

PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE DISTRIBUCIÓN NORMAL EN CARRERAS DE INGENIERÍA

María Valeria Calandra, UIDET Gamefi, Departamento de Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, UNLP, mava@mate.unlp.edu.ar

Viviana Angélica Costa, UIDET IMApEC, Departamento de Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, UNLP, vacosta@ing.unlp.edu.ar

Resumen— En este trabajo se presenta una estrategia didáctica para abordar algunas de las problemáticas observadas a partir de una investigación realizada sobre la enseñanza y aprendizaje de la Distribución Normal a nivel universitario en cursos de Probabilidades. La propuesta se dirige a alumnos de grado en carreras de ingeniería y se basa en enseñar de un modo funcional de manera que el alumno tome un rol activo, en contraposición a la enseñanza tradicional que se utiliza generalmente en el ámbito universitario. Se expone un primer análisis a priori en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico.

Palabras clave— *enseñanza, probabilidad, distribución Normal, didáctica.*

1. Introducción

La distribución Normal es sin duda, el modelo continuo más importante en estadística, tanto por su aplicación directa, porque veremos que muchas variables de interés general pueden describirse por dicho modelo, como por sus propiedades, que han permitido el desarrollo de numerosas técnicas de inferencia estadística. En realidad, el nombre de Normal proviene del hecho de que durante un tiempo se creyó, por parte de médicos y biólogos, que muchas de las variables naturales de interés seguían este modelo. La otra razón de su relevancia es su aplicación para aproximar a otras distribuciones como la Binomial y la Poisson. En el campo de la ingeniería cumple un rol trascendental en el control de calidad de los procesos industriales. Una aplicación importante, además, es el Teorema Central del límite en cálculo de probabilidades, que asegura que la media de variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas tiene una distribución aproximadamente normal para muestras de tamaño suficientemente grandes, incluso en poblaciones no Normales. Muchos métodos estadísticos requieren la condición de Normalidad para su correcta aplicación. En general en la educación universitaria la noción de Distribución Normal es presentada a los estudiantes como un producto acabado de la actividad matemática, y muchas veces se observa que los mismos resuelven las situaciones problemáticas planteadas de un modo mecánico sin entender realmente el significado y la razón del procedimiento realizado [1] [2] [3] [4] [5]. En la enseñanza de probabilidades, dirigida a alumnos de las carreras de ingeniería, una de las tareas fundamentales es dotarlos de herramientas adecuadas que les permitan obtener conclusiones acerca de poblaciones, de modo que, aprovechando esta información puedan diseñar procedimientos, tomar decisiones, controlar productos y procesos, auditar

organizaciones y muchas actividades propias de la profesión. Se pretende que los alumnos se apropien del conocimiento matemático teniendo en cuenta la aplicación en su práctica profesional, sin perder la rigurosidad matemática pero teniendo en cuenta el perfil de estudiantes a los que se enseña.

El presente trabajo consiste en una propuesta didáctica tendiente a encontrar la razón de ser del estudio de estos objetos matemáticos mencionados desde su especialidad, de modo de combatir la pérdida de sentido de las cuestiones que se estudian en un curso de probabilidades de nivel universitario. La misma es una alternativa para el abandono paulatino del antiguo paradigma de formación de ingenieros basado en la enseñanza como simple esquema de transferencia de conocimientos. Se basa en la utilización de técnicas de control estadístico de procesos (CEP), en particular en el diseño y análisis de cartas de control. Las cartas de control se usan en el CEP para detectar si los procesos de elaboración de productos o servicios son defectuosos; o bien, para indicar que el proceso de producción se ha modificado y los productos o servicios se desvían de sus respectivas especificaciones de diseño. Uno de los pilares en los que se basa el diseño y la interpretación de una carta de control son la distribución Normal, el Teorema Central del Límite, la aproximación Normal a la distribución Binomial y a la Distribución de Poisson.

2. Propuesta

Debido a las dificultades que presentan los alumnos en el aprendizaje de la Distribución Normal, referenciadas en esta introducción, es que se presenta en este trabajo un modo alternativo de enseñarlos. La propuesta está pensada para implementarse como una prueba piloto destinada a la enseñanza de la Distribución Normal y sus aplicaciones en un curso de probabilidades de la Facultad de Ingeniería de la UNLP (FI-UNLP), para las carreras de Ingeniería Aeronáutica, Mecánica e Industrial. El nuevo paradigma educativo será la respuesta más adecuada a las siguientes preguntas: ¿Cómo se podría enseñar la Distribución Normal de un modo funcional, con sentido y que exista una razón de ser para las carreras de ingeniería? ¿Cuál actividad de interés al grupo de alumnos podría disparar el estudio del tema seleccionado? ¿Cuáles son las temáticas relacionadas con la distribución Normal que la actividad me permitiría estudiar? ¿Cómo proponer una actividad que abarque todas las tareas y técnicas incluidas en el diseño curricular? Actualmente la enseñanza de probabilidades en la FI-UNLP es tradicional, con una metodología teórico-práctica en donde trabajan simultáneamente el profesor y los auxiliares docentes, se intercala la clase teórica con la clase práctica. Los temas se introducen con un ejemplo que motive el problema o tema a desarrollar en donde, tanto entre los alumnos, como entre docentes y alumnos, se plantean los distintos aspectos que pueden presentarse. Luego el profesor da una exposición teórica como marco para finalizar la tarea. Por último para afianzar las ideas aprendidas los alumnos resuelven ejercicios que se encuentran en una guía teórico-práctico. La modalidad de evaluación de la asignatura Probabilidades consiste de dos exámenes parciales con resolución de problemas que recorren los contenidos de la materia, de modo que el trabajo de los alumnos sólo se evalúa en estas instancias. Si ambos exámenes son aprobados con nota superior o igual a seis, la asignatura es promovida y se considera ‘aprobada’. En otro caso, si en ambos exámenes la nota es al menos cuatro, el alumno consigue la condición de asignatura ‘cursada’, quedando pendiente la aprobación de un último examen integrador o examen final. En caso de no conseguir un mínimo de cuatro en ambos exámenes parciales la asignatura es desaprobada.

3. Marco Teórico

En esta investigación se adopta como referencial teórico la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) propuesta por Yves Chevallard [6] [7] [8] que ha definido con precisión los fenómenos denominados: monumentalización del saber y pérdida de sentido de las cuestiones que se estudian en la escuela media y en la universidad. El fundamento de estas definiciones y constructos se encuentran en lo que Chevallard ha denominado Pedagogía de la Investigación y del Cuestionamiento del Mundo (PICM) [9]. La respuesta de la TAD al problema de la desarticulación, del monumentalismo de los saberes y de la falta de sentido de la enseñanza de la matemática, se materializa mediante un dispositivo didáctico que denomina Actividad de Estudio e Investigación (AEI). Para ello, las AEI se organizan en torno a una pregunta Q , seleccionada por el profesor, que tenga el potencial de generar el estudio por parte de los alumnos de ciertos contenidos matemáticos. La búsqueda de respuesta a la pregunta, también generará más preguntas derivadas cuyas respuestas llevarán a la reconstrucción de determinadas organizaciones matemáticas (OM). Las respuestas a las preguntas junto con una actividad específica llevarán al estudio de técnicas y de elementos tecnológicos-teóricos específicos para resolver la actividad y serán una excusa para el estudio de las OM que se quieran cubrir del programa de estudio. La introducción de la noción de las AEI en los sistemas de enseñanza conduce, a plantear la necesidad de (re)definir los programas de estudio en términos de un conjunto de actividades cruciales. La gestión de las AEI dentro del proceso de enseñanza, exige a la comunidad de estudio integrada por los docentes y los alumnos, una transformación de su relación con el saber, pues deja de ser algo que se conoce de antemano para volverse una construcción (o reconstrucción) de común acuerdo en el transcurso de la clase.

En la práctica para cada saber matemático que se ha de enseñar, la TAD propone diseñar una o varias actividades de estudio e investigación (AEI) para las cuales la búsqueda de respuesta requiera del estudio de ese saber. Esto es en contraposición con la enseñanza monumentalista donde los saberes son construidos *per se* sin conocer su utilidad. La AEI propuesta además debe ser de interés para el grupo de alumnos a los que va dirigido y lo suficientemente abierta de modo de actuar como eje articulador del proceso de estudio.

4. Metodología para la implementación de la AEI

La propuesta que se presenta a continuación está dirigida, en particular, a alumnos de segundo año de las carreras de ingeniería que estén cursando probabilidades. Durante la AEI, los estudiantes y el profesor, trabajan conjuntamente. Se requiere un compromiso mayor que el del contrato tradicional habitual. Los alumnos se dispondrán en grupos y el profesor les presentará una pregunta que iniciará el estudio del saber a construir. Se necesita que los alumnos trabajen en forma colaborativa y que sean responsables de su aprendizaje.

Se propone una investigación y debate, centrado en torno a la pregunta generatriz:

Q_0 : ¿Cómo producir partes intercambiables para automóviles?

La respuesta a esta pregunta origina una AEI que introduce las razones de ser de la enseñanza de la Distribución Normal. Esta pregunta generatriz Q_0 actuaría como eje articulador para la reconstrucción de la OM de los temas relativos a la Distribución Normal. A su vez esta pregunta Q_0 podría derivar en otras preguntas $Q_{1,1}$, $Q_{1,2}$ y $Q_{1,3}$. (Ver Figura 1).

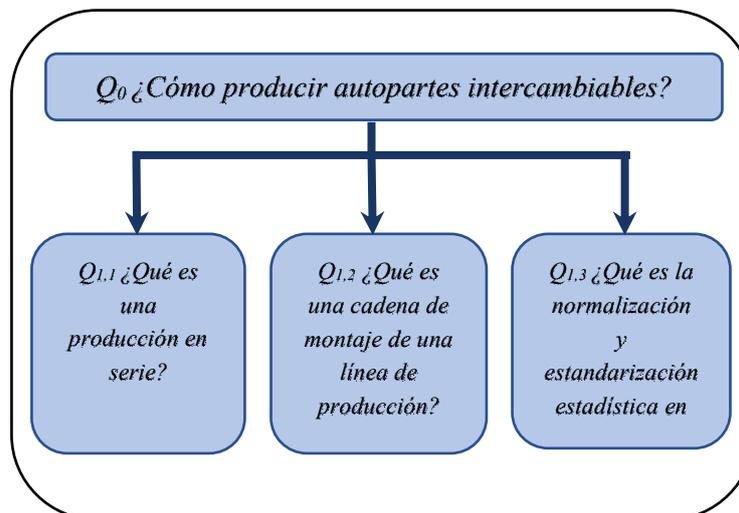


Figura 1. Esquema de preguntas.

Durante las clases el profesor regulará los tiempos didácticos, registrará las respuestas de los grupos de estudiantes y los nuevos interrogantes que surjan que motivarán el trabajo de la distribución Normal. Además el profesor acompaña a los estudiantes en las actividades, en la toma de decisiones en situaciones particulares y coordina las intervenciones de los alumnos. Los recursos disponibles serán computadoras personales con acceso a internet, libros de cátedra [10] [11] [12] [13], software estadístico de uso libre (InfoStat) y R. En el comienzo de la actividad es esperable que el profesor tenga un mayor protagonismo en la construcción del medio que conducirán a las preguntas derivadas para la reconstrucción de las organizaciones matemáticas que se pretenden estudiar.

5. Actividad de Estudio e Investigación

La propuesta es motivada a partir del debate sobre la fabricación de piezas de automóviles en serie. Si se trata, por ejemplo, de la manufactura de una gran cantidad de ejes en serie, los bujes respectivos producidos deben cumplir ciertos criterios de calidad de modo de ajustar uno con otro exactamente, indistintamente del buje o eje seleccionado. Por lo tanto en una producción en serie ¿Cómo hacer para que las autopartes producidas sean intercambiables?

La respuesta a estas preguntas daría origen a una AEI que introduce las razones de ser de la enseñanza de la Distribución Normal. Estas preguntas actuarían como eje articulador para la reconstrucción de las organizaciones matemáticas (OM) relativa a la Distribución Normal y sus aplicaciones, pero también requerirá el estudio de algunos elementos teóricos, técnicos y tecnológicos relativos al Control de Calidad: Control Estadístico de Procesos y Cartas de Control, de importancia profesional para estudiantes de carreras de ingeniería. (Ver Figura 2)

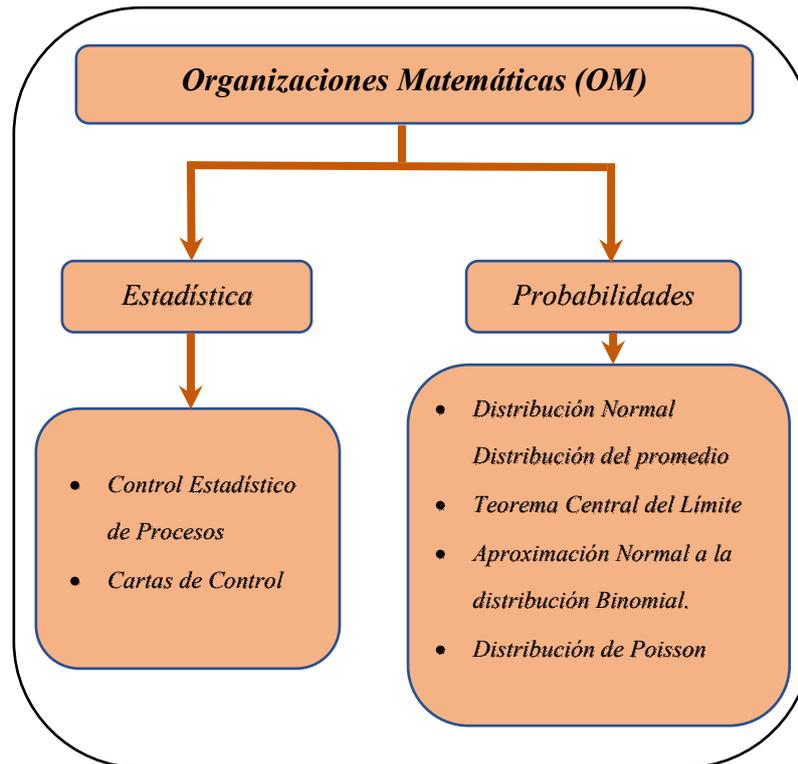


Figura 2. Esquema de las Organizaciones Matemáticas.

El control de calidad está basado en la idea de ajustar la producción a un modelo estándar. Cuando los artículos comerciales sucesivos tienen sus características más cercanas al resto de sus compañeros y más próximas a la intención del diseñador, se puede decir que cumple con las especificaciones de calidad. Un proceso de producción está sometido a una serie de factores de carácter aleatorio que hacen imposible fabricar dos productos exactamente iguales.

¿Qué es la normalización y estandarización estadística en un proceso de producción?

La estandarización de un proceso de producción es cuando el mismo se realiza de una forma estándar o previamente establecida. La normalización consiste en la regulación de las actividades realizadas por los distintos sectores a través de la terminología, la clasificación, las especificaciones, los métodos de prueba y las prescripciones. El Control Estadístico de Procesos es una herramienta útil ya que su aplicación en el momento de la fabricación, contribuye a la mejora de la calidad de la misma, en cuanto al control de la estandarización del proceso. Se mostrará ahora a modo de ejemplo algunas de las actividades contempladas en la propuesta:

- Actividad 1: en una primera etapa la característica de calidad considerada para la AEI será el diámetro interior de los anillos de pistones producidos durante un día mediante un proceso de fundición. Los estudiantes deberán construir una carta de control para una muestra bajo los siguientes supuestos: los anillos poseen un diámetro interior con distribución Normal con valor medio de 74 mm y se sabe que la desviación estándar del diámetro interior debe ser de 0.01 mm en estos casos.

1) ¿Qué tan probable sería que en un proceso bajo control se encontraran tres puntos consecutivos por encima de la línea central? ¿Cómo se podría interpretar?

2) ¿Qué tan probable sería encontrar una medición sobre el límite superior de la línea de control?

A modo de ejemplo, en la Figura 3 se podrían identificar algunos patrones o alarmas que podrían indicar señales de alerta en un proceso de producción:

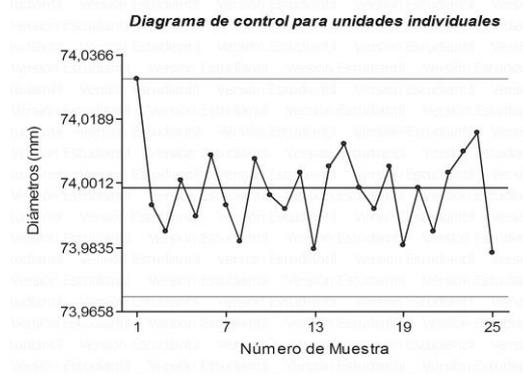


Figura 3. Diagrama de Control para unidades individuales

Con la realización de la AEI se espera que los estudiantes construyan los conceptos vinculados a la variabilidad natural de un proceso a corto plazo que se trata de la producción de un solo día, y a la construcción y análisis de los gráficos de control por variables en el caso de datos con distribución Normal.

Para cumplir con esos objetivos los estudiantes abordarán los siguientes conceptos correspondientes a la *Distribución Normal*: la misma depende de dos parámetros μ y σ , que son la media y la desviación típica respectivamente. Su gráfica en coordenadas cartesianas tiene una forma acampanada y es simétrica respecto a μ . El 68,27% de la población está contenido en un entorno $\pm 1\sigma$ alrededor de μ , el 95,45% de la población está contenido en un entorno $\pm 2\sigma$ alrededor de μ y que el 99,73% está comprendido en $\pm 3\sigma$ alrededor de μ . (ver Figura 4)

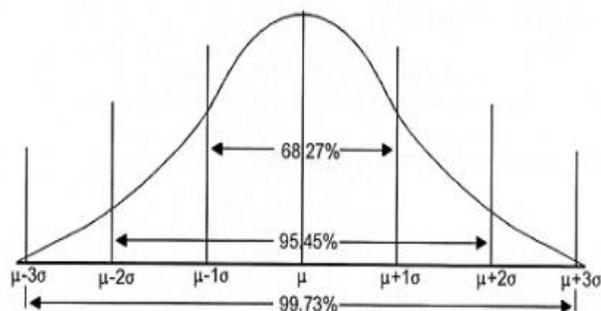


Figura 4. Gráfica de la Distribución Normal.

Un diagrama de control o carta de control es una gráfica donde los valores de la característica de calidad estudiada se disponen en distintos momentos de tiempo que se identifican sobre el eje de las abscisas. Tres líneas acompañan la serie graficada: la *línea media* (trazada a nivel de la media μ de los valores de la serie para un estado bajo control) y las líneas correspondientes a los *límites inferior y superior de control* (límites entre los que se espera queden

comprendidas casi la totalidad de las observaciones de un proceso bajo control $\mu \pm 3\sigma$). Puntos fuera de la región determinada por ambos límites sugieren que el proceso no está bajo control

- Actividad 2: se les propondrá a ese mismo grupo de estudiantes evaluar el comportamiento de los diámetros medios \bar{X} para una muestra aleatoria de tamaño 5 de los anillos de pistones producidos durante 25 días. Es decir si $\bar{X}_1, \bar{X}_2 \dots \bar{X}_{25}$ representan los diámetros interiores medios de los anillos seleccionados durante 25 días.

En la Figura 5, los límites de control se construyen teniendo en cuenta la variación de \bar{X} . Al observar el gráfico, se podrían plantear las siguientes preguntas:

- 1) ¿Existen señales de alarma? 2) ¿Se podría evidenciar un cambio en la variación del proceso algún momento o algún cambio en la media? 3) ¿Cómo aplicaría las reglas de Western Electric [14] para evaluar el comportamiento de este proceso?

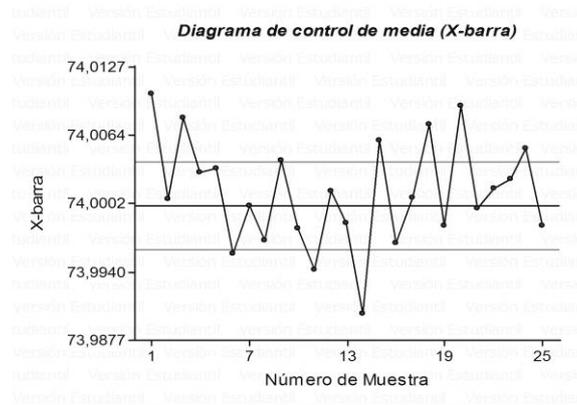


Figura 5. Diagrama de Control de media.

Se espera que en el desarrollo de la AEI los estudiantes construyan una carta de control para la media y logren los siguientes objetivos: a) Evaluar la variabilidad natural de un proceso bajo control a largo plazo ya que deberán analizar el comportamiento de la producción media correspondiente a distintos días. b) Aplicar gráficos de control para la media de un conjunto de datos con Distribución Normal.

Para cumplir estos objetivos es necesario que el estudiante utilice el siguiente conocimiento: Si X es una variable aleatoria $N(\mu, \sigma^2)$ de la que se extraen muestras de tamaño n , entonces las medias muestrales \bar{X} se distribuyen según otra ley normal con media μ y varianza $\frac{\sigma^2}{n}$.

- Actividad 3: la característica a analizar es un atributo del producto (el producto es defectuoso o no, una pieza encaja o no en otra, un mecanismo funciona o no, etc.) Para esta etapa se utilizará el archivo de datos *Diagrama p* del Software estadístico InfoStat. En este caso se trata de una línea de producción de elásticos para autos en la que se toman 30 muestras de tamaño 200 cada una y se registra el número de defectuosos por muestra.

El objetivo de esta propuesta es que construyan una carta de control de atributos tipo p para controlar la proporción de disconformidades. Además para el diseño e interpretación de la misma se tratará la OM relativa a la aproximación Normal a la distribución binomial. Es necesario que el estudiante aborde el siguiente conocimiento: Si X es un ensayo de Bernoulli

es decir $X \sim B(1, p)$ entonces las medias muestrales \bar{X} se distribuye aproximadamente con ley normal con media p y varianza $\frac{p(1-p)}{n}$ para el caso que n sea suficientemente grande.

6. Conclusiones y recomendaciones

Se expuso una propuesta de enseñanza alternativa a las existentes y el diseño de una AEI en el marco de la TAD que pretende el estudio con sentido de la Distribución Normal, a partir de la búsqueda de respuestas a un problema de control de calidad. A futuro, se prevé implementar y evaluar la AEI, lo que constituirá un trabajo de tesis de maestría en el campo de la educación en matemática. Además, esta propuesta abriría las puertas para pensar en otras AEI para el estudio de otros temas de probabilidades y además evaluar las posibles restricciones de la enseñanza actual de la noción de Distribución Normal en el ámbito de la Facultad de Ingeniería de la UNLP. En resumen, la AEI permitiría el estudio de un modo funcional las OM relativas a la Distribución Normal, distribución del promedio de variables con distribución Normal y al Control Estadístico de Procesos.

7. Referencias

- [1] HUCK, S; CROSS, T.L., CLARK, S.B. (1986). Overcoming misconceptions about z-scores. *Teaching Statistics*, v. 8, n.2, p.38-40.
- [2] HAWKINS, A, JOLIFFE, F., GLICKMAN, L. (1992). *Teaching statistical concepts*. Essex: Longman.
- [3] WILENSKY, U. (1995) "Learning probability through building computational models", en D. Carraher y L. Meira (Eds.), *Proceedings of the 19th PME Conference, Recife, Brazil: PME*, vol. 3, pp. 152-159.
- [4] RUIZ, B.R. (2006). *Un Acercamiento Cognitivo y Epistemológico a la Didáctica del Concepto de Variable Aleatoria*, Tesis de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa, México.
- [5] CALANDRA, M.V., COSTA, V.A. (2015). La problemática de la enseñanza y aprendizaje del concepto de variable aleatoria continua y de función de densidad de probabilidad. *IV Jornadas de Enseñanza e Investigación Educativa en el Campo de las Ciencias Exactas y Naturales.*: Departamento de Ciencias Exactas y Naturales Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación (UNLP).
- [6] CHEVALLARD, Y., (2004). Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire.
- [7] CHEVALLARD, Y., (2007). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. En Ruiz, L. Higuera, Estepa, A. y Garcia, F. J. (eds), *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico*", Universidad de Jaén, p.705-746.
- [8] CHEVALLARD, Y., (2012). Teaching mathematics in tomorrow's society: A case for an oncoming counterparadigm. Texte préparatoire à la regular lecture qui sera donnée dans le cadre du congrès ICME-12 (Séoul, 8-15 juillet 2012).
- [9] OTERO, M.R., FANARO, M.R., LLANOS, V.C., (2013). La Pedagogía de la Investigación y del Cuestionamiento del Mundo y el Inquiry: un análisis desde la

enseñanza de la Matemática y la Física. *Revista Electrónica de Investigación en educación en Ciencias*, vol. 8, No. 1, p.77-89.

- [10] MEYER, P.L., (1992). *Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas*, Wilmington: Addison-Wesley Iberoamericana.
- [11] DEVORE, J.L., (2008). *Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias*. Séptima edición. México: Cengage Learning.
- [12] ROSS, S.M., (2014). *Introduction to Probability and Statistics for Engineers and Scientists*, John Wiley & Sons.
- [13] MONTGOMERY, D.C., RUNGER, G.C., (2006). *Probabilidad y estadística aplicadas a la ingeniería*. México: Limusa Wiley.
- [14] MONTGOMERY, D.C., (1991). *Control Estadístico de Calidad*. Grupo Editorial Iberoamérica.