

Facultad de Ciencias
**Astronómicas
y Geofísicas**
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

Tesis de Grado para obtener la Licenciatura en Astronomía

**Objetos compactos compuestos de quarks y materia
oscura**

María del Rosario Alessandroni

Directora: Milva Gabriela Orsaria

Codirector: Ignacio Francisco Ranea Sandoval

Firma y aclaración de la directora:

Milva Gabriela Orsaria

Firma y aclaración de uno de los Jurados:

La Plata
- 2021-

Resumen

En este trabajo modelamos estrellas de quarks sin y con materia oscura en sus núcleos. Uno de los objetivos es realizar avances respecto a la desconocida Ecuación de Estado de la materia densa que describiría a estas hipotéticas estrellas. Por otro lado, a partir de analizar posibles cambios en observables astrofísicos como la masa, el radio y las frecuencias de oscilación de modos no radiales, asociados con la emisión de ondas gravitacionales, pretendemos adentrarnos en la comprensión y el comportamiento de la materia oscura, cuya naturaleza aún es una incógnita.

Para alcanzar ambos objetivos, hemos estudiado, primero, la estabilidad de la materia de quarks y las condiciones para las cuales dicha condición se cumple, en el contexto del modelo de bolsa del MIT que incluye correcciones debido a la incorporación de la constante de acoplamiento fuerte de la Cromodinámica Cuántica. Hemos construido distintas ecuaciones de estado, considerando al quark extraño con y sin masa y hemos analizado las configuraciones obtenidas variando la constante de acoplamiento fuerte y la constante de la bolsa. Luego, hemos analizado el modelo utilizado para la descripción de la materia oscura, a través de la construcción de configuraciones de materia oscura muy pequeñas obtenidas a partir de las ecuaciones de Tolmann-Oppenheimer-Volkoff, considerando que dicha materia puede o no interactuar consigo misma a través de un parámetro de interacción dado por el modelo. Además, hemos analizado como varía la masa de dichas configuraciones para distintos valores de densidad de energía central. Finalmente, hemos acoplado los dos tipos de materia, extraña y oscura, considerando configuraciones estelares de dos fluidos, para las que obtuvimos diferentes curvas de masa-radio. Para completar el análisis, hemos estudiado las frecuencias de oscilación no radiales del modo fundamental f de estos objetos, utilizando la aproximación relativista de Cowling.

Los objetos estudiados cumplen con las restricciones astrofísicas actuales impuestas por los púlsares masivos y la emisión de ondas gravitacionales.

Índice general

Índice de figuras	III
1. Introducción	1
2. Objetos compactos	7
3. Materia de quarks en objetos compactos	13
3.1. Ecuación de estado para materia de quarks	13
3.2. Condiciones de equilibrio químico y neutralidad de carga eléctrica	15
3.3. Hipótesis de la materia extraña	17
3.4. Ventana de estabilidad	21
3.5. Incorporación de interacciones en la materia densa	23
3.6. Materia de quarks estable con correcciones debido a la constante de acoplamiento fuerte	23
3.7. Materia de quarks no extraña con correcciones debido a la cons- tante de acoplamiento fuerte	27
4. Materia oscura	31
4.1. Ecuación de estado para la materia oscura	35
5. Modelado de las estrellas de quarks	37
5.1. Ecuaciones de estructura	37
5.2. Materia oscura en estrellas de quarks	39
5.3. Oscilaciones no radiales en objetos compactos	41
6. Resultados de las configuraciones estelares estudiadas	45
7. Conclusiones y perspectivas	57
Bibliografía	61

Índice de figuras

1.1. Nacimiento de una estrella de neutrones y remanente del evento supernova. a) Implosión del núcleo de la gigante roja. b) Explosión supernova. c) Remanente de la supernova con el remanente compacto central: la estrella de neutrones. Fuente: https://chandra.harvard.edu/xray_sources/supernovas.html	1
1.2. Esquema del diagrama de fases de la QCD, de temperatura, T , como función del potencial químico, μ . A altas temperaturas y bajas densidades (bajo μ), tenemos una fase llamada plasma de quarks y gluones. A bajas temperaturas y altas densidades (alto μ), estudios teóricos indican que podría ocurrir lo mismo, inclusive la formación de fases exóticas [1], [2]. La transición de fase entre la materia hadrónica y la materia de quarks está representada por una línea continua.	3
2.1. Comparación cualitativa del tamaño (no a escala) y la compactidad, M/R , de objetos compactos como las EB y las EN respecto del planeta Tierra.	8
2.2. Esquema de las estructuras de estrellas de quarks y estrellas de neutrones.	9
3.1. Población de partículas, $Y_i = n_i/n_B$, en la materia de quarks como función de la densidad de número bariónico, n_B , en unidades de la densidad de número de saturación nuclear n_B/n_0 ($n_0 = 0,16 \text{ fm}^{-3}$).	18
3.2. Ventana de estabilidad para $\alpha = 0$	25
3.3. ventanas de estabilidad con $\alpha \neq 0$	26
3.4. Ventana de estabilidad para materia de tres sabores	27
3.5. Ventana de estabilidad para materia de dos sabores	28
4.1. Curva de rotación de una galaxia	32
5.1. Curva de Masa-Radio de estrellas de MO, considerando que el parámetro de interacción entre los fermiones oscuros, $y=1000$	39

5.2. Curva de Masa-Radius de estrellas de MO, considerando a los fermiones oscuros sin interacción entre ellos, $y=0$	40
6.1. Curvas de Masa-Radius de EQ sin interacción fuerte, $\alpha = 0$, considerando dos valores para la masa del quark extraño: $m_s = 0$ (curva violeta) y $m_s = 93$ MeV (curva celeste). La línea negra horizontal corresponde a $2 M_\odot$	46
6.2. Curvas de Masa-Radius para distintas configuraciones de EQ sin núcleo de MO, obtenidas fijando la energía por barión, ξ , y variando la constante de acoplamiento fuerte, α	47
6.3. Curvas de Masa-Radius para distintas configuraciones de EQ sin núcleo de MO, obtenidas fijando la energía por barión, ξ , y variando la constante de acoplamiento fuerte, α	48
6.4. Curvas de Masa-Radius para distintas configuraciones de EQ sin núcleo de MO, obtenidas fijando la constante de acoplamiento, α , y variando la energía por barión, ξ	49
6.5. Curvas de Masa-Radius para distintas configuraciones de EQ sin núcleo de MO, obtenidas fijando la constante de acoplamiento, α , y variando la energía por barión, ξ	50
6.6. Curvas de masa-radius para las EQ conteniendo un núcleo de MO cuya densidad de energía central es $\epsilon_{c_{dark}} = 2 \times 10^6$ MeV/fm ³ . Los parámetros de las EdE correspondientes a estas familias de EQ se presentan en el cuadro 6.1.	51
6.7. Curvas de variación de la masa de las EQ conteniendo MO en función la densidad central de MO.	52
6.8. Curvas de Masa-Radius para distintas configuraciones de EQ con núcleos de MO, donde fijamos los parámetros α y ξ , y variamos la densidad central de energía oscura, para los mismos tres valores diferentes de densidad de energía central de la figura 6.7.	53
6.9. Curvas de frecuencia versus masa para EQ con núcleo de materia oscura, con $\epsilon_{c_{dark}} = 2 \times 10^6$. Estas curvas se corresponden con algunas de las configuraciones estelares de la figura 6.6.	54
6.10. Curvas de frecuencia versus masa para distintas configuraciones de EQ con núcleo de MO, donde fijamos los parámetros α y ξ , y variamos la densidad central de energía oscura. Estas curvas se corresponden con algunas de las configuraciones estelares de la figura 6.8.	55

Capítulo 1

Introducción

Luego de un evento supernova tipo II, Ib o Ic, una de las etapas finales de una estrella gigante roja¹, puede quedar como remanente compacto un agujero negro o una estrella de neutrones (EN) (para más detalle se puede consultar el link en la descripción de la Fig.1.1).

El resultado va a depender de que la masa de la estrella progenitora de la supernova supere o no una masa crítica de aproximadamente unas 20 masas solares (que denotaremos de aquí en adelante M_{\odot}). La formación de una EN libera una enorme cantidad de energía en forma de neutrinos y calor, que revierte la implosión del núcleo de su progenitora, la gigante roja (Fig.1.1 (a)). En menos de un segundo, una onda de choque termonuclear arrastra los escombros estelares expandiendo los elementos previamente fusionados de más livianos a más pesados, Fig.1.1 (b), y dejando un remanente compacto central, como se ilustra en la figura 1.1 (c)

Este remanente compacto central es la EN, uno de los dos objetos más densos del Universo, donde la materia se encuentra en condiciones extremas de presión y densidad. Medidas estándares de este tipo de objetos determinan una masa

¹Se discutirá esto con más detalle en el siguiente capítulo.

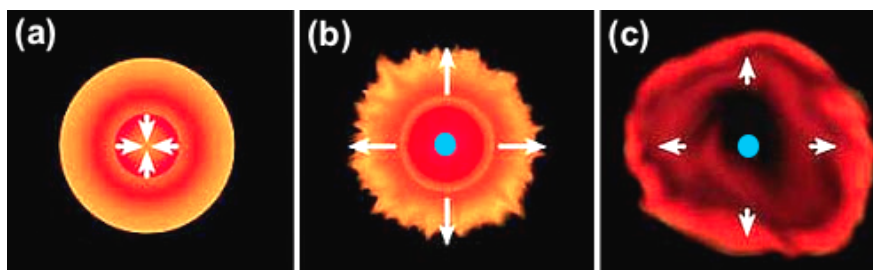


Figura 1.1: Nacimiento de una estrella de neutrones y remanente del evento supernova. a) Implosión del núcleo de la gigante roja. b) Explosión supernova. c) Remanente de la supernova con el remanente compacto central: la estrella de neutrones. Fuente: https://chandra.harvard.edu/xray_sources/supernovas.html.

de $1.4 M_{\odot}$ y radios entre 9 y 13 km según las mediciones del “Explorador de la Composición del Interior de las Estrellas de Neutrones” (*NICER*, por sus siglas en inglés), ubicado en la Estación Espacial Internacional, del púlsar PSR J0030+0451 [3, 4] y el evento GW170817, (ondas gravitacionales provenientes de la fusión de dos EN, observadas por LIGO-Virgo) [5]. Algunas EN, son radiopúlsares, ya que emiten ondas de radio. Si bien esta emisión es continua, al estar muy colimada nos llega a nosotros como si fuese pulsada, de manera periódica. Como por lo general las EN presentan alta velocidad de rotación, los períodos suelen ser del orden de decimas de segundo e inclusive algunos llegan al orden de los milisegundos. Además, emiten en rayos X y/o rayos Gamma.

Respecto al interior de estas estrellas, sus densidades centrales bariónicas de masa son varias veces más grandes que en los núcleos atómicos, $\rho_c > \rho_0 = 2,7 \times 10^{14} \text{ g/cm}^3$, y sus temperaturas, del orden de 10^7 K [6]. Debido a estas condiciones tan extremas, elegimos rotular de manera específica a la materia que compone el interior de este tipo de objetos como materia densa.

Para poder describirla, debemos recurrir a la Cromodinámica Cuántica (QCD, por sus siglas en inglés), dado que queremos estudiarla a nivel nuclear donde domina la interacción fuerte. No está de más aclarar que la QCD es una teoría de campos que describe el comportamiento de quarks y gluones. A altas densidades, esta teoría predice que la materia hadrónica, formada por bariones y mesones², pasa a un estado donde se descompone en sus constituyentes: los quarks y los gluones. Esto implica que debería ocurrir una transición de fase entre la materia hadrónica y la de quarks. Esta situación puede ilustrarse esquemáticamente en lo que se denomina *diagrama de fases de la QCD*, figura 1.2, y ocurre tanto en el régimen de bajo potencial químico y alta temperatura como en el de baja temperatura y alto potencial químico. La línea continua representa la transición de fase y los quarks y los gluones están representados por círculos de tres colores diferentes³ y zigzag grises, respectivamente. Para el primer régimen, existen simulaciones numéricas y experimentos como el gran colisionador de hadrones, LHC, que exploran la materia en tales condiciones⁴. Sin embargo, aún no existe un laboratorio terrestre con las capacidades para simular el estado de la materia del segundo régimen. Los laboratorios naturales para explorar este tipo de materia son los objetos compactos como las EN o las estrellas de quarks (EQ).

Las EQ son objetos compactos hipotéticos en los que la materia no se manten-

²Los hadrones son partículas subatómicas formadas por quarks. Los bariones están formados por tres quarks y los mesones por un quark y un antiquark.

³La carga de color de un quark puede tener tres valores diferentes: rojo, verde, o azul, por ejemplo. Así, un antiquark tendrá tres “anticolores” diferentes, que pueden ser representados por los colores cian, magenta y amarillo.

⁴<https://home.cern/science/accelerators/large-hadron-collider>

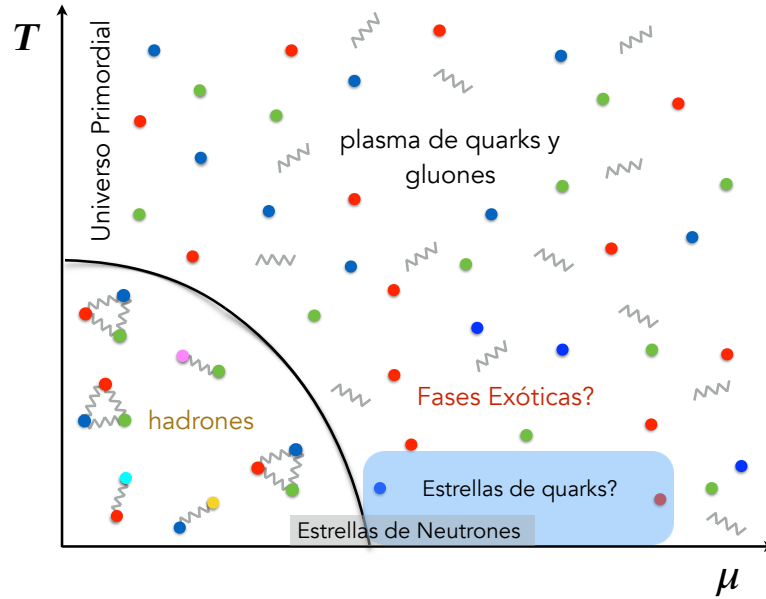


Figura 1.2: Esquema del diagrama de fases de la QCD, de temperatura, T , como función del potencial químico, μ . A altas temperaturas y bajas densidades (bajo μ), tenemos una fase llamada plasma de quarks y gluones. A bajas temperaturas y altas densidades (alto μ), estudios teóricos indican que podría ocurrir lo mismo, inclusive la formación de fases exóticas [1], [2]. La transición de fase entre la materia hadrónica y la materia de quarks está representada por una línea continua.

dría unida por la atracción gravitacional, sino por la interacción fuerte entre los quarks. Si bien aún no se han observado objetos asociados a estrellas compuestas completamente de quarks, observaciones de algunas estrellas originalmente consideradas de neutrones, parecerían presentar algunas de las características esperadas para las EQ [7]. Los astrofísicos comenzaron a considerar este tipo de objetos en la década de 1980, a partir de la hipótesis sobre la estabilidad de la materia de quarks extraña compuesta de quarks u , d y s . Bodmer en 1971 [8] y posteriormente Witten en 1984 [9], propusieron que la materia extraña es más estable que el ^{56}Fe , que es el más estable de todos los núcleos ordinarios que se puede reproducir en sistemas astrofísicos⁵. Por lo tanto, según su hipótesis, la materia extraña constituiría el estado fundamental de la materia. De confirmarse esta hipótesis, la existencia de las EQ sería un hecho. Este tipo de estrellas son de particular interés en este trabajo de tesis.

Tanto las EN como las EQ están incluídas en el 4 % de la materia bariónica que conforma al Universo. El 96 % restante corresponde a dos componentes no visibles: la materia oscura y la energía oscura. Su existencia es inferida, exclusivamente, por métodos gravitacionales. En particular, la materia oscura, MO, corresponde a un 27 % del Universo no visible y se caracteriza por comportarse de manera semejante

⁵El núcleo del ^{62}Ni es el más estable de todos los elementos, pero es difícil producirlo en sistemas astrofísicos como las EN.

a la materia convencional, bariónica, pero sin interactuar directamente con ésta ni tampoco con fotones, siendo efectivamente invisible a nuestros telescopios en cualquier frecuencia. Los primeros indicios de la existencia de la MO provienen de las observaciones realizadas en el estudio de las galaxias espirales del Cúmulo de Coma [10] en el que se estimó que la materia visible da cuenta únicamente de una pequeña fracción de toda la materia del Universo. Estudios posteriores indicaron evidencias de MO en los cúmulos de galaxias y en halos que las rodean, en supernovas distantes y en la radiación cósmica de fondo [11]. En este contexto, podría suceder que este tipo de materia estuviera presente en objetos compactos como las EN [12] y/o las EQ [13]. En estos objetos, la incorporación de MO podría darse tanto del proceso de formación estelar como en la posterior acumulación a través de la captura de partículas de dicha materia durante su evolución.

El estudio de la inclusión de MO y las posibles consecuencias observacionales en los objetos compactos podrían ayudar no solo a restringir los modelos teóricos de MO existentes sino también a establecer cotas para la ecuación de estado, aún desconocida, de la materia densa que conforma dichos objetos. La ecuación de estado, (EdE), describe la relación entre la presión y la densidad que posee un fluido $P(\epsilon)$, por lo que es fundamental para describir a este tipo de objetos. Sin embargo, ésta es aún objeto de estudio. Si bien, es sabido que tiene que cumplir algunas hipótesis básicas, existen muchas posibles EdE. Una manera de restringirlas, es a partir de los datos observacionales. Algunos de los más importantes, corresponden a la determinación, con gran precisión, de las masas de los púlsares PSR J1614-2230 [14], PSR J0348+0432 [15], y más recientemente PSR J2215+5135 [16] y PSR J0740+6620 [17]. A partir del descubrimiento de estos púlsares de $\sim 2 M_{\odot}$ fue necesario repensar la composición de los núcleos externo e interno de las EN, que es donde estos objetos concentran el 90 % de su masa, para que sean capaces de reproducir dichas observaciones. Hoy en día no solo disponemos de restricciones en la masa de estos objetos, sino que gracias a el evento GW170817, también tenemos restricciones en el radio que establecen que una estrella de $1.4 M_{\odot}$, debe tener un radio menor a 13.76 km [18],[19],[20],[21],[22]. El 25 de abril de 2019, se detectó una nueva fusión de dos EN, GW190425, en la que participaron EN más masivas y cuya contraparte electromagnética aún no ha sido detectada, a diferencia del evento GW170817 [23]. Otro modo de obtener restricciones para la masa y el radio, es a través de NICER, que pudo medir en el año 2019, también con gran precisión, los parámetros para el pulsar de milisegundos J0030+0451, cuyas restricciones observacionales fueron incorporadas en las figuras realizadas en esta tesis para comparar con nuestros resultados [4]. Estas observaciones (las realizadas por NICER, la astronomía multimensajera con ondas gravitacionales y la detección de púlsares con $\sim 2 M_{\odot}$)

hacen que los astrofísicos se encuentren cada vez más cerca de determinar la EdE de la materia densa, combinando las observaciones con los diferentes modelos teóricos utilizados para describirla.

La motivación del trabajo realizado en esta tesis es el estudio de estrellas compactas formadas por materia de quarks y materia oscura y su relación con las observaciones de los pulsares de $2 M_{\odot}$, las observaciones de NICER y las ondas gravitacionales de los eventos GW170817 y GW190425. Luego de construir la EdE y analizar la estabilidad de la materia de quarks, resolveremos las ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff, TOV. Esto nos permitirá obtener la relación masa-radio y determinar las regiones de estabilidad de estas estrellas. Además, aplicaremos el TOV para EdE acopladas, considerando los dos tipos de materia, de quarks y oscura, utilizando el formalismo denominado de *dos fluidos* (ver Ref. [13] y sus referencias). Asimismo, analizaremos el efecto observable en las frecuencias de oscilación de los modos no radiales, prestando particular atención al modo fundamental de oscilación de estos objetos. Para ello, usaremos la aproximación relativista de Cowling, en la cual se desprecian las perturbaciones de la métrica. La tesis se desarrolla a lo largo de capítulos de la siguiente manera: en el capítulo 2 planteamos las diferencias entre las EN y las EQ, mencionando a las estrellas híbridas, formadas por un núcleo externo de hadrones y un núcleo interno de materia de quarks. En el capítulo 3, explicamos la hipótesis de la materia extraña, discutimos y analizamos la estabilidad de la materia con dos y tres sabores de quarks e introducimos el modelo con el cual describiremos la materia en el interior de las EQ. Una breve reseña de la materia oscura y los modelos correspondientes utilizados en esta tesis se encuentran en el capítulo 4. Las ecuaciones TOV están dadas en el capítulo 5, así como también la modificación que debe hacerse a dichas ecuaciones para considerar dos fluidos en las diferentes estrellas de quarks con un pequeño núcleo de materia oscura. En el capítulo 6 presentamos los resultados de nuestro estudio de las diferentes familias de configuraciones estelares obtenidas. Finalmente, las conclusiones y perspectivas se encuentran en el capítulo 7.

Capítulo 2

Objetos compactos

Llamamos objetos compactos a las Enanas Blancas (EB), las Estrellas de Neutrones y a los Agujeros Negros (AN). Todos forman parte del estadio final de la evolución de una estrella de gran masa. Como sabemos, la masa inicial y la metalicidad de la estrella son los factores que determinan en mayor medida su evolución y además, su final. Por lo tanto, las estrellas gigantes rojas con masas menores a las $10 M_{\odot}$, terminan como Enanas Blancas. En cambio, las gigantes rojas con masas mayores a $10 M_{\odot}$, conocidas como supergigantes, pueden terminar como EN o agujeros negros. Si la estrella tiene una masa M tal que $10 M_{\odot} < M < 12 M_{\odot}$, luego va a terminar colapsando en una EN. Si su masa es mayor, hasta un límite de $\sim 25 M_{\odot}$, depende de la composición química y de la velocidad de rotación si el remanente compacto final es una EN o un AN, en el caso de que quede remanente compacto luego de la explosión supernova de la Gigante Roja [24]. Sin embargo, los límites entre la formación de uno u otro objeto son difusos, por lo que continúan siendo estudiados [25], [26].

Hay dos características fundamentales que diferencian a los objetos compactos de las estrellas convencionales:

- carecen de reacciones nucleares en sus núcleos,
- gran compacticidad. Esta cantidad se expresa como la relación entre la masa del objeto compacto y su radio, M/R .

Sin ninguna fuente de energía que luche contra el colapso gravitatorio, tanto las EB como las EN están comprimidas al máximo de lo que permite su masa. Se mantienen estables sujetas por fuerzas nucleares de origen cuántico. A densidades tan elevadas, la materia se encuentra en un estado degenerado. En casos extremos, como ocurre con los AN, el objeto es incapaz de sostenerse a sí mismo, dando origen a una singularidad espaciotemporal.

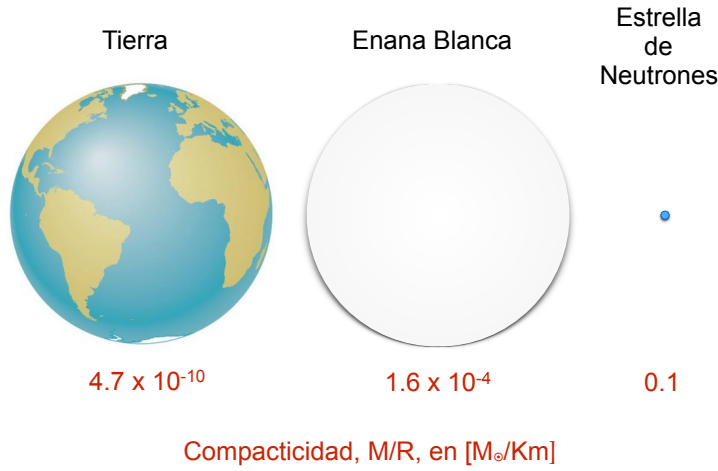


Figura 2.1: Comparación cualitativa del tamaño (no a escala) y la compacticidad, M/R , de objetos compactos como las EB y las EN respecto del planeta Tierra.

En la figura 2.1 mostramos cualitativamente una comparación entre el planeta Tierra ($3 \times 10^{-6} M_{\odot}$, $R_{\oplus} \sim 6378$ km), una EB de $\sim 1 M_{\odot}$ con $R_{EB} = R_{\oplus}$ [27] y una EN de $\sim 1.4 M_{\odot}$ y $R_{EN} = 12$ km.

Ya hemos mencionado en la Introducción algunas características de las EN como su masa promedio de $1.4 M_{\odot}$, radios aproximados de 12 km, temperatura central de 10^7 K, intensos campos magnéticos que van desde los 10^{12} G en la superficie de estos objetos, hasta 10^{15} G en el caso de las magnetares [28]. Sin embargo, la característica más importante es su densidad de masa bariónica central, ρ_c . Para una EN canónica la densidad media, $\bar{\rho}$ resulta, aproximadamente $\bar{\rho} = 4 \times 10^{14}$ g/cm³, por lo que resulta mayor que la densidad de saturación nuclear $\rho_0 = 2,7 \times 10^{14}$ g/cm³. Se espera, por lo tanto que en el centro de este tipo de estrellas, la densidad resulte varias veces mayor que la de saturación nuclear. Esto nos plantea el interrogante sobre el estado en el cuál se encuentra la materia en estas condiciones extremas. Para modelar a una EN, se usa un modelo de capas que consta de superficie, corteza y núcleo. Estos dos últimos se subdividen en partes interna y externa. La superficie y la corteza exterior están formadas por una estructura de red cristalina de núcleos atómicos, a su vez rodeados por una nube de electrones. Si nos dirigimos hacia radios menores en el interior de la estrella, la densidad creciente produce un incremento en la velocidad de los electrones hasta volverlos relativistas. Respecto a los núcleos de la red cristalina, estos se vuelven más pesados y aumenta la proporción de neutrones libres, generándose un fluido de neutrones. Una vez pasada la corteza, llegamos al núcleo

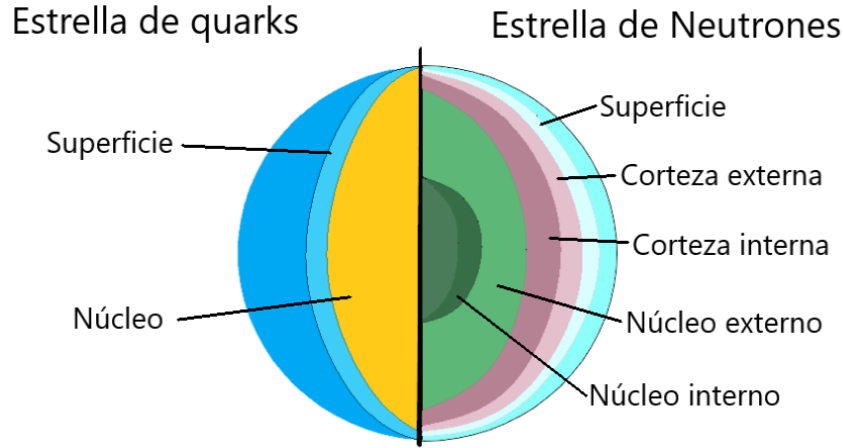


Figura 2.2: Esquema de las estructuras de estrellas de quarks y estrellas de neutrones.

externo de la estrella, donde los núcleos se disuelven y quedan nucleones, neutrones y protones, y electrones libres. También pueden aparecer hadrones más pesados, es decir, bariones exóticos como los hiperones. Además, podría existir materia de quarks en el núcleo interno de estas estrellas debido a las condiciones extremas de presión y densidad antes mencionadas. Esta transición de fase de hadrones a materia de quarks entre los núcleos interno y externo de la estrella, daría origen a una estrella híbrida (ver por ejemplo [1], [2] y referencias y trabajos ahí mencionados). Otra posibilidad es que exista un tipo alternativo de objetos compactos a las EN, las EQ, que son motivo de estudio de esta tesis.

Si consideramos la hipótesis de la materia extraña, descrita por Bodmer y Witten [8, 9], podemos pensar en la existencia de EQ. La hipótesis de la estabilidad de la materia extraña nos dice que este tipo de materia, formada por quarks u , d y s , sería más estable que la materia nuclear ordinaria. Esto se debe a que su energía por barión es menor que la del núcleo del hierro ^{56}Fe . Por lo tanto, sería posible la existencia y estabilidad de estrellas conformadas por ella. Hoy en día no tenemos las bases científicas para rechazar o confirmar dicha hipótesis, por lo que es necesario el estudio de aquellas características que puedan detectarse observacionalmente que las diferencien de las EN. En la tabla 2.1 se presentan las principales diferencias entre las EN y las EQ.

Para que una EN se transforme en una EQ pura, es necesario algún mecanismo mediante el cual su densidad aumente cada vez más. Por ejemplo, si una EN forma parte de un sistema binario, podría suceder que por acreción de materia se transformara en una EQ. Cuando la separación entre las estrellas no es mucho mayor que el tamaño de las mismas, las denominamos estrellas binarias cercanas. Definimos el Lóbulo de Roché como la superficie equipotencial que delimita las regiones internas donde domina la gravedad de cada una de las estrellas, respecto

de la región exterior donde domina la aceleración centrífuga, ya que estamos considerando un sistema corrotante. Si una de las dos estrellas llena su lóbulo, luego la masa que se encuentra en el punto de Lagrange, aquel que une ambos lóbulos, se encuentra en equilibrio por lo que es libre de poder trasladarse hacia el otro lóbulo. Es decir, se produce la transferencia de masa. De esta forma, la EN podría consumir la masa de la estrella compañera y transformarse en una EQ. Otra posibilidad para la formación de este tipo de estrellas es a partir del colapso de una supernova. En el proceso de formación de la EN, hay conservación del momento angular. La proto-estrella de neutrones tiene una fracción pequeña de su radio original, que era el de la supernova, por lo que su momento de inercia se reduce bruscamente. Como resultado, la EN se forma con una altísima velocidad de rotación que disminuye gradualmente. Los períodos de rotación se hacen cada vez más largos debido a la pérdida de energía rotacional por la emisión de vientos de electrones y positrones, y de la radiación dipolar electromagnética. Cuando la alta frecuencia de rotación o el campo electromagnético alcanzan un valor crítico, la EN se transforma en un pulsar que emite pulsos que pueden llegar a tener períodos del orden de los milisegundos. Debido a la enorme fuerza centrífuga en estos objetos, la estructura interna se modifica, pudiendo alcanzar una densidad crítica por encima de la que corresponde a la transición de fase hadrón-quark. En estas condiciones, la fase de materia nuclear relativamente incompresible se convertiría en la fase de materia extraña, más compresible, cuyo resultado final sería la aparición de una EQ [29].

Dado que las estrellas en su estado de energía más baja tienen carga eléctrica neutra, cualquier carga neta de quarks positiva debe ser equilibrada por electrones, que formarían una superficie de varios cientos de fermis¹ en la EQ. Sin embargo, si la materia se encuentra en un estado superconductor de color llamado Color-Flavor-Locked (CFL), en la que los quarks u , d y s forman pares de Cooper de forma similar a como ocurre en la superconductividad ordinaria, la EQ ya tendría equilibrio de carga eléctrica sin la necesidad de electrones, por lo que consideramos a la misma como “desnuda” [30].

La identificación de una EQ requiere señales observacionales consistentes. Con esto nos referimos a propiedades físicas de la estrella tales como su masa máxima y radio. Estas propiedades dependen de una única EdE para la materia densa de quarks que aún no ha sido completamente establecida. Un rasgo característico de este tipo de estrellas es que la materia no se mantendría unida por la atracción gravitacional, como ocurre en las EN, sino que sería consecuencia directa de la interacción fuerte entre los quarks. Esto implica una diferencia sustancial entre las EdE para las dos clases de estrellas.

¹Longitud de escala de las interacciones fuertes. $1\text{fm} = 1 \times 10^{-15} \text{ m}$

Estrella de Quarks	Estrella de Neutrones
Compuesta por quarks u,d y s desconfiados y electrones	Nucleones, hiperones, condensados de bosones, quarks desconfiados, electrones y muones
Los quarks podrían estar en una fase superconductor de color	Superfluido de neutrones, superconductividad de protones
$E/A \lesssim 930$ MeV a $T=0$ y $P=0$	$E/A > 930$ MeV a $T=0$ y $P=0$
Autoligadas ($M \propto R^3$)	Ligadas a través de la gravedad
Masa máxima $\sim 2 M_{\odot}$	Masa máxima $\sim 2 M_{\odot}$
Sin masa mínima	$\sim 0,1 M_{\odot}$
Radio $R \lesssim 10 - 12$ km	$R \gtrsim 10 - 12$ km
Campos eléctricos superficiales $\sim 10^{18}$ to $\sim 10^{19}$ V/cm	Ausentes
Pueden estar desnudas (EQ puras) o envueltas por una fina capa nuclear (masa $10^{-5} M_{\odot}$)	Siempre poseen una corteza exterior

Cuadro 2.1: Comparación de las propiedades teóricas de EQ y EN [30].

Como la EQ es autoligada, es decir, sus componentes están ligados a través de la interacción fuerte y no a través de la gravitación, luego no se cumple el Límite de Eddington para su luminosidad, es decir que puede superar los 10^{38} erg/s que establece para una estrella de $1 M_{\odot}$. Si consideramos una temperatura superficial de 10^{11} K en una EQ desnuda, podemos calcular su luminosidad en 3×10^{51} erg/s [30]. Ésta es una buena característica que podría observarse para poder confirmar la existencia de este tipo de estrellas. Para el caso de las EQ que tienen una corteza exterior conformada de materia nuclear, ésta se encuentra ligada gravitacionalmete por lo que su luminosidad no difiere mucho de una EN ordinaria.

Otra característica para poder diferenciar las estrellas de quarks de las EN, es la relación entre su masa M y el radio R . Mientras que para una EQ, $M \sim R^3$, para una EN, $M \sim R^{-3}$. De acuerdo con esta relación, las EQ tendrían, por lo general, radios menores que los que usualmente se le atribuyen a las ENs.

En esta sección, presentamos algunas características de las EQ que las diferenciarían de las ENs. Futuras evidencias experimentales y observacionales nos permitirán saber si las EQ realmente existen en la naturaleza.

Capítulo 3

Materia de quarks en objetos compactos

En el capítulo anterior hemos mencionado la hipótesis de la materia extraña, por lo que en este capítulo queremos describirla en profundidad. Para eso, primero se debe mencionar el Modelo de Bolsa del *Masachusetts Institute of Technology* [31], MIT. Éste es una manera fenomenológica de incorporar el confinamiento y la libertad asintótica en la descripción de la materia de quarks, dos de las características principales de la QCD.

Como mencionamos en la Introducción, los quarks tienen carga de color. Sabemos que cuando dos partículas cargadas eléctricamente se separan entre sí, la fuerza entre ellas disminuye gradualmente. En cambio, si intentáramos separar a dos quarks entre sí, la fuerza entre ellos aumentaría con la distancia debido a las cargas de color. A medida que alejáramos los quarks unos de otros, la fuerza entre ellos se volvería cada vez más fuerte y se requeriría una cantidad infinita de energía para separarlos. Así, energéticamente es más favorable producir un par quark-antiquark (mesón) o un barión en lugar de producir un quark aislado. Esta propiedad de la QCD se denomina *confinamiento*, los quarks permanecen confinados dentro de un hadrón. Esta situación ocurre para energías por debajo de los 1000 MeV. Para energías mucho mayores a esta cantidad, los quarks comienzan a interactuar débilmente y se comportan como partículas libres. A esta propiedad se la llama *libertad asintótica*. Por tanto, en la QCD, a bajas energías hay confinamiento y a altas energías hay libertad asintótica.

3.1. Ecuación de estado para materia de quarks

El modelo de bolsa del MIT es un modelo simple que impone que los quarks se muevan libremente dentro de una región finita del espacio, con una energía

CAPÍTULO 3. MATERIA DE QUARKS EN OBJETOS COMPACTOS

constante por unidad de volumen B , llamada constante de bolsa. Esta región finita, que visualmente se puede considerar como una bolsa, actuará como una presión externa contrarrestándose a la energía cinética de los quarks confinados en su interior.

Podemos modelar la materia de quarks dentro de la bolsa mediante un gas ideal de Fermi-Dirac. El potencial gran canónico para un fermión puede escribirse como [32]

$$\Omega = -PV = \frac{gT}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d^3p \left(\ln[1 + e^{-\frac{\epsilon_p - \mu}{T}}] + \ln[1 + e^{-\frac{\epsilon_p + \mu}{T}}] \right), \quad (3.1.1)$$

donde hemos considerado unidades naturales, es decir, $\hbar = c = k = 1$, siendo k la constante de Boltzmann, y $\epsilon_p = \sqrt{p^2 + m^2}$. El segundo término en la ec. 3.1.1 corresponde a la presencia de los antiquarks. Este término en el límite de $T \rightarrow 0$ no contribuye a la EdE, por lo tanto y por simplicidad, los cálculos siguientes sólo incluirán el primer término de la ecuación, correspondiente a la contribución de los quarks. Aplicando partes en la ecuación (3.1.1),

$$P = \frac{g}{6\pi^2} \int_0^\infty dp \frac{p^4}{\epsilon_p} \frac{1}{1 + e^{\frac{\epsilon_p - \mu}{T}}}. \quad (3.1.2)$$

Escribiendo la integral en términos de ϵ_p , obtenemos

$$P = \frac{g}{6\pi^2} \int_m^{\sqrt{\mu^2 - m^2}} d\epsilon_p (\epsilon_p^2 - m^2)^{3/2} \frac{1}{1 + e^{\frac{\epsilon_p - \mu}{T}}}. \quad (3.1.3)$$

En el contexto de los objetos compactos que estamos trabajando, consideramos bajas temperaturas, al punto de aproximarlas a cero; y altos potenciales químicos. Haciendo $T \rightarrow 0$, luego la energía de Fermi es igual al potencial químico $\epsilon_F = \mu$,

$$f(T \rightarrow 0, \epsilon_p) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{e^{\frac{\epsilon_p - \mu}{T}} + 1} = \Theta(\epsilon_p - \mu),$$

donde Θ es la función de Heaviside. Integrando y haciendo un poco de álgebra, se llega a la siguiente expresión para la presión

$$P = \frac{m^4}{24\pi^2} \left[\sqrt{z^2 + 1} (2z^3 - 3z) + 3 \ln(\sqrt{z^2 + 1} + z) \right], \quad (3.1.4)$$

donde hemos reemplazado $g = 2 \times 3$, considerando para el factor de degeneración los factores de spin y color para los quarks, y $z = \frac{\sqrt{\mu^2 - m^2}}{m}$ el momento adimensional de Fermi. La expresión de la densidad de número de partículas se obtiene a partir de la ecuación (3.1.4) considerando $\frac{\partial P}{\partial \mu} = n$. Sin embargo, también es

posible calcularla mediante la integral

$$n = \frac{g}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d^3p \frac{1}{e^{\frac{\epsilon_p - \mu}{T}} + 1}.$$

Integrando esta expresión obtenemos,

$$n = \frac{(\sqrt{\mu^2 - m^2})^3}{3\pi^2}.$$

Por otro lado, la integral para el cálculo de la densidad de energía dada por

$$\epsilon = \frac{g}{2\pi^3} \int_0^\infty dp \epsilon_p \frac{1}{1 + e^{\frac{\epsilon_p - \mu}{T}}},$$

que también puede resolverse tomando el límite $T \rightarrow 0$, para obtener

$$\epsilon = -3 \left\{ \frac{m^4}{24\pi^2} \left[\frac{\sqrt{p^2 + m^2}}{m} \left(\frac{2p^2 - 3m^2}{m^2} \right) \frac{p}{m} + 3 \ln \left(\frac{\sqrt{p^2 + m^2}}{m} + \frac{p}{m} \right) \right] \right\}.$$

Esta expresión, coincide con la relación termodinámica a temperatura cero dada por

$$\epsilon = -P_T + \sum_{i=u,d,s} \mu_i n_i. \quad (3.1.5)$$

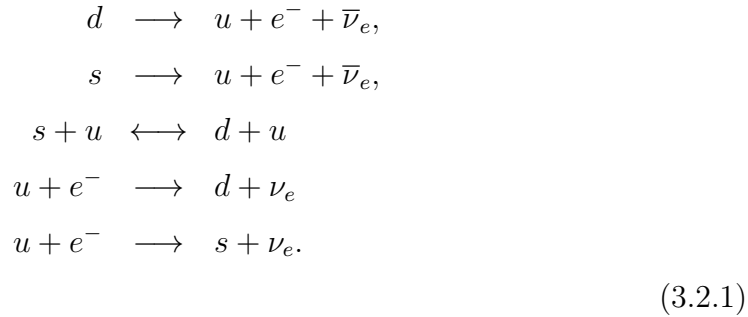
En el contexto del modelo de bolsa del MIT, la suma de las presiones de los quarks se verá afectada por la constante de la bolsa B de la siguiente manera,

$$P_T = \sum_{i=u,d,s} P_i - B, \quad (3.1.6)$$

donde P_i es la expresión para la presión de cada quark dada por la ecuación (3.1.4) e insertando la ecuación (3.1.6) en la expresión (3.1.5), obtenemos la EdE para la materia de quarks.

3.2. Condiciones de equilibrio químico y neutralidad de carga eléctrica

Consideramos que la materia que conforma las EQ está compuesta por quarks u y d sin masa, ya que $m_{u,d} \lesssim 5$ MeV, quark s con masa, ya que la masa del quark extraño es unas diez veces más grande que la de los quarks up y down, y electrones. El equilibrio químico entre los sabores de los quarks y los leptones, se mantiene a través de las siguientes reacciones débiles a $T=0$ [32]:



Estas reacciones conducen a una relación entre los potenciales químicos dada por

$$\begin{aligned}
 \mu_d &= \mu_u + \mu_e + \mu_{\bar{\nu}_e}, \\
 \mu_s &= \mu_u + \mu_e + \mu_{\bar{\nu}_e}, \\
 \mu_s &= \mu_d.
 \end{aligned}
 \tag{3.2.2}$$

A medida que el remanente compacto de la Supernova se enfría, el camino libre medio de los neutrinos, ν_e , se hace lo suficientemente grande como para que todos los neutrinos creados puedan escapar libremente de la EQ. De manera que para la EQ fría podemos considerar $\mu_{\nu_e} = 0$. Además, definimos un potencial químico $\mu = (\mu_u + \mu_d + \mu_s)/3$ para que, luego de operar matemáticamente sobre las expresiones de la ecuación (3.2.2), obtengamos las condiciones de:

- Equilibrio químico

$$\begin{aligned}
 \mu_u &= \mu - \frac{2}{3}\mu_e, \\
 \mu_d &= \mu + \frac{1}{3}\mu_e, \\
 \mu_s &= \mu_d,
 \end{aligned}
 \tag{3.2.3}$$

con dos potenciales químicos independientes, μ y μ_e . También vamos a suponer que las EQ que vamos a estudiar están aisladas, y por lo tanto otra de las condiciones es la:

- Conservación de la densidad de número bariónico

$$n_B = \sum_{i=u,d,s} q_{b_i} n_i,$$

donde $q_{b_i} = 1/3$ para cada uno de los quarks y n_i es la densidad de número de partículas.

También tenemos en cuenta la condición de:

- Neutralidad de carga eléctrica

$$\frac{2}{3} n_u - \frac{1}{3} n_d - \frac{1}{3} n_s - n_e = 0.$$

Los electrones son esenciales para que se cumpla la condición de neutralidad de carga eléctrica de la materia de quarks que compone las estrellas que vamos a estudiar. Sin embargo, si graficamos los distintos tipos de densidades de número de partículas como función de la densidad de número bariónico total, obtenemos la figura 3.1 donde podemos observar como la densidad de número de electrones decae rápidamente a cero a medida que la densidad de número bariónico aumenta. Por este motivo y a fin de simplificar los cálculos para la demostración de la hipótesis de la materia extraña, consideraremos que $n_e \sim 0$ en la siguiente subsección, mientras que para las EQ los electrones estarán presentes pero considerando la masa de los electrones cero y, por lo tanto, las expresiones para la presión y la densidad de estos leptones son:

$$P_e = \frac{\mu_e^4}{12\pi^2}, \quad n_e = \frac{\mu_e^3}{3\pi^2}, \quad (3.2.4)$$

que van a modificar la ecuación (3.1.5) de la siguiente manera

$$\epsilon = -P_T - P_e + \sum_{i=u,d,s} \mu_i n_i + \mu_e n_e, \quad (3.2.5)$$

y que es la expresión para la presión que debemos considerar para construir las EQ que vamos a estudiar en esta tesis.

3.3. Hipótesis de la materia extraña

A partir del modelo de bolsa del MIT vamos a mostrar que la materia extraña es más estable que la materia de quarks con dos sabores u y d a $T=0$ y $P=0$. Partiremos de la expresión de la presión total para una EQ dada por la ecuación (3.1.6), pero considerando quarks sin masa. En este caso, la neutralidad de carga eléctrica se satisface automáticamente, de manera que $\mu_e = 0$. La ecuación (3.1.6) estaba dada por

$$P_T = \sum_{i=u,d,s} P_i - B,$$

CAPÍTULO 3. MATERIA DE QUARKS EN OBJETOS COMPACTOS

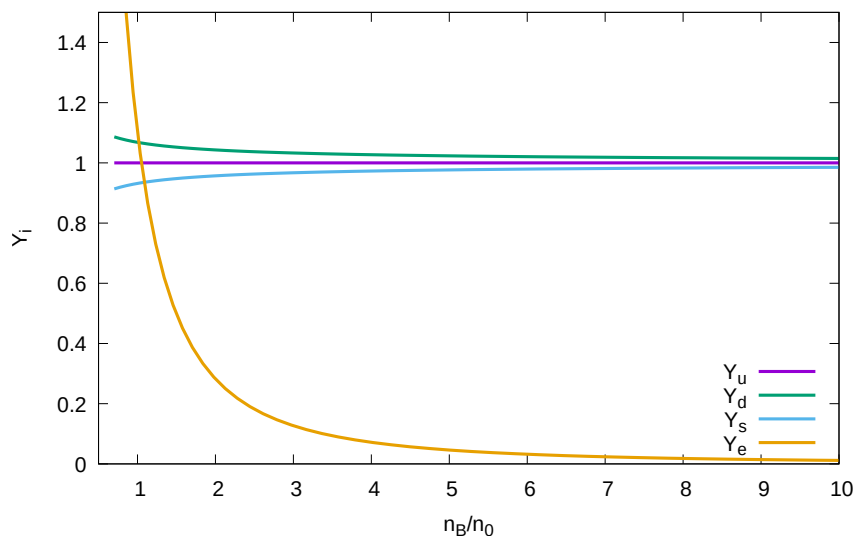


Figura 3.1: Población de partículas, $Y_i = n_i/n_B$, en la materia de quarks como función de la densidad de número bariónico, n_B , en unidades de la densidad de número de saturación nuclear n_B/n_0 ($n_0 = 0,16 \text{ fm}^{-3}$).

donde ahora, la presión del gas de quarks viene dada por

$$P_i = \frac{g}{6\pi^2} \int_0^{p_{F_i}} p^3 dp = \frac{g}{24\pi^2} p_{F_i}^4, \quad (3.3.1)$$

siendo p_{F_i} los momentos de Fermi de cada quark i . La densidad de energía y la densidad de de número de partículas para cada quark están dadas por

$$\epsilon_i = \frac{g}{2\pi^2} \int_0^{p_{F_i}} p^3 dp = \frac{g}{8\pi^2} p_{F_i}^4, \quad (3.3.2)$$

$$n_i = \frac{g}{2\pi^2} \int_0^{p_{F_i}} p^2 dp = \frac{g}{6\pi^2} p_{F_i}^3. \quad (3.3.3)$$

Utilizando las ecuaciones (3.3.1) y (3.3.2) obtenemos la relación, $\epsilon_i = 3P_i$ que podemos reemplazar en la energía total del sistema dada por

$$\epsilon = \sum_{i=u,d,s} \epsilon_i + B, \quad (3.3.4)$$

así como también en la ecuación para P_T . Esto nos lleva a la relación

$$P_T = \frac{1}{3}(\epsilon - 4B). \quad (3.3.5)$$

Suponiendo que $P_T = 0$, obtenemos la condición de estabilidad de la EQ dada por

$$\epsilon = 4B, \quad (3.3.6)$$

es decir, las EQ son autoligadas: la interacción de color es la responsable de la cohesión de la materia de la estrella.

Vamos, además, a estimar el valor de la constante de bolsa B . Como supusimos a los quarks sin masa tenemos que los potenciales químicos son iguales, $\mu_u = \mu_d = \mu_s \equiv \mu$, y entonces

$$\sum_i P_i = \frac{3}{4\pi^2} \mu^4. \quad (3.3.7)$$

Si la presión total es cero, la ecuación para P_T implica la siguiente relación entre el potencial químico y la constante de bolsa:

$$\mu = \left(\frac{4\pi^2 B}{3} \right)^{1/4}. \quad (3.3.8)$$

La ecuación para la densidad bariónica está dada por

$$n_B = \frac{\sum_{i=u,d,s} n_i}{3}. \quad (3.3.9)$$

Para estimar B , tomamos la densidad bariónica de masa estimada en el interior de una EN, $\rho_B \sim 5,4 \times 10^{14}$ g/cm³ [33]. Mediante el factor de conversión adecuado [6], obtenemos $\rho_B \sim 303$ MeV/fm³. Podemos relacionar la densidad bariónica de masa con la densidad de número bariónico considerando que $n_B = \rho_B/m_U$, donde $m_U \sim 931,494$ MeV es la unidad de masa atómica. Así, obtenemos $n_B = \mu^3/\pi^2 \sim 0,32$ fm⁻³, de manera que $\mu \sim 290$ MeV. Usando la ecuación (3.3.8) se obtiene, $B^{1/4} \simeq 145$ MeV.

Impongamos ahora la condiciones de neutralidad de carga eléctrica para un gas de quarks formado solamente por los sabores u y d . Para simplificar los cálculos, $n_e \sim 0$ y por lo tanto podemos asumir que $\mu_e \sim 0$. Entonces, la relación entre las densidades de número de quarks u y d nos queda

$$2n_u = n_d.$$

Definimos el potencial químico $\mu_2 = p_{F_2}$ (recordemos que estamos considerando quarks sin masa y por lo tanto el momento de Fermi coincide con el potencial químico), que en términos de los potenciales químicos de los quarks u y d se escribe como $\mu_2 = \mu_u = 2^{-1/3} \mu_d$. Con esta definición, la densidad de número bariónico que resulta de la ecuación (3.3.9) será

$$n_B = \frac{n_u + n_d}{3} = \frac{\mu_2^3}{\pi^2}.$$

CAPÍTULO 3. MATERIA DE QUARKS EN OBJETOS COMPACTOS

La presión (3.3.7) queda entonces

$$P_2 = P_u + P_d = \frac{(1 + 2^{4/3})}{4\pi^2} \mu_2^4.$$

Sustituyendo en la ecuación de P_T e imponiendo la condición $P_T = 0$, la ecuación (3.3.8) toma la forma

$$\mu_2 = \left(\frac{4\pi^2}{1 + 2^{4/3}} \right)^{1/4} B^{1/4}.$$

Con ella se puede escribir n_B en función de B y teniendo en cuenta que $\epsilon_2 = 4B$, la energía por barión resulta

$$\frac{E}{A} = \frac{\epsilon_2}{n_B} = (2\pi)^{1/2} (1 + 2^{4/3})^{3/4} B^{1/4}.$$

Evaluando para $B^{1/4} = 145$ MeV, obtenemos

$$\left. \frac{E}{A} \right|_{ud} \simeq 934 \text{ MeV}.$$

Para el caso de un gas de quarks de tres sabores u , d y s , planteamos nuevamente la condición de neutralidad de carga,

$$2n_u = n_d + n_s.$$

Definimos, en este caso, $\mu_3 = p_{F_3}$ con $\mu_3 = \mu_u = \mu_d = \mu_s$. La presión para el gas de los tres sabores (3.3.7) se expresa entonces

$$P_3 = P_u + P_d + P_s = \frac{3\mu_3^4}{4\pi^2},$$

y la relación (3.3.8) queda ahora,

$$\mu_3 = \left(\frac{4\pi^2}{3} \right)^{1/4} B^{1/4}.$$

Usando la condición (3.3.6), $\epsilon_3 = 4B$, y escribiendo n_B como función de B se obtiene que la energía por barión evaluada para el valor $B^{1/4} = 145$ MeV es

$$\left. \frac{E}{A} \right|_{uds} = \frac{\epsilon_3}{n_B} = (2\pi)^{1/2} 3^{3/4} B^{1/4} \simeq 829 \text{ MeV}.$$

Recordemos que la energía por barión para un gas de neutrones está dada por la masa del neutrón, $m_n = 939,6$ MeV, mientras que para el núcleo del ^{56}Fe es

$E/A = 930$ MeV. Podemos entonces concluir que

$$\left. \frac{E}{A} \right|_{uds} < \left. \frac{E}{A} \right|_{^{56}\text{Fe}} < \left. \frac{E}{A} \right|_{ud} < m_n,$$

es decir, la materia extraña resulta ser más estable que la materia de quarks con dos sabores u y d . Probamos la conjetura de Bodmer-Witten usando el modelo de bolsa del MIT: la materia extraña es más estable que la materia nuclear y, en particular, que el núcleo más estable que existe en la naturaleza, el hierro (^{56}Fe). Podemos entender, de manera intuitiva, que este resultado se debe al principio de exclusión de Pauli. En el caso de la materia extraña, el número bariónico está distribuido en tres mares de energía de Fermi en lugar de dos, como es el caso de la materia con quarks u y d . Así, en un régimen de altas densidades, el estado con quarks u , d y s tendrá una energía menor que el estado con sabores u y d .

3.4. Ventana de estabilidad

A partir del modelo de bolsa del MIT, ya hemos visto que la materia de quarks extraña es más estable que la materia de quarks con dos sabores u y d . Sin embargo, esto no se cumple para todo valor de B . Por lo tanto vamos a ver en que rango es válida la hipótesis de la materia extraña, es decir, vamos a estudiar la ventana de estabilidad de B .

Retomamos los valores obtenidos en la sección anterior de energía por barión, para materia de quarks de dos y de tres sabores:

$$\left. \frac{E}{A} \right|_{ud} = 934 \text{ MeV } B_{145}^{1/4}, \quad (3.4.1)$$

$$\left. \frac{E}{A} \right|_{uds} = 829 \text{ MeV } B_{145}^{1/4}. \quad (3.4.2)$$

Por otro lado, sabemos que la energía por barión del núcleo del hierro ^{56}Fe es:

$$\left. \frac{E}{A} \right|_{^{56}\text{Fe}} = 930 \text{ MeV}. \quad (3.4.3)$$

Luego, podemos escribir la siguiente inecuación:

$$\left. \frac{E}{A} \right|_{^{56}\text{Fe}} < \left. \frac{E}{A} \right|_{ud}. \quad (3.4.4)$$

Reemplazamos el valor de la energía por barión del hierro ^{56}Fe , ec. (3.4.3) y de la energía por barión de la materia de quarks de dos sabores (3.4.1) en la ec. (3.4.4) y despejamos la constante de bolsa B

CAPÍTULO 3. MATERIA DE QUARKS EN OBJETOS COMPACTOS

$$930 \text{ MeV} < 934 \text{ MeV} B_{145}^{1/4},$$

$$145 \text{ MeV} \frac{930 \text{ MeV}}{934 \text{ MeV}} < B^{1/4},$$

$$144,4 \text{ MeV} < B^{1/4}.$$

De esta manera, encontramos un límite inferior para B . Luego, planteamos otra inecuación, pero esta vez teniendo en cuenta la energía por barión de la materia de tres sabores de quarks:

$$\left. \frac{E}{A} \right|_{uds} < \left. \frac{E}{A} \right|_{56\text{Fe}}. \quad (3.4.5)$$

Volvemos a reemplazar las ec. (3.4.2) y (3.4.3) en la ec. (3.4.5) y despejamos B :

$$829 \text{ MeV} \frac{B^{1/4}}{145 \text{ MeV}} < 930 \text{ MeV}$$

$$B^{1/4} < \frac{930 \text{ MeV}}{829 \text{ MeV}} 145 \text{ MeV}$$

$$B^{1/4} < 162,8 \text{ MeV}$$

De esta manera, encontramos un límite superior para B . Por lo tanto, la hipótesis de la materia extraña es válida en la ventana de estabilidad $145 \text{ MeV} < B^{1/4} < 162 \text{ MeV}$.

El hecho de que en nuestra vida cotidiana vivamos rodeados de materia nuclear no refuta la mencionada hipótesis. Para que la materia nuclear metaestable decaiga en materia de quarks desconfinaada, es necesario la simultánea conversión de quarks u y d en s , a través de la interacción débil; lo cual es imposible. Es decir, existe una barrera de energía que impide que suceda espontáneamente este decaimiento. Sin embargo, la conversión puede darse en otros contextos, como la colisión de iones pesados o en el interior de EN, donde como ya vimos, las condiciones a las que está sometida la materia son extremas.

3.5. Incorporación de interacciones en la materia densa

La primera vez que se hicieron cálculos numéricos para modelar EN no se consideraron interacciones entre los neutrones, protones y electrones. Este trabajo fue realizado en el año 1939 por Oppenheimer y Volkoff [34], quienes plantearon como hipótesis un gas de Fermi no interactuante, al cual le aplicaron las ecuaciones de equilibrio hidrostático. Sin embargo, el resultado arrojó una masa máxima de $0.7 M_{\odot}$. Más adelante, Cameron [35] propuso la presencia de la interacción nuclear. Con esta nueva hipótesis logró extender el límite de las EN a $2 M_{\odot}$. Él, entre otros varios autores, propuso que en el núcleo de las EN debían de existir hiperones: estados de tres quarks donde al menos uno de ellos es un quark extraño. Esta producción de hiperones debe ocurrir a altas densidades, razón por la cuál ocurriría en el núcleo estelar. La aparición de este tipo de materia consiste en la conversión de neutrones y protones en hiperones, lo cual abre nuevos mares de Fermi para más grados de libertad, haciendo que disminuya la energía total del sistema. Sin embargo, dicho fenómeno hace que la materia se vuelva más compresible, cosa que dificulta que con dicha EdE puedan alcanzarse las $2 M_{\odot}$ requeridas por las observaciones astronómicas de púlsares masivos.

Una posible solución a este problema podría provenir de la hipótesis de la materia extraña, dentro de la ventana de estabilidad $145 \text{ MeV} < B^{1/4} < 162 \text{ MeV}$, suponiendo que las EN son EQ.

Más adelante mostraremos como hemos estudiado las ventanas de estabilidad de la materia extraña sin y con interacción entre las partículas. Una vez halladas estas regiones de estabilidad, calculamos sus EdE y sus respectivas relaciones masa-radio luego de resolver las correspondientes ecuaciones de equilibrio relativista, TOV. Hemos encontrado que es necesaria la presencia de la interacción fuerte para construir estrellas que alcancen las $2 M_{\odot}$, si consideramos que el quark extraño s , tiene una masa distinta de cero.

3.6. Materia de quarks estable con correcciones debido a la constante de acoplamiento fuerte

En un principio empezamos el tratamiento de la materia de quarks sin incorporar la constante de acoplamiento fuerte, por lo que para la presión utilizamos la ec. (3.1.6), pero con P_i dada por la ec. (3.1.4) y para la densidad de energía la ec. (3.1.5). Con estas ecuaciones, junto con las condiciones de equilibrio químico y neutralidad de carga eléctrica, obtuvimos varias EdE, es decir, luego de resolver

CAPÍTULO 3. MATERIA DE QUARKS EN OBJETOS COMPACTOS

el correspondiente sistema de ecuaciones, que programamos a través del lenguaje FORTRAN obtuvimos una lista de presiones con sus correspondientes densidades de energía, que usamos como entrada para resolver las ecuaciones TOV y obtuvimos los radios y masas de familias de EQ. Observamos que sin considerar la interacción fuerte y con una masa del quarks s , $m_s = 93$ MeV, no lográbamos satisfacer la restricción de $2 M_\odot$ impuesta por los púlsares masivos. Luego, decidimos agregar en la EdE, la corrección debida a la constante de acoplamiento fuerte, que denominamos α_c . En este escenario, las presiones para los quarks u , d y s se escriben como [36]

$$\begin{aligned} P_u &= \frac{\mu_u^4}{4\pi^2} \left[1 - \frac{2\alpha}{\pi} \right], \\ P_d &= \frac{\mu_d^4}{4\pi^2} \left[1 - \frac{2\alpha}{\pi} \right], \\ P_s &= \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \mu_s (\mu_s^2 - m^2)^{1/2} (\mu_s^2 - \frac{5}{2}m^2) + \frac{3}{2}m^4 \ln \frac{\mu_s + (\mu_s^2 - m^2)^{1/2}}{m} \right. \\ &\quad - \frac{2\alpha}{\pi} \left[3 \left[\mu_s (\mu_s^2 - m^2)^{1/2} - m^2 \ln \frac{\mu_s + (\mu_s^2 - m^2)^{1/2}}{\mu_s} \right]^2 - 2 (\mu_s^2 - m^2)^2 + 3m^4 \ln^2 \frac{m}{\mu_s} \right. \\ &\quad \left. \left. + 6 \ln \frac{\rho}{\mu_s} \left[\mu_s m^2 (\mu_s^2 - m^2)^{1/2} - m^4 \ln \frac{\mu_s + (\mu_s^2 - m^2)^{1/2}}{m} \right] \right] \right\} \end{aligned}$$

donde $\rho = m_n/3 = 313$ MeV es un parámetro de normalización, que corresponde a la masa del neutrón dividida por tres. Para la densidad de energía mantuvimos la misma expresión que en la ec. (3.1.5). Una vez calculados los nuevos valores de P_T de la ec. (3.1.6) y a densidad de energía ϵ , construimos las nuevas curvas de masa-radio recurriendo a las ecuaciones TOV. Previamente, debimos asignarles valores a la constante de acoplamiento α , variando este parámetro entre 0 y 1, y a la constante definida como $\xi = E/A$ correspondiente a la energía por barión, cuyo rango variamos entre $859 \text{ MeV} < \xi < 930 \text{ MeV}$, donde el límite superior está dado por el valor de la energía por barión del hierro ^{56}Fe . Al incorporar la corrección debida a α en la EdE de la materia de quarks, obtuvimos configuraciones de estrellas de masa máxima mayores que $2 M_\odot$, como mostraremos en el capítulo 6. También analizamos los resultados obtenidos al fijar el parámetro α y variar ξ . Para obtener las curvas de las figuras 3.2, 3.3, 3.4 fue necesario hacer un estudio sobre la estabilidad de la materia, es decir, para un dado ξ analizar qué valores puede tomar B . Para ello, primero dejamos libre el valor de la masa del quark s , tratando de emular el análisis realizado en el trabajo de la Ref. [36]. Este trabajo es de la década de 1980, cuando la incerteza sobre el valor de la masa del quark s permitía adjudicarle valores hasta 300 MeV. Entonces, las dos variables con las cuales hacer el análisis de la estabilidad de la materia extraña eran la constante de bolsa B y m_s . A fin de reproducir la ventana de estabilidad de dicho trabajo, construimos un programa numérico, escrito íntegramente en FORTRAN 90, que usa a estas dos variables como incógnitas junto con el potencial químico del electrón, μ_e , como semilla para resolver la ecuación

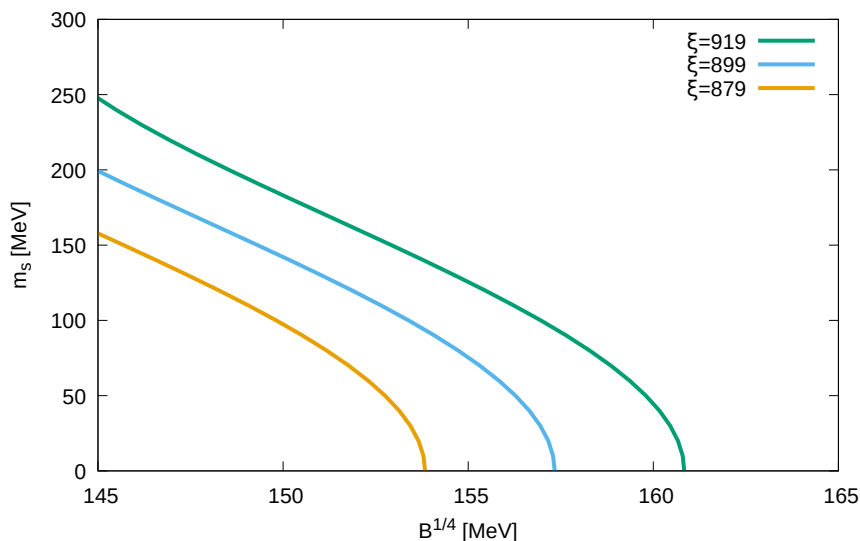


Figura 3.2: Ventana de estabilidad para $\alpha = 0$

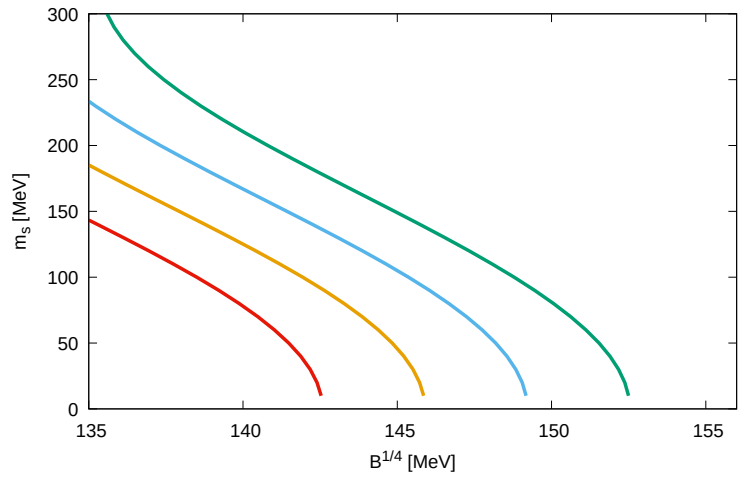
de neutralidad de carga eléctrica. Es decir, reescribimos las ecuaciones de neutralidad de carga eléctrica, de equilibrio químico, de densidades, de presiones y energía para que estén determinadas en función de μ_e . El programa utiliza una subrutina que nos resuelve el siguiente sistema de ecuaciones no lineales, a partir de una repetición controlada por un bucle DO iterativo para la variable m_s , que toma valores desde 0 MeV hasta 300 MeV (para más detalles de resolución de sistemas de ecuaciones no lineales se puede consultar la Ref. [37]). El sistema de ecuaciones que consideramos para construir las curvas de estabilidad es el siguiente:

$$\begin{aligned}
 f(1) &= E/n_b - \xi, \\
 f(2) &= (2/3)n_u - (1/3)n_d - (1/3)n_s - n_e, \\
 f(3) &= P
 \end{aligned}
 \tag{3.6.1}$$

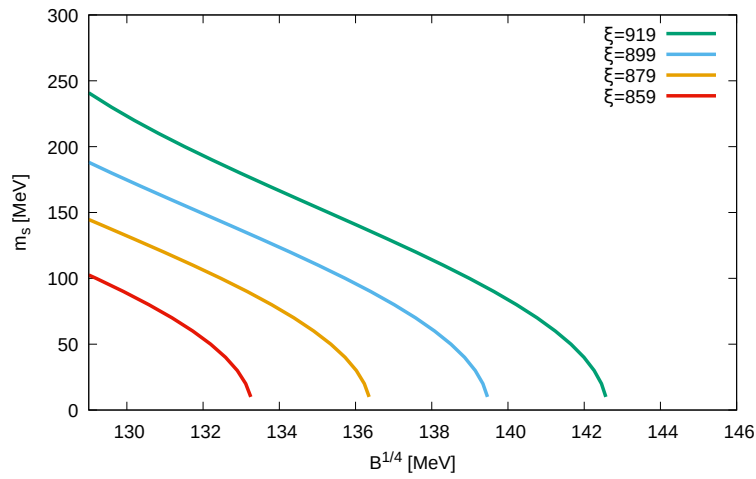
En la figura 3.2 podemos ver la ventana de estabilidad obtenida cuando la corrección debida a la constante de acoplamiento α no es tomada en cuenta. En la figura 3.3, se muestran otras ventanas de estabilidad obtenidas para los valores fijos $\alpha = 0.3, 0.6, 0.9$. Estas figuras, reproducen los resultados del trabajo de la [36], en el que $0 \text{ MeV} < m_s < 300 \text{ MeV}$. Vale la pena notar que en el caso $\alpha = 0$, solo es posible obtener una curva masa-radio cuya masa máxima alcance las $2 M_\odot$ marginalmente si $m_s = 0$. Si $m_s \neq 0$, es necesario que $\alpha \neq 0$ para lograr este objetivo.

Hoy en día el valor de m_s dado por el Data Particle Group es $m_s = 93,5 \pm 2 \text{ MeV}$ [38], por lo que es una buena estimación fijarlo en 93 MeV. De modo que modi-

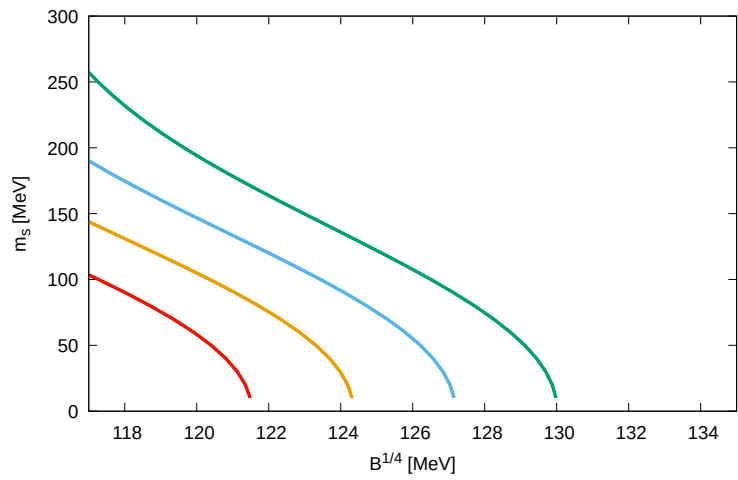
CAPÍTULO 3. MATERIA DE QUARKS EN OBJETOS COMPACTOS



(a) $\alpha=0.3$



(b) $\alpha=0.6$



(c) $\alpha=0.9$

Figura 3.3: ventanas de estabilidad con $\alpha \neq 0$

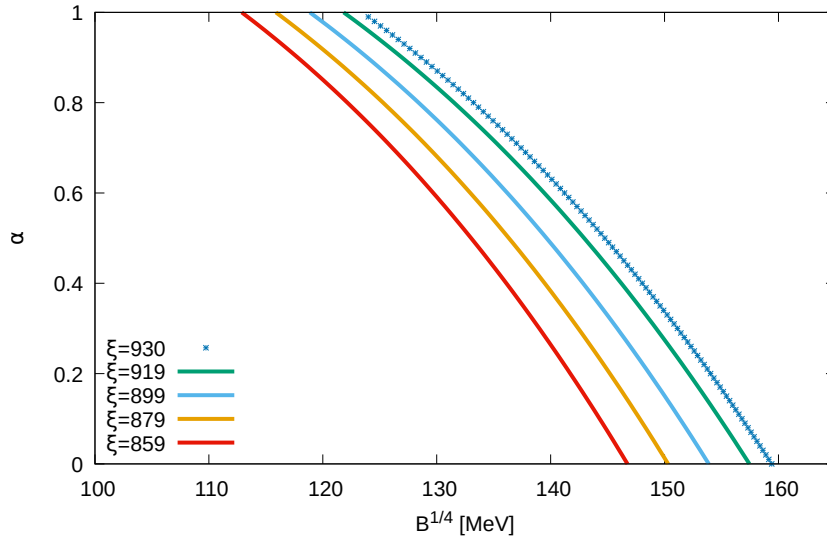
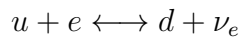


Figura 3.4: Ventana de estabilidad para materia de tres sabores

ficamos el programa, haciendo que el bucle sea sobre α . Podemos ver la ventana de estabilidad resultante en la figura 3.4.

3.7. Materia de quarks no extraña con correcciones debido a la constante de acoplamiento fuerte

En el 2018 se publicó el trabajo “Quark Matter May Not Be Strange” de Holdom, Ren y Zhang [39] donde contradicen la hipótesis de la materia extraña, es decir, demuestran que la materia conformada por quarks u y d es más estable que la conformada por quarks u , d y s . Es necesario aclarar que ellos no utilizan el modelo de bolsa del MIT, sino un modelo basado en mesones. En vista de sus resultados, decidimos evaluar la estabilidad de la materia u y d usando el modelo de bolsa del MIT. Para esto, realizamos las ventanas de estabilidad para este tipo de materia. Teniendo en cuenta la reacción:



y como los neutrinos no se encuentran en la estrella fría, vemos que la relación entre los potenciales químicos está dada por:

$$\mu_u + \mu_e = \mu_d.$$

Como estamos considerando el contexto de una estrella de neutrones, los cuales

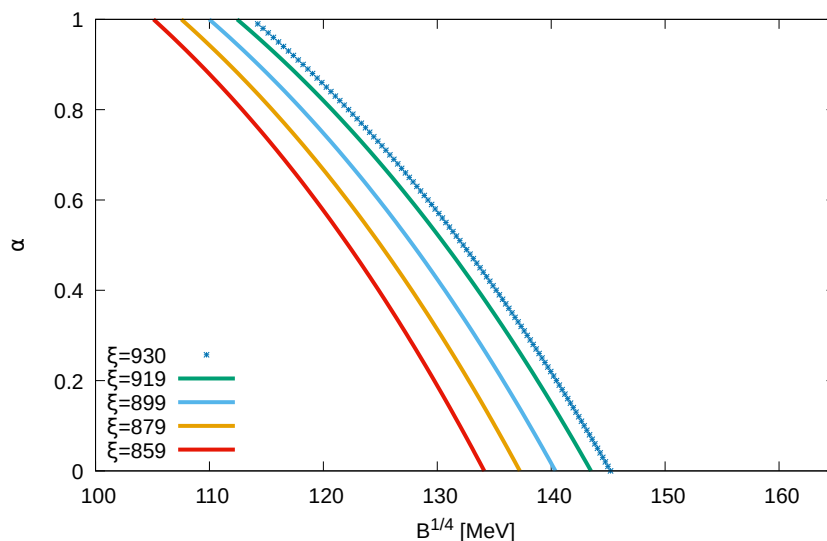


Figura 3.5: Ventana de estabilidad para materia de dos sabores

están compuestos por un quark u y dos d , luego:

$$\mu = \mu_u + 2 \mu_d$$

Con estas últimas dos expresiones podemos obtener los potenciales químicos en base a μ y μ_e :

$$\begin{aligned} \mu_u &= \frac{\mu}{3} - \frac{2}{3}\mu_e, \\ \mu_d &= \frac{\mu}{3} + \frac{\mu_e}{3}. \end{aligned}$$

Respecto a la densidad bariónica, la misma queda determinada por la siguiente expresión:

$$n_b = \frac{n_u + n_d}{3}$$

Con estas nuevas relaciones para las densidades de partículas, podemos calcular el sistema de ecs. (3.6.1) y obtenemos a B en función de α , recordando que varía entre $0 < \alpha < 1$.

Podemos comparar la Figura 3.5, ventana de estabilidad para materia de dos sabores (materia compuesta por quarks u y d), con la Figura 3.4, ventana de estabilidad para materia de tres sabores o extraña (compuesta por quarks u , d y s); y notar que los valores para la estabilidad de la materia de dos sabores son muchos menores que los de la materia extraña. Luego solo queda comprobar si estos se encuentra dentro del rango admitido para B .

CAPÍTULO 3. MATERIA DE QUARKS EN OBJETOS COMPACTOS

Para esto calculamos el límite inferior de B , a partir del programa para materia de dos sabores y fijando la energía por barión en $\xi = 934$ MeV. El valor que obtenemos para la constante de Bolsa es $B^{1/4} = 145$ MeV. Por lo tanto, de la Fig. 3.5 podemos deducir que no tenemos configuraciones estables por debajo de $E/A = 930$ MeV, que es el rango que nos interesa estudiar.

Capítulo 4

Materia oscura

Debido a la recopilación de diversos estudios como el análisis de las curvas de rotación de galaxias, el estudio de las dispersiones de velocidades de galaxias dentro de un cúmulo y la detección de anisotropías de radiación del fondo cósmico; la comunidad científica llegó a la conclusión de que la materia bariónica ordinaria solo corresponde a un 4% de la materia total en el Universo.

Del 96% de la materia restante, un 73% está conformado por un tipo de materia gravitacionalmente repulsiva, denominada energía oscura. Esta es la causante de la expansión acelerada del Universo, la cuál es detectada a través de las candelas estándares, como las supernovas tipo Ia¹. Todas las supernovas de este tipo tienen, aproximadamente, la misma magnitud absoluta, por lo que son útiles para determinar distancias a partir de observar su corrimiento al rojo o *redshift*.

El 23% final, corresponde a materia con caracter gravitacionalmente atractivo que no interactúa de ningún otro modo, la cuál se denomina, comunmente, materia oscura. Es seis veces más abundante que la materia ordinaria y la componente principal para la formación de estructura en el Universo [40].

El primero en proponer la existencia de la materia oscura fue el astrofísico Fritz Zwicky en el año 1933, luego de estudiar las velocidades de las galaxias individuales en el Cúmulo de Coma [41]. Zwicky concluyó que este cúmulo podía estar ligado gravitatoriamente sólo si la masa total era mucho más grande que la masa observada de las galaxias.

Sin embargo, fue recién a partir del año 1977 que se empezó a considerar seriamente la existencia de la materia oscura, a partir del trabajo de la astrónoma Vera Cooper Rubin [40]. Ella midió las velocidades de las estrellas a diferentes distancias a los centros de sus galaxias. Finalmente, encontró que las velocidades no disminuían en las regiones cercanas a sus límites, por lo que era necesario

¹La supernova tipo Ia es el desenlace de un sistema binario donde una de las componentes es una enana blanca que acreta masa de su compañera gigante hasta alcanzar el límite de Chandrasekhar, donde explota.

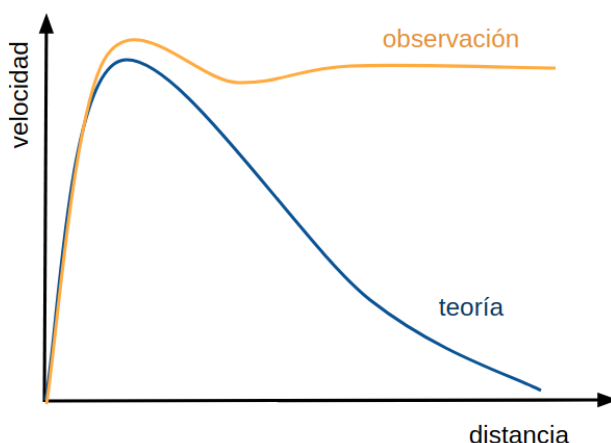


Figura 4.1: Curva de rotación de una galaxia

suponer la presencia de una masa mucho mayor a la observada. Una manera de explicar este fenómeno es considerando un planeta orbitando una estrella. Pensemos que el planeta está localizado a una distancia promedio r del centro de la estrella. Si dicho planeta se encuentra estable en su órbita, entonces podemos plantear un equilibrio entre la fuerza centrífuga y la fuerza gravitacional dado por $v^2(r)/r = GM(r)/r^2$, donde $v(r)$ es la velocidad orbital promedio del planeta y $M(r)$ es la masa total. Despejando la velocidad, obtenemos la curva de rotación del planeta:

$$v(r) = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}}.$$

Si aproximamos la masa total como la masa de la estrella, luego la masa del sistema nos queda concentrada en el centro y por más que nos alejemos de este, la masa total va a mantenerse aproximadamente constante. Por lo tanto, podemos notar que a distancias mayores, la velocidad va a disminuir como $v(r) \propto 1/\sqrt{r}$. Sin embargo, cuando queremos aplicar esta ecuación a las estrellas de una galaxia, detectamos una inconsistencia con las observaciones, ya que las velocidades de las estrellas se mantienen aproximadamente constantes a diferentes distancias del centro de la galaxia. Por lo tanto, es necesario un incremento de la masa para mantener la validez de la ecuación para $v(r)$. En la figura 4.1 ilustramos esquemáticamente esta diferencia entre teoría y observación en las curvas de rotación de las galaxias. Dichas curvas son aproximadamente planas debido a que las galaxias se encontrarían inmersas en un halo de materia oscura.

Otra posible explicación para la planicie de estas curvas puede provenir de la teoría MOND, (*Modified Newtonian Dynamics*). Esta es una teoría fenomenológica que parte de modificar la segunda ley de Newton pero trae a consecuencia que la masa inercial de un objeto es distinta a su masa gravitacional. Este últi-

mo aspecto entra en contradicción con la teoría de la Relatividad General, ya que refuta el principio de equivalencia fuerte, es decir, que las masas inerciales y gravitacionales son iguales [40].

El problema no es solo explicar las curvas de rotación de las galaxias, sino también descifrar la naturaleza de este tipo de materia. Según las teorías más aceptadas en la actualidad, la mayoría de la materia del Universo es oscura, es decir, la sección eficaz entre partículas de materia oscura y fotones no es significativa. Se estima que hay dos tipos de materia oscura: la bariónica y la no bariónica. Respecto a la materia oscura bariónica, entre las predicciones de la densidad de bariones del Universo y lo observado en estrellas y en zonas de gas interestelar, existen importantes discrepancias, por lo que gran parte de los bariones deberían ser oscuros. Este es el problema de la materia oscura bariónica. De todas maneras, aún es viable que la materia bariónica pueda completar parte de la densidad faltante en forma de enanas marrones² u otros objetos masivos compactos, conocidos como ‘MACHOs’ (en inglés, MAssive Compact Halo Objects), pero no la totalidad de dicha densidad [42]. La hipótesis más popular es que la materia oscura no sea bariónica. Los candidatos a este tipo de materia deben satisfacer algunas condiciones, que se deducen de las observaciones:

- Esta materia debe ser *ópticamente oscura*, es decir no radiar,

No se observa que la materia oscura brille, por lo que las partículas de materia oscura deben tener interacciones electromagnéticas muy débiles. De aquí se deduce que estas partículas casi no deben tener carga eléctrica. Una consecuencia importante de esto es que la materia oscura no puede enfriarse irradiando fotones y, por lo tanto, no colapsará hacia el centro de las galaxias como lo hacen los bariones, al irradiar su energía electromagnéticamente. En otras palabras, la materia oscura casi no se disipa.

- Debe ser *no colisionante*,

Además de no interactuar con los fotones para garantizar que la energía no se disipe, la materia oscura también debe estar prácticamente libre de colisiones. Es decir, la sección eficaz de interacción entre partículas es despreciable.

- Debe ser *fría*,

A principios de la década de 1980 se observó que la materia oscura fría explicaba bastante bien las propiedades observadas de las galaxias [43]. El término “fría” significa que las partículas tenían velocidades no relativistas

²Las enanas marrones son estrellas con masas inferiores a $0.08M_{\odot}$ y muy difíciles de observar, ya que no radían.

cuando se desacoplaron del plasma, a edades tempranas del Universo, en la época de igualdad materia-radiación, cuando la temperatura del universo era aproximadamente 1 eV [44].

- Las partículas deben ser *estables* en escalas de tiempo cosmológicas, de o contrario, ya habrían decaído y no existirían en la actualidad.

Existen, además, distintos límites para muchos modelos de materia oscura al imponer que la física de partículas del modelo sea consistente con todas las observaciones experimentales. Asimismo, debemos notar que no hay razones para asumir que la materia oscura está compuesta por un único candidato. Entre los principales candidatos a materia oscura no bariónica, en el marco de la física de partículas, podemos citar a los axiones, partículas masivas débilmente interactuantes denominadas WIMP's (*Weakly Interacting Massive Particles*), partículas supersimétricas como los gravitinos y los axinos, neutrinos estériles, entre otros [45].

Si bien la existencia de materia oscura ha sido bien establecida con una gran cantidad de evidencias como curvas de rotación de las galaxias o la formación de estructuras y lentes gravitacionales, sus propiedades como la masa y sus interacciones aún se desconocen. Un método indirecto para establecer cotas sobre la materia oscura que está ganando atención en los últimos años es estudiar los efectos de dicha materia en estrellas compactas. En este contexto, estudios con diferentes modelos de materia oscura han establecido restricciones conectando las propiedades observadas de las estrellas compactas con los parámetros de la materia oscura considerada. Por ejemplo, la materia oscura que se auto-aniquila dentro de las estrellas compactas puede calentar dichas estrellas y, por lo tanto, afectar las propiedades de enfriamiento de estos objetos compactos. Por otro lado, la materia oscura que no se auto-aniquila, como la materia oscura asimétrica y la materia oscura espejo, simplemente se acumularía en el interior de estas estrellas y afectarían su estructura estelar (ver [46] y sus referencias).

Asimismo, algunos autores, motivados por el evento GW170817, han analizado el posible impacto de la materia oscura en la señal de ondas gravitacionales [47]. En este trabajo se muestra que la presencia de pequeños núcleos de materia oscura en las EN que se fusionan pueden producir un pico suplementario observable y distinguible en la densidad espectral de potencia de onda gravitacional después de la fusión. En otro trabajo, los cálculos obtenidos por estos autores indican que la presencia de un núcleo de materia oscura con una fracción de masa $\sim 5\%$ podría establecer nuevas restricciones a la ecuación de estado de la materia nuclear [48].

Si las estrellas de quarks existen en la naturaleza, ¿sería posible, desde el punto de vista observacional, detectar la presencia de materia oscura en su interior? Esta

es una de las preguntas que intentaremos responder en este trabajo de tesis.

4.1. Ecuación de estado para la materia oscura

Modelaremos la materia oscura como un gas de Fermi a temperatura cero, de partículas interactuantes con un parámetro de fuerza y que le asignamos según sea el caso, dos valores $y = 0$ o $y = 1000$ ³. Consideramos que la materia oscura está compuesta de partículas con una masa de 100 GeV, la escala de masa clásica de partículas WIMP. Suponemos, además, que las partículas de materia oscura no pueden auto-aniquilarse, como ocurre en la materia oscura asimétrica (ver [13] y sus referencias).

Además, consideramos que la materia oscura con la cuál trabajamos es del tipo materia oscura fría por lo que el rango de su temperatura es mucho menor que el de la masa de sus partículas. Ya habíamos visto que las estrellas de quarks, al igual que las estrellas de neutrones, tienen temperaturas del orden de 10^{11} K, valor que se corresponde para la escala de masa a 1 MeV. Esta escala es mucho menor que la masa de la materia oscura que estamos considerando.

Para la ecuación de estado, consideramos la siguiente expresión para la densidad de energía [13]:

$$\frac{\epsilon}{m_f^4} = \frac{1}{8\pi^2} \left[(2z^3 + z)\sqrt{1+z^2} - \sinh^{-1}(z) \right] + \left[\left(\frac{1}{3\pi^2} \right)^2 y^2 z^6 \right] \quad (4.1.1)$$

Recordamos que $z = p_F/m_f$ es el momento adimensional de Fermi, m_f la masa del fermión oscuro e y el parámetro de fuerza. Respecto a la presión utilizamos la siguiente ecuación[13]:

$$\frac{p}{m_f^4} = \frac{1}{24\pi^2} \left[(2z^3 - 3z)\sqrt{1+z^2} + 3 \sinh^{-1}(z) \right] + \left[\left(\frac{1}{3\pi^2} \right)^2 y^2 z^6 \right] \quad (4.1.2)$$

Para resolver las ecuaciones (4.1.1) y (4.1.2), tomando como variable a $p_F = \sqrt{E_F^2 - m_f^2}$, donde el rango para la energía de Fermi es el mismo que el rango para la materia oscura [13]. El rango para la materia oscura lo consideramos en $10 \text{ GeV} < m_f < 1000 \text{ GeV}$ según el trabajo de la Ref. [49]. Es decir, vamos a considerar que la energía de Fermi varía entre 100 y 1000 GeV, pero vamos a mantener constante a la masa de la materia oscura en 100 GeV, de manera que el argumento

³El parámetro de fuerza $y = m_f/m_I$, lo definimos como el cociente entre la masa del fermión m_f y la escala de masa de interacción m_I .

CAPÍTULO 4. MATERIA OSCURA

de la raíz nos quede positivo. En conclusión tomamos $0 \text{ GeV} < p_F < 900 \text{ GeV}$. Por detalles técnicos de programación, terminamos considerando que el primer valor que toma p_F es 100 MeV. Finalmente hacemos un bucle sobre los valores de p_F con paso 100, construyendo en cada iteración la ecuación de estado para la materia oscura.

Como la interacción de la materia oscura y barionica es solo gravitatoria trabajaremos, como veremos con detalle en el siguiente capítulo, utilizando el formalismo de dos fluidos para resolver las ecuaciones de equilibrio hidrostático relativistas para estos objetos compactos.

Capítulo 5

Modelado de las estrellas de quarks

En este capítulo presentaremos las ecuaciones para obtener diferentes familias de estrellas de quarks (con y sin materia oscura), partiendo de la condición de equilibrio hidrostático y utilizando diferentes ecuaciones de estado que describen la materia de la que están compuestas. Para esto, se asumirá que las estrellas tienen una simetría esférica y que hay un balance exacto entre la fuerza gravitacional y la fuerza de presión que actúa sobre cada elemento de masa de estos objetos.

También realizaremos un abordaje simplificado del estudio de las oscilaciones no radiales de las estrellas de quarks, asociadas con la emisión de ondas gravitacionales. Para ello, utilizaremos la aproximación relativista de Cowling en la cual se desprecian las perturbaciones al espacio-tiempo. Asimismo, y dado que las EdE que construimos para modelar objetos compactos fríos no poseen discontinuidades, prestaremos atención, únicamente, al modo fundamental, dejando para otro momento el análisis de los demás modos propios.

5.1. Ecuaciones de estructura

En el capítulo 2, ya habíamos visto que los objetos compactos, y en particular las estrellas de neutrones y de quarks, tienen una compacticidad del orden de $M/R \sim 0,1$. Para el rango de $M/R \sim 0,1 - 0,2$, los efectos relativísticos deben ser tenidos en cuenta por lo que para describir teóricamente la estructura de una estrella de quarks debemos resolver la ecuación de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$$

donde $G_{\mu\nu}$ es el tensor de curvatura de Einstein, $R_{\mu\nu}$ es el tensor de curvatura de Ricci, R es el escalar de curvatura de Ricci, $g_{\mu\nu}$ es el tensor métrico y $T_{\mu\nu}$ es el tensor momento-energía.

CAPÍTULO 5. MODELADO DE LAS ESTRELLAS DE QUARKS

Para una estrella con simetría esférica y no rotante, la métrica está dada por la forma de Schwarzschild:

$$ds^2 = -e^{2\phi(r)} dt^2 + e^{2\Lambda(r)} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (5.1.1)$$

donde las funciones métricas están dadas por:

$$\begin{aligned} e^{2\Lambda(r)} &= (1 - \gamma(r))^{-1}, \\ e^{2\phi(r)} &= e^{-2\Lambda(r)} = (1 - \gamma(r)), \quad \text{si } r > R, \end{aligned}$$

con

$$\gamma(r) = \begin{cases} 2m(r)/r & , \quad r \leq R \\ 2M/r & , \quad r > R \end{cases}$$

Finalmente, resolviendo se obtienen las ecuaciones Tolman-Oppenheimer-Volkoff [50, 34], TOV:

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{G}{r^2} \left[\epsilon(r) + \frac{P(r)}{c^2} \right] \frac{m(r) + 4\pi r^3 \frac{P(r)}{c^2}}{1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r}}, \quad (5.1.2)$$

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \epsilon(r), \quad (5.1.3)$$

donde $\epsilon(r)$ y $P(r)$ son la densidad de energía y la presión respectivamente, $m(r)$ es la masa gravitacional encerrada en un radio r , G y c son la constante gravitacional de Newton y la velocidad de la luz.

La primer ecuación representa el equilibrio hidrostático entre la atracción gravitatoria y la presión de la materia, mientras que la segunda describe la ley de continuidad de la masa. Este sistema de ecuaciones acopladas puede resolverse a partir de conocer la EdE, es decir conociendo la presión P para una densidad de energía ϵ dada, desde el centro de la estrella donde su masa es cero, hasta su radio final donde se anula la presión. Por lo tanto tenemos las condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} P(R) &= 0 \\ m(0) &= 0 \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

Con estas condiciones, es posible resolver las ecuaciones TOV para una dada densidad de energía central $\epsilon(0) = \epsilon_c$ y obtener la correspondiente masa estelar $m(R) = M$. De esta manera, se construyen las familias de estrellas estacionarias y se establece su relación $M - R$.

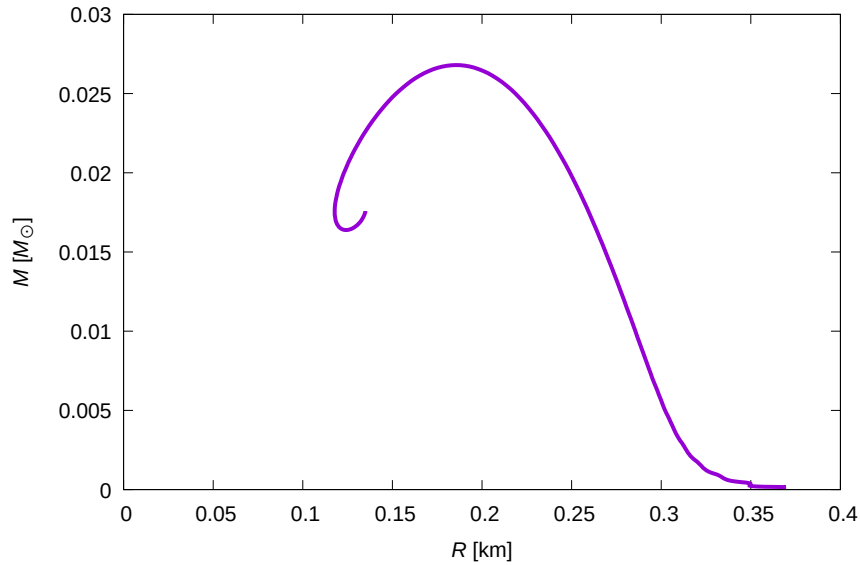


Figura 5.1: Curva de Masa-Radius de estrellas de MO, considerando que el parámetro de interacción entre los fermiones oscuros, $y=1000$.

5.2. Materia oscura en estrellas de quarks

Como estamos trabajando con estrellas de quarks con materia oscura, entonces debemos considerar dos fluidos. Sin embargo, vamos primero trabajar solo con la materia oscura para testear los resultados que arrojan; para luego agregar la materia de quarks, la cuál ya fue trabajada en el capítulo 3. Recurriendo a las ecs. (4.1.1) y (4.1.2) obtenemos la EdE de la materia oscura que usamos para resolver las ecuaciones TOV y obtenemos valores de masa y radio de estrellas compuestas íntegramente por materia oscura.

En la figura 5.1 graficamos la masa y el radio de las estrellas de quarks cuando $y = 1000$. Podemos notar que cuánto más chicos son los rangos de valores para el radio y para la masa, si los comparamos luego con los gráficos del capítulo 6 fig. 6.2, fig. 6.3, fig. 6.4 y fig. 6.5, donde nos muestran las curvas de masa-radius para estrellas de quarks. Y si anulamos el parámetro de fuerza $y = 0$, por lo tanto despreciamos la interacción entre las partículas de materia oscura; luego podemos ver los resultados en la fig. 5.2.

El siguiente paso a considerar, es trabajar con los dos fluidos. Para esto modificamos el programa que resuelve las ecs. TOV. Luego las ecuaciones a resolver se duplican y son:

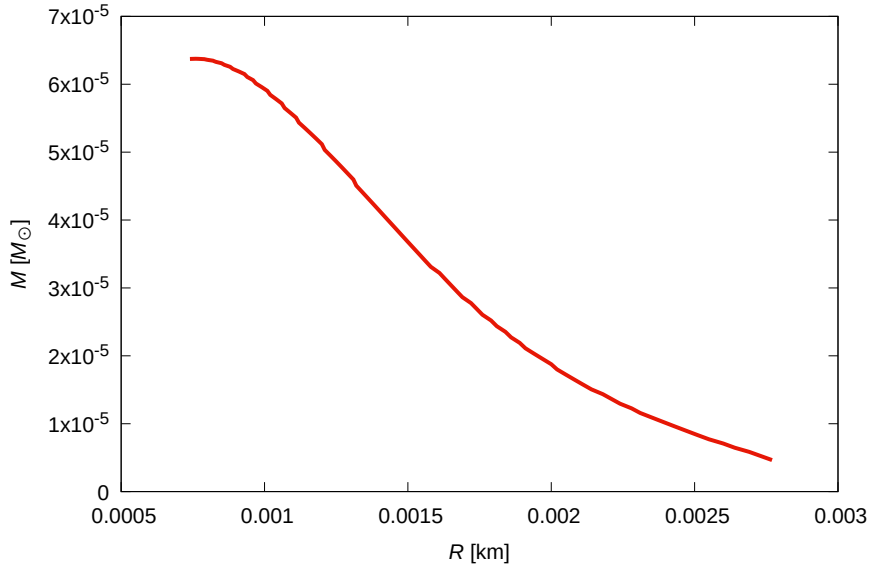


Figura 5.2: Curva de Masa-Radius de estrellas de MO, considerando a los fermiones oscuros sin interacción entre ellos, $y=0$.

$$\frac{dP_o(r)}{dr} = -\frac{G}{r^2} \left[\epsilon_o(r) + \frac{P_o(r)}{c^2} \right] \frac{m(r) + 4\pi r^3 \frac{[P_o(r)+P_q(r)]}{c^2}}{1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r}}, \quad (5.2.1)$$

$$\frac{dm_o(r)}{dr} = 4\pi r^2 \epsilon_o(r), \quad (5.2.2)$$

$$\frac{dP_q(r)}{dr} = -\frac{G}{r^2} \left[\epsilon_q(r) + \frac{P_q(r)}{c^2} \right] \frac{m(r) + 4\pi r^3 \frac{[P_o(r)+P_q(r)]}{c^2}}{1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r}}, \quad (5.2.3)$$

$$\frac{dm_q(r)}{dr} = 4\pi r^2 \epsilon_q(r), \quad (5.2.4)$$

donde, $m(r)$ es la masa total, obtenida de sumar la masa correspondiente a la materia oscura $m_o(r)$ y a la materia de quarks $m_q(r)$; $\epsilon_o(r)$ es la densidad y $P_o(r)$ es la presión correspondientes a la materia oscura; $\epsilon_q(r)$ es la densidad y $P_q(r)$ es la presión correspondientes a la materia de quarks. Notemos que las primeras dos ecuaciones corresponden a la materia oscura, mientras que las últimas dos con la materia de quarks. Sin embargo en ambas aparece la masa total $m(r) = m_o(r) + m_q(r)$ al igual que la presión total $P_o(r) + P_q(r)$, resultadas de sumar las contribuciones de los dos tipos de materia.

La resolución numérica de estas ecuaciones requirió, no solo, adaptar el código numérico que resuelve las ecuaciones TOV en el formalismo de un fluido, sino realizar modificaciones a los parámetros del integrador Runge-Kutta-Fehlberg, dado que la componente oscura tiene radios y masas mucho menores a los relevantes cuando se realiza estudios de EN sin materia oscura en su interior.

Es importante remarcar que en las ecuaciones TOV para dos fluidos, cuando

uno de los fluidos alcanza presión nula, su contribución a las ecuaciones de equilibrio hidrostático deja de ser considerada y se recuperan, a partir de ese radio, las ecuaciones TOV para un único fluido.

5.3. Oscilaciones no radiales en objetos compactos

Al oscilar de forma no radial, una estrella que no rota emite ondas gravitacionales siempre y cuando dichas perturbaciones posean momentos cuadrupolares gravitacionales no nulos, es decir cuando la perturbación asociada con $\ell \geq 2$ (siendo ℓ el índice del armónico esférico en los que se descompone a la perturbación) no sea nula.

Si bien existen familias bien diferenciadas de modos propios de oscilación para estrellas compactas, nos concentraremos en describir los modos que se encuentran asociados con perturbaciones al fluido con el que se describe a la estrella de quarks. Asimismo, debemos mencionar que en estos casos las perturbaciones al espacio-tiempo suelen poder desprejarse.

En general, la emisión más intensa es la asociada a los modos con $\ell = 2$ (perturbaciones cuadrupolares), por lo que concentraremos nuestra atención en este caso. En el contexto de estrellas relativistas, las “vibraciones” no están asociadas únicamente al fluido estelar, sino también al espacio-tiempo. Esta situación puede entenderse como el de dos sistemas acoplados. Este acoplamiento es el motivo por el cual estas frecuencias son complejas. Estos modos reciben el nombre de ‘Quasinormal modes’ (QNMs por su sigla en inglés) y son modos de disipación de energía que describen perturbaciones de un campo amortiguado. Estas frecuencias propias son cantidades complejas cuya parte real, ω , caracteriza la frecuencia de oscilación mientras que la parte imaginaria, τ , a la tasa de amortiguamiento.

La emisión de ondas gravitacionales asociada a este tipo de modos está vinculada, especialmente con los modos de presión (p), el modo fundamental (f) y los modos de gravedad (g). Como regla general, los modos p tienen mayores frecuencias que los modos g , y estas dos familias se encuentran separadas por el modo f . Además, de caracterizarse por sus frecuencias, los modos están caracterizados por el número de nodos de sus autofunciones. Es importante aclarar que cuando el objeto compacto es isoentrópico y sin inhomogeneidades, los modos g tienen frecuencia nula. Por esta razón, en estrellas frías sin rotación dichos modos resultan completamente inhibidos si en la EdE no hay discontinuidades [51].

Para estudiar los modos no radiales de oscilación del fluido en el interior de las estrellas de quarks se puede utilizar la aproximación relativista de Cowling (ver, por ejemplo, [52]). Realizado esta aproximación, que desprecian las perturbaciones al espacio-tiempo de fondo y se obtienen valores para las frecuencias de

CAPÍTULO 5. MODELADO DE LAS ESTRELLAS DE QUARKS

oscilación que difieren en menos de un 20 % de los valores obtenidos utilizando las ecuaciones linealizadas de la relatividad general (ver [53, 54, 55] y referencias allí mencionadas). En el caso de las EQ, la diferencia es un poco mayor, varía entre 15 % y 30 % (ver [56]). Analizando, en particular, los errores obtenidos para el modo fundamental, f en EN, los autores de la Ref. [54] muestran que los mismos se reducen a medida que aumenta la compacticidad de la estrella. Por lo tanto, para el caso del modo fundamental, los resultados son cualitativamente buenos y es esperable que muchas de las conclusiones que se obtengan utilizando esta aproximación resulten válidas.

Bajo esta aproximación, y luego de realizar un desarrollo en término de armónicos esféricos y asumir una dependencia temporal oscilatoria para las perturbaciones, las ecuaciones necesarias para encontrar las frecuencias, ω , son [57]:

$$\frac{dW(r)}{dr} = \frac{d\epsilon}{dP} \left[\omega^2 r^2 e^{\Lambda(r)-2\phi(r)} V(r) + \frac{d\phi(r)}{dr} W(r) \right] - \ell(\ell+1) e^{\Lambda(r)} V(r) , \quad (5.3.1)$$

$$\frac{dV(r)}{dr} = 2 \frac{d\phi(r)}{dr} V(r) - \frac{1}{r^2} e^{\Lambda(r)} W(r) , \quad (5.3.2)$$

donde las funciones $\Lambda(r)$ y $\phi(r)$ que puede expresarse mediante la relación

$$\frac{d\phi(r)}{dr} = \frac{m(r) + 4\pi r^3 P(r)}{r[r - 2m(r)]} ,$$

describen la métrica de fondo y quedan completamente caracterizadas luego de resolver las ecuaciones de estructura estelar (5.1.3).

Para poder resolver este sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, debemos analizar las condiciones de borde que hay que imponer a fin de obtener las soluciones con relevancia física. El origen, $r = 0$, es un punto singular regular del sistema de ecuaciones (5.3.1 - 5.3.2). Puede demostrarse, utilizando el método de Frobenius, que sus soluciones regulares tienen un comportamiento dado por:

$$W(r) \sim \mathcal{B} r^{\ell+1} , \quad V(r) \sim -\frac{\mathcal{B}}{\ell} r^{\ell} , \quad (5.3.3)$$

donde la amplitud, \mathcal{B} , es una constante arbitraria sin sentido físico dado que estamos trabajando en el contexto de un análisis de perturbaciones linealizado. Además, en la superficie estelar se debe exigir que la perturbación Lagrangiana a la presión se anule. Dicha condición se representa matemáticamente como

$$\omega^2 e^{\Lambda(R)-2\phi(R)} V(R) + \frac{1}{R^2} W(R) = 0 . \quad (5.3.4)$$

CAPÍTULO 5. MODELADO DE LAS ESTRELLAS DE QUARKS

Para resolver este problema de contorno, utilizamos el código numérico Cowling Frequency Key (CFK) [55] que realiza la integración de las ecuaciones diferenciales utilizando un método Runge-Kutta-Felbergh de paso adaptativo mientras que para satisfacer la condición de contorno dada en la ecuación (5.3.4) utilizamos una combinación del método de Newton-Raphson con el de Ridder.

Capítulo 6

Resultados de las configuraciones estelares estudiadas

En este capítulo, presentamos los resultados de las diferentes familias de EQ obtenidas, considerando la presencia o no de la MO en su interior. Todas las EdE para la materia de quarks fueron construídas teniendo en cuenta la ventana de estabilidad de la figura 3.4 del Capítulo 3, que se construyó asumiendo $m_u = m_d = 0$ MeV y $m_s = 93$ MeV, salvo en el caso de la figura 6.1 que describiremos a continuación.

El gráfico 6.1 nos muestra dos familias de EQ para masa del quarks extraño $m_s = 0$ (curva violeta) y $m_s = 93$ MeV (curva celeste). Para ambas EdE hemos considerado la misma constante de bolsa, $B^{1/4} = 145$ MeV. Si buscamos el valor de $B^{1/4}$ correspondiente a una masa $m_s = 93$ MeV en la figura 3.2, notamos que ese punto en las curvas de estabilidad correspondería a un valor $B^{1/4} > 145$ MeV. Sin embargo, hemos tomado el mínimo valor de $B^{1/4}$ cuando $\alpha = 0$ para construir ambas familias de EQ no solo para analizar el efecto de una $m_s \neq 0$ en la EdE. Si consideramos $0 \text{ MeV} < m_s \leq 93 \text{ MeV}$, y $B^{1/4} > 145$ MeV en las EdE de la materia de quarks, obtendremos siempre familias de EQ cuya estrella de masa máxima sea $M_{Max} < 2 M_\odot$. Vemos que $m_s \neq 0$ hace que la materia sea más compresible y por lo tanto que no alcancemos un máximo compatible con la restricción de $2 M_\odot$ en la curva masa-radio correspondiente. El efecto de m_s es “ablandar” la EdE.

Es por ello necesario la presencia de la corrección debido a la interacción fuerte entre los quarks si $m_s \neq 0$. La inclusión de interacciones extra entre las partículas, “endurecen” la EdE de la materia de quarks. Este efecto también se logra en otro tipo de modelos incluyendo, por ejemplo, interacciones vectoriales (ver, por ejemplo la Ref.[2] y sus referencias). De esta forma, es posible obtener curvas de masa-radio que alcancen las $2 M_\odot$. No solo hemos logrado tal requisito, sino que también, muchas de las curvas que obtuvimos satisfacen las restricciones obser-

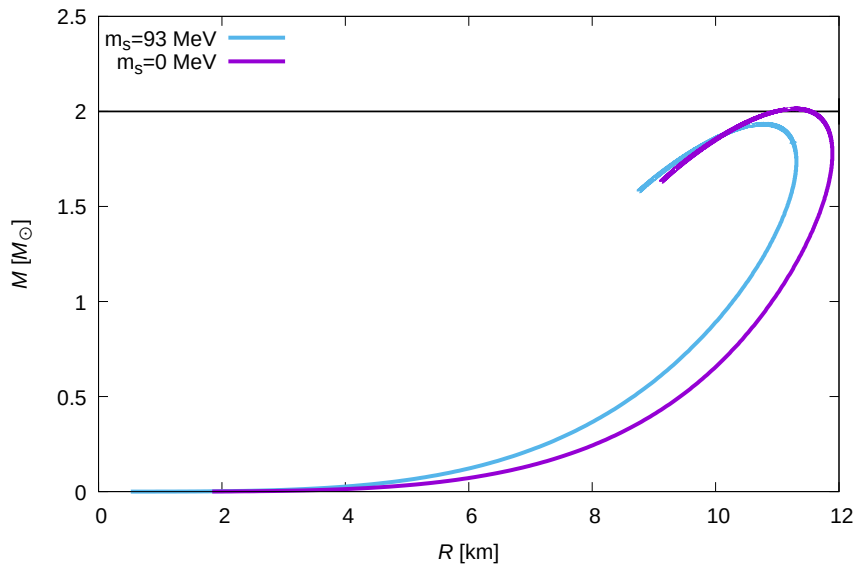


Figura 6.1: Curvas de Masa-Radius de EQ sin interacción fuerte, $\alpha = 0$, considerando dos valores para la masa del quark extraño: $m_s = 0$ (curva violeta) y $m_s = 93$ MeV (curva celeste). La línea negra horizontal corresponde a $2 M_\odot$.

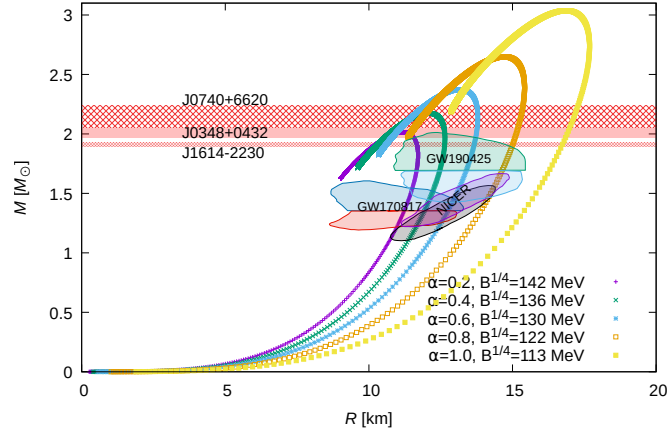
vacionales impuestas por los pulsares de $2 M_\odot$ J0740+6620 [17], J0348+0432 [15] y J1614-2230 [14], así como con las restricciones en radio dadas por la observación de ondas gravitacionales GW170817 [5] y GW190425 [23]. Finalmente, las mediciones hechas por NICER al pulsar PSR J0030+0451 también están contempladas en las figuras, mostrando que nuestro modelo resulta compatible, además, con dichas observaciones. Estas curvas se pueden observar en las figs. 6.2 y 6.3, donde mantuvimos la energía por barión, ξ , fija y variamos la constante de acoplamiento α . Notamos que a medida que α aumenta, la EdE se endurece, lo que nos permite obtener valores cada vez mayores de masa y radio compatibles, en casi todos los casos, con las observaciones.

Por otro lado, si fijamos α y variamos ξ , obtenemos los gráficos de las fig. 6.4 y 6.5. Podemos observar que a medida que la energía por barión, ξ , disminuye la masa y radio de las EQ aumentan.

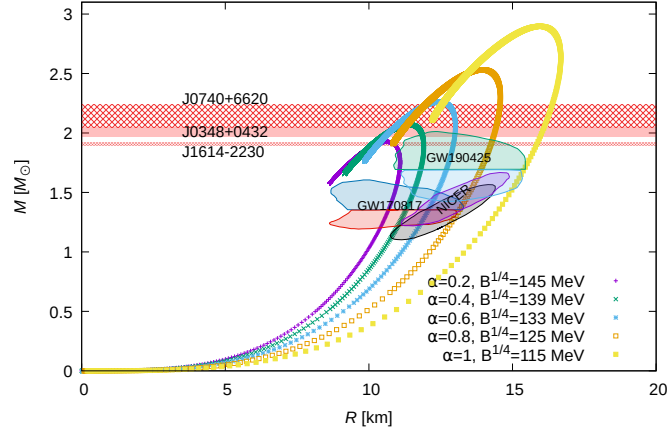
Podemos ver, además, que los modelos en los que la constante de acoplamiento fuerte $\alpha = 1$ no son compatibles con los datos provenientes del evento GW170817 y su contraparte electromagnética. Asimismo, podemos concluir que $\alpha \gtrsim 0,4$ para que las curvas M - R asociadas a nuestro modelo resulten compatibles con las mediciones de NICER del pulsar PSR J0030+0451 (contornos gris y violeta en dichas figuras). De esta forma podemos concluir que, en el contexto de nuestro modelo, $0,4 \lesssim \alpha \lesssim 0,8$.

Observando los gráficos 6.2, 6.3, 6.4 y 6.5, elegimos configuraciones representativas que satisfacen todas las restricciones observacionales previamente mencionadas e incluimos la componente de MO. Los parámetros de las EdE de quarks

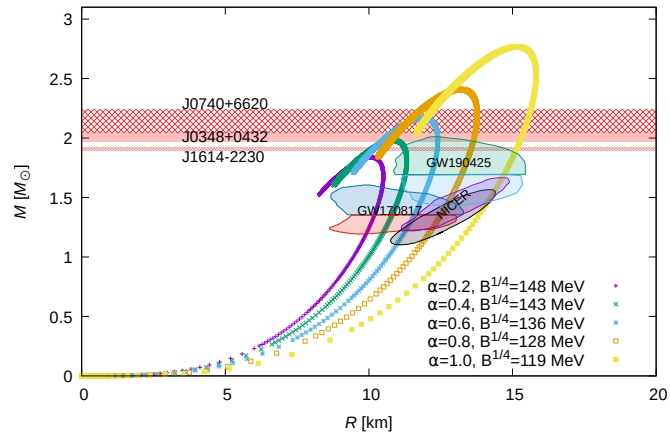
CAPÍTULO 6. RESULTADOS DE LAS CONFIGURACIONES ESTELARES ESTUDIADAS



(a) $\xi=859$



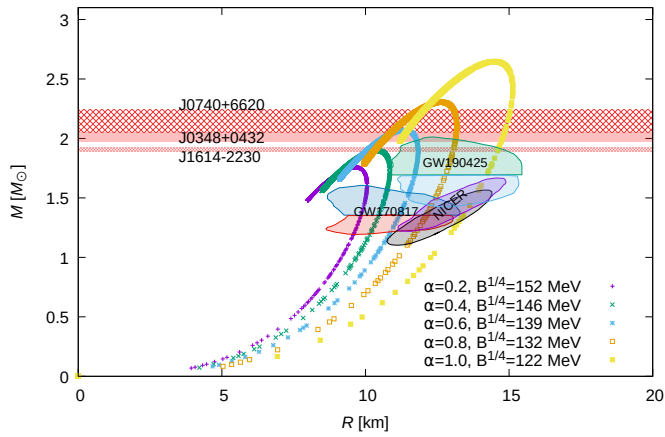
(b) $\xi=879$



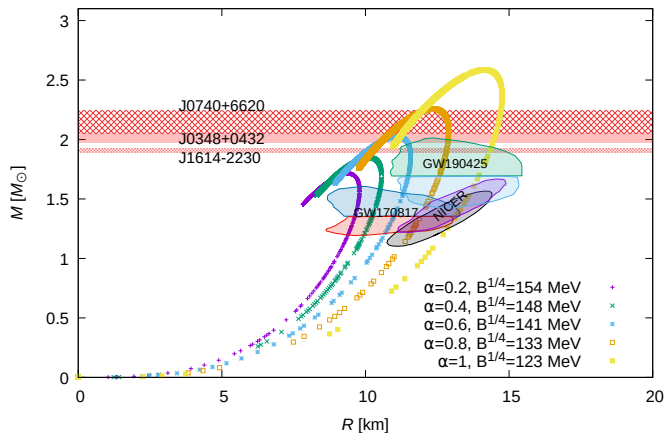
(c) $\xi=899$

Figura 6.2: Curvas de Masa-Radius para distintas configuraciones de EQ sin núcleo de MO, obtenidas fijando la energía por barión, ξ , y variando la constante de acoplamiento fuerte, α .

CAPÍTULO 6. RESULTADOS DE LAS CONFIGURACIONES ESTELARES ESTUDIADAS



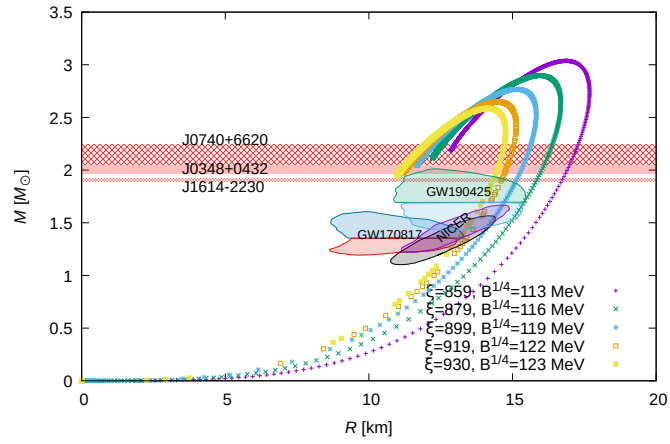
(a) $\xi=919$



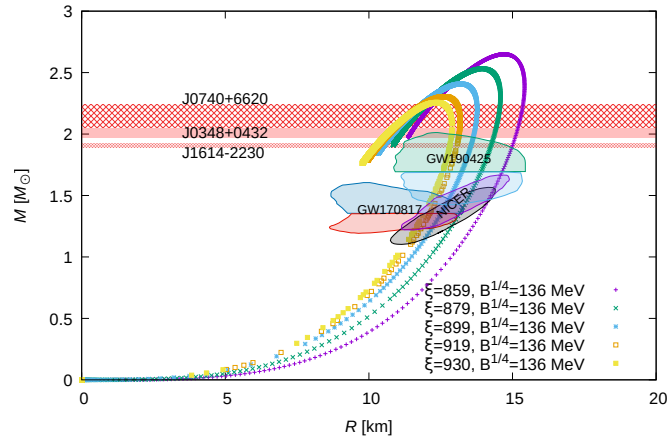
(b) $\xi=930$

Figura 6.3: Curvas de Masa-Radius para distintas configuraciones de EQ sin núcleo de MO, obtenidas fijando la energía por barión, ξ , y variando la constante de acoplamiento fuerte, α .

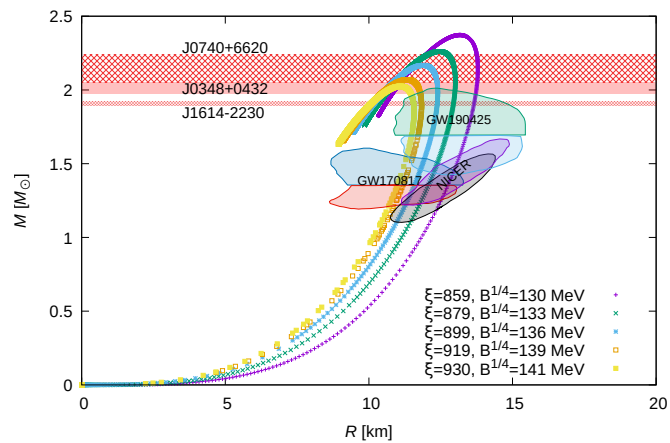
CAPÍTULO 6. RESULTADOS DE LAS CONFIGURACIONES ESTELARES ESTUDIADAS



(a) $\alpha=1$



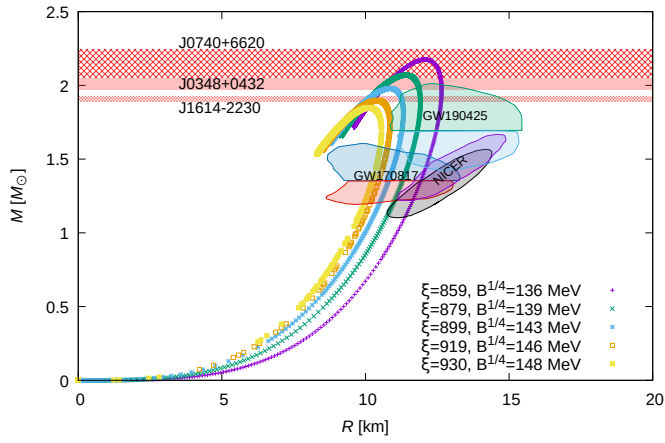
(b) $\alpha=0.8$



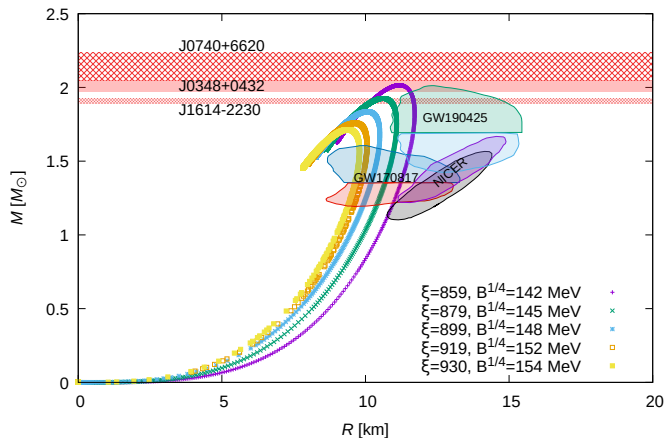
(c) $\alpha=0.6$

Figura 6.4: Curvas de Masa-Radius para distintas configuraciones de EQ sin núcleo de MO, obtenidas fijando la constante de acoplamiento, α , y variando la energía por barión, ξ

CAPÍTULO 6. RESULTADOS DE LAS CONFIGURACIONES ESTELARES ESTUDIADAS



(a) $\alpha=0.4$



(b) $\alpha=0.2$

Figura 6.5: Curvas de Masa-Radius para distintas configuraciones de EQ sin núcleo de MO, obtenidas fijando la constante de acoplamiento, α , y variando la energía por barión, ξ .

CAPÍTULO 6. RESULTADOS DE LAS CONFIGURACIONES ESTELARES ESTUDIADAS

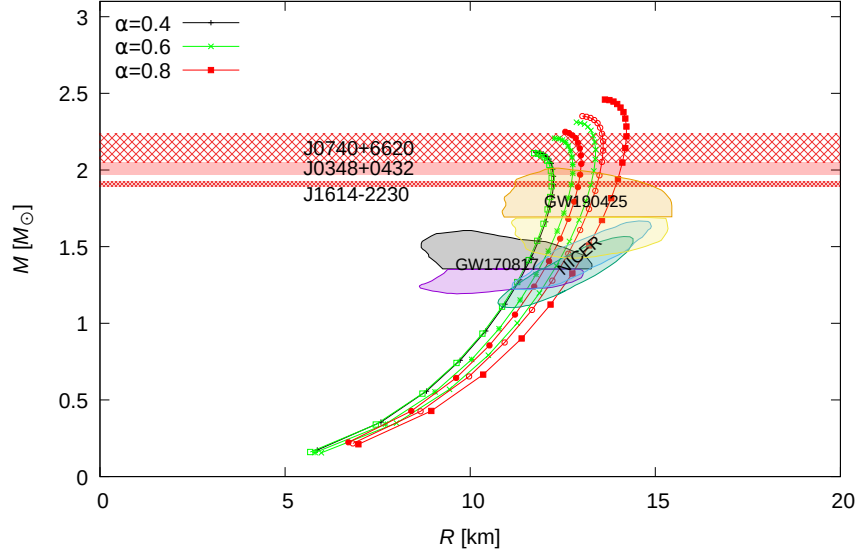


Figura 6.6: Curvas de masa-radio para las EQ conteniendo un núcleo de MO cuya densidad de energía central es $\epsilon_{c_{dark}} = 2 \times 10^6$ MeV/fm³. Los parámetros de las EdE correspondientes a estas familias de EQ se presentan en el cuadro 6.1.

utilizadas para construir dichas familias de EQ se presentan en el cuadro 6.1.

En la figura 6.6 vemos las curvas de masa-radio de EQ conteniendo MO para una densidad de energía de MO fija en $\epsilon_{c_{dark}} = 2 \times 10^6$ MeV/fm³, construídas con EdE de quarks cuyos parámetros se presentan en el cuadro 6.1.

Por otro lado, variamos la densidad de energía central $\epsilon_{c_{dark}}$ de los núcleos de MO en las EQ y estudiamos como se modifica, en consecuencia, la masa de estas estrellas. Esto se presenta en la figura 6.7 para tres valores diferentes de densidad de energía central: $\epsilon_{c_{dark}} = 10^5$ MeV/fm³, 10^6 MeV/fm³ y 2×10^6 MeV/fm³. Podemos observar que el aumento de la densidad de energía de MO produce una masa menor en la estrella de masa máxima.

α	ξ	$B^{1/4}$ [MeV]
0.4	859	136
	859	130
0.6	879	133
	889	136
0.8	879	125
	889	128
	919	132

Cuadro 6.1: Combinación de valores para la constante de acoplamiento fuerte, α , la energía por barión, ξ y la constante de bolsa $B^{1/4}$ para EQ con MO que satisfacen las restricciones observacionales recientes de púlsares masivos y ondas gravitacionales (Figura 6.6). La densidad central considerada para el núcleo de MO en las EQ es $\epsilon_{c_{dark}} = 2 \times 10^6$ MeV/fm³.

Además, en la figura 6.8 mostramos las curvas de masa-radio para distintas configuraciones de EQ con núcleos de MO, donde fijamos los parámetros α y ξ ,

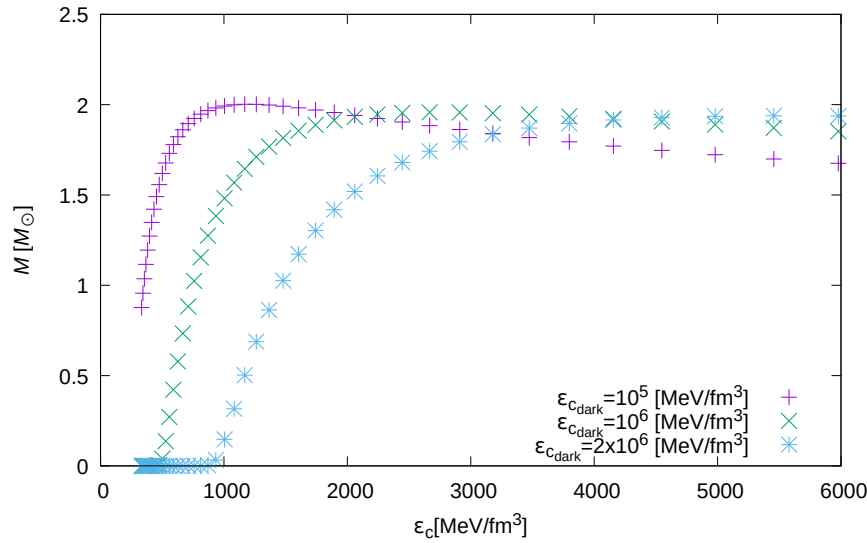


Figura 6.7: Curvas de variación de la masa de las EQ conteniendo MO en función la densidad central de MO.

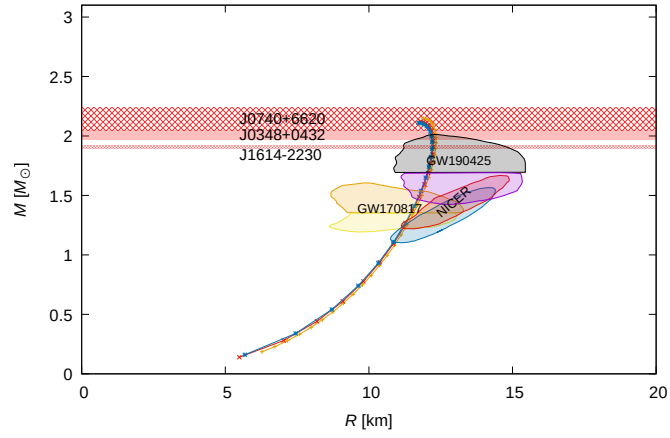
para los mismos tres valores diferentes de densidad de energía central de la figura 6.7.

Elegidas las EQ y las respectivas densidades centrales para la MO, decidimos también calcular la frecuencia de oscilación para el modo f para algunas de las configuraciones estelares de las figuras 6.6 y 6.8. En la figura 6.9 vemos, la frecuencia del modo f en función de la masa del objeto compacto. Como puede observarse, para los casos analizados, la frecuencia del modo f toma valores cercanos a los 2 kHz, en el rango $\sim 1,9\text{kHz} \lesssim \omega_f \lesssim 2,4\text{kHz}$. Además, se observa que para valores fijos de ξ , un aumento en el valor de α produce una disminución en el valor de la frecuencia del modo f para un valor dado de masa, M . Analizamos el modo f , en particular, dado que se espera que al resultar perturbado un dado objeto compacto, la mayor parte de la energía se canalice en este modo (ver, por ejemplo, Ref. [58] y sus referencias).

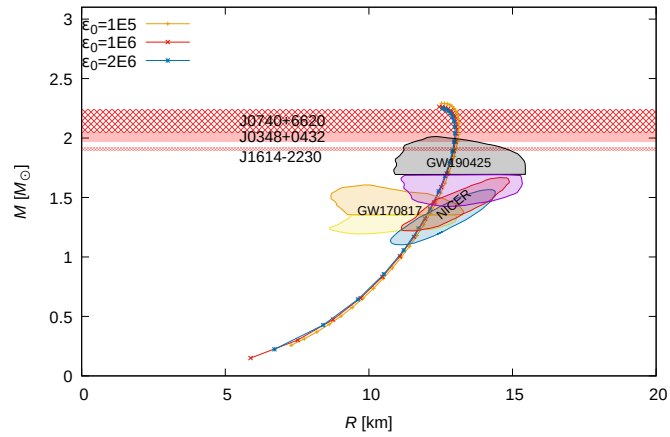
Vamos a elegir las configuraciones particulares $\alpha = 0.6$ $\xi = 899$ y $\alpha = 0.8$ $\xi = 879$, y $\alpha = 0.8$ $\xi = 919$, para ver cómo se modifican las frecuencias del modo f si variamos la densidad central de energía oscura. Ya en la figura 6.8 podemos notar que no se observa una variación relevante para las curvas cuando la densidad pasa de $\epsilon_{c, \text{dark}} = 10^6 \text{MeV}/\text{fm}^3$ a $\epsilon_{c, \text{dark}} = 2 \times 10^6 \text{MeV}/\text{fm}^3$. Sin embargo, podemos notar que los radios y las masas aumentan cuando la densidad de energía central oscura disminuye a $\epsilon_{c, \text{dark}} = 10^5 \text{MeV}/\text{fm}^3$.

Luego en el gráfico 6.10 podemos notar que si dejamos fijos tanto el parámetro de interacción fuerte, α como ξ , a una dada masa, la frecuencia del modo f aumenta al aumentar el valor de la densidad central de MO. Independientemente de la elección que hagamos de estos dos parámetros, los resultados son

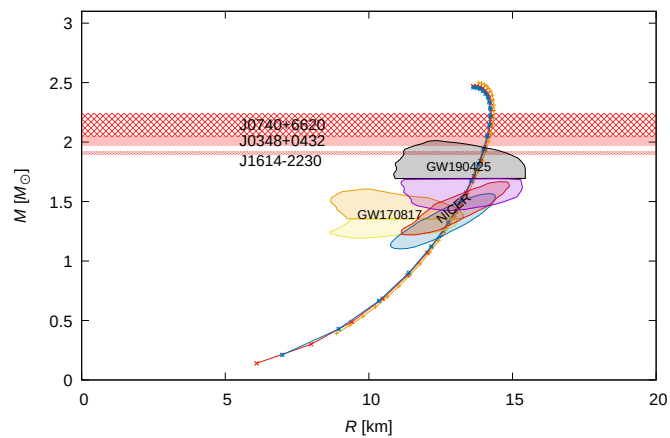
CAPÍTULO 6. RESULTADOS DE LAS CONFIGURACIONES ESTELARES ESTUDIADAS



(a) $\alpha = 0,6$, $\xi = 899$, $B = 136$ MeV



(b) $\alpha = 0,8$, $\xi = 919$, $B = 131$ MeV



(c) $\alpha = 0,6$, $\xi = 879$, $B = 133$ MeV

Figura 6.8: Curvas de Masa-Radius para distintas configuraciones de EQ con núcleos de MO, donde fijamos los parámetros α y ξ , y variamos la densidad central de energía oscura, para los mismos tres valores diferentes de densidad de energía central de la figura 6.7.

CAPÍTULO 6. RESULTADOS DE LAS CONFIGURACIONES ESTELARES ESTUDIADAS

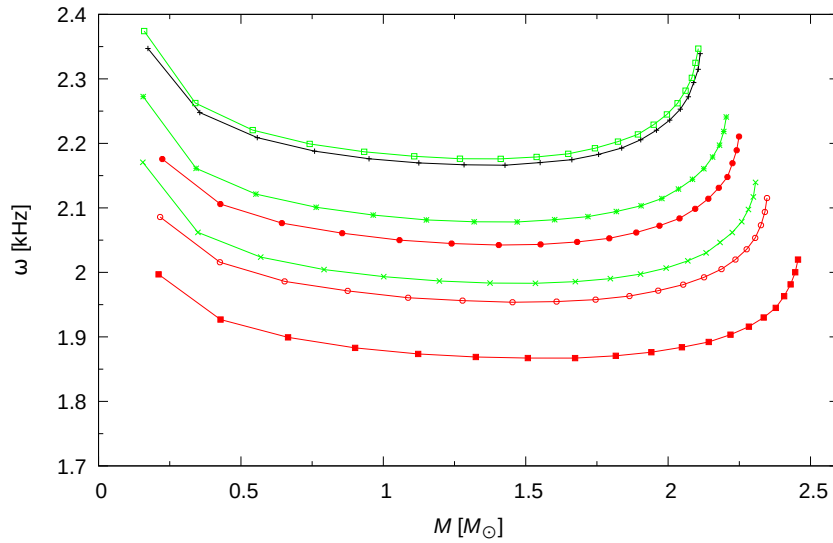
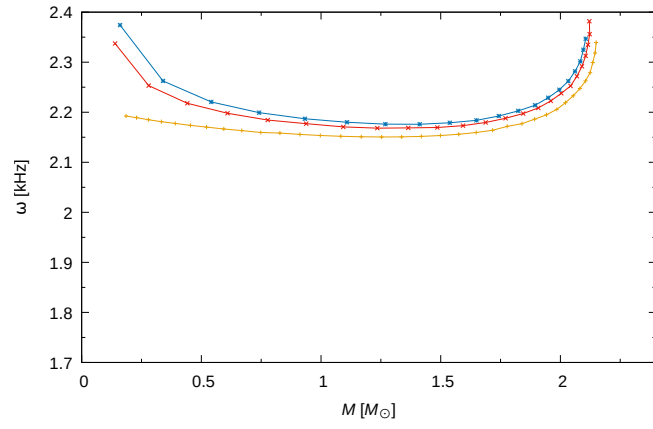


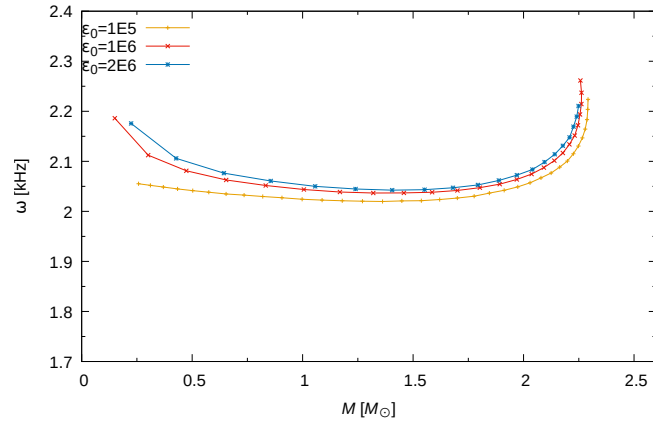
Figura 6.9: Curvas de frecuencia versus masa para EQ con núcleo de materia oscura, con $\epsilon_{c_{dark}} = 2 \times 10^6$. Estas curvas se corresponden con algunas de las configuraciones estelares de la figura 6.6.

cualitativamente similares. Observamos que este efecto es mucho más evidente para objetos de muy baja masa ($M \lesssim 0,5M_{\odot}$) donde la diferencia entre suponer $\epsilon_{c_{dark}} = 10^5 \text{MeV}/\text{fm}^3$ y $\epsilon_{c_{dark}} = 2 \times 10^6 \text{MeV}/\text{fm}^3$ puede llegar al $\sim 10\%$. Por el contrario, para una EN típica de $1.4 M_{\odot}$ las diferencias son menos apreciables, siendo menores al 2% . Cerca del pico de masa máxima, nuevamente las diferencias se hacen apreciables.

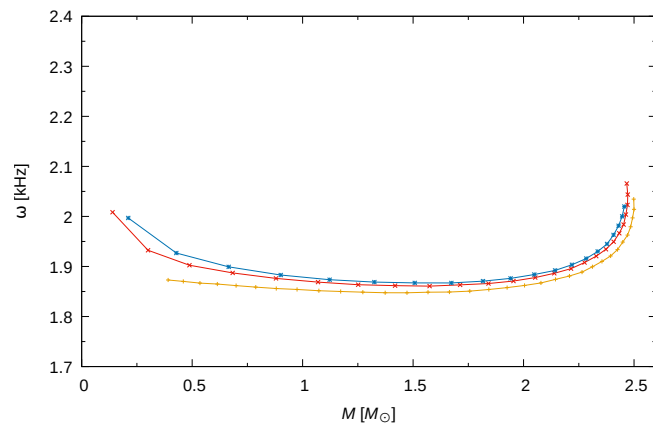
CAPÍTULO 6. RESULTADOS DE LAS CONFIGURACIONES ESTELARES ESTUDIADAS



(a) $\alpha = 0,6$, $\xi = 899$



(b) $\alpha = 0,8$, $\xi = 919$



(c) $\alpha = 0,6$, $\xi = 879$

Figura 6.10: Curvas de frecuencia versus masa para distintas configuraciones de EQ con núcleo de M_{\odot} , donde fijamos los parámetros α y ξ , y variamos la densidad central de energía oscura. Estas curvas se corresponden con algunas de las configuraciones estelares de la figura 6.8.

Capítulo 7

Conclusiones y perspectivas

En esta tesis, estudiamos cuál es la influencia de la MO en EQ, objetos compactos hipotéticos que podrían ser una alternativa para explicar las observaciones provenientes de púlsares masivos y ondas gravitacionales. Si la materia que conforma estos objetos autoligados, fuera más estable que el núcleo más estable que existe en la naturaleza, el ^{56}Fe , la existencia de EQ sería posible.

Para analizar la estabilidad de la materia de quarks, construimos la llamada *ventana de estabilidad*. Para construirla, impusimos la condición de una energía por barión menor a la del ^{56}Fe y trabajamos con materia que cumpla con las condiciones de equilibrio químico y neutralidad de carga eléctrica. Teniendo en cuenta estas ventanas de estabilidad, analizamos el efecto que produce considerar la masa del quark extraño, s , en la EdE de la materia de quarks y las consecuencias en las correspondientes familias de EQ obtenidas con dichas EdE. Nuestros resultados muestran que en la materia de quarks sin correcciones debida a la constante de acoplamiento fuerte, es decir con $\alpha = 0$, considerar una masa del quark s , $m_s \neq 0$ en la EdE resulta en curvas masa-radio cuya masa máxima no llega a las $2 M_\odot$. Por ello, incluimos en la EdE de los quarks, la corrección debida a la constante de acoplamiento fuerte, α , en el contexto del modelo de bolsa del MIT. Esto nos permitió establecer valores para la constante de bolsa B como función de α para obtener EdE de materia absolutamente estable. En el caso de materia de quarks con dos sabores, u y d , la estabilidad no es posible, al menos en considerando el modelo de bolsa del MIT.

Construimos diferentes familias de EQ resolviendo las ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV). Los resultados muestran que las EQ sin MO y con EdE con correcciones debida a la constante de acoplamiento fuerte satisfacen las cotas observacionales actuales en el contexto de nuestro modelo, si $0.4 \lesssim \alpha \lesssim 0.8$.

Para la EdE de la MO, supusimos un gas de Fermi de partículas masivas incluyendo, además, una corrección fenomenológica que simula la interacción entre ellas. La masa de las partículas de materia oscura fue fijada a 100 GeV, y consi-

CAPÍTULO 7. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

deramos dos casos para la interacción materia de quarks-materia oscura: el caso sin interacción, es decir $y = 0$, y el caso con interacción fuerte $y = 1000$, siendo y el parámetro que caracteriza dicha interacción. Debido a las escalas de masa y energía de este tipo de materia, testeamos el código que calcula las configuraciones de equilibrio hidrostático construyendo estrellas de MO con y sin parámetro de interacción entre los fermiones oscuros. Nuestros resultados indican configuraciones de 2-3 órdenes de magnitud mayores en masa-radio para estrellas de MO con fermiones oscuros que interactúan entre sí, si las comparamos con aquellas en las que las partículas de MO no interactúan.

Luego, construimos diferentes familias de EQ considerando la posibilidad de que pudieran contener núcleos de MO en su interior. Para este tipo de estrellas tuvimos en cuenta el formalismo de dos fluidos, de manera que la materia de quarks y oscura solo estuvieran acopladas por efecto de la gravedad. Luego de haber construido las EQ sin la presencia de MO, elegimos configuraciones representativas de dichas estrellas que satisfagan todas las restricciones observacionales actuales e incorporamos el núcleo de MO. Los resultados indican que EQ con núcleo de MO son consistentes con las observaciones de púlsares masivos, las observaciones de NICER y los eventos de ondas gravitacionales GW170817 y GW190425.

Por otro lado, variamos la densidad de energía central de los núcleos de MO en las EQ y estudiamos como se modifica, en consecuencia, la masa de estas estrellas. Obtuvimos que un aumento de la densidad de energía de MO produce una masa menor en la estrella de masa máxima.

Asimismo, calculamos las frecuencias de oscilación de este tipo de objetos en el contexto de la aproximación de Cowling, en la que las perturbaciones a la métrica se consideran despreciables. Nos enfocamos en el estudio del modo fundamental, f , dado que se espera que éste sea el modo más fácilmente detectable con futuras generaciones de detectores de ondas gravitacionales. Elegidas las EQ y las respectivas densidades centrales para la MO, calculamos la frecuencia de oscilación del modo f para algunas de las configuraciones estelares obtenidas. Los resultados muestran que, para los casos analizados, la frecuencia del modo f toma valores cercanos a los 2 kHz, en el rango $1,9\text{kHz} \lesssim \omega_f \lesssim 2,4\text{kHz}$. Sería interesante explorar la posibilidad de que alguna frecuencia asociada con el modo g pueda ser detectable cuando las EQ contienen un pequeño núcleo de MO.

Pretendemos, en una próxima etapa, analizar el efecto de la MO en EN y/o híbridas. En particular, sería interesante investigar los cambios que podrían producirse en la emisión de ondas gravitacionales de las EN con MO a través del estudio de características distintivas en las frecuencias de los modos de oscilación no radiales de estos objetos compactos, pero considerando el formalismo en el marco de la teoría de la Relatividad General linealizada.

CAPÍTULO 7. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

Múltiples observaciones astrofísicas y cosmológicas independientes apuntan a la existencia de materia oscura eléctricamente neutra y casi desacoplada, que interactúa gravitacionalmente con la materia ordinaria. Descubrir qué es exactamente la materia oscura y qué papel desempeña en la astrofísica y la cosmología es fundamental para comprender la historia y el destino del Universo. Quizás a través del estudio detallado de objetos compactos, obtengamos una respuesta.

Bibliografía

- [1] M. C. Rodríguez, I. F. Ranea-Sandoval, M. Mariani, M. G. Orsaria, G. Malfatti, and O. M. Guilera, “Hybrid stars with sequential phase transitions: the emergence of the g_2 mode,” *JCAP*, vol. 02, p. 009, 2021.
- [2] M. G. Orsaria, G. Malfatti, M. Mariani, I. F. Ranea-Sandoval, F. García, W. M. Spinella, G. A. Contrera, G. Lugones, and F. Weber, “Phase transitions in neutron stars and their links to gravitational waves,” *J. Phys. G*, vol. 46, no. 7, p. 073002, 2019.
- [3] T. E. Riley, A. L. Watts, S. Bogdanov, P. S. Ray, R. M. Ludlam, S. Guillot, Z. Arzoumanian, C. L. Baker, A. V. Bilous, D. Chakrabarty, and et al., “A nicer view of psr j0030+0451: Millisecond pulsar parameter estimation,” *The Astrophysical Journal*, vol. 887, p. L21, Dec 2019.
- [4] M. C. Miller, F. K. Lamb, A. J. Dittmann, S. Bogdanov, Z. Arzoumanian, K. C. Gendreau, S. Guillot, A. K. Harding, W. C. G. Ho, J. M. Lattimer, R. M. Ludlam, S. Mahmoodifar, S. M. Morsink, P. S. Ray, T. E. Strohmayer, K. S. Wood, T. Enoto, R. Foster, T. Okajima, G. Prigozhin, and Y. Soong, “PSR j00300451 mass and radius from NICER data and implications for the properties of neutron star matter,” *The Astrophysical Journal*, vol. 887, p. L24, dec 2019.
- [5] B. P. Abbott and et al., “Gw170817: Observation of gravitational waves from a binary neutron star inspiral,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 119, p. 161101, Oct 2017.
- [6] F. Weber, *Pulsars as astrophysical laboratories for nuclear and particle physics*. Routledge, 2017.
- [7] D. Deb, M. Khlopov, F. Rahaman, S. Ray, and B. Guha, “Anisotropic strange stars in the einstein–maxwell spacetime,” *The European Physical Journal C*, vol. 78, no. 6, pp. 1–13, 2018.
- [8] A. R. Bodmer, “Collapsed nuclei,” *Phys. Rev.*, vol. D4, pp. 1601–1606, 1971.

BIBLIOGRAFÍA

- [9] E. Witten, “Cosmic Separation of Phases,” *Phys. Rev.*, vol. D30, pp. 272–285, 1984.
- [10] F. Zwicky, “The redshift of extragalactic nebulae,” *Helvetica Physica Acta*, vol. 6, pp. 110–127, 1933.
- [11] J. L. Feng, “Dark matter candidates from particle physics and methods of detection,” *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, vol. 48, p. 495–545, Aug 2010.
- [12] P. Ciarcelluti and F. Sandin, “Have neutron stars a dark matter core?,” *Physics Letters B*, vol. 695, p. 19–21, Jan 2011.
- [13] P. Mukhopadhyay and J. Schaffner-Bielich, “Quark stars admixed with dark matter,” *Physical Review D*, vol. 93, Apr 2016.
- [14] P. Demorest, T. Pennucci, S. Ransom, M. Roberts, and J. Hessels, “Shapiro Delay Measurement of A Two Solar Mass Neutron Star,” *Nature*, vol. 467, pp. 1081–1083, 2010.
- [15] J. Antoniadis *et al.*, “A Massive Pulsar in a Compact Relativistic Binary,” *Science*, vol. 340, p. 6131, 2013.
- [16] M. Linares, T. Shahbaz, and J. Casares, “Peering into the dark side: Magnesium lines establish a massive neutron star in PSR j22155135,” *The Astrophysical Journal*, vol. 859, p. 54, may 2018.
- [17] H. T. Cromartie, E. Fonseca, S. M. Ransom, P. B. Demorest, Z. Arzoumanian, H. Blumer, P. R. Brook, M. E. DeCesar, T. Dolch, J. A. Ellis, R. D. Ferdman, E. C. Ferrara, N. Garver-Daniels, P. A. Gentile, M. L. Jones, M. T. Lam, D. R. Lorimer, R. S. Lynch, M. A. McLaughlin, C. Ng, D. J. Nice, T. T. Pennucci, R. Spiewak, I. H. Stairs, K. Stovall, J. K. Swiggum, and W. W. Zhu, “Relativistic Shapiro delay measurements of an extremely massive millisecond pulsar,” *Nature Astronomy*, vol. 4, pp. 72–76, Jan. 2020.
- [18] C. A. Raithel, F. Özel, and D. Psaltis, “Tidal deformability from GW170817 as a direct probe of the neutron star radius,” *The Astrophysical Journal*, vol. 857, p. L23, apr 2018.
- [19] E. Annala, T. Gorda, A. Kurkela, and A. Vuorinen, “Gravitational-Wave Constraints on the Neutron-Star-Matter Equation of State,” , vol. 120, p. 172703, Apr. 2018.

- [20] T. Malik, N. Alam, M. Fortin, C. Providência, B. K. Agrawal, T. K. Jha, B. Kumar, and S. K. Patra, “GW170817: Constraining the nuclear matter equation of state from the neutron star tidal deformability,” , vol. 98, p. 035804, Sept. 2018.
- [21] E. R. Most, L. R. Weih, L. Rezzolla, and J. Schaffner-Bielich, “New Constraints on Radii and Tidal Deformabilities of Neutron Stars from GW170817,” , vol. 120, p. 261103, June 2018.
- [22] F. J. Fattoyev, J. Piekarewicz, and C. J. Horowitz, “Neutron Skins and Neutron Stars in the Multimessenger Era,” , vol. 120, p. 172702, Apr. 2018.
- [23] B. P. Abbott, R. Abbott, T. D. Abbott, S. Abraham, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, R. X. Adhikari, V. B. Adya, C. Affeldt, and et al., “Gw190425: Observation of a compact binary coalescence with total mass $\sim 3.4 m_{\odot}$,” *The Astrophysical Journal*, vol. 892, p. L3, Mar 2020.
- [24] A. Athem Alsabti, “Handbook of Supernovae,” in *IAU General Assembly*, vol. 29, p. 2253696, Aug. 2015.
- [25] E. O’Connor and C. D. Ott, “Black Hole Formation in Failing Core-Collapse Supernovae,” , vol. 730, p. 70, Apr. 2011.
- [26] T. Sukhbold, T. Ertl, S. E. Woosley, J. M. Brown, and H. T. Janka, “Core-collapse Supernovae from 9 to 120 Solar Masses Based on Neutrino-powered Explosions,” , vol. 821, p. 38, Apr. 2016.
- [27] I. Sagert, M. Hempel, C. Greiner, and J. Schaffner-Bielich, “Compact stars for undergraduates,” *European Journal of Physics*, vol. 27, pp. 577–610, May 2006.
- [28] M. Mariani, M. G. Orsaria, I. F. Ranea-Sandoval, and G. Lugones, “Magnetized hybrid stars: effects of slow and rapid phase transitions at the quark–hadron interface,” *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, vol. 489, no. 3, pp. 4261–4277, 2019.
- [29] A. P. Martínez, R. G. Felipe, M. Orsaria, and E. L. Fune, “Estabilidad de la materia extraña y posibles estrellas de quarks,” *Revista iberoamericana de física*, vol. 4, no. 1, pp. 13–22, 2008.
- [30] F. Weber, M. Orsaria, H. Rodrigues, and S.-H. Yang, “Structure of quark stars,” *Proceedings of the International Astronomical Union*, vol. 8, p. 61–66, Aug 2012.

BIBLIOGRAFÍA

- [31] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn, and V. F. Weisskopf, “New extended model of hadrons,” *Phys. Rev. D*, vol. 9, pp. 3471–3495, Jun 1974.
- [32] T. Kodama, “Introduction to relativistic gases,” 01 2002.
- [33] J. M. Lattimer, “Introduction to neutron stars,” *AIP Conf. Proc.*, vol. 1645, no. 1, pp. 61–78, 2015.
- [34] J. R. Oppenheimer and G. M. Volkoff, “On massive neutron cores,” *Phys. Rev.*, vol. 55, pp. 374–381, Feb 1939.
- [35] A. G. Cameron, “Neutron Star Models.,” *ApJ*, vol. 130, p. 884, Nov 1959.
- [36] E. Farhi and R. L. Jaffe, “Strange matter,” , vol. 30, pp. 2379–2390, Dec. 1984.
- [37] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes in Fortran 90: Numerical recipes in Fortran 77V. 2. Numerical recipes in Fortran 90*. Cambridge University Press, 1996.
- [38] M. Tanabashi, K. Hagiwara, K. Hikasa, K. Nakamura, Y. Sumino, F. Takahashi, J. Tanaka, K. Agashe, G. Aielli, C. Amsler, M. Antonelli, D. M. Asner, H. Baer, S. Banerjee, R. M. Barnett, T. Basaglia, C. W. Bauer, J. J. Beatty, V. I. Belousov, J. Beringer, S. Bethke, A. Bettini, H. Bichsel, O. Biebel, K. M. Black, E. Blucher, O. Buchmuller, V. Burkert, M. A. Bychkov, R. N. Cahn, M. Carena, A. Ceccucci, A. Cerri, D. Chakraborty, M.-C. Chen, R. S. Chivukula, G. Cowan, O. Dahl, G. D’Ambrosio, T. Damour, D. de Florian, A. de Gouvêa, T. DeGrand, P. de Jong, G. Dissertori, B. A. Dobrescu, M. D’Onofrio, M. Doser, M. Drees, H. K. Dreiner, D. A. Dwyer, P. Eerola, S. Eidelman, J. Ellis, J. Erler, V. V. Ezhela, W. Fetscher, B. D. Fields, R. Firestone, B. Foster, A. Freitas, H. Gallagher, L. Garren, H.-J. Gerber, G. Gerbier, T. Gershon, Y. Gershtein, T. Gherghetta, A. A. Godizov, M. Goodman, C. Grab, A. V. Gritsan, C. Grojean, D. E. Groom, M. Grünewald, A. Gurtu, T. Gutsche, H. E. Haber, C. Hanhart, S. Hashimoto, Y. Hayato, K. G. Hayes, A. Hebecker, S. Heinemeyer, B. Heltsley, J. J. Hernández-Rey, J. Hisano, A. Höcker, J. Holder, A. Holtkamp, T. Hyodo, K. D. Irwin, K. F. Johnson, M. Kado, M. Karliner, U. F. Katz, S. R. Klein, E. Klempt, R. V. Kowalewski, F. Krauss, M. Kreps, B. Krusche, Y. V. Kuyanov, Y. Kwon, O. Lahav, J. Laiho, J. Lesgourgues, A. Liddle, Z. Ligeti, C.-J. Lin, C. Lippmann, T. M. Liss, L. Littenberg, K. S. Lugovsky, S. B. Lugovsky, A. Lusiani, Y. Makida, F. Maltoni, T. Mannel, A. V. Manohar, W. J. Marciano, A. D. Martin, A. Masoni, J. Matthews, U.-G. Meißner, D. Milstead, R. E. Mitchell,

- K. Mönig, P. Molaro, F. Moortgat, M. Moskovic, H. Murayama, M. Narain, P. Nason, S. Navas, M. Neubert, P. Nevski, Y. Nir, K. A. Olive, S. Pagan Gri-so, J. Parsons, C. Patrignani, J. A. Peacock, M. Pennington, S. T. Petcov, V. A. Petrov, E. Pianori, A. Piepke, A. Pomarol, A. Quadt, J. Rademacker, G. Raffelt, B. N. Ratcliff, P. Richardson, A. Ringwald, S. Roesler, S. Rolli, A. Romaniouk, L. J. Rosenberg, J. L. Rosner, G. Rybka, R. A. Ryutin, C. T. Sachrajda, Y. Sakai, G. P. Salam, S. Sarkar, F. Sauli, O. Schneider, K. Schol-berg, A. J. Schwartz, D. Scott, V. Sharma, S. R. Sharpe, T. Shutt, M. Silari, T. Sjöstrand, P. Skands, T. Skwarnicki, J. G. Smith, G. F. Smoot, S. Spanier, H. Spieler, C. Spiering, A. Stahl, S. L. Stone, T. Sumiyoshi, M. J. Syphers, K. Terashi, J. Terning, U. Thoma, R. S. Thorne, L. Tiator, M. Titov, N. P. Tkachenko, N. A. Törnqvist, D. R. Tovey, G. Valencia, R. Van de Water, N. Varelas, G. Venanzoni, L. Verde, M. G. Vincter, P. Vogel, A. Vogt, S. P. Wakely, W. Walkowiak, C. W. Walter, D. Wands, D. R. Ward, M. O. Wasc-ko, G. Weiglein, D. H. Weinberg, E. J. Weinberg, M. White, L. R. Wiencke, S. Willocq, C. G. Wohl, J. Womersley, C. L. Woody, R. L. Workman, W.-M. Yao, G. P. Zeller, O. V. Zenin, R.-Y. Zhu, S.-L. Zhu, F. Zimmermann, P. A. Zyla, J. Anderson, L. Fuller, V. S. Lugovsky, and P. Schaffner, “Review of particle physics,” *Phys. Rev. D*, vol. 98, p. 030001, Aug 2018.
- [39] B. Holdom, J. Ren, and C. Zhang, “Quark Matter May Not Be Strange,” , vol. 120, p. 222001, June 2018.
- [40] A. Vázquez-González and T. Matos, “La materia oscura del universo: retos y perspectivas,” *Revista Mexicana de Fisica E*, vol. 54, pp. 193–202, Dec. 2008.
- [41] G. A. Caldera-Cabral and L. A. Ureña-López, “Materia y energía oscuras, ¿qué son?,” *Revista Mexicana de Fisica Supplement*, vol. 53, pp. 17–21, Jan. 2007.
- [42] B. Carr, “Baryonic dark matter,” *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, vol. 32, no. 1, pp. 531–590, 1994.
- [43] P. J. E. Peebles, “Large scale background temperature and mass fluctuations due to scale invariant primeval perturbations,” *Astrophys. J. Lett.*, vol. 263, pp. L1–L5, 1982.
- [44] J. Bond and A. Szalay, “The collisionless damping of density fluctuations in an expanding universe,” 1983.

BIBLIOGRAFÍA

- [45] J. L. Feng, “Dark matter candidates from particle physics and methods of detection,” *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, vol. 48, pp. 495–545, 2010.
- [46] S.-C. Leung, M.-C. Chu, and L.-M. Lin, “Dark-matter admixed neutron stars,” *Physical Review D*, vol. 84, Nov 2011.
- [47] J. Ellis, A. Hektor, G. Hütsi, K. Kannike, L. Marzola, M. Raidal, and V. Vas-konen, “Search for dark matter effects on gravitational signals from neutron star mergers,” *Physics Letters B*, vol. 781, pp. 607–610, 2018.
- [48] J. Ellis, G. Hütsi, K. Kannike, L. Marzola, M. Raidal, and V. Vaskonen, “Dark matter effects on neutron star properties,” *Phys. Rev. D*, vol. 97, p. 123007, Jun 2018.
- [49] K.-C. Yang, “Fermionic dark matter through a light pseudoscalar portal: Hints from the DAMA results,” , vol. 94, p. 035028, Aug. 2016.
- [50] R. C. Tolman, “Static solutions of einstein’s field equations for spheres of fluid,” *Phys. Rev.*, vol. 55, pp. 364–373, Feb 1939.
- [51] L. S. Finn, “G-modes in zero-temperature neutron stars,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 227, pp. 265–293, Jul 1987.
- [52] L. S. Finn, “Relativistic stellar pulsations in the Cowling approximation,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 232, pp. 259–275, May 1988.
- [53] C. Vásquez Flores and G. Lugones, “Discriminating hadronic and quark stars through gravitational waves of fluid pulsation modes,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 31, p. 155002, Aug 2014.
- [54] C. Chirenti, G. H. de Souza, and W. Kastaun, “Fundamental oscillation modes of neutron stars: Validity of universal relations,” *Physical Review D: Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*, vol. 91, p. 044034, Feb 2015.
- [55] I. F. Ranea-Sandoval, O. M. Guilera, M. Mariani, and M. G. Orsaria, “Oscillation modes of hybrid stars within the relativistic Cowling approximation,” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2018, p. 031, Dec 2018.
- [56] C. V. Flores and G. Lugones, “Constraining color flavor locked strange stars in the gravitational wave era,” *Phys. Rev. C*, vol. 95, p. 025808, Feb 2017.

- [57] H. Sotani, N. Yasutake, T. Maruyama, and T. Tatsumi, “Signatures of hadron-quark mixed phase in gravitational waves,” *Physical Review D: Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*, vol. 83, p. 024014, Jan 2011.
- [58] K. Glampedakis and L. Gualtieri, *Gravitational Waves from Single Neutron Stars: An Advanced Detector Era Survey*, vol. 457, p. 673. 2018.