

UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA EL ESTUDIO DEL CONCEPTO LOGARITMO EN EL MARCO DE LA TEORÍA ANTROPOLÓGICA DE LO DIDÁCTICO

María Daniela Sanabria¹; Viviana Angélica Costa²

¹Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.

²IMApEC, Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata.
mdanielasanabria@gmail.com

Resumen

En el presente trabajo se aborda la enseñanza y aprendizaje del concepto: logaritmo. El objetivo es analizar las potencialidades de una enseñanza basada en AEI. Para ello, se expone una breve reseña de sus orígenes, su historia, su enseñanza en el contexto de una escuela secundaria de la Provincia de Buenos Aires, y algunos aportes de investigadores que abordan la problemática de la enseñanza del concepto. Finalmente se presenta una propuesta didáctica y un análisis a priori en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico.

Palabras clave: Logaritmo, Progresiones, Enseñanza de la matemática, Escuela secundaria, AEI.

Abstract

In this paper the teaching and learning of the logarithm concept is addressed. The aim is to analyse the teaching potentials based on AEI. This requires a brief overview of its origins, its history, its teaching in the context of a high school in buenos aires province and some contributions from research addressing the problem of teaching the concept exposed. Finally, a didactic approach and an apriori analysis within the framework of the Anthropological Theory of the Didactics is presented.

Key words: logarithm, progressions, maths teaching, high school, AEI.

1. Introducción

Los logaritmos como concepto matemático, desde el momento de su invención, han sido el motor de distintas ramas de las matemáticas y las ciencias. La palabra logaritmo proviene de las palabras *logos* (razón) y *arithmos* (números) e indica que la diferencia entre los términos de la progresión aritmética se corresponde a la razón de los términos de la progresión geométrica. Matemáticamente el concepto se define como:

$$\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a; b > 0 \wedge b \neq 1 \wedge a > 0$$

El concepto de *logaritmo* se remonta hasta los estudios de Arquímedes y se origina a partir de la comparación entre una progresión aritmética y una progresión geométrica (Tapia, 2003; Lefort, 2001). Los valores correspondientes a la progresión aritmética son llamados *logaritmos* y los valores correspondientes a la progresión geométrica son llamados *antilogaritmos* (Tabla 1).

Progresión Aritmética	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-----------------------	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Progresión Geométrica	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9
-----------------------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Tabla 1: Relación entre progresiones.

Los logaritmos tienen una gran importancia en la ciencia y su surgir no fue de forma inmediata. Desde el momento de su origen, han facilitado la resolución de cálculos complejos, los cuales han contribuido al avance y al desarrollo de la ciencia. Nacieron como una herramienta para resolver problemas muy prácticos y su importancia está en la simplificación que supone para multitud de cálculos. Sin los logaritmos y su contribución, sería imposible conseguir muchísimos de los avances que hasta ahora han sido posibles: en la astronomía, en la navegación marítima, en la matemática aplicada, en la economía, en la música, en la topografía, en la biología, en la geología, en la medicina, entre otros. Además, la escala logarítmica, es una escala de medida que es de gran utilidad en las ciencias.

La necesidad de simplificar los cálculos en esos campos de actividad, dio origen al concepto de logaritmo que permitió enfrentar un problema ancestral. Hasta el siglo XVI la escritura de los números racionales como una parte entera más una fracción de la unidad hacía, incluso de la suma, una operación muy compleja y los algoritmos de la multiplicación y de la división eran desconocidos.

Los logaritmos, permiten reemplazar las multiplicaciones por sumas, las divisiones por restas, las potencias por productos y las raíces por cocientes, lo que no sólo simplifica la realización manual de cálculos matemáticos, sino que permite realizar otros que sin su invención no habrían sido posibles. En síntesis, desde su origen se consideró al logaritmo como herramienta facilitadora de cálculos algebraicos.

En este sentido, consideramos al logaritmo como herramienta útil en la resolución de problemas de contexto real consideradas en el diseño de actividades de estudio e investigación que se propongan, para ser implementadas en su estudio.

2. El logaritmo y su enseñanza

Numerosas investigaciones, coinciden en proponer un cambio del enfoque tradicional de la enseñanza del concepto logaritmo por una enseñanza basada en el contexto histórico que le dio origen, que le otorgue significado y ponga de manifiesto la importancia de las relaciones entre las progresiones aritméticas y geométricas (Ferrari, Farfán, 2008; Ferrari, 2004; Abrate, Pochulu, 2007a, 2007b; Schubring, 2008; Gacharná León, 2012; Márquez, 2010; Morales Martínez, 2013).

Generalmente en la mayoría de las situaciones escolares, la enseñanza de logaritmo se realiza de manera mecánica y fuera de contexto. En una clase tradicional de matemática se introduce la definición de logaritmo, se muestran ejemplos, se enuncian (en general sin demostración) y se dan ejemplos de las propiedades y finalmente se realizan ejercicios de práctica, siendo éste el único papel del alumno: reproducir, de una forma sistemática, lo que el profesor presenta; dejando de lado el contexto histórico que dio origen al logaritmo como herramienta para simplificar cálculos que permite realizar multiplicaciones, divisiones y potencias de manera rápida.

Esto se observa en el Diseño Curricular de la Escuela Secundaria para 5° año (DGCyE). Los contenidos de la materia Matemática-Ciclo Superior, presentados allí, se organizan en cuatro ejes: Geometría y Álgebra, Números y Operaciones, Álgebra y Funciones, Probabilidades y Estadística. En el eje Números y Operaciones, el concepto de logaritmo se trabaja como una operación entre números reales, la cual es útil para el estudio de las propiedades, que se deducen y se emplean en problemas que las requieran

como herramientas. En tanto que dentro del eje Álgebra y Funciones, el concepto de logaritmo se introduce como inversa de la función exponencial. Dentro del bloque Números y Operaciones también se propone la enseñanza de Sucesiones, pero el propio Diseño no considera la relación entre la enseñanza del concepto logaritmo y de sucesiones.

3. Objetivos de la investigación

El objetivo de la investigación es proponer una Actividad de Estudio e Investigación (AEI) referido al estudio del logaritmo en relación a su valor como herramienta algebraica, que proporcione al estudiante los conceptos y técnicas necesarias para dar respuesta a situaciones problemáticas y que no se limite a una presentación desarticulada y carente de sentido de los mismos.

4. Preguntas de investigación

¿Cuáles actividades de estudio e investigación podrían proponerse a los estudiantes de un curso de quinto año de la escuela secundaria para estudiar con sentido y funcionalidad el concepto de logaritmo?

¿Cuáles organizaciones matemáticas sería posible construir o reconstruir durante el desarrollo de una AEI propuesta para el estudio del concepto logaritmo?

5. Marco teórico

Se adoptó como referencial teórico a la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), que sostiene que el saber matemático se construye como respuesta a cuestiones problemáticas y surge como el producto de un proceso de estudio. Dicha teoría presenta que toda actividad humana, regularmente realizada, puede describirse con una praxeología. Esta teoría distingue dos tipos de praxeologías: las Organizaciones Matemáticas (OM) y las Organizaciones Didácticas (OD). Las primeras se refieren a la realidad matemática que se pretende estudiar y las segundas, a la forma en que eso ocurre. El proceso de estudio puede ser entendido como el proceso de construcción de una praxeología matemática. Por lo tanto, estudiar matemáticas consiste en construir o reconstruir determinados elementos de una praxeología matemática para dar respuesta a un determinado tipo de tareas problemáticas.

La TAD plantea la necesidad de introducir en los sistemas de enseñanza procesos de estudio funcionales, donde los saberes no constituyan “obras muertas”, carentes de sentido y de razón de ser. La enseñanza de la matemática no se debe reducir a la simple enseñanza de “monumentos” terminados para ser admirados por los estudiantes, sino como herramientas conceptuales y materiales, útiles para estudiar y resolver situaciones problemáticas.

Además se propone un cambio de pedagogía, pasar de la pedagogía tradicional a la pedagogía del cuestionamiento del mundo. Para ello la TAD ha propuesto introducir en el aula el dispositivo didáctico que ha denominado: Actividades de Estudio e Investigación (AEI) (Chevallard 2007, 2013a, 2013b).

Las AEI tienen un gran potencial para recuperar el sentido y la razón de ser del estudio de la matemática, y de otras disciplinas, en los diferentes niveles de enseñanza. Emergen como modelo didáctico para abordar la problemática de la enseñanza de la matemática con sentido y de manera funcional. Las AEI introducen la razón de ser de la Organización Matemática Local (OML) que se quiere construir a partir del estudio de

una cuestión (Q), propuesta por el profesor, a la que se le busca dar respuesta. Permiten hacer surgir un tipo de problemas y técnicas de resolución (T), así como una tecnología apropiada para justificar y comprender la actividad matemática que se está desarrollando. Es necesario partir de una cuestión generatriz (Q) cuyo estudio produzca la elaboración de una respuesta R, y esta contenga los elementos esenciales de la OML inicial.

Además, las AEI suponen un cuestionamiento fuerte al contrato didáctico tradicional de la escuela secundaria con la intención de provocar en los estudiantes la necesidad de seguir aprendiendo, y que facilite abrir un proceso de investigación, que permita explorar, conjeturar y validar.

6. Propuesta didáctica

A continuación se presenta una actividad de estudio e investigación (AEI) para la enseñanza del concepto logaritmo, que persigue el objetivo propuesto. La misma podría ser implementada en un curso de alumnos de 15 y 16 años, en una escuela secundaria de la Provincia de Buenos Aires.

Los estudiantes se dispondrán en grupos y el profesor les presentará la pregunta que generará el estudio. Durante las sesiones, el profesor administrará los tiempos, realizará un seguimiento de los grupos, dirigirá las puestas en común y además evitará sugerir o dar indicaciones acerca de las respuestas o de cómo conseguirlas. Para realizar el trabajo podrán consultar libros, internet, etc. También podrán usar software matemático y calculadora. Al finalizar cada sesión, cada grupo presentará un informe escrito en el que consignen las respuestas que lograron y las preguntas que derivaron de ellas para la próxima sesión. Al finalizar las sesiones, los equipos presentarán un informe, y realizarán una puesta en común para concluir el estudio y dar una respuesta a la pregunta inicial. Habrá que mencionarle a los estudiantes que de algún modo la actividad será evaluada.

6.1. Actividad

Al bombardear un átomo de uranio con neutrones, su núcleo se divide en dos núcleos más livianos, liberando energía y 3 neutrones. Bajo ciertas condiciones, es decir, si existe una masa crítica de uranio, se inicia una reacción en cadena, cada uno de los tres neutrones liberados choca al núcleo de otro átomo, al que dividen en dos núcleos, liberando en cada colisión gran cantidad de energía y 3 neutrones y así sucesivamente.¹ ¿Es posible determinar una expresión matemática que permita establecer la cantidad de choques producidos desde el inicio, sabiendo la cantidad de neutrones liberados?

6.2. Modelo Praxeológico de Referencia

Para abordar el estudio de una praxeología o de un conjunto de praxeologías es necesario, en términos de la TAD (Chevallard, 2012), construir un modelo praxeológico de referencia (MPR). Esto daría respuesta a la pregunta de investigación: ¿Cuáles organizaciones matemáticas sería posible construir o reconstruir durante el desarrollo de una AEI propuesta para el estudio del concepto logaritmo que contemple su contexto histórico?

Este modelo consiste en el análisis y descripción de las obras matemáticas relacionadas con el estudio de tal praxeología. La construcción y análisis de un MPR se encuadra en el nuevo paradigma de la pedagogía de la investigación y del cuestionamiento del mundo cuyo objetivo primordial es establecer una relación funcional con el saber

¹¹ Párrafo extraído del libro “Matemática I: Modelos matemáticos para interpretar la realidad”. Capítulo 5. Página 114- Editorial Estrada.

(Chevallard, 2013a, 2013b). En la Figura 1 se observa un esquema del Modelo Praxeológico de Referencia para la actividad propuesta, donde se describe la organización matemática local (OML) logaritmo y su relación con cuatro organizaciones matemáticas puntuales (OMP) que son necesarias para construir la respuesta a la pregunta inicial Q_0 : ¿Es posible determinar una expresión matemática que permita establecer la cantidad de choques producidos desde el inicio, sabiendo la cantidad de neutrones liberados? y a sus preguntas derivadas.

7. Conclusiones

En este trabajo, se expuso la importancia del concepto logaritmo como herramienta de cálculo, la problemática vinculada a su aprendizaje y una posible propuesta para su enseñanza en el marco de la TAD materializada en una AEI, que podría ser implementada en un curso de alumnos de 15 y 16 años de la Secundaria Superior de una escuela bonaerense. Su implementación y análisis a futuro, permitiría establecer si se han logrado los objetivos propuestos en este trabajo.

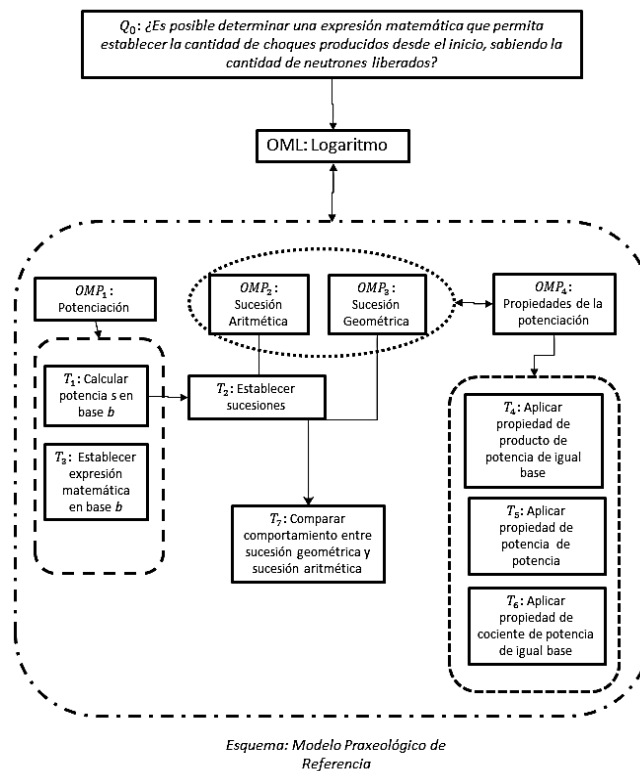


Figura 1: Modelo Praxeológico de Referencia.

8. Referencias

Abrate, R. S., & Pochulu, M. D. (2007a). Ideas para la clase de logaritmos. *Unión: revista iberoamericana de educación matemática*, 10, 77-94. Recuperado de <http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2380080>.

Abrate, R. S., & Pochulu, M. D. (2007b). Los logaritmos, un abordaje desde la Historia de la Matemática y las aplicaciones actuales. *Experiencias, propuestas y reflexiones para la clase de Matemáticas* (p. 111-135). Recuperado de <http://www.unvm.galeon.com/Cap06.pdf>.

Chevallard, Y. (octubre de 2005). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. En L. Ruiz- Higuera, A. Estepa & F. Javier García (Eds.), Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de la Didáctica (pp. 705-746). Trabajo presentado en el *I Congreso Internacional sobre la Teoría Antropológica de lo Didáctico* de la Universidad de Jaén, Baeza, España. Recuperado de http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/rubrique.php3?id_rubrique=8.

Chevallard, Y. (2013a). Enseñar matemáticas en la sociedad de mañana: alegato a favor de un contraparadigma emergente. *Journal of Research in Mathematics Education*, 2(2), 161-182.

Chevallard, Y. (2013b). Journal du Seminaire TAD/IDD. Théorie Anthropologique du Didactique & Ingénierie Didactique du Développement. Recuperado de <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/journal-tad-idd-2012-2013-5.pdf>

Dirección General de Cultura y Educación de la provincia de Buenos Aires (2010). Diseño Curricular para la Educación Secundaria: Marco General para el Ciclo Superior. La Plata, Argentina: Subsecretaría de Educación. Recuperado de http://servicios2.abc.gov.ar/lainstitucion/organismos/consejogeneral/disenioscurriculares/secundaria/marco_general_ciclo%20superior.pdf

Ferrari, M. (2004). La covariación como elemento de resignificación de la función logaritmo. En Díaz, Leonora (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 45-50). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/6241/>.

Ferrari, M., & Farfán, R. M. (2008). Un estudio socioepistemológico de lo logarítmico: la construcción de una red de modelos. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 11(3), 309-354.

Gacharná León, O. (2012). *Algunas consideraciones didácticas sobre el concepto de logaritmo y de función logarítmica y sus posibilidades en la educación básica y media* (Doctoral dissertation). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia. Recuperado de <http://www.bdigital.unal.edu.co/11718/>.

Márquez, R. M. F. (2010). Una socioepistemología de lo logarítmico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(4), 53-68.

Lefort, X. (Ed.) (2001). Historia de los logaritmos: Un ejemplo del desarrollo de un concepto en matemáticas. *Proyecto Penélope: Documentos de Historia de las Ciencias*. Recuperado de http://www.fundacionorotava.org/archivos%20adjuntos/publicaciones/otros_idiomas/Espanol/Penelope/Lefort_logaritmos_es.pdf.

Martínez, Z. E. M. (2013). Análisis de las transformaciones semióticas en el aprendizaje de la función logarítmica (p. 1037-1044). Trabajo presentado en el *VII CIBEM* de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática, Montevideo, Uruguay. Disponible en <http://www.cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/856.pdf>

Schubring, G. (2008). Gauss e a tábua dos logaritmos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 383-412. Disponible en <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33511304>

Tapia, F. (2003). Historia de los logaritmos. *Apuntes de la Historia de las Matemáticas*, 2(2), 5-22. Recuperado de <http://www.mat.uson.mx/depto/publicaciones/apuntes/pdf/2-2-1-logaritmos.pdf>