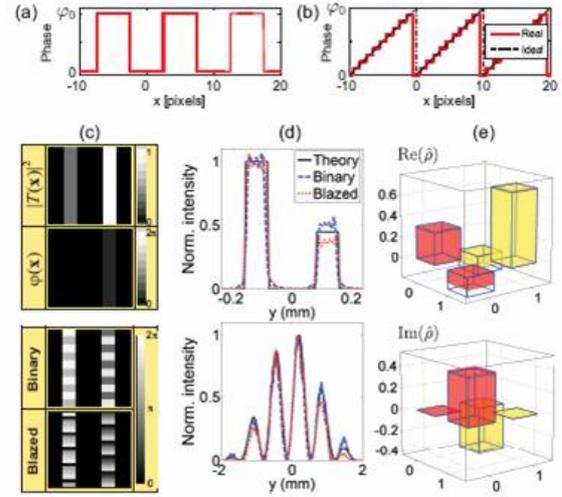


Figura 1. (a) Red binaria. (b) Red con blaze. (c) Arriba: amplitud y fase de $T(\vec{x})$ necesarias para preparar el estado $0.56|0\rangle + 0.83e^{i0.63\pi}|1\rangle$. Abajo: máscaras de fase correspondientes para preparar este estado sobre el primer orden de difracción. (d) Distribuciones de intensidad normalizadas y la predicción teórica para mediciones de este estado en el campo cercano (arriba) y en el campo lejano. (e) Partes real e imaginaria de la matriz densidad reconstruida experimentalmente utilizando una red con blaze.

Con el fin de preparar estados arbitrarios de la forma (3) con un único SLM trabajando en modo de fase, es posible proceder como sigue. Una red de difracción de fase unidimensional es representada en las diferentes regiones del SLM, cada una de las cuales corresponde a una ranura en particular. Aquí, hemos utilizado dos perfiles de fase diferentes, red binaria y red dientes de sierra (red con blaze). Los gráficos correspondientes se muestran en las Figs. 1(a) y 1(b) respectivamente. La eficiencia del primer orden de difracción para una red binaria puede ser derivada utilizando con conceptos básicos de la óptica de Fourier como [27]

$$\varepsilon_1^{\text{bin}} = \frac{2}{\pi^2} (1 - \cos \varphi_0) \quad (4)$$

donde φ_0 es la profundidad de modulación de fase de la red. Por lo tanto, la intensidad de luz puede ser modificada seleccionando la modulación de fase φ_0 . Por ejemplo, podemos obtener eficiencias entre 0% y 40% cuando φ_0 varía entre 0 y π [28]. Cabe mencionar que es más simple representar una red binaria en el SLM ya que sólo son necesarios dos niveles de gris. Sin embargo, la máxima eficiencia de difracción está limitada. Esto puede superarse utilizando una red con blaze, en este caso la eficiencia del primer orden de difracción puede ser escrita como [27]

$$\varepsilon_1^{\text{bla}} = \text{sinc}^2\left(1 - \frac{\varphi_0}{2\pi}\right), \quad (5)$$

donde, nuevamente, φ_0 es la profundidad de modulación y $\text{sinc}(x) = \sin(\pi x) / (\pi x)$. Obviamente,

cuando $\varphi_0 = 2\pi$ la eficiencia del primer orden posee un valor máximo del 100%. Esta es la condición usual para aplicaciones espectroscópicas. Seleccionando otro valor para φ_0 , es posible modular la cantidad de luz difractada sobre el orden y, consecuentemente, la amplitud real de cada ranura. Notar que la ecuación (5) corresponde a una red dientes de sierra ideal con modulación continua. Sin embargo, dado que la representación de una red periódica es llevada a cabo mediante un número finito de píxeles, esto impone una discretización en los niveles de fase para el perfil de la red. Por lo tanto, esta será representada como se muestra en la Fig. 1(b). Aquí, hemos seleccionado 10 niveles de cuantización lo cual entrega una eficiencia de \square 97% para el primer orden.

Independientemente de la modulación elegida, asignamos el máximo valor de eficiencia a la máxima amplitud de los coeficientes de las ranuras, esto es, $|\beta_\ell| = 1$ corresponde $\varphi_0 = \pi$ para la modulación binaria y $\varphi_0 = (N-1)/N \times 2\pi$ para la modulación con blaze, donde N es el número de niveles de cuantización. Otros valores de amplitud corresponden a otros valores de φ_0 que son obtenidos a partir de las Ecs. (4) y (5). Finalmente, la fase de los coeficientes complejos en la Ec. (3), $\arg(\tilde{\beta}_\ell)$, es fijada sumando un valor constante de fase a la red de difracción. Con el fin de evitar la introducción de fases adicionales en el proceso de codificación, las redes de fase son generadas con valor medio nulo. Sin embargo, como el SLM no puede introducir valores negativos de fase, las redes son generadas con valor medio igual a la mitad de la máxima profundidad de modulación, para cada tipo de red: $\pi/2$ para red binaria y $(N-1)/N \times \pi$ para la red con blaze.

Como un ejemplo ilustrativo, consideremos $T(\vec{x})$ con $D=2$ y $(\beta_0, \beta_1) = (0.67, e^{i0.63\pi})$. Esta apertura, cuyas correspondientes componentes de amplitud y fase son mostradas en la parte superior de la Fig. 1(c), prepara el estado espacial $0.56|0\rangle + 0.83e^{i0.63\pi}|1\rangle$. En la parte inferior de la Fig. 1(c) se muestra, en niveles de gris, la distribución de fases requerida para representar este estado particular para cada tipo de red.

III. PREPARACIÓN DE QUDITS: EXPERIMENTO

En la figura 2 se muestra el arreglo experimental empleado para preparar y reconstruir los estados. En la primera parte del arreglo fue utilizada para la preparación de los estados. La modulación pura de fase requerida fue provista por el SLM de reflexión (Holoeye PLUTO). La segunda parte del arreglo fue utilizada para llevar a cabo la caracterización de los estados. Las mediciones de intensidad fueron realizadas mediante cámaras CCD.

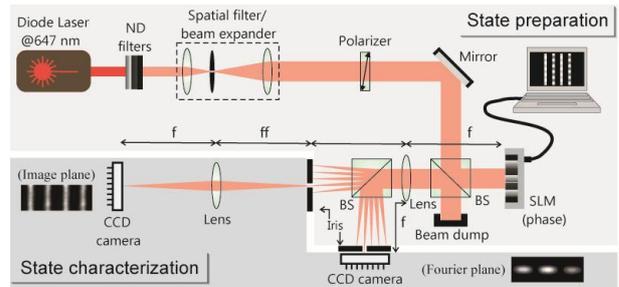


Figura 2. Arreglo experimental (detalles en el texto).

A fines de cuantificar la calidad de preparación de los estados cuánticos utilizamos la fidelidad, $F = \langle \psi | \hat{\rho} | \psi \rangle$, entre el estado a preparar $|\psi\rangle$, y la matriz densidad del estado reconstruido, $\hat{\rho}$. Idealmente, esperamos tener $F = 1$.

Para qubits espaciales, en las Figs. 1(d) y 1(e) se muestran, como un ejemplo para el estado particular discutido anteriormente, las distribuciones de intensidad medidas en los campos cercano y lejano y la correspondiente tomografía, respectivamente. En la Fig. 3, cada esfera de Bloch muestra la fidelidad de preparación para 561 estados distribuidos uniformemente sobre la superficie, utilizando red binaria [Fig. 3(a)] y red con blaze [Fig. 3(b)]. En ambos casos, hemos obtenido fidelidades por encima de 96% y fidelidades medias de 99.6%. La discontinuidad de aparece alrededor del meridiano $\phi = 0$ es, posiblemente, debida a las diferentes fluctuaciones de las en cada nivel de gris. Por ejemplo, aunque 0 y 2π son geoméricamente equivalentes, los voltajes aplicados son diferentes y las fluctuaciones en un caso son mayores que en el otro [26]. En la Fig. 4 se muestran dos ejemplos para $D=3$ y $D=7$. Con respecto al tipo de red utilizado, ya sea binaria o con blaze, la calidad global de los estados preparados es muy similar. No obstante, como discutimos anteriormente, las redes con blaze proveen una mejor eficiencia de difracción que las binarias.

Hemos comparado la eficiencia luminosa para nuestro arreglo óptico con el que utiliza dos SLMs [21]. En el caso de utilizar una red con blaze, nuestro esquema es $1/\eta$ veces más eficiente, donde η representa la atenuación luminosa debido a los elementos de polarización necesarios para obtener modulación pura de amplitud con un SLM helicoidal [29, 30].

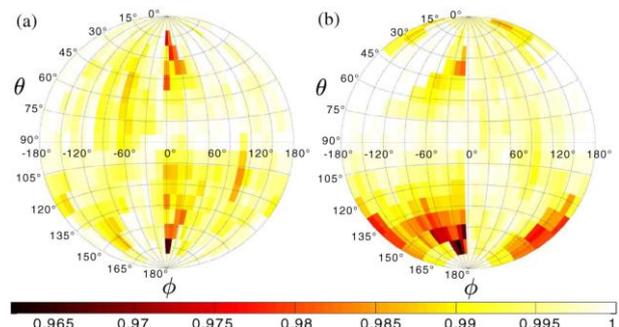


Figura 3. Esferas de Bloch representando la fidelidad de preparación de qubits espaciales utilizando red binaria (a) y red con blaze (b). La latitud $\theta \in [0, \pi]$ y la longitud $\phi \in (-\pi, \pi]$ parametrizan un estado puro arbitrario $|\psi\rangle = \cos(\theta/2)|0\rangle + e^{i\phi} \sin(\theta/2)|1\rangle$ sobre la superficie de la esfera.

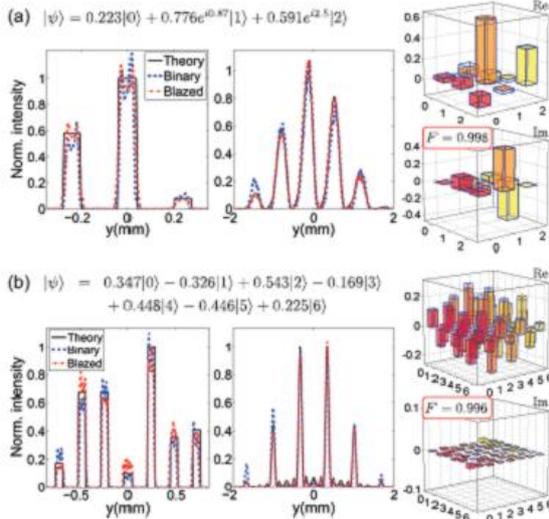


Figura 4. Qudits espaciales en 3 (a) y 7 (b) dimensiones con sus correspondientes distribuciones de intensidad normalizadas para mediciones en el campo cercano y lejano, y sus matrices densidad reconstruidas experimentalmente utilizando una red con blaze.

IV. PREPARACIÓN DE QUDITS: SIMULACIONES NUMÉRICAS

Hemos mencionado anteriormente que, si bien el uso de SLMs resulta ser una mejora para la preparación de estados cuánticos, las fluctuaciones que poseen los mismos deterioran la calidad de los estados generados. A fines de comprender cómo las fluctuaciones afectan a la preparación de los estados, hemos realizado simulaciones numéricas modelando el comportamiento del SLM. Para ello nos hemos basado en el estudio realizado en la Ref. [26]. La fase $f(t)$ introducida por el SLM en función del tiempo, en un período τ , puede ser modelada como

$$f(t) = \begin{cases} f_{in} + \frac{f_{in}}{2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{t}{\tau} \right), & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{\tau}{2} \\ f_{in} - \frac{f_{in}}{2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{t}{\tau} \right), & \text{si } \frac{\tau}{2} \leq t \leq \tau \end{cases}, \quad (6)$$

donde f_{in} es la fase representada en el SLM. En la figura 5 se muestra la dependencia temporal de la fase introducida por el SLM para distintas fases representadas, las mismas son funciones triangulares y periódicas ($\tau = 1\text{ms}$).

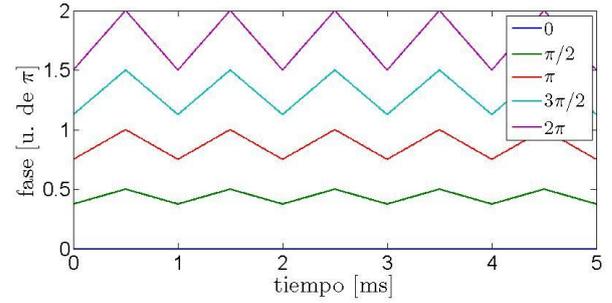


Figura 5. Modelo de las fluctuaciones de fase del SLM utilizado en las simulaciones numéricas. Se encuentran representadas las fluctuaciones para algunas fases representadas en el SLM.

Utilizando este modelo para las fluctuaciones temporales del SLM, realizamos la simulación numérica del sistema óptico de la Fig. 2. La distribución de fases generada por el SLM fue representada por una matriz compleja cuyos elementos eran de módulo unitario. Las transformaciones y antitransformaciones generadas por las lentes del sistema óptico fueron realizadas utilizando el algoritmo de la transformada rápida de Fourier (FFT). El tiempo fue discretizado en $t = 0.1 \text{ ms}$ y para cada uno de estos tiempos obtuvimos la distribución de intensidades del plano imagen y del plano de Fourier. Luego integramos estas intensidades a lo largo de un período de la fluctuación del SLM.

En la figura 6 se muestra una esfera de Bloch obtenida mediante estas simulaciones, utilizando una red con blaze y a partir de modelar las fluctuaciones del SLM según la Ref. [26]. El resultado de la simulación es cualitativamente similar al obtenido experimentalmente [Fig. 3(b)].

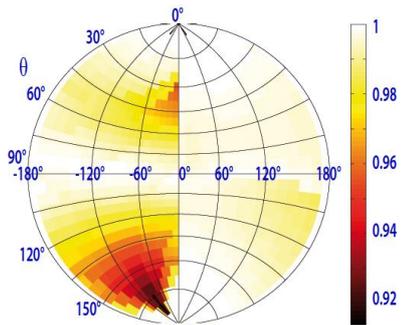


Figura 6. Esfera de Bloch representando la fidelidad de preparación de qubits espaciales utilizando red con blaze, obtenida a partir de simulaciones numéricas.

V. CONCLUSIONES

En conclusión, hemos mostrado que es posible preparar estados puros arbitrarios de qudits espaciales utilizando un único SLM trabajando en modo de fase. Obtuvimos fidelidades de preparación por encima del 94% y esperamos una eficiencia luminosa mayor respecto a otros métodos. Es importante notar que este método

puede ser útil no sólo para la preparación sino también para realizar la medición de este tipo de sistemas. El método permite la implementación de la estrategia presentada en [20] que consiste en proyectar la imagen del estado a ser medido sobre el SLM y representar en este dispositivo la red de difracción correspondiente al estado de medición. La detección en el centro del orden de difracción filtrado sobre el plano de Fourier permite obtener las estadísticas de observables arbitrarios. Por lo tanto, el método presentado aquí puede ser una herramienta valiosa para experimentos basados en esta codificación. Además, hemos realizado simulaciones numéricas del sistema óptico al preparar los estados espaciales. La similitud cualitativa entre la esfera de Bloch obtenida experimentalmente y la obtenida mediante simulaciones numéricas muestra que es posible modelar las fluctuaciones del SLM de modo tal que representen de manera realista el comportamiento del mismo.

VI. REFERENCIAS

- 1 – C.Iemmi, J.Campos, J.Escalera, O.López-Coronado, R.Gimeno, M.Yzuel. *Opt. Exp.* **14**, 10207 – 10219 (2006).
- 2 – C. La Mela, C.Iemmi, *Opt. Lett.* **31**, 2562-2564 (2006).
- 3 – A.Peinado, A.Lizana, J.Vidal, C.Iemmi, J.Campos, *Appl. Opt.* **50**, 5437-5445 (2011).
- 4 – M.Goldin, G.Díaz Costanzo, O.Martínez, C.Iemmi, S.Ledesma. *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.*, 104001 1-8, **10**, (2008).
- 5 – D.Francisco, C.Iemmi, J.Paz, S.Ledesma, *Opt. Comm.* **268**, 340-345 (2006).
- 6 – D. Francisco, C. Iemmi, S. Ledesma, *Anales AFA* **18** (1) 83-86 (2006).
- 7 – D.Francisco, C.Iemmi, J.P.Paz, S.Ledesma, *Phys. Rev. A* **74**, 052327 (2006).
- 8 – D.Francisco, S.Ledesma, *JOSA B* **25**, 383-390, (2008).
- 9 – M. Goldin, D. Francisco, and S. Ledesma, *J. Opt. Soc. Am. B* **27**, 779-786 (2010).
- 10 – G. Lima, A. Vargas, L. Neves, R. Guzmán, and C. Saavedra, *Opt. Express* **17**, 10688-10696 (2009).
- 11 – M. Solís-Prosser, A. Arias, J. Varga, L. Rebón, S. Ledesma, C. Iemmi, and L. Neves, *Opt. Lett.* **38**, 4762-4765 (2013).
- 12 – J. J. M. Varga, L. Rebón, M. A. Solís-Prosser, L. Neves, S. Ledesma, C. Iemmi, [arXiv:1406.3596](https://arxiv.org/abs/1406.3596) [quant-ph] (2014).
- 13 – S.M. Barnett, *Quantum Information* (Oxford University Press, Oxford, 2009).
- 14 – A. Mair, A. Vaziri, G. Weihs y A. Zeilinger, *Nature* **412**, 313 (2001).
- 15 – A. Rossi, G. Vallone, A. Chiuri, F. De Martini y P. Mataloni, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 153902 (2009).
- 16 – L. Neves, G. Lima, J.G. Aguirre-Gómez, C.H. Monken, C. Saavedra y S. Pádua, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 100501 (2005).
- 17 – M.N. O’Sullivan-Hale, I. Ali-Khan, R.W. Boyd y J.C. Howell, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 220501 (2005).
- 18 – M.A. Solís-Prosser y L. Neves, *Phys. Rev. A* **84**, 012330 (2001).
- 19 – P. Kolenderski, U. Sinha, L. Youning, T. Zhao, M. Volpini, A. Cabello, R. Laflamme y T. Jennewein, *Phys. Rev. A* **86**, 012321 (2012).
- 20 – S. Etcheverry, G. Canas, E.S. Gómez, W.A.T. Nogueira, C. Saavedra, G.B. Xavier y G. Lima, *Sci. Rep.* **3**, 2316 (2013).
- 21 – G. Lima, A. Vargas, L. Neves, R. Guzmán y C. Saavedra, *Opt. Express* **17**, 10688 (2009).
- 22 – G. Lima, L. Neves, R. Guzmán, E.S. Gómez, W.A.T. Nogueira, A. Delgado, A. Vargas y C. Saavedra, *Opt. Express* **19**, 3542 (2011).
- 23 – J.A. Davis, D.M. Cottrell, J. Campos, M.J. Yzuel y I. Moreno, *Appl. Opt.* **38**, 5004 (1999).
- 24 – V. Bagnoud y J.D. Zuegel, *Opt. Lett.* **29**, 295 (2004).
- 25 – A. Lizana, I. Moreno, A. Marquez, C. Iemmi, E. Fernandez, J. Campos y M.J. Yzuel, *Opt. Express* **16**, 16711 (2008).
- 26 – A. Lizana, A. Marquez, L. Lobato, Y. Rodange, I. Moreno, C. Iemmi y J. Campos, *Opt. Express* **18**, 10581 (2010).
- 27 – J.W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics* (Roberts & Company, Colorado, 2005).
- 28 – Z. Zhang, G. Lu. F.T.S. Yu, *Opt. Eng.* **33**, 3018-3022 (1994).
- 29 – A. Márquez, C. Iemmi, I. Moreno, J. Davis, J. Campos y M. Yzuel, *Opt. Eng.* **40**, 2558 (2001).
- 30 – I. Moreno, C. Iemmi, A. Márquez, J. Campos y M. Yzuel, *Appl. Opt.* **43**, 6278 (2004).