EMCI Educación Matemática en Carreras de Ingeniería

UCU Universidad Católica del Uruguay

Conceptos de Paridad y Periodicidad de una Función en Carreras de Ingeniería: un Estudio de Caso

Viviana Angélica Costa, María de las Mercedes Trípoli

IMApEC, Departamento de Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata
Av. 1 y 47, CP1900, La Plata, Buenos Aires, Argentina
vacosta@ing.unlp.edu.ar, mercedes.tripoli@ing.unlp.edu.ar

Resumen. En este trabajo se destaca la importancia que poseen los conceptos de paridad y periodicidad de una función, como herramienta matemática por su utilidad en diversos campos de la ingeniería. Se elabora un estudio de caso en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata, que comprende varios aspectos. Se revisan los contenidos curriculares y las guías de estudio de las asignaturas de matemática en esa Facultad, y la bibliografía recomendada, con el objetivo de conocer cuándo y cómo se estudian esos conceptos. Luego se realiza un cuestionario a un grupo de estudiantes de distintos años y carreras sobre cuáles conocimientos poseen acerca de las funciones pares, impares y periódicas. Se concluye que esos conceptos son, en general, relegados en las guías de estudio y que los estudiantes vinculan la noción de periodicidad con las funciones trigonométricas y la noción de paridad no es siempre identificada por ellos.

Palabras Clave: Función periódica, Par, Impar, Ingeniería, Enseñanza.

1 Introducción

Sin importar la especialidad a la cual se dedique un profesional de la ingeniería, una de las ciencias que más utilizará es la matemática y, por consiguiente, deberá tener habilidades bien desarrolladas para trabajar con ella. Por ello, es necesario saber qué tipo de conceptos, saberes y objetos matemáticos debe conocer el ingeniero, tanto al transitar por el proceso formativo, como al ejercer su profesión.

La rama matemática conocida como Cálculo Diferencial e Integral es una herramienta poderosa para resolver múltiples problemas que surgen en Física, Astronomía, Ingeniería, Química, Geología, Biología, y otros campos nuevos que van surgiendo por al avance acelerado de la ciencia y de la tecnología. El Cálculo Diferencial e Integral reúne los conceptos básicos fundamentales que el ingeniero de las diferentes especialidades requerirá en la modelación matemática para resolver los problemas que se le presenten. Es por ello necesario que el estudiante de ingeniería adquiera la habilidad de comprender un conjunto de conceptos y operaciones de cálculo para afrontar las asignaturas que tiene a lo largo de su carrera y obtener éxito en las mismas.

En particular, los conceptos de paridad y de periodicidad son importantes en carreras de ingeniería, ya que su conocimiento permite realizar cálculos de modos más sencillos, reducir varios de los cálculos que se presentan, e inferir características cualitativas de una función (como por ejemplo, de su derivada o primitiva en caso de existir). Asimismo, las funciones periódicas son herramientas de modelización de fenómenos físicos que presentan un comportamiento ondulatorio, como vibraciones, ondas mecánicas, ondas acústicas, ondas gravitacionales, que son de estudio común en diversas especialidades de la ingeniería.

Dichos conceptos también son utilizados en el estudio de la aproximación de funciones mediante la Serie de Fourier (serie infinita que converge puntualmente a una función periódica y continua a trozos). Esta es una herramienta matemática básica del análisis de Fourier, que se emplea para analizar funciones periódicas a través de su descomposición en una suma infinita de funciones sinusoidales más simples (como combinación de senos y cosenos con frecuencias enteras). Además de ser una herramienta útil en la teoría matemática abstracta, es una aplicación muy utilizada en varias áreas de la ingeniería, que incluyen análisis vibratorio, acústica, óptica, procesamiento de imágenes y señales, y compresión de datos. Se utiliza en áreas donde se analizan y diseñan sistemas dinámicos; en ingeniería mecánica se utiliza para balancear rotores y eliminar la vibración que generan cuando no está balanceado, entre otros ejemplos.

No hay que olvidarse que la matemática para las ingenierías es un medio y no un fin, con lo cual es pertinente ofrecerles a los estudiantes conceptos matemáticos que les permitan optimizar su trabajo. Como menciona Santaló [1], la matemática la necesitan por sus aplicaciones, con lo que basta que tengan de ella una comprensión intuitiva que les permita ver claro en qué casos y de qué manera puede utilizarse.

Es así que dada la importancia de los conceptos mencionados en la ingeniería, surgen algunas preguntas vinculadas a la enseñanza y aprendizaje de los mismos, las cuales orientaron la investigación:

- ¿En qué momentos de la carrera, los alumnos que cursan en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata (FI-UNLP) estudian los conceptos de función periódica, par e impar?
- ¿Identifican la paridad y periodicidad de una función, los estudiantes de la FI-UNLP?
- ¿Utilizan los estudiantes, los conceptos y propiedades de las funciones pares e impares para resolver situaciones problemáticas, tanto intra como extra matemáticas?
- ¿Cuáles ideas o situaciones físicas asocian al concepto matemático de función periódica estudiantes que han cursado los primeros años de la carrera?

Con el objetivo de dar respuesta a estos interrogantes, se realizó una revisión de los contenidos curriculares de las asignaturas de matemática de la FI-UNLP, se analizaron los materiales de estudio teórico-prácticos que brindan las cátedras de matemática a sus estudiantes, así como alguna de la bibliografía recomendada. Además, se realizaron encuestas a estudiantes de distintos años y de distintas carreras, con carácter anónimo, con el objetivo de indagar acerca de los conocimientos que ellos poseen de tales conceptos.

El propósito de la investigación fue indagar sobre el conocimiento de estos conceptos por parte de los estudiantes de la FI-UNLP y en qué momento de la carrera lo adquieren, con el objetivo de generar estrategias didácticas de articulación con otras disciplinas del área básica y con materias tecnológicas básicas de las distintas carreras, además de destacar la importancia de estos conceptos y por ende su enseñanza. Este trabajo se enmarca en el Proyecto de Investigación y Desarrollo Acreditado de la UNLP: "Articulación en la enseñanza de las Ciencias Básicas en carreras de Ingeniería", integrado por docentes del Departamento de Ciencias Básicas de la FI.

Esta presentación se organizó del siguiente modo. Primero se presenta una breve reseña sobre la enseñanza de las matemáticas en la FI; en segundo lugar, se muestran las definiciones matemáticas de las funciones introducidas en este trabajo, así como las más importantes propiedades que poseen, que pueden ser aplicadas para facilitar tanto el planteo como la resolución matemática de una situación problemática que podría ser estudiada por un ingeniero. Luego se describe la metodología de la investigación, se muestran los resultados obtenidos y se exhiben las conclusiones y trabajos a futuro.

2 Las matemáticas en la Facultad de Ingeniería

En el año 2002, la FI realizó una reforma de los planes de estudio de todas sus carreras. Posteriormente se fueron haciendo revisiones que derivaron en cambios en algunas carreras, siendo la última reforma la acontecida en el año 2018 (en este caso para todas sus carreras). Dichas reformas se realizaron con el propósito de encuadrar las carreras dentro de los estándares definidos por el CONFEDI, para así posibilitar la acreditación por parte de la CONEAU.

En la reforma de 2002, el cambio curricular en las materias de matemática tuvo como objetivos: a) articular las asignaturas de matemática entre sí y con otras materias, b) mejorar el rendimiento en matemática y c) disminuir la dificultad del alumnado para recuperar los conceptos y herramientas matemáticas en otros contextos. Con el fin de mejorar la calidad de enseñanza impartida, el cambio incluyó que las materias de matemática fueran reorganizadas desde muchos puntos de vista: en cuanto a la organización de sus contenidos alrededor de ejes conceptuales, la conformación y el funcionamiento de sus equipos docentes, la metodología de la enseñanza y la infraestructura áulica; constituyendo esta reestructuración un posicionamiento innovador en el contexto de las Carreras de Ingeniería. En las reformas de los planes que se llevaron a cabo luego, sólo se revisó la organización de los contenidos.

Es pertinente destacar que, con respecto a la distribución de los contenidos, además de organizarlos alrededor de ejes conceptuales, se consideró la progresión en la apropiación de los métodos formales de la disciplina, de manera que los niveles de formalización exigidos sean bajos en la primera materia de matemática y más altos en la última. Este posicionamiento recayó en que el material teórico práctico para trabajar en clase se construya de modo que resultara funcional para una actividad que los estudiantes pudieran realizar por sí mismos –preferentemente en forma grupal - con la guía y la asistencia de los docentes.

Las clases de matemática pasaron de ser las llamadas “tradicionales”, a una metodología de trabajo en la cual se considera a las clases como espacios de actividad, donde se desplaza el foco: del profesor como centro, a la clase como una totalidad, en la cual todos trabajan. Se propicia el trabajo colaborativo tanto entre docente como entre alumnos, y entre docentes y alumnos. Asimismo, se propende a contribuir a un aprendizaje constructivo, cooperativo y orientado a la resolución de problemas. No es menor destacar que el espacio físico se acondicionó para posibilitar la forma de trabajo: aulas planas con mobiliario adecuado para favorecer el trabajo grupal.

Este cambio en la forma de trabajar se basó en ciertos referentes teóricos construidos por los docentes que realizaron la reforma, desde los cuales analizar decisiones, hechos y problemas: que el aprendizaje es un proceso constructivo interno, que la interacción social favorece el aprendizaje, que la motivación es un elemento esencial para una buena marcha del aprendizaje y que se aprende mejor aquello que se comprende [2,3,4].

3 Las funciones periódicas, pares e impares

3.1 Función periódica

Una función $f(x)$ es periódica si existe un número T tal que $f(x) = f(x+T)$, para todos los valores de x en su dominio. Es decir, que es una función que repite el mismo valor a intervalos regulares de la variable. Al menor número T se lo llama período y se denomina frecuencia “f” a la inversa del período: $f = 1/T$.

Los ejemplos más comunes de funciones periódicas son las funciones trigonométricas, que en combinaciones adecuadas se emplean en el análisis armónico. Sin embargo existen otras, como por ejemplo, la función mantisa.

3.2 Función par e impar

Una función $f(x)$ es par cuando cumple $f(x) = f(-x)$, para todos los valores del dominio. Es decir, las imágenes de valores opuestos coinciden. De esta manera, la gráfica de una función par es simétrica respecto del eje de las ordenadas.

Una función $f(x)$ es impar si cumple que $f(x) = -f(-x)$, para todos los valores del dominio. A valores opuestos de x corresponden imágenes opuestas. De esta manera, la gráfica de una función impar es simétrica respecto al origen de coordenadas.

3.3 Propiedades de las funciones periódicas, pares e impares

Las funciones periódicas, pares e impares tienen múltiples propiedades que son útiles para la resolución matemática, de un modo mucho más sencillo, de diversos problemas.

Algunas de estas propiedades son:

- Toda función continua se puede descomponer en la suma de una función par y de una impar.
- La única función que es tanto par e impar es la función nula.
- La suma de una función par y una impar no es ni par ni impar, a menos de que una de las funciones sea la nula.

- La suma de dos funciones pares es una función par y la suma de dos funciones impares es una función impar. Es decir que el conjunto de funciones pares (o impares) con la operación suma verifican la propiedad de cierre o de clausura.
- El producto de dos funciones pares es una función par, de dos funciones impares es una función par, de una función par y una función impar es una función impar.
- Si una función es par y existe su derivada, ésta es impar y si una función es impar, su derivada de existir, es par. Es decir que el conocimiento de la paridad de una función permite conocer el comportamiento de cualquiera de sus derivadas.
- Si $f(x)$ es impar, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.
- Si $f(x)$ es par, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$.
- La suma y producto de funciones periódicas de un mismo período es también periódica con el mismo período.
- Si una función es periódica y existe su derivada, ésta es también periódica.
- Si *f(x)* es periódica, entonces $\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{b}^{b+T} f(x)dx$, para a y b en el dominio de f.
- Los conjuntos formados por las funciones pares, impares y periódicas forman, cada uno de ellos, un espacio vectorial sobre el conjunto de los reales.
- El desarrollo en Serie de Taylor de una función par (impar) contiene sólo potencias pares (impares) de la variable y recíprocamente.
- La representación de funciones periódicas mediante Series de Fourier se simplifica en el caso de funciones pares o impares. En el caso que la función sea par, la representación en Series de Fourier sólo posee coeficientes con cosenos.

4 Metodología

La investigación es un estudio de caso, como bien detallan Gómez y Roquet [5], que analiza el fenómeno en la FI-UNLP. La revisión y análisis documental obtenido se interpreta cualitativamente. La metodología de la investigación es descriptiva y cualitativa.

Para comprender el fenómeno de estudio, y dar respuesta a las preguntas de investigación, se realizó una revisión de los contenidos curriculares de las asignaturas de matemática en esa facultad, así como del material de estudio de las mismas (editado por las cátedras y que se constituyen en el eje central del proceso de enseñanza y aprendizaje) y textos que forman parte de la bibliografía recomendada en relación a los conceptos de paridad y de periodicidad.

Además, se diseñó un cuestionario, en un formulario de Google Drive con acceso mediante enlace compartido, de carácter anónimo, como instrumento para obtener datos cuantitativos y cualitativos, destinado a estudiantes de distintos años y de distintas carreras de la Facultad. El cuestionario se compone de dos secciones. En la primera de ellas se indaga sobre las materias de matemática que el alumno tiene aprobadas y si posee conocimiento o no de las funciones periódicas, pares e impares. La segunda sección se dirige a los estudiantes que afirmaron conocer dichas funciones y se solicita clasificar varias funciones, según sean pares, impares, periódicas u otras. En esta parte se presentan siete funciones de variable real con casillas de verificación cada una: “Periódica”, “Par”, “Impar”, “Ninguna es correcta”, “No sé”. Las casillas de verificación permiten que el encuestado marque una o varias opciones. En algunos casos se muestra su gráfica y en otros se da la expresión analítica, con el objetivo de analizar si identifican las características de cada función independientemente del registro que se tenga de ella. Las funciones presentadas en el cuestionario contemplan distintas situaciones, sólo periódica, sólo par, periódica e impar, entre otras posibilidades.

5 Resultados

5.1 Contenidos curriculares de las asignaturas de matemática

De la revisión de los contenidos curriculares de las asignaturas de matemática que forman parte de los planes de estudio de las trece carreras que se dictan en la Facultad, se realizó el siguiente resumen:

- Matemática para Ingeniería: es una asignatura en la cual se repasan los temas de la escuela media, siendo un curso de nivelación en matemática.
- Matemática A (1° semestre): en esta asignatura se presentan las funciones, siendo su eje conceptual la variación en una y varias variables. Estudiar las características de las distintas funciones es central en la materia, ya que las mismas servirán para modelizar distintas situaciones.
- Matemática B (2° semestre): en esta asignatura se avanza en el estudio de las funciones, siendo el eje conceptual la integración en una y varias variables, por lo que las propiedades de las funciones cobran mucha importancia.
- Matemática C (3° semestre): en esta asignatura se estudia el álgebra lineal y aplicaciones, ecuaciones diferenciales lineales y aplicaciones y series de potencias. Se trabaja con matemática más avanzada donde las funciones periódicas, pares e impares se deben utilizar en los cálculos que se realizan. De hecho, se estudian las series de Fourier. Para varias especialidades, ésta es la última asignatura específica de matemática que tienen en su plan de estudios. El resto de las especialidades termina el ciclo básico con Matemática D.
- Matemática D (4° semestre): el objetivo de esta asignatura es utilizar herramientas metodológicas propias de la matemática para la descripción, modelización y resolución de problemas de las asignaturas específicas de las carreras. En cuanto a los contenidos, se estudian las funciones complejas de variable compleja, integración en el campo complejo, serie de Taylor y serie de Laurent, singularidades y teoría de residuo, transformada de Laplace (conceptos teóricos y resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias) y transformada e Integral de Fourier (conceptos teóricos y la relación con la transformada de Laplace).

5.2 Material de estudio y textos

Se analizaron los materiales educativos (guías de estudio teórico- prácticas) de las asignaturas de matemática. No se consideró para el análisis, Matemática para Ingeniería, ya que su contenido corresponde a temas de la escuela secundaria.

Se comenzó la revisión con las dos materias de matemática básica que se cursan en el primer año, Matemática A y Matemática B. En cuanto a Matemática A, en el primer capítulo del material de la cátedra (https://www.ing.unlp.edu.ar/catedras/F0301/) se definen las funciones numéricas y para el quinto capítulo aparecen las funciones circulares (también llamadas trigonométricas). Pero no se definen las funciones pares e impares. En cuanto a las funciones periódicas, dentro del capítulo cinco, se presenta el concepto de función periódica cuando se dice que las funciones circulares toman sus valores de forma periódica. Sin embargo, no se define función periódica en forma general. En Matemática B no se definen las funciones pares ni impares, y tampoco las periódicas (https://www.ing.unlp.edu.ar/catedras/F0302/).

En el material de estudio de Matemática C (https://www.ing.unlp.edu.ar/catedras/F0304/), dentro de la sección de Series de Potencias y Serie de Taylor, en los problemas que se plantean para resolver, se presenta una observación importante en donde se menciona que si una función es par, entonces su desarrollo de Mac-Laurin sólo contendrá potencias pares de la variable. También se hace una aclaración para las funciones impares. Asimismo, se menciona una propiedad de este tipo de funciones relacionada con la derivada. En la sección de Series de Fourier y ecuaciones diferenciales en derivadas parciales se define formalmente a las funciones periódicas y se dan ciertas propiedades de las mismas. Se recuerda a su vez, la definición de funciones pares e impares y se utilizan las mismas, a partir de allí, para facilitar los cálculos, de acuerdo a las propiedades que éstas poseen.

Con respecto a Matemática D, cuando se estudia la Transformada de Fourier, se mencionan propiedades de la misma relacionadas con la paridad de las funciones involucradas. Las funciones periódicas se mencionan cuando se calcula la Trasformada de Laplace de este tipo de funciones; no se definen, se usan.

En cuanto a los libros de texto, sólo se analizaron tres de Cálculo (básico) de los autores Larson y otros [6], Thomas y Weir [7] y Stewart [8], que forman parte de la bibliografía recomendada por las Cátedras de Matemática A y Matemática B. En la Tabla 1 se realiza un resumen de los conceptos de paridad y periodicidad de acuerdo a cómo se presentan en dichos textos.

Tabla 1. Libros de texto: conceptos de paridad y periodicidad de funciones reales.

Libro	**Función par e impar. Descripción**	**Función periódica. Descripción**
Larson, R., Hostetler, R. P., Edwards, B. H., Heyd, D. E., & Abellanas, L. (2006). Cálculo. McGraw-Hill.	En el Capítulo sobre preparación para el Cálculo, dentro de la sección de funciones y sus gráficas, se definen las funciones pares e impares, primero considerando la simetría respecto al eje y y al origen respectivamente, y luego de manera funcional, que $f(-x) = f(x)$ y que $f(-x) = -f(x)$.	En uno de los apéndices referido a repasar las funciones trigonométricas, se dice que una función f es periódica si existe un número no nulo p tal que $f(x+p)=f(x)$ para x en el dominio de f, donde el menor de tales valores positivos de p (si existe) se llama el período de f. Se mencionan los períodos de las funciones trigonométricas.
Thomas, G. B., & Weir, M. D. (2006). Cálculo: una variable. Pearson Educación.	En los preliminares del primer capítulo dice que las funciones pares e impares se caracterizan por sus simetrías y menciona cuáles son para este caso. Se explica que el hecho que $f(-x) = f(x)$, que caracteriza a las funciones pares, significa que un punto (x,y) está sobre la gráfica si y sólo si el punto $(-x,y)$ también lo está (y muestra un gráfico de la situación). Se hace lo mismo con las funciones impares. Se observa que las definiciones implican que tanto x como $-x$ deben estar en el dominio de f.	En los preliminares del primer capítulo se definen las funciones periódicas por ser una característica de las funciones trigonométricas y se definen como el texto de Larson y otros. Se observa que las funciones periódicas son importantes, ya que muchos de los comportamientos que se estudian en ciencias son casi periódicos. Uno de los teoremas del cálculo avanzado afirma que todas las funciones periódicas que se usan en la creación de modelos matemáticos pueden escribirse como una combinación algebraica de senos y cosenos. Luego se identifican las funciones trigonométricas como pares e impares, según el caso.
Stewart, J. (2006). Cálculo, conceptos y contextos, 3 ra Ed. International Thomson Editores, Distrito Federal, México.	En la primera sección del capítulo 1 se definen las funciones pares e impares de manera funcional. Da como ejemplos, $f(x)=x^2$ y $f(x)=x^3$, respectivamente. Menciona que el significado geométrico de una función par o impar se relaciona con la simetría con respecto al eje y si es par (y muestra una figura) y al origen si es impar. Explica que gráficamente significa que si hemos trazado la gráfica de f para $x \geq 0$, obtenemos toda la gráfica con sólo reflejar con respecto al eje y. Si ya tenemos la gráfica de f para $x \geq 0$, podemos obtener la gráfica entera al hacerla girar $180°$ alrededor del origen.	En el capítulo a cuando aparecen las funciones trigonométricas, se menciona que una propiedad importante de las funciones seno y coseno es que son periódicas y tienen período 2π. Y dice que esto significa que, para todos los valores de x, $sen(x+2\pi)=sen(x)$ y $cos(x+2\pi)=cos(x)$. La naturaleza periódica de estas funciones las hace apropiadas para modelar fenómenos repetitivos, como mareas, resortes vibrantes y las ondas sonoras.

En los tres libros analizados, se definen las funciones pares e impares, se dan algunos ejemplos y se menciona su significado geométrico, relacionado con la simetría de las funciones respecto de los ejes cartesianos. Esto es en contraposición con lo observado en los materiales de estudio de las asignaturas correspondientes, en los cuales no se definen dichos conceptos.

En cuanto a las funciones periódicas, se definen, pero en el contexto de las funciones trigonométricas, no como un tipo de funciones en particular. Esto de la misma manera que se observó en Matemática A, que es la asignatura de matemática en la cual aparecen (por primera vez) las funciones como una necesidad para modelar situaciones problemáticas.

Se consideró que no era necesario analizar textos de matemática avanzada utilizados en las otras asignaturas de matemática por comprender que los conceptos de paridad y periodicidad forman parte de la enseñanza básica del cálculo, y en esos tipos de libros ya sería una herramienta más que un concepto nuevo de matemática.

5.3 Cuestionario

Se obtuvieron 290 respuestas que se encuentran en el enlace compartido: https://docs.google.com/spreadsheets/d/1P3BsROzxv8i-qV9eGce-dpNxE_8p_j-INQzFyGYNtfk/edit?usp=sharing .

En cuanto a los resultados de la primera sección, se obtuvo que el 33,1% de los estudiantes mencionan tener aprobadas Matemática A, B, C y D, correspondiendo esto a 96 alumnos que estarían cursando materias del tercer año de la carrera. Al 36,2% les falta aprobar sólo Matemática D. La mayoría solamente tienen aprobadas Matemática A y B, por lo que estarían cursando el segundo año de la carrera.

El 74% mencionan haber estudiado o conocer el concepto de funciones pares e impares, e indican dónde lo estudiaron (Figura 1).

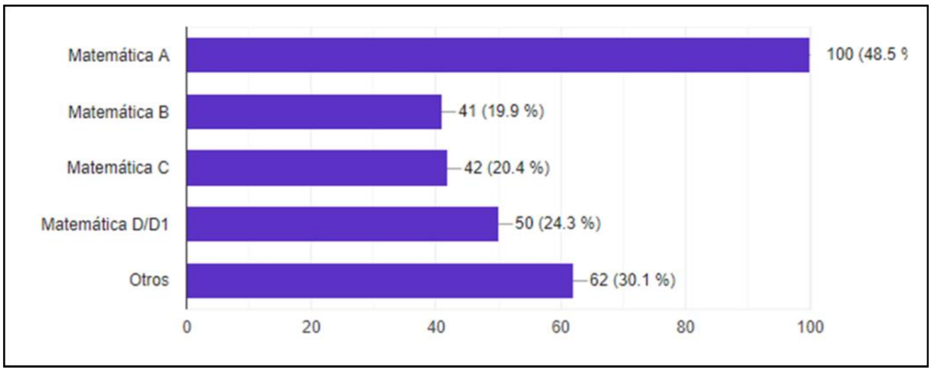


Fig. 1. Resultados acerca de en dónde los alumnos estudiaron el concepto de función par o impar.

Sobre el concepto de función periódica, el 87% menciona haberlo estudiado e indican dónde lo vieron (Figura 2).

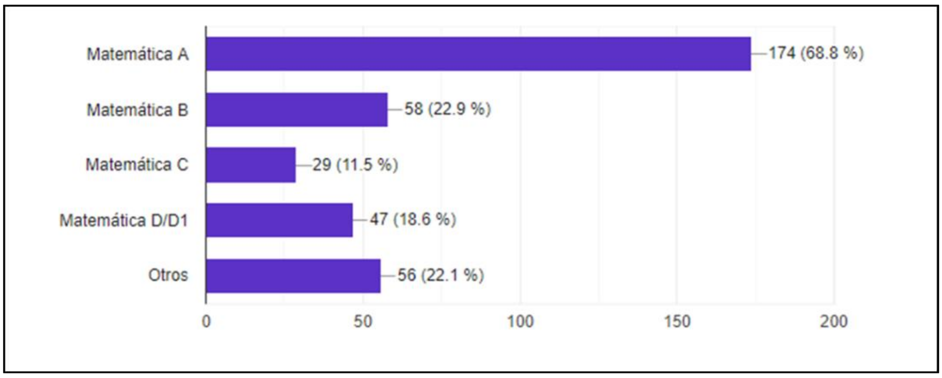


Fig. 2. Resultados acerca de en dónde los alumnos estudiaron el concepto de función periódica.

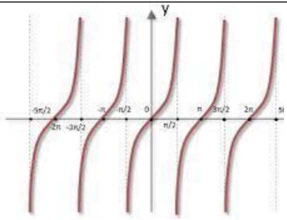
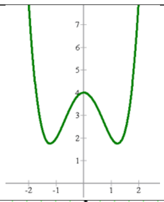
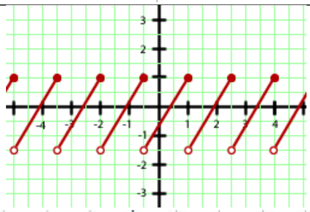
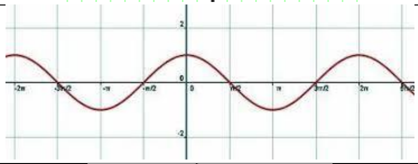
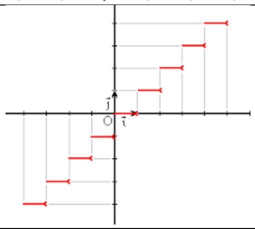
A la segunda sección podían acceder sólo aquellos estudiantes encuestados que habían manifestado conocer las funciones periódicas, pares e impares. Como ya se mencionó, en esta parte se presentaron siete funciones de variable real, con casillas de verificación cada una: “Periódica”, “Par”, “Impar”, “Ninguna es correcta”, “No sé”. Estas casillas de verificación permiten que el encuestado marque una o varias opciones.

En la Tabla 2 se muestran las funciones propuestas en la primera columna, las respuestas correctas en la segunda columna, y en la tercera columna los resultados obtenidos del cuestionario diferenciado en porcentajes.

Para las funciones que son periódicas, el mayor porcentaje de estudiantes que seleccionó la respuesta correcta, corresponde a la función coseno (en la que se presenta la gráfica) y a la función seno (que se da la expresión analítica). La función tangente también presenta un porcentaje importante y aquella que no es trigonométrica es la que tiene el menor porcentaje de respuestas correctas.

A pesar de que los estudiantes manifestaron conocer los conceptos de funciones pares e impares, no pudieron identificar, en mayor medida, este tipo de funciones. En el caso de la función par dada en forma analítica, sólo el 44% de los alumnos asociaron que era una función par, a pesar de conocer la expresión y que la variable independiente está elevada al cuadrado.

Tabla 2. Cuestionario sobre paridad, periodicidad. Resultados obtenidos.

Función propuesta	Característica	Respuestas
	Periódica Impar (Función tangente)	Periódica: 88% Par: 5% Impar: 46% Ninguna es correcta: 0% No sé: 2%
	Par	Periódica: 3% Par: 75% Impar: 5% Ninguna es correcta: 5% No sé: 12%
	Periódica	Periódica: 75% Par: 3% Impar: 15% Ninguna es correcta: 8% No sé: 12%
	Periódica Par (Función coseno)	Periódica: 93% Par: 42% Impar: 5% Ninguna es correcta: 1% No sé: 0,4%
	Ninguna	Periódica: 21% Par: 3% Impar: 28% Ninguna es correcta: 30% No sé: 25%
$f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$	Par	Periódica: 5% Par: 44% Impar: 12% Ninguna es correcta: 13% No sé: 12%
$f(x) = sen(x)$	Periódica Impar	Periódica: 92% Par: 9% Impar: 36% Ninguna es correcta: 0% No sé: 0,4%

En el caso de la función que no era ni periódica, ni par, ni impar, a pesar que el mayor porcentaje (30%) respondió correctamente, un 21% opinó que la función es periódica y un 25% impar.

Seguidamente se consultó sobre si habían utilizado en alguna oportunidad las propiedades de las funciones pares, impares y/o periódicas para resolver problemas de un modo más sencillo. El 62% de los estudiantes contestaron afirmativamente. Para terminar, se les pidió que mencionaran, en lo posible, alguna situación física que se modele mediante funciones periódicas. El 70% respondió, siendo las situaciones más señaladas: "ondas, MAS, ondas electromagnéticas, corriente alterna, ondas mecánicas, péndulo, ondas de sonido, electricidad, vibraciones periódicas, circuitos eléctricos".

6 Conclusiones y trabajos a futuro

En este trabajo se presentaron las funciones periódicas, pares e impares, sus propiedades y la importancia que posee su conocimiento para estudiantes en carreras de ingeniería. Se analizó cómo se presentan estos conceptos en los cursos básicos de matemática de la FI-UNLP: en los materiales de estudio y en los libros recomendados por las cátedras. Además, se encuestó a un grupo de estudiantes sobre sus conocimientos en tales conceptos.

Los resultados obtenidos evidencian que el concepto de paridad de funciones no está presente en las guías de estudio de las materias de matemática de primer año. Con respecto a las funciones periódicas, se mencionan por ser una propiedad de las funciones trigonométricas, en particular seno y coseno.

En los libros de texto analizados, que son parte de la bibliografía recomendada, se define el concepto de paridad y el de periodicidad se vincula con las funciones trigonométricas. Para las funciones pares e impares, se dan algunos ejemplos y se menciona su significado geométrico, relacionado con la simetría de las funciones.

En las materias de matemática de segundo año, las funciones pares e impares son utilizadas dado que es necesario para el desarrollo de algunos temas, como ya se mencionó en párrafos previos. Las funciones periódicas se definen en la tercera materia de matemática de manera general, aunque las que se utilizan para trabajar son las trigonométricas.

Del cuestionario se evidencia que las funciones periódicas son, por los alumnos, más frecuentemente reconocidas, tanto desde la gráfica como desde la representación analítica. No así las funciones pares e impares. Es interesante señalar que un número importante de estudiantes dicen haber estudiado el concepto de función par e impar en Matemática A y un número menor, menciona haberlo estudiado en Matemática B, materias en las cuales tanto los contenidos curriculares como el material de estudio no proponen estudiarlas. Esto podría deberse, o a una confusión por parte de los estudiantes de cuándo realmente definieron este tipo de funciones, o bien los docentes que tuvieron en esos cursos, las mencionaron.

Dado que en esta investigación se señala la importancia del concepto de paridad de funciones en la formación del ingeniero y dicho concepto se comienza a trabajar en el segundo año de las carreras, ¿qué beneficio tendrían los estudiantes de primer año al estudiar el concepto de función par e impar? Al momento de analizar una función para realizar su gráfica, se podría hacer un estudio cualitativo que permitiría, en algunos casos no considerar todo el dominio de la función para tomar decisiones de su comportamiento debido a las simetrías a las que responden este tipo de funciones. Al trabajar con la integración de funciones también sería beneficioso considerar si las funciones son pares, impares o ninguno de estos casos. Asimismo, si se sabe que una función es par o impar, se podría predecir la existencia o no de su función inversa. Considerando que previo a la realización de los cálculos matemáticos, el ingeniero debiera realizar un análisis del problema que se le plantea y estas funciones abren un abanico de análisis. Se considera que sería de gran beneficio para los estudiantes conocer estos conceptos desde el inicio de la carrera. Además el saber si una función es par o impar, permite conocer el comportamiento de todas sus derivadas, en el caso de existir.

En cuanto a la periodicidad de funciones, como se ha podido concluir y señala Buendía [9], no está siendo usada como una propiedad que califica a cierto comportamiento, sino se limita a calificar a una determinada función, la trigonométrica, lo cual hace que el estudiante haga una "vinculación cerrada" entre función periódica y función trigonométrica.

Se considera que introducir la paridad y periodicidad como propiedad que caracteriza ciertas funciones, podría hacer reflexionar a los docentes en la manera de preparar sus clases haciendo un análisis cualitativo de las funciones, y permitiendo de esta manera que el alumno también analice las situaciones y no que se reduzca a realizar sólo cálculos matemáticos, sino que estos confirmen su análisis previo.

Para encontrarle un sentido a reconocer estas funciones, sería importante articular con docentes de otras áreas o disciplinas, con el objetivo de encontrar situaciones reales para presentar a los estudiantes en las clases de matemática básica y de esta manera los docentes consideren abordar estos conceptos, dada su importancia en carreras de ingeniería. Realizar una propuesta que involucre estos aspectos, se propone como trabajo a futuro.

Referencias

1. Santaló, L.: Matemática para no matemáticos. Parra, C.; Saiz, I.: Didáctica de Matemáticas. Aportes y reflexiones. Paidós, pp. 21-38 (1994).
2. Bucari, N.; Abate, S.; Melgarejo, A.: Un cambio en la enseñanza de las Matemáticas en las carreras de Ingeniería de la UNLP: propuesta, criterios y alcance. Anales del IV Congreso Argentino de Enseñanza de la Ingeniería, Buenos Aires, Argentina, pp. 104-111 (2004).
3. Bucari, N.; Abate S.; Melgarejo A.: Las clases de Matemática y la construcción de un contrato didáctico diferente. Anales del INMAT, Buenos Aires (2005).
4. Bucari, N.; Abate, S.; Melgarejo, A.: Estructura Didáctica e Innovación en Educación Matemática. Revista Argentina de Enseñanza de la Ingeniería, Vol. 8, No. 14, pp. 17-28 (2007).
5. Gómez, David Rodríguez; Roquet, Jordi Valldeoriola. Metodología de la investigación. Universitat Oberta de Catalunya (2009).
6. Larson, R., Hostetler, R. P., Edwards, B. H., Heyd, D. E., & Abellanas, L: Cálculo. McGraw-Hill. (2006)
7. Thomas, G. B., & Weir, M. D.: Cálculo: una variable. Pearson Educación. (2006).
8. Stewart, J. Cálculo, conceptos y contextos, 3ra ed. International Thomson Editores, Distrito Federal, México (2006).
9. Buendía, G., & Ordóñez, A. El comportamiento periódico en la relación de una función y sus derivadas: significados a partir de la variación. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, Vol. 12, No.1, pp.7-28 (2009).