



Universidad Nacional de La Plata
Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas

Tesis de licenciatura en Astronomía
ESTUDIO DE HALOS DE MATERIA OSCURA FERMIÓNICA
UTILIZANDO CORRIENTES ESTELARES

Santiago Collazo

Director: Dr. Carlos R. Argüelles
Co-Director: Dr. Martín F. Mestre

LA PLATA, ARGENTINA
- ABRIL DE 2021 -

Agradecimientos

Este trabajo no hubiera sido posible sin la ayuda y apoyo de mis directores, Charlie y Tincho. Gracias por haber estado disponibles siempre, con buena predisposición y siempre atentos a las preguntas y dudas que tenía.

Por otro lado, quiero dedicarles un especial agradecimiento a las siguientes personas, sin cuya presencia en esta carrera no hubiera sido lo mismo:

A mi familia, Pa, Ma y Valen, por siempre estar apoyando y bancando todas mis decisiones, por hacer el aguante en los malos momentos y en los buenos también, por siempre estar para cuando los necesito y por haber hecho posible mi sueño de estudiar lo que siempre amé, a pesar de la distancia y las dificultades que eso conlleva. Por todo el amor y cariño que me dan. Estoy eternamente agradecido. Los amo. Y obvio que no me olvido de Franchu, las salidas al patio de casa a despejarme después de estudiar no hubieran sido lo mismo sin ella.

A Isi, Ber, Marce y Gre, por toda la ayuda que me dieron, desde lo académico a lo deportivo. Gracias por la buena voluntad siempre. Isi, la verdad que estoy orgulloso de haberte conocido, un gran amigo dentro y fuera de la cancha, tanto la de parquet como la que tiene pupitres y un pizarrón.

A Tomi y Cande, dos personas incondicionales que me crucé en la vida, y de las cuales estoy completamente agradecido de haber compartido todos estos años. Sus charlas, sus juntadas de estudio, sus consejos y apoyo, sin ellos, nada de esto hubiera sido posible.

A Mati, Javi y Facu, por las incontables horas de estudio y ocio, por el apoyo y motivación para seguir adelante en esta carrera.

A Gabi, una gran persona que, a pesar de haberla conocido hace poco, se volvió muy importante para mí. Gracias por el apoyo en todo este tiempo.

A Juli Jaen, por todos los consejos, ayuda, motivación y apoyo que me dio durante la carrera. Gracias por haber bancado las mil preguntas que te hice.

A Bren por todas las juntadas a estudiar, cocinar, jugar al UNO y ver pelis, y por tu buen humor que siempre te saca una sonrisa, sos una gran amiga para mí.

A Pepo, por los momentos compartidos todos estos años, en la cancha y fuera de ella.

A Eli, Enzo, Tati, Lu Pizarro, Euge, Guille, Manu, Lucio, Jean, y todos los que compartieron conmigo tardes de estudio, cursadas, parciales, juntadas, charlas en la facu y demás. Fueron grandes compañeros todos estos años.

A Valen Sosa por compartir el esquema de tesis y sus apuntes, ¡fueron de gran ayuda!

A mis amigos de siempre, por estar, a pesar de la distancia, siempre presentes, dando apoyo y consejos en todo momento. Son una familia para mí.

A Giu, Mar y Sa, por el apoyo, los consejos, los paseos en auto, las risas y las charlas todos estos años, claves para seguir adelante en esta etapa tan importante.

A la familia Gómez por siempre estar bancando y apoyando las cosas que hago y por todo el cariño que me dieron desde bebé. Son mi segunda familia.

A Marce y Li por la ayuda en primer año cuando no me salían las cosas, por las incontables charlas sobre ciencia y la buena onda y predisposición cuando los iba a visitar.

Gracias a todos y cada uno de ustedes.

Resumen

En el presente trabajo se estudia la dinámica de corrientes estelares, generadas según un modelo de *spray*, a través de las cuales se pretende comparar dos modelos de distribuciones de materia oscura a escala galáctica, el llamado modelo NFW (Navarro-Frenk-White) y el modelo basado en una distribución autogravitante de fermiones neutros, llamado modelo RAR extendido (Ruffini-Argüelles-Rueda). Estos harán las veces de la galaxia huésped ya que no se tendrá en cuenta la componente bariónica de la misma. Utilizando un método de eyección de estrellas del tipo *Lagrange Cloud Stripping*, según su denominación en inglés, y un modelo para el radio de marea del sistema satélite-galaxia huésped, se generaron tres corrientes estelares. Una producida por la galaxia elipsoidal enana Sagitario, sumergida, primero, en un potencial tipo NFW y luego en uno tipo RAR; y la otra, generada por el cúmulo globular Palomar 5 como progenitor, sumergido en un potencial tipo RAR. Para los tres casos se utilizaron condiciones iniciales *fiduciarías* como datos de entrada para la resolución de las ecuaciones de movimiento de los satélites en torno a la distribución de materia oscura. Como resultado de las distribuciones de estrellas generadas considerando la atracción gravitatoria de ambos sistemas, la de la galaxia huésped y la del progenitor, se observaron variaciones en la forma y longitud de las corrientes estelares en función de la órbita que sigue el progenitor y del valor de su radio de marea a lo largo de esa trayectoria. Ambas características físicas, la órbita del progenitor y la de las estrellas que eyecta, y el radio de marea del sistema satélite-galaxia huésped, dependen de la distribución de masa elegida para modelar el halo de materia oscura que constituye la galaxia huésped. Esto permite la comparación entre los distintos modelos de distribución de materia oscura a través de las corrientes estelares.

Abstract

In the current work we studied the dynamics of stellar streams, generated according to a spray model, with the aim of comparing two models of dark matter distributions in a galactic scale, the one called NFW (Navarro-Frenk-White) and the model based in a self-gravitating distribution of neutral fermions, called extended RAR model (Ruffini-Argüelles-Rueda). These will act as the host galaxy since the baryonic component of it will not be taken into account. Using a *Lagrange Cloud Striping* like method of ejection of stars and a model for the tidal radius of the satellite-host galaxy system, we generated three stellar streams. One produced by the Sagittarius dwarf spheroidal galaxy, firstly, under the influence of a NFW gravitational potential and then under the influence of a RAR gravitational potential. The last one was generated by the Palomar 5 globular cluster like progenitor under a RAR potential. In the three cases *fiduciary* initial conditions were used to solve the equations of motion of the satellites around the dark matter distribution. The results of the stellar distributions generated considering both, the gravitational attraction of the host galaxy and that of the progenitor, were variations in the shape and length of the stellar streams, both characteristics depending on the orbit that the progenitor follows and the value of the tidal radius of it along this trajectory. Both physical characteristics, the orbit of the progenitor and that of the stars it ejects, and the tidal radius of the satellite-host galaxy system, depend on the mass distribution chosen to model the dark matter halo that constitutes the host galaxy. This allows comparison between the different models of dark matter distribution through stellar streams.

Índice general

Agradecimientos	iii
Resumen	v
Abstract	vii
1. Introducción	1
2. Modelos de halos de materia oscura	9
2.1. Modelo RAR extendido	9
2.1.1. Contexto astrofísico	9
2.1.2. Descripción de la distribución de masa	10
2.1.2.1. Fluido perfecto en equilibrio	11
2.1.3. Solución numérica del sistema de ecuaciones diferenciales	21
2.2. Modelo NFW	23
3. Dinámica de los satélites	29
3.1. Componentes galácticas	29
3.2. Aceleración gravitacional	31
3.3. Órbitas en una distribución de masa tipo NFW	32
3.3.1. Caso NFW1	33
3.3.2. Caso NFW2	34
3.4. Órbitas en una distribución de masa tipo RAR	37
4. Modelo de <i>spray</i>	39
4.1. Radio de marea	39
4.1.1. Evolución temporal y espacial del radio de marea	44
4.2. Modelo de eyección de estrellas	44
5. Generación de las corrientes estelares	51
5.1. Eyección de estrellas	51
5.2. Resolución de las ecuaciones de movimiento de las estrellas eyectadas	53
6. Conclusiones	59
A. Conservación del tensor de energía-momento	61
B. Función de distribución	63
C. Modelo de Plummer	65
	ix

Acrónimos

Lista de los acrónimos utilizados en el presente trabajo de tesis.

- Λ CDM: *Lambda Cold Dark Matter*
- DM: *Materia oscura (por sus siglas en inglés)*
- CMB: *Fondo cósmico de microondas (por sus siglas en inglés)*
- RAR: *Ruffini-Argüelles-Rueda*
- TOV: *Tolman-Oppenheimer-Volkoff*
- CI: *Condiciones Iniciales*
- CM: *Centro de Masa*
- NFW: *Navarro-Frenk-White*

Capítulo 1

Introducción

Desde sus primeros indicios en el siglo XIX, dados por la estimación de los “cuerpos negros” en la Vía Láctea hecha por Lord Kelvin, pasando por el concepto de “materia oscura” en 1906 propuesto por Henri Poincaré y en 1922 por Jacobus Kapteyn, hasta los fascinantes desarrollos hechos por Fritz Zwicky en 1933, los cuales se basan en la aplicación del teorema del virial al Cúmulo de Coma para así poder estimar su masa, la *materia oscura* ha sido, y sigue siendo, uno de los principales misterios de la cosmología moderna.

Actualmente, el modelo cosmológico más aceptado para describir al Universo es el llamado Λ CDM, el cual propone la existencia de *materia oscura fría* (CDM por sus siglas en inglés), materia ordinaria y una componente de energía oscura, la cual es representada en el contexto de la relatividad general a través de la constante cosmológica Λ , y entra en juego en las ecuaciones de campo de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu},$$

en donde $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci, producto de la contracción del tensor de curvatura con la métrica espacio-temporal, $g_{\mu\nu}$; R es el escalar de Ricci, cantidad que resulta de la contracción del tensor de Ricci con la métrica; G es la constante de gravitación universal de Newton; c es la velocidad de la luz y $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento, el cual hace las veces de fuente de curvatura del espacio-tiempo.

En la actualidad existe una vasta cantidad de candidatos a materia oscura, pasando por modelos de gravedad modificada, supersimetría, teoría efectiva de campos, neutrinos estériles, entre otros. Todos estos candidatos se pueden apreciar en la Fig. 1.1. En esta tesis de licenciatura, se trabajará dentro del marco del paradigma de materia oscura en términos de partículas elementales, las cuales se supondrán que son la base de la composición de los halos galácticos. En particular, tales halos de materia oscura serán modelados, dentro del llamado *modelo RAR extendido* (por las iniciales de sus autores, Ruffini, Argüelles y Rueda), por medio de un sistema autogravitante de fermiones neutros, los cuales respetan las leyes de la mecánica estadística, la termodinámica y la relatividad general. Además, se utilizará el modelo provisto en [Navarro et al. \(1996\)](#), el cual es llamado *modelo NFW* y describe una distribución de masa con simetría esférica a través de un perfil de densidad tipo doble ley de potencia. Ambos modelos serán desarrollados mas adelante.

Debido a la débil interacción que sufre la materia oscura con el entorno, la cual se da solo a través de la gravitación, y su falta de emisión de ondas electromagnéticas, se hace casi imposible medir sus propiedades de manera directa. Por ello, la gran mayoría de los métodos desarrollados consisten en detectarla de manera indirecta, es decir, estudiando los efectos que su presencia genera, la mayoría de ellos de naturaleza gravitatoria. Dentro de los efectos más relevantes se encuentran:



Figura 1.1. Diagrama que muestra los candidatos actuales a materia oscura. Fuente: https://www.nature.com/articles/s41586-018-0542-z?WT.feed_name=subjects_astronomy-and-planetary-science.

- La discrepancia entre las curvas de velocidad circular predichas por la teoría, llamadas *keplerianas*, las cuales tienen una forma funcional $r^{-1/2}$ fuera de la distribución de masa, y las observadas, las cuales se caracterizan por mantener el valor de la velocidad circular aproximadamente constante a radios mayores al de la distribución de masa. El gráfico de este fenómeno se ve representado en la Fig. 1.2.
- La diferencia entre la masa lumínica y la masa gravitatoria en cúmulos de galaxias, siendo esta última determinada a través de los llamados *lentes gravitacionales*. El fenómeno de lentes es producto del desvío de los rayos de luz provenientes de fuentes que se encuentran atrás del objeto cuya masa se quiera determinar. Al medir el desvío entre la imagen directa y la desviada o entre dos imágenes desviadas en distintas direcciones (en los casos en que se pueden observar ambas), se determina la curvatura del espacio-tiempo y con ello la masa del cúmulo. Una representación artística de este escenario se muestra en la Fig. 1.3.
- A escalas cosmológicas, una evidencia de la existencia de materia oscura proviene de la distribución de estructuras en el Universo así como del análisis de precisión del *fondo cósmico de microondas* o CMB por sus siglas en inglés. Este último, cuya distribución se puede ver en la Fig. 1.4, se comporta como un cuerpo negro casi perfecto, y constituye una reliquia del evento conocido como *Big Bang*. El CMB fue creado cuando los fotones se desacoplaron del plasma primitivo de electrones y protones, momento en el cual el Universo pasó a ser ópticamente transparente. Como todo cuerpo negro, el CMB se caracteriza por tener una dada temperatura, la cual es, actualmente, de $T_{\text{CMB}} = 2.725 \text{ K}$. A este valor se le han determinado anisotropías del orden de 10^{-5} K , las cuales se ori-

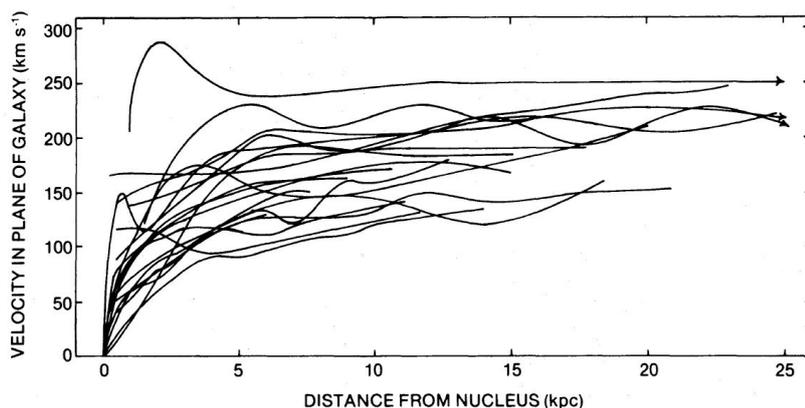


Figura 1.2. Superposición de 21 curvas de rotación de galaxias tipo Sc tomado de [Rubin et al. \(1980\)](#). La mayoría de las galaxias muestran un achatamiento en sus curvas de velocidad circular a radios mayores que el de la distribución de masa visible.

ginaron por la temperatura “acústica” producida por las fluctuaciones de densidad en el Universo temprano, y llevan consigo abundante información cosmológica. El espectro de potencia de las fluctuaciones, ilustrado en la Fig. 1.5 y tomado de [Schumann \(2019\)](#), el cual muestra su intensidad en función de su escala angular, puede ser bien descrito a través del modelo Λ CDM de seis parámetros. El tercer pico que se ve en el espectro, es muy sensible a la cantidad total de materia oscura en el Universo.

Como conclusión del primer ítem de la lista anterior, se puede afirmar la presencia de materia oscura en la parte más exterior de las galaxias. Esto genera una gran indeterminación en el valor real de la masa de las galaxias con halo de materia oscura ya que su extensión y densidad dependen del modelo elegido para describirlos. Por lo tanto, uno de los grandes desafíos de la astrofísica actual es restringir con precisión el valor de la masa de las galaxias, en particular, el valor de la masa de la Vía Láctea. Dado que la materia oscura no emite radiación electromagnética, se deberá implementar un método para determinar la masa de las galaxias que contemple tanto la parte bariónica de ella como la componente oscura de la misma. Es por ello que se utilizan métodos que involucren el uso del campo gravitatorio que generan las galaxias para así poder restringir el modelo con el cual se describe a las mismas.

Ahora, las galaxias presentan varios satélites orbitándolas, y sus órbitas dependen del potencial gravitatorio que genere la galaxia en cuestión. Pero estos sistemas estelares no orbitarán sin verse afectada su estructura, ya que, debido a efectos de marea, el sistema irá perdiendo estrellas, se irá *disgregando* a lo largo de su recorrido en torno a la galaxia que orbite. Esto dejará como resultado una **estela de estrellas**⁽ⁱ⁾, una compleja estructura estelar que delinea, de manera aproximada, la trayectoria del satélite que la generó. La galaxia que es orbitada por el satélite, el cual puede ser una galaxia satélite o un cúmulo globular, es denominada *galaxia huésped*. Por otro lado, en la jerga científica, al sistema del cual provienen las estrellas que forman los brazos se lo introduce como *progenitor*. De esta forma, es posible usar a los brazos de marea como *trazadores* del campo gravitatorio de la galaxia huésped. Se denomina *trazador* a todo objeto físico que permite, a través de su trayectoria, deducir características del sistema en el cual se traslada. En cuanto al protagonismo que cobran las corrientes estelares, la importancia de su estudio radica en los datos que pueden ser inferidos al entender sus comportamientos y características. Las principales cualidades de

⁽ⁱ⁾Se utilizará el termino *estela* para llamar a los brazos estelares formados por las fuerzas de marea, a pesar de que uno de los brazos se forma hacia adelante (*estela delantera*) respecto de la trayectoria del satélite.

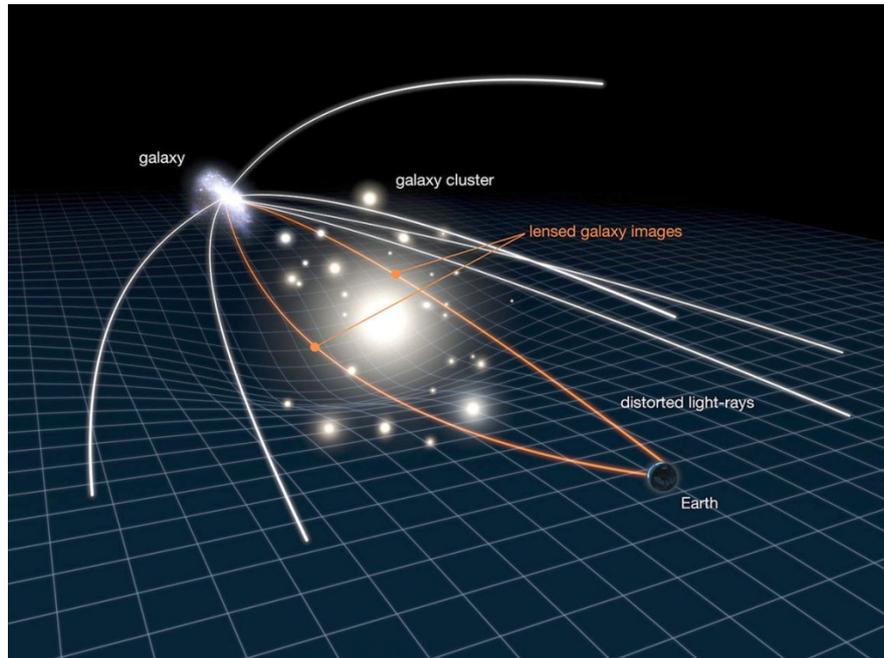


Figura 1.3. Representación artística del fenómeno de lente gravitacional. Fuente: <http://www.cfhtlens.org/public/what-gravitational-lensing>.

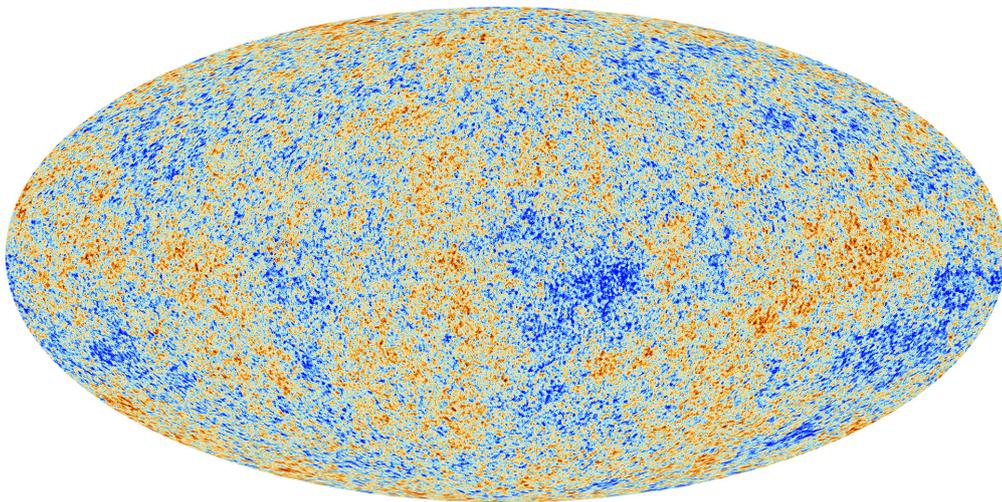


Figura 1.4. Anisotropías del CMB según lo observado por el satélite Planck. El CMB es una instantánea de la luz más antigua de nuestro Universo, impresa en el cielo cuando este tenía tan solo 380 000 años. Este fondo cósmico muestra pequeñas fluctuaciones de temperatura que correspondían en aquel momento a regiones de densidades ligeramente diferentes, que representan las semillas de toda estructura futura: las galaxias de hoy. Fuente: https://www.esa.int/ESA_Multimedia/Images/2013/03/Planck_CMB

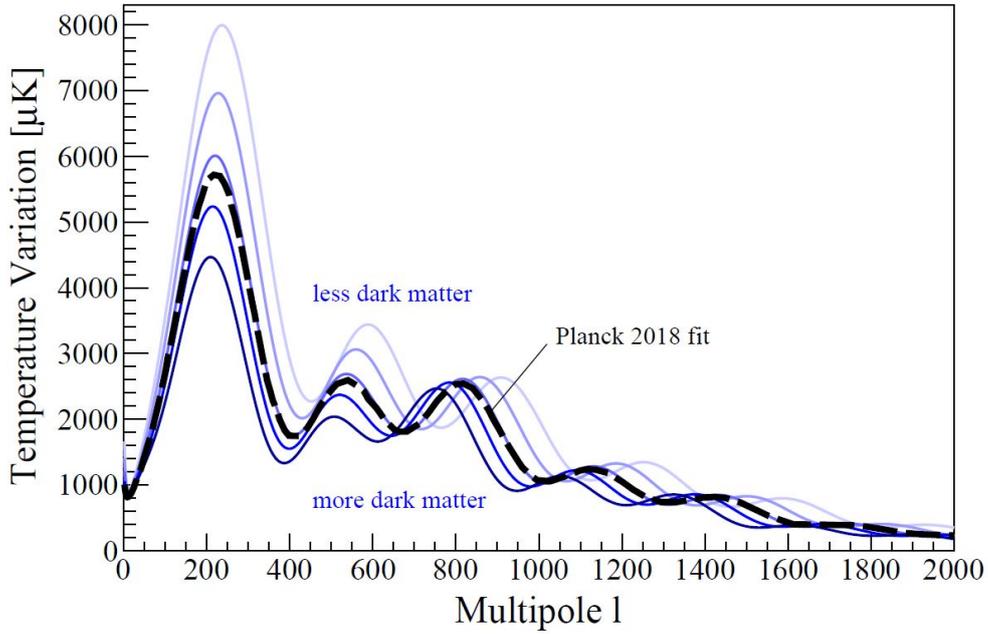


Figura 1.5. Espectro de las fluctuaciones de temperatura del CMB para una contribución de densidad de materia oscura Ω_{CDM} variando entre 0.11 y 0.43 (líneas azules). Todos los otros parámetros de entrada del modelo son fijados como constantes. La línea a rayas negra muestra el mejor ajuste a los datos del satélite Planck según la versión del 2018 (Aghanim et al., 2020). Los pequeños (grandes) multipolos l corresponden a grandes (pequeñas) escalas angulares: el pico acústico principal en $l \sim 200$ corresponde a un ángulo de $\sim 1^\circ$, mientras que el correspondiente a $l = 1800$, se relaciona con un ángulo de $\sim 0.1^\circ$.

estas estructuras son su forma y extensión, como también lo puede ser su grosor. En cuanto a los datos que pueden ser inferidos de las corrientes estelares se encuentran la masa de la galaxia huésped y la forma en la que esta se distribuye en ella. Esto es producto del hecho de que el modelado de los brazos de marea depende principalmente del potencial galáctico generado por la galaxia huésped, incluyendo tanto su parte bariónica como oscura, y de la distribución en el espacio de fases del progenitor (e.g. masa, tamaño y dispersión de velocidades).

Existen diversos trabajos anteriores que han hecho uso de las corrientes estelares para estudiar a la Vía Láctea y su halo de DM. Banik et al. (2019) impusieron restricciones sobre el modelo de materia oscura fría y sobre la masa de la partícula de DM. Deg y Widrow (2014) demostraron que el incorporar estelas de estrellas a la Vía Láctea reduce las incertezas en los parámetros que modelan a su halo de materia oscura. Además, probaron que tanto las corrientes más largas como las corrientes múltiples conducen a mejoras en nuestra capacidad para inferir la forma del halo oscuro de la Vía Láctea. Koposov et al. (2010) utilizaron observaciones fotométricas, espectrométricas y astrométricas de la corriente de estrellas *GD-1* para construir un mapa empírico del espacio de las fases de la estela. Con él se lograron poner restricciones sobre el *aplastamiento total del potencial* q y la *velocidad circular* V_c del mismo, ambos parámetros libres del modelo de *potencial logarítmico aplanado*:

$$\Phi(x, y, z) = \frac{V_c^2}{2} \ln \left(x^2 + y^2 + \left(\frac{z}{q} \right)^2 \right), \quad (1.1)$$

el cual modela la Vía Láctea en dicho trabajo. Otro trabajo que ha utilizado a *GD-1* como trazadora del potencial de la Galaxia fue Malhan y Ibata (2019). En ese trabajo, luego de fijar los modelos que describan el halo de DM y la componente bariónica de la Vía Láctea, se logra-

1. Introducción

ron determinar algunos parámetros comunes, como lo son la velocidad circular a la distancia galactocéntrica del Sol y la masa acumulada de la Galaxia a una distancia galactocéntrica mayor al radio del disco galáctico.

En este trabajo, haciendo uso de la fuerza gravitatoria, se compararán modelos que describan el halo de materia oscura de la Vía Láctea utilizando a las corrientes estelares como trazadoras. Para modelar corrientes estelares, existen diversos métodos, que van desde simulaciones numéricas de N -cuerpos a métodos menos demandantes en recursos de cómputo en los cuales se modelan los procesos de eyección de partículas desde el progenitor. Un proceso muy particular que engloba este último método es el *método de spray*, el cual será usado en el presente trabajo de tesis, siguiendo el modelo desarrollado en [Gibbons et al. \(2014\)](#). Los métodos de *spray* modelan la eyección de estrellas desde diferentes puntos del progenitor, con tasas de eyección que pueden ser constantes o variables en el tiempo. El método utilizado en el trabajo a seguir es del tipo *Lagrange Cloud Stripping* el cual modela la eyección de estrellas desde los puntos de Lagrange L_1 y L_2 a tasa constante en el tiempo. En dicho trabajo, lo que se busca es poner a prueba el modelo de eyección de estrellas allí trabajado comparando los resultados que de él se obtienen con los resultados obtenidos de simulaciones de N -cuerpos. El progenitor que allí se usa es la galaxia elipsoidal enana Sagitario y el método de *spray* es implementado teniendo en cuenta tres potenciales gravitatorios diferentes que modelen la Vía Láctea. Previo a usar el método de *spray* con esos tres potenciales, se hace una primera corrida del modelo de eyección con un potencial NFW, que es el que será tenido en cuenta en este trabajo a la hora de comparar resultados con [Gibbons et al. \(2014\)](#), según se indica más adelante.

Para poder aplicar este método, es necesario saber las condiciones iniciales (CI) de posición y velocidad del satélite. Con estos datos, a medida que el tiempo avanza y el satélite recorre su órbita, se irán generando CI de manera aleatoria, las cuales representarán la eyección de las estrellas, y se generarán en base a la posición y velocidad del satélite en el tiempo de eyección. De este modo, las CI generadas sirven como datos de entrada para una futura resolución de las ecuaciones diferenciales de movimiento de cada una de las estrellas. Para calcular la órbita de estas últimas se tendrá en cuenta la atracción gravitatoria que ejercen la galaxia huésped y satélite.

Así, en la primera parte de este trabajo, se estudiará la dinámica resultante de sumergir en un halo de materia oscura una corriente de estrellas, cuyo progenitor es la galaxia enana elipsoidal *Sagitario* (Sgr), la cual es un satélite de la Vía Láctea. El halo de la Galaxia en la cual esta última orbita será modelado según el modelo de NFW, utilizado por [Gibbons et al. \(2014\)](#) y explicado en el Cap. 2. Se compararán los resultados obtenidos con dicho trabajo, buscando la reproducción de los mismos.

En la segunda instancia de trabajo, se repetirá lo mismo pero esta vez se generarán tres corrientes. Una será generada por una galaxia similar a Sagitario, la cual se sumergirá en un halo modelado a través del modelo NFW y posteriormente modelado a través del modelo RAR extendido, el cual será desarrollado en el capítulo siguiente. Por otro lado, la última será generada por un sistema similar al cúmulo globular *Palomar 5* (Pal 5), la cual será solo puesta a prueba en un potencial gravitatorio tipo RAR.

En resumen, el siguiente trabajo comprenderá los siguientes capítulos:

- **Capítulo 2:** En este capítulo se abordará el modelo RAR extendido, dando una motivación general de sus hipótesis y detallando las ecuaciones diferenciales que surgen de este modelo. Además, se mostrarán algunos resultados obtenidos de la resolución de estas ecuaciones. Por último, se introducirá el modelo NFW para halos galácticos.
- **Capítulo 3:** Se desarrollará todo lo que a la dinámica de los satélites compete, como

la atracción gravitatoria que estos sufren y la órbita que resulta de la resolución de sus ecuaciones de movimiento.

- **Capítulo 4:** En este capítulo se detallará el concepto de radio de marea, el cual será usado para el método de *spray*, también desarrollado en esta parte del trabajo.
- **Capítulo 5:** Con las condiciones iniciales provistas en el espacio de las fases para las estrellas eyectadas por el método de *spray*, se detallará en este capítulo la resolución de las ecuaciones de movimiento que a estas estrellas compete, considerando la atracción gravitatoria del progenitor y del huésped.
- **Capítulo 6:** Se concluirá el trabajo con un capítulo dedicado a las conclusiones obtenidas a partir de la investigación realizada.

Capítulo 2

Modelos de halos de materia oscura

En este capítulo se introducirán los modelos a utilizar en este trabajo que describen la distribución de masa de materia oscura a escala galáctica.

2.1. Modelo RAR extendido

2.1.1. Contexto astrofísico

Cómo ocurre la formación de sistemas autogravitantes de partículas *no colisionales* de materia oscura, y cuál es su distribución (global) de masa, son aún problemas abiertos en la astronomía y la cosmología. Esto es tanto válido para cúmulos de estrellas, galaxias y cúmulos de galaxias. Actualmente las evidencias apoyan fuertemente el hecho de que el comportamiento de las estructuras a gran escala del Universo está regido por materia oscura fría, con la falencia de que, a escalas galácticas, todavía hay problemas sin resolver, como lo son la discrepancia núcleo-cúspide (*core-cusp*) y el problema de los satélites faltantes (*missing satellite problem*).

El principal mecanismo de relajación de halos galácticos se conoce como *mecanismo de relajación violenta* (Binney y Tremaine, 2008), el cual difiere de mecanismos de relajación colisional típicos de sistemas estelares, como por ejemplo, en cúmulos globulares. Este mecanismo es del tipo de mecanismos de *relajación no colisionales*, y su efecto es el de cambiar la energía de cada partícula del sistema durante el proceso de relajación. Este proceso tiene su base en el hecho de que el potencial gravitatorio del sistema en su camino a un estado cuasi-estable es dependiente del tiempo. Por lo tanto, cualquier partícula del sistema sentirá un potencial gravitatorio variable en el tiempo generado por el resto del sistema, conduciendo a que la energía de la partícula no se conserve durante el proceso de relajación.

Si se pensara a los halos galácticos como un gas compuesto de partículas clásicas, sus distribuciones de velocidades podrían evolucionar durante el proceso de formación del halo hacia una distribución maxwelliana de velocidades, la cual produce perfiles de densidad que corresponden a los de una esfera isoterma. El problema de esto es que es bien sabido que la extensión espacial de las distribuciones de masa de las esferas isotermas es infinita, al igual que sus masas totales, no siendo una estructura astrofísica realista como las observadas. Así, si se pretende que los halos astrofísicos posean una distribución finita al alcanzar el estado de cuasi-equilibrio (en el cual se maximice localmente la entropía), es necesario que ocurra el mecanismo de *evaporación de partículas*. Este mecanismo consta de la interacción débil y lejana entre partículas del sistema que puede, gradualmente, incrementar la velocidad de alguna de ellas, generando que posean una energía ligeramente positiva y se desliguen del sistema. Ahora, un proceso en el cual ocurre la evaporación de partículas es el ya mencionado

mecanismo de relajación violenta. El fenómeno de evaporación puede ser acelerado debido a fuerzas de marea, lo cual impone un comportamiento en forma de *corte* en la distribución de masa, adquiriendo las velocidades un comportamiento similar. Así, los mecanismos de relajación violenta para partículas clásicas los cuales incluyen el fenómeno de evaporación, admiten soluciones de Maxwell-Boltzmann con un corte en sus velocidades capaces de explicar el comportamiento de los halos galácticos (Chavanis et al., 2015).

Por otro lado, cuando se considera la naturaleza cuántica de las partículas en los mecanismos de relajación violenta antes mencionados, es posible obtener una solución más general para los halos de materia oscura. Estos desarrollan en su centro altas concentraciones de DM, en forma de un núcleo compacto altamente degenerado (degeneración de Fermi), el cual puede funcionar como alternativa al paradigma del agujero negro supermasivo (Argüelles et al., 2018).

De esta forma, se considerará una distribución de masa acotada y en equilibrio, con la nueva suposición de que estará compuesta de fermiones neutros relativistas sin interacción entre si, es decir, un sistema de partículas sin colisiones. Esta distribución dependerá de tres variables: la **degeneración**, el **corte** y la **temperatura**. Se usarán las condiciones de Tolman (Tolman, 1930) y Klein (Klein, 1949) para derivar una relación entre esas variables y la función métrica temporal, es decir, el equivalente relativista del potencial gravitatorio. Este último se obtiene de resolver las ecuaciones de campo de Einstein para un fluido perfecto en equilibrio con simetría esférica.

Dado que las tres variables antes mencionadas dependerán de la distancia al centro de la distribución, se deben elegir condiciones de borde adecuadas para ellas. Estas serán los valores de esas cantidades en el centro de la distribución. La masa de la partícula de materia oscura es solo una restricción y solo es necesaria para proporcionar las propiedades correctas del halo de DM. El modelo descrito anteriormente corresponde a la descripción más general de una distribución acotada de masa esféricamente simétrica y autogravitante.

Vale aclarar que el modelo introducido no tiene en cuenta la producción de energía y los procesos de transporte llevados a cabo por la componente bariónica de la galaxia. Es por ello que este modelo describe un sistema cuasi-estacionario en donde sus parámetros podrían variar lentamente con el tiempo. Además, se considera que el sistema tiene simetría esférica, cuando en realidad los sistemas astrofísicos presentan anisotropías. Esta aproximación es muy buena para galaxias elipsoidales enanas, las cuales, en su mayoría, están compuestas de DM. El modelo descrito representará un halo de DM libre. Otra idealización a tener en cuenta es la presencia de un corte en donde la densidad cae a cero en el radio de marea en vez de asintóticamente a la densidad del medio intergaláctico. En este caso, se supone que más allá del radio de marea la cantidad de materia es tan baja que su contribución al sistema puede ser despreciada. Es esta aproximación de corte en densidad la base principal de la extensión del modelo RAR, la cual intenta reproducir los tamaños finitos de las galaxias y tener en cuenta procesos más realistas de relajación de galaxias.

Las soluciones a las ecuaciones dadas por este modelo se estudiarán de manera numérica, dada la alta complejidad del escenario astrofísico.

El modelo será aplicado a la Vía Láctea dado que en su halo orbitan actualmente los satélites mencionados en la introducción de este trabajo, Sagitario y Palomar 5.

2.1.2. Descripción de la distribución de masa

Toda distribución de masa que se comporte como un fluido y sea esféricamente simétrica, es descrita típicamente a través de su densidad de masa $\rho(r)$ y su presión $P(r)$, las cuales, en nuestro caso de interés y siguiendo la referencia de Argüelles et al. (2018), están dadas por

$$\rho(r) = \frac{2m}{h^3} \int f_c(\epsilon(p), r) \left(1 + \frac{\epsilon(p)}{mc^2}\right) d^3p, \quad (2.1)$$

$$P(r) = \frac{2}{3h^3} \int f_c(\epsilon(p), r) \epsilon(p) \frac{1 + \epsilon(p)/2mc^2}{1 + \epsilon(p)/mc^2} d^3p. \quad (2.2)$$

La energía ϵ es la energía cinética de la partícula, la cual viene dada por $\epsilon = \sqrt{c^2p^2 + m^2c^4} - mc^2$, siendo p la norma del momento lineal de la partícula. h es la constante de Planck, c la velocidad de la luz y m es la masa del fermión que forma el sistema autogravitante de DM. Las Ecs. (2.1) y (2.2) son conocidas como ecuaciones de estado. La integración de ellas es llevada a cabo en una región del espacio de momentos, acotada por la condición de corte $\epsilon \leq \epsilon_c(r)$, en donde $\epsilon_c(r)$ es la energía de corte. Como se verá más adelante, al integrarse bajo esta condición a la densidad se le impone un corte a su valor. La cantidad $f_c(\epsilon(p), r)$ es la denominada función de distribución del espacio de las fases, la cual difiere de la función de distribución estándar de Fermi-Dirac en la energía de corte y superiores como

$$\begin{cases} f_c(\epsilon, r) = \frac{1 - e^{-(\epsilon - \epsilon_c(r))/kT(r)}}{e^{(\epsilon - \mu(r))/kT(r)} + 1} & \epsilon \leq \epsilon_c(r), \\ f_c(\epsilon, r) = 0 & \epsilon > \epsilon_c(r). \end{cases} \quad (2.3)$$

En las ecuaciones anteriores $\mu(r)$ es el potencial químico al cual se le ha sustraído la energía en reposo de la partícula de DM, $T(r)$ es la temperatura de la distribución y k es la constante de Boltzmann.

En este modelo no es considerada la presencia de antifermiones, por lo que se considerarán temperaturas $T(r) \ll mc^2/k$. Esta suposición se hace para evitar que los fermiones alcancen energías aptas para la creación de pares fermión-antifermión. Aún así, se adoptará por trabajar en un marco relativista, con expresiones propias de dicho contexto. El conjunto completo de las variables antes mencionadas es el siguiente:

$$\text{variable de temperatura} \implies \beta(r) = \frac{kT(r)}{mc^2}, \quad (2.4)$$

$$\text{variable de degeneración} \implies \theta(r) = \frac{\mu(r)}{kT(r)}, \quad (2.5)$$

$$\text{variable de corte} \implies W(r) = \frac{\epsilon_c(r)}{kT(r)}. \quad (2.6)$$

En la siguiente sección se detallarán las características generales que sigue el modelo, tanto el escenario mecánico como las condiciones que se imponen sobre las variables.

2.1.2.1. Fluido perfecto en equilibrio

Una vez introducido el modelo y la distribución de masa, se está en condiciones de plantear las ecuaciones que rigen la mecánica del sistema, siguiendo el desarrollo hecho en [Hobson et al. \(2006\)](#). Como fue mencionado anteriormente, se resolverán las ecuaciones de campo de Einstein para este sistema. Para ello, es necesario definir ciertas cantidades involucradas en estas ecuaciones. La primera es el *tensor de Einstein* $G_{\mu\nu}$, que es el que contiene la información sobre la geometría del espacio-tiempo. Mientras que la segunda es el *tensor de energía-momento* $T_{\mu\nu}$, aquel encargado de caracterizar la distribución de masa que genera curvatura en el espacio-tiempo. Se usará la convención de que los índices de letras griegas tomarán los valores 0; 1; 2 y 3, mientras que los índices representados mediante letras latinas tomarán los valores 1; 2 y 3.

2. Modelos de halos de materia oscura

Para definir al tensor de Einstein, es necesario introducir a la *métrica espacio-temporal* $g_{\mu\nu}$, la cual es un tensor simétrico no degenerado que permitirá medir la separación espacio-temporal entre distintos eventos que ocurran sobre el espacio-tiempo. Con ella, es posible definir los *símbolos de Christoffel*, los cuales se escriben en términos de la métrica como:

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{g^{\alpha\sigma}}{2}(\partial_{\beta}g_{\sigma\gamma} + \partial_{\gamma}g_{\sigma\beta} - \partial_{\sigma}g_{\beta\gamma}). \quad (2.7)$$

En la ecuación anterior se ha utilizado la convención de suma de Einstein, en donde un par de índices repetidos se suman considerando todos los valores posibles que pueden tomar. Además, ∂_{α} indica deriva respecto a la coordenada x^{α} y $g^{\alpha\sigma}$ es la métrica inversa, definida de forma tal que $g^{\alpha\sigma}g_{\sigma\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta}$, con δ^{α}_{β} la *delta de Kronecker*. De esta forma, se está en condiciones de definir el *tensor de curvatura de Riemann*, cuyas componentes en términos de los símbolos de Christoffel son:

$$R^{\gamma}_{\rho\alpha\beta} = \partial_{\alpha}\Gamma^{\gamma}_{\rho\beta} - \partial_{\beta}\Gamma^{\gamma}_{\rho\alpha} + \Gamma^{\mu}_{\rho\beta}\Gamma^{\gamma}_{\mu\alpha} - \Gamma^{\mu}_{\rho\alpha}\Gamma^{\gamma}_{\mu\beta}. \quad (2.8)$$

Así, se define al *tensor de Ricci* como:

$$R_{\mu\nu} = R^{\gamma}_{\mu\gamma\nu}, \quad (2.9)$$

a través del cual se puede calcular el *escalar de Ricci*, el cual es, simplemente, la traza del tensor de Ricci:

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}. \quad (2.10)$$

Por último, se define al tensor de Einstein como:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}. \quad (2.11)$$

Para poder escribir al tensor de energía-momento, es necesario tener presente ciertos aspectos de la distribución de masa. El sistema que será fuente de la curvatura espacio-temporal será un fluido perfecto en equilibrio hidrostático en simetría esférica. Para caracterizarlo se tendrá en cuenta un observador \mathcal{O} que se mueva solidario a un elemento de fluido y respecto al cual se defina un sistema de referencia inercial local. Al ser arbitrario el elemento de fluido, este desarrollo es válido en cualquier parte del mismo. De esta forma, si aquel elemento se caracteriza por tener una tetra-velocidad u^{μ} con respecto a \mathcal{O} , u^i , la parte espacial de la tetra-velocidad, será nula respecto a \mathcal{O} , quedando la tetra-velocidad de la forma $u^{\mu} = (u^0, 0, 0, 0)$. u^0 es la llamada componente temporal de la tetra-velocidad. Por otra lado, al ser un fluido, este se caracterizará por tener una dada densidad de masa $\rho(r)$ y una presión $P(r)$, ambas funciones de r , la distancia al centro de la distribución de masa. Por lo tanto, el tensor de energía momento será:

$$T_{\mu\nu} = \left(\rho(r) + \frac{P(r)}{c^2}\right)u_{\mu}u_{\nu} - P(r)g_{\mu\nu}. \quad (2.12)$$

Así, se está en condiciones de escribir las ecuaciones de campo de Einstein sin constante cosmológica (Λ), las cuales son:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (2.13)$$

Aquí G es la constante de gravitación newtoniana y c la velocidad de la luz. Ya que el escenario presenta simetría esférica, se utilizará la métrica estándar para simetría esférica dada por:

$$g_{\mu\sigma} = \text{diag}(e^{\nu(r)}, -e^{\lambda(r)}, -r^2, -r^2\text{sen}^2\theta), \quad (2.14)$$

la cual utiliza la firma $\text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Al estar en un escenario en simetría esférica, se utilizará la convención de que las coordenadas espacio-temporales x^0 , x^1 , x^2 y x^3 serán, respectivamente, ct , r , θ y ϕ , siendo las últimas tres las coordenadas usuales de la simetría esférica: r la coordenada radial, θ el ángulo cenital y ϕ el ángulo azimutal. Las funciones $\nu(r)$ y $\lambda(r)$ son funciones de la coordenada radial r , las cuales serán determinadas al resolver las Ecs. (2.13). Al calcularse las componentes del tensor de Ricci, se obtiene que:

$$R_{00} = \left[-\frac{\nu'^2 + \nu''}{2} + \frac{\nu'}{4}(\nu' + \lambda') - \frac{\nu'}{r} \right] e^{\nu-\lambda}, \quad (2.15)$$

$$R_{11} = \frac{\nu'^2 + \nu''}{2} - \frac{\nu'}{4}(\nu' + \lambda') - \frac{\lambda'}{r}, \quad (2.16)$$

$$R_{22} = e^{-\lambda} - 1 + \frac{re^{-\lambda}}{2}(\nu' - \lambda'), \quad (2.17)$$

$$R_{33} = R_{22}\text{sen}^2\theta. \quad (2.18)$$

En las expresiones anteriores la comilla indica derivada respecto a la coordenada radial r y se ha omitido que ν y λ son funciones de ella. Luego, las componentes no diagonales del tensor de Ricci R_{i0} son nulas para esta geometría. Además, al ser las componentes no diagonales de la métrica nulas también, de las Ecs. (2.13) se recupera que $T_{i0} = 0$. A su vez, dado que el tensor de energía-momento es de la forma dada en las Ecs. (2.12), al evaluar las componentes no diagonales del mismo, al ser $T_{i0} = g_{i0} = 0$, se llega a que $u_i u_0 = 0$. Basándose en el hecho de que $u^i \equiv 0$, al bajar el índice de ese tensor, se obtiene que $u_i \equiv 0$, en perfecto acuerdo con el resultado anterior. Esto último, combinado con el hecho de que la tetra-velocidad es un tensor tipo tiempo, es decir, $u_\mu u^\mu = c^2$, lleva a que la tetra-velocidad tenga la forma $u_\mu = (ce^{\nu/2}, 0, 0, 0)$.

Conocida la forma de la tetra-velocidad, se puede calcular explícitamente la forma de las componentes diagonales del tensor de energía-momento. Utilizando las Ecs. (2.12), estas son:

$$T_{00} = \rho(r)c^2e^\nu, \quad (2.19)$$

$$T_{11} = P(r)e^\lambda, \quad (2.20)$$

$$T_{22} = P(r)r^2, \quad (2.21)$$

$$T_{33} = P(r)r^2\text{sen}^2\theta. \quad (2.22)$$

Para proseguir, se despeja de las Ecs. (2.13) el tensor de Ricci, quedando así las ecuaciones de campo de la forma:

$$R_{\mu\sigma} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\sigma} + \frac{1}{2}Rg_{\mu\sigma}. \quad (2.23)$$

De esta forma, puede ser calculada la traza del tensor de Ricci en términos de la traza del tensor de energía-momento. Esta última, es menos laboriosa de calcular que el escalar de Ricci. Contrayendo el tensor de Ricci dado en las Ecs. (2.23) con la métrica inversa se obtiene:

$$\underbrace{g^{\mu\sigma} R_{\mu\sigma}}_{=R} = -\frac{8\pi G}{c^4} \underbrace{g^{\mu\sigma} T_{\mu\sigma}}_{=T} + \frac{1}{2} R \underbrace{g^{\mu\sigma} g_{\mu\sigma}}_{=4}, \quad (2.24)$$

$$-R = -\frac{8\pi G}{c^4} T, \quad (2.25)$$

$$R = \frac{8\pi G}{c^4} T. \quad (2.26)$$

Por otro lado, el cálculo de la traza del tensor de energía-momento da:

$$T = \rho(r)c^2 - 3P(r). \quad (2.27)$$

De esta forma, se puede reemplazar el R dado en la Ec. (2.26) en las Ecs. (2.23) para obtener:

$$R_{\mu\sigma} = -\frac{8\pi G}{c^4} \underbrace{T_{\mu\sigma}}_{\text{Ecs. (2.12)}} + \frac{1}{2} \frac{8\pi G}{c^4} \underbrace{T}_{\text{Ec. (2.27)}} g_{\mu\sigma}, \quad (2.28)$$

$$= \frac{8\pi G}{c^4} \left[-\left(\rho(r) + \frac{P(r)}{c^2} \right) u_\mu u_\sigma + P(r) g_{\mu\sigma} + \frac{1}{2} \left(\rho(r)c^2 - 3P(r) \right) g_{\mu\sigma} \right], \quad (2.29)$$

$$= -\frac{8\pi G}{c^4} \left[\left(\rho(r) + \frac{P(r)}{c^2} \right) u_\mu u_\sigma - \frac{1}{2} \left(\rho(r)c^2 - P(r) \right) g_{\mu\sigma} \right]. \quad (2.30)$$

Ahora, es posible calcular nuevamente las componentes del tensor de Ricci según las Ecs. (2.30), para luego igualarlas con las Ecs. (2.15) - (2.18) y formar un sistema de ecuaciones diferenciales. El cálculo de las componentes según las Ecs. (2.30) da:

$$R_{00} = -\frac{4\pi G}{c^4} \left(\rho(r)c^2 + 3P(r) \right) e^\nu, \quad (2.31)$$

$$R_{11} = -\frac{4\pi G}{c^4} \left(\rho(r)c^2 - P(r) \right) e^\lambda, \quad (2.32)$$

$$R_{22} = -\frac{4\pi G}{c^4} \left(\rho(r)c^2 - P(r) \right) r^2, \quad (2.33)$$

$$R_{33} = R_{22} \text{sen}^2 \theta. \quad (2.34)$$

Cabe destacar que si se iguala la Ec. (2.18) con la Ec. (2.34), se obtendrá una identidad, dejando solo tres ecuaciones diferenciales para poder trabajar. Las incógnitas del sistema serán $\nu(r)$ y $\lambda(r)$, ya que las Ecs. (2.1) y (2.2) proveen de la densidad $\rho(r)$ y la presión $P(r)$, respectivamente. Es por ello que, a simple vista, el sistema parece sobredeterminado, aunque esto no es así. Más adelante se explicará el porque de esta afirmación.

El siguiente paso consiste en utilizar las Ecs. (2.31)-(2.33), con las cuales se puede verificar que:

$$\frac{R_{00}}{e^\nu} + \frac{R_{11}}{e^\lambda} + \frac{2R_{22}}{r^2} = -\frac{16\pi G}{c^2} \rho(r). \quad (2.35)$$

Reemplazando lo que valen las componentes del tensor de Ricci R_{00} , R_{11} y R_{22} según las Ecs. (2.15)-(2.17) en la ecuación anterior, se obtiene:

$$1 - e^{-\lambda} + r\lambda' e^{-\lambda} = \frac{8\pi G}{c^2} r^2 \rho(r). \quad (2.36)$$

Dado que el miembro izquierdo en la ecuación anterior es la derivada de un producto, puede ser reescrito como:

$$\frac{d}{dr} \left[r \left(1 - e^{-\lambda} \right) \right] = \frac{8\pi G}{c^2} r^2 \rho(r). \quad (2.37)$$

La expresión anterior puede ser integrada. Considerando como variable de integración a \tilde{r} , se puede integrar de $\tilde{r} = 0$ a $\tilde{r} = r$, para obtener:

$$r \left(1 - e^{-\lambda} \right) = \frac{8\pi G}{c^2} \int_0^r \tilde{r}^2 \rho(\tilde{r}) d\tilde{r}, \quad (2.38)$$

en donde se hizo uso del hecho de que $e^{\lambda} \Big|_{\tilde{r}=0}$ es una cantidad finita, según se puede ver de la Ec. (2.36). Definiendo la *masa acumulada* de la distribución de masa como:

$$M(r) = \int_0^r 4\pi \tilde{r}^2 \rho(\tilde{r}) d\tilde{r}, \quad (2.39)$$

la expresión dada en la Ec. (2.38) puede ser reescrita de forma de obtener:

$$e^{\lambda(r)} = \left[1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r} \right]^{-1}. \quad (2.40)$$

Por otro lado, la Ec. (2.39) puede ser derivada con respecto a r para obtener el gradiente de masa, el cual es:

$$\boxed{\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)}. \quad (2.41)$$

Esta es una de las ecuaciones diferenciales que compondrá el modelo RAR extendido. Al ser una ecuación diferencial de primer orden, debe indicarse una condición de contorno adecuada para resolverla de manera unívoca. Esta será la masa acumulada en el origen de la distribución de masa. Como en el origen no hay masa que se haya podido acumular, resulta ser que $M(0) = M_0 = 0$.

La siguiente ecuación a hallar consiste en una ecuación diferencial que rijan el comportamiento de la función $\nu(r)$. Para hallarla, se deben igualar las componentes del tensor de Ricci R_{22} dadas en las Ecs. (2.17) y (2.33), para obtener:

$$e^{-\lambda} - 1 + \frac{r e^{-\lambda}}{2} (\nu' - \lambda') = -\frac{4\pi G}{c^4} (\rho(r)c^2 - P(r)) r^2, \quad (2.42)$$

$$-e^{-\lambda} + 1 - \frac{r e^{-\lambda}}{2} (\nu' - \lambda') = \frac{4\pi G}{c^4} (\rho(r)c^2 - P(r)) r^2, \quad (2.43)$$

$$1 - e^{-\lambda} - \frac{r e^{-\lambda}}{2} \nu' + \frac{r e^{-\lambda}}{2} \lambda' = \frac{4\pi G}{c^4} (\rho(r)c^2 - P(r)) r^2. \quad (2.44)$$

$$(2.45)$$

El cuarto término del miembro izquierdo de la ecuación anterior puede ser reemplazado por lo que se obtenga de él al ser despejado de la Ec. (2.36). Al hacerlo, se tiene:

$$1 - e^{-\lambda} - \frac{re^{-\lambda}}{2}\nu' + \frac{1}{2}\left(\frac{8\pi G}{c^2}r^2\rho(r) - 1 + e^{-\lambda}\right) = \frac{4\pi G}{c^4}\left(\rho(r)c^2 - P(r)\right)r^2, \quad (2.46)$$

$$1 - e^{-\lambda} - \frac{re^{-\lambda}}{2}\nu' + \frac{4\pi G}{c^2}r^2\rho(r) - \frac{1}{2}(1 - e^{-\lambda}) = \frac{4\pi G}{c^2}r^2\rho(r) - \frac{4\pi G}{c^4}P(r)r^2, \quad (2.47)$$

$$\frac{1}{2}(1 - e^{-\lambda}) - \frac{re^{-\lambda}}{2}\nu' + \cancel{\frac{4\pi G}{c^2}r^2\rho(r)} = \cancel{\frac{4\pi G}{c^2}r^2\rho(r)} - \frac{4\pi G}{c^4}P(r)r^2, \quad (2.48)$$

$$\frac{1}{2}(1 - e^{-\lambda}) - \frac{re^{-\lambda}}{2}\nu' = -\frac{4\pi G}{c^4}P(r)r^2, \quad (2.49)$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-\lambda}(1 + r\nu') = -\frac{4\pi G}{c^4}P(r)r^2, \quad (2.50)$$

$$-e^{-\lambda}(1 + r\nu') = -\frac{8\pi G}{c^4}P(r)r^2 - 1, \quad (2.51)$$

$$1 + r\nu' = e^\lambda\left(\frac{8\pi G}{c^4}P(r)r^2 + 1\right). \quad (2.52)$$

Reemplazando lo que vale $e^{\lambda(r)}$ por su expresión dada en la Ec. (2.40) y despejando ν' , se obtiene:

$$\boxed{\frac{d\nu(r)}{dr} = \frac{1}{r}\left[\left(1 - \frac{2GM(r)}{c^2r}\right)^{-1}\left(\frac{8\pi G}{c^4}P(r)r^2 + 1\right) - 1\right]}. \quad (2.53)$$

Esta ecuación diferencial indica el comportamiento que debe tener la función $\nu(r)$ frente al fluido perfecto de masa acumulada $M(r)$ y presión $P(r)$ y constituye otra de las ecuaciones del modelo RAR extendido. Para resolverla debe proveerse de una condición de contorno. Esta será $\nu(0) = \nu_0 = 0$, según se indica en Argüelles et al. (2018).

Hasta aquí, se han hallado todas las componentes de la métrica desconocidas en un principio. Cabe destacar que no hubo necesidad de usar las ecuaciones diferenciales que resultaban de igualar las componentes del tensor de Ricci R_{00} y R_{11} (lo que podría haber llevado a una sobredeterminación del sistema de ecuaciones). Esto es así ya que estas ecuaciones se siguen de las Ecs. (A.12), (2.35) y de la ecuación que surge de igualar las componentes R_{22} del tensor de Ricci, conduciendo a que no exista una sobredeterminación en el sistema. Para un mayor análisis sobre este tema, se puede consultar Weinberg (1972). La Ec. (A.12) fue deducida en el Ap. A, en donde se obtiene de trabajar con la ecuación de conservación del tensor de energía-momento.

Para obtener las restantes ecuaciones, las cuales rigen el comportamiento de las tres variables indicadas en las Ecs. (2.4) - (2.6), se debe suponer la hipótesis de equilibrio termodinámico en relatividad general. Además, se utilizarán tres expresiones conservadas a lo largo de una dada geodésica radial, generando que intervengan en el modelo tres parámetros constantes. Estos parámetros serán las variables de temperatura, de degeneración y de corte evaluadas en el origen de la distribución de masa. Respectivamente, se tendrá que los parámetros son: $\beta(0) = \beta_0$, $\theta(0) = \theta_0$ y $W(0) = W_0$.

De esta forma, se está en condiciones de poder aplicar las condiciones de Tolman y Klein, las cuales son, respectivamente:

$$e^{\nu(r)/2}T(r) = \text{cte}, \quad (2.54)$$

$$e^{\nu(r)/2}(\mu(r) + mc^2) = \text{cte}. \quad (2.55)$$

Ambas expresiones son constantes a lo largo de una geodésica radial, la cual se caracteriza por tener coordenadas angulares fijas. Es por esto que se considerará a las constantes de las Ecs. (2.54) y (2.55) como el valor de las expresiones que aparecen en el miembro izquierdo de esas ecuaciones evaluadas en el borde de la distribución de masa, al cual se supondrá en $r = R$. De esta forma, las condiciones de Tolman y Klein cobran la forma:

$$e^{\nu(r)/2}T(r) = e^{\nu_R/2}T_R, \quad (2.56)$$

$$e^{\nu(r)/2}(\mu(r) + mc^2) = e^{\nu_R/2}(\mu_R + mc^2), \quad (2.57)$$

en donde $\nu_R = \nu(R)$, $T_R = T(R)$ y $\mu_R = \mu(R)$.

Por último, la condición de conservación asociada a la energía de corte $\epsilon_c(r)$ es (Argüelles et al., 2018):

$$(\epsilon_c(r) + mc^2)e^{\nu(r)/2} = (\epsilon_R + mc^2)e^{\nu_R/2}, \quad (2.58)$$

en donde se ha elegido, nuevamente, representar a la constante a través de su valor en $r = R$. Además, $\epsilon_R = \epsilon_c(R)$, la cual es una cantidad nula, ya que en el borde de la distribución no se necesita energía para desligarse del sistema.

Para concluir con la deducción de las ecuaciones del modelo RAR extendido se seguirán los pasos trabajados en Ruffini et al. (2013). Para ello, se comenzará por tomar la Ec. (2.56) y reescribirla de forma tal de introducir en ella el parámetro de temperatura. Así, la ecuación queda:

$$e^{\nu(r)/2}\beta(r) = e^{\nu_R/2}\beta_R, \quad (2.59)$$

$$e^{\nu(r)/2} = \frac{\beta_R}{\beta(r)}e^{\nu_R/2}. \quad (2.60)$$

Lo siguiente es reemplazar la expresión dada en la Ec. (2.60) para $e^{\nu(r)/2}$ en la Ec. (2.58). Así, se obtiene:

$$(\epsilon_c(r) + mc^2)\frac{\beta_R}{\beta(r)}e^{\nu_R/2} = (\epsilon_R + mc^2)e^{\nu_R/2}, \quad (2.61)$$

$$(\epsilon_c(r) + mc^2)\frac{\beta_R}{\beta(r)}\cancel{e^{\nu_R/2}} = \underbrace{(\epsilon_R + mc^2)}_{=0}\cancel{e^{\nu_R/2}}, \quad (2.62)$$

$$\left(\frac{\epsilon_c(r)mc^2}{kT(r)} + \frac{mc^2}{\beta(r)}\right)\beta_R = mc^2, \quad (2.63)$$

$$\cancel{mc^2}\left(\frac{\epsilon_c(r)}{kT(r)} + \frac{mc^2}{kT(r)}\right)\beta_R = \cancel{mc^2}. \quad (2.64)$$

El primer término dentro del paréntesis del miembro izquierdo de la última igualdad es la variable de corte. De esa forma, distribuyendo β_R dentro del paréntesis, se obtiene:

$$W(r)\beta_R + \frac{mc^2}{kT(r)}\beta_R = 1, \quad (2.65)$$

$$\frac{mc^2}{kT(r)}\beta_R = 1 - W(r)\beta_R, \quad (2.66)$$

$$\frac{mc^2}{kT(r)} = \frac{1 - W(r)\beta_R}{\beta_R}. \quad (2.67)$$

2. Modelos de halos de materia oscura

Dado que el miembro izquierdo de la igualdad anterior es mayor a 0, se llega a la condición $0 \leq W(r)\beta_R < 1$. Esto impone una restricción a satisfacer por la variable de corte. Por otro lado, partiendo de la Ec. (2.65), se puede reemplazar $\beta_R = kT_R/mc^2$ en ella, para obtener:

$$W(r)\beta_R + \frac{mc^2}{kT(r)} \frac{kT_R}{mc^2} = 1, \quad (2.68)$$

$$\frac{\cancel{mc^2}}{kT(r)} \frac{kT_R}{\cancel{mc^2}} = 1 - W(r)\beta_R, \quad (2.69)$$

$$\frac{T_R}{T(r)} = 1 - W(r)\beta_R. \quad (2.70)$$

Con esta relación que da el cociente $T_R/T(r)$ como función de $W(r)$, se puede recurrir a la Ec. (2.56) y reescribirla como:

$$e^{\nu(r)/2} = e^{\nu_R/2} \frac{T_R}{T(r)}. \quad (2.71)$$

Así, es posible reemplazar el cociente de temperaturas según la Ec. (2.70) en la ecuación anterior para obtener:

$$e^{\nu(r)/2} = e^{\nu_R/2} (1 - W(r)\beta_R). \quad (2.72)$$

La ecuación anterior relaciona la función $\nu(r)$ con la variable de corte. Dado que es posible hallar $\nu(r)$ según la Ec. (2.53), se procederá a despejar, de la ecuación anterior, a la variable de corte como función de $\nu(r)$.

$$e^{(\nu(r)-\nu_R)/2} = 1 - W(r)\beta_R, \quad (2.73)$$

$$W(r)\beta_R = 1 - e^{(\nu(r)-\nu_R)/2}, \quad (2.74)$$

$$W(r) = \frac{1 - e^{(\nu(r)-\nu_R)/2}}{\beta_R}. \quad (2.75)$$

Como no se conoce el valor ν_R , se debe escribir en términos de cantidades conocidas. Para ello, al evaluar la Ec. (2.72) en $r = 0$ y recordando que $\nu(0) = 0$, se tiene que:

$$1 = e^{\nu_R/2} (1 - W_0\beta_R), \quad (2.76)$$

$$\frac{1}{(1 - W_0\beta_R)} = e^{\nu_R/2}. \quad (2.77)$$

Por otro lado, también se desconoce el valor β_R . Es por ello que debe ser reescrito en términos de cantidades conocidas para que $e^{\nu_R/2}$ y el propio β_R dependan de parámetros que sean datos conocidos del modelo. Para ello, se puede tomar la Ec. (2.71), evaluarla en $r = 0$ y reescribirla en términos de la variable de temperatura para obtener:

$$1 = \underbrace{e^{\nu_R/2}}_{\text{Ec. (2.77)}} \frac{\beta_R}{\beta_0}, \quad (2.78)$$

$$\beta_0 = \frac{\beta_R}{(1 - W_0\beta_R)}, \quad (2.79)$$

$$\beta_0(1 - W_0\beta_R) = \beta_R, \quad (2.80)$$

$$\beta_0 - \beta_0 W_0 \beta_R - \beta_R = 0, \quad (2.81)$$

$$\beta_0 - (\beta_0 W_0 + 1)\beta_R = 0, \quad (2.82)$$

$$\beta_0 = (\beta_0 W_0 + 1)\beta_R, \quad (2.83)$$

$$\frac{\beta_0}{\beta_0 W_0 + 1} = \beta_R. \quad (2.84)$$

Ahora, con el valor de β_R calculado en términos de los parámetros β_0 y W_0 , este puede ser reemplazado en la Ec. (2.77) para obtener:

$$\frac{1}{\left(1 - W_0 \frac{\beta_0}{\beta_0 W_0 + 1}\right)} = e^{\nu_R/2}, \quad (2.85)$$

$$\frac{1 + \beta_0 W_0}{1 + \beta_0 W_0 - W_0 \beta_0} = e^{\nu_R/2}, \quad (2.86)$$

$$1 + \beta_0 W_0 = e^{\nu_R/2}. \quad (2.87)$$

Con los valores de β_R y $e^{\nu_R/2}$ calculados, se los puede reemplazar en la Ec. (2.75) para obtener:

$$W(r) = \frac{1 - e^{\nu(r)/2} \frac{1}{1 + \beta_0 W_0}}{\frac{\beta_0}{\beta_0 W_0 + 1}}, \quad (2.88)$$

$$= \frac{1 + \beta_0 W_0 - e^{\nu(r)/2} \frac{1 + \beta_0 W_0}{1 + \beta_0 W_0}}{\beta_0}, \quad (2.89)$$

$$\boxed{W(r) = \frac{1 + \beta_0 W_0 - e^{\nu(r)/2}}{\beta_0}}. \quad (2.90)$$

Para relacionar a la variable de degeneración con la variable de corte, se debe reemplazar en la condición de Klein (Ec. 2.57) el valor de $e^{\nu(r)/2}$ según lo indica la condición de Tolman (Ec. 2.56). Luego de esto, se obtiene:

$$\frac{T_R e^{\nu_R/2}}{T(r)} (\mu(r) + mc^2) = e^{\nu_R/2} (\mu_R + mc^2), \quad (2.91)$$

$$\frac{kT_R}{kT(r)} (\mu(r) + mc^2) = \mu_R + mc^2, \quad (2.92)$$

$$kT_R \left(\frac{\mu(r)}{kT(r)} + \frac{mc^2}{kT(r)} \right) = \mu_R + mc^2, \quad (2.93)$$

$$\frac{\mu(r)}{kT(r)} + \frac{mc^2}{kT(r)} = \frac{\mu_R}{kT_R} + \frac{mc^2}{kT_R}. \quad (2.94)$$

2. Modelos de halos de materia oscura

El primer término del miembro izquierdo y el mismo, pero del miembro derecho, son la variable de degeneración, mientras que el segundo término del miembro izquierdo puede ser reemplazado por su equivalente según la Ec. (2.67). De esta forma, se obtiene:

$$\theta(r) + \frac{1 - W(r)\beta_R}{\beta_R} = \underbrace{\theta_R}_{=\theta(R)} + \underbrace{\frac{mc^2}{kT_R}}_{=1/\beta_R}, \quad (2.95)$$

$$\beta_R\theta(r) + \cancel{\beta_R}\frac{1 - W(r)\beta_R}{\cancel{\beta_R}} = \beta_R\theta_R + \underbrace{\cancel{\beta_R}}_{=1}, \quad (2.96)$$

$$\beta_R\theta(r) + \cancel{\beta_R} - W(r)\beta_R = \beta_R\theta_R + \cancel{\beta_R}, \quad (2.97)$$

$$\beta_R\theta(r) - W(r)\beta_R = \beta_R\theta_R, \quad (2.98)$$

$$\theta(r) - W(r) = \theta_R, \quad (2.99)$$

$$\theta(r) = \theta_R + W(r). \quad (2.100)$$

Evaluando la expresión anterior en $r = 0$ se obtiene:

$$\theta_0 = \theta_R + W_0, \quad (2.101)$$

$$\theta_0 - W_0 = \theta_R. \quad (2.102)$$

Reemplazando este resultado en la Ec. (2.100) se obtiene:

$$\boxed{\theta(r) = \theta_0 - W_0 + W(r)}. \quad (2.103)$$

De esta forma, una vez que se haya hallado $W(r)$, recurriendo a la ecuación anterior se puede hallar la variable de degeneración.

Por último, una vez hallada la función $\nu(r)$ según fue mencionado anteriormente, se puede utilizar la Ec. (2.59) para dar una expresión para obtener la variable de temperatura. A diferencia de antes, se planteará la constante del miembro derecho evaluada en $r = 0$ en vez de en $r = R$. Así, se tiene:

$$e^{\nu(r)/2}\beta(r) = \underbrace{e^{\nu_0/2}}_{=1}\beta_0, \quad (2.104)$$

$$\boxed{\beta(r) = e^{-\nu(r)/2}\beta_0}. \quad (2.105)$$

En conclusión, el sistema completo de ecuaciones con las correspondientes condiciones de borde con el cual se pueden hallar a las funciones que caracterizan al modelo RAR extendido son:

$$\begin{aligned}
 \frac{dM(r)}{dr} &= 4\pi r^2 \rho(r), & M(0) &= M_0 = 0, \\
 \frac{d\nu(r)}{dr} &= \frac{1}{r} \left[\left(1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r} \right)^{-1} \left(\frac{8\pi G}{c^4} P(r)r^2 + 1 \right) - 1 \right], & \nu(0) &= \nu_0 = 0, \\
 W(r) &= \frac{1 + \beta_0 W_0 - e^{\nu(r)/2}}{\beta_0}, & W(0) &= W_0, \\
 \theta(r) &= \theta_0 - W_0 + W(r), & \theta(0) &= \theta_0, \\
 \beta(r) &= e^{-\nu(r)/2} \beta_0, & \beta(0) &= \beta_0.
 \end{aligned} \tag{2.106}$$

2.1.3. Solución numérica del sistema de ecuaciones diferenciales

Con todos los ingredientes presentados y explicados en la sección anterior, se puede resolver de manera numérica el sistema de ecuaciones diferenciales (2.106). Antes que nada, por conveniencia numérica, se adimensionalizarán las funciones y la variable radial involucrada en dicho sistema. Para ello, se tendrán presente las siguientes definiciones, tomadas de [Ruffini et al. \(2013\)](#):

$$\rho = \frac{c^2}{G\chi^2} \hat{\rho}, \tag{2.107}$$

$$P = \frac{c^4}{G\chi^2} \hat{P}, \tag{2.108}$$

$$M = \frac{c^2 \chi}{G} \hat{M}, \tag{2.109}$$

$$r = \chi \hat{r}. \tag{2.110}$$

Las cantidades con un *sombrero* en su nombre son las correspondientes variables adimensionales. La constante χ se define como:

$$\chi = \frac{\hbar}{mc} \left(\frac{m_p}{m} \right) \left(\frac{8\pi^3}{g} \right)^{1/2}, \tag{2.111}$$

en donde $\hbar = h/2\pi$, $m_p = \sqrt{\hbar c/G}$ es la masa de Planck y $g = 2s + 1$ es el factor de multiplicidad, siendo s el spin del fermión. En este caso, $s = 1/2$.

Luego de aplicar los correspondientes cambios a las variables, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\hat{M}(\hat{r})}{d\hat{r}} &= 4\pi \hat{r}^2 \hat{\rho}(\hat{r}), & \hat{M}(0) &= \hat{M}_0 = 0, \\
 \frac{d\hat{\nu}(\hat{r})}{d\hat{r}} &= \frac{1}{\hat{r}} \left[\left(1 - \frac{\hat{M}(\hat{r})}{\hat{r}} \right)^{-1} \left(8\pi \hat{P}(\hat{r}) \hat{r}^2 + 1 \right) - 1 \right], & \hat{\nu}(0) &= \hat{\nu}_0 = 0, \\
 \hat{W}(\hat{r}) &= \frac{1 + \beta_0 W_0 - e^{\hat{\nu}(\hat{r})/2}}{\beta_0}, & \hat{W}(0) &= W_0, \\
 \hat{\theta}(\hat{r}) &= \theta_0 - W_0 + \hat{W}(\hat{r}), & \hat{\theta}(0) &= \theta_0, \\
 \hat{\beta}(\hat{r}) &= e^{-\hat{\nu}(\hat{r})/2} \beta_0, & \hat{\beta}(0) &= \beta_0.
 \end{aligned} \tag{2.112}$$

2. Modelos de halos de materia oscura

Previo a integrar las ecuaciones es necesario dar los valores al origen de las tres variables asociadas a las Ecs. (2.4), (2.5) y (2.6). Se utilizarán los valores dados en la Tabla 2.1, que corresponden a los valores que ajustan las condiciones de borde para la Vía Láctea dadas en la Tabla 2.2. Dicho ajuste fue hecho con el programa OPTIM_MASS.PY desarrollado por el director y co-director del presente trabajo. Este programa, a través de un método de mínimos cuadrados, halla el conjunto de parámetros (β_0, θ_0, W_0) que optimice la solución del sistema de ecuaciones acorde a los valores dados de la masa acumulada en función del radio de la galaxia que se pretenda modelar.

Parámetro	Valor
β_0	$1.20446329 \cdot 10^{-5}$
θ_0	$3.77780827 \cdot 10^1$
W_0	$6.63468885 \cdot 10^1$
mc^2	56 keV

Tabla 2.1. Tabla indicando los valores óptimos de los tres parámetros del modelo RAR para la Vía Láctea, en conjunto con el valor de la masa de la partícula de materia oscura, el cual también es un parámetro libre.

Al resolver numéricamente el sistema de ecuaciones se recuperan la masa acumulada y el perfil de densidad de la distribución de masa como datos de salida. En este trabajo solo serán tenidas en cuenta esas dos cantidades y no el resto de las variables ya que su análisis escapa los objetivos de esta tesis. La integración se logró a través de la función `SOLVE_IVP` perteneciente al paquete `SCIPY.INTEGRATE` desarrollado en el lenguaje de programación PYTHON. Dicha función fue configurada para que integre utilizando un método lineal multipaso tal como el de Adams o la fórmula de diferenciación hacia atrás.

La masa acumulada y el perfil de densidad calculados se grafican en la Fig. 2.1. En el gráfico derecho de esta figura se ve ilustrado a modo comparativo, en línea gris a trazos, el perfil de densidad de una *esfera pseudo-isoterma*. Estas se caracterizan por ser *esferas isothermas* (Gunn y Gott III, 1972) con densidad constante en su núcleo. De este modo, el perfil de densidad que las representa es de la forma:

$$\rho(r) = \rho_0 \left[1 + \left(\frac{r}{r_c} \right)^2 \right]^{-1}, \quad (2.113)$$

en donde ρ_0 es la densidad central y r_c es el radio del núcleo. La esfera pseudo-isoterma de la Fig. 2.1 se caracteriza por tener un $\rho_0 = 6.495 \cdot 10^6 \text{ M}_\odot/\text{kpc}^3$ y un $r_c = 20 \text{ kpc}$. Con respecto al perfil de densidad del modelo RAR extendido, la caída rápida en su forma es debida a la existencia del corte en la distribución de energía. Según fue probado en Argüelles et al. (2018), la variable de corte es una función decreciente del radio. Además, esa función satisface la condición de que $W(R) = 0$, ya que se le impuso a la energía de corte que $\epsilon_c(R) = 0$, en

Radio [kpc]	Masa acumulada [M_\odot]
$4.25 \cdot 10^{-7}$	$3.50 \cdot 10^6$
12	$3.63 \cdot 10^{10}$
40	$2.27 \cdot 10^{11}$

Tabla 2.2. Condiciones de contorno utilizadas como datos de entrada del programa OPTIM_MASS.PY. El primer valor de la masa acumulada y el radio fueron tomados de Becerra-Vergara et al. (2020); el segundo, de Sofue (2013); mientras que el tercero, de Gibbons et al. (2014).

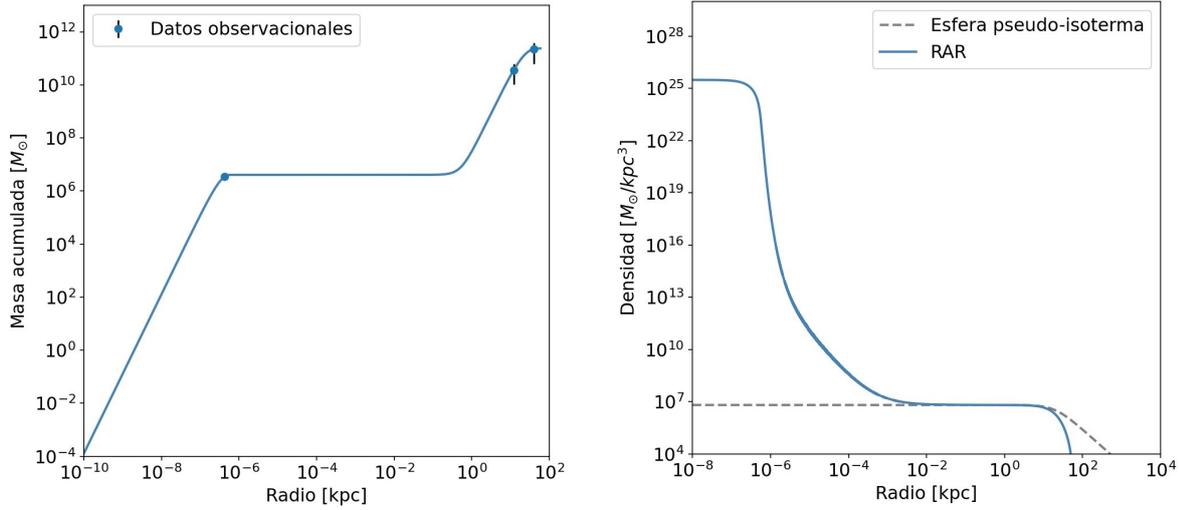


Figura 2.1. Gráficos que muestran los resultados de la resolución numérica del sistema de ecuaciones diferenciales. Izquierda: masa acumulada del sistema de DM como función del radio de la Galaxia. Con puntos azules se detallan valores determinados observacionalmente, los correspondientes a la Tabla 2.2. El punto más interno corresponde al objeto compacto del núcleo de la Vía Láctea modelado como un sistema degenerado de fermiones. Los restantes dos valores observacionales corresponden a valores de la masa acumulada del halo de la Galaxia. Derecha: perfil de densidad del sistema autogravitante de fermiones, en el cual se puede apreciar que la densidad decae más rápido que la de la esfera pseudo-isoterma ($\sim r^{-2}$).

donde R es el radio de la distribución de masa. Por lo tanto, es de esperar que en algún momento la densidad tienda a 0, como se ve en la correspondiente figura.

Asociada a dicha distribución de masa se puede obtener la curva de velocidad circular de la Vía Láctea, como fue trabajado en Argüelles et al. (2018), en donde se tuvo en cuenta la suposición estándar de la literatura en donde bariones y DM no interactúan unos con otros pero sí aportan al potencial total. El gráfico en donde se detalla todo esto corresponde a la parte superior de la Fig. 2.2, el cual fue tomado de Becerra-Vergara et al. (2020) ya que en ese trabajo se ha utilizado como valor de la masa de la partícula de materia oscura $mc^2 = 56$ keV, que es la misma masa utilizada por nosotros. En ella se puede ver graficada la curva de velocidad circular total, la cual tiene en cuenta la componente bariónica y la de DM. La componente bariónica está compuesta por dos partes, el disco y el bulbo galácticos. La curva gruesa roja es el resultado del cálculo de la cantidad $v_{\text{rot}} = \sqrt{r \frac{d\Phi_{\text{T}}}{dr}} = \sqrt{v_{\text{b}}^2(r) + v_{\text{d}}^2(r) + v_{\text{DM}}^2(r)}$, en donde $\Phi_{\text{T}} = \Phi_{\text{b}} + \Phi_{\text{d}} + \Phi_{\text{DM}}$. En la notación anterior, b indica la componente del bulbo y d la de disco. Además, las v indican la velocidad circular correspondiente a cada componente en el radio r , Φ el potencial gravitatorio de cada parte y Φ_{T} el potencial gravitatorio total resultante de sumar las tres contribuciones.

2.2. Modelo NFW

Las distribuciones de masa modeladas a través del modelo de Navarro-Frenk-White se caracterizan por tener una densidad en forma de ley de potencia doble en simetría esférica de la forma:

$$\rho_{\text{NFW}}(r) = \frac{\rho_0}{(r/a)(1+r/a)^2}, \quad (2.114)$$

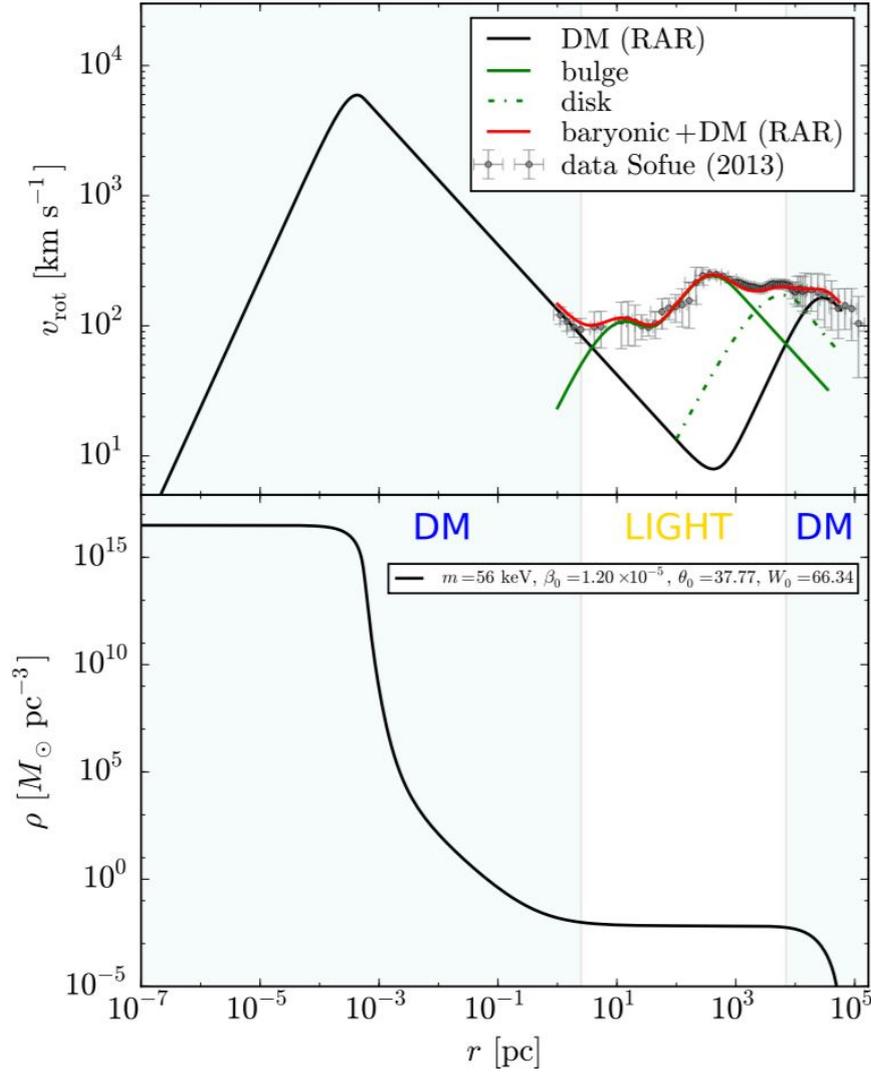


Figura 2.2. Curva de velocidad circular de la Vía Láctea (arriba) y perfil de densidad de DM del modelo RAR extendido (abajo) con masa acumulada del núcleo de $M_c = 3.5 \cdot 10^6 M_\odot$, tomados de [Becerra-Vergara et al. \(2020\)](#). Arriba: línea sólida negra, contribución de DM; línea sólida verde, contribución del bulbo; línea semipunteada verde, contribución del disco; línea sólida roja, contribución total de las componentes bariónica y oscura de la Galaxia; puntos grises con barra de error, datos observados tomados de [Sofue \(2013\)](#), trabajo del cual también fue tomado el modelo bariónico.

en donde r es la distancia radial al centro de la distribución de masa y ρ_0 y a son una densidad de masa y un radio característico, respectivamente. Ambos son parámetros libres del modelo. Sin embargo, [Navarro et al. \(1996\)](#) comprobaron que están fuertemente correlacionados. Así, podría elegirse un parámetro distinto, que se tomará como la masa interior a un radio llamado virial: r_{200} , la cual viene dada por la fórmula $M_{200} = 200\rho_c \frac{4}{3}\pi r_{200}^3$. r_{200} es la distancia desde el centro del sistema para la cual la densidad media de masa en su interior es igual a 200 veces la *densidad cosmológica crítica* ρ_c , la cual vale:

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}, \quad (2.115)$$

en donde G es la constante de gravitación de Newton y H_0 es la constante de Hubble y su valor será tomado de Reid et al. (2019). Este valor, en unidades adecuadas a este trabajo, es $H_0 = 0.0735 \pm 0.0014$ km/(s kpc). Si es calculada la densidad cosmológica crítica se obtiene como valor $\rho_c = 149.93$ M $_{\odot}$ /kpc 3 . Por otro lado, tomando el valor de M_{200} para la galaxia huésped utilizado por Gibbons et al. (2014), el cual es $M_{200} = 7.5 \cdot 10^{11}$ M $_{\odot}$, se puede calcular r_{200} como:

$$r_{200} = \left(\frac{3M_{200}}{200\rho_c 4\pi} \right)^{1/3}, \quad (2.116)$$

lo cual da $r_{200} = 181.42$ kpc. Por último, se puede definir la *concentración* de la distribución de masa como $c = r_{200}/a$. Tomando como valor de esta para la Vía Láctea $c = 20$, según es mencionado en Gibbons et al. (2014), se puede hallar fácilmente el valor del parámetro a como $a = r_{200}/c$, el cual, para estos parámetros es $a = 9.07$ kpc.

De esta forma, se puede escribir explícitamente la masa acumulada del sistema como:

$$M(r) = \frac{M_{200}}{f(c)} f\left(\frac{r}{a}\right), \quad (2.117)$$

donde $f(x)$ es una función continua definida $\forall x > -1$ de la forma:

$$f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}. \quad (2.118)$$

Cabe aclarar que los parámetros anteriormente detallados no son los parámetros que mejor modelan a la Galaxia, sino que son los utilizados por Gibbons et al. (2014) para comparar los resultados del modelo de *spray* allí trabajado con simulaciones de N -cuerpos. El modelo recientemente introducido será referido en este trabajo como *modelo NFW1*. El gráfico de la función $f(x)$ puede verse en el panel izquierdo de la Fig. 2.3, mientras que en el panel derecho de la misma figura se ve representada la masa acumulada NFW1 que modela la distribución de masa ficticia, la masa acumulada NFW2 que modela la Vía Láctea según parámetros que serán detallados en el Cap. 3 y la masa acumulada RAR obtenida en la sección anterior para los parámetros descritos en la Tabla 2.1. Además, se detalla en la Fig. 2.4 el perfil de densidad de los modelos NFW1, NFW2 y el correspondiente al modelo RAR extendido.

Por último, a modo de comparación, se muestra en la Fig. 2.5 las curvas de *velocidad circular* correspondiente a las distribuciones de DM modeladas según los modelos NFW1, NFW2 y RAR. Las funciones graficadas representan la función:

$$v_{\text{circ}}(r) = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}}, \quad (2.119)$$

en donde r es la distancia al centro de la distribución de masa y $M(r)$ la masa acumulada en el radio r .

2. Modelos de halos de materia oscura

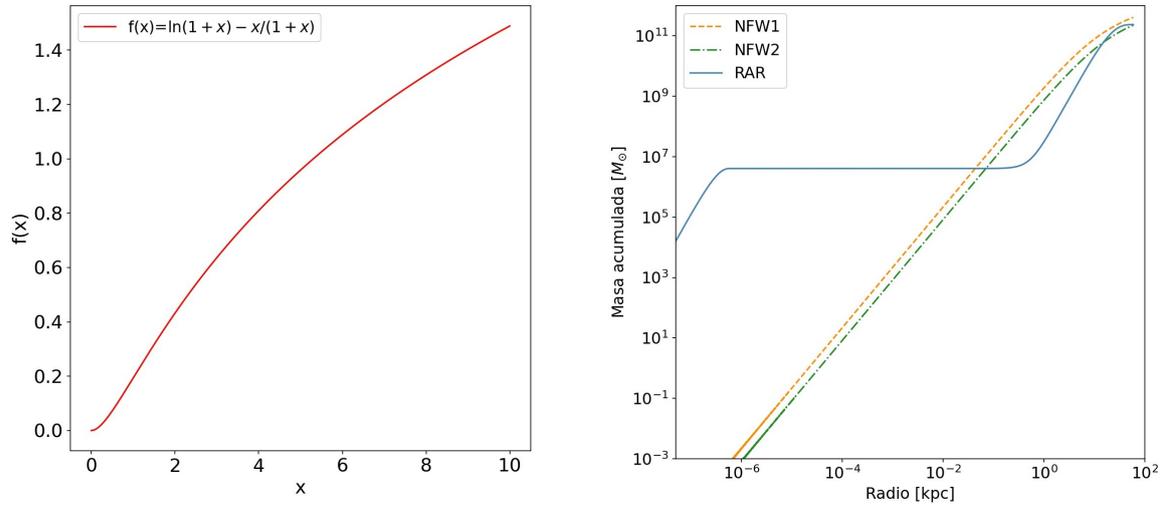


Figura 2.3. Izquierda: Gráfico de la función $f(x)$ utilizada en la definición de la masa acumulada en el modelo NFW. Derecha: Comparación entre la masa acumulada de los modelos NFW1, NFW2 y RAR utilizados en este trabajo para modelar una distribución de masa ficticia (NFW1) y la distribución de masa de la Vía Láctea (NFW2 y RAR), la cual se supone solo compuesta de materia oscura.

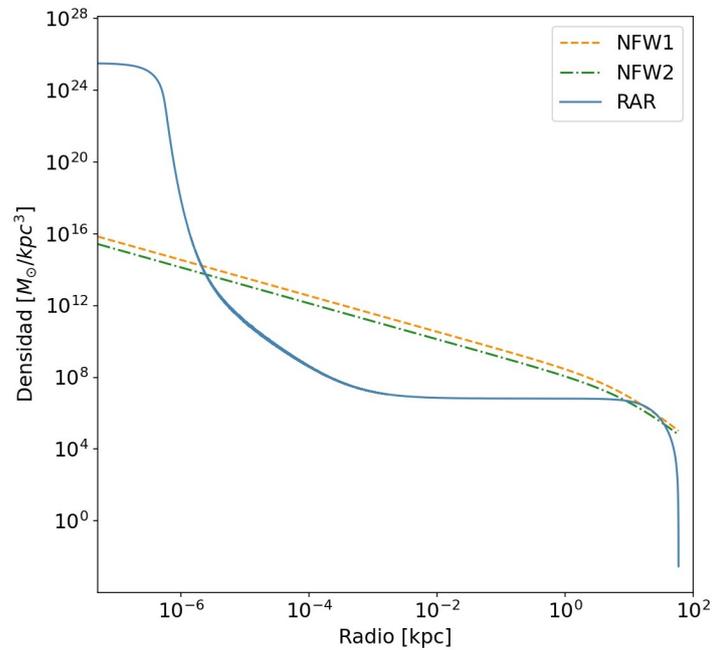


Figura 2.4. Perfil de densidad de los modelos NFW1, NFW2 y el correspondiente al modelo RAR extendido.

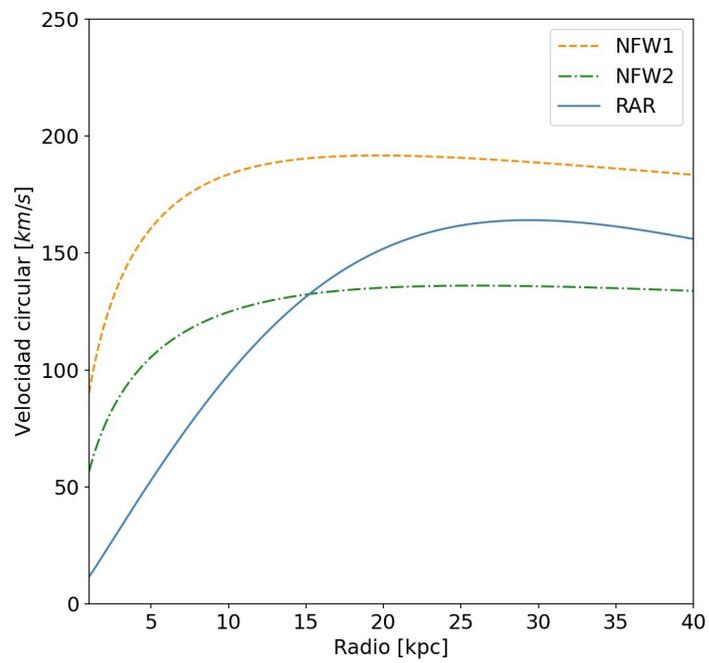


Figura 2.5. Curvas de velocidad circular correspondiente a los tres modelos utilizados para representar distribuciones de materia oscura.

Capítulo 3

Dinámica de los satélites

Como fue mencionado previamente, los sistemas utilizados en el presente trabajo para estudiar el halo de materia oscura que hace las veces de la Vía Láctea son las corrientes estelares cuyos progenitores sufren efectos gravitatorios de marea.

Para proceder a estudiar la dinámica de dichos sistemas en torno a la Vía Láctea, primero se debe definir la fuerza gravitatoria que sufre el progenitor a lo largo de su trayectoria. Una vez hecho esto, se procede a resolver las ecuaciones de movimiento, lo cual permitirá saber la posición y velocidad de los puntos de Lagrange L1 y L2 instantáneos desde los cuales serán eyectadas las estrellas, de acuerdo a los principios del método de *spray*, el cual será introducido en el Cap. 4.

3.1. Componentes galácticas

La galaxia huésped de los satélites a estudiar es la Vía Láctea. Esta galaxia es, según su clasificación en el diagrama de Hubble, una galaxia del tipo SBc, es decir, una galaxia espiral de tipo c barrada. Esta forma parte del llamado *Grupo Local*, el cual es un grupo de docenas de galaxias interactuando gravitacionalmente que tiene como galaxias dominantes a la Vía Láctea y la galaxia M31. A su vez, ambas tienen varias galaxias satélites orbitándolas, dentro de las cuales se encuentran los satélites objeto de estudio de este trabajo, la galaxia elipsoidal enana Sagitario y el cúmulo globular Palomar 5. En la Fig. 3.1 se puede ver una representación artística del grupo local.

Las órbitas de los satélites en torno a la Vía Láctea son resultado del campo gravitatorio que esta última ejerce, el cual es el producto de la superposición de los campos que ejercen las cuatro principales componentes que la forman:

- **Núcleo:** Es la parte más interna de la Galaxia, la cual está dominada por un objeto compacto supermasivo de $\sim 4 \cdot 10^6 M_{\odot}$. La naturaleza de este objeto es usualmente asociada a un agujero negro, aunque la misma puede explicarse por medio de un núcleo compacto de materia oscura en términos del modelo RAR extendido (Argüelles et al., 2018; Becerra-Vergara et al., 2020).
- **Bulbo:** Esta componente es un sistema pequeño de estrellas (a comparación del tamaño de la Galaxia), ubicado en torno al centro de la Vía Láctea. En términos geométricos, se dice que el bulbo es un sistema *triaxial*. Es esta característica geométrica la que implica que a veces a la Vía Láctea se la identifique como una galaxia barrada, es decir, que presenta una componente en forma de barra en el centro de ella. Esto genera la clasificación B en el sistema de Hubble. Además, el bulbo es más grueso que el

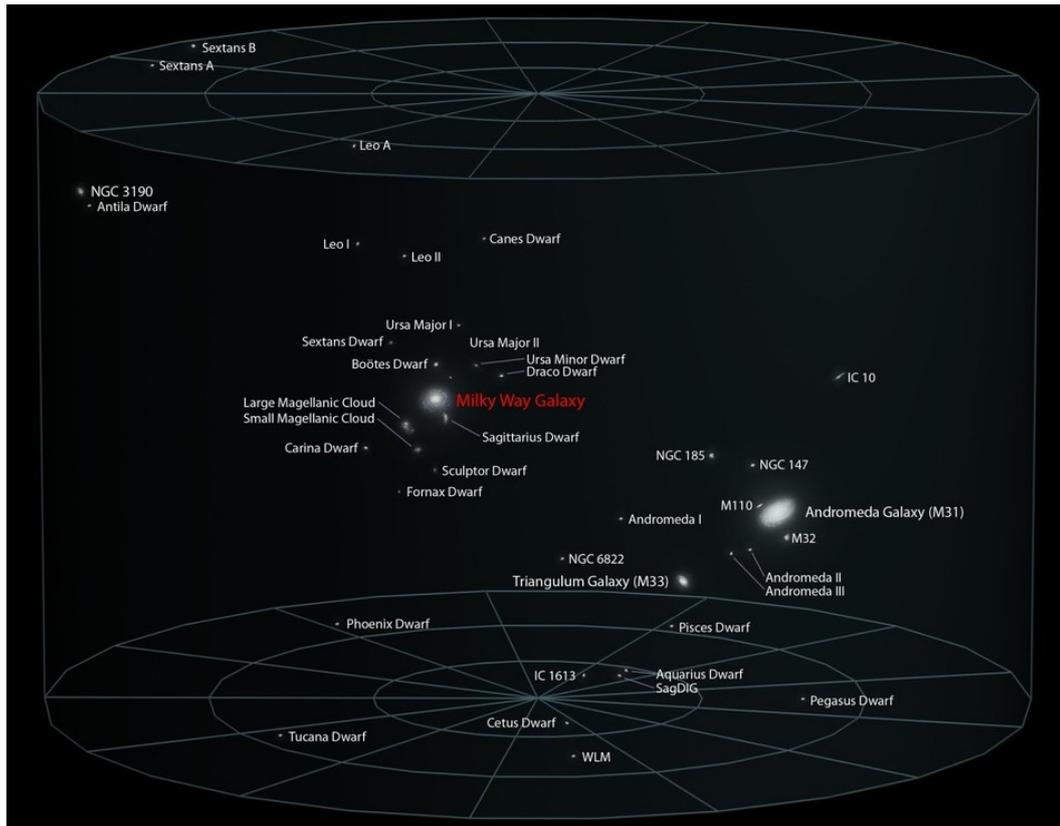


Figura 3.1. Representación artística del grupo local. En ella se puede apreciar la Vía Láctea, la galaxia de Andrómeda o M31 y la galaxia enana Sagitario. Fuente: <http://www.sun.org/images/our-local-group>.

disco y comprende del orden del 15% de la luminosidad total. La cinemática de esta componente indica que las velocidades de las estrellas que la componen están orientadas al azar.

- **Disco galáctico:** Constituido principalmente por estrellas (mayoritariamente en sistemas), objetos compactos (como estrellas de neutrones, agujeros negros de masa estelar y enanas blancas) y medio interestelar (el cual puede incluir hidrógeno molecular y atómico, gas ionizado y una pequeña contribución de polvo interestelar). En él se distingue una estructura espiral, la cual está caracterizada por brazos en los que se presenta una gran actividad de formación estelar. En cuanto a la cinemática de las estrellas, el movimiento de ellas en el disco es ordenado, por lo que se suele comparar la dispersión de velocidades radial con la velocidad de rotación del disco para clasificar *termodinámicamente* al sistema. Teniendo presente todas las componentes que contribuyen a la masa del disco, se puede determinar la densidad de masa a través de observaciones y compararla con la calculada dinámicamente. Según [Binney y Tremaine \(2008\)](#), esta diferencia es del orden del 10%, lo que implica que no hay evidencia de una componente significativa de materia oscura en el disco galáctico.
- **Halo galáctico:** Es la componente galáctica que más se extiende desde el centro de la Vía Láctea. Puede caracterizarse por tener, a su vez, dos componentes:
 - ◊ La primera es el *halo estelar*, y en él se encuentra alrededor del 1% de la masa estelar de la Galaxia. Las estrellas que forman parte de este halo son estrellas

viejas de baja metalicidad, las cuales se pueden encontrar en estructuras como cúmulos globulares y los restos de sistemas estelares que orbitan la Galaxia, como los propios cúmulos globulares y las galaxias satélites. Además, en este halo orbitan estrellas de población II.

- ◊ La segunda es el *halo oscuro*, formado por materia oscura, el cual será modelado en este trabajo a través del modelo RAR extendido y a través del modelo de NFW. A lo largo de la historia, una amplia variedad de candidatos a materia oscura han sido propuestos como componentes básicas de este halo, la mayoría cayendo dentro de dos amplias clases. (i) Alguna partícula elemental desconocida, paradigma elegido en el modelo RAR extendido, o (ii) objetos macroscópicos no luminosos, como estrellas de neutrones o agujeros negros. Con respecto a estos últimos, si bien aportan a la componente gravitatoria ejercida por el halo galáctico, trabajos previos (Alcock et al., 2001; Tisserand et al., 2007) han descartado que estos sean la contribución dominante al halo de materia oscura, dejando como principal candidato a (i). Por otro lado, una hipotética partícula masiva y neutra podría haberse formado naturalmente en el Universo temprano en cantidades suficientes como para aportar de manera sustancial a la densidad de materia requerida para reproducir los datos observacionales.

Es de esperar que la forma del halo de materia oscura sea cercana a esférica, dado que la partícula de materia oscura no puede disipar energía, mecanismo necesario en el proceso de formación de un sistema astrofísico plano. El proceso de no disipación de energía surge del hecho de que el sistema de partículas que conforma el halo oscuro es supuesto como un sistema de partículas *no colisional*, es decir, sin interacciones fundamentales (más allá de la gravedad) entre las partículas que conforman el sistema.

En la jerga científica, a la materia ordinaria, es decir, a la materia compuesta casi en su totalidad por **bariones** ⁽ⁱ⁾, como lo son las estrellas, el polvo, el gas interestelar, los objetos compactos, entre otros, se la llama usualmente *materia bariónica*. En este trabajo, no se tendrá en cuenta la componente bariónica de la Galaxia; es decir, no se considerará el campo gravitatorio ejercido por el bulbo y el disco galáctico. Por lo tanto, solo será tenida en cuenta la componente oscura de la Galaxia, desde su centro hasta la región más externa de ella, lo cual es representado con éxito por el modelo RAR extendido, mientras que el modelo NFW solo reproduce correctamente la región más externa de la Galaxia.

3.2. Aceleración gravitacional

A continuación se estudiarán las trayectorias de los satélites en torno a la Galaxia. Previo al planteo de las ecuaciones de movimiento es necesaria la definición de la fuerza gravitatoria que siente el centro de masa del satélite. Teniendo presente que se está trabajando en un escenario con simetría esférica, la fuerza vendrá dada por la expresión detallada en la siguiente ecuación:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{GM(r)M_{\text{sat}}}{r^2}\check{r}, \quad (3.1)$$

⁽ⁱ⁾Los bariones son partículas compuestas por tres quarks, siendo estos últimos partículas elementales del modelo estándar. Los quarks, a su vez, son fermiones, e interactúan a través de las fuerzas débil, fuerte y electromagnética.

en la cual r es la distancia galactocéntrica del satélite, \check{r} es su vector posición unitario, $M(r)$ es la masa de la galaxia huésped encerrada en el radio r y M_{sat} es la masa total del satélite correspondiente. Se utilizará la constante de gravitación de Newton $G = 4.300923924 \cdot 10^{-6} (\text{km/s})^2 \text{ kpc}/M_{\odot}$, en donde se ha adoptado como unidad de distancia al kpc y como unidad de velocidad al km/s, implicando que la unidad de tiempo sea exactamente $t_{\text{unit}} = 0.977792221680356 \text{ Ga} \approx 1 \text{ Ga}$. La unidad Ga hace referencia a la unidad de tiempo “*gigaaño*”. Se adoptará un sistema de referencia galactocéntrico cartesiano con posiciones (x, y, z) y velocidades (u, v, w) en el cual los ejes (x, u) apuntan desde el centro galáctico hacia la dirección opuesta al Sol, (y, v) apuntan en la dirección de la rotación galáctica en la ubicación del Sol, y (z, w) apuntan en la dirección del Polo Norte galáctico. Siguiendo a [Gibbons et al. \(2014\)](#), se utilizará un valor de la distancia del Sol al centro galáctico de $R_{\odot} = 8 \text{ kpc}$, una velocidad circular en la posición del Sol de $v_c(R_{\odot}) = 237 \text{ km/s}$, y una velocidad peculiar del Sol de $(u, v, w)_{\odot} = (11.1, 12.24, 7.25) \text{ km/s}$. Además, se supondrá que el Sol se encuentra en el plano del disco ($z_{\odot} = 0$).

Al aplicar la segunda ley de Newton, se obtiene:

$$\vec{F}(\vec{r}) = M_{\text{sat}} \vec{a}, \quad (3.2)$$

en donde \vec{a} es la aceleración del centro de masa del satélite producida por la fuerza $\vec{F}(\vec{r})$. Es posible escribir dicha aceleración en función de la distribución de masa. Al hacerlo, se obtiene:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \equiv \vec{a} = -\frac{GM(r)}{r^2} \check{r}. \quad (3.3)$$

Esta expresión constituye el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que rige la dinámica de los satélites en torno a la Vía Láctea. Al ser tres ecuaciones diferenciales de segundo orden, se necesitan seis condiciones iniciales para poder resolver de manera unívoca el sistema para un dado satélite. Estas serán la posición y velocidad iniciales del satélite respecto al centro galáctico,

$$\begin{cases} \vec{r}(0) = \vec{r}_0, \\ \vec{v}(0) = \vec{v}_0. \end{cases} \quad (3.4)$$

Con las CI calculadas, se puede pasar a resolver el sistema de ecuaciones diferenciales que rigen la dinámica de los satélites en torno a la Vía Láctea. Para ello, se deben tener en cuenta dos aspectos muy importantes: el primero es que se resolverá el sistema en sentido *inverso* en el tiempo, para obtener, como resultado, la posición y velocidad de los satélites en el pasado; y lo segundo es que esto último se hará bajo la influencia de un potencial gravitatorio tipo NFW o tipo RAR.

Los resultados que surjan de la integración de la órbita serán la posición y velocidad de partida desde la cual se iniciará la evolución, desde el pasado hacia el presente, de los progenitores, pero esta vez eyectando estrellas a intervalos regulares de tiempo según lo indica el modelo de *spray* seguido en este trabajo.

3.3. Órbitas en una distribución de masa tipo NFW

En esta sección se resolverá la órbita de la galaxia enana elipsoidal Sagitario frente a dos potenciales diferentes: uno tipo NFW1 y el otro tipo NFW2. El modelo NFW fue desarrollado en el Cap. 2.

Propiedad	Valor
Latitud galáctica	-14.1669°
Longitud galáctica	5.5689°
Movimiento propio μ_b	1.97 ± 0.3 msa/a
Movimiento propio $\mu_l \cos(b)$	-2.44 ± 0.3 msa/a
Distancia heliocéntrica	22.0-28.4 kpc
Masa del remanente del satélite	$\sim 4 \cdot 10^8 M_\odot$

Tabla 3.1. Tabla con algunos de los valores de los parámetros orbitales de la galaxia Sagitario. Los primeros cinco corresponden a los datos por Gibbons et al. (2014), mientras que el último corresponde a Vasiliev y Belokurov (2020). “msa” indica *milisegundo de arco* mientras que “a” es la abreviación de *año*.

Coordenada	Valor	Componente de la velocidad	Valor
x_0	16.32 kpc	u_0	244.36 km/s
y_0	2.37 kpc	v_0	-20.88 km/s
z_0	-6.17 kpc	w_0	197.98 km/s

Tabla 3.2. Valores de las CI de la galaxia Sagitario luego de la transformación de coordenadas del sistema galáctico al sistema galactocéntrico utilizado en este trabajo.

3.3.1. Caso NFW1

Para poder resolver las ecuaciones de movimiento, se debe proveer de CI como datos de entrada. Ahora, para tener definidas las CI, es necesario saber las coordenadas y velocidad del satélite al tiempo desde el cual se quiere iniciar la integración. Como la misma se iniciará en el presente, se tomará como $t = 0$ Ga a este tiempo. Dado que el primer objetivo de la tesis implica la reproducción de la corriente estelar utilizada en Gibbons et al. (2014), es necesario disponer de la posición y velocidad de Sagitario en la actualidad. Esto puede ser hecho a través de una transformación de coordenadas desde el sistema de coordenadas galáctico, cuyos valores están dados en la Tabla 3.1, al sistema de coordenadas galactocéntrico. El resultado de esta transformación se muestra en la Tabla 3.2. Las coordenadas espaciales de este satélite corresponden a una distancia galactocéntrica de 17.61 kpc.

Así, se puede proceder a la resolución de las ecuaciones diferenciales de movimiento para ver la forma de la órbita de Sagitario. Las CI a utilizar para la integración de la órbita serán aquellas que fueron detalladas en la Tabla 3.2.

Por conveniencia numérica se debe adimensionalizar el tiempo, el cual representa la variable de integración. Para ello, considerando como tiempo inicial $t_0 = 0$ y una edad de la corriente estelar de $t_{\text{edad}} = 4.3$ Ga, se debe dividir por la unidad de tiempo, t_{unit} , para obtener el tiempo final de integración adimensionalizado:

$$t_f = -t_{\text{edad}}/t_{\text{unit}} = -4.4. \quad (3.5)$$

Una vez hecho esto, se procede a dividir el intervalo $[t_0, t_f]$ en $n_{\text{steps}} + 1$ partes iguales, con $n_{\text{steps}} = 10000$. Para resolver el sistema de ecuaciones con las CI dadas, se utilizó un método de Runge-Kutta explícito de orden 8, con una tolerancia relativa y una absoluta de $5.0 \cdot 10^{-14}$ y $0.5 \cdot 10^{-14}$, respectivamente. De esta forma, se obtuvo la órbita de la galaxia Sagitario en el espacio de las posiciones y de las velocidades la cual se ilustra en la Fig. 3.2. De la figura puede observarse que la órbita está prácticamente confinada al plano xz . Además, la componente y de la velocidad del objeto es mucho menor que las correspondientes a las proyecciones de la velocidad en el eje x y en el eje z . Esto indica que la órbita se mantendrá

3. Dinámica de los satélites

Coordenada	Valor	Componente de la velocidad	Valor
x_0	30 kpc	u_0	0 km/s
y_0	0 kpc	v_0	150 km/s
z_0	0 kpc	w_0	0 km/s

Tabla 3.3. Tabla con los valores de las CI fiduciaras utilizadas para la integración de las órbitas de Sgr y Pal 5. La primera sumergida en una distribución de masa tipo NFW2 y tipo RAR y el segundo solo en una distribución tipo RAR.

casi paralela al plano xz . Cabe destacar que la órbita precesiona, fenómeno que puede ser bien apreciado en el gráfico del movimiento en el plano xz . En él, la precesión del pericentro ocurre en sentido horario o sentido *retrógrado*. Este efecto físico juega un rol muy importante a la hora de la generación de las corrientes estelares.

Por último, en la Fig. 3.3 se puede apreciar un gráfico en tres dimensiones de la órbita de este mismo satélite en donde la barra vertical de color indica el paso del tiempo a lo largo de su recorrido. Se indican, además, los puntos de partida y llegada del satélite.

Los resultados detallados más arriba serán utilizados en el Cap. 5. Una vez que se haya introducido el modelo de *spray* a utilizar, se procederá al uso de dicho modelo en conjunto con la órbita de Sagitario para obtener los resultados que se compararán con la literatura (Gibbons et al., 2014). Una vez hecha dicha comparación, se podrá pasar a la segunda instancia de este trabajo. En ella, se generarán corrientes estelares, pero esta vez bajo un campo gravitatorio generado por una distribución de masa tipo RAR y tipo NFW2. Además, los progenitores en el caso RAR serán Pal 5 y Sgr mientras que en el caso NFW2 será solamente Sgr.

3.3.2. Caso NFW2

Se pasará ahora a resolver la órbita de la galaxia Sagitario frente a un potencial tipo NFW2. Para ello, se debe seguir el mismo procedimiento que en el caso de Sgr sumergido en un potencial NFW1, pero teniendo en cuenta ciertos cambios en los parámetros utilizados en la integración de las órbitas. Estos cambios se deben a que cambia el contexto de trabajo, ya que se considerará a otra galaxia huésped, a diferencia del caso anterior. Aquí no se modelará una distribución de masa ficticia, si no que se buscará representar a la Vía Láctea a través de una distribución de masa tipo NFW2. Además, debido a la falta de la componente bariónica en este modelo, el empleo de las CI dadas en la Tabla 3.2 generaría una órbita para Sgr poco acorde a lo que se busca en este trabajo para poder generar corrientes de marea. En cambio, se utilizarán CI ficticias, más conocidas como *fiduciaras*, con el simple objetivo de comparar los distintos resultados que surjan según el sistema y potencial que se considere. Para ambos progenitores, se considerarán como CI los valores indicados en la Tabla 3.3. Se han elegido estos valores ya que a través de ellos se generarán órbitas con características apreciables y en base a ellas se generarán corrientes estelares aptas para un buen análisis y una comparación acorde entre los modelos de halos de DM.

Por otro lado, se cambiará la edad de la corriente, utilizando $t_{\text{edad}} = 3 \text{ Ga}$, generando que el tiempo final en unidades del programa sea:

$$t_f = -t_{\text{edad}}/t_{\text{unit}} = -3.1. \quad (3.6)$$

Por último, se tomará un $n_{\text{steps}} = 5000$ para una optimización en los cálculos numéricos, ya que no hay diferencia apreciable entre ese valor y $n_{\text{steps}} = 10000$. Además, se ajustarán los parámetros libres del modelo de NFW que mejor representen a la Vía Láctea, según se indican en Sofue (2013). De esta forma, se define el *modelo NFW2*, el cual se basa en la

3.3. Órbitas en una distribución de masa tipo NFW

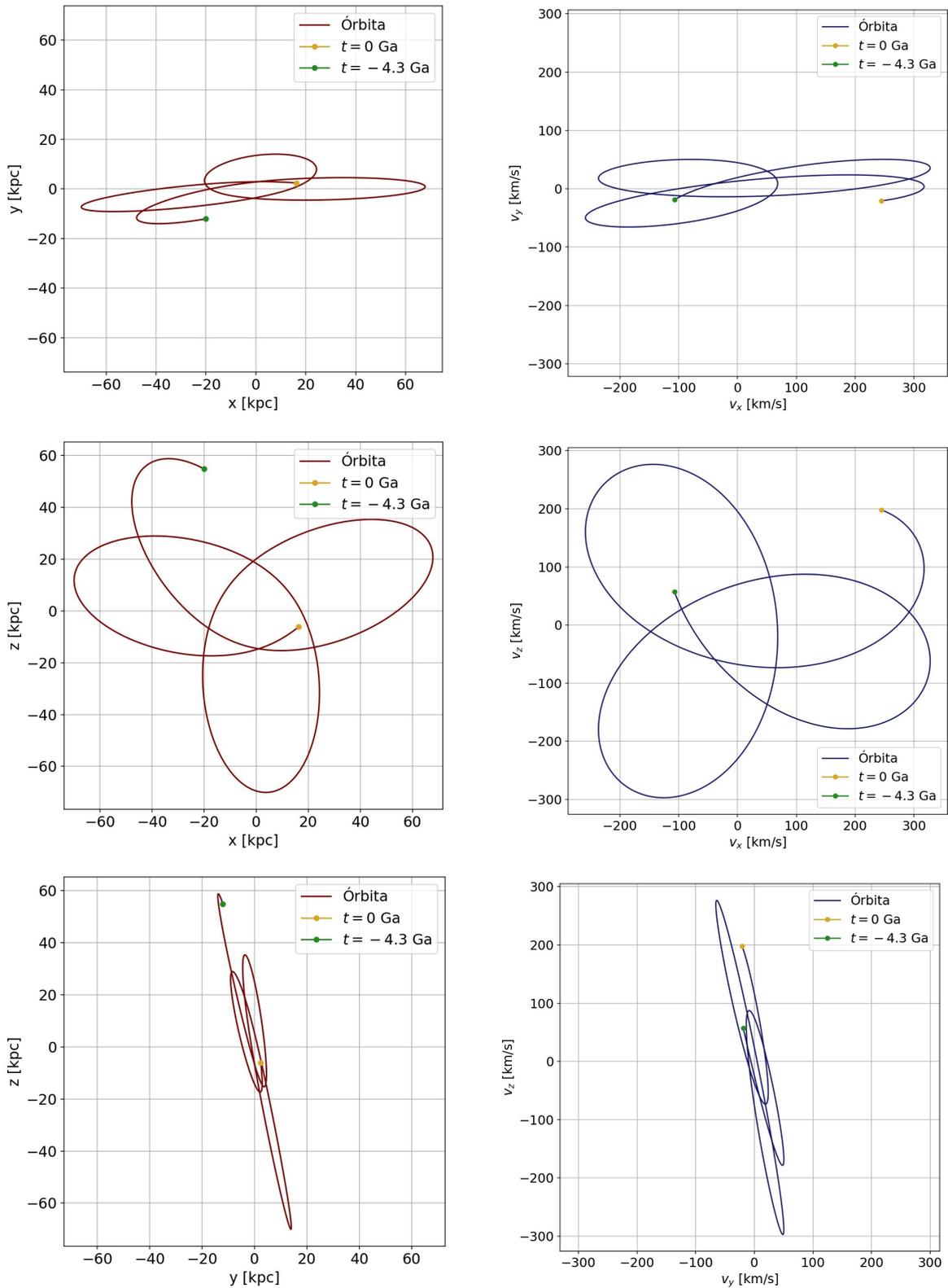


Figura 3.2. Columna izquierda: Trayectoria de la galaxia enana Sagitario en el espacio de las configuraciones bajo un potencial del tipo NFW1. De arriba a abajo, se muestra el plano xy , el plano xz y el plano yz . En cada figura se indica el punto de partida en $t = 0$ Ga (actualidad) y el punto de llegada correspondiente a la edad de -4.3 Ga. Columna derecha: Análogo a la columna izquierda pero en el espacio de las velocidades, mostrándose los mismos planos en el mismo orden y los mismos puntos de referencia en los extremos de la órbita.

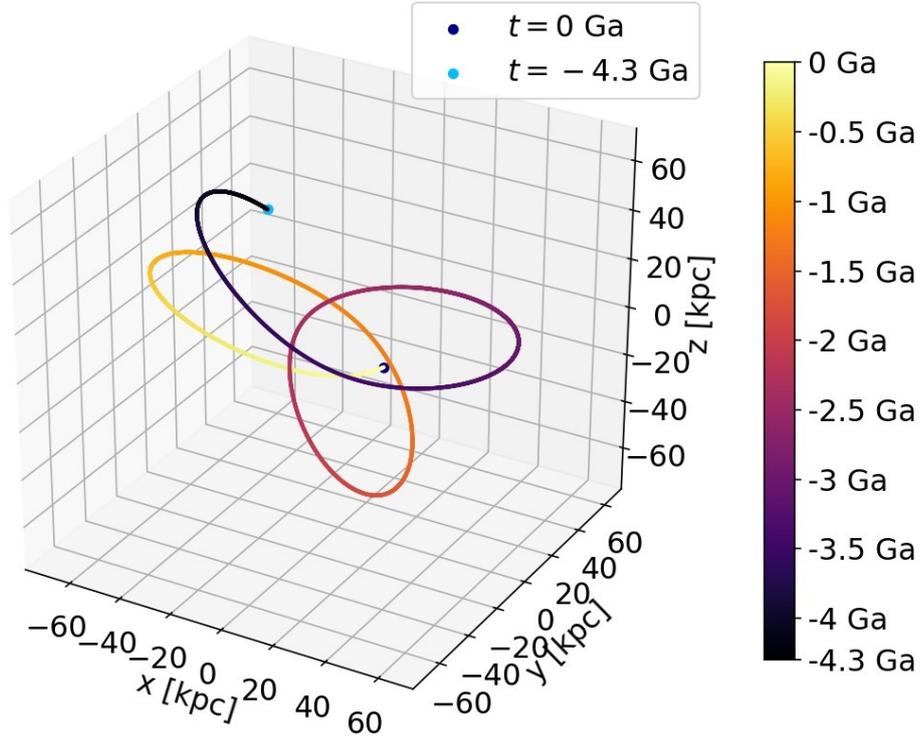


Figura 3.3. Órbita de la galaxia enana Sagitario en torno a la Vía Láctea bajo un potencial del tipo NFW1 graficada en tres dimensiones. La barra de color indica el progreso temporal del satélite a lo largo de la trayectoria.

densidad dada en la Ec. (2.114), con $a = 12$ kpc y $\rho_0 = 1.1 \cdot 10^7 M_\odot/\text{kpc}^3$. El resto de los parámetros de integración se mantendrán sin cambios.

Como resultado de la integración hacia atrás en el tiempo de la órbita de Sagitario con CI dadas en la Tabla 3.3, se obtiene lo representado en la Fig. 3.4. Solo se muestra la órbita en el plano xy , y la explicación para ello es la siguiente. El potencial gravitatorio que genera la distribución de masa tiene simetría esférica. De esta forma, se conservará el momento angular del satélite a lo largo de la órbita. Como inicialmente el satélite se encuentra en la posición $(30, 0, 0)$ kpc, con velocidad $(0, 150, 0)$ km/s, el momento angular por unidad de masa es:

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \vec{r} \times \vec{v}, \\ &= (30, 0, 0)\text{kpc} \times (0, 150, 0)\text{km/s}, \\ &= (0, 0, 4500)\text{kpc km/s}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Al ser este último perpendicular al plano de la órbita, el movimiento ocurrirá siempre en el plano xy . Al igual que para el modelo NFW1, el pericentro de la órbita precesiona, en este caso en sentido antihorario o sentido *directo*.

Por último, las distancias *pericéntrica* y *apocéntrica*, es decir, la menor y mayor distancia alcanzadas entre el centro galáctico y el satélite, en este escenario son:

$$d_{\text{per}} = 30 \text{ kpc}, \quad d_{\text{apo}} = 37.2 \text{ kpc}, \quad (3.8)$$

donde d_{per} es la distancia pericéntrica y d_{apo} la distancia apocéntrica. Cabe destacar que el satélite parte del pericentro en su órbita en torno a la galaxia huésped.

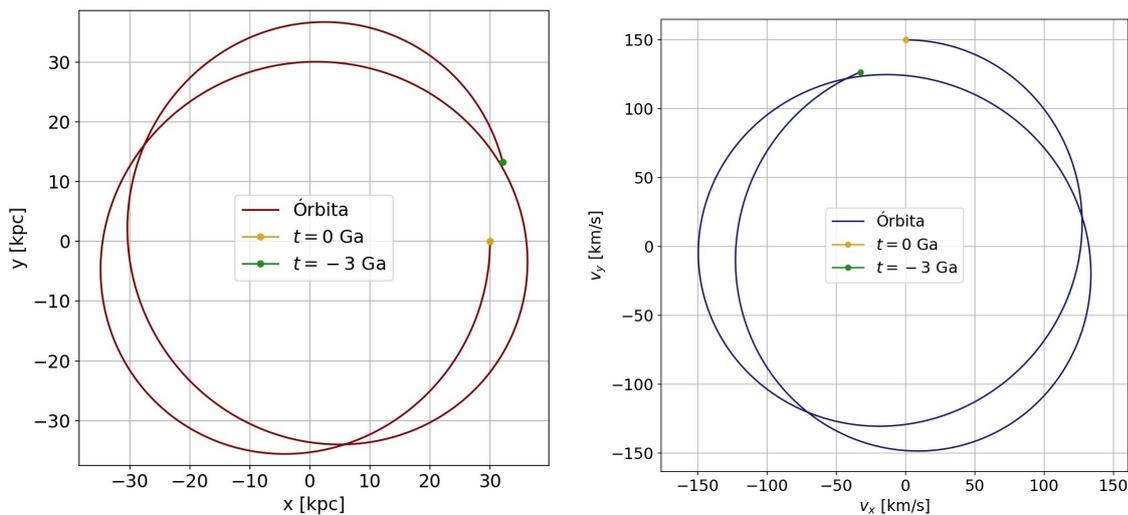


Figura 3.4. Órbita de Sagitario en torno a un potencial del tipo NFW2 con CI fiduciaras en el espacio de las configuraciones (izquierda) y en el espacio de las velocidades (derecha). Solo se muestra el plano xy ya que las correspondientes a los planos yz y xz son trayectorias rectas producto de las CI utilizadas.

3.4. Órbitas en una distribución de masa tipo RAR

En esta sección se repetirá el cálculo previo, pero para un potencial gravitatorio generado por una distribución de masa representada por el modelo RAR extendido. Los satélites que se tendrán en cuenta serán la galaxia Sagitario y el cúmulo globular Palomar 5, con CI fiduciaras dadas en la Tabla 3.3.

Dado que la órbita no depende de la masa del objeto que orbita, sino del potencial en el cual este se encuentre, en ambos casos (Sgr y Pal 5) la órbita de los satélites en torno a la Vía Láctea será la misma. Aún así, se han tomado dos satélites ya que ambos tendrán propiedades diferentes las cuales harán que las corrientes estelares que generen sean diferentes. Dichas propiedades serán introducidas en los Caps. 4 y 5.

Para integrar las órbitas se tendrán presentes los mismos parámetros de integración que en el caso de la órbita considerando un perfil NFW2. Como resultado de la integración, se obtiene lo ilustrado en la Fig. 3.5. Como se puede apreciar en dicho gráfico, el movimiento es, al igual que antes, en el plano xy , ya que este potencial también es un potencial con simetría esférica y el momento angular inicial es aquel calculado en la Ec. (3.7). Entonces, gracias a la conservación del momento angular del satélite en su órbita en torno a la Vía Láctea, el movimiento será siempre en el plano xy . Además, se puede notar la precesión del pericentro, en sentido directo, al igual que para el potencial NFW2 con las mismas CI que en este escenario.

Con respecto a las distancias pericéntricas y apocéntricas en este caso, sus respectivos valores son:

$$d_{\text{per}} = 25.37 \text{ kpc}, \quad d_{\text{apo}} = 30 \text{ kpc}. \quad (3.9)$$

En este caso, se puede ver que el satélite parte desde el apocentro. Además, al observar los gráficos de las Figs. 3.4 y 3.5 se puede apreciar que el apocentro de la órbita en torno a un potencial RAR es el pericentro de la órbita del mismo objeto orbitando en un potencial tipo NFW2. De esta observación se concluye que la órbita correspondiente al potencial NFW2 ba-

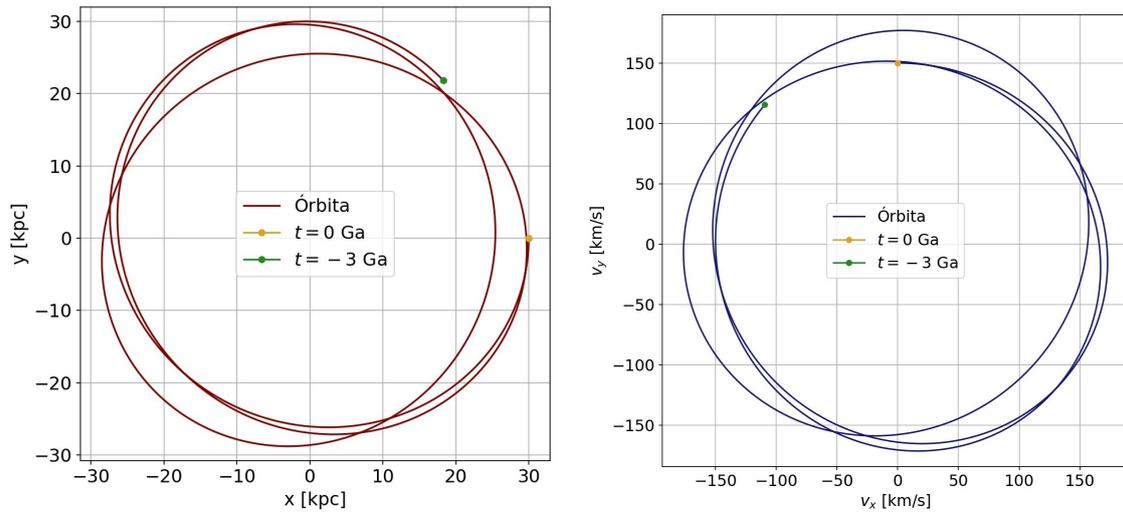


Figura 3.5. Órbitas de Sgr y Pal 5 en torno a un potencial de tipo RAR con CI fiduciaras en el espacio de las configuraciones (izquierda) y en el espacio de las velocidades (derecha). Solo se muestra el plano xy ya que las correspondientes a los planos yz y xz son trayectorias rectas producto de las CI utilizadas.

re un área mayor en el plano xy respecto al mismo objeto orbitando en un potencial RAR. Este resultado vale *a priori* bajo este contexto.

Capítulo 4

Modelo de *spray*

En el capítulo anterior fueron calculadas la posición y velocidad de los satélites en el pasado, integrando las ecuaciones de movimiento que rigen la dinámica de los mismos, utilizando dos conjuntos de condiciones iniciales diferentes. Uno de esos conjuntos constó de una posición y una velocidad observadas, las cuales dieron lugar a una órbita que se utilizará para reproducir la corriente estelar generada por [Gibbons et al. \(2014\)](#). Mientras que el otro conjunto constó de una posición y una velocidad fiduciaras, las cuales dieron lugar a órbitas ficticias que serán usadas solo para comparar las corrientes de marea que de ellas se deriven.

Las órbitas del capítulo anterior fueron calculadas con el objetivo de poder generar condiciones iniciales desde las cuales iniciar la integración hacia adelante en el tiempo de las órbitas de las estrellas eyectadas. La integración simultánea de la órbita de cada estrella dará lugar a corrientes estelares que orbitan la Galaxia. Estas distribuciones de estrellas modelarán el efecto que la fuerza de marea produce sobre las estrellas de los satélites, a medida que estos orbitan la Vía Láctea desde el pasado hacia el presente.

En este capítulo se detallará el método de eyección de estrellas desde los satélites, posterior al cálculo de una cantidad muy importante en dinámica estelar, conocida como *radio de marea*.

4.1. Radio de marea

En el contexto de interacción entre sistemas de muchas estrellas ocurren diversos fenómenos astrofísicos que rigen la dinámica de las estrellas que los componen. Uno de ellos es el llamado *remoción por efecto de marea* producido por la *fuerza de marea*, la cual es el resultado de la fuerza de atracción gravitatoria que se ejercen los sistemas entre sí. La palabra marea proviene del efecto producido por la Luna (y en menor medida el Sol) sobre el océano terrestre. Una imagen en la cual ocurre este efecto es la representada en la Fig. 4.1.

Para entender cómo funciona este fenómeno, se seguirá el desarrollo hecho por [Binney y Tremaine \(2008\)](#) y se supondrá la presencia de dos sistemas estelares, uno de masa M y otro de masa m , separados por una distancia R_0 , ambos modelados como masas puntuales orbitando en torno al centro de masa (CM) del sistema en una órbita circular, en donde se agregará la suposición extra de que $M \gg m$. Este escenario, por ejemplo, podría ser aplicado a la interacción entre una galaxia huésped y un cúmulo globular, en donde este último orbita a la primera. Bajo estas condiciones es aplicable la teoría de *tres cuerpos reducida*, la cual es un conjunto de hipótesis que permite resolver de manera aproximada el problema de tres cuerpos de la mecánica clásica.

Al aplicar esta teoría, es necesario considerar un tercer cuerpo de masa despreciable respecto de los otros dos que será llamado *partícula de prueba*. Este tercer cuerpo sentirá el potencial gravitatorio de ambos sistemas, $\Phi(\vec{x})$, el cual será considerado en un sistema de



Figura 4.1. Imagen del par de galaxias conocido como *Los Ratones*, en la constelación de Coma Berenices, en la cual ambas partes se encuentran en proceso de colisión, sufriendo fuertes fuerzas de marea, además de otros efectos como lo son los *encuentros rápidos* y la *fricción dinámica*, entre otros. Fuente: https://en.wikipedia.org/wiki/Galactic_tide#/media/File:NGC4676.jpg.

referencia en rotación con rapidez angular:

$$\Omega = \sqrt{\frac{G(M+m)}{R_0^3}}, \quad (4.1)$$

la cual coincide con la rapidez angular con la cual orbitan ambos sistemas respecto al CM. Así, se dice que el potencial es un *potencial rotante*, y el hecho de serlo, genera algunas diferencias respecto a la dinámica de sistemas en potenciales estáticos. Para entender mejor esto último, se considerará el sistema de referencia ilustrado en la Fig. 4.2.

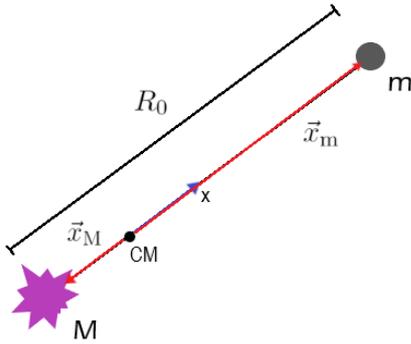


Figura 4.2. Posición de las masas m y M respecto al sistema de referencia rotante. Notar que ambas masas se encuentran ubicadas en el eje x de dicho sistema.

La posición de la masa m respecto al sistema de referencia, cuyo origen se encuentra en el CM, será $\vec{x}_m = (MR_0/(M+m), 0, 0)$ y la correspondiente a la masa M será $\vec{x}_M = (-mR_0/(M+m), 0, 0)$. Así, la velocidad angular de ambas masas respecto al CM resultará $\vec{\Omega} = (0, 0, \Omega)$. Esto indica que la rotación del sistema respecto a un sistema de referencia fijo, no rotante, es en sentido antihorario visto desde el eje z positivo, eje coincidente con el eje z positivo del sistema rotante.

Bajo este escenario, considerando que la posición de la masa de prueba (tercer cuerpo) respecto al CM es \vec{x} , utilizando la mecánica lagrangiana se puede probar que no se conserva la energía mecánica E ni el momento angular \vec{L} del tercer cuerpo, sino la combinación $E_J = E - \vec{\Omega} \cdot \vec{L}$, la cual es conocida como *integral de Jacobi*.

Esta integral de movimiento puede ser escrita como:

$$E_J = \frac{1}{2} \|\dot{\vec{x}}\|^2 + \Phi(\vec{x}) - \frac{1}{2} \|\vec{\Omega} \times \vec{x}\|^2, \quad (4.2)$$

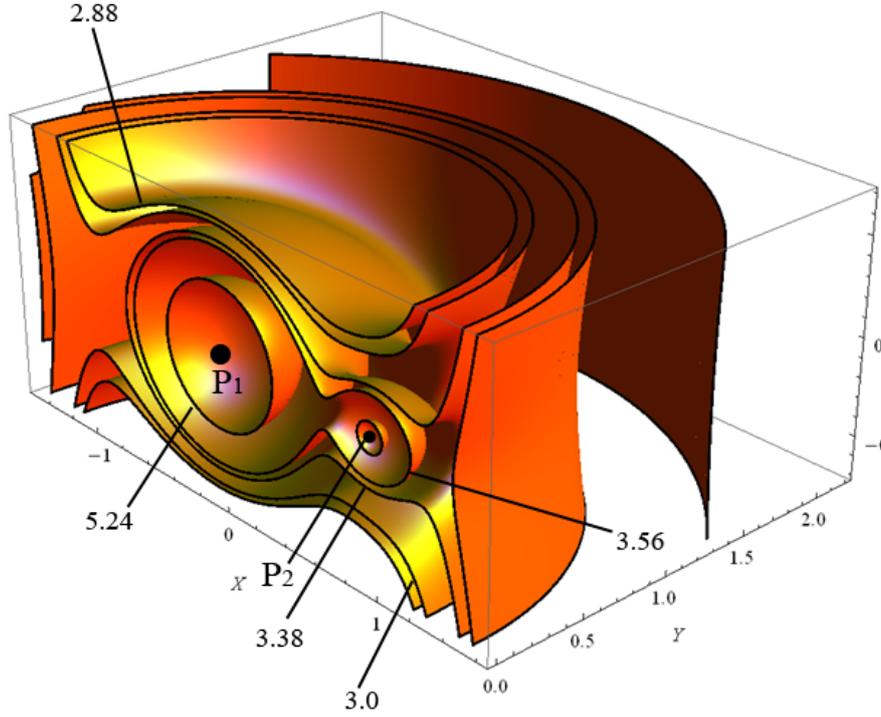


Figura 4.3. Superficies de velocidad cero para distintos valores de la integral de Jacobi. La masa ubicada en P_1 es M , mientras que la ubicada en P_2 es m . Fuente: https://www.researchgate.net/figure/Zero-velocity-surfaces-with-different-values-of-Jacobi-constant-in-the-CR3BP-03_fig1_302068540.

en donde la doble barra indica norma vectorial y el punto indica derivada respecto al tiempo. La expresión de la integral de Jacobi es dada por unidad de masa, es decir, la expresión no depende del valor de la masa del tercer cuerpo. Al segundo y tercer términos se los suele llamar potencial efectivo, $\Phi_{\text{ef}}(\vec{x}) = \Phi(\vec{x}) - \frac{1}{2}|\vec{\Omega} \times \vec{x}|^2$. De esa forma, al ser $|\dot{\vec{x}}|^2 \geq 0$, debe ser que $E_J \geq \phi_{\text{ef}}(\vec{x})$. De esta forma, se define la *superficie de velocidad cero* para una dada E_J como aquella que surge de la ecuación:

$$E_J = \phi_{\text{ef}}(\vec{x}). \quad (4.3)$$

La misma es una superficie equipotencial que no puede ser atravesada por la masa de prueba dado que, de hacerlo, implicaría que $|\dot{\vec{x}}|^2 < 0$, lo cual es imposible.

Un diagrama de estas superficies se puede ver en la Fig. 4.3. En ella, se puede apreciar que para ciertos valores de E_J las regiones que envuelven a las masas M y m están separadas mientras que para otros valores dichas regiones conforman una única región conexas. Existe un valor de E_J para el cual ocurre la transición entre ambas configuraciones dinámicas en el cual habrá un único punto, sobre el segmento que une a ambas masas, perteneciente a la superficie de velocidad cero. Dicho punto es llamado **punto de Lagrange L_1** . En todo punto de Lagrange, el gradiente del campo gravitatorio se anula, por lo que son puntos de aceleración nula. Particularmente, si se define la distancia entre la masa m y el punto L_1 como r_J , esta puede ser calculada pidiendo que el gradiente del potencial efectivo se anule:

$$\left. \frac{\partial \Phi_{\text{ef}}}{\partial x} \right|_{(x_m - r_J, 0, 0)} = 0. \quad (4.4)$$

De esta expresión trabajando a primer orden en r_J/R_0 , usando la hipótesis ya adelantada $m \ll M$, y teniendo presente que las masas M y m generan potenciales gravitatorios propios de una masa puntual, se obtiene:

$$r_J = \left(\frac{m}{3M} \right)^{1/3} R_0. \quad (4.5)$$

A la cantidad r_J se la conoce como *radio de Jacobi*, y con el se puede definir una esfera de radio r_J que aproxime a la superficie de velocidad cero que contiene en su superficie al punto de Lagrange L_1 . Un detalle a destacar surge de notar que, como se supuso que $M \gg m$, esa condición implica que $r_J \ll R_0$. La superficie de velocidad cero que contiene al punto de Lagrange L_1 es denominada *superficie de Roche*.

Otro punto de Lagrange importante en este trabajo es L_2 , que se ubica, para $M \gg m$, aproximadamente en $x = x_m + r_J$, también sobre el eje que une a ambas masas. Es decir, se ubica del otro lado de la masa m si se la ve, a esta, desde el centro galáctico.

Así, se espera que el radio de Jacobi coincida con el *radio de marea observacional*, la máxima extensión del sistema de masa m . Sin embargo, esto no es así, por varias razones expuestas en [Binney y Tremaine \(2008\)](#):

- (i) La superficie de Roche que involucra al radio r_J no es esférica, por lo tanto no puede ser caracterizada por un solo radio.
- (ii) Se ha establecido que una partícula de prueba nunca puede atravesar la superficie de Roche si esta está dentro de ella y tiene una rapidez, respecto al sistema rotante, suficientemente pequeña como para que $E_J < \phi_{\text{ef}}(x_m - r_J, 0, 0)$. Pero estrellas con suficiente rapidez dentro de esta superficie, podrían o no escapar de ella. Por el contrario, estrellas que están fuera de la superficie de Roche y cerca de ellas, pueden, en algunos casos, permanecer cerca del satélite ([Hénon, 1970](#)). Sin embargo, la fracción del espacio de velocidades ocupada por órbitas cercanas al satélite disminuye rápidamente más allá de r_J , por lo cual la afirmación de que r_J es aproximadamente igual al radio de marea observacional sigue siendo válida.
- (iii) En la mayoría de los casos, el satélite no se encuentra en una órbita circular. Cuando la masa m se encuentra en una órbita excéntrica, no existe sistema de referencia respecto al cual el potencial que siente la masa de prueba sea estacionario, y, por lo tanto, no hay análogo a la integral de Jacobi en ese caso, invalidando el desarrollo previamente hecho. [King \(1962\)](#) y otros han discutido el hecho de que si el satélite no se encuentra en órbita circular, el radio de marea sigue siendo el dado en la Ec. (4.5) pero con R_0 reemplazado por la distancia pericéntrica. Un enfoque mucho más preciso consiste en notar que el efecto de campos que ejercen fuerzas de marea sobre satélites en órbitas no circulares es intermedio entre generar un radio de marea (es decir, acotar la extensión espacial del sistema) y el de los *choques de marea*. Este último efecto consiste en la eyección de estrellas sufrida por el satélite en cada pasaje por el pericentro.
- (iv) Suponiendo que los dos cuerpos principales no son masas puntuales y que cada uno está compuesto de estrellas, sucede lo siguiente. Las estrellas se pierden usualmente del satélite como resultado de perturbaciones débiles, tales como la relajación entre dos cuerpos, lo que conduce a que E_J sea ligeramente mayor que $\phi_{\text{ef}}(x_m - r_J, 0, 0)$. Tales estrellas sufren una deriva lentamente hacia afuera del satélite y así pueden permanecer cerca del mismo por varios períodos orbitales, contribuyendo así al recuento de estrellas que pertenecen al sistema aunque ya no estén vinculadas a este ([Fukushige y Heggie, 2000](#)).

- (v) En muchos casos, el satélite orbita dentro de la distribución de masa del sistema huésped, generando que la aproximación de masa puntual utilizada para derivar la Ec. (4.5) no sea precisa.

Por lo tanto, como la aproximación dada en la Ec. (4.5) no es del todo rigurosa, se utilizará una expresión más general a la hora de calcular los radios de marea en este trabajo. El modelo de radio de marea que se seguirá es el introducido por [Gajda y Łokas \(2016\)](#). Dicho modelo tiene en cuenta la órbita excéntrica que sigue el satélite en torno a la galaxia huésped y la orientación del eje de rotación de dicho satélite. Como en este trabajo no se considera la rotación del mismo, se hará caso omiso a esta característica.

Para derivar la ecuación que indica la forma del radio de marea se debe suponer que ambos sistemas, el satélite y la galaxia huésped, están representados a través de una distribución de masa esféricamente simétrica. Las masas acumuladas de esos sistemas serán $m(x)$ y $M(x)$, respectivamente, en donde x es la distancia del centro de la distribución de masa al radio x . Así, se considerará un sistema de referencia cuyo origen esté ubicado en el centro del satélite. De esta forma, la aceleración de una estrella perteneciente al satélite cuya posición respecto a ese sistema de referencia sea \vec{x}_s , viene dada por:

$$\frac{d^2\vec{x}_s}{dt^2} = -Gm(|\vec{x}_s|)\frac{\vec{x}_s}{|\vec{x}_s|^3} - GM(|\vec{x}_s - \vec{x}_h|)\frac{\vec{x}_s - \vec{x}_h}{|\vec{x}_s - \vec{x}_h|^3} - GM(|\vec{x}_h|)\frac{\vec{x}_h}{|\vec{x}_h|^3}. \quad (4.6)$$

En la ecuación anterior \vec{x}_h es la posición de la galaxia huésped. El primer término de la Ec. (4.6) es el campo gravitatorio que ejerce el satélite sobre la estrella. Por otro lado, el segundo término también es un campo gravitatorio, pero el que lo ejerce es, en este caso, la galaxia huésped. Ahora, el último término de la Ec. (4.6) corresponde a la *aceleración inercial* que siente la estrella producto de que el sistema de referencia no es inercial. Lo que se debe hacer para seguir con el desarrollo es cambiar de sistema de referencia a uno rotando con velocidad angular instantánea $\vec{\Omega}$ respecto al sistema de referencia original. Ese vector será elegido de forma tal que $\dot{\vec{x}}_h = \vec{x}_h/|\vec{x}_h| = \vec{x}_h/r$ sea constante en el tiempo, en donde r es la distancia del centro del satélite al centro de la galaxia huésped. Tal velocidad angular coincidirá con la velocidad angular orbital instantánea del satélite en su órbita en torno a la galaxia huésped.

Además, se supondrá que la estrella cuya posición es \vec{x}_s sigue una órbita circular en torno al satélite con velocidad angular $\vec{\Omega}_s$. De esta forma, aplicando los cambios mencionados sobre la Ec. (4.6) y haciendo los desarrollos pertinentes, según se dicta en [Gajda y Łokas \(2016\)](#), se puede obtener la siguiente expresión para el radio de marea:

$$r_t = r \left(\frac{(m(r_t)/M(r))\lambda(r)}{2\Omega_s/\Omega - 1 + (2 - p(r))\lambda(r)} \right)^{1/3}. \quad (4.7)$$

En la expresión anterior $\Omega = ||\vec{\Omega}||$ y $\Omega_s = \pm||\vec{\Omega}_s||$ en donde el signo proviene del sentido de la órbita de la estrella respecto al movimiento de traslación del satélite en torno a la galaxia huésped. Además las funciones $p(r)$ y $\lambda(r)$ están dadas por:

$$p(r) = \frac{d\ln(M(r))}{d\ln(r)}, \quad \lambda(r) = \frac{\Omega_{\text{circ}}^2}{\Omega^2} = \frac{GM(r)}{r\Omega^2}. \quad (4.8)$$

En la expresión de $\lambda(r)$, Ω_{circ} es la velocidad angular circular del satélite en torno a la galaxia huésped. Se tomará la aproximación $m(r_t) \approx m_{\text{sat}}$, con m_{sat} la masa total del satélite. Además, por simplicidad se supondrá que $\Omega_s/\Omega \equiv 1$. De esta forma, la expresión para el radio de marea resulta:

$$r_t = r \left(\frac{(m_{\text{sat}}/M(r))\lambda(r)}{1 + (2 - p(r))\lambda(r)} \right)^{1/3}. \quad (4.9)$$

Notar que esta definición de radio de marea depende de la órbita que sigue la galaxia satélite en torno a la galaxia huésped, no solo por la dependencia con la distancia r sino también porque está involucrada la norma de la velocidad angular, Ω .

4.1.1. Evolución temporal y espacial del radio de marea

Dado que la definición de radio de marea, Ec. (4.9), involucra a Ω , la rapidez angular orbital del satélite en torno a la galaxia huésped, y esta órbita no es una órbita circular ni para Sagitario ni para Palomar 5, es de esperar que Ω sea una función no constante del tiempo, haciendo que el radio de marea tampoco lo sea. Además, las funciones $p(r)$ y $\lambda(r)$ dependen de la distribución de masa de la galaxia huésped. Por lo tanto, r_t será una función del tiempo y dependerá del modelo elegido para representar a la galaxia que hospeda al satélite.

Como en este trabajo se estudiarán tres escenarios posibles en donde se generen corrientes estelares, se debe definir un radio de marea para cada uno. La evolución temporal de estos tres radios tenidos en cuenta se ilustra en las Figs. 4.4 y 4.5. En ellas se ve que la magnitud de los radios de marea para la galaxia Sagitario es mucho mayor que la correspondiente para el cúmulo Palomar 5. Considerando que las CI fiduciarias elegidas para estudiar la dinámica de ambos sistemas son las mismas, la gran diferencia entre los radios de marea es debido, principalmente, a que la masa de Pal 5 es mucho menor que la masa de Sgr. Los valores de las masas de los satélites son indicados más adelante en la Tabla 4.1. Se debe notar que en ambas figuras en donde se representan evoluciones temporales de los radios de marea, se considera el intervalo temporal $[-3, 0]$ Ga, que fue el considerado para integrar las órbitas de los satélites hacia atrás en el tiempo.

Otro análisis que puede ser hecho es el siguiente. Suponiendo que los satélites siguen una órbita circular, se tiene que $\lambda(r) \equiv 1$ en el modelo de Gajda y Lokas (2016), y se puede graficar el radio de marea en función de la distancia galactocéntrica de Sagitario. Dicho gráfico se ilustra en la Fig. 4.6 donde puede apreciarse la diferencia entre el caso del potencial RAR y NFW2. En el caso del potencial NFW2, el radio de marea es una función monótona creciente de la distancia galactocéntrica. Esto no ocurre para el caso RAR, donde el radio de marea alcanza un máximo y un mínimo relativos a medida que crece la distancia galactocéntrica. Por otro lado, en la Fig. 4.7 se muestra el caso de Palomar 5 en el potencial RAR, donde puede verse el mismo comportamiento obtenido previamente para el caso de Sagitario, con la esperable diferencia en la magnitud.

4.2. Modelo de eyección de estrellas

Una vez desarrollado el concepto de radio de marea, es posible abordar el modelo de eyección de estrellas que se utilizará en este trabajo para estudiar las corrientes estelares. Se suele recurrir a los métodos de *spray* para evitar costos computacionales elevados propios de las simulaciones de N -cuerpos. Sin embargo, estas simulaciones son una excelente referencia a la hora de poner a prueba modelos que involucren tiempos de prueba muy grande en escalas de tiempo humano. Al ser excesivamente grande esos tiempos, no se pueden utilizar datos observados de la naturaleza y se debe recurrir a la reproducción de ella a través de las simulaciones de N -cuerpos para acortar dichos intervalos de tiempo.

La idea del método de eyección a utilizar consiste en generar corrientes estelares a través de la liberación de estrellas desde los puntos de Lagrange L_1 y L_2 , ya que si las estrellas

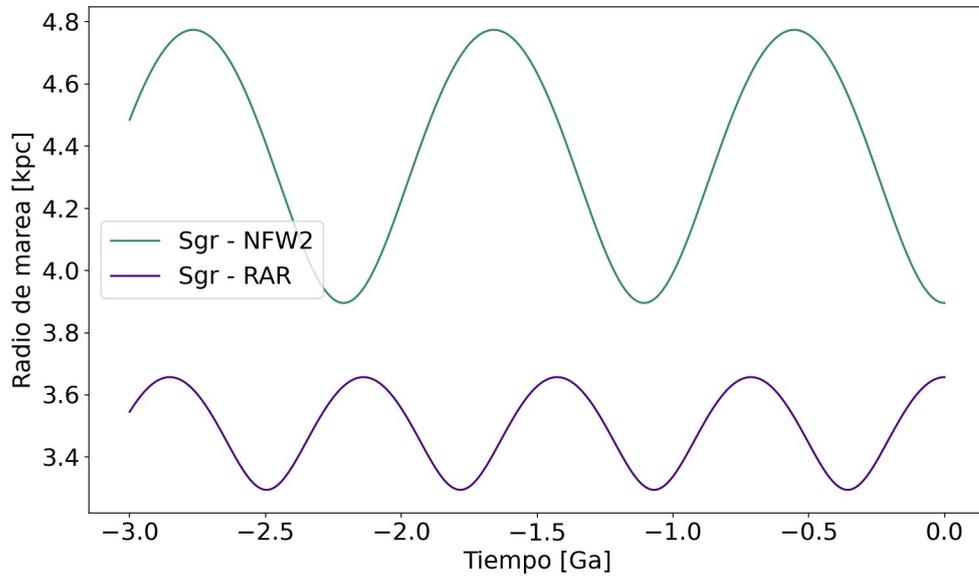


Figura 4.4. Evolución temporal de los dos radios de marea definidos para Sagitario. En verde, la evolución temporal del radio de marea definido entre la galaxia Sagitario y la Vía Láctea, esta última modelada a través de un perfil NFW2. En índigo, el mismo escenario que en verde pero la Vía Láctea modelada a través de un perfil RAR.

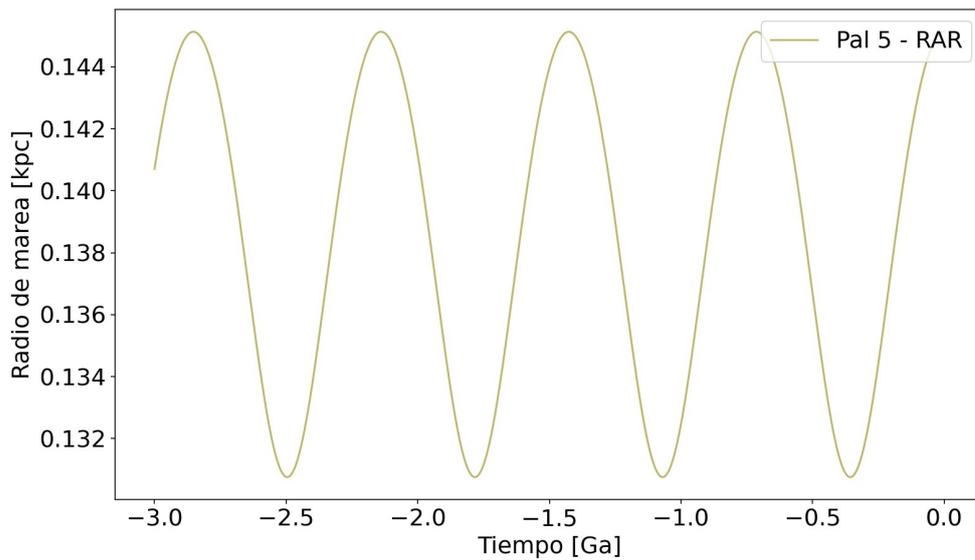


Figura 4.5. Evolución temporal del radio de marea del cúmulo globular Palomar 5 sumergido en un potencial tipo RAR.

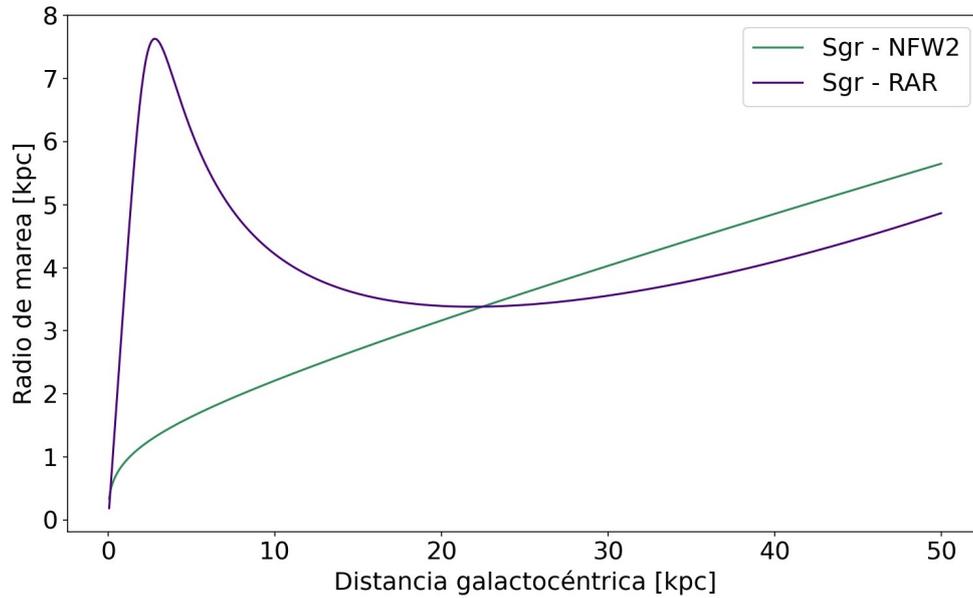


Figura 4.6. Radios de marea como función de la distancia entre la galaxia Sagitario y la galaxia huésped. En verde, la curva correspondiente al modelado del potencial de la Vía Láctea a través de un potencial tipo NFW2. Mientras que en índigo, se corresponde a modelar la Vía Láctea a través de un potencial tipo RAR. Se ha supuesto que Sgr sigue una órbita circular en torno a la Galaxia.

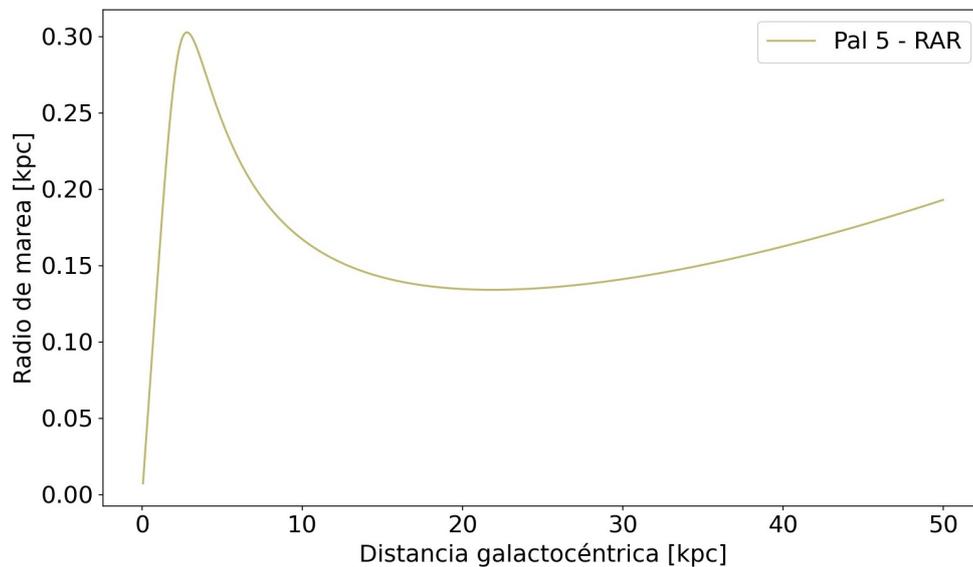


Figura 4.7. Radio de marea como función de la distancia entre el sistema Palomar 5 y la Vía láctea, esta última modelada a través de un perfil tipo RAR. Se ha supuesto que Pal 5 sigue una órbita circular en torno a la Galaxia.

se encuentran sobre o fuera de la superficie de velocidad cero correspondiente, pueden ser desligadas del satélite al que pertenecen. La evolución en el potencial gravitatorio galáctico de las estrellas arrancadas del progenitor, en conjunto con la acción del potencial gravitatorio de este último y su tasa de pérdida de estrellas a lo largo de la órbita, define la morfología de la estela de estrellas.

Previo a introducir las hipótesis del modelo de eyección, el cual se seguirá el modelo de [Gibbons et al. \(2014\)](#), se deberán considerar ciertos aspectos del escenario real en el cual se encuentran las corrientes estelares. Las estelas de estrellas siguen la órbita de su progenitor de manera aproximada. Es decir, existe un desplazamiento entre la órbita del satélite y cada uno de los dos brazos de la corriente. Esto es así porque las estrellas arrancadas del progenitor son eyectadas con condiciones iniciales ligeramente diferentes de las que tiene el progenitor en ese momento. Este contexto concuerda con el ilustrado en la Fig. 4.8. Además, el progenitor tiene cierta tasa de pérdida de estrellas en su camino en torno a la galaxia huésped, lo que puede influir en cambiar la densidad de la corriente de estrellas si la rapidez del satélite se mantiene constante o no durante el proceso. Dado que las estrellas más externas del progenitor son aquellas que menos energía necesitan para lograr la energía de escape necesaria para abandonar el sistema, estas serán las más afectadas en este contexto. Por último, como se observan dos brazos que conforman a la estela de estrellas, es necesario desarrollar un modelo que permita la formación de tales estructuras una vez que las estrellas eyectadas evolucionan en el potencial combinado del satélite y de la galaxia huésped. Cabe mencionar que no todas las estrellas que escapan por los puntos de Lagrange L_1 o L_2 pasan a formar parte de los brazos *delantero* o *trasero*, respectivamente. Sucede que algunas de las estrellas que salen desde uno de los puntos de Lagrange pueden ser recapturadas, volviendo a formar parte del sistema nuevamente. Un fenómeno curioso que puede suceder es que, luego de ser recapturada la estrella, esta sea eyectada desde el punto de Lagrange opuesto al de la primera eyección. De esta forma, si uno define a que brazo pertenecen las estrellas eyectadas según el punto de Lagrange desde el cual fueron eyectadas por primera vez, sucederá que habrá estrellas de la estela trasera en la delantera y viceversa.

Con una breve introducción sobre el contexto en el cual se trabajará, se puede proceder a describir el modelo utilizado en el presente trabajo para la eyección de estrellas desde el progenitor. Cualquier modelo de generación de corrientes estelares que intente reproducir los resultados de una simulación de N -cuerpos debe cumplir con que la estela de estrellas tenga la forma y extensión correctas en el espacio de energía-momento angular. Este último es el espacio parametrizado con coordenadas (E, L) , siendo ellas la energía y la norma del momento angular, respectivamente, de las estrellas que componen la corriente. Sin embargo, esta condición es solo necesaria, pero no suficiente.

Una posible resolución a este problema es la implementación del marco de trabajo propuesto por [Gibbons et al. \(2014\)](#). En ese trabajo se tomó el modelo de eyección desarrollado en [Küpper et al. \(2012\)](#) y [Varghese et al. \(2011\)](#) y se lo varió sutilmente. Esta diferencia implica que el modelo de *spray* consista en la generación de miembros de la estela de estrellas individualmente, desde los puntos de Lagrange L_1 y L_2 . Las estrellas eyectadas serán los miembros cuyas órbitas serán integradas para dar lugar a la distribución actual de estrellas producto de la disgregación del satélite.

Dado que fue calculada la posición del satélite en el pasado, se hará evolucionar al sistema de estrellas hacia el presente sobre esa misma órbita, pero con una diferencia importante. Desde los puntos de Lagrange L_1 y L_2 del satélite se eyectará una estrella de cada uno de ellos cada intervalo de tiempo δt constante. Esto ocurrirá hasta el presente, indicado como $t = 0$ Ga. Los puntos de Lagrange serán modelados como los ubicados en la línea que une los centros de ambos sistemas, el satélite y la galaxia huésped, en las distancias radiales

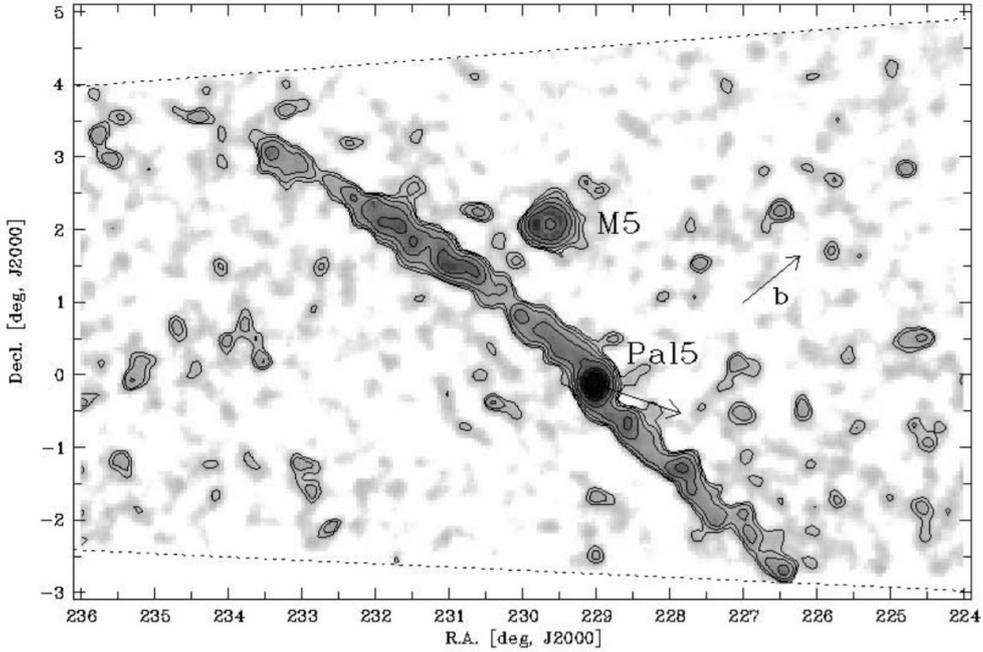


Figura 4.8. Mapa de la densidad superficial de estrellas que concuerdan fotométricamente con la población estelar de Palomar 5. En esta imagen se ve que el cúmulo globular Palomar 5 está acompañado por dos estelas de estrellas. La estela superior izquierda es la llamada corriente trasera (*trailing stream*), y la estela inferior derecha, la llamada corriente delantera (*leading stream*). La extensión angular de la estela de estrellas es del orden de 10° . La flecha saliente de Palomar 5 indica de manera aproximada la dirección de movimiento galáctico del sistema, mientras que la flecha nombrada con una *b* indica la dirección de crecimiento de la latitud galáctica. El parche de densidad alrededor del punto $(229.6^\circ, +2.1^\circ)$ forma parte de un residuo del cúmulo globular M5 y, por lo tanto, no está relacionado con Palomar 5. Las líneas punteadas marcan los límites del campo. Tomado de [Odenkirchen et al. \(2003\)](#).

galactocéntricas $r - r_t$ para L_1 y $r + r_t$ para L_2 , según se representa en la Fig. 4.9. r es la distancia galactocéntrica instantánea del satélite, mientras que r_t viene dado por la Ec. (4.9).

Las estrellas eyectadas desde el punto L_1 formarán el brazo *delantero* de la estela, mientras que las eyectadas desde el punto L_2 formarán el brazo *trasero* de la misma. En cuanto a la distribución de velocidad de las estrellas eyectadas, al compartir estas una velocidad similar a la velocidad del satélite, se modelará dicha distribución a través de una *distribución de probabilidades gaussiana* en tres dimensiones. El valor medio de ella será la velocidad del satélite respecto a la Vía Láctea, mientras que la *dispersión de velocidades de la distribución* será la misma en todas las direcciones posibles y sin covariancia entre ellas. Esto quiere decir que el tensor de dispersión de velocidades será diagonal y todos los elementos diagonales valdrán lo mismo, σ (para un desarrollo más profundo del concepto de dispersión de velocidades ver el Ap. B). Este valor será elegido convenientemente de forma tal que sea una cantidad representativa de la distribución de velocidades de las estrellas dentro de las partes externas del progenitor.

El potencial del progenitor será modelado a través de una *esfera de Plummer* (ver Ap. C) de masa fija m_{sat} y radio característico a_{sat} . Los valores de esas dos cantidades utilizados para los dos sistemas estudiados en el presente trabajo se detallan en la Tabla 4.1. Cada una de las estrellas eyectadas es independiente una de otra, haciendo que se puedan resolver las ecuaciones de movimiento individuales de cada una de manera separada.

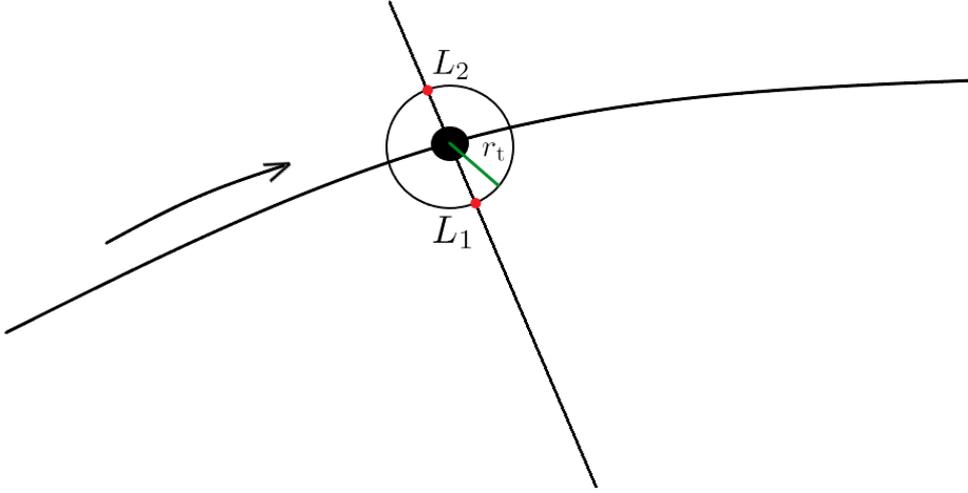


Figura 4.9. Representación esquemática de la ubicación de los puntos de Lagrange L_1 y L_2 del sistema progenitor-galaxia huésped, posicionados ambos sobre la superficie de una esfera de radio r_t (radio de marea del sistema correspondiente) y sobre la recta que une los centros de ambos sistemas. La galaxia satélite está representada como la esfera pequeña negra, suponiendo que esta se traslada hacia la derecha, sentido de movimiento indicado con la flecha negra.

Parámetro	Sagitario	Palomar 5
a_{sat}	0.85 kpc	50 pc
m_{sat}	$6.4 \cdot 10^8 M_{\odot}$	$4 \cdot 10^4 M_{\odot}$

Tabla 4.1. Tabla con los valores de los parámetros del modelo de esfera de Plummer aplicado a los dos satélites de la Vía Láctea que son estudiados en este trabajo.

El modelo descrito anteriormente requiere tres parámetros para describir la estructura del progenitor: su masa m_{sat} , su radio característico a_{sat} y su dispersión de velocidades isótropa en la parte exterior del mismo, σ . En principio, uno podría calcular el último parámetro en término de los dos primeros si el sistema fuera un sistema autogravitante, pero se optará por mantener los tres parámetros independientes entre sí. Esto es debido a que el satélite está sumergido en el halo de materia oscura de la galaxia huésped, afectando esta a la dispersión de velocidades del progenitor, especialmente a la de las estrellas más exteriores del mismo.

Una característica muy importante de este modelo es la incorporación del campo gravitatorio del progenitor, ya que, como fue demostrado en [Gibbons et al. \(2014\)](#), si este campo no es tenido en cuenta, los brazos delantero y trasero aparentan tener aproximadamente la forma correcta pero su longitud se ve reducida drásticamente. Esto puede entenderse mejor si se analiza el espacio de energía-momento angular de las estrellas eyectadas sin considerar la gravedad ejercida por el progenitor. En ese caso, la distribución de estrellas en ese espacio será diferente a la distribución de estrellas generada por una simulación de N -cuerpos.

En el siguiente capítulo se evaluará el modelo descrito una vez introducido los parámetros necesarios para su cómputo.

Capítulo 5

Generación de las corrientes estelares

En el capítulo anterior fue detallado el modelo mediante el cual se iban a generar las corrientes estelares propuestas para este trabajo. Aquí se especificarán los valores necesarios para el cómputo del modelo y la integración de las ecuaciones de movimiento de las estrellas generadas.

5.1. Eyección de estrellas

Para aplicar el modelo, se fijará un tensor de dispersión de velocidades isotrópico con valor σ , el cual será variado entre los valores $[0.5, 10]$ km/s para el caso de Sagitario, con el objetivo de determinar un valor específico, y tomará el valor de 2.1 km/s para el caso de Palomar 5 según se indica en [Kuzma et al. \(2014\)](#). Se elige un valor particular de otro trabajo para la dispersión de velocidades para el cúmulo globular Palomar 5 ya que en [Gibbons et al. \(2014\)](#) no se trabaja con dicho cúmulo.

El objetivo de probar distintas dispersiones de velocidades para Sgr es encontrar el valor óptimo con el cual se logre la mejor reproducción del resultado dado en [Gibbons et al. \(2014\)](#). En ese trabajo se obtuvo una corriente estelar producto de emplear el modelo allí descrito y ésta fue comparada con una estela de estrellas generada a través de simulaciones de N -cuerpos con el objetivo de poner a prueba el método de eyección. Dicha corriente de estrellas será tomada en este trabajo como *corriente estelar de referencia*.

La elección del valor óptimo para el caso de Sagitario se hará mediante inspección ocular entre corrientes estelares generadas en este trabajo y la corriente estelar de referencia. Para generar tales estelas de estrellas se considerará el modelo de NFW1 con valores $M_{200} = 7.5 \cdot 10^{11} M_{\odot}$ y $c = 20$, el cual genera una órbita para la galaxia Sgr según se muestra en las Figs. 3.2 y 3.3, con CI tomadas de la Tabla 3.2. Para que la comparación de los resultados obtenidos en este caso sean acordes con lo calculado por [Gibbons et al. \(2014\)](#), la eyección de estrellas ocurrirá a lo largo del tiempo, entre -4.3 Ga y 0 Ga. Además, serán eyectadas dos estrellas, una desde cada punto de Lagrange, según lo dicta el modelo planteado. La eyección de cada par de estrellas será cada δt años, en donde $\delta t = 4.3 \text{ Ga}/n_{\text{ejs}}$, con n_{ejs} el número de pasos de eyección. A modo de lograr una buena comparación con el resultado de la literatura se tomará $n_{\text{ejs}} = 2000$, generando que se eyecten un total de 4000 estrellas. En la corriente estelar con la cual se comparará se consideran 9022 estrellas en total. Este es el número de estrellas que forma parte de la estela al tiempo final de integración.

Luego de la inspección ocular previamente mencionada, se determinó que el valor óptimo de la dispersión de velocidades para el caso de la galaxia Sagitario es de $\sigma = 5.25$ km/s. Las

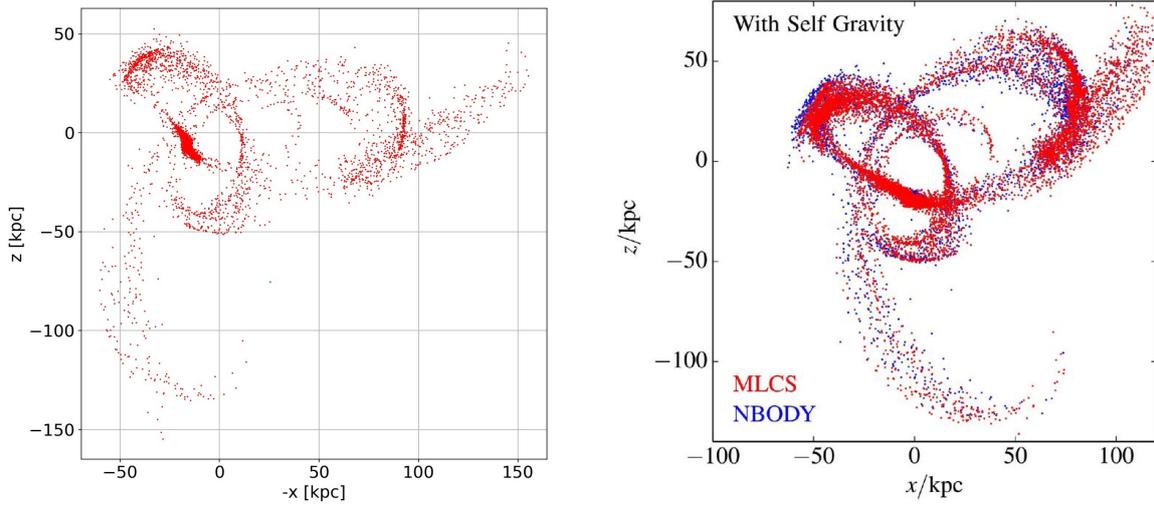


Figura 5.1. Comparación entre la corriente estelar generada en este trabajo (izquierda) y la correspondiente al trabajo de Gibbons et al. (2014) (derecha). La imagen de la izquierda corresponde a una corriente estelar suponiendo que su progenitor tiene una dispersión de velocidades $\sigma = 5.25$ km/s. Este valor, al ser el que mejor representa la imagen de la derecha, se toma como referencia para las demás corrientes estelares que se deban generar. Se debe notar que la figura del panel izquierdo está invertida en el eje x para que pueda ser comparada con la figura correspondiente al panel derecho. Además, la figura del panel izquierdo está ligeramente rotada en un pequeño ángulo en el plano xz , lo cual podría deberse a diferencias sutiles en las condiciones iniciales utilizadas.

características principales tenidas en cuenta para llevar a cabo dicha comparación fueron: el tamaño de la corriente, el ancho y forma de los brazos, la cantidad de subestructuras que comparten y que tan parecidas son estas últimas entre el par de estela de estrellas a comparar.

La comparación se hizo entre varias corrientes estelares generadas dentro del mismo contexto y la correspondiente a Gibbons et al. (2014), con la salvedad de que la única diferencia entre las generadas en este trabajo fue la dispersión de velocidades elegida. La corriente estelar que más se asemeja a la estela de estrellas tomada como referencia es aquella ubicada en el panel izquierdo de la Fig. 5.1. Así se ha finalizado el primer objetivo de esta tesis que consiste en poder determinar un valor de la dispersión de velocidades isótropa que modele a la galaxia elipsoidal enana Sagitario.

El siguiente objetivo consiste en generar tres corrientes estelares, todas con la misma condición inicial. Lo que se variará es el potencial y las características del progenitor. Se correrán los siguientes pares de potenciales-progenitores: NFW2-Sagitario, RAR-Sagitario y RAR-Palomar 5. Para Sagitario se utilizará la dispersión encontrada más arriba, mientras que para Pal 5 se utilizará el valor de 2.1 km/s antes mencionado. Una vez fijadas ambas dispersiones de velocidad según el satélite a considerar, se generarán un total de 2000 condiciones iniciales a diferentes tiempos a lo largo de la órbita del satélite, a medida que el tiempo transcurre de -3 Ga a 0 Ga. Este número de estrellas corresponde a un $n_{ejs} = 1000$. Estas CI serán las posiciones y velocidades de partida de las estrellas eyectadas desde los puntos de Lagrange L_1 y L_2 .

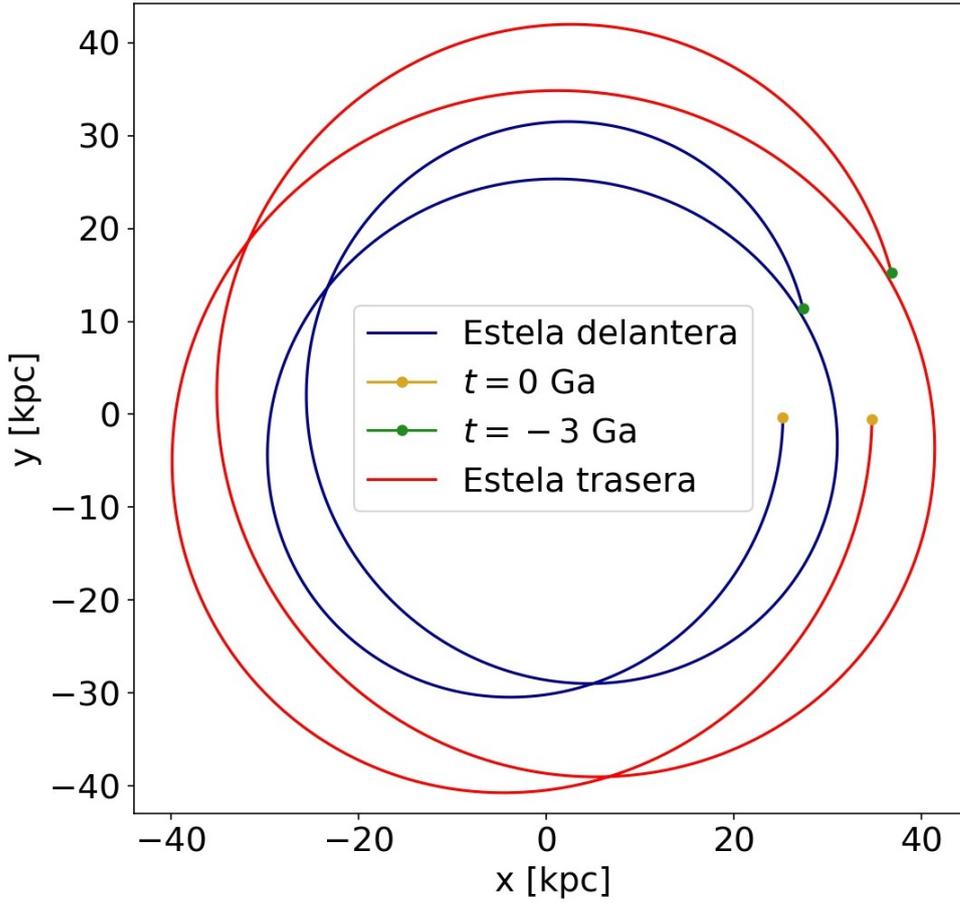


Figura 5.2. Trayectoria de los puntos de Lagrange L_1 (azul) y L_2 (rojo) del sistema Vía Láctea-Sagitario en torno a la galaxia huésped modelada, esta última, a través de un perfil tipo NFW2. Se puede apreciar su similitud con la trayectoria representada en el gráfico izquierdo de la Fig. 3.4, ya que los puntos de Lagrange están definidos como $L_1 : r - r_t$ y $L_2 : r + r_t$, con r la distancia galactocéntrica del satélite.

5.2. Resolución de las ecuaciones de movimiento de las estrellas eyectadas

Al haber sido generadas las diferentes CI de las estrellas a eyectar, se pueden utilizar como datos de entrada para el algoritmo computacional encargado de resolver la órbita de cada estrella en particular. Dicho algoritmo fue desarrollado por el director, codirector y el autor de la presente tesis y se correrá en paralelo, generando una optimización en los tiempos empleados en la ejecución del programa. Para resolver el sistema de ecuaciones con las CI generadas, se utilizó un método de Runge-Kutta explícito de orden 8, con una tolerancia relativa y una absoluta de $5.0 \cdot 10^{-14}$ y $0.5 \cdot 10^{-14}$, respectivamente.

Los resultados de la integración son los ilustrados en las Figs. 5.3, 5.5 y 5.7, en los cuales se muestra el estado de la corriente estelar en diferentes etapas de tiempo entre -3 Ga y 0 Ga. Además, se muestran las trayectorias de los puntos de Lagrange en torno a la galaxia huésped en las Figs. 5.2, 5.4 y 5.6. Ambos conjuntos de figuras consideran los tres escenarios físicos propuestos para este trabajo.

Con respecto a la trayectoria de los puntos de Lagrange, es de esperar que su morfología sea similar a la morfología de la trayectoria del satélite correspondiente. Además, la distancia

5. Generación de las corrientes estelares

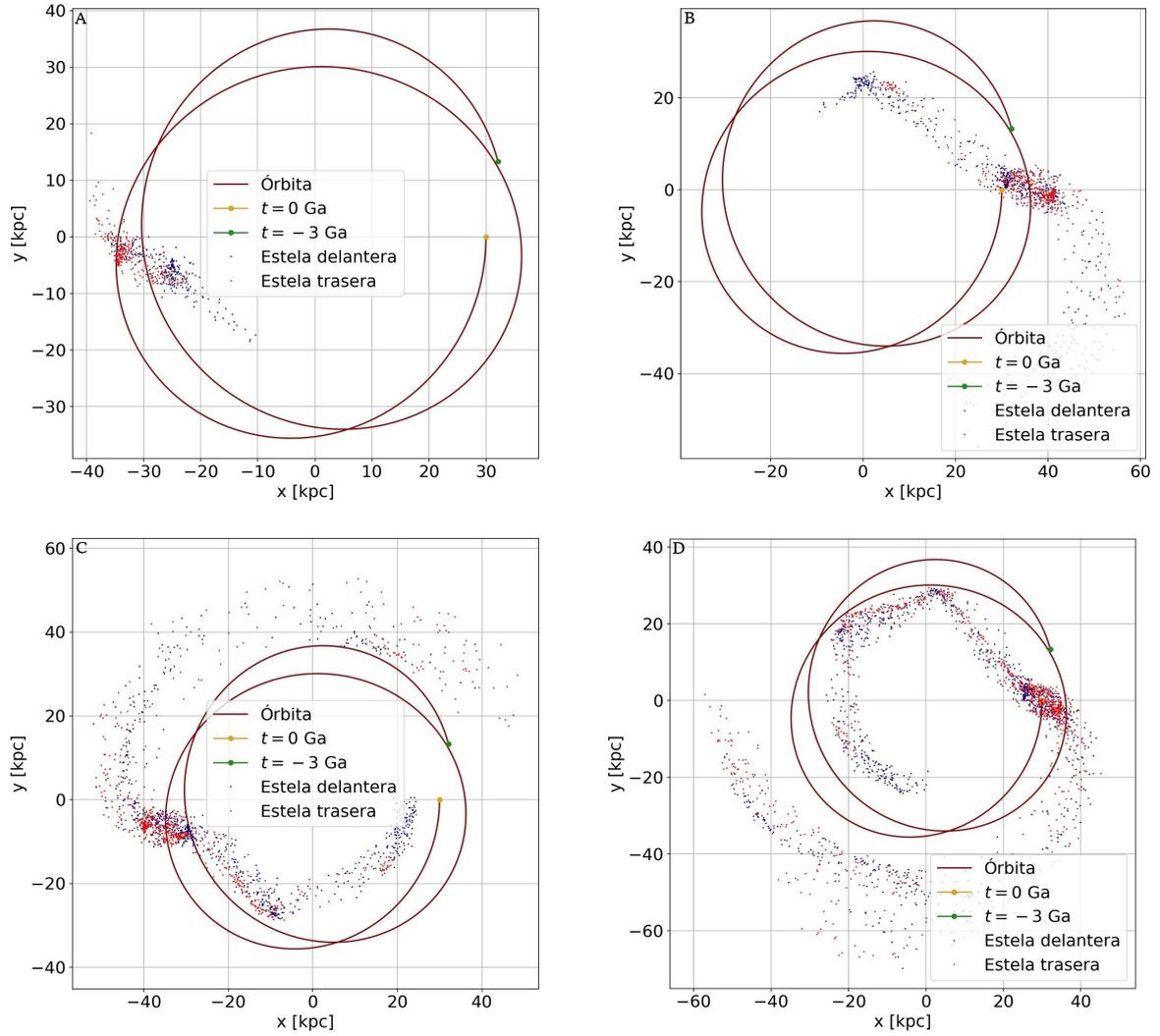


Figura 5.3. Corriente estelar en distintas épocas generada por Sagitario como progenitor, sumergido este último en una galaxia huésped modelada a través de un potencial gravitatorio tipo NFW2. La figura **A** corresponde a un 25 % del tiempo total, la figura **B** a un 50 %, la **C** a un 75 % y la **D** corresponde a la corriente de estrellas en la actualidad.

entre ambos puntos irá oscilando a lo largo de la órbita ya que la misma es igual a $2r_t$ y, como se ilustró previamente, el radio de marea es una función oscilante del tiempo. Asimismo, la pequeña distancia que mantienen entre sí los puntos L_1 y L_2 correspondientes a Pal 5 en comparación de la que mantienen los mismos puntos para Sagitario se explica porque el radio de marea de este último sistema es mucho mayor que el asociado a Pal 5.

Por otro lado, de las figuras que representan las estelas de estrellas en diferentes instantes de tiempo, se ve que todas son apreciablemente diferentes. La principal diferencia entre las corrientes generadas por Sagitario es que la corriente sumergida en el potencial RAR se encuentra más cerrada que la correspondiente al potencial tipo NFW2, según su gráfico a tiempo actual. Esto podría deberse a lo siguiente. La distancia galactocéntrica de Sagitario en torno al potencial NFW2 oscila entre los valores dados en las igualdades (3.8) mientras que cuando orbita en un potencial tipo RAR oscila entre los valores dados en las expresiones (3.9). Como en dichas franjas de valores el radio de marea correspondiente al potencial NFW2 es mayor al del RAR, sucede que las estrellas son eyectadas más lejos del centro del progenitor

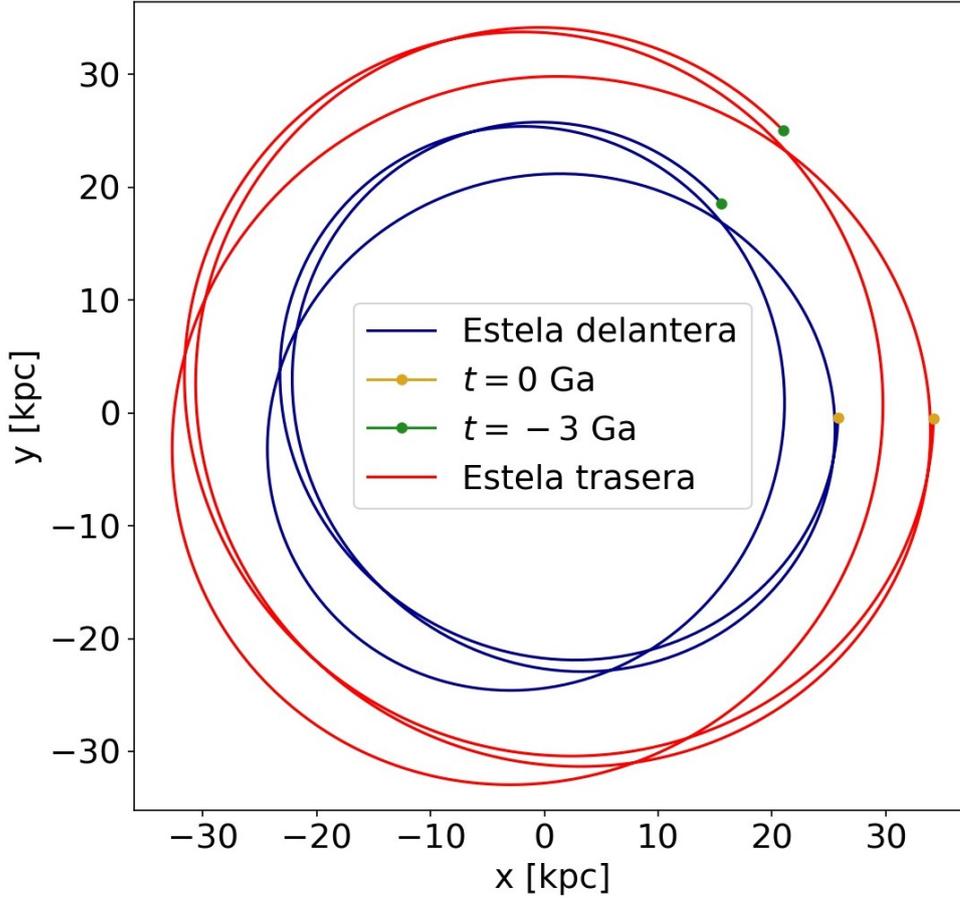


Figura 5.4. Trayectoria de los puntos de Lagrange L_1 (azul) y L_2 (rojo) del sistema Vía Láctea-Sagitario en torno a la galaxia huésped modelada, esta última, a través de un perfil tipo RAR. Se puede apreciar su similitud con la trayectoria representada en el gráfico izquierdo de la Fig. 3.5, ya que los puntos de Lagrange están definidos como $L_1 : r - r_t$ y $L_2 : r + r_t$, con r la distancia galactocéntrica del satélite.

en el primer caso que en el segundo. Esto mismo puede deducirse directamente de la Fig. 4.4. Además, la estela trasera correspondiente al potencial RAR se ha desarrollado más que la correspondiente al potencial NFW2. Esto podría deberse a que la órbita de Sagitario en torno a la Vía Láctea modelada a través de un perfil RAR presenta un período orbital menor (por ubicarse a distancias galactocéntricas menores). Un último detalle a mencionar es el hecho de que la estela de estrellas no sigue de manera exacta la órbita del progenitor, en correspondencia con lo que fue comentado en el capítulo en el que fue introducido el modelo de *spray*.

La estela de estrellas generada por la combinación RAR-Pal 5 es muy diferente a la correspondiente a RAR-Sagitario. Si se analiza el gráfico “D” correspondiente a la Fig. 5.7, se puede ver que la corriente de estrellas está poco desarrollada. Esto es debido a que el progenitor es relativamente poco masivo por lo que su dispersión de velocidades es pequeña. Además, todas las estrellas eyectadas se encuentran muy cerca del progenitor, producto de que el radio de marea de este sistema es muy pequeño en comparación al de Sagitario. Otro fenómeno a resaltar es la claridad con la que se distingue el sentido en el cual se desarrolla la estela delantera, el cual coincide con el sentido de movimiento del satélite a lo largo de la órbita, es decir, sentido directo. Por otro lado, también se puede apreciar que la estela trasera

5. Generación de las corrientes estelares

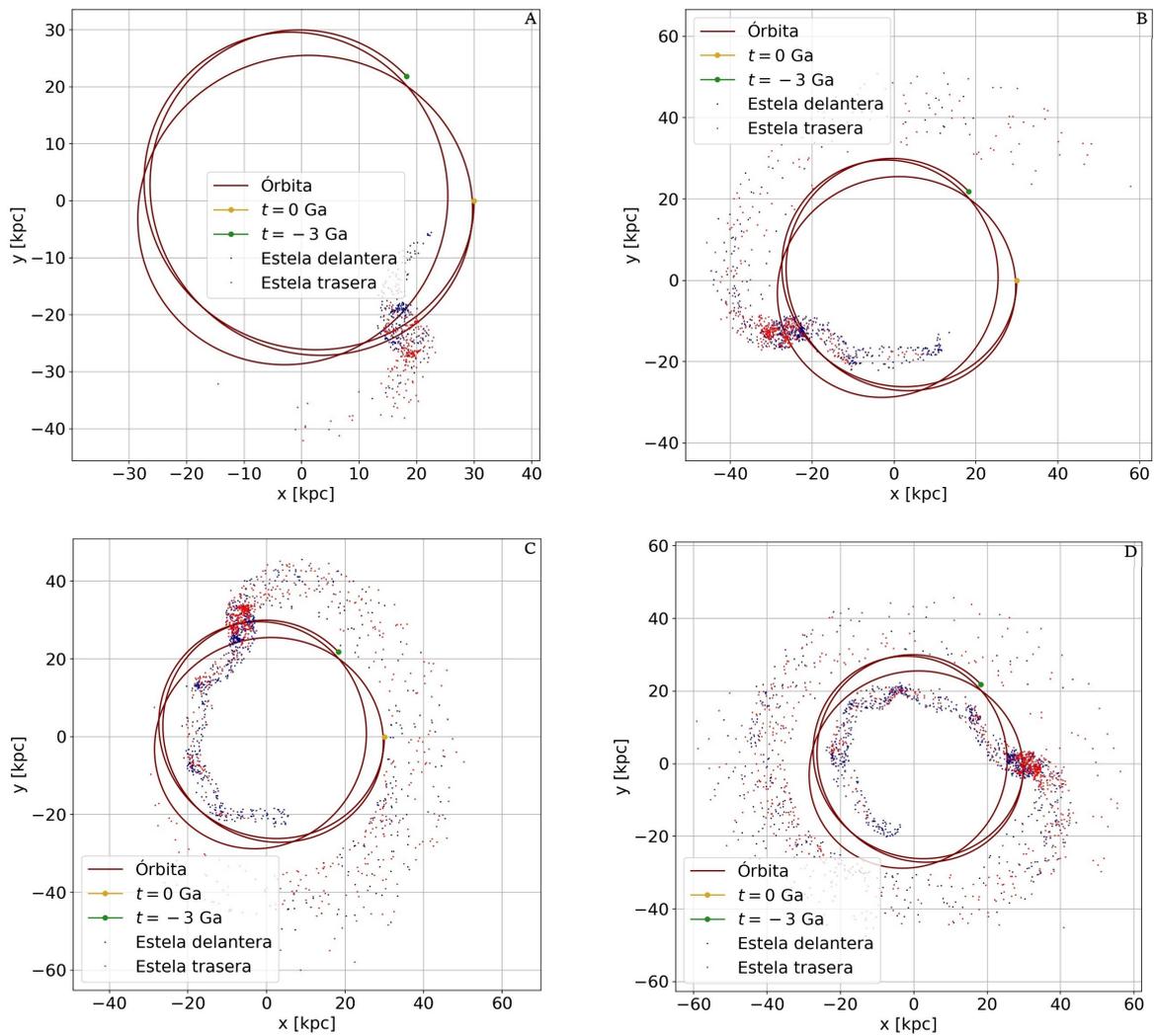


Figura 5.5. Corriente estelar en distintas épocas generada por Sagitario como progenitor, sumergido este último en una galaxia huésped modelada a través de un potencial gravitatorio tipo RAR. La figura **A** corresponde a un 25 % del tiempo total, la figura **B** a un 50 %, la **C** a un 75 % y la **D** corresponde a la corriente de estrellas en la actualidad.

se desarrolla en sentido contrario al movimiento, como es de esperar según su naturaleza.

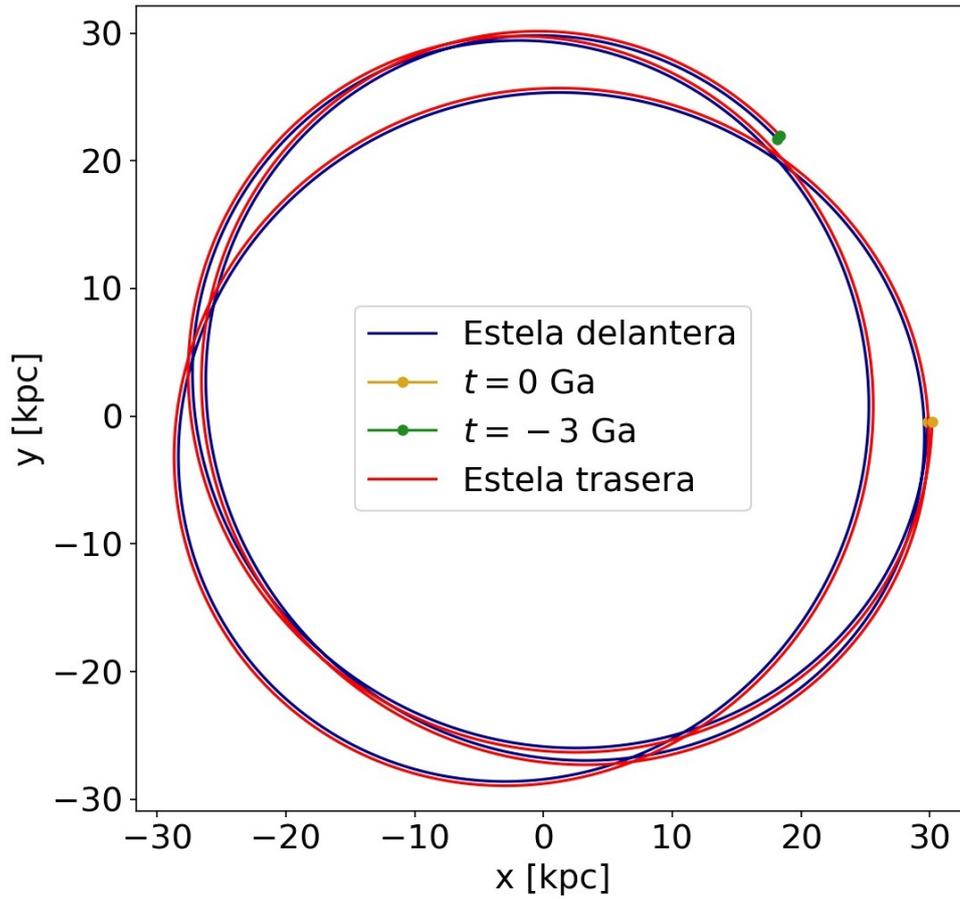


Figura 5.6. Trayectoria de los puntos de Lagrange L_1 (azul) y L_2 (rojo) del sistema Vía Láctea-Palomar 5 en torno a la galaxia huésped modelada, esta última, a través de un perfil tipo RAR. Se puede apreciar su similitud con la trayectoria representada en el gráfico izquierdo de la Fig. 3.5, ya que los puntos de Lagrange están definidos como $L_1 : r - r_t$ y $L_2 : r + r_t$, con r la distancia galactocéntrica del satélite.

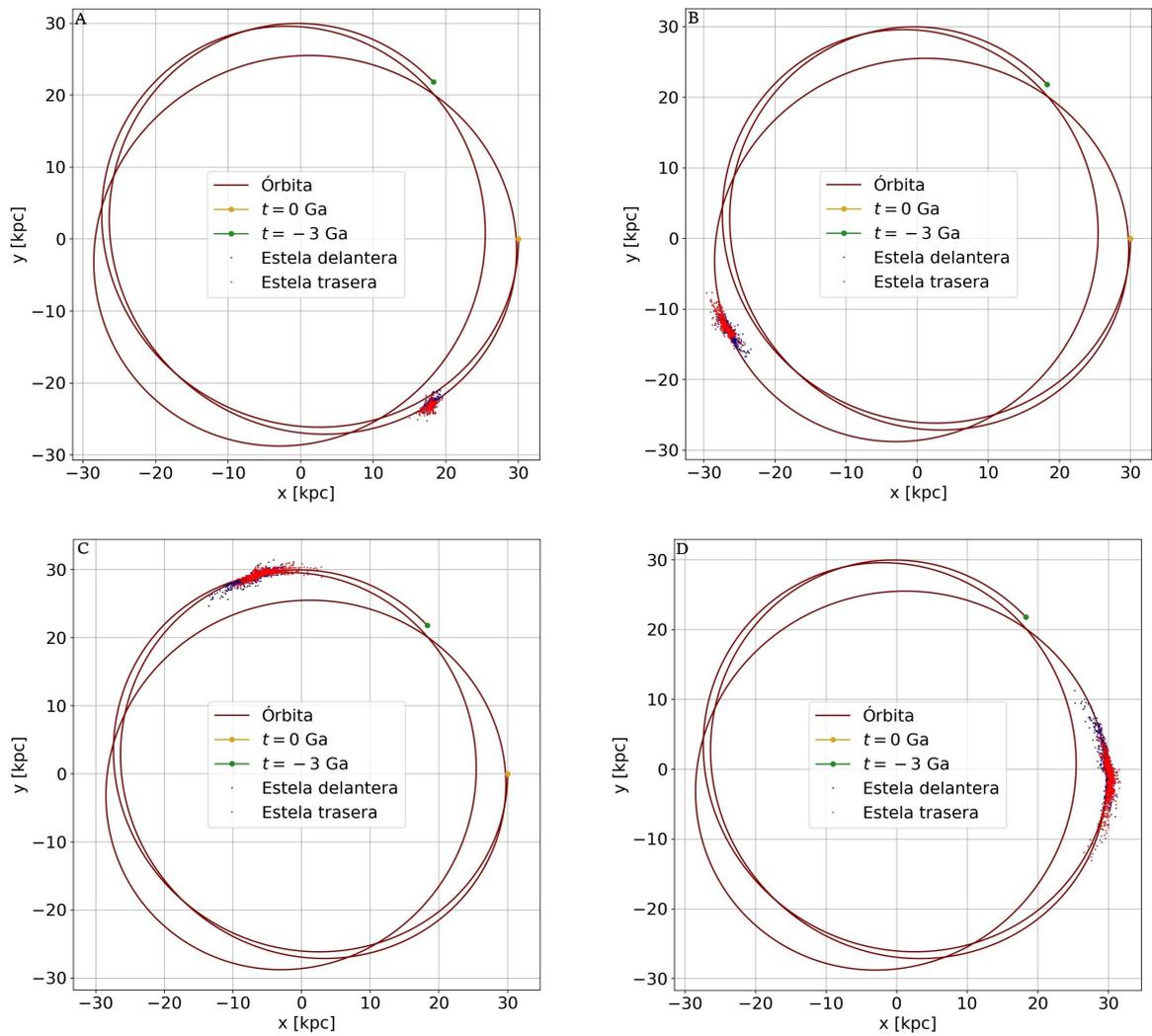


Figura 5.7. Corriente estelar en distintas épocas generada por Palomar 5 como progenitor, sumergido este último en una galaxia huésped modelada a través de un potencial gravitatorio tipo RAR. La figura **A** corresponde a un 25% del tiempo total, la figura **B** a un 50%, la **C** a un 75% y la **D** corresponde a la corriente de estrellas en la actualidad.

Capítulo 6

Conclusiones

En la presente tesis de licenciatura se estudiaron dos modelos de distribuciones de materia oscura a escala galáctica, el modelo RAR extendido y el modelo NFW. Los sistemas a través de los cuales se estudiaron sus diferencias fueron las corrientes estelares. Para generarlas se hizo uso del modelo de *spray* desarrollado en [Gibbons et al. \(2014\)](#), a través del cual se eyectan estrellas a intervalos regulares de tiempo desde los puntos de Lagrange L_1 y L_2 del sistema galaxia huésped-progenitor. Los dos satélites elegidos para este trabajo fueron la galaxia elipsoidal enana Sagitario y el cúmulo globular Palomar 5.

En una primera instancia, luego de haber definido ambos modelos de materia oscura, se logró reproducir de manera aproximada la corriente de estrellas de la literatura, a través de la cual se extrajo el valor óptimo de la dispersión de velocidades del progenitor, que en ese caso, correspondía a la galaxia Sagitario, y el cual se utilizó en la segunda parte de esta investigación. Una vez tenido el valor óptimo recién mencionado y con el concepto de radio de marea introducido, después de haber integrado la órbita de los progenitores para los tres escenarios físicos propuestos (i.e. NFW2-Sagitario, RAR-Sagitario y RAR-Palomar 5), se utilizó el método de *spray* para generar corrientes estelares. El método de eyección proveyó las condiciones iniciales para las ecuaciones de movimiento que rigen la dinámica de las estrellas de la corriente, la cual está dominada por la atracción gravitatoria que ejercen tanto el halo de materia oscura que modela la galaxia huésped como el progenitor, en donde siempre se modeló a este último a través de una esfera de Plummer.

El primer caso correspondió a generar una estela de estrellas producida por Sagitario a lo largo de una órbita que resultó de la resolución de las ecuaciones de movimiento con condiciones iniciales fiduciaras, sumergido este sistema en una distribución de masa NFW2. El segundo caso fue similar al primero salvo que se modeló a la galaxia huésped a través de una distribución RAR extendida, cuya masa acumulada se obtuvo de la resolución de las ecuaciones diferenciales que el modelo propone. Por último, se generó una corriente de estrellas a través de un progenitor modelado como el cúmulo globular Palomar 5, sumergido este último en un potencial tipo RAR. Las conclusiones más relevantes que pueden destacarse de estos resultados son la variación de la forma y longitud de la corriente estelar con el potencial gravitatorio con el cual se modela la galaxia huésped, sea a través de la dependencia con la trayectoria del progenitor o con el radio de marea. Cabe destacar que tanto el progenitor como la estela de estrellas se encuentran dentro de la distribución de masa del halo que modela la galaxia huésped y su dinámica se ve afectada, en parte, por la componente interior de este sistema en la cual los modelos RAR y NFW2 difieren apreciablemente, según lo indica la Fig. 2.4.

Con respecto al modelo de radio de marea elegido, el introducido por [Gajda y Lokas \(2016\)](#), se pudieron distinguir diferencias según el potencial considerado. Para grandes dis-

6. Conclusiones

tancias galactocéntricas, del orden de algunas decenas de kiloparsecs, los radios de marea definidos para ambos potenciales presentan un comportamiento creciente, siendo mayor el radio de marea correspondiente al modelo NFW2 si se considera el mismo satélite. Pero para distancias galactocéntricas menores, del orden de algunos kiloparsecs, el radio de marea correspondiente a un perfil tipo RAR presenta un crecimiento abrupto, difiriendo considerablemente del radio de marea para un potencial tipo NFW2.

De esta forma, es posible comparar distintos modelos de distribuciones de materia oscura si se estudian las diferencias que estos generan sobre distintos sistemas o distintas cantidades físicas, como lo son, por ejemplo, las corrientes estelares y los radios de marea. Ahora, lo que se puede hacer es comparar cantidades inferidas observacionalmente con cantidades calculadas numéricamente. A la hora de comparar las corrientes estelares observadas con las calculadas numéricamente, se pueden considerar como parámetros que las caractericen: su forma, longitud, densidad, distancia pericéntrica y apocéntrica, entre otros. Si se comparan datos observados con los datos calculados numéricamente, se pueden descartar o restringir los modelos de distribuciones de materia oscura. Esta es una forma de estudiar los halos de materia oscura de manera indirecta, ya que, como se ha mencionado anteriormente, no se pueden estudiar tales sistemas de manera directa.

Como trabajo a futuro, se pretende incorporar la componente bariónica de la Vía Láctea, la cual juega un rol muy importante en la dinámica de la Galaxia. Además, es posible comparar los resultados producidos por el modelo de *spray* con simulaciones de N -cuerpos para mejorar dicho modelo. Esta comparación puede ser hecha a través de la distribución de estrellas en el espacio de las configuraciones, como se hizo en este trabajo, o incorporando la distribución de estrellas en el espacio de energía-momento angular, el cual permite un análisis más exhaustivo de la estela de estrellas. Por otro lado, pueden ponerse a prueba distintos modelos de radios de marea, como también distintos modelos de *spray*. Una característica relevante de las corrientes estelares es su densidad de estrellas, la cual está fuertemente ligada a la tasa de eyección de estrellas desde el progenitor. Por lo tanto, la incorporación de otros métodos de *spray* debe tener en cuenta tasas de eyección realistas (i.e. variables en el tiempo) que logren reproducir, de manera rigurosa, las estelas de estrellas observadas.

Apéndice A

Conservación del tensor de energía-momento

El tensor de energía-momento de una distribución de masa-energía introducido en el Cap. 2 satisface una ecuación muy importante, la cual es conocida como *ecuación de conservación*, y para esta cantidad tensorial es:

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\sigma} = 0, \quad (\text{A.1})$$

en donde el operador ∇_{μ} es la *derivada covariante*, y al estar contraída con uno de los índices del tensor $T^{\mu\sigma}$ indica *divergencia covariante* y opera sobre él según:

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\sigma} = \partial_{\mu} T^{\mu\sigma} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\mu} T^{\alpha\sigma} + \Gamma^{\sigma}_{\alpha\mu} T^{\mu\alpha}. \quad (\text{A.2})$$

Dado que $T^{\mu\sigma}$ tiene la forma dada en la Ec. (2.12) y que la derivada covariante es un operador lineal, trabajando en el contexto del Cap. 2 y bajo la referencia de [Hobson et al. \(2006\)](#), se puede escribir:

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\sigma} = \nabla_{\mu} \left[\left(\rho(r) + \frac{P(r)}{c^2} \right) u^{\mu} u^{\sigma} \right] - \nabla_{\mu} (P(r) g^{\mu\sigma}), \quad (\text{A.3})$$

en donde se debe recordar que $\rho(r)$ y $P(r)$ son, respectivamente, la densidad y la presión del fluido perfecto modelado a través del tensor de energía-momento. Usando el hecho de que la derivada covariante satisface la regla de la derivada del producto de dos funciones, $\nabla_{\mu} g^{\mu\sigma} = 0$ y que $P(r)$ es una función escalar, queda:

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\sigma} = \nabla_{\mu} \left[\left(\rho(r) + \frac{P(r)}{c^2} \right) u^{\mu} u^{\sigma} \right] - g^{\mu\sigma} \partial_{\mu} P(r). \quad (\text{A.4})$$

Ahora, se puede probar que la divergencia covariante de un tensor $A^{\mu\sigma}$ arbitrario puede ser escrita de la forma:

$$\nabla_{\mu} A^{\mu\sigma} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\mu} (\sqrt{-g} A^{\mu\sigma}) + \Gamma^{\sigma}_{\alpha\mu} A^{\mu\alpha}, \quad (\text{A.5})$$

en donde $-g$ es el determinante del tensor métrico y el signo negativo proviene de que la métrica utilizada es de firma -2 , como fue indicado en el Cap. 2. De esta forma, utilizando esta propiedad con el tensor $(\rho(r) + P(r)/c^2)u^{\mu}u^{\sigma}$, la Ec. (A.4) queda:

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\sigma} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\mu} \left[\sqrt{-g} \left(\rho(r) + \frac{P(r)}{c^2} \right) u^{\mu} u^{\sigma} \right] + \Gamma^{\sigma}_{\alpha\mu} \left(\rho(r) + \frac{P(r)}{c^2} \right) u^{\mu} u^{\alpha} - g^{\mu\sigma} \partial_{\mu} P(r). \quad (\text{A.6})$$

A. Conservación del tensor de energía-momento

Dado que $u_\mu = (ce^{\nu/2}, 0, 0, 0)$, al subir el índice de la tetra-velocidad, se tiene que $u^\mu = (ce^{-\nu/2}, 0, 0, 0)$. De esta forma, el primer y segundo término de la ecuación anterior se reducen a:

$$\nabla_\mu T^{\mu\sigma} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_0 \left[\sqrt{-g} \left(\rho(r) + \frac{P(r)}{c^2} \right) ce^{-\nu/2} u^\sigma \right] + \Gamma^\sigma_{00} \left(\rho(r) + \frac{P(r)}{c^2} \right) c^2 e^{-\nu} - g^{\mu\sigma} \partial_\mu P(r). \quad (\text{A.7})$$

Si, además, se tiene en cuenta que la métrica, $\rho(r)$ y $P(r)$ no dependen del tiempo, el primer término de la ecuación anterior resulta ser nulo, quedando:

$$\nabla_\mu T^{\mu\sigma} = \Gamma^\sigma_{00} \left(\rho(r) + \frac{P(r)}{c^2} \right) c^2 e^{-\nu} - g^{\mu\sigma} \partial_\mu P(r). \quad (\text{A.8})$$

El cálculo de los símbolos de Christoffel da como resultado:

$$\Gamma^\sigma_{00} = -\frac{1}{2} g^{\mu\sigma} \partial_\mu g_{00} = -\frac{1}{2} g^{\mu\sigma} \partial_\mu e^{\nu(r)} = -\frac{1}{2} g^{\mu\sigma} e^{\nu(r)} \partial_\mu \nu(r). \quad (\text{A.9})$$

Así, la ecuación de conservación queda de la forma:

$$-\frac{1}{2} g^{\mu\sigma} e^{\nu(r)} \partial_\mu \nu(r) \left(\rho(r) c^2 + P(r) \right) e^{-\nu(r)} - g^{\mu\sigma} \partial_\mu P(r) = 0. \quad (\text{A.10})$$

Al desarrollar la ecuación anterior a ambos lados con $g_{\sigma\delta}$, teniendo en cuenta que $g_{\sigma\delta} g^{\sigma\mu} = \delta^\mu_\delta$, multiplicando a ambos lados por -1 y simplificando las exponenciales del primer término, la ecuación diferencial anterior resulta:

$$\frac{1}{2} \partial_\delta \nu(r) \left(\rho(r) c^2 + P(r) \right) + \partial_\delta P(r) = 0. \quad (\text{A.11})$$

En la ecuación anterior, las únicas dos funciones a derivar, $\nu(r)$ y $P(r)$ solo dependen de la coordenada radial. Por eso, cuando $\delta = 0; 2; 3$, se recuperará una identidad, haciendo que el único valor de δ que genere una ecuación no trivial sea $\delta = 1$, lo que implica que las derivadas se harán respecto a la coordenada radial r . En conclusión, la Ec. (A.11) resultará:

$$\frac{1}{2} \partial_r \nu(r) \left(\rho(r) c^2 + P(r) \right) + \partial_r P(r) = 0. \quad (\text{A.12})$$

Esta ecuación diferencial relaciona la derivada radial de la presión del fluido perfecto con la derivada radial de la función $\nu(r)$ involucrada en la componente g_{00} de la métrica y puede ser utilizada para obtener la ecuación de *Tolman–Oppenheimer–Volkoff* (TOV). Lo que debe hacerse es reemplazar el valor de la derivada radial de $\nu(r)$ dada en la Ec. (2.53) en la ecuación anterior y reacomodar factores y términos para recuperar:

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{1}{r^2} \left(\rho(r) c^2 + P(r) \right) \left[\frac{4\pi G}{c^4} P(r) r^3 + \frac{GM(r)}{c^2} \right] \left[1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r} \right]^{-1}. \quad (\text{A.13})$$

$M(r)$ es la masa acumulada del sistema cuya densidad de masa es $\rho(r)$, definida en la Ec. (2.39). La ecuación anterior es la ecuación de TOV y representa la corrección general relativista de la ecuación de equilibrio hidrostático newtoniana.

Apéndice B

Función de distribución

Al trabajar con sistemas de muchas partículas, deja de ser práctico seguir la trayectoria de cada una de las componentes del sistema. Esto es válidamente aplicable a los sistemas de muchas estrellas, como lo son los cúmulos globulares o las galaxias. Es por ello que se elige estudiar la probabilidad de encontrar partículas en una dada posición y con una dada velocidad. Esto se logra cuantificar a través de la llamada **función de distribución**, f , la cual se define de forma tal que:

$$f(\vec{x}, \vec{v}, t) d^3x d^3v = dN, \quad (\text{B.1})$$

el número diferencial de partículas en el volumen $d^3x d^3v$, centrado en la posición (\vec{x}, \vec{v}) al tiempo t del *espacio de las fases*. Este último es el espacio conjunto de todos los puntos de la forma (\vec{x}, \vec{v}) , en donde \vec{x} son las posiciones que pueden tomar las partículas del sistema respecto a un dado marco de referencia y \vec{v} las velocidades que estas partículas pueden tener respecto a este último. Si se llama Γ al espacio de las fases, siendo $\Gamma \subset \mathbb{R}^6$, mediante integración, se obtiene que:

$$\int_{\Gamma} f(\vec{x}, \vec{v}, t) d^3x d^3v = N(t), \quad (\text{B.2})$$

con $N(t)$ el número total de partículas del sistema al instante t .

Para obtener una distribución de probabilidades, basta con dividir la Ec. (B.2) por $N(t)$ en ambos miembros. Al hacerlo, se obtiene la cantidad $\mathcal{F} = f/N$. De esta forma, podemos definir la probabilidad por unidad de volumen de encontrar partículas en \vec{x} al instante t , independientemente de su velocidad, como:

$$\nu(\vec{x}, t) = \int_{\Gamma_v} \mathcal{F}(\vec{x}, \vec{v}, t) d^3v. \quad (\text{B.3})$$

Aquí, Γ_v es el *espacio de las velocidades*, el conjunto de valores de las velocidades \vec{v} que pueden tomar las partículas del sistema. Al ser \mathcal{F} una distribución de probabilidades en el espacio de las fases, se puede definir una distribución de probabilidades en el espacio de las velocidades dividiendo a \mathcal{F} por ν , de forma tal de obtener:

$$P_{\vec{x}, t}(\vec{v}) = \frac{\mathcal{F}(\vec{x}, \vec{v}, t)}{\nu(\vec{x}, t)}, \quad (\text{B.4})$$

donde $P_{\vec{x}, t}(\vec{v}) d^3v$ es la probabilidad de encontrar partículas con velocidad en el elemento de volumen d^3v , centrado en \vec{v} , en la posición \vec{x} al instante t .

De esta forma, se puede definir la *velocidad media* en (\vec{x}, t) como:

$$\langle \vec{v} \rangle(\vec{x}, t) = \int_{\Gamma_v} \vec{v} P_{\vec{x}, t}(\vec{v}) d^3 v. \quad (\text{B.5})$$

La velocidad media de las partículas que están en \vec{x} al instante t se puede utilizar para definir otro concepto, ligado a la velocidad interna o *velocidad peculiar* de las partículas del sistema. Esta velocidad es la velocidad relativa de las partículas con respecto a la $\langle \vec{v} \rangle$. Se define al *tensor de dispersión de velocidades*, σ_{ij} , con $i, j = 1; 2; 3$, como:

$$\sigma_{ij}^2(\vec{x}, t) = \int_{\Gamma_v} (v_i - \langle v \rangle_i)(v_j - \langle v \rangle_j) P_{\vec{x}, t}(\vec{v}) d^3 v. \quad (\text{B.6})$$

Este tensor es manifiestamente simétrico y, usando resultados de álgebra matricial, para cualquier punto \vec{x} y cualquier instante t se puede elegir un conjunto de ejes ortogonales para los cuales σ_{ij} sea diagonal. Aquel elipsoide que tenga tal sistema de ejes ortogonales como sus ejes principales y σ_{11} , σ_{22} y σ_{33} sean la longitud de sus semiejes, se denomina *elipsoide de velocidades*. Si $\sigma_{ii} = \sigma$ para todo valor de i , el elipsoide de velocidades se convierte en una esfera. En este caso, se dice que la distribución de velocidades es isótropa.

Apéndice C

Modelo de Plummer

Se observa que en muchos sistemas con simetría esférica la densidad es aproximadamente constante en el centro. Por otro lado, en todos los sistemas esta decae a cero a grandes distancias. Un modelo cuyo potencial gravitatorio genera que la densidad asociada satisfaga tales condiciones es el llamado *modelo de Plummer*. En él, el potencial gravitatorio es de la forma (Binney y Tremaine, 2008):

$$\phi(r) = -\frac{GM}{\sqrt{r^2 + b^2}}, \quad (\text{C.1})$$

donde r es la distancia radial al centro del sistema, M es la masa total del sistema, G la constante de gravitación universal y b es la *longitud de escala de Plummer*, la cual indica la escala lineal del sistema.

Dado que la *ecuación de Poisson* es de la forma:

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho, \quad (\text{C.2})$$

de ella se puede obtener la densidad si es calculado el laplaciano del potencial. Como el laplaciano para una función en simetría esférica es de la forma:

$$\nabla^2 f(r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f(r)}{\partial r} \right), \quad (\text{C.3})$$

insertando la expresión del potencial (C.1) en la ecuación anterior se obtiene que:

$$\nabla^2 \phi = \frac{3GMb^2}{(r^2 + b^2)^{5/2}}. \quad (\text{C.4})$$

Así, se obtiene de la ecuación de Poisson que:

$$\rho(r) = \frac{3M}{4\pi b^3} \left(1 + \frac{r^2}{b^2} \right)^{-5/2}. \quad (\text{C.5})$$

Ya que la relación entre la masa acumulada y el perfil de densidad de una distribución esféricamente simétrica de masa es:

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r), \quad (\text{C.6})$$

mediante integración directa, entre los límites 0 y r , en donde se supondrá que $M(0) = 0$, ya que $r = 0$ corresponde al centro de la distribución de masa, se obtiene:

C. Modelo de Plummer

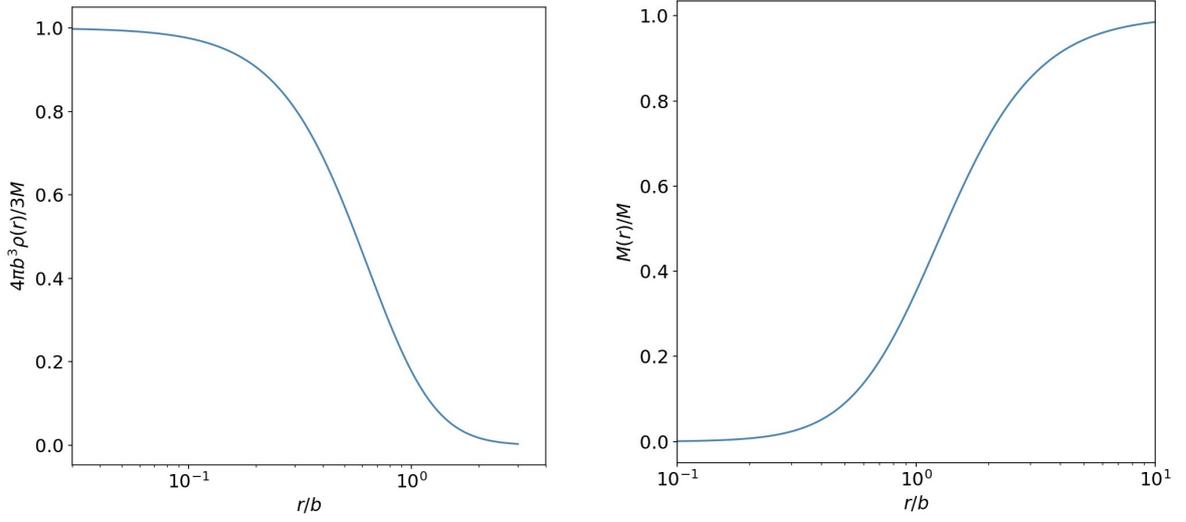


Figura C.1. Izquierda: densidad del modelo de Plummer. Derecha: masa acumulada del modelo de Plummer. Ambos gráficos usan la coordenada radial en unidades de la escala de Plummer.

$$M(r) = 4\pi \int_0^r r'^2 \rho(r') dr'. \quad (\text{C.7})$$

Luego de la integración, se obtiene que la masa acumulada de una distribución de masa modelada a través de una esfera de Plummer es:

$$M(r) = \frac{Mr^3}{(r^2 + b^2)^{3/2}}. \quad (\text{C.8})$$

Adimensionalizando la densidad (C.5) y la masa acumulada (C.8), se obtiene lo ilustrado en la Fig. (C.1).

Bibliografía

- Aghanim N., et al., 2020, *Astronomy & Astrophysics*, 641, A6
- Alcock C., et al., 2001, *The Astrophysical Journal*, 550, L169
- Argüelles C., Krut A., Rueda J., Ruffini R., 2018, *Physics of the Dark Universe*, 21, 82–89
- Banik N., Bovy J., Bertone G., Erkal D., de Boer T. J. L., 2019, Novel constraints on the particle nature of dark matter from stellar streams ([arXiv:1911.02663](https://arxiv.org/abs/1911.02663))
- Becerra-Vergara E. A., Argüelles C. R., Krut A., Rueda J. A., Ruffini R., 2020, *Astronomy & Astrophysics*, 641, A34
- Binney J., Tremaine S., 2008, *Galactic Dynamics: Second Edition*. Princeton University Press
- Chavanis P.-H., Lemou M., Méhats F., 2015, *Physical Review D*, 91, 063531
- Deg N., Widrow L., 2014, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 439, 2678
- Fukushige T., Heggie D. C., 2000, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 318, 753
- Gajda G., Lokas E. L., 2016, *The Astrophysical Journal*, 819, 20
- Gibbons S. L. J., Belokurov V., Evans N. W., 2014, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 445, 3788
- Gunn J. E., Gott III J. R., 1972, *The Astrophysical Journal*, 176, 1
- Hobson M. P., Efstathiou G. P., Lasenby A. N., 2006, *General Relativity: An Introduction for Physicists*. Cambridge University Press, [doi:10.1017/CBO9780511790904](https://doi.org/10.1017/CBO9780511790904)
- Hénon M., 1970, *Astronomy & Astrophysics*, 9, 24
- King I., 1962, *Astronomical Journal*, 67, 471
- Klein O., 1949, *Reviews of Modern Physics*, 21, 531
- Koposov S. E., Rix H.-W., Hogg D. W., 2010, *The Astrophysical Journal*, 712, 260
- Kuzma P. B., Da Costa G. S., Keller S. C., Maunder E., 2014, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 446, 3297
- Küpper A. H. W., Lane R. R., Heggie D. C., 2012, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 420, 2700
- Malhan K., Ibata R. A., 2019, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 486, 2995
- Navarro J. F., Frenk C. S., White S. D. M., 1996, *The Astrophysical Journal*, 462, 563
- Odenkirchen M., et al., 2003, *Astronomical Journal*, 126, 2385
- Reid M. J., Pesce D. W., Riess A. G., 2019, *The Astrophysical Journal*, 886, L27
- Rubin V. C., Kent Ford W. J., Thonnard N., 1980, *Astronomical Journal*, 238, 471
- Ruffini R., Argüelles C. R., Fraga B. M. O., Geralico A., Quevedo H., Rueda J. A., Siutsou I., 2013, *International Journal of Modern Physics D*, 22, 1360008
- Schumann M., 2019, *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 46, 103003
- Sofue Y., 2013, *Publications of the Astronomical Society of Japan*, 65, 1
- Tisserand P., et al., 2007, *Astronomy & Astrophysics*, 469, 387
- Tolman R. C., 1930, *Physical Review Journals Archive*, 35, 904
- Varghese A., Ibata R., Lewis G. F., 2011, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 417, 198

BIBLIOGRAFÍA

Vasiliev E., Belokurov V., 2020, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 497, 4162

Weinberg S., 1972, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley & Sons