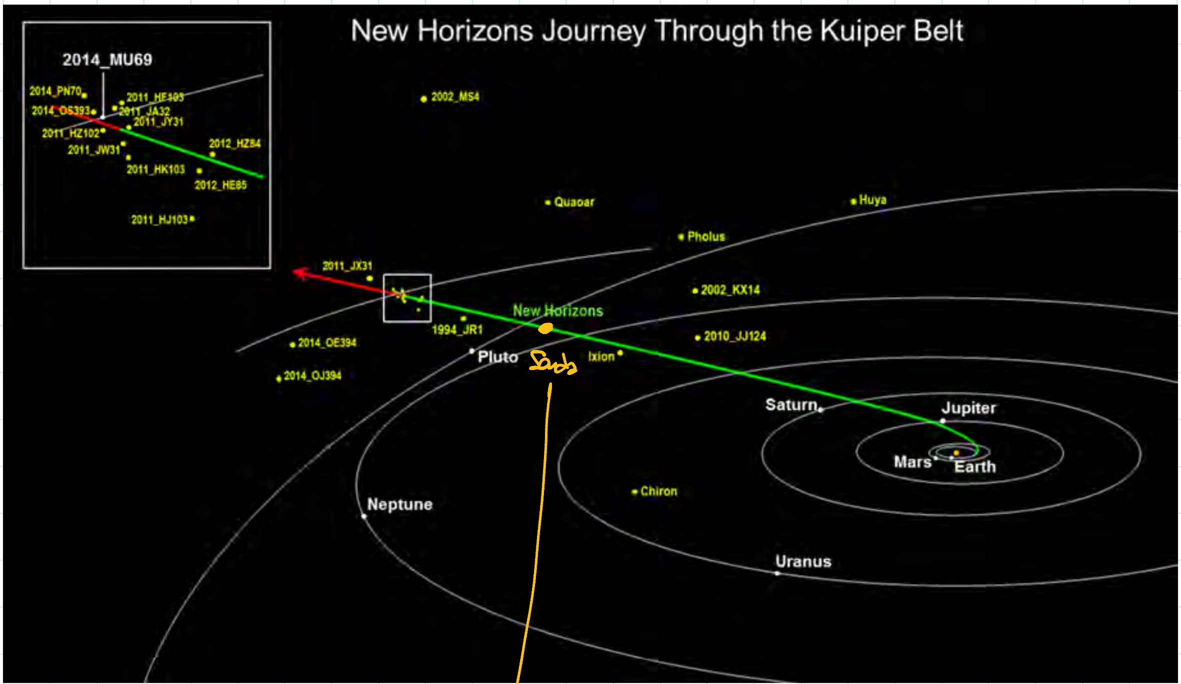
Espacios Vectoriales

lunes, 15 de marzo de 2021 11:49

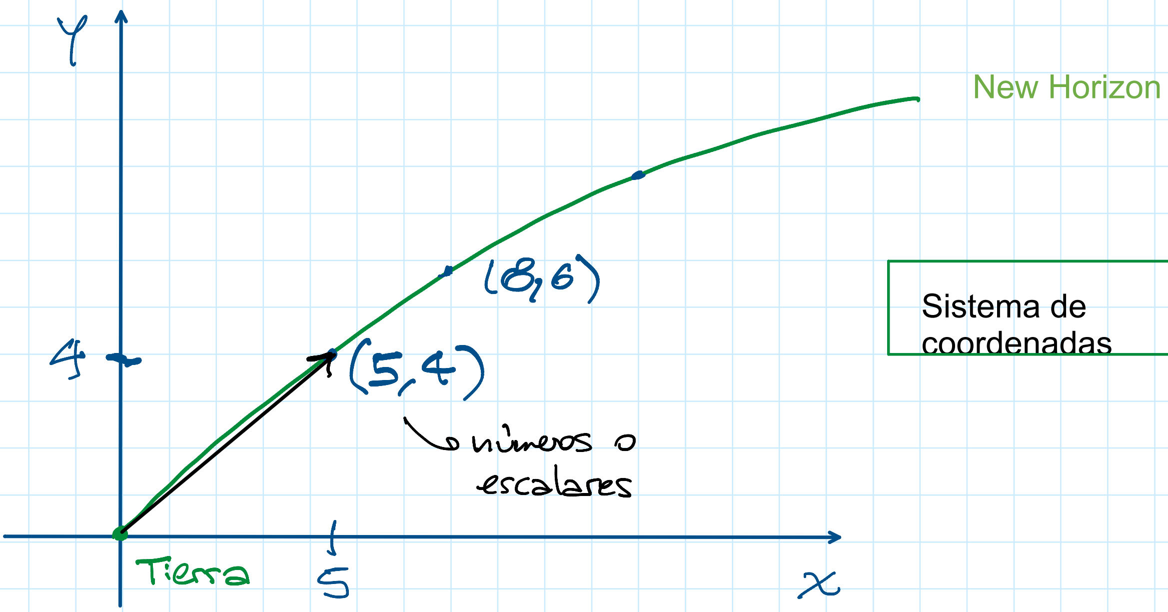
Comencemos considerando un problema concreto:

Al enviar la sonda *New Horizon* a Plutón, necesitamos conocer información precisa sobre su trayectoria, velocidad, etc.

¿Qué herramientas usamos (ingenuamente) para tener esa información?



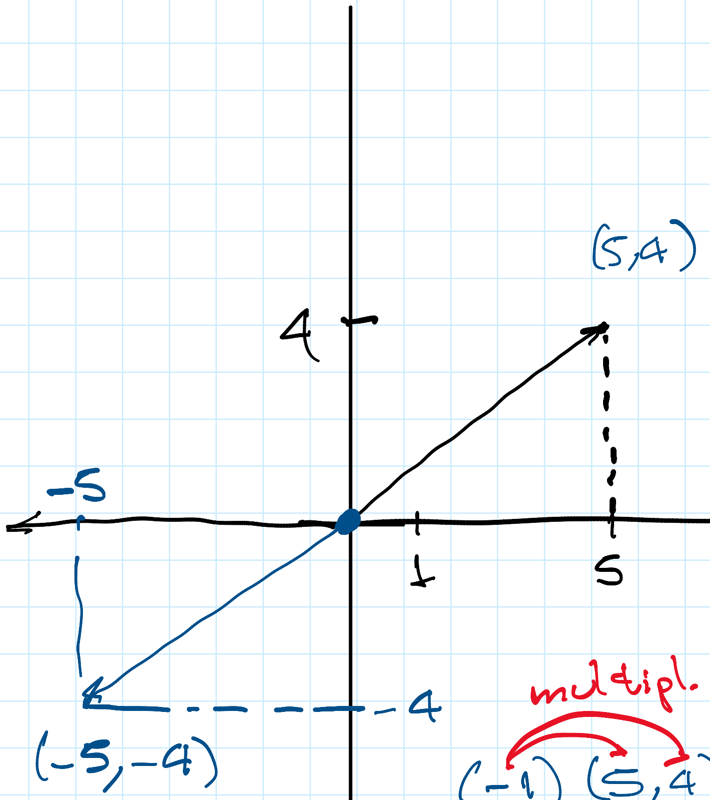
Sistema de referencia



Sistema de coordenadas

Idea: - representar el punto con coordenadas

- para representar las coordenadas necesitamos números o escalares
- Una forma geométrica de interpretar las coordenadas es con flechas



La flecha mide $\sqrt{25+16}=\sqrt{41}$

multipl.

$(-1)(5,4)=(-5,-4)$

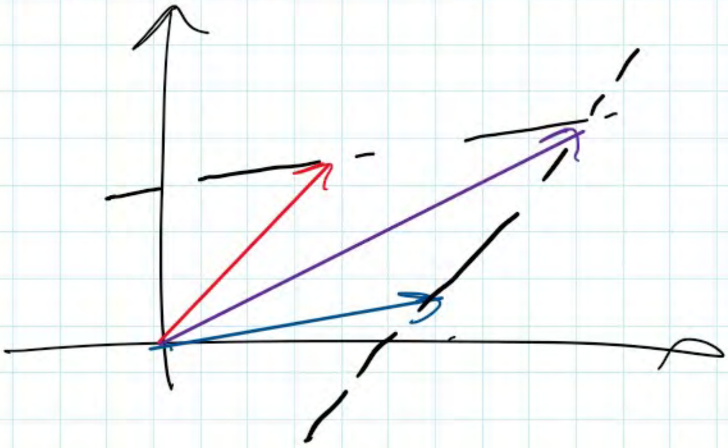
Cambio la longitud a 1: $\frac{1}{\sqrt{41}}(5,4)$ mide $\underline{\underline{1}}$

¿Qué es un vector?

$$\vec{v} = (2,0,-\frac{1}{4})$$

$[1,0,0,0,1]$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$



Recordemos que un cuerpo $\mathbb{k}$ (de escalares) es un conjunto con dos operaciones binarias

$$+ : \mathbb{k} \times \mathbb{k} \to \mathbb{k}, \qquad (a,b) \mapsto a+b \qquad \text{suma}$$

$$\cdot : \mathbb{k} \times \mathbb{k} \to \mathbb{k} \qquad (a,b) \mapsto a \cdot b \qquad \text{producto}$$

que satisfacen las siguientes propiedades:

S1) La suma es *asociativa:*

$$(a+b)+c = a+(b+c) \qquad \text{para todo } a,b,c \in \mathbb{k}$$

S2) La suma es *conmutativa:*

$$a + b = b + a \qquad \text{para todo } a, b \in \Bbbk$$

S3) La suma tiene un *elemento neutro*:

Existe un elemento en $\Bbbk$, que como resulta ser único (se prueba) lo llamamos 0, que cumple que

Si $\bar{0}$ es otro elem. neutro

$$a + 0 = 0 + a = a \qquad \text{para todo } a \in \Bbbk$$

$0 = 0 + \bar{0} = \bar{0}$

S4) Todo elemento $a \in \Bbbk$ tiene un *elemento opuesto*:

Para todo $a \in \Bbbk$, existe $a' \in \Bbbk$ que cumple que

$$a + a' = 0 = a' + a$$

Como este a' resulta ser único (se prueba), se denota por $a' = -a$.

Niels Henrik Abel
(1802-1829)
Abel Prize

Bajo estas propiedades, decimos que $(\Bbbk, +)$ es un **grupo abeliano**.

P1) El producto es *asociativo*:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \qquad \text{para todo } a, b, c \in \Bbbk$$

P2) El producto es *conmutativo:*

$$a \cdot b = b \cdot a \qquad \text{para todo } a, b \in \Bbbk$$

P3) El producto tiene un *elemento neutro*:

Existe un elemento en $\Bbbk$, que como resulta ser único (se prueba) lo llamamos 1, que cumple que

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \qquad \text{para todo } a \in \Bbbk$$

P4) Todo elemento $a \in \Bbbk$ tiene un *elemento inverso*:

Para todo $a \in \Bbbk - \{0\}$, existe $\tilde{a} \in \Bbbk$ que cumple que

$$a \cdot \tilde{a} = 1 = \tilde{a} \cdot a$$

Como este $\tilde{a}$ resulta ser único (se prueba), se denota por $\tilde{a} = a^{-1}$.

Bajo estas propiedades, resulta que $(\mathbb{k}-\{0\},\cdot)$ es también un **grupo abeliano.**

Ambas estructuras son compatibles:

D) Propiedad distributiva:

$(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$ para todo $a, b, c \in \mathbb{k}$

Ejemplos:

1) $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ números racionales
con $\begin{cases}\text{suma usual}\\ \text{producto usual}\end{cases}$

2) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ números reales
(idem)

3) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ números complejos

4) $\mathbb{N}$ no es un cuerpo ($\nexists$ opuestos)

5) $\mathbb{Z}$ no es un cuerpo ($\nexists$ inversos)

6) $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_p$, p número primo

$\underline{p=2}$, $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

$\underline{p = 3}$ $\qquad \mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

·	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Definición
Sea $\Bbbk$ un cuerpo. Un $\Bbbk$-*espacio vectorial* es un conjunto V provisto de dos operaciones:

$+ : V \times V \to V,$ $\qquad (v, w) \mapsto v + w$ $\qquad$ suma (vectorial)

$\cdot : \Bbbk \times V \to V$ $\qquad (a, v) \mapsto a \cdot v$ $\qquad$ producto por escalar

que satisfacen las siguientes propiedades:

S) $(V, +)$ es un grupo abeliano:

Esto es, se tiene que

S1) La suma es *asociativa:*

$$(v + w) + z = v + (w + z) \qquad \text{para todo } v, w, z \in V$$

S2) La suma es *conmutativa:*

$$v + w = w + v \qquad \text{para todo } v, w \in V$$

S3) La suma tiene un *elemento neutro*:

Existe un elemento en V, que como resulta ser único (se prueba) lo llamamos $\mathbf{0}$, que cumple que

$$v + \mathbf{0} = \mathbf{0} + v = v \qquad \text{para todo } v \in V$$

Si $0'$ es otro elemento neutro, tenemos que

que cumple que

$$v + \mathbf{0} = \mathbf{0} + v = v \qquad \text{para todo } v \in V$$

Si $\varnothing$ es otro elem. neutro, tenemos que

$$0 = 0 + \varnothing = \varnothing$$

S4) Todo elemento $v \in V$ tiene un *elemento opuesto*:

Para todo $v \in V$, existe $v' \in \mathrm{V}$ que cumple que

$$v + v' = \mathbf{0} = v' + v$$

Como este v' resulta ser único (se prueba), se denota por $v' = -v$.

Si $v \in V$ y $\bar{v}$ es otro opuesto, tenemos

$$\bar{v} = \bar{v} + 0 = \bar{v} + (v + v') = (\bar{v} + v) + v' = 0 + v' = v'$$

PE) El producto por escalar define una **acción** de $\mathbb{k}$ en V:

P1) El $1 \in \mathbb{k}$ *actúa* como la identidad:

$$1 \cdot v = v \qquad \text{para todo } v \in V$$

P2) La acción es *asociativa:*

$$a \cdot (b \cdot v) = (ab) \cdot v \qquad \text{para todo } a, b \in \mathbb{k}, v \in V$$

P3) La acción es compatible con la suma en $\mathbb{k}$ (distributiva):

$$(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v \qquad \text{para todo } a, b \in \mathbb{k}, v \in V$$

D) La acción es compatible con la suma en V (distributiva):

$$a \cdot (v + w) = a \cdot v + a \cdot w \qquad \text{para todo } a \in \mathbb{k}, v, w \in V$$

Notación: Los elementos de un espacio vectorial se denominan ***vectores***

Observación:
Un espacio vectorial nunca es vacío como conjunto, pues al ser un grupo abeliano, posee al elemento neutro **0**.

Ejemplos:

1) $\mathbb{k}^n$, **con** $n \in \mathbb{N}$ **un número natural** , $\mathbb{k}$ cuerpo

1) $\mathbb{k}^n$, **con** $n \in \mathbb{N}$ **un número natural**, $\mathbb{k}$ cuerpo

$$\mathbb{k}^n = \underbrace{\mathbb{k}\times\mathbb{k}\times\dots\times\mathbb{k}}_{n\text{-veces}} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{k}\}$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1+y_1, \dots, x_n+y_n)$$

$$0 = (0, 0, \dots, 0)$$

$$-(x_1, \dots, x_n) = (-x_1, \dots, -x_n)$$

$$\lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

Si $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, $n = 3$

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

$$(x, y, z) \underset{\text{suma}}{+} (a, b, c) = (x+a, y+b, z+c)$$

$$\underset{\text{neutro}}{0} = (0, 0, 0)$$

$$-(x, y, z) = (-x, -y, -z)$$
opuesto

$$\lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$$
prod. por escalar

2) $\mathbb{k}^{n\times m}$ con $n, m \in \mathbb{N}$ números naturales.

Si $n = m$, escribimos $\mathbb{k}^{n\times m} = M_n(\mathbb{k}) =$ matrices de tamaño $n \times n$.

$\mathbb{k} = \mathbb{R}$, $n = 3$, $m = 2$

$$\mathbb{R}^{3\times 2} = \left\{ \underset{A}{\underset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}}} \;\middle|\; a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$$

Suma = coordenada a coordenada

suma = coordenada a coordenada

neutro = $\emptyset = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

opuesto = opuesto de cada coord.

producto por escalar = producto por el escalar en cada coordenada

3. Polinomios sobre un cuerpo $\mathbb{k}$.

$$P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$$

$$Q = \sum_{j=0}^{m} b_j X^j = b_0 + b_1 X + \dots + b_m X^m$$

(podemos suponer que $n = m$, de lo contrario completamos con coeficientes iguales a 0)

$$P+Q = (a_0+b_0) + (a_1+b_1)X + \dots + (a_n+b_n)X^n$$

neutro $\emptyset$ = polinomio 0 = $0 + 0X + 0X^2 + \dots$

opuesto $-P = -a_0 - a_1 X - \dots - a_n X^n$

producto por escalar $\lambda \cdot P = \lambda a_0 + \lambda a_1 X + \dots + \lambda a_n X^n$

4. Consideremos un conjunto X no vacío cualquiera, y el conjunto

$X^{\mathbb{k}} = \{f : X \to \mathbb{k} \mid f \text{ función }\}$

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$$

suma en $\mathbb{k}$

$$0(x) = 0 \quad \forall x \in X$$

$$(-f)(x) = -f(x) \quad \forall x \in X$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x) \quad \forall x \in X$$

Subespacios Vectoriales

miércoles, 17 de marzo de 2021 14:08

Definición

Sea $\Bbbk$ un cuerpo. Un *subespacio vectorial* de un $\Bbbk$-espacio vectorial V es un subconjuto $W \subseteq V$ tal que con las operaciones de suma vectorial y producto por escalar sobre V, pero restringidas a W, es un $\Bbbk$-espacio vectorial en sí mismo.

Es decir, tenemos que las operaciones

$$+ : W \times W \to W, \qquad (u, w) \mapsto u + w$$

$$\cdot : \Bbbk \times W \to W \qquad (a, w) \mapsto a \cdot w$$

tienen su imagen en W y como tales satisfacen los axiomas de espacio vectorial dadas más arriba.

En particular, $\mathbf{0} \in W$ para todo subespacio.

Ejemplos:

0) Dado un $\Bbbk$-espacio vectorial V, los subespacios triviales son

$W = \{0\}$ $\quad 0+0=0, \quad \lambda \cdot 0 = 0$

$W = V$.

$$\lambda \cdot 0 = \lambda(0+0) = \lambda\cdot 0 + \lambda \cdot 0$$
$$\Rightarrow \lambda\cdot 0 + (-\lambda 0) = \lambda \cdot 0 + \underbrace{\lambda 0 + (-\lambda 0)}$$
$$\Rightarrow \boxed{0 = \lambda\cdot 0 + 0 = \lambda \cdot 0}$$

1) Polinomios de grado menor o igual a n con $n \in \mathbb{N}$ cualquier número natural, con el polinomio nulo.

Si $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n, \quad a_i \in \mathbb{R}$

$Q = b_0 + b_1X + b_2X^2 + \cdots + b_mX^m, \quad b_i \in \mathbb{R} \quad (m \leq n)$

(podemos suponer que $n = m$, porque de lo contrario completamos los coef. con 0's)

$\operatorname{gr} P = n, \quad \operatorname{gr} Q = m$

$\operatorname{gr}(P+Q) \leq \max\{n, m\}$

$P + Q = (a_0+b_0) + (a_1+b_1)X + \cdots + (a_n+b_n)X^n \in W$

Si $\lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \cdot P = \lambda(a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n)$

$= \lambda a_0 + \lambda a_1 X + \cdots + \lambda a_n X^n$

$\Rightarrow \operatorname{gr} \lambda P = n \quad$ si $\lambda \neq 0$

$0 \cdot P = 0$ polinomio (no tiene grado!)

$\underline{n=2}$ $P_2 = \{$pol. grado $\leq 2\} \cup \{0\}$

$P = a x^2 + b x + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$

1. $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{k})$ = Matrices de traza nula de $M_n(\mathbb{k})$

$= \{A \in M_n(\mathbb{k}) \mid \operatorname{tr}(A) = 0\}$

Si $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, $\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

Sup que $A, B \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{k})$, entonces

$\operatorname{tr}(A+B) = (a_{11}+b_{11}) + \cdots + (a_{nn}+b_{nn})$

$= (a_{11} + \cdots + a_{nn}) + (b_{11} + \cdots + b_{nn})$

$= \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B) = 0 + 0 = 0$

$\Rightarrow A + B \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{k})$

Si $\lambda \in \mathbb{k}$ y $A \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{k})$, entonces

$\operatorname{tr}(\lambda \cdot A) = \lambda a_{11} + \lambda a_{22} + \cdots + \lambda a_{nn}$

$= \lambda(a_{11} + \cdots + a_{nn})$

$= \lambda \operatorname{Tr}(A) = \lambda \cdot 0 = 0$

$\Rightarrow \lambda \cdot A \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{k})$

Teorema
Sean $\mathbb{k}$ un cuerpo y V un $\mathbb{k}$-espacio vectorial. Un subconjunto $W \subseteq V$ es un subespacio vectorial si y sólo si para todo $u, w \in W, a \in \mathbb{k}$ vale que

$$a \cdot u + w \in W$$

Demostración

$\Rightarrow$) Sup que W es un subespacio de V

Eso quiere decir que W con las operaciones

$\Rightarrow$) Sup que W es un subespacio de V

Eso quiere decir que W con las operaciones de $+$ y $\cdot$ de V restringidas, es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Así, si $a \in \mathbb{K}$ y $u \in W \Rightarrow a \cdot u \in W$

También, si $w \in W$ tenemos que $(a \cdot u) + w \in W$ y se cumple la condición.

$\Leftarrow$) Supongamos que $\forall a \in \mathbb{K}, u, w \in W$ se cumple que

$$a \cdot u + w \in W$$

Así, si tomamos $a = 1$ tenemos

$$u + w \in W \quad \forall u, w \in W$$

$\Rightarrow \quad + : W \times W \longrightarrow W$ define una suma.

Análogamente, si tomamos $a = -1$ y $u = w$, tenemos

$$0 = (-1)u + u \in W$$

Tomemos ahora $w = 0$: $a \cdot u \in W$ $\forall a \in \mathbb{K}$ y $u \in W$.

Por lo tanto, se tiene que

$\cdot : \mathbb{K} \times W \longrightarrow W$ producto por escalar

está definido en W

Como las operaciones definidas arriba son restricciones de operaciones en V, que es un espacio vectorial, valen todos los axiomas de la definición de espacio vectorial (pues ya valen para V por hipótesis)

∎

Observación

Notar que la condición

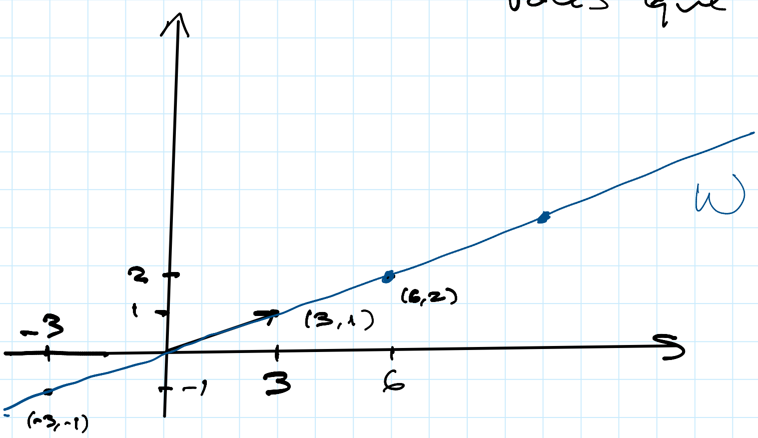
$$a \cdot u + w \in W \qquad \text{para todo } a \in \mathbb{k}, u, w \in W$$

es equivalente a que se cumplan las dos condiciones

$$a \cdot u \in W \qquad \text{para todo } a \in \mathbb{k}, u \in W$$
$$u + w \in W \qquad \text{para todo } u, w \in W$$

Ejemplos:

1) $V = \mathbb{R}^2, W = \{\lambda(3,1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$



Si $u, w \in W \Rightarrow \exists\, a, b \in \mathbb{R}$ tales que $u = a(3,1)$

$w = b(3,1)$

$\Rightarrow u + w = a(3,1) + b(3,1) = \underbrace{(a+b)}_{\in \mathbb{R}}(3,1)$

$\Rightarrow u + w \in W$

Si $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda u = \lambda(a(3,1))$

$= \underbrace{(\lambda a)}_{\in \mathbb{R}}(3,1)$

$\Rightarrow \lambda u \in W$

1) $S_n(\mathbb{k})$ = Matrices simétricas de $M_n(\mathbb{k})$

$= \{A \in M_n(\mathbb{k}) \mid A^t = A\}$

Recordar que $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{22} & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

por ej, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ es <u>simétrica</u>

Si $A, B \in S_n(\mathbb{k}) \Rightarrow A^t = A,\ B^t = B$

Pero $(A+B)^t = A^t + B^t = A + B$

$\Rightarrow A+B \in S_n(\mathbb{k})$

Además, si $\lambda \in \mathbb{k}$, vale que

$$(\lambda A)^t = \lambda A^t = \lambda A \in S_n(\mathbb{k})$$

2) $\mathfrak{o}_n(\mathbb{k})$ = Matrices anti-simétricas de $M_n(\mathbb{k})$

$= \{A \in M_n(\mathbb{k}) \mid A^t + A = 0\}$

$\overline{A^t} = -A$

$\boxed{\text{Ejercicio}}$

3) $C(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \text{f es continua}\}$

Es un subespacio del $\mathbb{R}$-esp. vectorial $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ de todas las funciones pues suma de funciones continuas es pues suma de funciones continuas es continua y el producto de un escalar por una función continua es continua.

4) $D(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \text{f es derivable}\}$

Misma demostración que antes.

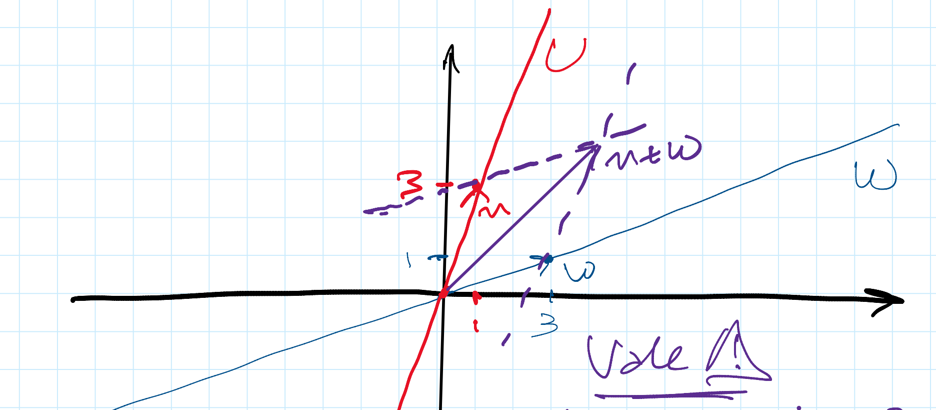
Definición

Supongamos que V es un $\mathbb{k}$-espacio vectorial y $U, W \subseteq V$ son dos subespacios.
Se define la **suma $U + W$** como el conjunto

$$U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$$

Ejemplo:

$V = \mathbb{R}^2$, $W = \{\lambda(3,1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, $U = \{\lambda(1,3) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$



Todo vector de $\mathbb{R}^2$ es suma de múltiplos de u y w

Si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, quiero ver que

$\exists$ a y $b \in \mathbb{R}$ tales que

$(x,y) = a(1,3) + b(3,1)$

$\Rightarrow$ $(x,y) = (a + b.3, a.3 + b)$

$\Rightarrow$ $\begin{cases} x = 1a + 3b \end{cases}$ Sistema lineal

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1a + 3b \\ y = 3a + 1b \end{cases}$$ sistema lineal de coordenadas

El sistema tiene única solución si

$$1-9 = \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

Así, $U + W = \mathbb{R}^2$

Proposición
Supongamos que V es un $\mathbb{k}$-espacio vectorial y $U, W \subseteq V$ son dos subespacios. Entonces $U + W$ y $U \cap W$ son dos subespacios de V.

Más aún, si $\{W_i\}_{i \in I}$ es una familia de subespacios de V, entonces

$$\bigcap_{i \in I} W_i$$

es un subespacio de V.

Demostración

Probemos primero que $U+W$ es un subespacio

Sean $\alpha, \beta \in U+W \Rightarrow \exists\, u_1, u_2 \in U$
$w_1, w_2 \in W$

tales que $\alpha = u_1 + w_1$, $\beta = u_2 + w_2$

Así, $\alpha + \beta = (u_1 + w_1) + (u_2 + w_2) =$
$= \underbrace{(u_1 + u_2)}_{\in U} + \underbrace{(w_1 + w_2)}_{\in W} \in U + W$

Si $\lambda \in \mathbb{k}$, entonces

$$\lambda \alpha = \lambda(u_1 + w_1) = \underbrace{\lambda u_1}_{\in U} + \underbrace{\lambda w_1}_{\in W} \in U + W$$

$\Rightarrow$ $U+W$ es un subespacio.

Supongamos ahora que $\{W_i\}_{i \in I}$ es una familia de subespacios de V y consideremos el conjunto dado por la

Consideremos el conjunto dado por la intersección $\bigcap_{i\in I} W_i$

Sean $\alpha, \beta \in \bigcap_{i\in I} W_i \Rightarrow \begin{cases} \alpha \in W_i, \forall i\in I \\ \beta \in W_i, \forall i \in I \end{cases}$

$\Rightarrow \alpha+\beta \in W_i \quad \forall i \in I$

pues cada W_i es un subespacio

$\Rightarrow \alpha+\beta \in \bigcap_{i\in I} W_i$.

Consideremos ahora $\lambda \in \mathbb{k}$. Entonces como $\alpha \in W_i \quad \forall i \in I$, se tiene que $\lambda\alpha \in W_i, \forall i \in I \Rightarrow \lambda\alpha \in \bigcap_{i\in I} W_i$

Por lo tanto, $\bigcap_{i\in I} W_i$ es un subespacio

■

¿Cuál es la mejor forma de describir un subespacio?

Depende para qué se lo quiera usar.

Subespacio generado

Sea V un $\mathbb{k}$-espacio vectorial y $S \subseteq V$ un subconjunto no vacío de V.

Entonces el subespacio de V generado por S se define por

$$\langle S\rangle = \cap_{W\supseteq S} W \qquad W \text{ subespacio de } V$$

Cuando $S = \{v_1, \cdots, v_n\}$ es un conjunto finito de vectores, decimos que el subespacio W es el subespacio generado por $v_1, \cdots, v_n$. $\langle S \rangle = \langle v_1, .., v_n \rangle$

Para describir de una forma mas explícita el subespacio generado, necesitamos la siguiente definición:

Ej unos $\mathbb{R}^2 = \langle (1,3), (3,1) \rangle$

Bases y dimensión

jueves, 18 de marzo de 2021 13:21

Subespacio generado

Sea V un $\Bbbk$-espacio vectorial y $S \subseteq V$ un subconjunto no vacío de V.

Entonces el subespacio de V generado por S se define por

$$\langle S \rangle = \cap_{W \supseteq S} W \qquad W \text{ subespacio de } V$$

Cuando $S = \{v_1, \cdots, v_n\}$ es un conjunto finito de vectores, decimos que el subespacio

W es el subespacio generado por $v_1, \cdots, v_n$ y escribimos $W = \langle v_1, \cdots, v_n \rangle$.

Para describir de una forma mas explícita el subespacio generado, necesitamos la siguiente definición:

Definición
Sea V un $\Bbbk$-espacio vectorial y $v \in V$ un vector.
Se dice que v es **combinación lineal** de los vectores $v_1, \cdots, v_n \in V$ si existen escalares $a_1, \cdots, a_n \in \Bbbk$ tales que

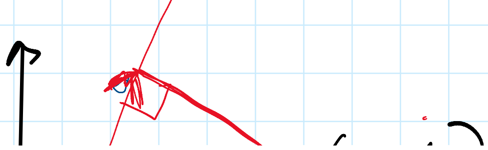
$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$$

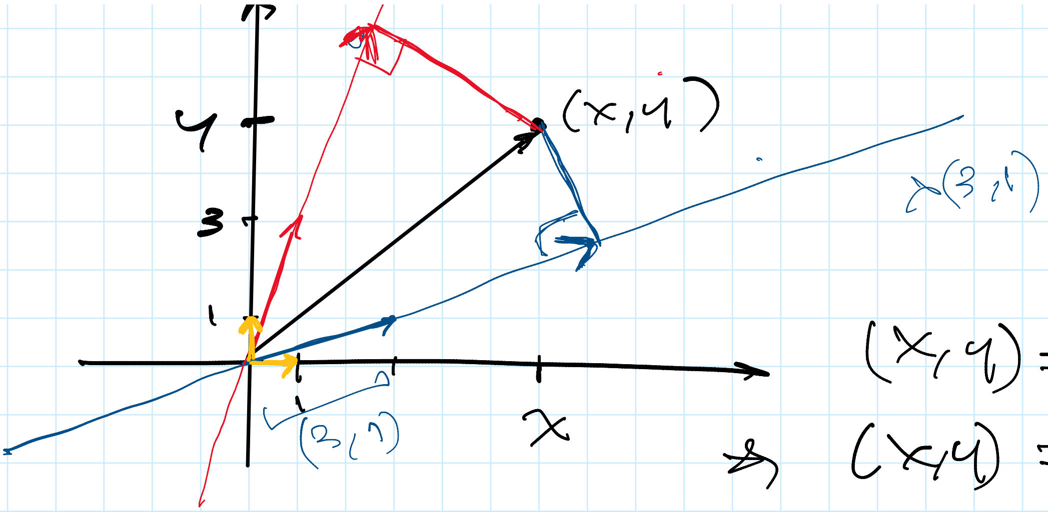
Ejemplos:

1) Todo vector $(a_1, \cdots, a_n) \in \Bbbk^n$ es combinación lineal de los vectores $v_1 = (1, 0, \cdots, 0), v_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0), \ldots, v_n = (0, 0, \ldots, 1)$.

$$(a_1, \ldots, a_n) = (a_1, 0, 0, \ldots, 0) + (0, a_2, 0, \ldots, 0) + (0, 0, \ldots, a_n)$$
$$= a_1(1, 0, 0, \ldots, 0) + a_2(0, 1, 0, \ldots, 0) + a_n(0, 0, \ldots, 1)$$

Todo vector de $\mathbb{R}^2$ es combinación lineal de $v_1 = (3, 1), v_2 = (1, 3)$.





$$(x,y) = a(3,1) + b(1,3)$$

$$\Rightarrow (x,y) = (3a+b,\ a+3b)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 3a+b \\ y = a+3b \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & x \\ 1 & 3 & y \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & y \\ 3 & 1 & x \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 - 3F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & y \\ 0 & -8 & x-3y \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & y \\ 0 & 1 & \frac{x-3y}{-8} \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 - 3F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & y + \frac{3}{8}(x-3y) \\ 0 & 1 & \frac{x-3y}{-8} \end{array}\right)$$

$$a = y + \frac{3}{8}(x-3y) = \underbrace{\frac{3}{8}x - \frac{1}{8}y} \qquad -\frac{1}{8}$$

$$b = \underbrace{-\frac{1}{8}x + \frac{3}{8}y} \qquad \frac{3}{8} \qquad x=0,\ y=1$$

$$(x,y) = \left(\frac{3}{8}x - \frac{1}{8}y\right)(3,1) + \left(-\frac{1}{8}x + \frac{3}{8}y\right)(1,3)$$

$$(1,0) = \frac{3}{8}(3,1) + \left(-\frac{1}{8}\right)(1,3)$$

2) Todo polinomio de grado menor o igual a n es combinación lineal de los vectores (monomios) $1, X, X^2, \dots, X^n$.

Todo polinomio es de la forma

$$P = \underbrace{a_0}_{\in \Bbbk} 1 + \underbrace{a_1}_{\in \Bbbk} X + a_2 X^2 + \dots + a_n X^n$$

que es una combinación lineal de los monomios!

Ejercicio ¿Se puede escribir un polinomio de grado $\leq n$ como comb. lineal de los polinomios $1, (X-1), (X-1)^2, \dots, (X-1)^n$?

(Taylor)

Teorema

El subespacio generado por un subconjunto S no vacío de un $\Bbbk$-espacio vectorial V es el conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores de S.

En particular, si $S = \{v_1, \cdots, v_n\}$ entonces

$$\langle v_1, \cdots, v_n \rangle = \{v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \mid a_1, \dots, a_n \in \Bbbk\}$$

Demostración

Recordemos que el subespacio generado por el conjunto S es $\langle S \rangle = \bigcap_{W \supseteq S} W$, W subespacio de V.

Consideremos el conjunto

$$Z = \{\text{comb. lineales de vectores de } S\}$$

Veamos

1) Z es un subespacio (que contiene a S)

2) $Z = \langle S \rangle$.

1) Tomemos dos vectores de Z, v y w

$\Rightarrow$ existen elementos de S:
$s_1, s_2, \ldots, s_n$, $t_1, t_2, \ldots, t_m$ y escalares
$a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_m$ tales que

$$v = a_1 s_1 + a_2 s_2 + \cdots + a_n s_n$$

$$w = b_1 t_1 + b_2 t_2 + \cdots + b_m t_m$$

$$\Rightarrow v + w = (a_1 s_1 + \cdots + a_n s_n) + (b_1 t_1 + \cdots + b_m t_m)$$

$$= a_1 s_1 + \cdots + a_n s_n + b_1 t_1 + \cdots + b_m t_m$$

combinación lineal de elem. de S! $\Rightarrow v + w \in Z$

Análog, si $\lambda \in \mathbb{K}$, tenemos que

$$\lambda v = \lambda (a_1 s_1 + \cdots + a_n s_n)$$

$$= \lambda(a_1 s_1) + \cdots + \lambda(a_n s_n)$$

$= \lambda(a_1 s_1) + \cdots + \lambda(a_n s_n)$
$= (\lambda a_1) s_1 + \cdots + (\lambda a_n) s_n \in Z$

$\Rightarrow$ Z es un subespacio de V.
Más aún, contiene al conjunto S
pues si $s \in S$ entonces $s \in Z$
porque $s = 1 \cdot s$ comb. lineal de un vector

2) Como Z es un subespacio que contiene a S, vale que

$$Z \supseteq \bigcap_{W \supseteq S} W \quad , \; W \text{ subespacio de } V$$

$\Rightarrow$ $Z \supseteq \langle S \rangle$

Recíprocamente, todo elemento de Z es comb. lineal de elementos de S.
Pero, si $S \subseteq W$, con W subesp. de V, entonces toda comb. lineal de elem. de S es un elemento de W.
Así, probamos que todo elemento de Z es un elemento de W, $\forall W$

$$Z \subseteq \bigcap_{W \supseteq S} W = \langle S \rangle$$

Luego $Z = \langle S \rangle$

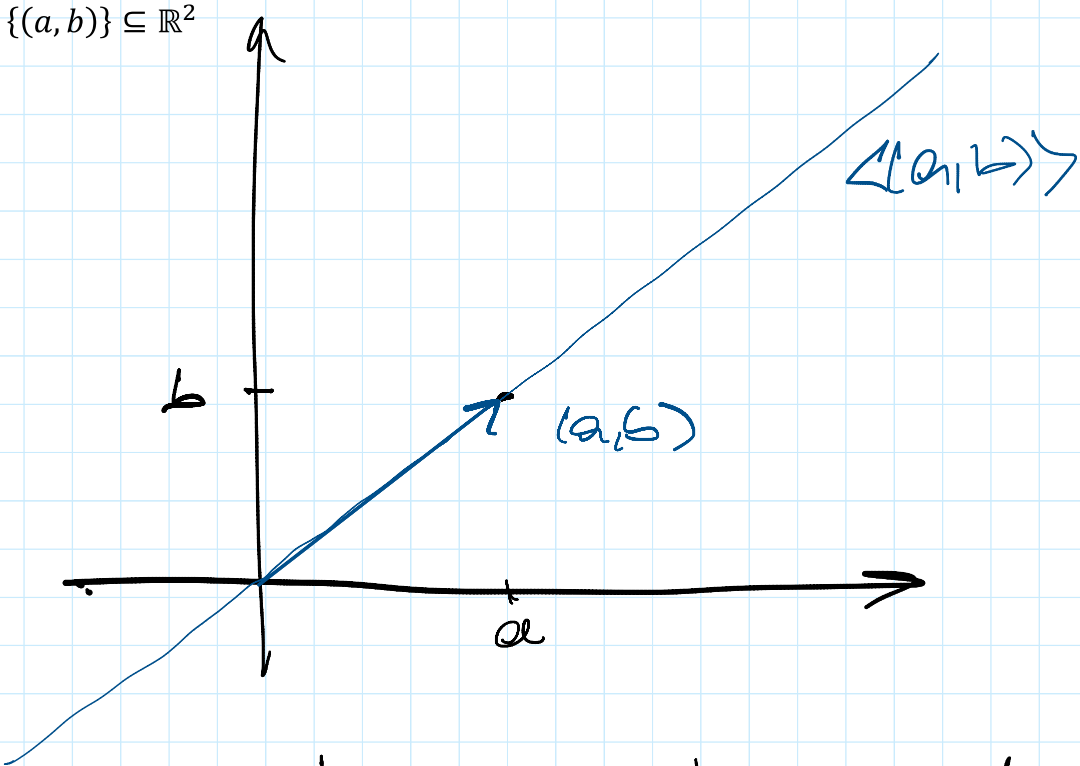
$W \supset S$

luego, $Z = \langle S \rangle$

∎

Ejemplos:

1) $S = \{(a,b)\} \subseteq \mathbb{R}^2$



$$\langle (a,b) \rangle = \{ \lambda (a,b) \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$$

2) $S = \{(1,-1,0,0),(0,1,-1,2)\} \subseteq \mathbb{R}^4$

$$\langle S \rangle = \langle (1,-1,0,0),(0,1,-1,2) \rangle$$
$$= \{ a(1,-1,0,0) + b(0,1,-1,2) \mid a,b \in \mathbb{R} \}$$

$(0,0,0,0) = 0(1,-1,0,0) + 0(0,1,-1,2)$

Si $(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4$, ¿cómo se si pertenece a $\langle S \rangle$?

Si pertenece, $\exists\, a, b \in \mathbb{R}$ tales que

$$(x_1,x_2,x_3,x_4) = a(1,-1,0,0) + b(0,1,-1,2)$$

$$= (a, -a+b, -b, 2b)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = -a+b \\ x_3 = -b \\ x_4 = 2b \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{cc} a & b \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ -1 & 1 & x_2 \\ 0 & -1 & x_3 \\ 0 & 2 & x_4 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ -1 & 1 & x_2 \\ 0 & -1 & x_3 \\ 0 & 2 & x_4 \end{array}\right) \xrightarrow[-F_3]{F_1+F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_1+x_2 \\ 0 & 1 & -x_3 \\ 0 & 2 & x_4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_4-2F_2]{F_3-F_2} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} a & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_1+x_2 \\ 0 & 0 & -x_3-x_1-x_2 \\ 0 & 0 & x_4-2x_1-2x_2 \end{array}\right) \end{array}$$

Condiciones que debe satisfacer (x_1,x_2,x_3,x_4) para ser vector de $\langle S \rangle$

$\Rightarrow a = x_1, \quad b = x_1+x_2$

$\Rightarrow \langle S \rangle = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \;\middle|\; \begin{cases} -x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \right\}$

Por ejemplo, $(1,-1,0,0) \in \langle S \rangle$

$-1-(-1)-0=0$ ✓

$-2(1)-2(-1)+0=0$ ✓

$(1,-1,0,0) = 1\,(1,-1,0,0) + (1+(-1))(0,1,-1,2)$

Bases

Definición
Sea V un $\mathbb{k}$-espacio vectorial y $S \subseteq V$ un subconjunto no vacío.
Se dice que S es ***linealmente dependiente*** *(ld)* si existen vectores $v_1, \cdots, v_n \in S$ y escalares $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{k}$ no todos nulos tales que

$$\mathbf{0} = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$$

Es decir, el vector $\mathbf{0}$ se escribe como una combinación lineal no trivial de vectores de S.

Decimos que S es ***linealmente independiente*** *(li)* si **no** es linealmente dependiente.

Es decir, si existen vectores $v_1, \cdots, v_n \in S$ y escalares $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{k}$ tales que

$$\mathbf{0} = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$$

debe suceder necesariamente que $a_1 = 0, \cdots, a_n = 0$.

Ejemplos:

0) Los vectores $v_1 = (1, 0, \cdots, 0), v_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0), \ldots, v_n = (0, 0, \ldots, 1)$ son linealmente independientes

Sup que $(0,0,\ldots,0) = a_1(1,0,\ldots,0) + \ldots + a_n(0,\ldots,1)$

para ciertos $a_1, \ldots, a_n$ escalares.

Pero entonces, tenemos

$$(0,0,\ldots,0) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

$\Rightarrow 0 = a_1, \ldots, 0 = a_n \Rightarrow \{v_1, \ldots, v_n\}$ es l.i.

1. Los vectores $v_1 = (3, 1), v_2 = (1, 3)$ son linealmente independientes, pero los vectores $v_1 = (3, 1), v_2 = (1, 3), v_3 = (0, 1)$ son linealmente dependientes

pues

$$(0,0) = 1.(0,1) - \left(-\frac{1}{8}\right)(3,1) - \frac{3}{8}(1,3)$$

2. Dos vectores $v, w \in V$ de un $\mathbb{k}$-espacio vectorial V son linealmente dependientes si y sólo si existe $\lambda \in \mathbb{k}$ tal que $\lambda v = w$.

<u>Ejercicio</u>

$(3,1)$ y $(1,3)$ son l.i

$\nexists\ \lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda(3,1) = (1,3)$

En particular, **ningún** conjunto S que contenga al $\mathbf{0}$ puede ser linealmente independiente.

3. $f(x) = cos^2(x), g(x) = sen^2(x)$ y $h(x) = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$ son funciones linealmente dependientes en el espacio $C(\mathbb{R})$

pues vale que

$$1.\cos^2(x) + 1.\,sen^2(x) + (-1).1 = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Observaciones

1) Todo conjunto que contiene un conjunto linealmente dependiente es linealmente dependiente.

2) Todo subconjunto de un conjunto linealmente independiente es linealmente independiente.

3) Un conjunto de vectores es linealmente independiente si y sólo si todo subconjunto **finito** es linealmente independiente.

Definición
Sea V un $\mathbb{k}$-espacio vectorial y $S \subseteq V$ un subconjunto no vacío.
Se dice que S ***genera (linealmente)*** V si todo vector $v \in V$ se escribe como combinación lineal de vectores de S, esto es existen vectores $v_1, \cdots, v_n \in S$ y escalares $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{k}$ tales que

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$$

Una ***base*** de V es un conjunto no vacío S que genera V y es linealmente independiente.

Decimos que V es de ***dimensión finita*** si tiene una base finita.

Observación

Notar que S es una base de V si

1) $\forall\, v \in V$, $\exists\, s_1, \ldots, s_m \in S$, $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{k}$ tales que

$v = a_1 s_1 + \cdots + a_m s_m$ (*)

2) Que S sea li, implica que la comb. lineal (*) es <u>única</u>.

Ejercicio

Ejemplos:

1) Los vectores $v_1 = (1, 0, \cdots, 0), v_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0), \ldots, v_n = (0, 0, \ldots, 1)$ son una base de $\mathbb{k}^n$. A tal base se la llama la *base canónica.*

$$\mathcal{B} = \{(1,0,0,\ldots,0), (0,1,0,\ldots,0), (0,0,\ldots,1)\}$$

2) Los vectores $v_1 = (3, 1), v_2 = (1, 3)$ son una base de $\mathbb{R}^2$.
3) Los monomios $1, X, X^2, \ldots, X^n$ son una base del espacio vectorial dado por los polinomios de grado menor o igual a n, más el $\mathbf{0}$, $B = \{(3,1),(1,3)\}$.

$$B = \{1, X, X^2, \ldots, X^n\}$$

Vimos que generan, pero son li pues

si

$$0 = \underbrace{a_0 1 + a_1 X + \cdots + a_n X^n}_{\text{polinomio}}$$

$\Leftrightarrow a_0 = 0, \ldots, a_n = 0.$

$\Rightarrow B = \{1, X, \ldots, X^n\}$ son li!

Bases y dimensión

martes, 23 de marzo de 2021 13:38

Recordemos de la clase pasada la definición de base

Definición
Sea V un $\Bbbk$-espacio vectorial y $S \subseteq V$ un subconjunto no vacío.
Se dice que S ***genera (linealmente)*** V si todo vector $v \in V$ se escribe como combinación lineal de vectores de S, esto es existen vectores $v_1, \cdots, v_n \in S$ y escalares $a_1, \cdots, a_n \in \Bbbk$ tales que

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$$

Una ***base*** de V es un conjunto no vacío S que genera V y es linealmente independiente.

Decimos que V es de ***dimensión finita*** si tiene una base finita.

Ejemplos:

1) Los vectores $v_1 = (1, 0, \cdots, 0), v_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0), \ldots, v_n = (0, 0, \ldots, 1)$ son una base de $\Bbbk^n$. A tal base se la llama la *base canónica.*

2) Los vectores $v_1 = (3, 1), v_2 = (1, 3)$ son una base de $\mathbb{R}^2$.

3) Los monomios $1, X, X^2, \ldots, X^n$ son una base del espacio vectorial dado por los polinomios de grado menor o igual a n, más el $\mathbf{0}$.

Notar que el espacio vectorial de todos los polinomios es de dimensión infinita
$B = \{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$

Teorema
Si V es un $\Bbbk$-espacio vectorial generado por m vectores $v_1, \cdots, v_m$, entonces todo conjunto linealmente independiente de vectores de V es finito y no contiene más de m elementos.

Demostración

Sea S un conjunto de vectores de V

Si $w_i \in S$, como $v_1, \dots, v_m$ generan V, sabemos que existen escalares $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{k}$ tales que

$$w_i = a_{i1} v_1 + \dots + a_{im} v_m = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} v_j$$

Esto vale para todo vector de S.

Supongamos que

$$0 = b_1 w_1 + b_2 w_2 + \dots + b_\ell w_\ell$$

con $w_1, \dots, w_\ell \in S$ y $b_1, \dots, b_\ell \in \mathbb{k}$

Como $w_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} v_j \quad \forall\, 1 \leq i \leq \ell$

tenemos que

$$0 = b_1 \left(\sum_{j=1}^{m} a_{1j} v_j \right) + b_2 \left(\sum_{j=1}^{m} a_{2j} v_j \right) + \dots + b_\ell \left(\sum_{j=1}^{m} a_{\ell j} v_j \right)$$

$$0 = \sum_{j=1}^{m} b_1 a_{1j} v_j + \sum_{j=2}^{m} b_2 a_{2j} v_j + \dots + \sum_{j=1}^{m} b_\ell a_{\ell j} v_j$$

$$0 = \sum_{j=1}^{m} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{\ell} b_i a_{ij} \right)}_{c_j} v_j$$

los $\{v_j\}$ no serían li

si algún $c_j \neq 0$

Si algún $c_j \neq 0$
¿Existe la posib. de que algún $c_j \neq 0$?

Para cada c_j

$$c_j = \sum_{i=1}^{l} \underbrace{b_i a_{ij}}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{l1} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{lm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

Puede suceder que tengamos $c_1=0, \dots, c_m=0$ pero algún $b_i \neq 0$

En otras palabras, el sistema homogéneo

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{l1} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{lm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si $\#$ filas $= m < \#$ columnas $= l$ tenemos infinitas soluciones (no triviales)

Si hay soluciones no triviales, tenemos que el vector 0 es comb. lineal de los vectores $w_1, \dots, w_\ell$ no trivial

$\Rightarrow w_1, \dots, w_\ell$ son l.d

En conclusión, la cantidad de vectores li debe ser menos que la cantidad de vectores que generan.

■

Corolario

Si V es un $\mathbb{k}$-espacio vectorial de dimensión finita, entonces dos bases cualesquiera de V tienen el mismo número de elementos.

Demostración

Como dimensión de V es finita, existe una base de V que es finita.

Por el teorema anterior cualquier conjunto li de V es finito.

Si tenemos B_1 y B_2 dos bases;

- los elementos de B_1 (y B_2) generan V
- los conjuntos son li

$\Rightarrow B_1$ y B_2 son conjuntos finitos

$\Rightarrow$ B_1 y B_2 son conjuntos finitos

Sup que $B_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$

$B_2 = \{w_1, \dots, w_m\}$

Usando de nuevo el teorema anterior, como $v_1, \dots, v_n$ generan y B_2 es l.i

$\Rightarrow m \leq n$

Análogamente, $w_1, \dots, w_m$ generan V y B_1 es l.i. Por el teorema anterior, tenemos que $n \leq m$

Por lo tanto, $\boxed{n = m}$

■

Definición

Sea V un $\mathbb{k}$-espacio vectorial finitamente generado.

Se define la ***dimensión*** de V $(\dim V)$ como el número de elemento de una base de V.

Ejemplos:

1) $\dim \mathbb{k}^n = n$.

   Los vectores $v_1 = (1, 0, \cdots, 0), v_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0), \dots, v_n = (0, 0, \dots, 1)$ son una base de $\mathbb{k}^n$.

2) $\dim \mathbb{k}^{n \times m} = nm$. (Ejercicio)

3) Sea $\mathcal{P}_n(\mathbb{k})$ el espacio $\mathbb{k}$ –vectorial dado por los polinomios de grado menor o igual a n con coeficientes en $\mathbb{k}$, más el $\mathbf{0}$. Entonces $\dim \mathcal{P}_n(\mathbb{k}) = n + 1$.

   En efecto, los monomios $1, X, X^2, \dots, X^n$ son una base del espacio.

Corolario
Sea V un $\Bbbk$-espacio vectorial de dimensión finita con $\dim V = n$. Entonces

(a) cualquier subconjunto de V que contenga a más de n vectores es linealmente dep.

(b) ningún subconjunto de V que contenfa a menos de n vectores puede generar V.

Demostración: Ejercicio. ■

Observación
Todo subespacio de $\Bbbk^n$, $n \in \mathbb{N}$, está generado por una cantidad finita de vectores que es menor o igual a n.

Más aún, todo subespacio se puede describir como el espacio solución de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo.

Así, tenemos una correspondencia biyectiva

$$\left\{ \text{Subespacios de } \Bbbk^n \right\} \longleftrightarrow \left\{ \text{Soluciones de sistemas homogéneos} \right\}$$

Lema
Sea S un subconjunto linealmente independiente de un espacio vectorial V.
Supongamos que $v \in V$ es un vector que no pertenece a $\langle S \rangle$. Entonces el conjunto $\{v\} \cup S$ es linealmente independiente.

Demostración:

Supongamos que tenemos

$$0 = \alpha v + a_1 s_1 + \dots + a_m s_m$$

con $s_1, \dots, s_m \in S$ y $\alpha, a_1, \dots, a_m \in \Bbbk$

$$\Rightarrow \quad -\alpha v = \underline{a_1 s_1 + \dots + a_m s_m}$$

$\Rightarrow \quad -\alpha v = \underbrace{a_1 s_1 + \dots + a_m s_m}_{\in \langle S \rangle}$

Si $\alpha \neq 0 \Rightarrow \quad v = -\frac{a_1}{\alpha} s_1 + \dots + \frac{a_m}{\alpha} s_m \in \langle S \rangle$

Contradicción!

$\Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow \quad 0 = a_1 s_1 + \dots + a_m s_m$

Como S es li $\Rightarrow$ $a_1 = 0, \dots, a_m = 0$

Por lo tanto, $\{v\} \cup S$ es li.

■

Teorema

Si W es un subespacio de un $\mathbb{k}$-espacio vectorial V de dimensión finita, todo subconjunto linealmente independiente de vectores de W es finito y es parte de una base finita de W.

Demostración

Si $\dim W < \infty$, vimos que cualquier conjunto li de W es finito (Teorema anterior).

Sup que S es un conjunto li de W

Veamos que es parte de una base:

(a) Si $\langle S \rangle = W$, entonces S es una base, pues es li y genera

(b) Si $\langle S \rangle \neq W$, entonces existe $w_1 \in W$ y $w_1 \notin \langle S \rangle$.

Por el lema anterior, $S_1 = \{w_1\} \cup S$ es un conjunto li de W.

(c) Si $\langle S_1 \rangle = \langle w_1 \cup S \rangle = W$, listo: tenemos que S_1 es una base

De lo contrario, $\langle S_1 \rangle \neq W$ y existe $w_2 \in W$ y $w_2 \notin S_1 \Rightarrow$ tomamos

$$S_2 = \{w_2\} \cup S_1 = \{w_2\} \cup \{w_1\} \cup S$$
$$= \{w_2, w_2\} \cup S$$

Siguiendo así, el proceso termina pues pues $\dim W < \infty$.

■

Ejemplo:

Recordemos el ejemplo del subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por el conjunto

$$S = \{\underbrace{(1,-1,0,0)}_{v_1}, \underbrace{(0,1,-1,2)}_{v_2}\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

Según nuestros cálculos, probamos que

$$\langle S \rangle = \{(x_1, x_2, x_3, x_4 \mid \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_4 - 2\,x_1 - 2\,x_2 = 0 \end{cases}\}$$

Encontremos una base de $\langle S\rangle$ y extendámosla a una de $\mathbb{R}^4$.

Si v_1 y v_2 son li, son una base

Son li pues $\nexists\ \lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$\lambda v_1 = v_2$, pues $\lambda(1,-1,0,0) =$
$= (\lambda, -\lambda, 0, 0)$

Siempre es 0!

$\Rightarrow \dim \langle S \rangle = 2.$

Como $\dim \mathbb{R}^4 = 4$, debemos encontrar 2 vectores li a v_1 y v_2

Tomamos $w_1 = (1,1,1,4)$

$4-2-2=0$ ✓

Como $1+1+1 \neq 0 \Rightarrow w_1 \notin \langle S \rangle$

$\Rightarrow \langle v_1, v_2, w_1 \rangle$ tiene dim 3.

Como v_1, v_2 y w_1 satisfacen la ecuación

$$x_4 - 2x_1 - 2x_2 = 0$$

Todo vector que es combinación lineal de ellos tres la satisface

$$\langle v_1, v_2, w_1 \rangle \subseteq \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \mid x_4 - 2x_1 - 2x_2 = 0\}$$

Si tomamos w_2 que no satisfaga la

ecuación ⇒ es li con v_1, v_2 y w_1

Proponemos

$w_2 = (1,1,1,1)$, $1-2-2 \neq 0$

Encontramos una base $\mathbb{R}^4$ dada por

$\{(1,-1,0,0),(0,1,-1,2),(1,1,1,A),(1,1,1,1)\}$

Corolario
Sea V un $\mathbb{k}$-espacio vectorial de dimensión finita y W un subespacio.
Entonces $\dim W \leq \dim V = n$.

Demostración: Ejercicio. ■

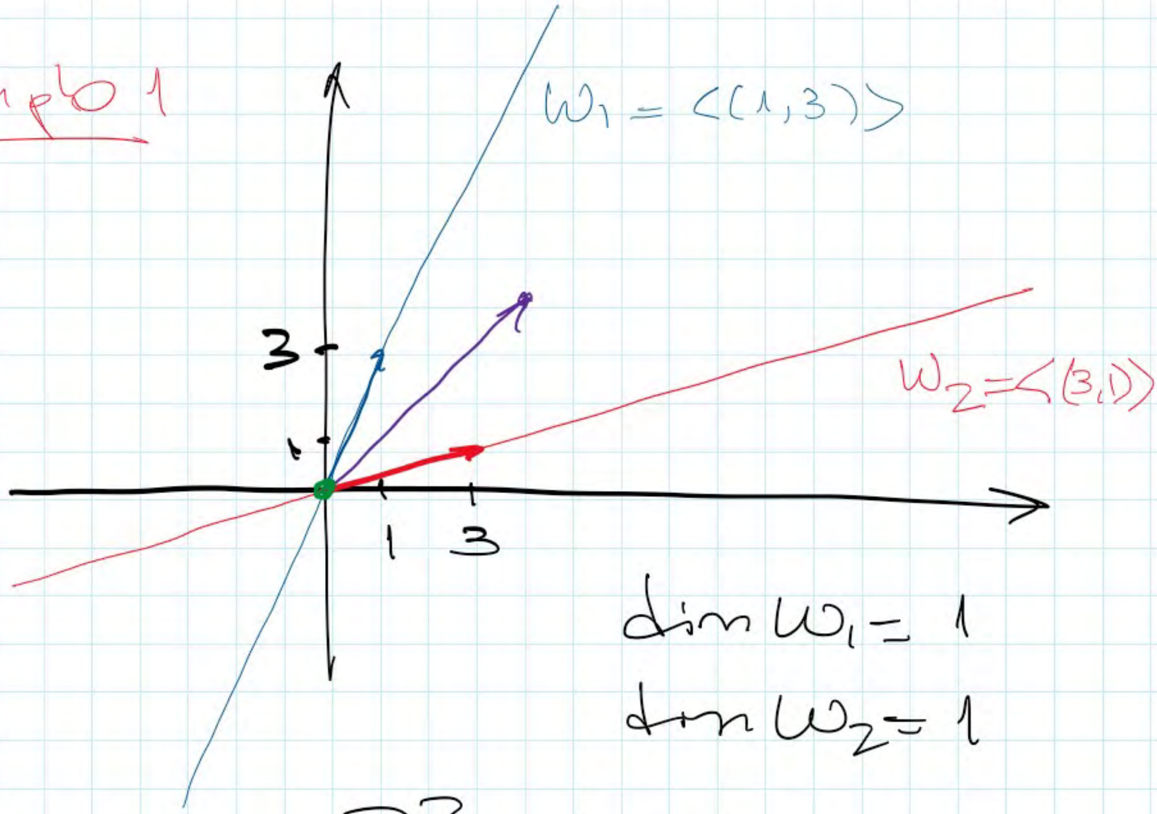
Corolario
Sea V un $\mathbb{k}$-espacio vectorial de dimensión finita.
Entonces todo conjunto linealmente independiente de vectores es parte de una base.

Demostración: Ejercicio. ■

Teorema
Sean W_1 y W_2 dos subespacios de dimensión finita de un $\mathbb{k}$-espacio vectorial V.
Entonces $W_1 + W_2$ es de dimensión finita y vale que

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

Ejemplo 1



$\dim W_1 = 1$

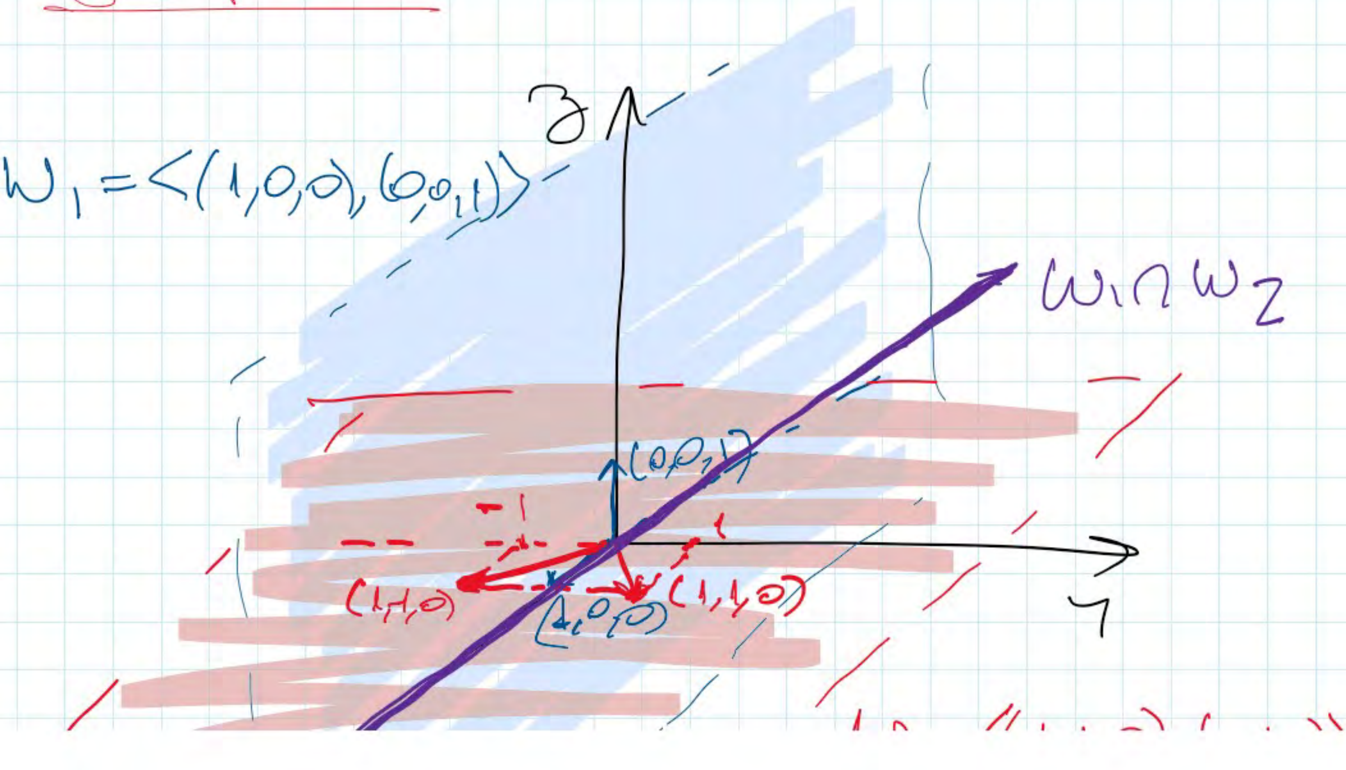
$\dim W_2 = 1$

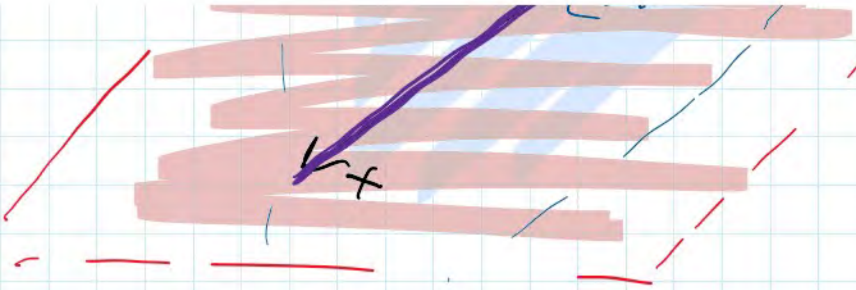
Vimos que $\mathbb{R}^2 = W_1 + W_2$

$\Rightarrow \dim W_1 + W_2 = 2 = \dim W_1 + \dim W_2$

y $W_1 \cap W_2 = \{(0,0)\}$

Ejemplo 2





$W_2 = \langle (1,1,0),(1,-1,0) \rangle$

$\dim W_1 = 2$

$\dim W_2 = 2$

$\dim W_1 \cap W_2 = 1$

$$\dim W_1 + W_2 = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim W_1 \cap W_2$$

$$3 = 2 + 2 - 1$$

$\Rightarrow W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$

Demostración

Idea: • Para dar una dimensión hay que mostrar una base.

→ vamos a mostrar una base de $W_1 + W_2$

• Para encontrar una base, primero tomo una base de $W_1 \cap W_2$

Luego, completo esa base

luego, completo esa base a una base de W_1 y a una base de W_2

- La unión de las dos bases nos da la base que buscamos.

Comencemos con la demostración:
Como $\dim W_1 < \infty$ y $\dim W_2 < \infty$, y tenemos que $W_1 \cap W_2 \subseteq W_1, W_2$ se sigue que $\dim W_1 \cap W_2 < \infty$.
Por los resultados anteriores, podemos encontrarle una base a $W_1 \cap W_2$

Fijemos
$$\dim W_1 \cap W_2 = k$$
$$\dim W_1 = k + r$$
$$\dim W_2 = k + s$$

Supongamos que
$$B_{W_1 \cap W_2} = \{v_1, \dots, v_k\}$$
es una base de $W_1 \cap W_2$
Como $W_1 \cap W_2 \subseteq W_1$, podemos extender esta base a una base de W_1:
$$B_{W_1} = \{v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_r\}$$

Análogamente, $W_1 \cap W_2 \subseteq W_2$ y podemos extender $B_{W_1 \cap W_2}$ a una base de W_2

$$B_{W_2} = \{v_1, \dots, v_k, z_1, \dots, z_s\}$$

Tenemos el conjunto

$$S = \{v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_r, z_1, \dots, z_s\}$$
$$= B_{W_1 \cap W_2} \cup B_{W_1} \cup B_{W_2}$$

<u>Afirmación</u>: S es una base de $W_1 + W_2$

(i) Veamos que S genera $W_1 + W_2$
Sea $\alpha \in W_1 + W_2 \Rightarrow \exists\ \alpha_1 \in W_1$
$\alpha_2 \in W_2$
tales que $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$

Como B_{W_1} es base de W_1, tenemos que

$$\alpha_1 = a_1 v_1 + \dots + a_k v_k + b_1 w_1 + \dots + b_r w_r$$

con $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_r \in K$

Del mismo modo, $\alpha_2 \in W_2$ y por lo tanto, existen $c_1, \dots, c_k, d_1, \dots, d_s \in K$ tales que

$$\alpha_2 = c_1 v_1 + \dots + c_k v_k + d_1 z_1 + \dots + d_s z_s$$

Luego,

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 =$$
$$= (a_1 v_1 + \dots + a_k v_k + b_1 w_1 + \dots + b_r w_r) +$$
$$+ (c_1 v_1 + \dots + c_k v_k + d_1 z_1 + \dots + d_s w_s)$$

$\Rightarrow \alpha$ se escribe como comb. lineal de vectores de S $\Rightarrow$ $\underline{S \text{ genera a } W_1 + W_2}$

(ii) Veamos que S es l.i.:

Sup que

$$0 = a_1 v_1 + \dots + a_k v_k + b_1 w_1 + \dots + b_r w_r + c_1 z_1 + \dots + c_s z_s$$

con $a_i, b_j, c_l \in \mathbb{k}$

$$\underbrace{-(c_1 z_1 + \dots + c_s z_s)}_{\in W_2} = \underbrace{a_1 v_1 + \dots + a_k v_k + b_1 w_1 + \dots + b_r w_r}_{\in W_1}$$

$\Rightarrow$ $c_1 z_1 + \dots + c_s z_s \in W_1 \cap W_2$

esto sólo lo puede pasar si es el vector 0 pues los z_i no estaban en $W_1 \cap W_2$

... pues los g_i no están
en $W_1 \cap W_2$

Así, $c_1=0, \dots, c_s=0$ y tenemos

$$0 = a_1v_1+\dots+a_kv_k + b_1w_1+\dots+b_rw_r$$

Como $B_{W_1}=\{v_1,\dots,v_k,w_1,\dots,w_r\}$ es li
$\Rightarrow a_1=0,\dots,a_k=0,\ b_1=0,\dots,b_r=0.$

Así, hemos probado que S es li y es una base de W_1+W_2

Finalmente,

$$\dim(W_1+W_2) = \underbrace{k+r+s}$$

$$= \dim W_1 + \dim W_2 - \dim W_1\cap W_2$$

$$= (k+r)+(k+s)-k$$

$\blacksquare$

Coordenadas

lunes, 29 de marzo de 2021 11:00

Sea V un $\Bbbk$-espacio vectorial de dimensión finita $\dim V = n$.
Sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V.

Luego, para todo $v \in V$, existen **únicos** escalares $a_1, \dots, a_n \in \Bbbk$ tales que

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$$

Supongamos que existen $b_1, \dots, b_n \in \Bbbk$ tales que $v = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n$

$\Rightarrow \quad a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n$

$\Rightarrow \quad 0 = \underbrace{(b_1 - a_1)}_{=0} v_1 + \underbrace{(b_2 - a_2)}_{=0} v_2 + \dots + \underbrace{(b_n - a_n)}_{=0} v_n$

Como los vectores $v_1, \dots, v_n$ son l.i., tenemos que $b_1 - a_1 = 0, \dots, b_n - a_n = 0 \Rightarrow b_1 = a_1, \dots, b_n = a_n$

Como los coeficientes de la combinación lineal son únicos, los podemos tomar como elementos que describen al vector $v \in V$.

Sin embargo, debemos fijar primero un orden para los elementos de la base!

Definición
Una ***base ordenada*** de un $\Bbbk$-espacio vectorial V es una sucesión finita de vectores linealmente independientes de V que generan V.

Se denotará $(v_1, \cdots, v_n)$ o $\{v_1, \cdots, v_n\}$ si se asume el orden de escritura.

Dada una base ordenada $B = (v_1, \cdots, v_n)$ de un $\Bbbk$-espacio vectorial V de dimensión $\dim V = n$, a los escalares que describen de manera única cada elemento v de V se los denominan ***coordenadas de v en la base B***:

Si $v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$, escribimos $[v]_B = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

También escribiremos $[v]_B = (a_1, \dots, a_n)$ si no hay lugar a confusión.

Ejemplos:

1) Base canónica de $\mathbb{k}^n$: $E = (e_1, \dots, e_n)$ donde $e_1 = (1, 0, \cdots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)$.

Si $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{k}^n$, entonces

$$(a_1, \dots, a_n) = a_1 (1, 0, 0, \dots, 0) + \dots + a_n (0, 0, \dots, 1)$$

$$[(a_1, \dots, a_n)]_E = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Tomemos otro orden en la base E, digamos

$$B = (e_n, e_1, e_2, \dots, e_{n-1}) =$$
$$= ((0, \dots, 1), (1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1, 0))$$

$$[(a_1, \dots, a_n)]_B = \begin{bmatrix} a_n \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix}$$

2) Base canónica de $\mathcal{P}_n(\mathbb{k})$: $E = (1, X, X^2, \dots, X^n)$.

Si $P \in \mathcal{P}_n(\mathbb{k}) \Rightarrow \exists\, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{k}$ tales que

$$P = a_0 1 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_n X^n$$

$$\Rightarrow [P]_E = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Tomemos ahora otra base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{k}) : B = (1, 1 + X, 1 + X + X^2)$

Recordemos que $E = (1, x, x^2)$, así,

$P = ax^2 + bx + c \Rightarrow [P]_E = \begin{bmatrix} c \\ b \\ a \end{bmatrix}$

Por ejemplo $P = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow [P]_E = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

¿Cómo escribo a los polinomios en la base B?

$$P = a x^2 + b x + c = \alpha\, 1 + \beta(1+x) + \gamma(1+x+x^2)$$

$$= \alpha + \beta + \beta x + \gamma + \gamma x + \gamma x^2$$

$$= (\alpha+\beta+\gamma) + (\beta+\gamma)x + \gamma x^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c = \alpha+\beta+\gamma \\ b = \beta+\gamma \\ a = \gamma \end{cases} \xrightarrow{\text{forma matricial}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = [P]_B \qquad \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = [P]_E$$

$\beta = b - a$

$\alpha = c - \beta - \gamma = c - b + a - a$

$= c - b$

$$[P]_B = \begin{bmatrix} c-b \\ b-a \\ a \end{bmatrix}$$

$P = (c-b)\,1 + (b-a)(1+x) + a(1+x+x^2)$

Si $P = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow [P]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$

$a=1$ $b=-2$ $c=1$

Observación

- Si $\Bbbk$ es un cuerpo infinito, existe una cantidad **infinita** de bases de un $\Bbbk$-espacio vectorial.
- La noción de coordenadas nos permite trabajar con *vectores de coordenadas* en lugar de vectores abstractos o de descripción más compleja.

Relación entre dos bases distintas

Sea V un $\Bbbk$-espacio vectorial de dimensión finita $\dim V = n$.

Sean $B = (v_1, \dots, v_n)$ y $B' = (w_1, \dots, w_n)$ dos bases ordenadas de V.

¿Cuál es la relación entre las bases?

Cada vector de B se escribe como comb. lineal de vectores de B'

$v_1 = c_{11} w_1 + c_{21} w_2 + \qquad + c_{n1} w_n$

$v_2 = c_{12} w_1 + c_{22} w_2 + \qquad + c_{n2} w_n$

$\vdots$

$v_n = c_{1n} w_1 + c_{2n} w_2 + \dots + c_{nn} w_n$

$\Rightarrow \quad v_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} w_i \qquad \forall\, 1 \leq j \leq n$

Consideremos un vector cualquiera de

V, digamos z.

$\Rightarrow \exists!\, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tales que

$$z = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$$

$$\Rightarrow z = a_1\left(\sum_{i=1}^{n} c_{i1} w_i\right) + a_2\left(\sum_{i=1}^{n} c_{i2} w_i\right) + \dots + a_n\left(\sum_{i=1}^{n} c_{in} w_i\right)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} c_{i1} a_1 w_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} c_{i2} a_2 w_i\right) + \dots + \left(\sum_{i=1}^{n} c_{in} a_n w_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(c_{i1} a_1 + c_{i2} a_2 + \dots + c_{in} a_n)}_{b_i} w_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} c_{ij} a_j\right)}_{b_i} w_i$$

$b_i \longrightarrow$ $\boxed{\text{las coord. en la base } B'.}$

$$z = b_1 w_1 + \dots + b_n w_n$$

Si escribimos z en coordenadas de la base B'

$$[z]_{B'} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} a_1 + c_{12} a_2 + \dots + c_{1n} a_n \\ c_{21} a_1 + c_{22} a_2 + \dots + c_{2n} a_n \\ \vdots \\ c_{n1} a_1 + c_{n2} a_2 + \dots + c_{nn} a_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = [z]_B$$

coordenadas de v_i en la base B'

$$\Rightarrow \quad [z]_{B'} = C\,[z]_B$$

Las columnas de C son las coordenadas de los vectores de la base B en la base B': columna $j = [v_j]_{B'}$

La matriz C se llama matriz de cambio de base y se nota

$$C = C_{B'B}$$

$$\Rightarrow \quad [z]_{B'} = C_{B'B}\,[z]$$

Hemos demostrado el siguiente teorema:

Teorema
Sea V un $\mathbb{k}$-espacio vectorial de dimensión finita $\dim V = n$ y

$$B = (v_1, \cdots, v_n), \qquad B' = (w_1, \cdots, w_n)$$

dos bases ordenadas de V.

Entonces existe una única matriz *inversible* $C \in M_n(\mathbb{k})$ tal que para todo $v \in V$ se tiene que

(i) $[v]_{B'} = C[v]_B$

(ii) $[v]_B = C^{-1}[v]_{B'}$

Las columnas de C están dadas por $C_j = [v_j]_{B'}$ es decir, las coordenadas del vector v_j de la base B en la base B'.

En nuestra notación, tenemos que

$$C = C_{B'B}$$
$$C^{-1} = C_{BB'}$$

Definición
La matriz $C_{B'B}$ se denomina la ***matriz de cambio de base*** de la base B a la base B'.

Ejemplo:

Consideremos las bases ordenadas de $\mathcal{P}_2(\mathbb{k})$

$E = (1, X, X^2,),$
$B = (1, 1 + X, 1 + X + X^2)$

dadas en el ejemplo anterior.

Tenemos entonces que

$$[1]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad [1 + X]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad [1 + X + X^2]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Las matrices de cambio de base correspondientes son

$$C_{EB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_{BE} = {C_{EB}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo,

$$[X]_B = C_{BE}\,[X]_E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[\,aX^2 + bX + c]_B = C_{BE}\,[aX^2 + bX + c]_E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c-b \\ b-a \\ a \end{pmatrix}$$

Teorema
Sea $P \in M_n(\mathbb{k})$ una matriz inversible.
Supongamos que V es un $\mathbb{k}$-espacio vectorial de dimensión finita $\dim V = n$ y $B = (v_1, \cdots, v_n)$ una base ordenada de V.
Entonces existe una **única** base ordenada B' tal que $P = C_{BB'}$.

Observación

Del teorema anterior se desprende que toda matriz inversible es una matriz de cambio de base.

Demostración

$\blacksquare$

Definición
El conjunto de matrices inversibles se denota

$$GL_n(\mathbb{k}) = \{A \in M_n(\mathbb{k}) \mid A \text{ es inversible}\}$$

Resulta que $GL_n(\mathbb{k})$ es un grupo con la operación dada por el producto de matrices y con elemento neutro dado por la identidad.

Es un ejemplo de grupo **no abeliano** si $n \geq 2$.

Transformaciones Lineales

martes, 30 de marzo de 2021 15:03

Consideremos $\mathbb{R}^2$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial y las bases ordenadas

$E = ((1,0),(0,1))$
$B = ((2,1),(1,-1))$

Tomemos la función $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por el cambio de coordenadas de la base canónica E a la base B.

Es decir, la imagen de un vector $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ son las coordenadas en la nueva base.

$$(a,b) = (a,0) + (0,b) = a(1,0) + b(0,1)$$

$$[(a,b)]_E = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \xrightarrow[C_{BE}]{T} [(a,b)]_B$$

Por lo visto anteriormente, el cambio de coordenadas viene dado por multiplicar por una matriz de cambio de base.

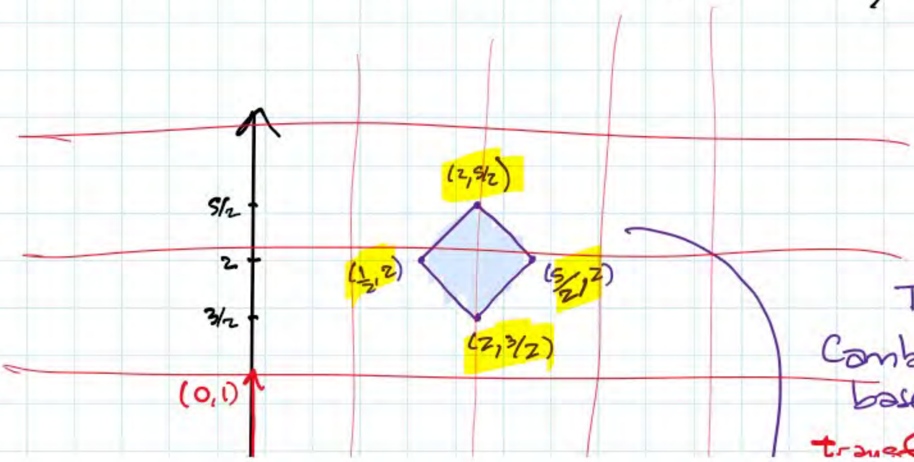
En este caso, hay una matriz fácil de hallar: $C_{EB} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

que es la matriz que tiene como columnas las coordenadas de los vectores de la base B en la base canónica E.

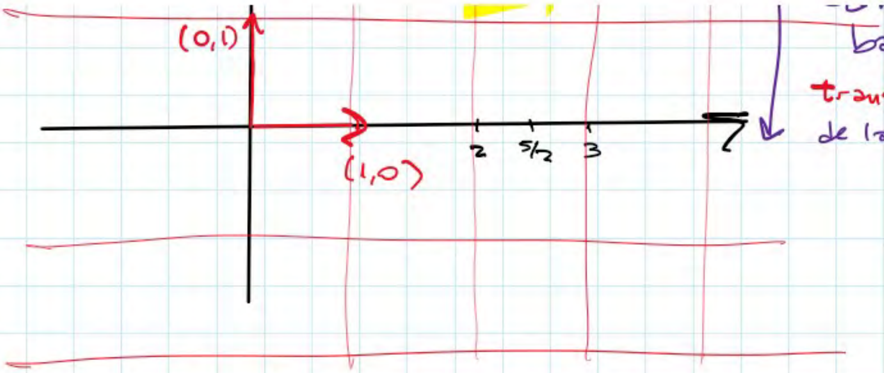
Esta matriz nos dice cómo son las coordenadas en la base canónica E de los vectores que están descriptos como coordenadas en la base B.

Como buscamos describir los vectores como coordenadas en la base B sabiendo las coordenadas en la base canónica, necesitamos la matriz

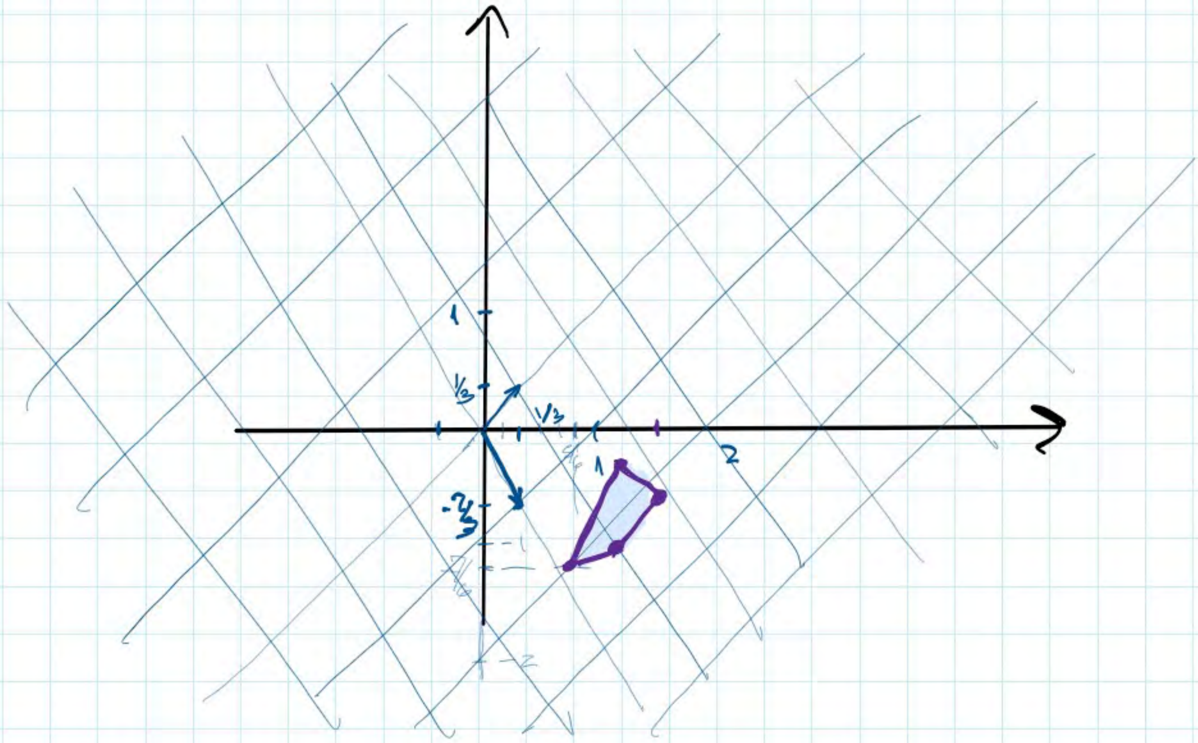
$$C_{BE} = C_{EB}^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$



T
Cambio de base como transformación



base como
transformación
de las coordenadas



Calculemos las coordenadas de la base canónica en la nueva base. Eso nos da un nuevo vector en $\mathbb{R}^2$:

$$C_{BE}[(1,0)]_E = \begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix} \Rightarrow T(1,0) = \left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$$

$$C_{BE}[(0,1)]_E = \begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ -\frac{2}{3}\end{pmatrix} \Rightarrow T(0,1) = \left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$$

$$C_{BE}\left[\left(\frac{1}{2},2\right)\right]_E = \begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \cdots\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \cdots\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\frac{1}{2}+\frac{1}{3}.2\\ \cdots\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{5}{6}\\ \cdots\end{pmatrix} \Rightarrow T\left(\left(\frac{1}{2},2\right)\right) = \left(\frac{5}{\cdots},\frac{7}{\cdots}\right)$$

$$C_{BE}[\left(\frac{1}{2},2\right)]_E=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\frac{1}{2}+\frac{1}{3}.2\\ \frac{1}{3}\frac{1}{2}-\frac{2}{3}.2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{6}\\ -\frac{7}{6}\end{pmatrix}\Rightarrow T\left(\left(\frac{1}{2},2\right)\right)=\left(\frac{5}{6},-\frac{7}{6}\right)$$

$$C_{BE}[\left(2,\frac{3}{2}\right)]_E=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}2\\ \frac{3}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{7}{6}\\ -\frac{1}{3}\end{pmatrix}\Rightarrow T\left(\left(2,\frac{3}{2}\right)\right)=\left(\frac{7}{6},-\frac{1}{3}\right)$$

$$C_{BE}[\left(\frac{5}{2},2\right)]_E=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\Rightarrow T\left(\left(\frac{5}{2},2\right)\right)=\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

$$C_{BE}[\left(2,\frac{5}{2}\right)]_E=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}2\\ \frac{5}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\ -1\end{pmatrix}\Rightarrow T\left(\left(2,\frac{5}{2}\right)\right)=\left(\frac{3}{2},-1\right)$$

Notar que $\left(\frac{1}{2},2\right)=\frac{1}{2}(1,0)+2(0,1)$ y se tiene que

$$T\left(\left(\frac{1}{2},2\right)\right)=\left(\frac{5}{6},-\frac{7}{6}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)+2\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{2}T(1,0)+2T(0,1))$$

Definición
Sea V,W dos $\mathbb{k}$-espacios vectoriales. Una transformación lineal de V en W es una función $T: V\to W$ que cumple que

$$T(\lambda u+v)=\lambda T(u)+T(v)\qquad \text{para todo } u,v\in V.$$

Es decir, $T(u+v)=T(u)+T(v)$
$T(\lambda u)=\lambda T(u)$

$\forall\, u,v\in V$
$\lambda\in\mathbb{k}$

Ejemplos:

Supongamos que V, W son dos $\mathbb{k}$-espacios vectoriales

1) La transformación **nula**:

$$T: V \to W, \qquad T(v) = \mathbf{0}_W \qquad \text{para todo } v \in V.$$

$T(u+v) = 0_W$
$T(u)+T(v) = 0_W + 0_W = 0_W$
$T(\lambda u) = 0_W, \quad \lambda T(u) = \lambda 0_W = 0_W$

2) La transformación **identidad**:

$$T: V \to V, \qquad T(v) = v, \qquad \text{para todo } v \in V.$$

$T(u+v) = u+v$
$T(u)+T(v) = u+v$
$\forall u, v \in V$
$\lambda \in \mathbb{k}$.
$T(\lambda u) = \lambda u$
$\lambda T(u) = \lambda u$

3) Supongamos que $V = \mathbb{R}[X]$ es el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales.

Consideremos la función:

$D: \mathbb{R}[\mathrm{X}] \to \mathbb{R}[\mathrm{X}]$,

$D(a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_n X^n) = a_1 + 2a_2X + \cdots + na_n X^{n-1}$

$D(X) = 1, \; D(X^2) = 2X$
$D = \underline{\underline{\text{derivada}}}$
$D(p+q) = D(p) + D(q)$
$D(\lambda p) = \lambda D(p)$
$\forall p, q \in \mathbb{R}[X]$
$\lambda \in \mathbb{R}$

4) Supongamos que $V = \mathbb{k}^{m\times 1}, W = \mathbb{k}^{n\times 1}$ y $A \in \mathbb{k}^{n\times m}$.

Consideremos la función: $\quad T_A: \mathbb{k}^{m\times 1} \to \mathbb{k}^{n\times 1}, \quad T_A(v) = Av \quad$ para todo $v \in \mathbb{k}^{m\times 1}$

$$T_A\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) = A\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{v}$$

$$T_A(u+v) = A(u+v) = Au + Av = T_A(u) + T_A(v)$$

$$T_A(\lambda u) = A(\lambda u) = \lambda(Au) = \lambda T_A(u)$$

Observación

1) Si $T: V \to W$ es una transformación lineal (supondremos siempre que en ese caso, V y W son $\mathbb{k}$-espacios vectoriales), entonces

$$T(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$$

En efecto, como $0_V = 0_V + 0_V$, tenemos

$$T(0_V) = T(0_V + 0_V) = T(0_V) + T(0_V)$$

$$\Rightarrow T(0_V) - T(0_V) = T(0_V)$$

$$\Rightarrow 0_W = T(0_V)$$

2) Si $v \in V$, y $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$, entonces

$$T(v) = a_1T(v_1) + a_2T(v_2) + \cdots + a_nT(v_n)$$

En efecto,

$$T(v) = T((a_1v_1) + (a_2v_2 + \cdots + a_nv_n))$$

$$= T(a_1v_1) + T(a_2v_2 + \cdots + a_nv_n)$$

$$= T(a_1v_1) + T(a_2v_2) + \cdots + T(a_nv_n)$$

$$= a_1T(v_1) + a_2T(v_2) + \cdots + a_nT(v_n)$$

Teorema (Propiedad Universal de las bases)
Supongamos que V es un $\mathbb{k}$-espacio vectorial de dimensión finita $\dim V = n$ y
$B = (v_1, \cdots, v_n)$ una base ordenada de V.
Sea W un $\mathbb{k}$-espacio vectorial y $w_1, \cdots, w_n$ vectores cualesquiera de W.
Entonces existe una **única** transformación lineal $T: V \to W$ tal que

$$T(v_i) = w_i \qquad \text{para todo } 1 \leq i \leq n$$

En otras palabras, para definir una transformación lineal basta definirla en una base.

$$\begin{tikzcd} v_i \arrow[d, "\forall i"'] & B \arrow[r, hook] \arrow[dr] \arrow[r, phantom, shift right=4, "\circlearrowright"] & V \arrow[d, dashed, "\exists ! T"] \\ w_i & & W \end{tikzcd}$$

Demostración

Debemos definir una t.l $T: V \to W$

Si $v \in V$, sabemos que existen únicos escalares $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{k}$ tales que

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$$

Definimos entonces

$$T(v) = a_1 w_1 + a_2 w_2 + \dots + a_n w_n$$

Hay que ver que 1) es una t.l.
2) es única.

Sean $u, v \in V$, $\lambda \in \mathbb{k}$

Supongamos que $u = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n$

Supongamos que $u = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n$
con $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{K}$ (únicos)

$\Rightarrow \quad \lambda u + v = \lambda(b_1 v_1 + \dots + b_n v_n) + (a_1 v_1 + \dots + a_n v_n)$

$= (\lambda b_1 + a_1) v_1 + (\lambda b_2 + a_2) v_2 + \dots + (\lambda b_n + a_n) v_n$

$\Rightarrow T(\lambda u + v) = (\lambda b_1 + a_1) w_1 + (\lambda b_2 + a_2) w_2 + \dots + (\lambda b_n + a_n) w_n$

$= \lambda b_1 w_1 + a_1 w_1 + \lambda b_2 w_2 + a_2 w_2 + \dots + \lambda b_n w_n + a_n w_n$

$= (\lambda b_1 w_1 + \lambda b_2 w_2 + \dots + \lambda b_n w_n) + (a_1 w_1 + \dots + a_n w_n)$

$= \lambda(b_1 w_1 + \dots + b_n w_n) + (a_1 w_1 + \dots + a_n w_n)$

$= \lambda T(u) + T(v) \qquad \forall u, v \in V, \lambda \in \mathbb{K}.$

2) <u>Unicidad</u>: Sup que $\exists\ S : V \to W$ t.l
tal que $S(v_i) = w_i \quad \forall i$

$\Rightarrow \quad S(v) = S(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n)$

$= a_1 S(v_1) + \dots + a_n S(v_n)$

$= a_1 w_1 + \dots + a_n w_n = T(v)$

$\forall v$

$\Rightarrow S = T.$

■

Ejemplo:

1) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

Ejemplo:

1) $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$E = \{(1,0),(0,1)\}$ base canónica

$T(1,0) = (1,1,1)$

$T(0,1) = (2,2,2)$

$T(x,y) = \ ?$

$(x,y) = (x,0) + (0,y) = x(1,0) + y(0,1)$

$T(x,y) = x\,T(1,0) + y\,T(0,1)$

$= x(1,1,1) + y(2,2,2)$

$= (x,x,x) + (2y,2y,2y)$

$$\boxed{T(x,y) = (x+2y,\ x+2y,\ x+2y)}$$

$T(1,0) = (1,1,1)$

$T(0,1) = (2,2,2)$

Núcleo e Imagen de una transformación lineal

martes, 6 de abril de 2021 15:01

Recordemos de la clase pasada que una transformación lineal entre dos $\mathbb{k}$-espacios vectoriales V, W es una función $T\colon V \to W$ que cumple que

$$T(\lambda u + v) = \lambda T(u) + T(v) \qquad \text{para todo } u, v \in V, \lambda \in \mathbb{k}$$

O equivalentemente

$$\begin{cases} T(u+v) = T(u) + T(v) & \text{para todo } u, v \in V, \\ T(\lambda u) = \lambda T(u) & \text{para todo } u \in V,\ \lambda \in \mathbb{k}. \end{cases}$$

Sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal entre dos $\mathbb{k}$-espacios vectoriales V y W.

Consideremos los siguientes subconjuntos de V y W, respectivamente

$$\mathrm{Nu}\, T = \mathrm{Ker}\, T = \{v \in V \mid T(v) = \mathbf{0}_W\} = \text{Núcleo de } T,$$

$$\mathrm{Im}\, T = \{w \in W \mid \exists\, v \in V, T(v) = w\} = \text{Imagen de } T.$$

Por ejemplo, si $T: V \to W$ es $T(v) = 0_W$ $\forall v$ $\Rightarrow$ $\mathrm{Ker}\, T = V$.

Lema
Sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal entre dos $\mathbb{k}$-espacios vectoriales V y W.
Entonces $Ker\, T$ es un subespacio de V e $Im\, T$ es un subespacio de W.
En particular, si $\dim V < \infty$, entonces

$$\dim(Ker\, T) \le \dim V,$$
$$\dim(Im\, T) \le \dim V$$

Demostración

Recordemos que para probar que un conjunto $S \subseteq V$ es un subespacio hay que probar que

$$\begin{cases} s_1 + s_2 \in S \\ \lambda s_1 \in S \end{cases} \qquad \forall s_1, s_2 \in S, \quad \forall \lambda \in \mathbb{k}$$

Consideremos $S = \mathrm{Ker}\, T = \{v \in V \mid T(v) = 0_W\}$

Consideremos $S = \ker T = \{v \in U \mid T(v) = 0_W\}$

Sean $v_1, v_2 \in \ker T \Rightarrow \begin{cases} T(v_1) = 0_W \\ T(v_2) = 0_W \end{cases}$

$$\Rightarrow \underline{T(v_1+v_2)} = T(v_1) + T(v_2) = 0_W + 0_W = \underline{0_W}$$

$\Rightarrow v_1 + v_2 \in \ker T$

Además, $\underline{T(\lambda v_1)} = \lambda T(v_1) = \lambda 0_W = \underline{0_W}$

$\Rightarrow \lambda v_1 \in \ker T \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$.

Luego, $\ker T$ es un subespacio de V

Si $\dim U < \infty$, sabemos que

$$\dim(\ker T) \leq \dim U$$

Probemos ahora el resultado para la imagen:

$\operatorname{Im} T = \{w \in W \mid \exists v \in U, T(v) = w\}$

Si $w_1, w_2 \in \operatorname{Im} T \Rightarrow \exists v_1, v_2 \in U$ tales que

$T(v_1) = w_1$

$T(v_2) = w_2$

$$\Rightarrow \underline{w_1 + w_2} = T(v_1) + T(v_2) \overset{\text{T es lineal}}{=} \underline{T(v_1 + v_2)}$$

$\Rightarrow w_1 + w_2 \in \operatorname{Im} T$.

Sea $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces

$$\underline{\lambda w_1} = \lambda T(v_1) \underset{\text{T es lineal}}{=} \underline{T(\lambda v_1)} \Rightarrow \lambda w_1 \in \operatorname{Im} T$$

Así, $\operatorname{Im} T$ es un subespacio de W

Supongamos que $\dim V = n < \infty$

Entonces V tiene una base finita $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$, así, si $v \in V$,

$\exists!\ a_1, \ldots, a_n$ tales que $v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$

$\Rightarrow T(v) = T(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n)$

$\Rightarrow T(v) = a_1 T(v_1) + \cdots + a_n T(v_n)$

Esto implica que todos los vectores de la imagen son comb. lineal de $T(v_1), \ldots, T(v_n)$. En otras palabras

$$\operatorname{Im} T = \langle T(v_1), \ldots, T(v_n) \rangle$$

Por un resultado anterior, tenemos que

$$\dim(\operatorname{Im} T) \leq n = \dim V$$

■

Observación:
Notar que $Im\,T$ está generada como subespacio por la imagen de una base cualquiera de V.

Ejemplos

1) Si $T: V \to W$, $T(v) = 0_W \ \forall v \in V$

$\Rightarrow \ker T = V$, $\operatorname{Im} T = \{0_W\}$

2) Si $T: V \to V$, $T(v) = v \quad \forall v \in V$

$\Rightarrow \operatorname{Ker} T = \{0_V\}$, $\operatorname{Im} T = V \quad \forall v \in V$

3) Si $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y) = (2x+y, 2x+y, 2x+y)$

$\operatorname{Ker} T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid T(x,y) = (0,0,0)\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + y = 0\}$

$y = -2x$

$\Rightarrow$ Si $(x,y) \in \operatorname{Ker} T \Rightarrow (x,y) = (x,-2x)$

$= x(1,-2)$

$\Rightarrow \operatorname{Ker} T = \langle (1,-2) \rangle \Rightarrow \dim(\operatorname{Ker} T) = 1$

$\operatorname{Im} T = \langle T(1,0), T(0,1) \rangle = \langle (2,2,2), (1,1,1) \rangle$

$B = \{(1,1,1)\}$ es una base de $\operatorname{Im} T$

$\Rightarrow \dim(\operatorname{Im} T) = 1$

Teorema (Teorema de la dimensión del núcleo e imagen)

Sean V, W dos $\mathbb{k}$-espacios vectoriales con $\dim V < \infty$ y $T: V \to W$ una transformación lineal. Entonces

$$\dim V = \dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im} T$$

Demostración (en video aparte)

■

Teorema de la dimensión del núcleo y la imagen

viernes, 9 de abril de 2021 15:02

Sea $T: V \to W$ una transformación lineal entre dos $\mathbb{k}$-espacios vectoriales V y W.

Recordemos los siguientes subespacios de V y W, respectivamente

$$\mathrm{Nu}\, T = \mathrm{Ker}\, T = \{v \in V \mid T(v) = \mathbf{0}_W\} = \text{Núcleo de } T,$$

$$\mathrm{Im}\, T = \{w \in W \mid \exists\, v \in V, T(v) = w\} = \text{Imagen de } T.$$

Vamos a demostrar el siguiente teorema que relaciona las dimensiones de estos subespacios con la dimensión del espacio de salida.

Teorema (Teorema de la dimensión del núcleo e imagen)

Sean V, W dos $\mathbb{k}$-espacios vectoriales con $\dim V < \infty$ y $T: V \to W$ una transformación lineal. Entonces

$$\dim V = \dim \mathrm{Ker}\, T + \dim \mathrm{Im}\, T$$

Ejemplo:

Consideremos $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal dada por

$$T(x,y) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right) \qquad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}$$

$$\ker T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid T(x,y) = (0,0)\}$$

$$T(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right) = (0,0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+y}{2} = 0 \Leftrightarrow \boxed{x+y=0}$$

$$y = -x$$

$$\text{Si } (x,y) \in \ker T \Rightarrow (x,y) = (x,-x)$$

$$= x(1,-1)$$

$$\Rightarrow \ker T = \langle (1,-1) \rangle \Rightarrow \dim \ker T = 1$$

Consideremos la base canónica de

$\mathbb{R}^2: \quad E = \{(1,0),(0,1)\}$

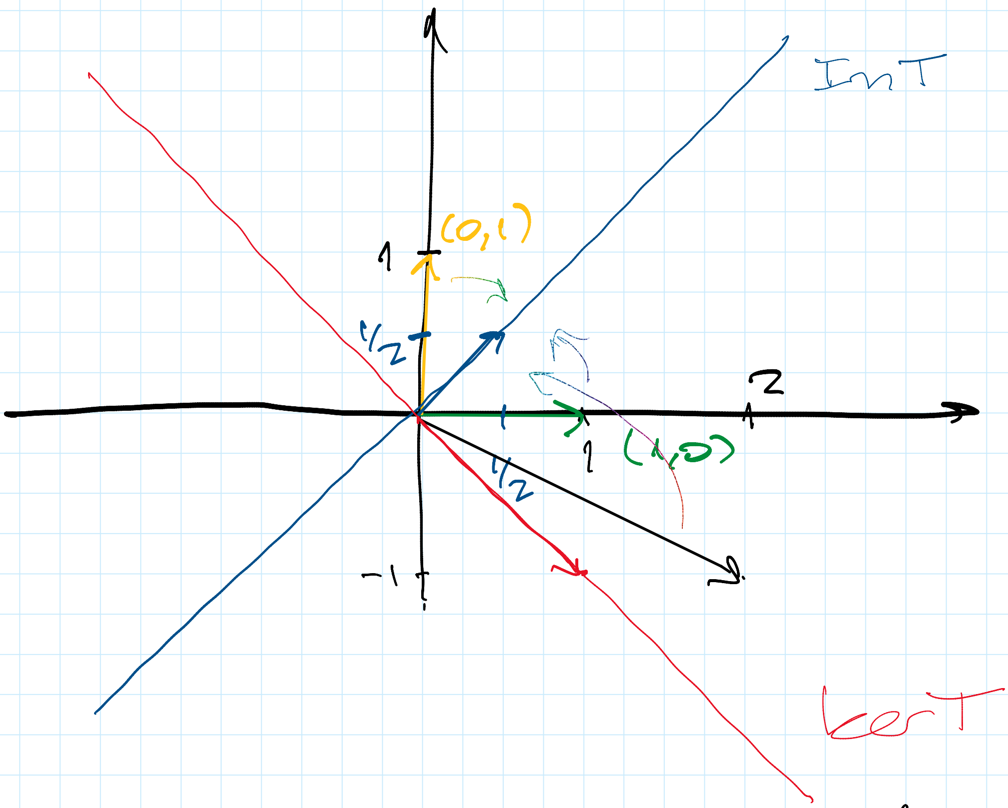
$\Rightarrow \operatorname{Im} T = \langle T(1,0), T(0,1)\rangle$

$= \langle (\frac{1}{2},\frac{1}{2}), (\frac{1}{2},\frac{1}{2})\rangle$

$= \langle (\frac{1}{2},\frac{1}{2})\rangle = \langle (1,1)\rangle$

$\Rightarrow \dim \operatorname{Im} T_A = 1$

$\dim \mathbb{R}^2 = 2 = \dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T$



$T(x,y) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right) = \left(\frac{x+y}{2}\right)(1,1)$

$T(2,-1) = \left(\frac{2+(-1)}{2}\right)(1,1) = \frac{1}{2}(1,1)$

$T(1,-1) = \left(\underline{\frac{1+(-1)}{2}}\right)(1,1) = 0\,(1,1) = (0,0)$

Demostración

Idea: Hay que dmostrar una cierta igualdad con dimensiones.

Para hacerlo, vamos a encontrar bases de $\begin{cases} \ker T \\ \operatorname{Im} T \\ V \end{cases}$

Supongamos que
$\dim V = n$
$\dim \ker T = k$
$\dim \operatorname{Im} T = \ell$

Como $\ker T$ es un subesp. de V tiene dim. finita y puedo completar una base de $\ker T$ a una base de V. $\rightsquigarrow$ agregamos $n-k$ vectores

Luego, basta ver que la imagen de esos $n-k$ vectores genera la imagen y son li.

Así probamos que $\dim \operatorname{Im} T = n-k$ y coincide con ℓ

$$\dim V = n = \underbrace{n-k}_{\ell} + k = \ell + k = \dim \operatorname{Im} T + \dim \ker T$$

e

Demostración

Como $\dim V = n < \infty$, y $\ker T$ es un subespacio de V, tenemos que $\dim \ker T < \infty$.

Consideremos una base de $\ker T$:

$$B = \{v_1, \dots, v_k\}, \quad \dim \ker T = k$$

Sabemos que podemos encontrar vectores en V que sean li con los vectores de la base B y me dan una base de V

$$\overline{B} = \{v_1, \dots, v_k, u_1, u_2, \dots, u_{n-k}\}$$

$$\dim V = n$$

Sabemos que $\operatorname{Im} T \subseteq W$ está generado por los vectores que son imagen de los vectores de la base $\overline{B}$

$$\operatorname{Im} T = \langle \underset{\substack{\parallel \\ 0_W}}{T(v_1)}, \dots, \underset{\substack{\parallel \\ 0_W}}{T(v_k)}, T(u_1), \dots, T(u_{n-k}) \rangle$$

$0_W \qquad 0_{CW}$

$$= \langle T(u_1), \dots, T(u_{n-k}) \rangle$$

Por lo tanto, los vectores

$$T(u_1), \dots, T(u_{n-k})$$

generan $\operatorname{Im} T$.

Si probamos que son l.i., se sigue que $\dim \operatorname{Im} T = n-k$

Eso implica que

$$\dim V = n = k + (n-k)$$
$$= \dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T$$

Supongamos que

$$0_W = a_1 T(u_1) + \dots + a_{n-k} T(u_{n-k})$$

T es lineal

$$\Rightarrow 0_W = T(a_1 u_1) + \dots + T(a_{n-k} u_{n-k})$$

T es lineal

$$\Rightarrow 0_W = T(a_1 u_1 + \dots + a_{n-k} u_{n-k})$$

$$\Rightarrow a_1 u_1 + \dots + a_{n-k} u_{n-k} \in \ker T$$

$\Rightarrow a_1 u_1 + \cdots + a_{n-k} u_{n-k} \in \ker T$

$\Rightarrow \exists\, b_1, \ldots, b_k \in \mathbb{K}$ tales que

$$a_1 u_1 + \cdots + a_{n-k} u_{n-k} = b_1 v_1 + \cdots + b_k v_k$$

$$\Rightarrow 0_V = b_1 v_1 + \cdots + b_k v_k - a_1 u_1 - \cdots - a_{n-k} u_{n-k}$$

Como $\overline{B} = \{v_1, \ldots, v_k, u_1, \ldots, u_{n-k}\}$ es una base de V, el conjunto es l.i $\Rightarrow$ $b_1 = 0, \ldots, b_k = 0$

$-a_1 = 0, \ldots, -a_{n-k} = 0$

Por lo tanto,

$$T(u_1), \ldots, T(u_{n-k})$$

son linealmente independientes.

Con esto queda demostrado el Teorema. ∎

Ejemplos:

1) Sea $V = \mathbb{k}^{m\times 1}, W = \mathbb{k}^{n\times 1}$ y $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \in \mathbb{k}^{n\times m}$ y

consideremos la función: $T_A\colon \mathbb{k}^{m\times 1} \to \mathbb{k}^{n\times 1}, \quad T_A(v) = Av$ para todo $v \in \mathbb{k}^{m\times 1}$.

Por ejemplo, si $V = \mathbb{R}^{3\times 1} = W$ y $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, para $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ tenemos que

$$T_A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ y+z \\ 2x+y+z \end{pmatrix}$$

Así, $\operatorname{Ker} T_A = \{v \in \mathbb{R}^{3\times 1} \mid T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1} \;\middle|\; \begin{array}{l} x+y+z=0 \\ y+z=0 \\ 2x+y+z=0 \end{array} \right\}$

Sistema lineal homogéneo

Como $y+z=0 \Rightarrow z=-y$

$\Rightarrow x+y+z=0 \Rightarrow x+y-y=0 \Rightarrow \boxed{x=0}$

Si $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker T_A \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \ker T_A = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow \dim \ker T_A = 1$

$\Rightarrow \dim \operatorname{Im} T_A = \dim \mathbb{R}^{3\times 1} - \dim \ker T_A$
$= 3 - 1 = 2$

Por otro lado, $\operatorname{Im} T_A = \left\langle T_A\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right), T_A\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right), T_A\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Son l.i

Base $\mathrm{Im}\, T_A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

En general, para $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ tenemos que

$$T_A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1m}x_m \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nm}x_m \end{pmatrix}$$

Así, $\mathrm{Ker}\, T_A = \{ v \in \mathbb{k}^{m\times 1} \mid T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{k}^{m\times 1} \;\middle|\; \begin{matrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1m}x_m = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nm}x_m = 0 \end{matrix} \right\}$

= soluciones del sistema homogéneo

Por otro lado , $\mathrm{Im}\, T_A = \left\langle T_A\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right), \dots, T_A\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right) \right\rangle = \langle \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix}}_{\text{columnas de la matriz } A.} \rangle$

2) $D: \mathcal{P}_2(\mathbb{k}) \longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{k})$, $D(ax^2+bx+c) = 2ax+b$

Núcleo $D = \ker D =$ polinomios const.

$\dim \ker D = 1$

$\mathrm{Im}\, D = \langle D(\overset{"0}{1}), D(x), D(x^2) \rangle = \langle 1, 2x \rangle = \langle 1, x \rangle$

$= \mathcal{P}_1(\mathbb{k})$

$\dim \mathrm{Im}\, D = 2$

Recordemos que si $A \in \mathbb{k}^{n\times m}$, se define

rango filas de A = cantidad de filas linealmente independientes de A.

rango columnas de A = cantidad de columnas linealmente independientes de A.

Por lo visto en el ejemplo anterior, tenemos que

$$\text{rango columnas de } A = \dim Im\, T_A$$

Teorema (Rango fila = Rango columna)

Sea $A \in \mathbb{k}^{n\times m}$. Entonces

$$\text{rango filas de } A = \text{rango columnas de } A$$

Demostración

Dada $A \in \mathbb{k}^{n\times m}$, consideremos la transf. lineal dada por $T_A : \mathbb{k}^{m\times 1} \to \mathbb{k}^{n\times 1}$,

$$T_A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $\ker T_A = \{$ soluciones del sistema homogéneo $AX = 0 \}$

$Im\, T_A =$ subespacio generado por las

$\operatorname{Im} T_A =$ subespacio generado por las columnas de A

Una base de la imagen $\operatorname{Im} T_A$ está dada por las columnas l.i de A

$\Rightarrow \quad \dim \operatorname{Im} T_A = \text{rango columna de } A$

Por el Teorema anterior, sabemos que

$$\dim \mathbb{K}^{m\times 1} = \dim \operatorname{Im} T_A + \dim \ker T_A$$

$$\Rightarrow \quad m = \text{rango col } A + \dim \ker T_A$$

$$\Rightarrow \quad \dim \ker T_A = m - \text{rango col } A$$

Por otro lado, sabemos que si $r =$ rango fila, entonces el espacio de soluciones del sistema homogéneo tiene dimensión

$$m - r = m - \text{rango fila}$$

Como este espacio es exactamente $\ker T_A$, tenemos que

$$\begin{cases} \dim \ker T_A = m - \text{rango fila } A \\ \dim \ker T_A = m - \text{rango col } A \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \text{rango fila } A = \text{rango col } A$$

■

Definición

Sea $A \in \mathbb{k}^{n\times m}$. Se define el **rango de A** como

$$\mathbf{rg}\, \boldsymbol{A} = \text{ rango filas de } A = \text{rango columnas de } A$$

$= \text{rango filas de } A^t$

Definición

Sean V, W dos $\mathbb{k}$-espacios vectoriales. Se define el conjunto de las transformaciones lineales de V en W, u **homomorfismos** de V en W como

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(V,W) = \mathrm{Hom}(V,W) = \{T: V \to W \mid T \text{ es trans. lineal}\}$$

Notación: $\mathrm{Hom}(V,V) = \mathrm{End}(V)$ se llama el conjunto de **endomorfismos** de V.

Ejemplos:

Sean $V = \mathbb{R}^{3\times 1}, W = \mathbb{R}^{2\times 1}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$.

Consideremos las funciones: $T_A: \mathbb{R}^{3\times 1} \to \mathbb{R}^{2\times 1}$, $T_A(v) = Av$ para todo $v \in \mathbb{R}^{3\times 1}$,

$T_B: \mathbb{R}^{3\times 1} \to \mathbb{R}^{2\times 1}$, $T_B(v) = Bv$ para todo $v \in \mathbb{R}^{3\times 1}$.

Veamos: $(T_A + T_B)(v) = T_A(v) + T_B(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^{3\times 1}$

$$(T_A + T_B)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T_A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + T_B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad T_A + T_B = T_{(A+B)}$$

Análogamente, $(\lambda T_A)(v) = \lambda T_A(v) \in \mathbb{R}^{2\times 1}$

$$(\lambda T_A)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 2\lambda & 3\lambda \\ 4\lambda & 5\lambda & 6\lambda \end{pmatrix}}_{\lambda A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda T_A = T_{\lambda A} \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Teorema
Sean V, W dos $\mathbb{k}$-espacios vectoriales. Entonces $\mathrm{Hom}(V, W)$ es un $\mathbb{k}$-espacio vectorial con las operaciones definidas por

$$(T + U)(v) = T(v) + U(v), \qquad \forall\, v \in V \text{ y } T, U \in \mathrm{Hom}(V, W)$$
$$(\lambda T)(v) = \lambda T(v) \qquad \forall\, v \in V, \lambda \in \mathbb{k} \text{ y } T \in \mathrm{Hom}(V, W)$$

Demostración Idea! Ejercicio: completar.

Con respecto a la suma

Veamos que $T+U$ es una t.l $\forall T, U \in \mathrm{Hom}(V,W)$

$$(T+U)(\lambda v_1 + v_2) = \overset{\text{es t.l}}{T}(\lambda v_1 + v_2) + \overset{\text{es T.l}}{U}(\lambda v_1 + v_2)$$

$= \lambda T(v_1) + T(v_2) + \lambda U(v_1) + U(v_2)$

$= \lambda T(v_1) + \lambda U(v_1) + T(v_2) + U(v_2)$

$= \lambda \left(T(v_1) + U(v_1) \right) + T(v_2) + U(v_2)$

$= \lambda (T+U)(v_1) + (T+U)(v_2)$

$\Rightarrow$ $T+U$ es una trans. lineal.

S1) Sean $T, U, S \in Hom(V, W)$

$((T+U)+S) = (T+(U+S))$

$\Leftrightarrow ((T+U)+S)(v) = (T+(U+S))(v) \quad \forall v \in V$

Así, $(\underbrace{(T+U)}+\underbrace{S})(v) = \underbrace{(T+U)(v)} + S(v)$

$= (\underbrace{T(v)}_{\in W} + \underbrace{U(v)}_{\in W}) + \underbrace{S(v)}_{\in W} \underset{\text{asociar en } W}{=} T(v) + (U(v) + S(v))$

$= (T+(U+S))(v)$ ✓

S2) conmutatividad (Ej.)

S3) Elemento neutro: $O: V \to W$

$O(v) = 0_W \quad \forall v \in V$

$(T+O)(v) = T(v) + O(v) = \underbrace{T(v)}_{\in W} + 0_W$

$= T(v) \quad \forall v \in V$

$\Rightarrow T + O = T \quad \forall T \in Hom(V, W)$

S4) <u>opuesto</u>: Dada $T \in \mathrm{Hom}(V,W)$
opuesto $(-1)T$ Ej

Ejercicio Terminar la demostración

Si $\lambda \in \mathbb{k}$ y $T \in \mathrm{Hom}(V,W)$, entonces

$$(\lambda T)(\mu v_1 + v_2) = \lambda T(\mu v_1 + v_2) =$$
$$= \lambda(\mu T(v_1) + T(v_2)) = \lambda\mu T(v_1) + \lambda T(v_2)$$
$$= \mu(\lambda T)(v_1) + (\lambda T)(v_2)$$

$\Rightarrow \lambda T \in \mathrm{Hom}(V,W)$

■

Teorema

Sean V, W dos $\mathbb{k}$-espacios vectoriales de dimensión finita, digamos $\dim V = n$ y $\dim W = m$. Entonces $\mathrm{Hom}(V,W)$ es un $\mathbb{k}$-espacio vectorial de dimensión finita y vale

$$\dim \mathrm{Hom}(V,W) = nm.$$

Demostración: (video aparte) ■

Álgebra de endomorfismos

lunes, 12 de abril de 2021 10:11

Sean V, W, Z tres $\Bbbk$-espacios vectoriales y

$$T: V \to W, \qquad\qquad U: W \to Z,$$

dos transformaciones lineales, entonces la transformación lineal

$$UT: V \to Z,$$

dada por la composición $UT(v) = U(T(v))$ para todo $v \in V$ es una transformación lineal.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[rr, bend right, "U \circ T"'] & W \arrow[r, "U"] & Z \end{tikzcd}$$

Obs La función $UT: V \to Z$ es una t. l.

En efecto, si $v_1, v_2 \in V$

$$(UT)(v_1+v_2) = U(T(v_1+v_2))$$

$$\underset{T \text{ es lineal}}{=} U(\underbrace{T(v_1)}_{\in W} + \underbrace{T(v_2)}_{\in W}) \underset{U \text{ es lineal}}{=} U(T(v_1)) + U(T(v_2))$$

$$= (UT)(v_1) + (UT)(v_2)$$

Si $\lambda \in \Bbbk$ y $v \in V$, tenemos que

$$(UT)(\lambda v) = U(T(\lambda v)) \underset{T \text{ es lineal}}{=} U(\lambda \underbrace{T(v)}_{\in W})$$

$$\underset{U \text{ es lineal}}{=} \lambda(U(T(v))) = \lambda (UT)(v)$$

Ejemplo:

Sea $V = \mathbb{k}^{m\times 1}$, $W = \mathbb{k}^{n\times 1}$, $Z = \mathbb{k}^{p\times 1}$, $A \in \mathbb{k}^{n\times m}$ y $B \in \mathbb{k}^{p\times n}$

Consideremos las funciones

$T_A \colon \mathbb{k}^{m\times 1} \to \mathbb{k}^{n\times 1}$, $\quad T_A(v) = Av \quad$ para todo $v \in \mathbb{k}^{m\times 1}$.

$T_B \colon \mathbb{k}^{n\times 1} \to \mathbb{k}^{p\times 1}$, $\quad T_B(w) = Bw \quad$ para todo $w \in \mathbb{k}^{n\times 1}$.

$$\begin{tikzcd} v \arrow[r, mapsto] & Av \arrow[r, mapsto] & B(Av) \\ \mathbb{k}^{m\times 1} \arrow[r, "T_A"] \arrow[rr, bend right, "T_BT_A"'] & \mathbb{k}^{n\times 1} \arrow[r, "T_B"] & \mathbb{k}^{p\times 1} \end{tikzcd}$$

$$(T_BT_A)(v) = T_B(T_A(v)) = T_B(Av)$$
$$= B(Av) = (BA)v \quad \forall v \in V$$

$$\Rightarrow \boxed{T_BT_A = T_{BA}}$$

Si $V = W = Z = \mathbb{k}^{m\times 1}$, podemos considerar

$T_BT_A = T_B \circ T_A \colon \mathbb{k}^{m\times 1} \to \mathbb{k}^{m\times 1}$

$T_AT_B = T_A \circ T_B \colon \mathbb{k}^{m\times 1} \to \mathbb{k}^{m\times 1}$

Vale que $T_AT_B = T_BT_A$ si y sólo si $AB = BA$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{k}^{m\times 1} \arrow[r, shift left, "T_A"] \arrow[r, shift right, "T_B"'] \arrow[rr, bend left, "T_BT_A"] \arrow[rr, bend right] & \mathbb{k}^{m\times 1} \arrow[r, shift left, "T_B"] \arrow[r, shift right, "T_A"'] & \mathbb{k}^{m\times 1} \end{tikzcd}$$

$T_A T_B$

Pues $\left.\begin{array}{l} T_B T_A = T_{BA} \\ T_A T_B = T_{AB} \end{array}\right| \Rightarrow T_{BA} = T_{AB}$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{BA = AB}}$

Observación

1) Si $V = W = Z$ tenemos que para todas $T, U \in \mathrm{End}(V)$ $= \{T : V \to V \mid T \text{ es } \mathbb{k}\text{-l}\}$

$$UT, TU \in \mathrm{End}(V)$$

pero no siempre es cierto que $UT = TU$.

*El orden de los factores **si** altera el producto.*

2) Si $n = \dim V < \infty$, entonces $\dim \mathrm{End}(V) = n^2$.

3) Si $T \in \mathrm{End}(V)$ se define

$$T^k = \underbrace{T \circ T \circ \cdots \circ T}_{k\text{-veces}}$$

Por ejemplo, $T^2 = T \circ T = TT$, $T^0 = \mathrm{id}_V$

$T^3 = T \circ T \circ T = TTT$

Lema
Sea V un $\mathbb{k}$-espacio vectorial y $S, T, U \in \mathrm{End}(V)$. Entonces

(a) $\mathrm{id}_V T = T \mathrm{id}_V = T$,
(b) $S(T + U) = ST + SU$, $(S + T)U = SU + TU$,
(c) $\lambda(ST) = (\lambda S)T = S(\lambda T)$, para todo $\lambda \in \mathbb{k}$.

Demostración (Ejercicio)

<u>Ideas</u>: Hay que probar igualdades entre funciones, y dos funciones son iguales si valen lo mismo en todo elemento del dominio.

(a) $(id_V T)(v) = id_V(\underbrace{T(v)}) = T(v) \quad \forall v \in V$

$\Rightarrow id_V T = T \quad \forall T \in \mathrm{End}(V)$

(b) $[S(T+U)](v) = S(\underbrace{(T+U)(v)}) =$

$= S(\underbrace{T(v)}_{\in V} + \underbrace{U(v)}_{\in V}) \underset{\substack{S \text{ es} \\ \text{lineal}}}{=} S(T(v)) + S(U(v))$

$= (ST)(v) + (SU)(v) = (ST+SU)(v)$

$\forall v \in V$

$\Rightarrow S(T+U) = ST + SU.$

(c) $(\lambda(ST))(v) \underset{\text{def}}{=} \lambda(\underbrace{ST}(v)) = \lambda(S(T(v)))$

$\underset{\substack{S \text{ es} \\ \text{lineal}}}{=} S(\lambda T(v)) = (S(\lambda T))(v)$

$\Rightarrow \lambda(ST) = S(\lambda T)$

■

Observación

El lema anterior nos dice que $\mathrm{End}(V)$ es una $\mathbb{k}$-álgebra con las tres operaciones definidas anteriormente de

- suma $S+T$

- producto por escalar λT

- producto (dada por la composición) $ST = S \circ T$.

$\operatorname{End}(V)$ se denomina la $\mathbb{k}$-álgebra de endomorfismos lineales de V.

Recodemos que una función $T: V \to W$, se dice ***inversible*** si existe una función

$U: V \to W$, tal que
$$\begin{cases} UT = \mathrm{id}_V \\ TU = \mathrm{id}_W \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, bend left, "T"] & W \arrow[l, bend left, "U"] \end{tikzcd}$$

Si T es inversible, entonces U es única y se denota T^{-1}:

Sup que $\exists\ S: W \to V$ tal que

$ST = \mathrm{id}_V$, $TS = \mathrm{id}_W$

$\Rightarrow U = U\,\mathrm{id}_W = U(TS) = (UT)S$

$= \mathrm{id}_V S = S$

Observación

1) T^{-1} se denomina la *inversa* de T.

2) Sabemos que T es inversible si y sólo si

- T es inyectiva, i. e. si $T(v) = T(u) \Rightarrow v = u$.
- T es suryectiva, i. e. $\operatorname{Im} T = V$.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$

T es inversible $\Longleftrightarrow$ T es biyectiva

Teorema

Sea $T: V \to W$ una transformación lineal entre dos $\mathbb{k}$-espacios vectoriales. Si T es inversible, entonces T^{-1} es una transformación lineal.

Demostración

Si $T: V \to W$ es inversible, existe $T^{-1}: W \to V$ tal que $\begin{cases} T^{-1}T = id_V \\ TT^{-1} = id_W \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} T^{-1}(T(v)) = v \\ T(T^{-1}(w)) = w \end{cases}$

Sean $w_1, w_2 \in W$, entonces

$T^{-1}(w_1 + w_2) = T^{-1}(T(T^{-1}(w_1)) + T(T^{-1}(w_2)))$

$= \underbrace{T^{-1}(T}(T^{-1}(w_1) + T^{-1}(w_2)))$

$= (T^{-1}T)(T^{-1}(w_1) + T^{-1}(w_2))$

$= (id_V)(T^{-1}(w_1) + T^{-1}(w_2))$

$= T^{-1}(w_1) + T^{-1}(w_2)$ ✓

Ejercicio: Probar que

Ejercicio: Probar que

$$T^{-1}(\lambda w) = \lambda T^{-1}(w) \quad \forall w \in W, \ \lambda \in \mathbb{K}$$

■

Observación

Sea $T: V \to W$ una transformación lineal.

Si $T(v_1) = T(v_2)$, $v_1, v_2 \in V$

$\Rightarrow 0_W = T(v_1) - T(v_2) \in W$

$\underset{T \text{ lineal}}{\Rightarrow} 0_W = T(v_1 - v_2)$

$\Rightarrow v_1 - v_2 \in \ker T$

Si $\ker T = \{0_V\} \Rightarrow v_1 - v_2 = 0_V$

$\Rightarrow v_1 = v_2$

Así, si $\ker T = \{0_V\} \Rightarrow T$ es inyectiva

Recíprocamente, si T es inyectiva y

$v \in \ker T \Rightarrow T(v) = 0_W$

Pero $T(0_V) = 0_W = T(v) \Rightarrow 0_V = v$

$\Rightarrow \ker T = \{0_V\}$

$$\boxed{T \text{ es inyectiva} \Leftrightarrow \operatorname{Ker} T = \{0\}}$$

Ejemplo:

Consideremos la función

$T_A\colon \mathbb{R}^{3\times 1} \to \mathbb{R}^{2\times 1}, \quad T_A(v) = Av \qquad$ para todo $v \in \mathbb{k}^{3\times 1}$,

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$

$$T_A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+3z \\ 4x+5y+6z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \ker T_A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1} \;\middle|\; \begin{matrix} x+2y+3z=0 \\ 4x+5y+6z=0 \end{matrix} \right\}$$

Sabemos que $\dim \mathbb{R}^{3\times 1} = \dim \ker T_A + \dim \operatorname{Im} T_A$

$\Rightarrow \quad 3 = \dim \ker T_A + \dim \operatorname{Im} T_A$

Pero $\dim \operatorname{Im} T_A = \text{rango } A$

$= \text{rango fila } A$

$= \text{rango columna } A$

Como las filas son li, rango $A = 2$

$\Rightarrow \dim \operatorname{Im} T_A = 2$

$\Rightarrow \dim \ker T_A = 1 \Rightarrow \ker T_A \neq \{0\}$

$\Rightarrow T_A$ <u>no</u> es inyectiva

Teorema
Sea $T: V \to W$ una transformación lineal entre dos $\mathbb{k}$-espacios vectoriales. Entonces T es inyectiva si y sólo si T manda todo subconjunto linealmente independiente de V en un subconjunto linealmente independiente de W.

Demostración Ejercicio

Idea: $\Rightarrow$) Si T es inyectiva y $\{v_1, \ldots, v_m\}$ l.i.

Supongamos que

$$0_W = a_1 T(v_1) + \cdots + a_m T(v_m)$$

con $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{k}$

Como T es t.l, tenemos que

$$0_W = T(a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m)$$

$\Rightarrow a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m \in \ker T$

Si T es inyectiva, $\ker T = \{0_V\}$

$\Rightarrow 0_V = a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m$

Como $\{v_1, \ldots, v_m\}$ es li, se sigue que $a_1 = 0, \ldots, a_m = 0$, lo que prueba que $\{T(v_1), \ldots, T(v_m)\}$ es li

$\Leftarrow$) Hay que ver que T es inyectiva

Basta ver que $\ker T = \{0_V\}$

$\Leftarrow$) Hay que ver que T es inyectiva.

Basta ver que $\ker T = \{0_V\}$

Si $v \in V$, $v \neq 0_V \Rightarrow \{v\}$ es li

Por hip, $\{T(v)\}$ es li $\Rightarrow T(v) \neq 0_W$

$\Rightarrow \ker T = \{0_V\}$.

■

Ejemplo:

Sea $V = \mathbb{k}[X]$, y consideremos las funciones

$D: \mathbb{k}[X] \to \mathbb{k}[X]$, $\quad D(p) = p'$, (derivación)

$I: \mathbb{k}[X] \to \mathbb{k}[X]$, $\quad I(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i) = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i+1} X^{i+1}$, (integración)

Si $p(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$

$$D(p(X)) = a_1 + a_2 2X + \dots + a_n n X^{n-1}$$

$$I(D(p(X))) = \frac{a_1}{1} X + \frac{a_2 \cancel{2}}{\cancel{2}} X^2 + \frac{a_3 \cancel{3}}{\cancel{3}} X^3 + \dots + \frac{a_n \cancel{n}}{\cancel{n}} X^n$$

$$= a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 + \dots + a_n X^n$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{k}[X] \arrow[r, "D"] \arrow[rr, bend left, "ID"] & \mathbb{k}[X] \arrow[r, "I"] & \mathbb{k}[X] \end{tikzcd}$$

Si $a_0 \neq 0 \Rightarrow I(D(p(X))) \neq p(X)$

$\Rightarrow ID \neq id$

si $a_0 \neq 0 \Rightarrow I(D(p(x))) \neq p(x)$

$\Rightarrow \boxed{ID \neq id}$

Al revés, si $p(x) = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$

$\Rightarrow I(p(x)) = \frac{a_0}{1} X + \frac{a_1}{2} X^2 + \dots + \frac{a_n}{n+1} X^{n+1}$

$\Rightarrow DI(p(x)) = a_0 + \frac{a_1 \cancel{2}}{\cancel{2}} X + \frac{a_2 \cancel{3}}{\cancel{3}} X^2 + \dots + \frac{a_n \cancel{(n+1)}}{\cancel{n+1}} X^n$

$= a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$

$= p(x)$

$\Rightarrow \boxed{DI = id}$

Isomorfismos

martes, 13 de abril de 2021 14:47

Recodemos que una función $T: V \to W$, se dice ***inversible*** si existe una función

$U: W \to V$, tal que $\quad UT = \mathrm{id}_V$
$\quad TU = \mathrm{id}_W$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[loop left, "\mathrm{id}_V"] \arrow[r, bend left, "T"] & W \arrow[l, bend left, "U"] \arrow[loop right, "\mathrm{id}_W"] \end{tikzcd}$$

Observación

1) Si existe es U única y se escribe $U = T^{-1}$; se denomina la *inversa* de T.

2) Sabemos que T es inversible si y sólo si

- T es inyectiva, i. e. si $T(v) = T(u) \Rightarrow v = u$.
- T es suryectiva, i. e. $\mathrm{Im}\, T = W$.

3) Si T es una transformación lineal,

T es inyectiva $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}\, T = \{\mathbf{0}_V\}$.

Teorema

Sean V, W dos $\mathbb{k}$-espacios vectoriales de dimensión finita tal que $\dim V = \dim W$.
Si $T: V \to W$ es una transformación lineal, entonces son equivalentes

(a) T es inversible,
(b) T es inyectiva,
(c) T es suryectiva.

Demostración

$(a) \Rightarrow (b)$ Sup que T es inversible. Entonces T es inyectiva y suryectiva.

$(b) \Rightarrow (c)$ Sup que T es inyectiva. Entonces $\mathrm{Ker}\, T = \{0_V\}$.

Por otro lado, sabemos que

$$\dim V = \dim \mathrm{Im}\, T + \underline{\dim \mathrm{Ker}\, T}$$

$=0$

$\Rightarrow \dim V = \dim \operatorname{Im} T$

Como $\dim V = \dim W \Rightarrow \dim W = \dim \operatorname{Im} T$

Al ser $\operatorname{Im} T$ un subespacio de W de la misma dimensión, se sigue que

$W = \operatorname{Im} T \Rightarrow T$ es suryectiva

(c) $\Rightarrow$ (a) Sup que T es suryectiva. Para ver que T es inversible basta ver que T también es inyectiva (en realidad probamos (c) $\Rightarrow$ (b))

Como T es suryectiva, tenemos que $\operatorname{Im} T = W$. Luego, $\dim \operatorname{Im} T = \dim W$

Pero,

$$\dim V = \dim \operatorname{Im} T + \dim \ker T$$

$$\Rightarrow \dim V = \dim W + \dim \ker T$$

Como $\dim V = \dim W \Rightarrow 0 = \dim \ker T$

$\Rightarrow \ker T = \{0_V\} \Rightarrow T$ es inyectiva.

■

Definición

Sean V, W dos $\mathbb{k}$-espacios vectoriales y $T: V \to W$ una transformación lineal. Decimos que T es un ***isomorfismo*** de V en W si T es inyectiva y suryectiva.

En tal caso escribimos $\qquad V \simeq W$ ó $V \simeq_T W$

y decimos que V es ***isomorfo*** a W.

Ejemplos

1) Todo espacio vectorial V es isomorfo a si mismo a través de la identidad.

La identidad es inversible

$id_V: V \to V \ , \ id_V(v) = v \ \forall v \in V$

La inversa es la misma identidad

$id_V: V \to V$

$id_V \, id_V = id_V$

1. Si $T: V \to W$ es un isomorfismo entonces $T^{-1}: W \to V$ es un isomorfismo.

Si $V \simeq W \Rightarrow W \simeq V$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, shift left, "T"] & W \arrow[l, shift left, "T^{-1}"] \end{tikzcd}$$

$TT^{-1} = id_W$

$T^{-1}T = id_V$

$\Rightarrow T^{-1}$ es inversible y $(T^{-1})^{-1} = T$.

Si $V \simeq W$ y $W \simeq Z$, entonces $V \simeq Z$.

Si $V \simeq W$ y $W \simeq Z$, entonces $V \simeq Z$.

$V \xrightarrow{T} W$, $W \xrightarrow{S} Z$ isomorfismos

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[rr, bend right, "ST"'] & W \arrow[r, "S"] & Z \end{tikzcd}$$

Vale que ST es un isomorfismo

$$\begin{cases} TT^{-1} = id_W \\ T^{-1}T = id_V \end{cases} \qquad \begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[rr, bend right, "ST"'] & W \arrow[l, bend right, "T^{-1}"'] \arrow[r, "S"] & Z \arrow[l, bend right, "S^{-1}"'] \arrow[ll, bend right=50, "(ST)^{-1}"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{cases} SS^{-1} = id_Z \\ S^{-1}S = id_W \end{cases}$$

La inversa es $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$

Tenemos que ver que

$$(ST)(T^{-1}S^{-1}) = id_Z$$

$$(T^{-1}S^{-1})(ST) = id_V$$

Pero, $(ST)(T^{-1}S^{-1}) = STT^{-1}S^{-1} =$

$= S(TT^{-1})S^{-1} = S(id_W)S^{-1} = (S\,id_W)S^{-1}$

$= SS^{-1} = id_Z$

Ejercicio: Prueben la segunda igualdad

1.

Notar que 1), 2) y 3) dicen que $\simeq$ es una *relación de equivalencia* sobre el conjunto de espacios vectoriales.

Teorema

Todo $\mathbb{k}$-espacio vectorial V de dimensión finita n es isomorfo a $\mathbb{k}^n$.

Demostración

Si $\dim V = n < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, entonces existe una base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de V, que podemos suponer que está ordenada.

Así, todo vector $v \in V$ se escribe como una combinación lineal única de los elementos de la base:

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n, \quad a_i \in \mathbb{k}$$

$\Rightarrow [v]_B = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$

Definimos la función "tomar coord"

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{[-]_B} & \mathbb{K}^n \\ v & \longmapsto & [v]_B \end{array}$$

Afirmación 1: $[-]_B$ es una t.l

Sean $v, u \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$

- $[v+u]_B = [v]_B + [u]_B$
- $[\lambda v]_B = \lambda [v]_B$

Veamos, si $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$

$u = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n$

$\Rightarrow [v]_B = (a_1, \dots, a_n)$, $[u]_B = (b_1, \dots, b_n)$

Luego, $v+u = (a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) + (b_1 v_1 + \dots + b_n v_n)$

$= (a_1 v_1 + b_1 v_1) + \dots + (a_n v_n + b_n v_n)$

$= (a_1 + b_1) v_1 + \dots + (a_n + b_n) v_n$

$\Rightarrow [v+u]_B = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$

$= (a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n)$

$= [v]_B + [u]_B$

Si $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces

$$\lambda v = \lambda(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n)$$
$$= \lambda a_1 v_1 + \dots + \lambda a_n v_n$$

$$\Rightarrow [\lambda v]_B = (\lambda a_1, \dots, \lambda a_n)$$
$$= \lambda(a_1, \dots, a_n)$$
$$= \lambda [v]_B$$

Afirmación 2: $[-]_B$ es un isomorfismo.

Tenemos que ver que $[-]_B$ es inversible

Como $\dim V = n = \dim \mathbb{K}^n$, basta probar que $[-]_B$ es inyectiva o suryectiva, por el Teorema anterior.

Probemos que $[-]_B$ es inyectiva; esto es $\ker [-]_B = \{0_V\}$

Sup que $v \in \ker [-]_B \Rightarrow [v]_B = (0, \dots, 0)$

$$\Rightarrow v = 0v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n = 0_V$$

$$\Rightarrow \ker [-]_B = \{0_V\}$$

■

Ejemplos

Ejemplos

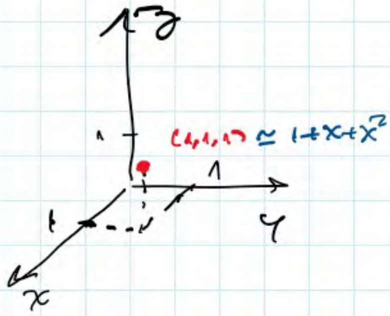
1) $\mathcal{P}_n(\mathbb{k}) \simeq \mathbb{k}^{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Si tomamos la base $E = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$, el isomorfismo del teorema está dado por tomar coordenadas

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$
$$[p(x)]_E = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{k}^{n+1}$$

Si $n = 2$, $E = \{1, x, x^2\}$, $\mathbb{k} = \mathbb{R}$

$$\mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^3$$
$$c + bx + ax^2 \longmapsto (c, b, a)$$
$$1 \longmapsto (1,0,0)$$
$$x \longmapsto (0,1,0)$$
$$x^2 \longmapsto (0,0,1)$$



2) $M_n(\mathbb{k}) \simeq \mathbb{k}^{n^2}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

$\dim M_n(\mathbb{k}) = n^2$

Base Canónica $E = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}}_{e_{11}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & \cdots & & & 0 \end{pmatrix}}_{e_{12}}, \dots, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ \vdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}}_{e_{nn}} \right\}$

Si $n=2$, $E=\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}}_{e_{11}}, \underbrace{\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}}_{e_{12}}, \underbrace{\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}}_{e_{21}}, \underbrace{\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}}_{e_{22}} \right\}$

Si $A=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&\\ a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\ \vdots&&&\\ 0&\cdots&&0\end{pmatrix} + \cdots + a_{nn}\begin{pmatrix}0&\cdots&0\\ \vdots&&\\ 0&\cdots&1\end{pmatrix}$

$$= a_{11}e_{11} + a_{12}e_{12} + \cdots + a_{nn}e_{nn}$$

$$[A]_E = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn})$$

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + a_{12}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$[A]_B = (a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})$$

$$M_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^4$$

3) $\mathbb{k}^{n\times 1} \simeq \mathbb{k}^n \simeq \mathbb{k}^{1\times n}$

$$\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix} \longleftrightarrow (a_1, \dots, a_n)$$

$[a_1, \ldots, a_n]$

Proposición
Sean V, W dos $\mathbb{k}$-espacios vectoriales de dimensión finita.
Entonces

$$V \simeq W \Leftrightarrow \dim V = \dim W$$

Demostración

$\Rightarrow$) Sup que $V \simeq W \Rightarrow \exists\, T: V \to W$
que es un isomorfismo
$\Rightarrow \ker T = \{0_V\}$, $\operatorname{Im} T = W$
Pero,
$\dim V = \dim \operatorname{Im} T + \dim \ker T$
$\Rightarrow \dim V = \dim W + 0$
$\Rightarrow \boxed{\dim V = \dim W}$

$\Leftarrow$) Sup que $\dim V = \dim W = n$
hay que encontrar un isomorfismo
Por el Teo anterior, $V \simeq \mathbb{k}^n$
$W \simeq \mathbb{k}^n$

T

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "{[\ ]_B}"', "\sim"] & & W \arrow[dl, "{[\ ]_{B'}}", "\sim"'] \\ & \mathbb{k}^n \arrow[ur, bend left, "{[\ ]_{B'}^{-1}}"] & \end{tikzcd}$$

Si $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ es base de V
$B' = \{w_1, \dots, w_n\}$ es base de W

Si $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \in V$
$\Rightarrow [v]_B = (a_1, \dots, a_n)$

$$([v]_B)_{B'}^{-1} = a_1 w_1 + \dots + a_n w_n$$

$$\Rightarrow \quad T(v) = a_1 w_1 + \dots + a_n w_n$$

Ejercicio: T es un isomorfismo.

■

Matriz de una transformación lineal

Sean V, W dos $\mathbb{k}$-espacios vectoriales de dimensión finita y $T: V \to W$ una transformación lineal.

Supongamos que $\dim V = n$ y $\dim W = m$, $n, m \in \mathbb{N}$.

Sean $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V (ordenada) y $B' = \{w_1, \dots, w_m\}$ una base de W (ordenada).

Sean $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V y $B' = \{w_1, \ldots, w_m\}$ una base de W.
(ordenada) (ordenada)

Por un teorema que vimos una clase pasada, sabemos que la transformación lineal T queda determinada por los valores que toma en los elementos de la base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$:

Para cada $v_j \in B$, existen escalares $a_{1j}, \ldots, a_{mj} \in \Bbbk$ tales que

$$T(v_j) = a_{1j}w_1 + \cdots + a_{mj}w_m = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}w_i$$

Así, los escalares $a_{1j}, \ldots, a_{mj}$ son las coordenadas del vector $T(v_j)$ en la base $B' = \{w_1, \ldots, w_m\}$:

$$[T(v_j)]_{B'} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

Definición

Sean V, W dos $\Bbbk$-espacios vectoriales de dimensión finita y $T: V \to W$ una transformación lineal.

Supongamos que $\dim V = n$ y $\dim W = m$

Se define la ***matriz de T con respecto a las bases ordenadas*** $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $B' = \{w_1, \ldots, w_m\}$ como

$$[T]_{B'B} = ([T(v_1)]_{B'} \quad [T(v_2)]_{B'} \quad \cdots \quad [T(v_n)]_{B'}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Es decir, las columnas de $[T]_{B'B}$ son las coordenadas en la base $B' = \{w_1, \ldots, w_m\}$ de los transformados de los vectores de la base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$.

Matriz de una transformación lineal

jueves, 15 de abril de 2021 13:02

Sean V, W dos $\Bbbk$-espacios vectoriales de dimensión finita y $T: V \to W$ una transformación lineal.

Supongamos que $\dim V = n$ y $\dim W = m$, $n, m \in \mathbb{N}$.

Sean $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V y $B' = \{w_1, \dots, w_m\}$ una base de W.
(ordenada) (ordenada)

Por un teorema que vimos una clase pasada, sabemos que la transformación lineal T queda determinada por los valores que toma en los elementos de la base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$:

únicos

Para cada $v_j \in B$, existen escalares $a_{1j}, \dots, a_{mj} \in \Bbbk$ tales que

$$T(v_j) = a_{1j}w_1 + \cdots + a_{mj}w_m = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}w_i$$

Esto es:

$$\begin{aligned}
T(v_1) &= a_{11}w_1 + \cdots + a_{m1}w_m \\
T(v_2) &= a_{12}w_1 + \cdots + a_{m2}w_m \\
&\vdots \\
T(v_n) &= a_{1n}w_1 + \cdots + a_{mn}w_m
\end{aligned}$$

Así, los escalares $a_{1j}, \dots, a_{mj}$ son las coordenadas del vector $T(v_j)$ en la base $B' = \{w_1, \dots, w_m\}$:

$$[T(v_j)]_{B'} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

Definición

Sean V, W dos $\Bbbk$-espacios vectoriales de dimensión finita y $T: V \to W$ una transformación lineal.

Supongamos que $\dim V = n$ y $\dim W = m$

Se define la ***matriz de T con respecto a las bases ordenadas*** $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $B' = \{w_1, \dots, w_m\}$ como

$$[T]_{B'B} = ([T(v_1)]_{B'} \quad [T(v_2)]_{B'} \quad \cdots \quad [T(v_n)]_{B'}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Es decir, las columnas de $[T]_{B'B}$ son las coordenadas en la base $B' = \{w_1, \dots, w_m\}$ de los transformados de los vectores de la base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$.

Así, si tomamos $v \in V$, sabemos que existen **únicos** $b_1, \dots, b_n \in \Bbbk$ tales que

$$v = b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n$$

Esto dice que

$$[v]_B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, si aplicamos la transformación T al vector $v \in V$ tenemos que

$$T(v) = T(b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n) = b_1 T(v_1) + \cdots + b_n T(v_n) =$$

$$= b_1(a_{11}w_1 + \cdots + a_{m1}w_m) + \cdots + b_n(a_{1n}w_1 + \cdots + a_{mn}w_m)$$

$$= (b_1a_{11} + \cdots + b_na_{1n})w_1 + (b_1a_{21} + \cdots + b_na_{2n})w_2 + \cdots + (b_1a_{m1} + \cdots + b_na_{mn})w_m$$

Esta combinación lineal es única

Así, si calculamos las coordenadas de $T(v)$ en la base $B' = \{w_1, \dots, w_m\}$ tenemos

$$[T(v)]_{B'} = \begin{bmatrix} b_1 a_{11} + \dots + b_n a_{1n} \\ b_1 a_{21} + \dots + b_n a_{2n} \\ \vdots \\ b_1 a_{m1} + \dots + b_n a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\boxed{[T]_{B'B}[v]_B = [T(v)]_{B'}}$$

Ejemplos

Sea V un $\mathbb{k}$-espacio vectorial de dimensión finita

0) Si $\mathbb{O} : V \longrightarrow W$, $\dim V = 3$, $\dim W = 2$

$\mathbb{O}(v) = 0_W$

$B = \{v_1, v_2, v_3\}$, $v \in V$, $v = b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3$

$B' = \{w_1, w_2\}$

$\mathbb{O}(v) = 0_W = 0w_1 + 0w_2$

$$[\mathbb{O}(v)] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$[\mathbb{O}(v_1)] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $[\mathbb{O}(v_2)] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $[\mathbb{O}(v_3)] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$[\mathbb{O}]_{B'B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbb{O}(v)]_{B'} = \dim W \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\dim V} \right. \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1) $[\mathrm{id}]_{BB} = I =$ matriz identidad de tamaño $\dim V \times \dim V$

para toda base B de V.

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$,

$\mathrm{id}(v_1) = v_1$, $\mathrm{id}(v_2) = v_2$, ..., $\mathrm{id}(v_n) = v_n$

$[\mathrm{id}(v_1)]_B = [v_1]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, $[v_2]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, ..., $[v_n]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$

$$[\mathrm{id}]_{BB} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix} = I.$$

2) Sean $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $B' = \{w_1, \dots, w_n\}$ dos bases de V, $\dim V = n$.

Si $v \in V$, $v = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n$

$= c_1 w_1 + \dots + c_n w_n$

$[v]_B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$, $[v]_{B'} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$

Sabemos que $[v]_{B'} = C_{B'B} [v]_B$

matrices de cambio de base

$[v]_B = C_{BB'} [v]_{B'}$

Donde $C_{B'B} = \begin{bmatrix} [v_1]_{B'} & \cdots & [v_n]_{B'} \end{bmatrix}$

columnas = coordenadas de los vectores de la base B en la base B'

Como $(id)(v_i) = v_i \quad \forall\, 1 \leq i \leq n$

$\Rightarrow \quad [v_i]_{B'} = [(id)(v_i)]_{B'} = \underbrace{[id]_{B'B}[v_i]_B}$

Como la matriz es única, tenemos que $\boxed{C_{B'B} = [id]_{B'B}}$

Específicamente, si $V = \mathbb{R}^2$ y $B = E = \{(1,0),(0,1)\}$, $B' = \{(1,1),(1,-1)\}$

$id: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$[id(1,1)]_E = [(1,1)]_E = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$[id(1,-1)]_E = [(1,-1)]_E = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow [id]_{EB'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = C_{EB'}$

Así, $[id]_{B'E} = C_{EB'}^{-1} = C_{B'E} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$

3) Sea $V = \mathbb{k}^{m\times 1}$, $W = \mathbb{k}^{n\times 1}$, $A \in \mathbb{k}^{n\times m}$

Consideremos las función

$T_A: \mathbb{k}^{m\times 1} \to \mathbb{k}^{n\times 1}$, $\quad T_A(v) = Av \quad$ para todo $v \in \mathbb{k}^{m\times 1}$.

$T_A \colon \mathbb{k}^{m\times 1} \to \mathbb{k}^{n\times 1}, \quad T_A(v) = Av \quad$ para todo $v \in \mathbb{k}^{m\times 1}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \qquad \mathcal{E}_m = \left\{ \overset{e_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}, \overset{e_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}, \ldots, \overset{e_m}{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}} \right\}$$

$$\mathcal{E}_n = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$[T_A]_{\mathcal{E}_n \mathcal{E}_m} = \begin{bmatrix} [T_A(e_1)]_{\mathcal{E}_n} & \cdots & [T_A(e_m)]_{\mathcal{E}_n} \end{bmatrix}$$

$$T_A(e_1) = T_A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = Ae_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} = [Ae_1]_{\mathcal{E}_n}$$

$$T_A(e_2) = \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \ldots, T_A(e_m) = \begin{pmatrix} a_{1m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix} = [Ae_m]_{\mathcal{E}_n}$$

$$\Rightarrow \quad [T_A]_{\mathcal{E}_n \mathcal{E}_m} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} = A$$

Sup que $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

$$T_A \colon \mathbb{R}^{3\times 1} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 1} \qquad \mathcal{E}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$T_A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{E}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$T_A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad T_A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad [T_A]_{\mathcal{E}_2 \mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Con lo hecho anteriormente hemos probado una parte del siguiente teorema

Teorema

Sean V, W dos $\mathbb{k}$-espacios vectoriales de dimensión finita, con $\dim V = n$ y $\dim W = m$.
Sean $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $B' = \{w_1, \ldots, w_m\}$ bases ordenadas de V y W, respectivamente.

Entonces para cada transformación lineal $T: V \to W$ existe una única matriz $A \in \mathbb{k}^{m\times n}$ tal que

$$[T(v)]_{B'} = A[v]_B$$

Al se única, escribimos $[T]_{B'B} = A$. En particular, la asignación

$$T \longrightarrow [T]_{B'B}$$

define un isomorfismo entre $\mathrm{Hom}(V, W)$ y $\mathbb{k}^{m\times n}$

Demostración

Hemos probado ya la existencia de la matriz, que depende de las bases elegidas.

Unicidad: Ejercicio.

Veamos que la correspondencia

$$\mathrm{Hom}(V,W) \longrightarrow \mathbb{k}^{m\times n}$$

es lineal:

Sup que $T, S \in \mathrm{Hom}(V,W)$

Por el teorema $[T+S]_{B'B}$ satisface que

$$[(T+S)(v)]_{B'} = [T+S]_{B'B}\,[v]_B$$

Pero $\left[(T+S)(v)\right]_{B'} = \left[\underbrace{T(v)}_{\in W} + \underbrace{S(v)}_{\in W}\right]_{B'}$

$= \left[T(v)\right]_{B'} + \left[S(v)\right]_{B'}$

$= [T]_{B'B}[v]_B + [S]_{B'B}[v]_B$

$= \left([T]_{B'B} + [S]_{B'B}\right)[v]_B$

Por unicidad de la matriz

$$[T+S]_{B'B} = [T]_{B'B} + [S]_{B'B}$$

Análogamente, si $\lambda \in \mathbb{k}$,

$$[\lambda T]_{B'B} = \lambda [T]_{B'B}$$

Pues $\left[(\lambda T)(v)\right]_{B'} = \left[\lambda(T(v))\right]_{B'}$

$= \lambda \left[T(v)\right]_{B'} = \lambda\left([T]_{B'B}[v]\right)_B$.

■

Ejemplos

1) $\mathrm{Hom}(\mathbb{k}^3, \mathbb{k}^2) \simeq \mathbb{k}^{2\times 3} \simeq \mathbb{k}^6$

$\dim \underset{V}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{k}^3}} = 3$, $\dim \underset{W}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{k}^2}} = 2$

Si tomamos bases canónicas de salida

y llegada: $\mathcal{E}_3 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

$\mathcal{E}_2 = \{(1,0),(0,1)\}$

Si $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y,z) = (2x-y, 0)$

$T(1,0,0) = (2,0)$, $T(0,1,0) = (-1,0)$, $T(0,0,1) = (0,0)$

$[T(1,0,0)]_{\mathcal{E}_2} = \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$, $[T(0,1,0)]_{\mathcal{E}_2} = \begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$, $[T(0,0,1)]_{\mathcal{E}_2} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

$\Rightarrow [T]_{\mathcal{E}_2\mathcal{E}_3} = \begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

2) Si V y W son dos espacios vectoriales con $\dim V = n$ y $\dim W = m$ entonces

$$V \simeq \mathbb{k}^n \qquad \text{y} \qquad W \simeq \mathbb{k}^m.$$

Tomemos $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V y $B' = \{w_1, \dots, w_m\}$ una base de W.

Esto nos ayuda a encontrar un isomorfismo

$$\mathrm{Hom}(V, W) \simeq \mathbb{k}^{m\times n}$$

que está dado por tomar la matriz asociada a una transformación lineal.

Esto es, si $T: V \to W$ es una transformación lineal, entonces

$$A = [T]_{B'B} \in \mathbb{k}^{m\times n}$$

Usando esta matriz $A \in \mathbb{k}^{m\times n}$ podemos considerar la transformación lineal

$T_A: \mathbb{k}^{n\times 1} \to \mathbb{k}^{m\times 1}$, $\quad T_A(v) = Av \quad$ para todo $v \in \mathbb{k}^{n\times 1}$.

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "{[-]_B}"', "\cong"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & W \arrow[d, "{[-]_{B'}}", "\cong"'] \\
\mathbb{k}^n \arrow[r, "{A = [T]_{B'B}}"'] & \mathbb{k}^m
\end{tikzcd}
$$

Así, toda transformación lineal entre dos $\mathbb{k}$-espacios vectoriales de dimensión finita es *equivalente* a una de la forma $T_A \colon \mathbb{k}^{n\times 1} \to \mathbb{k}^{m\times 1}$.

La equivalencia está dada por la elección de bases ordenadas.

Notación

Si V es un espacio vectorial con base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$, y $T\colon V \to V$ es una transformación lineal, escribimos

$$[T]_{BB} = [T]_B \in \mathbb{k}^{n\times n}$$

si elegimos la misma base de entrada y salida.

Ejemplo:

Sea $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, y $D\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ la derivación.

Tomemos la base canónica $E = \{1, X, X^2\}$.

Calculemos $[D]_E$

$D(1) = 0 \Rightarrow [D(1)]_E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$D(X) = 1 \Rightarrow [D(X)]_E = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = [1]_E$

$D(X^2) = 2X$

$[D(X^2)]_E = [2X]_E = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow [D] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$p(x) = c + bx + ax^2$$

$$[p(x)]_E = \begin{bmatrix} c \\ b \\ a \end{bmatrix} \Rightarrow [D(p(x))]_E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ b \\ a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b \\ 2a \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$D(p(x)) = b \cdot 1 + 2ax + 0x^2$$

$$D(p(x)) = b + 2ax$$

Matrices inversibles e isomorfismos

martes, 20 de abril de 2021 16:26

Recordemos que dados:

- dos $\Bbbk$-espacios vectoriales de dimensión finita V y W,
  con $\dim V = n$ y $\dim W = n$ y bases ordenadas $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $B' = \{w_1, \dots, w_m\}$.
- y una transformación lineal $T: V \to W$,

entonces existe una única matriz $[T]_{B'B} \in \Bbbk^{m\times n}$ tal que

$$[T(v)]_{B'} = [T]_{B'B}[v]_B$$

$[T]_{B'B}$ es la matriz de T con respecto a las bases ordenadas B y B'

$$[T]_{B'B} = ([T(v_1)]_{B'} \quad [T(v_2)]_{B'} \quad \cdots \quad [T(v_n)]_{B'}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

⚠ ¡Si cambio de bases, puede cambiar la matriz!

Además, vimos que si $T, S \in \mathrm{Hom}(V, W)$
y $\lambda \in \Bbbk$, vale que

$$\begin{cases} [T+S]_{B'B} = [T]_{B'B} + [S]_{B'B} \\ [\lambda T]_{B'B} = \lambda [T]_{B'B} \end{cases}$$

Teorema

Sean V, W, Z tres $\mathbb{k}$-espacios vectoriales de dimensión finita y supongamos que B, B' y B'' son las bases ordenadas de V, W y Z, respectivamente.

Consideremos $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$ y $S \in \mathrm{Hom}(W, Z)$.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[rr, bend right, "ST"'] & W \arrow[r, "S"] & Z \end{tikzcd}$$

Entonces

$$[ST]_{B''B} = [S]_{B''B'}[T]_{B'B}$$

Demostración

Recordemos primero la propiedad que cumplen estas matrices.

Si $v \in V$, $w \in W$, vale que

$$[(ST)(v)]_{B''} = [ST]_{B''B}[v]_B$$

$$[T(v)]_{B'} = [T]_{B'B}[v]_B$$

$$[S(w)]_{B''} = [S]_{B''B'}[w]_{B'}$$

Pero, $[(ST)(v)]_{B''} = [S(\underbrace{T(v)}_{w})]_{B''}$

$= [S]_{B''B'}[T(v)]_{B'} = [S]_{B''B'}[T]_{B'B}[v]_B$

$$\Rightarrow \quad [(ST)(v)]_{B''} = \left([S]_{B''B'}\,[T]_{B'B}\right)[v]_B$$

Pero $\quad [(ST)(v)]_{B''} = [ST]_{B''B}\,[v]_B$

Por unicidad de la matriz de la transf. lineal, deben ser la misma matriz.

■

Observación

Si $T \in \mathrm{End}(V)$ es una transformación lineal inversible, entonces

$$[T]_B{}^{-1} = [T^{-1}]_B$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] & V \arrow[l, bend left, "T^{-1}"] \end{tikzcd} \qquad \begin{cases} T^{-1}T = id_V \\ T\,T^{-1} = id_V \end{cases}$$

Si tomamos una base B de V

$\Rightarrow [id_V]_B = I$ matriz identidad

Por el Teo anterior

$$[id_V] = [T\,T^{-1}]_B = [T]_B\,[T^{-1}]_B$$

$$[id_V] = [T^{-1}T]_B = [T^{-1}]_B\,[T]_B$$

$$\Rightarrow \quad I = [T]_B[T^{-1}]_B = [T^{-1}]_B[T]_B$$

$\Rightarrow \quad [T^{-1}]_B = [T]_B^{-1}$

Recordemos:

$\mathrm{End}(V) = \mathrm{Hom}(V, V)$

Proposición
Sea $T \in \mathrm{End}(V)$, donde V es un $\mathbb{k}$-espacio vectorial de dimensión finita.
Sea B una base ordenada de V. Entonces

$$T \text{ es inversible} \iff [T]_B \text{ es inversible}$$

Demostración

$\Rightarrow$) lo hicimos en la cuenta anterior: si T es inversible, $[T]_B^{-1} = [T^{-1}]_B$; esto es, $[T]_B$ es inversible

$\Leftarrow$) Sup que $[T]_B$ es inversible luego, rango de $[T]_B$ es $n = \dim V$, es decir, las filas son linealmente indep. Vimos que el rango fila es el mismo que el rango columna, lo que nos dice que las columnas son li.

Como las columnas son las coordenadas en la base B de los transformados de la misma base, los transformados son li. Como los transformados de una base generan $\mathrm{Im}\, T$, tenemos

$\dim \operatorname{Im} T = rg[T]_B = \dim V$

Así, tenemos que $T: V \to V$ es suryectiva. Como el espacio de salida es el mismo que el de llegada, T también es inyectiva y por lo tanto inversible.

■

Ejemplo

Sea T: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $\qquad E = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

$T(x, y, z) = (x, x + y, x + y + z)$

$$T(1,0,0) = (1,1,1)$$
$$T(0,1,0) = (0,1,1) \quad \Rightarrow \quad [T]_E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$T(0,0,1) = (0,0,1)$$

$\Rightarrow [T]_E$ es inversible pues $\det [T]_E = 1 \neq 0$

$\Rightarrow T$ es inversible

Ejercicio: encontrar T^{-1}.

$$\Rightarrow \quad [T]_E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Transf. de la base E en coord

$T^{-1}(1,0,0) = (1,-1,0)$

$T^{-1}(0,1,0) = (0,1,-1)$

$T^{-1}(0,1,0) = (0,1,-1)$

$T^{-1}(0,0,1) = (0,0,1)$

$\Rightarrow T^{-1}(x,y,z) = (x, -x+y, -y+z)$

Obs Si $T: V \to W$, i.e. $T \in Hom(V,W)$, vale igual que T es inversible $\Leftrightarrow [T]_{BB'}$ es inversible

Si B es base de V, $\dim V = n$

B' es base de W, $\dim V = m$

Tenemos que $[id_V]_B = I_n$ $(n \times n)$

$[id_W]_{B'} = I_m$ $(m \times m)$

$\Rightarrow$) Si T es inversible $\Rightarrow \dim V = \dim W$

$\Rightarrow I_n = I_m$ son la misma matriz

y $\begin{cases} T^{-1}T = id_V \\ T\, T^{-1} = id_W \end{cases}$

$$\begin{tikzcd} \underset{B}{V} \arrow[r, bend left, "T"] & \underset{B'}{W} \arrow[l, bend left, "T^{-1}"] \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow [T^{-1}T]_B = [id_V]_B = I_n = I$

$\parallel$

$[T\,T^{-1}]_{B'} = [id_W]_{B'} = I_m = I$

$$\Rightarrow \quad I = [T^{-1}T]_B = [T^{-1}]_{BB'} [T]_{B'B}$$
$$I = [T\,T^{-1}]_{B'} = [T]_{B'B} [T^{-1}]_{BB'}$$

$\Leftarrow$) Si $[T]_{B'B}$ es inversible, en part. es cuadrada $\Rightarrow$ $\dim V = \dim W$
Para ver que es inversible basta ver que T es inyectiva o suryectiva
Ejercicio: terminar dem.

¿Qué sucede si queremos cambiar las bases que están asociadas a la matriz de una transformación lineal?

Empecemos analizando la situación para endomorfismos.

Teorema

Sean V, W dos $\mathbb{k}$-espacios vectoriales de dimensión finita, B_1, B_2 dos bases ordenadas de V, y B'_1, B'_2 dos bases ordenadas de W.

Entonces $$[T]_{B'_2B_2} = C_{B'_2B'_1}\,[T]_{B'_1B_1}\,C_{B_1B_2}$$

$$\begin{array}{ccccccc} V & \xrightarrow{id} & V & \xrightarrow{T} & W & \xrightarrow{id} & W \\ B_2 & C_{B_1B_2} & B_1 & [T]_{B'_1B_1} & B'_1 & C_{B'_2B'_1} & B'_2 \end{array}$$

Demostración (en video aparte)

■

Observación

1) Si $T: V \to V$, el teorema anterior dice que si B_1 y B_2 son bases de V

$$\boxed{[T]_{B_2} = C_{B_2B_1}\,[T]_{B_1}\,C_{B_1B_2}}$$

Como $C_{B'B} = C_{BB'}{}^{-1}$, tenemos que

$$\boxed{[T]_{B'} = C_{BB'}{}^{-1}[T]_B C_{BB'}}$$

Matriz de una transformación y cambios de bases

jueves, 22 de abril de 2021 14:46

¿Qué sucede si queremos cambiar las bases que están asociadas a la matriz de una transformación lineal?

Teorema

Sean V, W dos $\mathbb{k}$-espacios vectoriales de dimensión finita, B_1, B_2 dos bases ordenadas de V, y B'_1, B'_2 dos bases ordenadas de W.

Si $T \in \mathrm{End}(V, W)$, entonces

$$[T]_{B'_2B_2} = C_{B'_2B'_1}[T]_{B'_1B_1}C_{B_1B_2}$$

$$\begin{array}{ccccccc} V & \xrightarrow{\quad id \quad} & V & \xrightarrow{\quad T \quad} & W & \xrightarrow{\quad id \quad} & W \\ B_2 & C_{B_1B_2} & B_1 & [T]_{B'_1B_1} & B'_1 & C_{B'_2B'_1} & B'_2 \end{array}$$

Demostración

Idea: Usar las propiedades de la matriz de una transformación, pues estas propiedades determinan unívocamente la matriz.

Propiedades:

$$[T(v)]_{B'_2} = [T]_{B'_2B_2}[v]_{B_2}$$

$$[T(v)]_{B'_1} = [T]_{B'_1B_1}[v]_{B_1}$$

Sabemos que $[v]_{B_1} = C_{B_1B_2}[v]_{B_2} \quad \forall v \in V$

$$[w]_{B_2'} = C_{B_2' B_1'} [w]_{B_1'} \quad \forall w \in W$$

Tomando $w = T(v)$, tenemos que

$$[T(v)]_{B_2'} = \underline{C_{B_2' B_1'}} [T(v)]_{B_1'}$$

$$= C_{B_2' B_1'} \left([T]_{B_1' B_1} [v]_{B_1} \right)$$

$$= \left(\underbrace{C_{B_2' B_1'} [T]_{B_1' B_1}} \right) [v]_{B_1}$$

(Por unicidad, esta igualdad nos dice

$$[T]_{B_2' B_1} = C_{B_2' B_1'} [T]_{B_1' B_1} \Big)$$

$$= \left(C_{B_2' B_1'} [T]_{B_1' B_1} \right) C_{B_1 B_2} [v]_{B_2}$$

$$\Rightarrow [T(v)]_{B_2'} = \left(\underbrace{C_{B_2' B_1'} [T]_{B_1' B_1} C_{B_1 B_2}}_{=[T]_{B_2' B_2}} \right) [v]_{B_2}$$

Pero $[T(v)]_{B_2'} = [T]_{B_2' B_2} [v]_{B_2}$

Por unicidad de la matriz tenemos que

$$[T]_{B_2'B_2} = C_{B_2'B_1'}\,[T]_{B_1'B_1}\,C_{B_1B_2}$$

$\blacksquare$

Ejemplo

Consideremos $T: P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$T(ax^2+bx+c) = (2a, b)$$

Fijemos las bases de $P_2(\mathbb{R})$

$$B_1 = \{1, x, x^2\}, \quad B_2 = \{1, 1+x, 1+x+x^2\}$$

Fijemos las bases de $\mathbb{R}^2$

$$B_1' = \{(1,0),(0,1)\}, \quad B_2' = \{(1,1),(1,-1)\}$$

Calculemos $[T]_{B_1'B_1}$

$$T(1) = (0,0) \Rightarrow [T(1)]_{B_1'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T(x) = (0,1) \Rightarrow [T(x)]_{B_1'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T(x^2) = (2,0) \Rightarrow [T(x^2)]_{B_1'} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [T]_{B_1' B_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculemos ahora $[T]_{B_2' B_2}$

Según la prop. tenemos que

$$[T]_{B_2' B_2} = C_{B_2' B_1'} \underbrace{[T]_{B_1' B_1}}_{\checkmark} C_{B_1 B_2}$$

$C_{B_1 B_2}$ = columnas son las coord. de los vectores de B_2 en la base B_1

Recordemos que $B_2 = \{1, 1+X, 1+X+X^2\}$ base de $P_2(\mathbb{R})$

$$\Rightarrow [1]_{B_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[1+X]_{B_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[1+X+X^2]_{B_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow C_{B_1 B_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Necesitamos calcular $C_{B_2' B_1'}$ con

$B_1' = \{(1,0),(0,1)\}$, $B_2' = \{(1,1),(1,-1)\}$

Sabemos que $C_{B_2' B_1'} = C_{B_1' B_2'}^{-1}$

y $C_{B_1' B_2'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

Vale que (ejercicio)

$$C_{B_1' B_2'}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} = C_{B_2' B_1'}$$

En resumen:

$$[T]_{B_2' B_2} = C_{B_2' B_1'} [T]_{B_1' B_1} C_{B_1 B_2}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \boxed{\begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = [T]_{B_2' B_2}}$$

Definición

Sean $A, B \in M_n(\Bbbk)$. Decimos que ***A es B semejante a sobre*** $\Bbbk$ si existe una matriz inversible $P \in M_n(\Bbbk)$ tal que

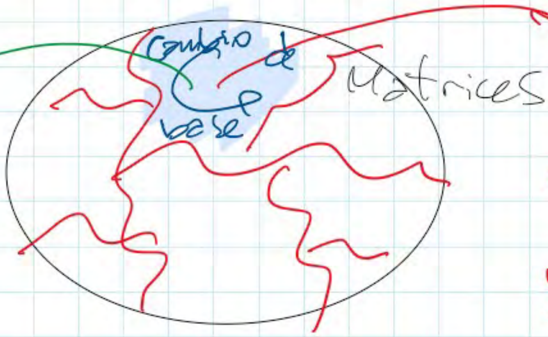
$$B = P^{-1}AP$$

Observación

1) La relación en $M_n(\Bbbk)$ dada por $A \sim B$ si y sólo si A semejante B es una relación de equivalencia.

2) El teorema anterior nos dice que si $T \in \mathrm{End}(V)$ y B, B' dos bases ordenadas de V, entonces $[T]_{B'}$ es semejante a $[T]_B$, es decir $[T]_B \sim [T]_{B'}$.

"elijo" la matriz más simple posible



Cada clase ⊆ matrices de una t.l.

Funcionales lineales

jueves, 22 de abril de 2021 13:13

Definición

Sea V un $\mathbb{k}$-espacio vectorial.
Una transformación lineal $f: V \to \mathbb{k}$ se dice un ***funcional lineal***.
En particular,

$$f(\lambda v + u) = \lambda f(v) + f(u), \qquad \text{para todo } \lambda \in \mathbb{k}, v, u \in V.$$

El espacio de funcionales lineales se denotará $V^* = \mathbf{Hom}(V, \mathbb{k})$ y se denominará el ***espacio dual de V***.

Ejemplo

1) Sea $V = \mathbb{R}^3$, y tomemos la base canónica

$E = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$, $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

Así, todo funcional lineal queda definido por

$$\begin{cases} f(1,0,0) = a \in \mathbb{R} \\ f(0,1,0) = b \\ f(0,0,1) = c \end{cases}$$

Si $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$\Rightarrow (x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$

$\Rightarrow f(x,y,z) = f(x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1))$

$= x f(1,0,0) + y f(0,1,0) + z f(0,0,1)$

$= ax + by + cz$

$\Rightarrow f(x,y,z) = ax + by + cz$

En general, todo funcional lineal de $V = \mathbb{k}^n$ es de la forma

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n$$

para ciertos $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{k}$.

Los escalares $a_1, \dots, a_n$ quedan determinados por los valores en la base canónica

$B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$: $\quad f(e_i) = a_i$ para todo $1 \le i \le n$

$$\begin{aligned} f(e_1) &= a_1 \\ f(e_2) &= a_2 \\ &\vdots \\ f(e_n) &= a_n \end{aligned}$$

2) Sea $V = M_n(\mathbb{k})$, y consideremos la función *traza*

$$\text{tr}: M_n(\mathbb{k}) \to \mathbb{k}$$

$$tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}, \qquad A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$$

Ej $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\text{tr} A = 1 + 2 + (-1) = 2$

La función traza es un funcional lineal

Si es una transf. lineal:

- $\text{tr}(A+B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$:

Si $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \Rightarrow A+B = (a_{ij} + b_{ij})$

$\Rightarrow \text{Tr}(A+B) = \sum_{i=1}^n (a_{ii} + b_{ii}) = \sum_{i=1}^n a_{ii} + \sum_{i=1}^n b_{ii}$

$= \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$

- $\text{tr}(\lambda A) = \lambda \, \text{tr}(A)$:

Si $A = (a_{ij}) \Rightarrow \lambda A = (\lambda a_{ij})$

$\Rightarrow \text{tr}(\lambda A) = \sum_{i}^n \lambda a_{ii} = \lambda \sum^n a_{ii}$

$$\Rightarrow \operatorname{tr}(\lambda A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda a_{ii} = \lambda \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_{ii}}$$

$$= \lambda \operatorname{tr}(A)$$

$$\ker \operatorname{tr} = \{ A \in M_n(\mathbb{K}) \mid \operatorname{tr} A = 0 \}$$

$$= \mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$$ espacio lineal especial

$n=2$, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Como $\dim M_n(\mathbb{K}) = \dim \ker \operatorname{tr} + \dim \operatorname{Im} \operatorname{tr}$

$$n^2 = \dim \ker \operatorname{tr} + 1$$

$\Rightarrow \dim \ker \operatorname{tr} = n^2 - 1$

$n=2 \Rightarrow \dim \ker \operatorname{tr} = 4-1 = 3$

Ejercicio: 1) Ver que H, E y F son base de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) = \ker \operatorname{tr}$

2) Si miramos la función

$$[\ ,\ ] : M_n(\mathbb{K}) \times M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow M_n(\mathbb{K})$$

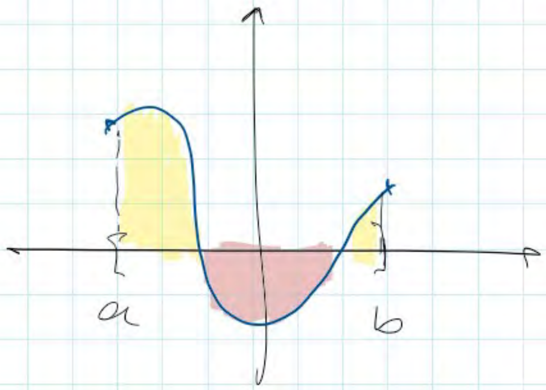
$$(A, B) \longmapsto [A,B] = AB - BA$$

Vale que $\operatorname{tr}([A,B]) = 0$, es decir que si $A, B \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{K}) \Rightarrow [A,B] \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$.

3) Sea $V = C([a,b])$ el espacio de funciones contínuas del invervalo $[a,b]$ en $\mathbb{R}$.

Consideremos la función $L: C([a,b]) \to \mathbb{R}$ dada por la integral

$$L(g) = \int_a^b g(x)dx \qquad \text{para toda } g \in C([a,b])$$



L es un funcional lineal pues

- $L(g+h) = \int_a^b (g+h)(x)\,dx$
$= \int_a^b (g(x)+h(x))\,dx$
$= \int_a^b g(x)\,dx + \int_a^b h(x)\,dx =$
$= L(g) + L(h)$

- $L(\lambda g) = \int_a^b (\lambda g)(x)\,dx = \int_a^b \lambda g(x)\,dx$
$= \lambda \int_a^b g(x)\,dx. \qquad \forall g \in C[a,b].$

4) Sea $V = D(\mathbb{R})$ el espacio de funciones derivables en $\mathbb{R}$

Consideremos la función $\frac{d}{dt}|_{t=0}: D(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dada por la derivada y la evaluación en $t = 0$:

$$\frac{dg}{dt}|_{t=0} = g'(0) \qquad \text{para toda } g \in D(\mathbb{R}).$$

$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}$ es un funcional lineal

- $\frac{d(f+g)}{dt}\Big|_{t=0} = (f'+g')(0) = f'(0)+g'(0)$

- $\frac{d}{dt}(\lambda g)\Big|_{t=0} = (\lambda g)'(0) = \lambda(g')(0) = \lambda g'(0).$

• $\frac{d}{dt}(\lambda g)\Big|_{t=0} = (\lambda g)'(0) = \lambda(g')(0) = \lambda g(0).$

5) Si V es un $\mathbb{k}$-espacio vectorial de dimensión finita, entonces

$$\dim V^* = \dim \operatorname{Hom}(V, \mathbb{k}) = \dim V \underbrace{\dim \mathbb{k}}_{=1} = \dim V$$

Si $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de V

Podemos definir las siguientes t. l:

$f_1 : V \longrightarrow \mathbb{k}$

$f_1(v_1) = 1, \; f_1(v_2) = 0, \dots, f_1(v_n) = 0$

Así, definimos $f_2 : V \longrightarrow \mathbb{k}$

$f_2(v_1) = 0, \; f_2(v_2) = 1, \; f_2(v_3) = 0, \dots, f_2(v_n) = 0$

y para $1 \leq i \leq n$

$f_i(v_1) = 0, \dots, f_i(v_i) = 1, \dots, f_i(v_n) = 0$

Notación: $f_i(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

y tenemos n funcionales lineales

δ_{ij} = Delta de Kronecker

Teorema

Sea V un $\mathbb{k}$-espacio vectorial de dimensión finita y $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$, una base de V. Entonces existe una base *dual* $B^* = \{f_1, \cdots, f_n\}$ de V^* que cumple que

$$f_i(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Más aún, para toda $f \in V^*$, y para todo $v \in V$ se tiene que

$$f = \sum_{i=1}^{n} f(v_i) f_i \qquad\qquad v = \sum_{i=1}^{n} f_i(v) v_i$$

Demostración

Sea $v \in V$. Entonces existen $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{k}$ tales que

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n$$

Así,

$$\begin{aligned} f_1(v) &= f_1(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n) \\ &= a_1 \underbrace{f_1(v_1)}_{1} + a_2 \underbrace{f_1(v_2)}_{=0} + \cdots + a_n \underbrace{f_1(v_n)}_{=0} \\ &= a_1 \end{aligned}$$

$f_2(v) = a_2, \ldots, f_i(v) = a_i$

Por lo tanto,

$$v = f_1(v) v_1 + f_2(v) v_2 + \cdots + f_n(v) v_n$$

Veamos que $f_1, \ldots, f_n$ son l. i.:

Sup que existen $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{K}$
tales que

es la función cero! $\leftarrow$ $\mathbb{O} = b_1 f_1 + b_2 f_2 + \cdots + b_n f_n$

$\Rightarrow \underbrace{0}_{\in \mathbb{K}} = \mathbb{O}(v) = b_1 f_1(v) + b_2 f_2(v) + \cdots + b_n f_n(v) \quad \forall v \in V$

Tomando $v = v_1$ tenemos que

$$0 = b_1 \underbrace{f_1(v_1)}_{=1} + b_2 \underbrace{f_2(v_1)}_{=0} + \cdots + b_n \underbrace{f_n(v_1)}_{=0}$$

$\Rightarrow \boxed{0 = b_1}$

Así, eligiendo v_i tenemos que

$$0 = b_1 \underbrace{f_1(v_i)}_{=0} + \cdots + b_i \underbrace{f_i(v_i)}_{=1} + \cdots + b_n \underbrace{f_n(v_i)}_{=0}$$

$\boxed{0 = b_i} \quad \forall\, 1 \le i \le n$

$\Rightarrow f_1, \ldots, f_n$ son li

Tenemos entonces n funciones li en un V^* que tiene dimensión n
esto implica que son una base.

Veamos finalmente que todo funcional lineal se escribe

$$f = f(v_1) f_1 + f(v_2) f_2 + \cdots + f(v_n) f_n$$

Sea $v \in V$. Por lo que vimos antes,

Sea $v \in V$. Por lo que vimos antes,

$$v = f_1(v)v_1 + f_2(v)v_2 + \dots + f_n(v)v_n$$

$$\Rightarrow f(v) = f\Big(\underbrace{f_1(v)}_{\in \mathbb{k}}v_1 + \underbrace{f_2(v)}_{\in \mathbb{k}}v_2 + \dots + \underbrace{f_n(v)}_{\in \mathbb{k}}v_n\Big)$$

$$= f_1(v)f(v_1) + f_2(v)f(v_2) + \dots + f_n(v)f(v_n)$$

$$= f(v_1)f_1(v) + f(v_2)f_2(v) + \dots + f(v_n)f_n(v)$$

$$= \big(f(v_1)f_1 + f(v_2)f_2 + \dots + f(v_n)f_n\big)(v) \quad \forall v \in V$$

$$\Rightarrow f = f(v_1)f_1 + f(v_2)f_2 + \dots + f(v_n)f_n$$

■

Observación

Sea V un $\mathbb{k}$-espacio vectorial de dimensión finita

$B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ base de V

$B^* = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ base de V^* dual a B

Entonces para cada i, la función f_i es la función que da la i-ésima coordenada de cualquier vector $v \in V$ en la base B pues

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n = \textstyle\sum_{i=1}^n a_iv_i$$

$$= f_1(v)v_1 + f_2(v)v_2 + \dots + f_n(v)v_n = \textstyle\sum_{i=1}^n f_i(v)v_i$$

$$\Rightarrow a_i = f_i(v)$$

Ejemplo

Si $V = \mathcal{P}_2(X)$, $B = \{1, X, X^2\}$ ¿Cuál es la base dual?

Definimos para todo $p \in \mathcal{P}_2(X)$:

$f_1(p) = p(0)$

$f_2(p) = p'(0)$

$f_3(p) = \dfrac{p''(0)}{2}$

$$\begin{cases} f_1(1)=1,\ f_1(X)=0,\ f_1(X^2)=0 \\ f_2(1)=0,\ f_2(X)=1,\ f_2(X^2)=0 \\ f_3(1)=0,\ f_3(X)=0,\ f_3(X^2)=1 \end{cases}$$

Por ejemplo, $f_2(aX^2+bX+c) = 2aX+b\big|_{X=0} = b$

Notar que $\underbrace{aX^2+bX+c}_{p} = c\,1 + bX + aX^2$

$c \to f_1(p)$, $b \to f_2(p)$, $a \to f_3(p)$

$$\Rightarrow\ p = \underbrace{p(0)\,1 + p'(0)\,X + \frac{p''(0)}{2}}\,X^2$$

Coeficientes del Polinomio de Taylor en $X=0$

Por otro lado, si $\alpha \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})^*$, entonces

$$\alpha = \alpha(1)f_1 + \alpha(X)f_2 + \alpha(X^2)f_3$$

$\Rightarrow\ \alpha(p) = \alpha(1)\,p(0) + \alpha(X)\,p'(0) + \alpha(X^2)\,p''(0)$ [illegible]

$$\Rightarrow \alpha(p) = \alpha(1)\,p(0) + \alpha(X)\,p'(0) + \alpha(X^2)\,\frac{p''(0)}{2}$$

Hiperplanos y subespacios anuladores

martes, 27 de abril de 2021 16:32

En lo que sigue, describiremos los subespacios de un espacio vectorial usando funcionales lineales.

Recordemos que todo subespacio de $\mathbb{k}^n$, donde $n \in \mathbb{N}$, se puede ver como la solución de un sistema de ecuaciones lineales, y como el núcleo de una transformación lineal.

En la clase de hoy le vamos a dar un sentido preciso a esta afirmación y cómo escribir tal descripción.

Un funcional $f \in V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{k})$ es una transf. lineal

$$f : V \longrightarrow \mathbb{k}$$

Vimos que si $V = \mathbb{k}^n$, entonces

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n$$

Si V es un $\mathbb{k}$-espacio vectorial de dimensión n y $f \in V^*$, entonces $\dim \operatorname{Ker} f = n - 1$, pues

$$n = \dim V = \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = 1 + \dim \operatorname{Ker} f$$

Definición

Sea V un $\mathbb{k}$-espacio vectorial de dimensión n.
Todo subespacio de V de dimensión $n-1$ se dice ***hiperespacio***.

En particular, si $n=3$, todo subespacio de dimensión $n=2$ se dice ***hiperplano.***

Si no hay posible confusión, llamaremos en general hiperplanos a los hiperespacios.

Observación

Sea V un $\mathbb{k}$-espacio vectorial de dimensión finita.

Claramente, todo hiperplano es el núcleo de un funcional lineal, así es el conjunto de soluciones de un sistema homogéneo que tiene sólo una ecuación:

Sup que $\dim V = n$. Entonces un hiper-espacio S tiene dimensión $n-1$.
Tenemos entonces una base de S

$B_S = \{s_1, s_2, \dots, s_{n-1}\}$

Esta base se puede completar a una base de V agregando un vector l.i a B_S, digamos

$B = \{s_1, s_2, \dots, s_{n-1}, v_n\}$

Por lo visto la semana pasada, existe una base dual B^* de V^*,

$B^* = \{f_1, f_2, \dots, f_{n-1}, f_n\}$

que cumple que

que cumple que

$f_1(s_1) = 1$, $f_1(s_j) = 0$, $f_1(v_n) = 0$
$\forall j \neq 1$

$f_i(s_j) = \delta_{ij}$ $\forall\ 1 \leq i, j \leq n-1$

$f_i(v_n) = 0$

$f_n(s_j) = 0$ $\forall\ 1 \leq j \leq n-1$

$f_n(v_n) = 1$

de aquí sale que $f_n(s) = 0$ $\forall s \in S$ pues si $s \in S$, existen $b_1, \dots, b_{n-1} \in \mathbb{K}$ tales que $s = b_1 s_1 + \dots + b_{n-1} s_{n-1}$

$\Rightarrow f_n(s) = f_n(b_1 s_1 + \dots + b_{n-1} s_{n-1})$

$= b_1 \underbrace{f_n(s_1)}_{=0} + \dots + b_{n-1} \underbrace{f_n(s_{n-1})}_{=0}$

$= 0$

$\Rightarrow S \leq \ker f_n$

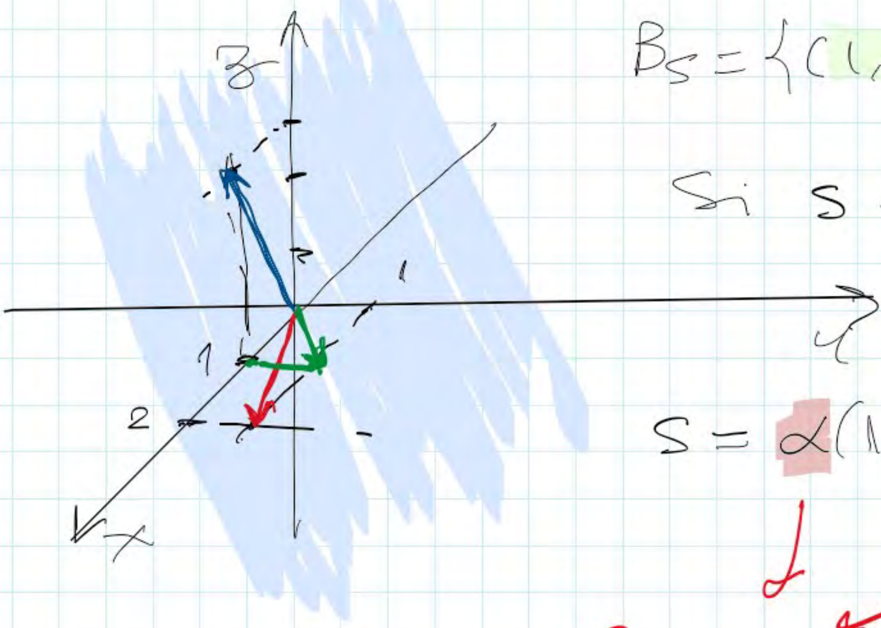
Como $\dim S = n-1$ y $\dim \ker f_n = n-1$

$\Rightarrow$ $S = \ker f_n$.

Ejemplo

Si $V = \mathbb{R}^3$, $S = \langle (1,0,3), (2,1,0) \rangle$

$\dim S = 2 \Rightarrow S$ es un hiperplano



$B_S = \{(1,0,3),(2,1,0)\}$.

Si $s \in S$, entonces

$$s = \alpha(1,0,3) + \beta(2,1,0)$$

funciones coordenadas de B_S

$$\alpha = f_1(s) \quad , \quad \beta = f_2(s)$$

Si $s = (x,y,z)$, tenemos que

$$(x,y,z) = \alpha(1,0,3) + \beta(2,1,0)$$
$$= (\alpha + 2\beta, \beta, 3\alpha)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta = x \\ \beta = y \\ 3\alpha = z \end{cases} \rightsquigarrow \begin{array}{cc} \alpha & \beta \\ \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & y \\ 3 & 0 & z \end{array}\right)$$

Idea: describir $\alpha = f_1(s)$, $\beta = f_2(s)$ en término de las funciones duales de la base canónica, partiendo de la descripción de $s = (x,y,z)$ en la la descripción de $S = (x, y, z)$ en la base canónica

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & y \\ 3 & 0 & z \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 - 2F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x-2y \\ 0 & 1 & y \\ 3 & 0 & z \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3 - 3F_1} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \alpha & \beta \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x-2y \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & z-3x+6y \end{array}\right) \end{array}$$

$\Rightarrow \alpha = f_1(x, y, z) = x - 2y$

$\beta = f_2(x, y, z) = y$

$\Rightarrow B_S^* = \{f_1, f_2\}$

$$f_3(x, y, z) = -3x + 6y + z$$

Es el funcional que cumple que

$$\ker f_3 = S$$

Tomando $(1,1,0) \in \mathbb{R}^3$, tenemos que

$$f_3(1,1,0) = -3 + 6 + 0 = 3 \neq 0$$

$\Rightarrow (1,1,0) \notin S$

$\Rightarrow (1,1,0)$ es li. con B_S

y $\mathcal{B} = \{(1,0,3),(2,1,0),(1,1,0)\}$

Ejercicio: verificar que

$f_1(1,0,3)=1$, $f_2(1,0,3)=0$

$f_1(2,1,0)=0$, $f_2(2,1,0)=1$

$f_1(1,1,0)=0$, $f_2(1,1,0)=0$

$g_3 = \frac{f_3}{3}$, $g_3(1,0,3)=0$

$g_3(2,1,0)=0$

$g_3(1,1,0)=1$

$\Rightarrow B^* = \{f_1, f_2, g_3\}$.

En lo que sigue vamos a relacionar todo subespacio de un espacio vectorial de dimensión finita, con el espacio de funionales lineales que se anulan en él.

Esta es otra ventaja de pensar en *dualidades*.

Definición

Sea V un $\mathbb{k}$-espacio vectorial y $S \subseteq V$ un subconjunto no vacío.

Se define el ***anulador*** de S como el conjunto

$$S^\circ = \{f \in V^* \mid f(s) = 0, \forall\, s \in S\}$$

En el ejemplo anterior, con $V = \mathbb{R}^3$ y $S = \langle(1,0,3),(2,1,0)\rangle$ tenemos que

$f_3(x,y,z) = -3x + 6y + z$ es un elemento de S°.

De hecho, f_3 genera S° como subespacio.

Ejercicio: Sea V un $\Bbbk$-espacio vectorial y $S \subseteq V$ un subconjunto no vacío. Entonces, el conjunto anulador S° es un subespacio de V^*.

La función $0 \in S^\circ$ pues $0(s) = 0$

Si $f, g \in S^\circ$, $(f+g)(s) = \underbrace{f(s)}_{=0} + \underbrace{g(s)}_{=0} = 0$

$\Rightarrow f+g \in S^\circ$

Observación

Si $S = \{0\} \Rightarrow S^\circ = V^*$,

Si $S = \{0\}$, $S^\circ = \{f : V \to \Bbbk \mid f(s) = 0 \ \forall s \in S\}$

$= \{f : V \to \Bbbk \mid f(0_V) = 0\} = V^*$

pues toda transf. lineal cumple evaluada en 0_V da 0.

Si $S = V \Rightarrow S^\circ = \{0\}$. (pensarlo!)

El siguiente teorema se puede ver como una generalización del teorema de la dimensión del núcleo y la imagen de una transformación lineal:

Todo subespacio W de un $\Bbbk$-espacio vectorial de dimensión finita V es un núcleo de una transformación lineal. La imagen de dicha transformación lineal tiene la misma dimensión que el subespacio anulador W° de W.

Teorema

Sea V un $\mathbb{k}$-espacio vectorial de dimensión finita y $W \subseteq V$ un subespacio. Entonces

$$\dim W + \dim W^{\circ} = \dim V$$

Demostración

Como $W \subseteq V$ es un subespacio, $\dim W < \dim V$

Supongamos que $\dim W = k < \dim V = n$

y tomemos una base de W:

$B_W = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_k\}$.

Completemos a una base de V

$B = \{v_1, v_2, \dots, v_k, \underbrace{v_{k+1}, \dots, v_n}_{\notin W}\}$

Sea B^* la base dual de B,

$B^* = \{f_1, f_2, \dots, f_k, f_{k+1}, \dots, f_n\}$

que cumple que $f_i(v_j) = \delta_{ij}$ $\forall\, 1 \leq i, j \leq n$

En particular, $\begin{cases} f_{k+1}(v_i) = 0 \\ \vdots \\ f_n(v_i) = 0 \end{cases}$ $\forall\, 1 \leq i \leq k$

Como $\{v_1, \dots, v_k\}$ es base de W,
se sigue que

(n-k ecuaciones) $\begin{cases} f_{k+1}(w) = 0 & \to \ker f_{k+1} \\ \vdots & \forall w \in W \\ f_n(w) = 0 & \to \ker f_n \end{cases}$

Así, por definición tenemos que
$f_{k+1}, f_{k+2}, \dots, f_n \in W^0$

Veamos que son una base, pues si
lo son, $\dim W + \dim W^0 = \dim V$
$(k + n-k = n)$

Como son parte de una base de V^*,
los funcionales son l.i.
Veamos que generan:
Sea $f \in W^0$, i.e. $f(w) = 0$
Recordemos que si $f \in V^*$, entonces

$$f = f(v_1) f_1 + f(v_2) f_2 + \dots + f(v_n) f_n$$

(salía usando bases duales)
Como $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ es una base de W
$\Rightarrow f(v_1) = 0, f(v_2) = 0, \dots, f(v_k) = 0$

$\Rightarrow \quad f = f(v_{k+1}) f_{k+1} + \dots + f(v_n) f_n$

$\Rightarrow \quad f_{k+1}, \dots, f_n$ generan W^0.

■

Como consecuencia del teorema anterior, tenemos la formulación formal de que todo subespacio es el subespacio solución de un sistema de ecuaciones homogéneo:

Cada núcleo de un funcional se corresponde con las soluciones de un sistema homogéneo de una ecuación lineal.

La intersección de los núcleos de varios funcionales se corresponde al sistema homogéneo compuesto por todas las funcionales lineales.

Corolario

Sea W un subespacio de dimensión k de un $\mathbb{k}$-espacio vectorial V de dimensión n, entonces W es la intersección de $n-k$ hiperplanos en V:

$$W = \bigcap_{j=k+1}^{n} \operatorname{Ker} f_j$$

Demostración: Ejercicio (sale de la demostración anterior). ■

Ejemplo

Si $V = \mathbb{R}^4$, $S = \langle (1,0,1,0), (1,0,0,2) \rangle$ $\Rightarrow \dim S = 2$

$B_S = \{(1,0,1,0), (1,0,0,2)\}$

Como $\dim S = 2$, S es la intersección de dos hiperplanos, que es lo mismo que decir que es solución de un sist.

homogéneo de dos ecuaciones (l.i)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 0 & y \\ 1 & 0 & z \\ 0 & 2 & w \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & z \\ 0 & 0 & y \\ 1 & 1 & x \\ 0 & 2 & w \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 1 & x-z \\ 0 & 2 & w \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & x-z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 2 & w \end{array}\right) \xrightarrow{F_4 - 2F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & x-z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & w-2x+2z \end{array}\right)$$

$\Rightarrow f_1(x,y,z,w) = z$ base dual de B_S
$f_2(x,y,z,w) = x-z$

Generadores de S° son
$f_3(x,y,z,w) = y$
$f_4(x,y,z,w) = -2x+2z+w$

y tenemos que

$\langle(1,0,1,0),(1,0,0,2)\rangle = \ker f_3 \cap \ker f_4$

$= \left\{ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} y=0 \\ -2x+2z+w=0 \end{array} \right\}$

El siguiente corolario nos dice que dos subespacios de un espacio vectorial coinciden si están definidos por el mismo sistema de ecuaciones

Corolario
Sean W_1, W_2 dos subespacios de un $\mathbb{k}$-espacio vectorial V de dimensión finita. Entonces

$$W_1 = W_2 \Leftrightarrow W_1{}^{\circ} = W_2{}^{\circ}$$

Demostración:

$\Rightarrow$) trivial!

$\Leftarrow$) Sup que $W_1^{\circ} = W_2^{\circ}$

$$W_1^{\circ} = \{ f \in V^* \mid f(w) = 0 \ \forall w \in W_1 \}$$

$$\shortparallel$$

$$W_2^{\circ} = \{ f \in V^* \mid f(w) = 0 \ \forall w \in W_2 \}$$

Si $W_1 \neq W_2$, $\exists\, v \in W_1$, $v \notin W_2$

Si $v \in W_1 \Rightarrow f(v) = 0 \ \forall f \in W_1^{\circ}$

Como $W_1^{\circ} = W_2^{\circ} \Rightarrow f(v) = 0 \ \forall f \in W_2^{\circ}$

Como $W_2 \subseteq V$, $\dim V < \infty$ tenemos que $\dim W_2 < \infty$.

Sea $B_{W_2} = \{ v_1, \ldots, v_k \}$ base de W_2 y completo a una base de V:

y completo a una base de V:

$B = \{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$.

Si $B^* = \{\underbrace{f_1, \ldots, f_k}_{B^*_{W_2}}, \underbrace{f_{k+1}, \ldots, f_n}_{\text{base de } W_2^\circ}\}$ base dual

(por la dem. del teorema)

Por la clase pasada, como $v \in V$

$\Rightarrow v = f_1(v)v_1 + f_2(v)v_2 + \ldots + f_k(v)v_k + \underbrace{f_{k+1}(v)}_{=0} v_{k+1} + \ldots + \underbrace{f_n(v)}_{=0} v_n$

$v \in W_2$

$\Rightarrow v = \underbrace{f_1(v)}_{\in \mathbb{K}} v_1 + \underbrace{f_2(v)}_{\in \mathbb{K}} v_2 + \ldots + \underbrace{f_k(v)}_{\in \mathbb{K}} v_k$

$\Rightarrow v \in W_2$ Abs!

∎

Doble dual

jueves, 29 de abril de 2021 13:14

Dado un $\Bbbk$-espacio vectorial V, podemos considerar el espacio dual V^* de las funciones de V en el cuerpo $\Bbbk$.

Hemos visto que si $\dim V < \infty$, entonces toda base de V se corresponde a una base de V^*, su base dual.

Si $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de V, todo $v \in V$ se escribe como

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$$

son escalares únicos!

Existe una base de funciones en V^*

$$B^* = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}, \quad f_i(v_j) = \delta_{ij} \quad 1 \leq i,j \leq n$$

Vale $\quad v = f_1(v) v_1 + f_2(v) v_2 + \dots + f_n(v) v_n$

Pensando entonces V^*, como espacio vectorial, podemos considerar su dual $(V^*)^* = V^{**}$.

Es natural preguntarse entonces cuál es la relación entre V, V^* y $(V^*)^*$, y qué relaciones hay entre las bases cuando los espacios son de dimensión finita.

Spoiler alert!

si $\dim V < \infty$, entonces $V \simeq (V^*)^*$

Así, podemos entender los vectores como funciones

La razón de fondo es la siguiente funcional lineal, que es natural.

Consideremos un $\mathbb{k}$-espacio vectorial V, y sea $v \in V$.

Se tiene entonces la funcional lineal

$$E_v \colon V^* \to \mathbb{k},$$
$$E_v(f) = f(v) \qquad \forall\, f \in V^*$$

Ejemplo: $V = \mathbb{R}^3$

Si $f \in (\mathbb{R}^3)^* = \{T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \mid T \text{ t.l.}\}$

$\Rightarrow \quad f(x, y, z) = ax + by + cz$

Si $v = (4, 5, 1)$, tenemos la función

$$\boxed{\begin{aligned} E_v(f) &= f(4,5,1) \\ &= 4a + 5b + c \end{aligned}}$$

Si $\quad f_1(x, y, z) = x$

$\Rightarrow \quad E_v(f_1) = 4$

Si $f_2(x,y,z) = y \Rightarrow E_v(f_2) = 5$

Si $f_3(x,y,z) = z \Rightarrow E_v(f_3) = 1$

Si $f(x,y,z) = 2x + 2y + 7z$

$\Rightarrow E_v(f) = 2.4 + 2.5 + 7.1 = 25$

Veamos que efectivamente es una funcional lineal:

$$E_v(f+g) = (f+g)(v) = \underbrace{f(v)}_{} + \underbrace{g(v)}_{}$$

$$= E_v(f) + E_v(g)$$

$\forall f, g \in V^*$

$$E_v(\lambda f) = (\lambda f)(v) = \lambda(f(v))$$

$$= \lambda E_v(f) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{K}$$

$\forall f \in V^*$

$\Rightarrow E_v : V^* \longrightarrow \mathbb{K}$ es una transf. lineal

$\Rightarrow E_v \in (V^*)^* \qquad \forall v \in V$

Tenemos una función

$$V \longrightarrow (V^*)^*$$

$$V \longrightarrow (V^*)^*$$
$$v \longmapsto E_v$$

¿Podemos asegurar que si $v \neq 0$, entonces la funcional $E_v \neq 0$?

En otras palabras, ¿vale que si $f(v) = 0 \quad \forall f \in V^* \Rightarrow v = 0$?

Teorema

Sea V un $\mathbb{k}$-espacio vectorial de dimensión finita.
Para cada $v \in V$ se define el funcional lineal

$$E_v \colon V^* \to \mathbb{k},$$
$$E_v(f) = f(v) \qquad \forall f \in V^*$$

Entonces la función dada por

$$E \colon V \longrightarrow V^{**}$$
$$v \mapsto E_v$$

define un isomorfismo lineal.

Demostración:

Notemos primero que V y V^{**} tienen la misma dimensión:

Sabemos que $\dim V^* = \dim \operatorname{Hom}(V, \mathbb{k})$
$= \dim V \dim \mathbb{k} = \dim V$

Así, $\dim (V^*)^* = \dim V^* = \dim V$

Luego, por teorema anterior, basta probar que la función $E \colon V \longrightarrow V^{**}$

$v \longmapsto \varepsilon_v$

es una transformación lineal injectiva

Veamos que ε es lineal:

- Si $v, w \in V$, entonces $\varepsilon_{v+w} = \varepsilon_v + \varepsilon_w$

Si $f \in V^*$, entonces

$$\varepsilon_{v+w}(f) = f(v+w) \underset{\substack{f \text{ es} \\ t.l.}}{=} f(v)+f(w)$$

$$= \varepsilon_v(f) + \varepsilon_w(f)$$

$$= (\varepsilon_v + \varepsilon_w)(f) \quad \forall f \in V^*$$

$\Rightarrow \quad \varepsilon_{(v+w)} = \varepsilon_v + \varepsilon_w$

- Si $\lambda \in \mathbb{K}$, $v \in V$ entonces $\varepsilon_{\lambda v} = \lambda \varepsilon_v$

Si $f \in V^*$, $\varepsilon_{\lambda v}(f) = f(\lambda v)$

$$\underset{\substack{f \text{ es} \\ t.l.}}{=} \lambda f(v) = \lambda \varepsilon_v(f)$$

$\Rightarrow \quad \varepsilon_{\lambda v} = \lambda \varepsilon_v$

Veamos que ε es inyectiva.

Sup que $\varepsilon_v(f) = f(v) = 0 \quad \forall f \in V^*$

Si $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de V

y $B^* = \{f_1, \dots, f_n\}$ es una base dual de V^*

con $f_i(v_j) = \delta_{ij}$ $\quad 1 \leq i,j \leq n$

Así, $v = f_1(v)\, v_1 + f_2(v)\, v_2 + \dots + f_n(v)\, v_n$

Como $E_v(f) = 0 \ \forall f \in V^*$, en particular vale para $f_1, \dots, f_n$

Pero, en ese caso, $E_v(f_i) = f_i(v) = 0 \quad \forall i$

$\Rightarrow v = 0\, v_1 + 0\, v_2 + \dots + 0\, v_n$

$\Rightarrow v = 0$

Luego, E es inyectiva y esto termina la prueba.

■

Observación

Supongamos que V es un $\Bbbk$-espacio vectorial de dimensión finita.

Sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V, y $B^* = \{f_1, \dots, f_n\}$ su base dual.

Entonces, a través del isomorfismo $E\colon V \longrightarrow V^{**}$ las bases son duales entre sí, es decir

$B^{**} = \{E_{v_1}, \dots, E_{v_n}\}$ es base dual de $B^* = \{f_1, \dots, f_n\}$.

$$\begin{tikzcd}
B & B^* & B^{**} \\
V \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[rr, bend right, leftrightarrow, "\sim"'] & V^* \arrow[r, leftrightarrow] & V^{**}
\end{tikzcd}$$

$=$

Como Φ es un isomorfismo, manda la base $B=\{v_1,\ldots,v_n\}$ en una base $B^{**}=\{E_{v_1},\ldots,E_{v_n}\}$

que por las fórmulas, es la base dual de $B^*=\{f_1,\ldots,f_n\}$

$$E_{v_i}(f_j)=f_j(v_i)=\delta_{ij}$$

$\forall\, 1\le i,j\le n.$

Ejemplo:

$V=\mathbb{R}^3$

$B=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ base canónica

$B^*=\{f_1,f_2,f_3\}$ base dual de $(\mathbb{R}^3)^*$ dada por las funciones coordenadas:

$f_1(x,y,z)=x$
$f_2(x,y,z)=y$
$f_3(x,y,z)=z$

$f_1(1,0,0)=1,\ f_1(0,1,0)=0,\ f_1(0,0,1)=0$

$(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \Rightarrow (x,y,z)=x(1,0,0)+y(0,1,0)+z(0,0,1)$

$\Rightarrow f_1(x,y,z)=x\,\underbrace{f_1(1,0,0)}_{=1}+y\,\cancel{f_1(0,1,0)}^{0}+z\,\cancel{f_1(0,0,1)}^{0}$

$=x$

Así, $(x,y,z)=f_1(x,y,z)(1,0,0)+f_2(x,y,z)(0,1,0)+$

Así, $(x,y,z) = f_1(x,y,z)(1,0,0) + f_2(x,y,z)(0,1,0) +$
$+ f_3(x,y,z)(0,0,1)$

La base de $(\mathbb{R}^3)^{**}$ está dada entonces por $B^{**} = \{E_1, E_2, E_3\}$ donde

Evaluar en $(0,1,0)$

$E_1(f_i) = f_i(1,0,0)$
$E_2(f_i) = f_i(0,1,0)$
$E_3(f_i) = f_i(0,0,1)$

Evaluar en $(1,0,0)$

En particular, si $f(x,y,z) = ax + by + cz \in (\mathbb{R}^3)^*$

$E_1(f) = f(1,0,0) = a$
$E_2(f) = f(0,1,0) = b$
$E_3(f) = f(0,0,1) = c$

$\Rightarrow \quad f(x,y,z) = E_1(f)x + E_2(f)y + E_3(f)z$

$\Rightarrow \quad f = \underset{f(1,0,0)}{\underset{\shortparallel}{E_1(f)}} f_1 + \underset{f(0,1,0)}{\underset{\shortparallel}{E_2(f)}} f_2 + \underset{f(0,0,1)}{\underset{\shortparallel}{E_3(f)}} f_3$

Corolario

Sea V un $\mathbb{k}$-espacio vectorial de dimensión finita y $L \in V^{**}$. Encontes existe $v \in V$ tal que $L = E_v$ esto es,

$$L(f) = f(v) \qquad \forall\ f \in V^*$$

Demostración: Ejercicio. ■

Corolario

Sea V un $\Bbbk$-espacio vectorial de dimensión finita.
Entonces toda base de V^* es dual a una base de V.

Demostración:

Sea $\bar{B} = \{f_1, f_2, f_3, \dots, f_n\}$ una base de V^*.

Queremos encontrar una base de V
$B = \{v_1, \dots, v_n\}$ tal que $f_i(v_j) = \delta_{ij}$.

Consideremos la base dual $\bar{B}^* = \{L_1, L_2, \dots, L_n\}$ base de V^{**}, es decir

$$L_j(f_i) = \delta_{ji}$$

Por el corolario anterior, todo $L_i \in V^{**}$ es la evaluación en un vector de V

$\Rightarrow \exists\, v_1, v_2, \dots, v_n$ tal que

$$L_1 = \varepsilon_{v_1},\ L_2 = \varepsilon_{v_2}, \dots,\ L_n = \varepsilon_{v_n}$$

Como ε es un isomorfismo, tenemos que $\{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de V

y vale que

$$Ev_j(f_i) = f_i(v_j)$$
$$\| \qquad \|$$
$$L_j(f_i) = \delta_{ij}$$

son bases duales

■

Ejemplo:

Consideremos las siguientes funcionales sobre $\mathbb{R}^3$

$f_1(x,y,z) = x + 2y + 3z$
$f_2(x,y,z) = y - z$
$f_3(x,y,z) = -x - y - z$

Vale que $\{f_1, f_2, f_3\}$ es una base de $(\mathbb{R}^3)^*$: basta ver que son l.i.

Sup que $\exists\ a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que

$$0 = af_1 + bf_2 + cf_3$$

función!

$$0(x,y,z) = 0 = af_1(x,y,z) + bf_2(x,y,z) + cf_3(x,y,z)$$

$$\Rightarrow 0 = a(x+2y+3z) + b(y-z) + c(-x-y-z)$$

$$\Rightarrow 0 = (a-c)x + (2a+b-c)y + (3a-b-c)z$$

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

$(\text{si } x=1, y=0, z=0)$ $\qquad a - c = 0$

$$\left.\begin{array}{ll} (\text{Si } x=1, y=0, z=0) & a-c=0 \\ (\text{Si } x=0, y=1, z=0) & 2a+b-c=0 \\ (\text{Si } x=0, y=0, z=1) & 3a-b-c=0 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \to \text{tiene rango } 3$$

(Ejercicio)

Calculemos la base de $\mathbb{R}^3$ que es dual a ésta:

tenemos que buscar $B=\{v_1, v_2, v_3\}$
tal que $f_i(v_j)=\delta_{ij}$

Si $v_1=(a,b,c)$, debe ser que

$$f_1(a,b,c)=1 = a+2b+3c$$
$$f_2(a,b,c)=0 = b-c$$
$$f_3(a,b,c)=0 = -a-b-c$$

$v_2=(\alpha,\beta,\gamma)$

$$f_1(\alpha,\beta,\gamma) = 0 = \alpha + 2\beta + 3\gamma$$
$$f_2(\alpha,\beta,\gamma) = 1 = \beta - \gamma$$
$$f_3(\alpha,\beta,\gamma) = 0 = -\gamma - \beta - \gamma$$

Idea: Resolvemos todo junto

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

dejar la identidad — queda la base de V!

reduciendo $\rightsquigarrow$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2/3 = a & -1/3 & -5/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 = b & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 = c & -1/3 & 1/3 \end{array}\right)$$

$v_1 \quad v_2 \quad v_3$

Ejercicio

Supongamos que tenemos V un $\mathbb{k}$-espacio vectorial de dimensión finita y $W \subseteq V^*$.

Como $V^{**} \simeq V$, podemos pensar que el subespacio anulador W° de funciones de V^{**} que anula a W es un subespacio de V.

Esto es, pensamos a W° como el conjunto

$$W^\circ = \{v \in V \mid f(v) = 0 \ \ \forall f \in W\}$$

El siguiente teorema nos dice que vale que $(W^\circ)^\circ = W$.

"Los vectores que anulan a las funciones "los vectores que anulan a las funciones que anulan a un subespacio son los vectores del subespacio mismo"

Teorema

Supongamos que S es un subconjunto no vacío de un $\mathbb{k}$-espacio vectorial V de dimensión finita. Entonces

$$(S^{\circ})^{\circ} = \langle S \rangle$$

En particular, $(W^{\circ})^{\circ} = W$ para todo subespacio de V.

Transpuesta de una transformación lineal

miércoles, 5 de mayo de 2021 10:24

Supongamos que tenemos dos $\Bbbk$-espacios vectoriales V y W.

Asociados a estos espacios vectoriales, tenemos sus espacios vectoriales duales

$V^* = \mathrm{Hom}(V, \Bbbk)$ y $W^* = \mathrm{Hom}(W, \Bbbk)$ que constan de las transformaciones lineales

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "T"'] \arrow[dr, "g\circ T"] & \Bbbk \\ W \arrow[r, "g"] & \Bbbk \end{tikzcd}$$

$f \in V^*$, t.l.

$g \in W^*$, t.l.

De este modo, dada una transformación lineal

$$T\colon V \longrightarrow W$$

Tenemos una forma de conectar los espacios V^* y W^*:

Dada una función $f \in W^*$, podemos obtener una función de V^* componiendo con la transformación lineal T.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[rr, bend right, "f\circ T"'] & W \arrow[r, "f"] & \Bbbk \end{tikzcd}$$

$f \in W^*$

Vale que $f\circ T \in V^*$, es decir, es una transformación lineal pues es composición de transformaciones lineales

Así, tenemos una función $T^*\colon W^* \longrightarrow V^*$ dada por $T^*(f) = f \circ T$ para toda $f \in W^*$, esto es

$$\mathrm{T}^*(f)(v) = (f \circ T)(v) = f(T(v))\,\forall\, v \in V$$

Teorema

Sean V y W dos $\Bbbk$-espacios vectoriales. Para toda $T \in \mathrm{Hom}(V,W)$, existe una única transformación lineal $T^* \in \mathrm{Hom}(W^*,V^*)$ dada por

$$T^*(f)(v) = (f \circ T)(v) = f(T(v))\forall\, v \in V$$

Demostración

Hemos visto la definición arriba, y que está bien definida ($T^*(f) \in V^*$, i.e. la imagen de un funcional en W es un funcional en V)

- $T^*(f+g) = T^*(f)+T^*(g)$ $\forall f,g \in W^*$

Entonces

$$T^*(f+g)(v) = (f+g)(\underbrace{T(v)}_{\in W})$$

$$= f(T(v))+g(T(v))$$

$$= (T^*(f))(v) + (T^*(g))(v)$$

$$= (T^*(f)+T^*(g))(v) \quad \forall v \in V$$

$\Rightarrow T^*(f+g) = T^*(f)+T^*(g)$

- $T^*(\lambda f) = \lambda T^*(f)$

Si $v \in V$, $T^*(\lambda f)(v) = (\lambda f)(T(v))$

$$= \lambda \underbrace{f(T(v))} = \lambda (T^*(f)(v))$$

$\Rightarrow T^*(\lambda f) = \lambda T^*(f)$

$\Rightarrow \quad T^*(\lambda f) = \lambda T^*(f)$

$\Rightarrow$ T^* es una transformación lineal

■

Notación:

La transformación lineal $T^*: W^* \longrightarrow V^*$ se denomina la ***transformación transpuesta*** de la transformación lineal $T: V \longrightarrow W$.

El siguiente teorema nos relaciona el núcleo T^* de con la imagen de T

Teorema

Sean V y W dos $\Bbbk$-espacios vectoriales y $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Entonces $\operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Im} T)^\circ$.
Si además $\dim V < \infty$ y $\dim W < \infty$ entonces

$$\dim \operatorname{Im} T = \dim \operatorname{Im} T^*$$
$$\operatorname{Im} T^* = (\operatorname{Ker} T)^\circ$$

Demostración

Veamos que $\ker(T^*) = (\operatorname{Im} T)^\circ$.

$\subseteq$) Sup que $f \in \ker(T^*)$, esto es $f \in W^*$ tal que $T^*(f) = 0$

como t.l. de V en $\Bbbk$:

$(T^*(f))(v) = 0 \in \Bbbk$

$\forall v \in V$

$$\Rightarrow \quad f(T(v)) \overset{def}{=} 0 \in \mathbb{K}$$

$$\Rightarrow \quad f(w) = 0 \quad \text{si } w \in \operatorname{Im} T$$

$$\Rightarrow \quad f \in (\operatorname{Im} T)^{\circ}$$

$\supseteq$) Sup que $f \in (\operatorname{Im} T)^{\circ}$

$$\Rightarrow \quad f(w) = 0 \quad \forall w \in \operatorname{Im} T$$

Si $w \in \operatorname{Im} T \Rightarrow \exists\, v \in V$ tal que $w = T(v)$

$$\Rightarrow \quad f(T(v)) = 0 \quad \forall v \in V$$

$$\overset{def}{=} \quad (T^*(f))(v) = 0 \quad \forall v \in V$$

$$\Rightarrow \quad T^*(f) = 0 \in V^*$$

$$\Rightarrow \quad f \in \ker T^*$$

Supongamos ahora que $\dim V < \infty$
$\dim W < \infty$

Sabemos que

$$\dim V^* = \dim V = \dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T$$

$$\dim V = \dim(\ker T) + \dim(\ker T)^{\circ}$$

$\dim V = \dim(\ker T) + (\dim(\ker T)^\circ)$

$\dim W = \dim W^* = \dim \ker(T^*) + \dim \operatorname{Im}(T^*)$

$\dim W = \dim(\operatorname{Im} T)^\circ + \dim \operatorname{Im} T$

Como $\ker(T^*) = (\operatorname{Im} T)^\circ$, tenemos que $\dim(\ker T^*) = \dim(\operatorname{Im} T)^\circ$

$\Rightarrow \dim \operatorname{Im}(T^*) = \dim W^* - \dim \ker(T^*)$

$= \dim W - \dim(\operatorname{Im} T)^\circ$

$= \dim \operatorname{Im} T$ ✓

Por lo visto antes, $\dim \operatorname{Im}(T^*) =$
$= \dim(\operatorname{Im} T)$

Pero, $\dim \operatorname{Im} T = \dim V - \dim \ker T$

$= \dim(\ker T)^\circ$

Así, $\dim \operatorname{Im}(T^*) = \dim(\ker T)^\circ$

Para ver que son iguales, veamos que uno está incluido en el otro

Sea $g \in \operatorname{Im} T^* \Rightarrow \exists f \in W^*$

tal que $g = T^*(f) \in V^*$

$\Rightarrow g(v) = T^*(f)(v) = f(\underbrace{T(v)}_{=0_W})$

$\forall v \in V$

Si $v \in \ker T \Rightarrow T(v) = 0_W$

$\Rightarrow f(T(v)) = f(0_W) = 0$

$\Rightarrow (T^*(f))(v) = 0 \quad \forall v \in \ker T$

$\Rightarrow T^*(f) \in (\ker T)^\circ$ ✓

■

Ejemplo

Consideremos la transformación lineal

$T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$T(x, y, z) = (2x + y, 3x + y - z)$

Consideremos las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$

$B_3 = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

y su base dual

$B_3^* = \{f_1, f_2, f_3\}$ funciones coord.

$f_1(x,y,z) = x = f_x$

$f_2(x,y,z)=y \quad = f_y$

$f_3(x,y,z)=z \quad = f_z$

Consideremos la base canónica de $\mathbb{R}^2$

$B_2 = \{(1,0),(0,1)\}$ y su base dual

$B_2^* = \{g_1, g_2\}$

$g_1(x,y) = x$

$g_2(x,y) = y$

Calculemos $[T]_{B_2 B_3} = \begin{bmatrix} [T(e_1)]_{B_2} & [T(e_2)]_{B_2} & [T(e_3)]_{B_3} \end{bmatrix}$

$T(e_1) = T(1,0,0) = (2,3)$

$T(e_2) = T(0,1,0) = (1,1)$

$T(e_3) = T(0,0,1) = (0,-1)$

$\Rightarrow [T]_{B_2 B_3} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Por lo visto antes,

$T^* : \underset{B_2^*}{(\mathbb{R}^2)^*} \longrightarrow \underset{B_3^*}{(\mathbb{R}^3)^*}$

Si $g \in (\mathbb{R}^2)^*$, entonces

$g(x,y) = ax + by$

$$g(x,y) = ax + by$$

$$\Rightarrow T^*(g) \in (\mathbb{R}^3)^*$$

$$\Rightarrow (T^*(g))(x,y,z) = g(T(x,y,z))$$

$$= g(2x+y, 3x+y-z)$$

$$= a(2x+y) + b(3x+y-z)$$

$$= (2a+3b)x + (a+b)y + (-b)z$$

Calculemos $[T^*]_{B_3^* B_2^*}$

$$T^*(g_1)(x,y,z) = 2x+y$$

$$T^*(g_1) = 2f_1 + f_2$$

$$\begin{cases} f_1(x,y,z) = x \\ f_2(x,y,z) = y \end{cases}$$

$$[T^*(g_1)]_{B_3^*} = (2,1,0)$$

$$T^*(g_2)(x,y,z) = 3x+y-z$$

$$T^*(g_2) = 3f_1 + f_2 - f_3$$

$$[T^*(g_2)]_{B_3^*} = (3,1,-1)$$

$$\Rightarrow \left[T^*\right]_{B_3^* B_2^*} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

El siguiente teorema le da sentido a la nomenclatura de la transformación lineal transpuesta.

Teorema

Sean V y W dos $\mathbb{k}$-espacios vectoriales de dimensión finita.

Supongamos que B_V y B_W son bases de V y W, respectivamente, y $B_V{}^*$, $B_w{}^*$ las bases duales correspondientes.

Si $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$ y su matriz en las bases B_V y B_W es $A = [T]_{B_W B_V}$ entonces la matriz de T^* con respecto a las bases $B_V{}^*$, $B_w{}^*$ es

$$[T^*]_{B_W{}^* B_V{}^*} = A^t = ([T]_{B_W B_V})^t$$

donde A^t denota la matriz transpuesta de A.

Demostración

Sup que $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V

$B_V^* = \{f_1, \dots, f_n\}$ base dual de V

$f_i(v_j) = \delta_{ij} \quad \forall\, 1 \leq i, j \leq n$

$B_W = \{w_1, \dots, w_m\}$ base de W

$B_W^* = \{g_1, \dots, g_m\}$ base dual de W^*

$g_i(w_j) = \delta_{ij} \quad 1 \leq i,j \leq m$

Sabemos que si $A = [T]_{B_3 B_2} = (a_{ij})_{\substack{1\leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$

$\Rightarrow T(v_i) = a_{1i} w_1 + a_{2i} w_2 + \cdots + a_{mi} w_m$

$$= \sum_{j=1}^{m} a_{ji} w_j \quad \forall\, 1 \leq i \leq n$$

Haciendo lo mismo para $T^*: W^* \to V^*$ pero en las bases duales, si

$$[T^*]_{B_V^* B_W^*} = B = (b_{ij})$$

$$T^*(g_j) = b_{1j} f_1 + b_{2j} f_2 + \cdots + b_{nj} f_n \quad \forall\, 1 \leq j \leq m$$

$$\Rightarrow T^*(g_j) = \sum_{k=1}^{n} b_{kj} f_k \in B_V^*$$

Así, $(T^*(g_j))(v_i) = \sum_{k=1}^{n} b_{kj} \underbrace{f_k(v_i)}_{\delta_{ik}}$

$\Rightarrow T^*(g_j)(v_i) = b_{ij} \quad \forall i \ldots$

$\Rightarrow \underline{T^*(g_j)(v_i) = b_{ij}} \quad \forall i,j$

Por otro lado,

$$\left(T^*(g_j)(v_i)\right) = g_j(T(v_i))$$

$$= g_j\left(\sum_{k=1}^{m} a_{ki} w_k\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{m} a_{ki} \underbrace{g_j(w_k)}_{\delta_{jk}} = a_{ji}$$

$\Rightarrow b_{ij} = a_{ji} \quad \forall\, 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m$

$\Rightarrow \boxed{B = A^t}$

■

Aplicación: Otra demostración de rango fila = rango columna

Ejercicio: Si $A \in \mathbb{k}^{m \times n}$

rango fila de A = rango columna de A^t

$= \dim \operatorname{Im} T_{A^t}$

$= \dim \operatorname{Im} T_A^*$

$= \dim \operatorname{Im} T_A$

$=$ rango columna de A

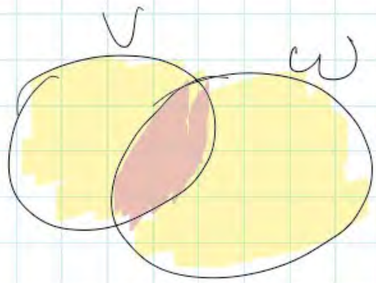
Producto tensorial de espacios vectoriales

jueves, 6 de mayo de 2021 13:14

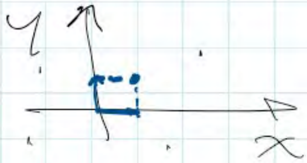
Supongamos que V y W son dos conjuntos.

Tomando estos dos conjuntos, podemos formar otros de la siguiente manera:

- $V \cup W = \{x \mid x \in V \text{ ó } x \in W\}$ unión
- $V \cap W = \{x \mid x \in V \text{ y } x \in W\}$ intersección
- $V \times W = \{(v, w) \mid v \in V,\ w \in W\}$ producto cartesiano



$V = \mathbb{R},\ W = \mathbb{R},$



Si V y W son además espacios vectoriales, vimos que no siempre la unión $V \cup W$ es un espacio vectorial. En cambio tenemos los siguientes espacios vectoriales:

- $V + W = \{v + w \mid v \in V,\ w \in W\}$ suma
- $V \cap W = \{x \mid x \in V \text{ y } x \in W\}$ intersección

¿Quién sería un candidato para el producto cartesiano $V \times W$?

Problema: no tenemos una forma *canónica* de sumar

Si $V = \mathbb{R}^2,\ W = \mathbb{R}^3$

$((1,0),(1,1,1)) + ((0,1),(0,0,1))$

?

Buscamos entonces un **espacio vectorial** que sea una especie de *producto* entre V y W, y que además mantenga la estructura de espacio vectorialtanto de V como de W.

Esto es, se debería cumplir que

$$(v_1 + v_2, w) = (v_1, w) + (v_1, w) \qquad \forall\, v, v_1, v_2 \in V, w \in W$$
$$(\lambda v, w) = \lambda(v, w) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{k}$$

$$(v, w_1 + w_2) = (v, w_1) + (v, w_2) \qquad \forall\, v \in V, w, w_1, w_2 \in W$$
$$(v, \lambda w) = \lambda(v, w) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{k}$$

Definición

Definición

Sean V, W dos $\mathbb{k}$-espacios vectoriales. Se define el ***producto tensorial*** de V y W como el conjunto

$$V \otimes W = \{\underbrace{\textstyle\sum_{j=1}^{m}}_{\text{Suma finita.}} v_j \otimes w_j \mid v_j \in V, w_j \in W\}$$

donde el producto $\otimes$ satisface que

$$(v_1 + v_2) \otimes w = v_1 \otimes w + v_2 \otimes w \qquad \forall\, v, v_1, v_2 \in V, w \in W$$
$$(\lambda v) \otimes w = \lambda(v \otimes w) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{k}$$

$$v \otimes (w_1 + w_2) = v \otimes w_1 + v \otimes w_2 \qquad \forall\, v \in V, w, w_1, w_2 \in W$$
$$v \otimes (\lambda w) = \lambda(v \otimes w) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{k}$$

Los elementos de la forma $v \otimes w$ con $v \in V$ y $w \in W$ se llaman ***tensores elementales.***

En este sentido, todo elemento de $V \otimes W$ es una suma **finita** de tensores elementales.

Ejemplo Tomemos $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}^3$

Si $v = (1,3)$, $w = (-1,0,2)$

$\Rightarrow v \otimes w \in \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^3$

$$v \otimes w = (1,3) \otimes (-1,0,2)$$

$$1(1,0) + 3(0,1) \qquad -1(1,0,0) + 0(\cancel{0},1,0) + 2(0,0,1)$$

$$= \big(1(1,0) + 3(0,1)\big) \otimes \big(-1(1,0,0) + 2(0,0,1)\big)$$

$$\underset{\text{Prop}}{=} (1,0) \otimes (-1(1,0,0) + 2(0,0,1)) +$$
$$+\ 3(0,1) \otimes (-1(1,0,0) + 2(0,0,1))$$

$\underset{\text{prop}}{=} -1(1,0)\otimes(1,0,0) + 2(1,0)\otimes(0,0,1) +$

$-3(0,1)\otimes(1,0,0) + 6(0,1)\otimes(0,0,1)$

Vale El conjunto

$(1,0,0,0,0,0)$

$\{(1,0)\otimes(1,0,0), (1,0)\otimes(0,1,0), (1,0)\otimes(0,0,1),$
$(0,1)\otimes(1,0,0), (0,1)\otimes(0,1,0), (0,1)\otimes(0,0,1)\}$

es una base de $\mathbb{R}^2\otimes\mathbb{R}^3$

Vale $\mathbb{R}^2\otimes\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^6$

La definición anterior, es una definición *ad-hoc* del producto tensorial para el caso de dos espacios vectoriales. Existe una definición intrínseca de producto tensorial que lo define de manera única a través de una propiedad universal, basada en las propiedades que aparecen arriba.

Si Z es un espacio vectorial, una función bilineal de $V \times W$ en Z es una función

$$b: V \times W \longrightarrow Z$$

que satisface para todo $v, v_1, v_2 \in V, w, w_1, w_2 \in W$ y $\lambda \in \mathbb{k}$ que

i. $b(v_1 + v_2, w) = b(v_1, w) + b(v_1, w)$,
ii. $b(v, w_1 + w_2) = b(v, w_1) + b(v, w_2)$,
iii. $b(\lambda v, w) = \lambda b(v, w) = b(v, \lambda w)$,

Es decir, b es lineal en cada variable.

Ejemplo

Si $V = \mathbb{R}^2 = W$ y $Z = \mathbb{R}$ tenemos $b: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$b((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

es una forma bilineal.

Notar: $b((x,y),(x,y)) = x^2+y^2$

Teorema (Propiedad Universal del Producto Tensorial)

Sean V y W dos $\Bbbk$-espacios vectoriales. Entonces existe un espacio vectorial $V \otimes W$ y una forma bilineal $b\colon V \times W \longrightarrow V \otimes W$ tal que para todo espacio vectorial Z y toda forma bilineal $b'\colon V \times W \longrightarrow Z$, existe una transformación lineal $T\colon V \otimes W \longrightarrow Z$ tal que $T \circ b = b'$.

$$\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[rr, "b"] \arrow[dr, "\forall\, b'"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & V \otimes W \arrow[dl, dashed, "\exists!\, T \text{ lineal}"] \\
 & Z &
\end{tikzcd}$$

El espacio vectorial $V \otimes W$ es único salvo isomorfismo.

El producto tensorial funciona *casi* como un producto entre los espacios vectoriales.

La siguiente proposición nos dice que este producto es asociativo, conmutativo y con unidad, donde las igualdades están reemplazadas por isomorfismos.

En términos matemáticos, se dice que la categoría de espacios vectoriales es una *categoría tensorial*. Esta idea, *categorifica* la noción de anillo.

Proposición
Sean U, V, W tres $\Bbbk$-espacios vectoriales se tienen los siguientes isomorfismos:

(i) $(U \otimes V) \otimes W \simeq U \otimes (V \otimes W)$ (asociatividad)

(ii) $\Bbbk \otimes V \simeq V \simeq V \otimes \Bbbk$ (elemento identidad)

(iii) $V \otimes W \simeq W \otimes V$ (conmutatividad)

(iv) $\mathrm{Hom}(U \otimes V, W) \simeq \mathrm{Hom}(U, \mathrm{Hom}(V, W))$ (P.U)

(v) $(\bigoplus_{i\in I} U_i) \otimes V = \bigoplus_{i \in I}(U_i \otimes V)$ (distributiva)

(v) $\displaystyle (\bigoplus_{i\in I} U_i) \otimes V = \bigoplus_{i\in I}(U_i \otimes V)$ (distributiva)

Demostración (Idea)

(i), (ii) y (iii) ejercicio

(i) El isomorfismo es

$$(u\otimes v)\otimes w \longmapsto u\otimes(v\otimes w)$$

$\forall u\in U, v\in V$
$\forall w\in W.$

(ii) El isomorfismo es

$$\lambda\otimes v \longmapsto \lambda v \quad \forall \lambda\in k$$
$$v\otimes \lambda \longmapsto \lambda v \quad \forall v\in V$$

(iii) El isomorfismo es

$$v\otimes w \longmapsto w\otimes v \quad \forall v\in V, w\in W$$

(iv) El isomorfismo

$$\mathrm{Hom}(U\otimes V, W) \xrightarrow[\varphi]{\sim} \mathrm{Hom}(U, \mathrm{Hom}(V,W))$$

$T \in$

$T(u\otimes v)\in W$

$\Rightarrow \varphi(T)(u) \in \mathrm{Hom}(V,W)$

$\Rightarrow (\varphi(T)(u))(v) = T(u\otimes v)$

■

El siguiente corolario es en cierta forma una manera de caracterizar el producto tensorial de dos espacios vectoriales de dimensión finita.

Corolario

Sean V y W dos $\mathbb{k}$-espacios vectoriales de dimensión finita.
Si $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de V y $B_W = \{w_1, \dots, w_m\}$ es una base de W, entonces

$$B_{V\otimes W} = \{v_i \otimes w_j\}_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le m}}$$

es una base de $V \otimes W$. En particular,

$$\dim V \otimes W = \dim V \dim W .$$

Demostración

Si $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ es base de V, se tiene que $V = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{k} v_i$

Si $B_W = \{w_1, \dots, w_m\}$ es base de W, se tiene que $W = \bigoplus_{j=1}^{m} \mathbb{k} w_j$

$$\Rightarrow \quad V \otimes W = \left(\bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{k} v_i \right) \otimes \left(\bigoplus_{j=1}^{m} \mathbb{k} w_j \right)$$

$$= \bigoplus_{i=1}^{n} \left(\mathbb{k} v_i \otimes \left(\bigoplus_{j=1}^{m} \mathbb{k} w_j \right) \right)$$

Prop (v)

$$= \bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j=1}^{m} \mathbb{k} v_i \otimes \mathbb{k} w_j$$

Prop (iii) + (v)

$$= \bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j=1}^{m} \mathbb{k} (v_i \otimes w_j)$$

$$\Rightarrow \quad \{ v_i \otimes w_j \}_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \text{ es base}$$

■

Producto tensorial de transformaciones lineales

¿Cómo se comportan las transformaciones lineales con respecto al producto tensorial?

Supongamos que tenemos cuatro espacios vectoriales, U, V, W, Z y transformaciones lineales

$$f: U \longrightarrow W, \qquad g: V \longrightarrow Z$$

Se define el producto tensorial de f y g como la función

$$f \otimes g: \; U \otimes V \longrightarrow W \otimes Z$$

$$(f \otimes g)(u \otimes v) = f(u) \otimes g(v) \qquad \forall\, u \in U, v \in V.$$

y se extiende linealmente:

$$(f \otimes g) \left(\sum_{i=1}^{m} u_i \otimes v_i \right) = \sum_{i=1}^{m} (f \otimes g)(u_i \otimes v_i)$$

$$= \sum^{m} f(u_i) \otimes g(v_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} f(u_i) \otimes g(v_i)$$

La función así definida es una transformación lineal:

- $(f \otimes g)((u_1 + u_2) \otimes v) = f(u_1 + u_2) \otimes g(v)$
$$\underset{f \text{ es T.L}}{=} (f(u_1) + f(u_2)) \otimes g(v)$$
$$\underset{\text{prop. } \otimes}{=} f(u_1) \otimes g(v) + f(u_2) \otimes g(v)$$
- $(f \otimes g)(\lambda u \otimes v) = f(\lambda u) \otimes g(v) =$
$$= (\lambda f(u)) \otimes g(v) = \lambda\, f(u) \otimes g(v)$$
- Hacer para la segunda coordenada.

Esto define una transformación lineal entre los espacios de transformaciones lineales

$$F: \mathrm{Hom}(U, W) \otimes \mathrm{Hom}(V, Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}(U \otimes V, W \otimes Z)$$

$$F(f \otimes g)(u \otimes v) = f(u) \otimes g(v) \qquad \forall\, u \in U, v \in V$$

Teorema

Si alguno de los pares $(U, V), (U, W)$ o (V, Z) consiste en espacios vectoriales de dimensión finita, entonces la transformación lineal
$$\mathrm{F}: \mathrm{Hom}(U, W) \otimes \mathrm{Hom}(V, Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}(U \otimes V, W \otimes Z)$$
es un isomorfismo. $U^* \otimes V^*$ $\quad (U \otimes V)^*$

es un isomorfismo. $U^* \otimes V^*$ $(U \otimes V)^*$

Tomando $W = \Bbbk = Z$, tenemos que

$$\mathrm{Hom}(U,\Bbbk) = U^*, \qquad \mathrm{Hom}(V,\Bbbk) = V^*, \qquad \mathrm{Hom}(U \otimes V,\Bbbk) = (U \otimes V)^*$$

Corolario

Sean U y V dos $\Bbbk$-espacios vectoriales de dimensión finita. Entonces

$$(U \otimes V)^* \simeq U^* \otimes V^* \simeq V^* \otimes U^*.$$

Ahora tomando $W = \Bbbk = V$, y $Z = V$, tenemos que

$$\mathrm{Hom}(U,\Bbbk) = U^*, \qquad \mathrm{Hom}(\Bbbk, V) = V, \qquad U \otimes \Bbbk \simeq U, \qquad \Bbbk \otimes V \simeq V$$

Corolario

Sean U y V dos $\Bbbk$-espacios vectoriales, con $\dim U < \infty$ o $\dim V < \infty$. La función dada por

$$\lambda_{U,V}\colon U^* \otimes V \longrightarrow \mathrm{Hom}(U,V)$$

$$(\lambda_{U,V}(f \otimes v))(u) = f(u)v \qquad \forall\, f \in U^*,\ v \in V$$

es un isomorfismo lineal. En particular, si $\dim V = n < \infty$ entonces

$$V^* \otimes \mathrm{V} \simeq \mathrm{End(V)} \simeq \Bbbk^{n\times n}.$$

Demostración

Sale del teorema anterior.

Notar que dice que toda $T \in \mathrm{Hom}(U,V)$

es una comb. lineal finita de

funciones del tipo

$$\lambda((f\otimes v))(w) = f(w)\, v$$

■

Ejemplo

Supongamos que $V = \mathbb{k}^n$ y tomemos

$E = \{e_1, \dots, e_n\}$ base canónica , $e_1 = (1,0,0,\dots,0)$

$E^* = \{f_1, \dots, f_n\}$ base canónica dual

$f_i(v_j) = \delta_{ij} \quad \forall i,j$

Entonces $E = \{f_j \otimes e_i\}_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le m}}$ es una base de $(\mathbb{k}^n)^* \otimes \mathbb{k}^n$

Todo elemento de $(\mathbb{k}^n)^* \otimes \mathbb{k}^n$ es de la forma $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, f_j \otimes e_i$

debería ser lo mismo que una matriz

Para todo $1 \le i,j \le n$, consideremos las funciones $E_{ij} \in \mathrm{End}(\mathbb{k}^n)$ dadas por

$$E_{ij}(e_k) = \delta_{jk} e_i \qquad \forall\, 1 \le k \le n.$$

$E_{ij} : \mathbb{k}^n \to \mathbb{k}^n$

Vale que $\{E_{ji}\}_{1\le i,j\le n}$ es una base de $\mathrm{End}(\mathbb{k}^n)$.

Además, tomando las bases canónicas tenemos que

$\cancel{e_1}\ \cancel{e_2} \dots e_j \dots \cancel{e_n}$

$e_1\ e_2 \dots e_i \dots e_n$

$$[E_{ij}] = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & j & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & & & & \end{bmatrix} \end{array}$$

$$[E_{ij}]_E = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \cdots & \cdots & 1 & \cdots & \cdots \\ \vdots & & \vdots & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array}$$

$e_1\ e_2 \cdots e_i \cdots e_n$

Sabemos que $(\Bbbk^n)^* \otimes \Bbbk^n \simeq \mathrm{End}(\Bbbk^n) \simeq \Bbbk^{n\times n}$

Veamos cuál es la imagen de la base canónica

$f_j \otimes e_i$ lo mismo como t.l de $\Bbbk^n$ en $\Bbbk^n$

$$(f_j \otimes e_i)(e_k) \overset{def}{=} \underbrace{f_j(e_k)}_{\delta_{jk}} e_i$$

$$= \delta_{jk} e_i \quad \forall k$$

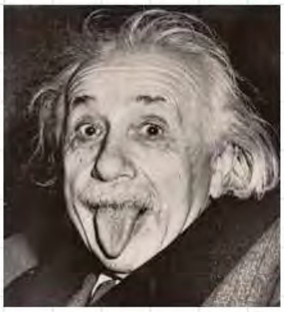
Pero $E_{ij}(e_k) = \delta_{jk} e_i \quad \forall k$

$$\Rightarrow \boxed{f_j \otimes e_i \leftrightarrow E_{ij}}$$

Tensores

miércoles, 12 de mayo de 2021 11:55

Antes de trabajar la idea de tensor, primero vamos a introducir la notación de Einstein que se usa regularmente en física.



La idea es de reducir la complejidad de la notación para poder realizar los cálculos de manera sencilla.

Idea: Si en una expresión algebraica (lineal) un índice se repite en un término, entonces hay una suma sobre todos los valores posibles de ese índice.

Ejemplos

1) Sea V un $\mathbb{k}$-espacio vectorial de dimensión finita y $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V.

Si $v \in V$, entonces $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$ para únicos escalares $a_1, \dots, a_n$.

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i = a_i v_i$$

Si $B = \{v_1, v_2, v_3\}$, $v = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3$

$$= \sum_{i=1}^{3} a_i v_i = a_i v_i$$

Notación (cambio): Seguiremos la notación de la práctica y escribimos $\vec{v}$ para vectores.

$$\vec{v} = a^1\vec{v}_1 + a^2\vec{v}_2 + \cdots + a^n\vec{v}_n = a^i\vec{v}_i$$

La idea de este cambio radica en lo siguiente:

Sabemos que las coordenadas están dadas por las *funciones coordenadas*

Si $B^* = \{f_1, \dots, f_n\}$ es una base dual de B, entonces

$$f_i(\vec{v}) = a^i \qquad \forall\, 1 \le i \le n$$

$$f_i(\vec{v}) = a^i \qquad \forall\, 1 \leq i \leq n$$

Esto lleva a escribir f^i en lugar de f_i para funcionales.

Así, la base dual de $B = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ se escribe $B^* = \{\vec{v}^1, \dots, \vec{v}^n\}$.

Al escribir las coordenadas de un vector $\vec{a}$ escribimos

$$\vec{a} = a^i \vec{v}_i$$

donde $\vec{v}^i(\vec{a}) = a^i \quad \forall\, 1 \leq i \leq n$.

Así, el vector de coordenadas de $\vec{a}$ lo escribimos

$$[\vec{a}]_B = (a^1, a^2, a^3)$$

En particular, tenemos que

$$\vec{v}^i(\vec{v}_j) = (\vec{v}_j)^i = \delta_{ij} \overset{\delta_j^i}{} \qquad \forall\, 1 \leq i, j \leq n.$$

$$[\vec{v}_j]_B = (0, 0, \dots, \underset{j}{1}, 0, \dots, 0)$$

$\vec{v}^1(\vec{v}_j)$ $\quad$ $\vec{v}^2(\vec{v}_j)$ $\quad$ $\vec{v}^j(\vec{v}_j)$ $\quad$ $\vec{v}^n(\vec{v}_j)$

Por otro lado, si $f \in V^*$, entonces

$$f = \underbrace{\alpha_1}_{f(\vec{v}_1)} \vec{v}^1 + \underbrace{\alpha_2}_{f(\vec{v}_2)} \vec{v}^2 + \dots + \underbrace{\alpha_n}_{f(\vec{v}_n)} \vec{v}^n$$

$$= f(\vec{v}_i)\, \vec{v}^i = \underbrace{f_i}_{\in \mathbb{K}} \vec{v}^i$$

Puede haber una identificación (a veces) entre

funciones coordenadas ⇝ coordenadas

Posible problema:
No se considera la dimensión del espacio en la notación.
Se debe entender del contexto.

Ejemplo más concreto:

Si $V = \mathbb{k}^n$ y $E = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ es la base canónica, la base dual es $B = \{\vec{e}^1, \dots, \vec{e}^n\}$.

$$\vec{x} = (x^1, x^2, \dots, x^n) = x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 + \dots + x^n\vec{e}_n$$
$$= x^i \vec{e}_i$$
$$[\vec{x}]_E = (x^1, \dots, x^n) = x^i$$

La coordenadas están dadas por la base dual

$$x^i = \vec{e}^i(x)$$

En particular $\vec{e}^i(\vec{e}_j) = \delta_{ij}$

2) Sean V, W dos $\mathbb{k}$-espacios vectoriales de dimensión finita con bases

$B_V = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ y $B_W = \{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m\}$, respectivamente.

Supongamos que $T: V \longrightarrow W$ es una transformación lineal

Si $\vec{x} \in V \Rightarrow \vec{x} = x^i \vec{v}_i$

$$[\vec{x}]_B = (x^1, x^2, \dots, x^n)$$

$$[\vec{x}]_B = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$$

$$T(\vec{x}) = T(x^1\vec{v}_1 + x^2\vec{v}_2 + \ldots + x^n\vec{v}_n)$$
$$= x^1 T(\vec{v}_1) + x^2 T(\vec{v}_2) + \ldots + x^n T(\vec{v}_n)$$
$$= x^i T(\vec{v}_i)$$

$$\vec{x} = x^i \vec{v}_i \Rightarrow T(\vec{x}) = x^i T(\vec{v}_i)$$

Como $B_W = \{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_m\}$ es base de W

$$\Rightarrow T(\vec{v}_i) = \vec{a}_i$$
$$= (\vec{a}_i)^1 \vec{w}_1 + (\vec{a}_i)^2 \vec{w}_2 + \ldots + (\vec{a}_i)^m \vec{w}_m$$
$$= (\vec{a}_i)^j \vec{w}_j$$

$$\Rightarrow [T(\vec{v}_i)]_{B_W} = \left((\vec{a}_i)^1, (\vec{a}_i)^2, \ldots, (\vec{a}_i)^m\right)$$

$$\text{y} \quad [T]_{B_W B_V} = \begin{pmatrix} (\vec{a}_1)^1 & (\vec{a}_2)^1 & \cdots & (\vec{a}_n)^1 \\ (\vec{a}_1)^2 & (\vec{a}_2)^2 & & (\vec{a}_n)^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ (\vec{a}_1)^m & (\vec{a}_2)^m & & (\vec{a}_n)^m \end{pmatrix}$$
$$= (\vec{a}_i)^j$$

3) Sea V un $\mathbb{k}$-espacio vectorial de dimensión finita y $B = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$, $B' = \{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n\}$ dos bases de V.

La matriz de cambio de base entre dos bases es

$$C_{B'B} = \left([\vec{v}_i]_{B'} \right)$$

$$\vec{v}_i = (\vec{v}_i)^1 \vec{w}_1 + (\vec{v}_i)^2 \vec{w}_2 + \quad + (\vec{v}_i)^n \vec{w}_n$$

$$C_{B'B} = \begin{pmatrix} (\vec{v}_1)^1 & \cdots & (\vec{v}_n)^1 \\ (\vec{v}_2)^2 & & (\vec{v}_n)^2 \\ \vdots & & \vdots \\ (\vec{v}_n)^n & & (\vec{v}_n)^n \end{pmatrix}$$

Si $\vec{v} \in V \Rightarrow \vec{v} = a^i \vec{v}_i$

$$= b^j \vec{w}_j$$

$$[\vec{v}]_B = (a^1, a^2, \ldots, a^n)$$

$$[\vec{v}]_{B'} = (b^1, b^2, \ldots, b^n)$$

$$\Rightarrow \quad [\vec{v}]_{B'} = C_{B'B} [\vec{v}]_B$$

$$\boxed{b^j = (\vec{v}_i)^j a^i}$$

$$\begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\vec{v}_1)^1 & \cdots & (\vec{v}_n)^1 \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b^2 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ (\vec{v}_1)^n & \cdots & (\vec{v}_n)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^2 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix}$$

Tensores

Un tensor es algo que se comporta como un tensor

Un tensor es una interpretación matemática de fenómenos físicos

La idea detrás del significado de tensor es manejar de manera uniforme los distintos tipos de escalares que aparecen en estructuras lineales: *coordenadas, matrices, funcionales, etc*.

Como hemos visto, los escalares dependen de elecciones de bases ordenadas o *sistemas de referencias*.

Esto, según Lorentz lleva a la idea de *covariancia*, puesto que cambia la descripción al cambiar de sistema de referencia.

Los tensores son entonces la representación de los escalares correspondientes a coordenadas de distintos objetos

Por ejemplo:

0-tensor: escalar λ

1- tensor: vector $\vec{v}_j, \vec{v}^i$

2-tensor: $\vec{v} \otimes \vec{w}$ = $\vec{v}\vec{w}$, $a_i{}^j$

Definición

Sea V un $\mathbb{k}$-espacio vectorial. Un **tensor** es un elemento del espacio vectorial

$$\underbrace{V^* \otimes V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{p \text{ veces}} \otimes \underbrace{V \otimes V \otimes \cdots \otimes V}_{q \text{ veces}} = (V^*)^{\otimes p} \otimes V^{\otimes q}$$

Decimos que el tensor es p *covariante* y q *contraviariante,* y escribimos (p,q) *–tensor.*

El *orden o la valencia* del tensor se define como $p+q$.

Ejemplos

1) Un tensor de orden 0 es simplemente un escalar.

Un tensor de orden 1 es:

un elemento de V = 1-tensor contravariante = $(0,1)$-tensor = $\vec{v}$

un elemento de V^*= 1-tensor covariante = $(1,0)$-tensor = funcional lineal = f

$\vec{v} \in V$, $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ base de V

$\vec{v} = a^i \vec{v}_i \longrightarrow (a^i) = [\vec{v}]_B$

Si $f \in V^*$, $B^* = \{\vec{v}^1, \vec{v}^2, \ldots, \vec{v}^n\}$

$\Rightarrow f \in V, \quad B = \{\vec{v}^1, \vec{v}^2, .., \vec{v}^n\}$ base dual

$$f = b_i \vec{v}^i \Rightarrow [f]_{B^*} = (b_i)$$

2) Un tensor de orden 2 puede ser:

Un $(0,2)$-tensor = un vector de $V \otimes V$ = $\vec{v} \otimes \vec{w} = \vec{v}\vec{w}$

2-contravariante

Si $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, .., \vec{v}_n\} \Rightarrow \{\vec{v}_i \otimes \vec{v}_j\}$ base de $V \otimes V$

$$\vec{v} = a^i \vec{v}_i, \quad \vec{w} = b^j \vec{v}_j$$

$$\vec{v}\vec{w} = \vec{v} \otimes \vec{w} = \underbrace{a^i b^j}_{c^{ij}} \vec{v}_i \vec{w}_j$$

$$[\vec{v}\vec{w}]_{B_\otimes} = (a^i b^j) = (c^{ij})$$

Un $(2,0)$-tensor = un vector de $V^* \otimes V^*$ = $f \otimes g = fg$= una forma bilineal!

Vimos que $(V^* \otimes V^*) \cong (V \otimes V)^*$ = funciones bilineales

2-covariante

Si $B^* = \{\vec{v}^1, \vec{v}^2, .., \vec{v}^n\}$

$$f = f_i \vec{v}^i, \quad g = g_j \vec{v}^j$$

$\Rightarrow f \otimes g = fg = \underbrace{f_i g_j}_{h_{ij}} \vec{v}^i \vec{v}^j$

$$\Rightarrow [f \otimes g]_{B^*_\otimes} = (f_i g_j) = (h_{ij})$$

Un $(1,1)$-tensor = un vector de $V^* \otimes V$ = $f \otimes \vec{v}$ = una matriz!

Vimos que $V^* \otimes V \simeq End(V) \simeq M_n(\mathbb{K})$

$\dim V = n$

Recordemos que vemos a alguien de $V^* \otimes V$ como una t.l.

$$(f \otimes v)(u) = f(u)\, v$$

Si $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ base de V

$B^* = \{\vec{e}^1, \vec{e}^2, \ldots, \vec{e}^n\}$ base de V^* dual

$$(\vec{e}^j \otimes \vec{e}_i)(\vec{e}_k) = \underline{\vec{e}^j(\vec{e}_k)}\, \vec{e}_i$$

$$= \delta_{jk}\, \vec{e}_i$$

$$= E_{ij}(\vec{e}_k)$$

$$\rightsquigarrow \quad \begin{array}{cc} & j \\ i & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & 1 & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array} = E_{ij}$$

Si $f = b_j \vec{e}^{\,j}$, $v = a^i \vec{e}_i$

$\Rightarrow f \otimes v = b_j a^i \vec{e}^{\,j} \vec{e}_i$

$\Rightarrow [f \otimes v]_{B_\otimes} = (b_j a^i) = (c^i_j)$

Notar que $\vec{e}^{\,j} \otimes \vec{e}_i = (\delta_{ij}) = E_{ij}$

Ley de cancelación: evaluar un vector covariante en una contravariante

Por ejemplo,

$$(\vec{e}^{\,j} \otimes \vec{e}_i)(\vec{e}_k) = \delta_{jk}\, \vec{e}_i$$

en coordenadas

$$\delta^i_j \vec{e}_k = \delta^k_j \vec{e}_i$$

Así, la idea de tensores engloba la idea de escalares, vectores, funcionales y matrices.

Veamos cómo se escriben cuando tomamos coordenadas.

Vamos a denotar a los vectores por $\vec{v}$, para no conundir con coordenadas.

Supongamos que V es un espacio vectorial y $B = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ una base, con base dual $B^* = \{\vec{e}^1, \dots, \vec{e}^n\}$.

Si $\vec{v} \in V$, entonces $\vec{v} = v^1\vec{e}_1 + \cdots + v^n\vec{e}_n = v^i\vec{e}_i$.

Si tomamos otra base $B' = \{\vec{e}_1', \dots, \vec{e}_n'\}$, sabemos cómo cambian las coordenadas.

$$\vec{v} = b^j \vec{e}_j \longrightarrow (b^j) = C^j_n (v^a)$$

$$b^j = C^j_i v^i$$

$$C^j_i = \left([\vec{e}_i]_{B'} \right) = \begin{pmatrix} (\vec{e}_1)^1 & \cdots & (\vec{e}_n)^1 \\ (\vec{e}_1)^2 & & (\vec{e}_n)^2 \\ \vdots & & \vdots \\ (\vec{e}_1)^n & & (\vec{e}_n)^n \end{pmatrix}$$

$$C^j_i = (\vec{e}_i)^j$$

$$C_i^{\,j} = (e_i)^j$$

Formas canónicas elementales

jueves, 13 de mayo de 2021 13:19

Antes de pasar a describir matrices de distintas formas, recordemos primero de la clase pasada el concepto de tensores

Sea V un $\Bbbk$-espacio vectorial. Un **tensor** es un elemento del espacio vectorial

$$\underbrace{V^* \otimes V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{p} \otimes \underbrace{V \otimes V \otimes \cdots \otimes V}_{q} = (V^*)^{\otimes p} \otimes V^{\otimes q}$$

Decimos que el tensor es p *covariante* y q *contraviariante,* y escribimos (p,q) *−tensor.*

El *orden o la valencia* del tensor se define como $p+q$.

$\vec{e}^{\,i}(\vec{e}_j) = \delta_{ij}$

Supongamos que $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ es una base de V y $B^* = \{\vec{e}^{\,1}, \vec{e}^{\,2}, \dots, \vec{e}^{\,n}\}$ su base dual

Si $v \in V$, escribimos $\vec{v} = v^1\vec{e}_1 + v^2\vec{e}_2 + \cdots + v^n\vec{e}_n$, $[\vec{v}]_B = (v^i)$

Si $f \in V^*$, escribimos $f = f_1\vec{e}^{\,1} + f_2\vec{e}^{\,2} + \cdots + f_n\vec{e}^{\,n}$, $[f]_{B^*} = (f_i)$

La idea de la notación es trabajar con las coordenadas y con los cambios de coordenadas.

Ejemplos

1) Un tensor de orden 0 es un escalar. $\lambda \in \Bbbk$

2) Un tensor de orden 1 es:

   un elemento de V = 1-tensor contravariante = $(0,1)$-tensor = $\vec{v}$ $= (v^i)$

   un elemento de V^*= 1-tensor covariante = $(1,0)$-tensor = funcional lineal = $f = (f_i)$

3) Un tensor de orden 2 puede ser:

   Un $(0,2)$-tensor = un vector de $V \otimes V$ = 2-tensor contraviarante= $\vec{v} \otimes \vec{w} = \vec{v}\vec{w}$

   Si $[\vec{v}]_B = (v^i)$, $[\vec{w}]_B = (w^j)$

$[\vec{v}]_B = (v^i)$, $[\vec{w}]_B = (w^j)$

$$\Rightarrow [\vec{v} \otimes \vec{w}]_{B \otimes B} = (\underbrace{v^i w^j}_{(vw)^{ij}})_{1 \le i,j \le n}$$

Un $(2,0)$-tensor = un vector de $V^* \otimes V^*$ = 2-tensor covariante=
$f \otimes g = fg$= una forma bilineal!

$$V^* \otimes V^* \simeq (V \otimes V)^*$$

$$[f]_{B^*} = (f_i) \quad , [g]_{B^*} = (g_j)$$

$$\Rightarrow [f \otimes g]_{B^* \otimes B^*} = (\underbrace{f_i g_j}_{(fg)^{ij}})_{1 \le i,j \le n}$$

Un $(1,1)$-tensor = un vector de $V^* \otimes V$ = $f \otimes \vec{v}$ = una matriz!

Sale del hecho $V^* \otimes V \simeq \mathrm{End}(V)$

Si $f \otimes \vec{v} \in V^* \otimes V$

$$f \otimes \vec{v} : V \longrightarrow V$$

$$(f \otimes \vec{v})(x) = \underbrace{f(x)}_{\in \mathbb{K}} \vec{v}$$

$$\mathrm{Im}\, f \otimes \vec{v} = \langle \vec{v} \rangle, \quad \dim(\mathrm{Im}\, f \otimes \vec{v}) = 1$$

$$\mathrm{End}(V) \xrightarrow[\text{tomando bases}]{} M_n(\mathbb{K})$$

$$\vec{e}^{\,j} \otimes \vec{e}_i \longrightarrow E_{ij} = \begin{array}{cc} & j \\ i & \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$A = (a_i{}^j)$$

Así, entendemos entonces a un tensor como un multi-índice

$$A = (a^{i_1 i_2 \cdots i_q}_{j_1 j_2 \cdots j_p})$$

que se corresponde a las coordenadas de un elemento de $(V^*)^{\otimes p} \otimes V^{\otimes q}$ luego de tomar una base y su base dual correspondiente.

Los índices superiores se corresponden a las coordenadas *contravariantes*.

Los índices inferiores se corresponden a las coordenadas *covariantes*.

Operaciones con tensores

Para operar con tensores seguimos las reglas para el producto tensorial.

Suma: sólo podemos sumar tensores de la misma estructura

$$a^{i_1 i_2 \cdots i_q}_{j_1 j_2 \cdots j_p} + b^{i_1 i_2 \cdots i_q}_{j_1 j_2 \cdots j_p} = c^{i_1 i_2 \cdots i_q}_{j_1 j_2 \cdots j_p}$$

Producto: es la yuxtaposición.

Si A es un (p, q) −tensor y B es un (r, s) −tensor, entonces

$$AB = A \otimes B = a^{i_1 i_2 \cdots i_q}_{j_1 j_2 \cdots j_p} \, b^{l_1 l_2 \cdots l_s}_{k_1 k_2 \cdots k_r} = c^{i_1 i_2 \cdots i_q l_1 l_2 \cdots l_s}_{j_1 j_2 \cdots j_p k_1 k_2 \cdots k_r}$$

Esta igualdad sale de identificar

$$((V^*)^{\otimes p} \otimes V^{\otimes q}) \otimes ((V^*)^{\otimes r} \otimes V^{\otimes s}) \simeq (V^*)^{\otimes (p+r)} \otimes (V)^{\otimes (q+s)}$$

Claramente no vale la conmutatividad:

Ejemplo, si $V = \mathbb{R}^2$

$$v = (1, 2) = (v^1, v^2)$$

$v = (1, 2) = (v^1, v^2)$

$w = (-1, 3) = (w^1, w^2)$

$v^i w^j = (v^1 w^1, v^1 w^2, v^2 w^1, v^2 w^2)$

$\neq \quad = (-1, 3, -2, 6)$

$w^j v^i = (w^1 v^1, w^1 v^2, w^2 v^1, w^2 v^2)$

$= (-1, -2, 3, 6)$

Formas canónicas elementales: autovalores y autovectores

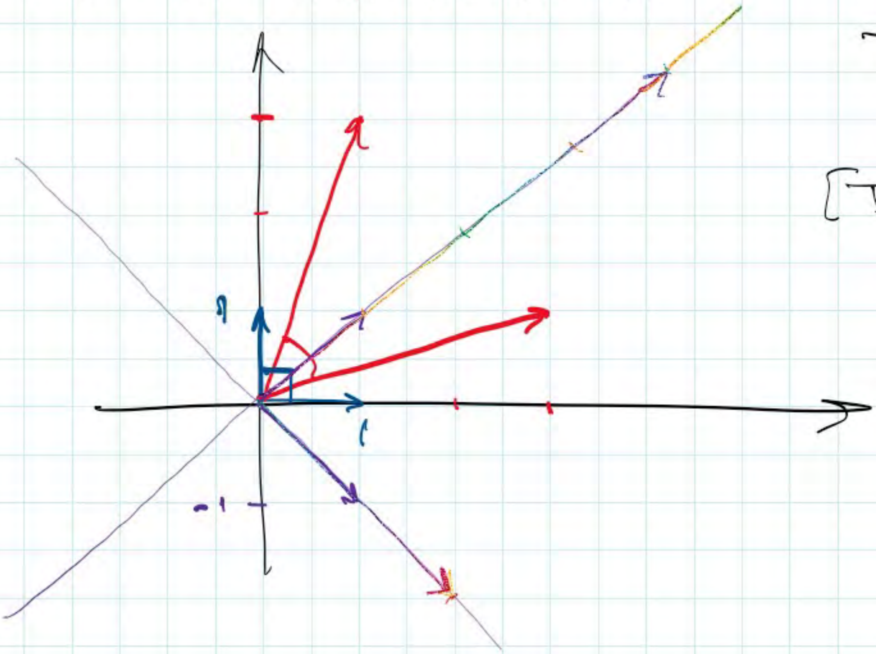
Consideremos la transformación lineal dada por

$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad T(x, y) = (3x + y, x + 3y)$

$T(1,0) = (3,1)$

$T(0,1) = (1,3)$

$[T]_E = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$



¿Existe alguna base de $\mathbb{R}^2$ tal que la matriz de la transformación tenga una forma más simple?

Tomemos la base

$B = \{(1, 1), (1, -1)\}$

$B = \{(1,1), (1,-1)\}$

$$C_{EB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C_{BE} = C_{EB}^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\det C_{E,B} = -2 \qquad = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$[T]_B = C_{BE} \, [T]_E \, C_{EB}$$

$$= C_{EB}^{-1} \, [T]_E \, C_{EB}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{[T]_B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow T(1,1) = 4(1,1) + \cancel{0(1,-1)}$$

$$T(1,-1) = \cancel{0(1,1)} + 2(1,-1)$$

Si $(x,y) = a(1,1) + b(1,-1)$

$$\Rightarrow T(x,y) = T\big(a(1,1) + b(1,-1)\big)$$

$$= a\,T(1,1) + b\,T(1,-1)$$

$$T(x,y) = a\,4(1,1) + 2\,b(1,-1)$$

$$[T(x,y)]_B = [T]_B\,[(x,y)]_B$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 4a \\ 2b \end{pmatrix}$$

$$[(x,y)]_B = C_{BE}\,[(x,y)]_E$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{a}{\overset{\shortparallel}{x/2 + y/2}} \\ \underset{= b}{x/2 - y/2} \end{bmatrix}$$

$$T(x,y) = 4\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right)(1,1) + 2\left(\frac{x}{2} - \frac{y}{2}\right)(1,-1)$$

$$= (3x + y,\ x + 3y).$$

¿Podemos encontrar siempre una base donde $[T]_B$ sea diagonal?

Es decir, $[T]_B = \begin{pmatrix} d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$

Si $B = \{v_1, \dots, v_n\} \Rightarrow [T(v_i)]_B = [T]_B [v_i]_B$

$$= [T]_B \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} = \text{columna } i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ d_i \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\Rightarrow T(v_i) = d_i v_i \qquad \forall 1 \leq i \leq n$$

Esto motiva la siguiente definición:

Definición

Sea V un $\mathbb{k}$-espacio vectorial y $T \in \mathrm{End}(V)$.

Un **valor propio o un autovalor** de T es un $\lambda \in \mathbb{k}$ tal que existe $v \in V$ **no nulo** con

$$T(v) = \lambda v$$

Si λ es un autovalor de T, entonces todo $v \in V$ que satisface que $T(v) = \lambda v$ se llama **vector propio o autovector** de T asociado al autovalor λ

Observación

Dado $\lambda \in \mathbb{k}$, consideremos el subconjunto de V dado por

$$V_\lambda = \{v \in V \mid T(v) = \lambda v\} \ni 0_V, \text{ pues } T(0_V) = 0_V = \lambda 0_V$$

Dado $\lambda \in \mathbb{K}$, consideremos el subconjunto de V dado por

$$V_\lambda = \{v \in V \mid T(v) = \lambda v\} \ni 0_V \text{ pues } T(0_V) = 0_V = \lambda 0_V$$

Entonces V_λ es un subespacio de V que se denomina **espacio propio o autoespacio** asociado a λ.

Notar que si T no tiene autovectores de autovalor λ, entonces $V_\lambda = \{0\}$.

Veamos que V_λ es un subespacio de V:

- $v, w \in V_\lambda \Rightarrow T(v) = \lambda v,\ T(w) = \lambda w$

$$\Rightarrow T(v+w) = T(v) + T(w)$$
$$= \lambda v + \lambda w = \lambda(v+w)$$

$$\Rightarrow v+w \in V_\lambda$$

- $v \in V_\lambda,\ a \in \mathbb{K} \Rightarrow T(av) = aT(v)$

$$= a(\lambda v)$$
$$= \lambda(av)$$

$$\Rightarrow av \in V_\lambda.$$

Más aún, $V_\lambda = \operatorname{Ker}(T - \lambda\, \mathrm{id}_V)$

$\subseteq$) Si $v \in V_\lambda$, entonces $T(v) = \lambda v$

$$\Rightarrow T(v) - \lambda v = 0_V$$

$$\Rightarrow \quad T(v) - (\lambda\, id_V)(v) = 0_V$$

def $$\Rightarrow \quad (\underbrace{T - \lambda\, id_V}) (v) = 0_V$$

$$v \in \ker (T - \lambda\, id_V)$$

$\supseteq$) Si $v \in \ker(T - \lambda\, id_V)$

$$\Rightarrow \quad (T - \lambda\, id_V)(v) = 0_V$$

$$\Rightarrow 0_V = T(v) - (\lambda\, id_V)(v) = T(v) - \lambda v$$

$$\Rightarrow \quad T(v) = \lambda v$$

$$\Rightarrow \quad v \in V_\lambda$$

En el ejemplo anterior,

$$(1,1) \in V_4 = \ker (T - 4\, id)$$

$$(1,-1) \in V_2 = \ker (T - 2\, id)$$

Así λ es un autovalor de T si $\mathrm{Ker}(T - \lambda\, \mathrm{id}_V) \neq \{0\}$, es decir, la transformación lineal $T - \lambda\, \mathrm{id}_V$ no es inyectiva

Ejemplo

4 y 2 son autovalores de $\mathrm{T}\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,
$\mathrm{T}(x, y) = (3x + y, x + 3y)$

con autovectores

con autovectores

$(1,1)$ para $\lambda = 4$, notar que $\langle (1,1) \rangle \subseteq V_4$

$(1,-1)$ para $\lambda = 2$ $\langle (1,-1) \rangle \subseteq V_2$

Observación

Sea V un $\mathbb{k}$-espacio vectorial de dimensión finita y $T \in \mathrm{End}(V)$.

Si B y B' son dos bases de V, vimos que

$$[T]_{B'} = C_{B'B}\,[T]_B\,C_{BB'}$$

$$= C_{BB'}^{-1}\,[T]_B\,C_{BB'}$$

$$\Rightarrow \det([T]_{B'}) = \det(C_{BB'}^{-1}[T]_B C_{BB'})$$

$$= \det(C_{BB'}^{-1})\det([T]_B)\det(C_{BB'})$$

$$= \cancel{\det(C_{BB'})^{-1}}\det([T]_B)\cancel{\det(C_{BB'})}$$

$$= \det([T]_B)$$

El determinante no depende de la elección de la base de V.

Definición

Sea V un $\mathbb{k}$-espacio vectorial y $T \in \mathrm{End}(V)$.

Se define el **determinante** de T como el determinante de la matriz de T asociada a una base (cualquiera) B de V

$$\det(T) = \det([T]_B)$$

Proposición

Sea V un $\mathbb{k}$-espacio vectorial y $T \in \mathrm{End}(V)$. Entonces

$$T \text{ es inversible} \Leftrightarrow \det(T) \neq 0$$

Demostración

Sabemos que T es inversible si y sólo si $[T]_B$ es inversible para cualquier base B. Esto último pasa si y sólo si $\det([T]_B) \neq 0$. Por def, $\det([T]_B) = \det(T)$, luego, T es inversible $\Leftrightarrow \det(T) \neq 0$

■

Autovalores y polinomio característico

miércoles, 19 de mayo de 2021 10:36

Recordemos la definición que vimos la semana pasada

Definición

Sea V un $\mathbb{k}$-espacio vectorial y $T \in \operatorname{End}(V)$.

Un **valor propio o un autovalor** de T es un $\lambda \in \mathbb{k}$ tal que existe $v \in V$ **no nulo** con

$$T(v) = \lambda v$$

Si λ es un autovalor de T, entonces todo $v \in V$ que satisface que $\mathrm{T}(v) = \lambda v$ se llama **vector propio o autovector** de T asociado al autovalor λ

Habíamos visto que:

- Dado $\lambda \in \mathbb{k}$, se tiene el subespacio de V:

$$V_\lambda = \{v \in V \mid T(v) = \lambda v\}$$

  que se denomina **espacio propio o autoespacio** asociado a λ.

- Más aún, $V_\lambda = \operatorname{Ker}(T - \lambda \operatorname{id}_V)$

- λ es un autovalor de T si $\operatorname{Ker}(T - \lambda \operatorname{id}_V) \neq \{0\}$, es decir, la transformación lineal $T - \lambda \operatorname{id}_V$ no es inyectiva.

- Si $S \in \operatorname{End}(V)$. Entonces

$$S \text{ es inversible} \Leftrightarrow \det(S) \neq 0$$

Tomando $S = T - \lambda \operatorname{id}_V$ tenemos el siguiente teorema, que nos dice una forma de encontrar los autovalores como raíces de polinomios.

Teorema

Sean V un $\Bbbk$-espacio vectorial de dimensión finita, $T \in \operatorname{End}(V)$ y $\lambda \in \Bbbk$.

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) λ es un autovalor de T.

(ii) El operador lineal $(T - \lambda\,\mathrm{id}_V) \in \operatorname{End}(V)$ es no inversible.

(iii) $\det(T - \lambda\, id_V) = 0$

Demostración

λ es autovalor de T si y sólo si (por definición) existe $v \in V$, $v \neq 0$ tal que $T(v) = \lambda v$.

Esto sucede, si y sólo si

$$T(v) - \lambda v = 0_V$$

Esto sucede si y sólo si

$$(T - \lambda\, id)(v) = 0 \Leftrightarrow$$

$$v \in \ker(T - \lambda\, id)$$

Como $(T - \lambda\, id) : V \to V$, esto equivale a decir que $(T - \lambda\, id)$ es no inversible, en part, no es inyectiva

Esto equivale a decir que

$$\det(T-\lambda\, id) = \det([T-\lambda\, id]_B) = 0$$

■

Observación

Sea V un $\mathbb{k}$-espacio vectorial y B una base de V.

Supongamos que tenemos $T \in \mathrm{End}(V)$ y denotemos $A = [T]_B$

Sabemos que $T-\lambda id$ es inversible $\Leftrightarrow$ $[T-\lambda id]_B$ es inversible

Pero $[T-\lambda \cdot id]_B = [T]_B - \lambda [id]_B$

(pues $[\ \ ]_B$ es un isomorfismo lineal)

$$= \boxed{A - \lambda I = [T-\lambda id]_B}$$

$A-\lambda I$ es inversible $\Leftrightarrow$ $\det(A-\lambda I) \neq 0$

Ejemplo

Consideremos la transformación lineal dada por

$T\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad T(x,y) = (3x+y, x+3y)$

Tomamos la base canónica
$E = \{(1,0), (0,1)\}$

$T(1,0) = (3,1)$
$T(0,1) = (1,3)$
$\Rightarrow [T]_E = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = A$

$\underline{\lambda = 4}$

$$A - 4I = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \det(A - 4I) = 0$

$\Rightarrow \lambda = 4$ es un autovalor

$\underline{\lambda = 2}$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A - 2I) = 0$$

$\Rightarrow \lambda = 2$ es autovalor

$\underline{\lambda = 3}$

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A - 3I) = -1 \neq 0$$

Pensamos a $\lambda = X$ como una variable que uno puede reemplazar:

$$A - XI = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - X\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 - X & 1 \\ 1 & 3 - X \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(A - XI) = (3 - X)^2 - 1$$

Autovalores son los X tales que

$$(3 - X)^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (3 - X)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad 3 - X = 1 \quad \text{ó} \quad 3 - X = -1$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{X = 2} \quad \text{ó} \quad \boxed{X = 4}$$

Miremos entonces un poco qué podemos decir sobre las matrices.

Definición

Sea $A \in M_n(\mathbb{k})$. Un **valor propio o un autovalor** de A es un $\lambda \in \mathbb{k}$ tal que la matriz $A - \lambda \cdot I$ no es inversible, i.e. $\det(A - \lambda \cdot I) = 0$

(id est)

Ejemplos

1) 4 y 2 son autovalores de $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

2) Si el espacio nulo de una matriz A es no trivial, entonces 0 es autovalor.
¡Vale la recíproca!

Si $A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ es autovalor!

$0 \neq$

Definición

Sea $A \in M_n(\mathbb{k})$. Se define el **polinomio característico** de A como

$$p_A(X) = \det(X \cdot I_n - A)$$

Ejemplo

1) Si $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$\det\left(X \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} X-3 & -1 \\ -1 & X-3 \end{pmatrix}$$

$$= (X-3)^2 - 1 = X^2 - 6X + 9 - 1$$

$$= X^2 - 6X + 8$$

$$= (x-3)^2 - 1 = x^2 - 6x + 9 - 1$$

$$= x^2 - 6x + 8$$

$$= (x-2)(x-4)$$

$$= \det \begin{pmatrix} x-2 & 0 \\ 0 & x-4 \end{pmatrix} =$$

$$= \det \left(xI - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \right)$$

Notar que el polinomio característico es siempre mónico (su coeficiente principal es 1).

2) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

$$xI - A = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x-1 & -2 & 3 \\ 0 & x-2 & -1 \\ 0 & 1 & x-3 \end{pmatrix}$$

$$\det(xI - A) = (x-1) \begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ 1 & x-3 \end{vmatrix}$$

$$= (x-1)\left[(x-2)(x-3) + 1\right]$$

$$= (x-1)(x^2 - 5x + 6 + 1)$$

$$= (x-1)(x^2 - 5x + 7)$$

$\underline{\lambda = 1}$ es autovalor

$$x = 5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 7}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{-3}}{2} \notin \mathbb{R}$$

Esta matriz tiene sólo un autovalor real, los demás autovalores son complejos. (que son 2).

$$\lambda_2 = \frac{5 + \sqrt{3}\, i}{2}$$

$$\lambda_3 = \frac{5 - \sqrt{3}\, i}{2}$$

Recordar que $A, B \in M_n(\Bbbk)$ son conjugadas si existe $P \in M_n(\Bbbk)$ invertible tal que

$$\boxed{B = P^{-1} A P}$$

Lema

Sean A, B dos matrices en $M_n(\Bbbk)$.

Si A es conjugada a B, entonces $p_A(X) = p_B(X)$.

Demostración

Si A es conjugada a B, entonces

Si A es conjugada a B, entonces existe $P \in M_n(\mathbb{k})$ invertible tal que $B = P^{-1}AP$

Pero entonces

$$P_B(X) = \det(X \cdot I - B) = \det(X \cdot I - P^{-1}AP)$$

$$= \det(X \cdot P^{-1}P - P^{-1}AP)$$

$$= \det(P^{-1}X \cdot P - P^{-1}AP)$$

$$= \det(P^{-1}(X \cdot I - A)P)$$

$$= \cancel{\det(P^{-1})} \det(X \cdot I - A) \cancel{\det(P)}$$

$$= \det(X \cdot I - A) = P_A(X)$$

■

Ejemplo

Si tomamos $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Sabemos que $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{C_{EB}^{-1}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{C_{EB}} = P^{-1}A\,P.$

$$p_A(x) = (x-3)^2+1$$

$$p_B(x) = \det\left(xI - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \det\begin{pmatrix} x-4 & 0 \\ 0 & x-2 \end{pmatrix}$$

$$= (x-4)(x-2)$$

Observación

Los valores propios de A son exactamente las raíces del polinomio característico sobre $\mathbb{k}$.

Ejemplo

Si tomamos $\mathbb{k} = \mathbb{R}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$p_A(x) = \det\left(x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \det\begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix} = x^2+1$$

$$= \det\begin{pmatrix} X & -1 \\ 1 & X \end{pmatrix} = X^2+1$$

A no tiene autovalores reales, pero sí complejos

$$p_A(X) = X^2+1 = (X-i)(X+i)$$

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$p_A(X) = (X-1)^3$$

$\lambda = 1$ es el único autovalor

Volvamos ahora a mirar las transformaciones lineales

Definición

Sea V un $\Bbbk$-espacio vectorial de dimensión finita y B una base de V (cualquiera). Para $T \in \mathrm{End}(V)$, se define el **polinomio característico** de T como el polinomio característico de $[T]_B$:

$$p_T(X) = \det(X \cdot I - [T]_B)$$

Observación

Por el lema anterior, la definición no depende de la base elegida. (Ejercicio)

Ejemplo

Consideremos la transformación lineal dada por

$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad T(x,y) = (3x+y, x+3y)$

Con la base canónica, $[T]_{E} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow P_T(X) = (X-3)^2 - 1$

$= X^2 - 6X + 8$

$= (X-4)(X-2).$

Notar que distintas bases nos dan distintas formas de escribir el mismo polinomio característico

Observación

1) Los polinomios característicos son mónicos

2) El grado del polinomio característico es $\dim V$

$$\operatorname{gr} P_T(X) = \dim V$$

3) Tenemos a lo sumo $n = \dim V$ autovalores distintos

↳ Siempre hay una cantidad finita de autovalores

Pregunta: *¿Es cierto que si dos matrices tienen el mismo polinomio característico entonces son matrices de una misma transformación lineal, i.e. son semejantes?*

Ahora ya tenemos caracterizados los autovalores como raíces de polinomios.

Sin embargo, no terminamos de decir cómo hallarlos, porque para esto tenemos que encontrar raíces de polinomios y eso puede ser muy difícil de hallar exactamente!!!

Vamos ahora cómo hallar los correspondientes autovectores conociendo un autovalor

Supongamos que V es un $\mathbb{k}$-espacio vectorial de dimensión finita y $T \in \mathrm{End}(V)$.

Si $\lambda \in \mathbb{k}$ es un autovalor, entonces

$$V_\lambda = \mathrm{Ker}(T - \lambda\, \mathrm{id}_V) \neq \{0\}$$

Así, si B es una base de V, y $A = [T]_B$, para hallar V_λ basta hallar el espacio nulo asociado a la matriz $A - \lambda \cdot I$, puesto que el mismo nos dará las coordenadas de los vectoes de V_λ en la base B.

Ejemplo

Consideremos la transformación lineal dada por

$T\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad T(x,y) = (3x + y, x + 3y)$

Los autovalores son 4 y 2

$B = \{(1,0),(0,1)\}$, $[T]_B = A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$V_4 = \ker(T - 4\,\mathrm{id})$

$V_2 = \ker(T - 2\,\mathrm{id})$

Calculamos el espacio nulo de las matrices $\begin{cases} A - 4I \\ A - 2I \end{cases}$

$A - 4I = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 + F_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-F_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \left\{ x - y = 0 \right. \Rightarrow x = y$

$$V_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$$
$$= \{(x,x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{x(1,1) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$$
$$= \langle (1,1) \rangle$$

Ejercicio: $V_2 = \langle (1,-1) \rangle$

Tenemos una base de autovectores

$$B = \{(1,1), (1,-1)\}$$

Transformaciones diagonalizables

miércoles, 26 de mayo de 2021 11:33

Sea V un $\Bbbk$-espacio vectorial y $T \in \mathrm{End}(V)$.

Recordemos que un **valor propio o un autovalor** de T es un $\lambda \in \Bbbk$ tal que existe $v \in V$ **no nulo** con

$$T(v) = \lambda v$$

Si λ es un autovalor de T, entonces todo $v \in V$ que satisface que $T(v) = \lambda v$ se llama **vector propio o autovector** de T asociado al autovalor λ

Si λ es un autovalor,

$$V_\lambda = \{ v \in V \mid T(v) = \lambda v \}$$

es el autoespacio asociado a λ.

Definición

Sea V un $\Bbbk$-espacio vectorial de dimensión finita y $T \in \mathrm{End}(V)$.

Decimos que T es **diagonalizable** si existe una base B =$\{ v_1, \dots, v_n\}$ de V tal que v_i es autovector de T para todo $1 \le i \le n$.

Es decir, todo vector de la base es un autovector de T.

Observación

Si $T \in \mathrm{End}(V)$ es diagonalizable, entonces existe una base B =$\{ v_1, \dots, v_n\}$ de V tal que

$$T(v_i) = \lambda_i v_i \qquad \forall\, 1 \le i \le n$$

para ciertos $\lambda_i \in \Bbbk$. Entonces, se tiene que

$$[T]_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

i.e. la matriz de T en la base B es **diagonal.**

Ejemplo

1) Consideremos la transformación lineal dada por

$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad T(x, y) = (3x + y, x + 3y)$

Si tomamos la base $B = \{(1,1),(1,-1)\}$

$T(1,1) = (3+1, 1+3) = (4,4) = 4(1,1)$

$T(1,-1) = (3-1, 1-3) = (2,-2) = 2(1,-1)$

$\Rightarrow [T]_B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ T es diagonalizable

2) Consideremos la transformación lineal dada por

$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad T(x, y) = (x + y, y)$

Consideremos la base canónica

$E = \{(1,0),(0,1)\}$

$\left.\begin{array}{l} T(1,0) = (1,0) \\ T(0,1) = (1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow [T]_E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Buscamos los autovalores:

Usamos el polinomio característico

$$P_T(x) = \det(x \cdot I - [T_E])$$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \det\begin{pmatrix} x-1 & -1 \\ 0 & x-1 \end{pmatrix}$$

$$= (x-1)^2$$

Tenemos un autovalor $\lambda = 1$ con multiplicidad 2

$$U_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid T(x,y) = (x,y)\}$$

$$= \ker(1 \cdot I - T)$$

$$1 \cdot I - [T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(I - [T]_B)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad -y = 0$$

$$\Rightarrow \quad (x,y) = (x,0) = x(1,0)$$

$$\Rightarrow \quad V_1 = \langle (1,0) \rangle$$

$$\Rightarrow \quad \dim V_1 = 1$$

Como $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, no puede haber una base de autovectores

$\Rightarrow$ T no es diagonalizable

Observación

En el ejemplo anterior vimos que $p_T(X) = (X-1)^2$.

En general, si T es diagonalizable, entonces

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

para alguna base B de V.

Así,

$p_T(X) = \det(X \cdot \mathrm{id} - T) = \det([X \cdot \mathrm{id} - T]_B) = \det(X \cdot I - [T]_B) =$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} X & & 0 \\ & X & \\ & & \ddots \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \right)$$

$$\left(\begin{pmatrix} \ddots & & \\ & & \ddots \\ 0 & \cdots & X \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_2 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \right)$$

$$= \det \begin{pmatrix} X-\lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X-\lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & X-\lambda_n \end{pmatrix}$$

$$= (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\cdots(X-\lambda_n)$$

En particular, $p_T(X)$ es el producto de factores lineales.

Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_j$, podemos escribir

$$p_T(X) = (X-\lambda_1)^{d_1}(X-\lambda_2)^{d_2}\cdots(X-\lambda_s)^{d_s}$$

con

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_1 \end{bmatrix}}_{d_1} d_1 & & & \\ & \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_2 \end{bmatrix}}_{d_2} d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_j & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_j \end{bmatrix}}_{d_j} d_j \end{pmatrix}$$

V_{λ_1} $\qquad$ V_{λ_2} $\qquad$ V_{λ_j}

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 I_{d_1} & & & \\ & \lambda_2 I_{d_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_j I_{d_j} \end{bmatrix}$$

Notar que $d_1 + d_2 + \dots + d_j = n$

Vale que $\dim V_{\lambda_i} = d_i \quad \forall\, 1 \le i \le j$

Ejemplo

Supongamos que tenemos

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

λ_1, λ_2

d_1 $\qquad$ $\operatorname{gr} P_T = 3$

$$\Rightarrow P_T(X) = (X-4)^{\overset{d_1}{2}} (X-2)^{1 = d_2}$$

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 4I_2 & \\ & 2 \end{bmatrix}$$

Si $B = \{v_1, v_2, v_3\} \Rightarrow T(v_1) = 4v_1$

$T(v_2) = 4v_2$

$T(v_3) = 2v_3$

$\Rightarrow \{v_1, v_2\} \subseteq V_4$ y son li

$\{v_3\} \subseteq V_2$

Esto dice que $\dim V_4 \geq 2$

y como $V_4 \subseteq \mathbb{R}^3 \Rightarrow \dim V_4 \leq 3$

Si fuese $3 = \dim V_4$, tendría una base de $\mathbb{R}^3$ que conste de autovectores de autovalor 4 $\Rightarrow \chi_T(X) = (X-4)^3$

Abs!

$\Rightarrow \dim V_4 = 2$

Análogamente, $\dim V_2 = 1$

Tenemos que

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim V_4 + \dim V_2$$
$$= d_1 + d_2$$

Objetivo: caracterizar las transformaciones lineales diagonalizables.

Para ello, necesitamos introducir evaluación de polinomios en transformaciones lineales y sumas directas de subespacios.

Sea V un $\mathbb{k}$-espacio vectorial de dimensión finita y $T \in \mathrm{End}(V)$.

Supongamos que $p \in \mathbb{k}[X]$, con $p(X) = \sum_{i=1}^{n} a_i X^i$.

Supongamos que $p \in \Bbbk[X]$, con $p(X) = \sum_{i=1}^{n} a_i X^i$.

Se define la transformación lineal

son composiciones de transf. lineales

$$p(T): V \longrightarrow V$$

$$p(T) = \sum_{i=1}^{n} a_i T^i = a_n T^n + a_{n-1} T^{n-1} + \cdots + a_1 T + a_0 \mathrm{id}$$

Claramente, $p(T)$ es una transformación lineal pues T^i es una transformación lineal para todo $1 \leq i \leq n$, por lo que $p(T)$ es una combinación de transformaciones lineales.

Así, vemos al polinomio $p(X)$ como una función

$$\mathrm{End}(V) \xrightarrow{p(X)} \mathrm{End}(V)$$

Si $T, S \in \mathrm{End}(V)$

$$(T+S)^2 = (T+S)(T+S)$$
$$= T^2 + TS + ST + S^2$$
$$\neq T^2 + S^2$$

Por ejemplo, si $p(X) = X^2 + X + 1$ y $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, T(x, y) = (x + y, y)$, entonces

$p(T) = T^2 + T + \mathrm{id}$.

$$p(T)(x,y) = (T^2 + T + \mathrm{id})(x,y)$$
$$= T^2(x,y) + T(x,y) + \mathrm{id}(x,y)$$
$$= T(T(x,y)) + T(x,y) + \mathrm{id}(x,y)$$
$$= T(x+y, y) + (x+y, y) + (x,y)$$

$= (x+y+y, y) + (x+y, y) + (x, y)$

$= (x+2y, y) + (x+y, y) + (x, y)$

$= \boxed{(3x+3y, 3y) = p(T)(x,y)}$

$$[T]_E = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pues $[p(T)]_E = [T^2 + T + id]_E$

$= [T^2]_E + [T]_E + [id]_E$

$= [T]_E^2 + [T]_E + I$

Veamos otro polinomio: $p(X) = (X-1)^2$

$p(T) = (T - id)^2$

$[p(T)]_E = [(T-id)^2]_E = [T - id]_E^2$

$= ([T]_E - I)^2 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)^2$

$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $p(T)$ es la transformación

$\Rightarrow$ $p(T)$ es la transformación lineal nula!

Lema

Sean V un $\Bbbk$-espacio vectorial, $T \in \operatorname{End}(V)$ y $v \in V$ tal que $T(v) = \lambda v$.

Entonces $p(T)(v) = p(\lambda)v$ para todo polinomio $p \in \Bbbk[X]$.

Demostración

Supongamos que $p(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$

$= a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$

$\Rightarrow p(T) = \sum_{i=0}^{n} a_i T^i = a_n T^n + a_{n-1} T^{n-1} + \cdots + a_1 T + a_0$

es una t. l.

Si $T(v) = \lambda v$, entonces

$p(T)(v) = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i T^i \right)(v)$

$= \sum^{n} a_i T^i(v)$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_i T^i(v)$$

Pero, $T(v) = \lambda v$, $T^2(v) = T(T(v))$
$= T(\lambda v) = \lambda T(v) = \lambda(\lambda v) = \lambda^2 v$

Así, $T^i(v) = \lambda^i v$

$$\Rightarrow \quad p(T)(v) = \sum_{i=0}^{n} a_i \lambda^i v$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \lambda^i\right) v$$

$$= p(\lambda) v$$

■

Ejemplo

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$T(x,y) = (3x+y, x+3y)$

$V_4 = \langle (1,1) \rangle$, $V_2 = \langle (1,-1) \rangle$

$p(X) = X^2 + X + 1$

$$p(X) = X^2 + X + 1$$

$$p(T)(1,1) = p(4)(1,1)$$
$$= (4^2+4+1)(1,1) = 21(1,1)$$

$$p(T)(1,-1) = p(2)(1,-1)$$
$$= (2^2+2+1)(1,-1)$$
$$= 7(1,-1)$$

Supongamos que $p(X) = (X-4)(X-2)$

$$\Rightarrow p(T)(1,1) = p(4)(1,1) = (0,0)$$
$$p(T)(1,-1) = p(2)(1,-1) = (0,0)$$

es una tal.

$$p(T) = (T - 4\,id)(T - 2\,id)$$

$$p(T)(1,1) = (T-4\,id)(T-2\,id)(1,1)$$
$$= (T-4\,id)\big(T(1,1) - 2(1,1)\big)$$
$$= (T-4\,id)\big(4(1,1) - 2(1,1)\big)$$

$$= (T - 4\,id)\,(2(1,1))$$
$$= 2\,(T - 4\,id)\,(1,1)$$
$$= 2\,(T(1,1) - 4(1,1))$$
$$= 2\,(4(1,1) - 4(1,1)) = (0,0)$$

Sumas directas y autoespacios

jueves, 27 de mayo de 2021 14:13

Para encontrar bases de autovectores, necesitamos sumar subespacios que estén en *suma directa*.

Comenzamos con la suma de dos subespacios de un espacio vectorial.

Definición

Sea V un $\Bbbk$-espacio vectorial y V_1, V_2 dos subespacios de V.

Decimos que V_1 y V_2 están en **suma directa** si para todo $v \in V_1 + V_2$, existe **únicos** $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$ tales que $v = v_1 + v_2$.

En ese caso escribimos $V_1 + V_2 = V_1 \oplus V_2$.

Observación

Vale que $V_1 + V_2 = V_1 \oplus V_2$ si y sólo si $V_1 \cap V_2 = \{0_V\}$.

$\Rightarrow$) Sup que $V_1 + V_2 = V_1 \oplus V_2$

Si $v \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow v \in V_1$ y $v \in V_2$

$\Rightarrow v = \underbrace{v}_{\in V_1} + \underbrace{0_V}_{\in V_2} = \underbrace{0_V}_{\in V_1} + \underbrace{v}_{\in V_2}$

$\Rightarrow v = 0_V \Rightarrow V_1 \cap V_2 = \{0_V\}$

$\Leftarrow$) Sup que $V_1 \cap V_2 = \{0_V\}$ y tenemos

$v \in V_1 + V_2 \underset{\text{def}}{\Rightarrow} v = v_1 + v_2$, $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$

Sup que $v = w_1 + w_2$, $w_1 \in V_1$, $w_2 \in V_2$

$\Rightarrow v_1 + v_2 = v = w_1 + w_2$

$\Rightarrow \quad \underbrace{v_1 - w_1}_{\in V_1} = \underbrace{w_2 - v_2}_{\in V_2} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} v_1 - w_1 \\ w_2 - v_2 \end{matrix} \in V_1 \cap V_2$

Como $V_1 \cap V_2 = \{0_V\} \Rightarrow v_1 - w_1 = 0_V$

$w_2 - v_2 = 0_V$

$\Rightarrow \quad v_1 = w_1 \;\; y \;\; v_2 = w_2.$

1.

2. Si $V_1 + V_2 = V_1 \oplus V_2$, entonces

$$\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$$

Recordar que el teorema de la dim. nos decía que

$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim V_1 \cap V_2$

Si $V_1 + V_2 = V_1 \oplus V_2 \Rightarrow V_1 \cap V_2 = \{0\}$ y

$\dim V_1 \cap V_2 = 0.$

3. Si B_1 es base de V_1, B_2 es base de V_2 y $V_1 + V_2 = V_1 \oplus V_2$, entonces $B = B_1 \cup B_2$ es base de $V_1 \oplus V_2$.

Si $v \in V_1 \oplus V_2 \Rightarrow \exists!\; v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$ tal que $v = v_1 + v_2$

Si $B_1 = \{w_1, w_2, \ldots, w_s\}$ base de V_1

$B_2 = \{u_1, u_2, \ldots, u_t\}$ base de V_2

$\Rightarrow v_1 = (v_1)^i w_i$ (Not. tensor)

$= (v_1)^1 w_1 + (v_1)^2 w_2 + \cdots + (v_1)^s w_s$

$= \sum_{i=1}^{s} (v_1)^i w_i$

$$= \sum_{i=1} (v_1)^i w_i$$

$$v_2 = (v_2)^j u_j$$

$$\Rightarrow \quad v = v_1 + v_2 = (v_1)^i w_i + (v_2)^i u_i$$

$\Rightarrow \{w_1, \dots, w_s, u_1, \dots, u_t\}$ generan $V_1 \oplus V_2$

Sup. que

$$0_V = a^1 w_1 + \dots + a^s w_s + b^1 u_1 + \dots b^t u_t$$

$$0_V = \underbrace{a^i w_i}_{\in V_1} + \underbrace{b^j u_j}_{\in V_2} = 0 + 0$$

Como la suma es directa,

$$\begin{cases} 0 = a^i w_i & \Rightarrow a^i = 0 \quad \forall i \\ 0 = b^j u_j & \Rightarrow b^j = 0 \quad \forall j \end{cases}$$

$\Rightarrow \{w_1, \dots, w_s, u_1, \dots, u_t\} = B_1 \cup B_2$ es l.i. por lo tanto base de $V_1 \oplus V_2$

Habiendo definido la suma directa para dos subespacios, la definimos para una cantidad finita arbitraria.

La idea: ir sumando de a pares

$$V_1 \oplus V_2 \oplus V_3 \oplus V_4 = ((V_1 \oplus V_2) \oplus V_3) \oplus V_4$$

Definición

Sea V un $\mathbb{k}$-espacio vectorial y $V_1, V_2, \dots, V_k$ subespacios de V.

Decimos que $V_1, V_2, \dots, V_k$ están en **suma directa** si para todo $v \in V_1 + V_2 + \cdots + V_k$, existen **únicos** $v_i \in V_i$ tales que $v = v_1 + v_2 + \cdots + v_k$.

En ese caso escribimos $V_1 + V_2 + \cdots + V_k = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k$.

Ejercicio: Probar que

$$(V_1 \oplus V_2) \oplus V_3 = V_1 \oplus (V_2 \oplus V_3) = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$$

Observación

Por la misma demostración que antes, si B_i es base de V_i, entonces

$$B = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_k$$

es base de $V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k$.

Ejercicio: Repetir demostración

Ejemplo

Consideremos $\mathrm{V} = \mathbb{R}^3$,

$V_1 = \langle (1,1,1) \rangle, V_2 = \langle (1,-1,3) \rangle, V_3 = \langle (-2,2,-1) \rangle$

Lema

Sean V un $\mathbb{k}$-espacio vectorial de dimensión finita, $V_1, V_2, \dots, V_k$ subespacios de V y llamemos $W = V_1 + V_2 + \cdots + V_k$. Son equivalentes:

(a) $W = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k$.

(b) Para todo $i, 2 \leq i \leq k$ se tiene que

(a) $W = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k$.

(b) Para todo $j, 2 \leq j \leq k$ se tiene que

$$V_j \cap (V_1 + V_2 + \cdots + V_{j-1}) = \{0_V\}$$

(c) Si B_i es base de V_i, entonces $B = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_k$ es base de W.

Demostración (Ejercicio) ■

Veamos ahora la relación de la suma directa de subespacios y los autoespacios de una transformación lineal.

V un $\Bbbk$-esp vectorial y $T \in \mathrm{End}(V)$,

$$V_\lambda = \{v \in V \mid T(v) = \lambda v\}$$

Si λ es autovalor de $T \Rightarrow V_\lambda \neq \{0_V\}$.

Lema

Sean V un $\Bbbk$-espacio vectorial de dimensión finita, $T \in \mathrm{End}(V)$, $\alpha, \beta \in \Bbbk$ autovalores distintos de T, y V_α, V_β los autoespacios asociados a los autovalores correspondientes.

Entonces $V_\alpha \cap V_\beta = \{0_V\}$.

En particular $V_\alpha + V_\beta = V_\alpha \oplus V_\beta$ y $\dim(V_\alpha + V_\beta) = \dim V_\alpha + \dim V_\beta$

Demostración

Recordemos que

$$V_\alpha = \{v \in V \mid T(v) = \alpha v\}$$
$$V_\beta = \{v \in V \mid T(v) = \beta v\}$$

Veamos que $V_\alpha \cap V_\beta = \{0\}$ si $\alpha \neq \beta$.

Tenemos los polinomios

$$P_1(X) = \frac{(X-\beta)}{\underbrace{(\alpha-\beta)}_{\neq 0}}, \quad P_2(X) = \frac{(X-\alpha)}{\underbrace{(\beta-\alpha)}_{\neq 0}}$$

Vale lo siguiente:

- $P_1(\alpha) = 1, \quad P_1(\beta) = 0$
- $P_2(\alpha) = 0, \quad P_2(\beta) = 1$

Sup que $v \in V_\alpha \cap V_\beta \Rightarrow \begin{cases} v \in V_\alpha \\ v \in V_\beta \end{cases}$

$\Rightarrow \exists\ v_\alpha \in V_\alpha,\ v = v_\alpha \Rightarrow T(v_\alpha) = \alpha v_\alpha$

$ v_\beta \in V_\beta,\ v = v_\beta \Rightarrow T(v_\beta) = \beta v_\beta$

$\Rightarrow 0_V = v_\alpha - v_\beta$

Pero $T(0_V) = 0_V$

y entonces

$$P_1(T)(0_V) = 0_V = \frac{(T-\beta.id)}{\alpha-\beta}(0_V)$$

$$= \frac{1}{\alpha-\beta}(T(0_V) - \beta.0_V) = \frac{1}{\alpha-\beta}(0_V - 0_V) = 0_V$$

Por otro lado,

Por otro lado,

$$0_V = p_i(T)(0_V) = p_i(T)(v_\alpha - v_\beta) =$$

$$= p_i(T)(v_\alpha) - p_i(T)(v_\beta)$$

$$\overset{\text{Lema clase ant}}{=} \underbrace{p_i(\alpha)}_{\in \mathbb{k}}(v_\alpha) - \underbrace{p_i(\beta)}_{\in \mathbb{k}}(v_\beta)$$

$$= v_\alpha - 0 \cdot v_\beta = \boxed{v_\alpha} \Rightarrow v_\alpha = 0_V$$

Como $0_V = v_\alpha - v_\beta = -v_\beta \Rightarrow v_\beta = 0$

$\Rightarrow v = 0_V.$

■

Lema

Sean V un $\mathbb{k}$-espacio vectorial de dimensión finita, $T \in \operatorname{End}(V)$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{k}$ los autovalores distintos de T, y $V_1, V_2, \dots, V_k$ los autoespacios asociados a los autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, respectivamente.

Si $W = V_1 + V_2 + \cdots + V_k$, entonces $\dim W = \dim V_1 + \dim V_2 + \cdots + \dim V_k$.

Más aún, si es B_i es base de V_i, entonces $B = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_k$ es una base de W.

Demostración (Aplicación del polinomio interpolador de Lagrange)

Idea: Probar que todo vector $w \in W = V_1 + V_2 + \cdots + V_k$ se escribe como una suma de elementos únicos

$w = v_1 + v_2 + \dots + v_k$ con $v_1 \in U_1, v_2 \in U_2$
$\dots v_k \in U_k$

Ventaja: $V_i = U_{\lambda_i} = \{ v \in V \mid T(v) = \lambda_i v \}$

Construimos polinomios $p_1, \dots, p_k$
tales que

$p_1(\lambda_1) = 1, \; p_1(\lambda_i) = 0 \quad \forall i \neq 1$

$p_2(\lambda_2) = 1, \; p_2(\lambda_i) = 0 \quad \forall i \neq 2$

$\vdots$

$p_k(\lambda_k) = 1, \; p_k(\lambda_i) = 0 \quad \forall i \neq k$

$\hookrightarrow$ Polinomios interpoladores de Lagrange

Tomamos

$$p_1(X) = \frac{(X-\lambda_2)(X-\lambda_3)\cdots(X-\lambda_k)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)\cdots(\lambda_1-\lambda_k)}$$

$\Rightarrow \; p_1(\lambda_i) = 0 \quad \forall i \neq 1$
$\quad\; p_1(\lambda_1) = 1$

En general, $p_j(X) = \prod_{i \neq j} \frac{(X-\lambda_i)}{(\lambda_j - \lambda_i)}$

$$(\underbrace{\lambda_j - \lambda_i}_{\neq 0})$$

Nota: Ver que $w \in W$ se escribe de forma única es equivalente a ver que 0_V se escribe de forma única

Si $\begin{cases} w = v_1 + v_2 + \cdots + v_k, & v_i \in V_i \\ w = u_1 + u_2 + \cdots + u_k, & u_i \in V_i \end{cases}$

$$\Rightarrow 0_V = (\underbrace{v_1 - u_1}_{\in V_1}) + (\underbrace{v_2 - u_2}_{\in V_2}) + \cdots + (\underbrace{v_k - u_k}_{\in V_k})$$

$$= 0 + 0 + \cdots + 0_k$$

$$\Rightarrow v_1 = u_1, \; v_2 = u_2, \ldots, v_k = u_k$$

Sup que $0_V = v_1 + v_2 + \cdots + v_k, \; v_i \in V_i$

$$\Rightarrow p_1(T)(0_V) = 0_V$$

Pero $p_1(T)(v_1 + \cdots + v_k) =$

$$= p_1(T)(v_1) + \cdots + p_1(T)(v_k)$$

$$\underset{\text{lema clase ant.}}{=} \underbrace{p_1(\lambda_1)}_{=1}(v_1) + \underbrace{\cancel{p_1(\lambda_2)}}_{0}(v_2) + \cdots + \underbrace{\cancel{p_1(\lambda_k)}}_{0}(v_k)$$

$$= v_1 \Rightarrow v_1 = 0$$

En general, $p_i(T)(0_V) = 0_V$ y

$p_i(T)(v_1+\dots+v_k) = v_i$

$\Rightarrow v_i = 0_V \quad \forall \quad 1 \le i \le k.$

■

Observación

Sean V un $\Bbbk$-espacio vectorial de dimensión finita y $T \in \mathrm{End}(V)$.

Supongamos que

v_1 es un autovector de T de autovalor λ_1, y

v_2 es un autovector de T de autovalor λ_2,

Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, entonces v_1 y v_2 son linealmente independientes.

Teorema

Sean V un $\Bbbk$-espacio vectorial de dimensión finita, $T \in \mathrm{End}(V)$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \Bbbk$ los autovalores distintos de T, y $V_1 = \mathrm{Ker}(\lambda_1 \mathrm{id} - T), V_2 = \mathrm{Ker}(\lambda_2 \mathrm{id} - T), \dots, V_k = \mathrm{Ker}(\lambda_k \mathrm{id} - T)$ los autoespacios asociados a los autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, respectivamente.

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) T es diagonalizable,

(b) $p_T(X) = (X-\lambda_1)^{d_1}(X-\lambda_2)^{d_2} \cdots (X-\lambda_k)^{d_k}$ y $\dim V_i = d_i$ para todo $1 \le i \le k$,

(c) $\dim V_1 + \dim V_2 + \cdots + \dim V_k = \dim V$.

Demostración

(a) $\Rightarrow$ (b). Sup que T es diagonalizable

Entonces existe una base de autovectores

$B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \Rightarrow [T]_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$

Juntamos los autovalores iguales y

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1 \end{bmatrix}}^{} {}_{d_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{bmatrix} \lambda_k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k \end{bmatrix}_{d_k} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow p_T(X) = \det(XI - [T]_B)$$

$$= \det \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} X-\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & X-\lambda_1 \end{bmatrix}_{d_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{bmatrix} X-\lambda_k & & \\ & \ddots & \\ & & X-\lambda_k \end{bmatrix}_{d_k} \end{pmatrix}$$

$$= (X-\lambda_1)^{d_1} (X-\lambda_2)^{d_2} \cdots (X-\lambda_k)^{d_k}$$

Además,

$$\ker(\lambda_i I - [T]_B) = \ker \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_i-\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_i-\lambda_1 \end{bmatrix}_{d_1} & & & \\ & \begin{bmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{bmatrix}_{d_i} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \begin{bmatrix} \lambda_i-\lambda_k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_i-\lambda_k \end{bmatrix}_{d_k} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow d_i = \dim \ker(\lambda_i I - [T]_B).$$

(b) $\Rightarrow$ (c)

Sup que $p_T(X) = (X-\lambda_1)^{d_1} \cdots (X-\lambda_k)^{d_k}$

$\dim V_1 = d_1, \dim V_2 = d_2, \ldots, \dim V_k = d_k$

Como $n = \dim V = gr\, P_T(x)$

y $gr\, P_T(x) = d_1 + d_2 + \ldots + d_k$

$\Rightarrow \dim V = \dim V_1 + \ldots + \dim V_k$

Pero, vimos que $V_1 + \ldots + V_k = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$

$\Rightarrow V_1 + \ldots + V_k = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k = V$

(c) $\Rightarrow$ (a) Si $\dim V = \dim V_1 + \ldots + \dim V_k$

Sabemos que $V_1 + V_2 + \ldots + V_k = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$
porque son autoespacios de autovalores
distintos. En particular,

$\dim (V_1 + \ldots + V_k) = \dim V_1 + \ldots + \dim V_k$
y Base de $V_1 + \ldots + V_k = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k$
donde B_i base de V_i

Como $\dim V_1 + \ldots + \dim V_k = \dim V$
$\Rightarrow V_1 + \ldots + V_k = V$
$\Rightarrow B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k$ es una base de V

son bases de autovectores
(asociada a distintos autovalores)

$\Rightarrow$ T es diagonalizable porque encontramos una base de autovectores

■

Ejemplo

Consideremos la transformación lineal dada por

$$T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$T(x,y,z) = (4x+2y, 2x+4y, 4x-4y+6z)$

Tomamos $E = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

1) $[T]_E = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 4 & -4 & 6 \end{bmatrix}$

2) $P_T(X) = \det\begin{pmatrix} X-4 & -2 & 0 \\ -2 & X-4 & 0 \\ -4 & 4 & X-6 \end{pmatrix}$

$= (X-6)\det\begin{pmatrix} X-4 & -2 \\ -2 & X-4 \end{pmatrix}$

$= (X-6)[(X-4)^2 - 4]$

$= (X-6)(X^2 - 8X + 16 - 4)$

$= (X-6)(X^2 - 8X + 12)$

$= (X-6)(X-6)(X-2)$

$= (X-6)^2(X-2)$ Autovalores $= \{2, 6\}$

Por Teorema: T es diagonalizable

Por Teorema: T es diagonalizable

si $\dim V_6 = 2$?

$\dim V_2 = 1$ ✓

$$\ker\left(\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 4 & -4 & 6 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \ker\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Polinomio minimal de una transformación lineal

miércoles, 2 de junio de 2021 10:42

Comencemos recordando un ejemplo de la clase anterior

Ejemplo

Consideremos la transformación lineal dada por

$$T\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$T(x,y,z) = (4x+2y, 2x+4y, 4x-4y+6z)$$

Si tomamos la base canónica $E = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ la matriz de T en esta base es

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 4 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico de T es

$$p_T(X) = \det(X\cdot I - [T]_E) = \det\left(X\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 4 & -4 & 6 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} X-4 & -2 & 0 \\ -2 & X-4 & 0 \\ -4 & 4 & X-6 \end{pmatrix} =$$

$(-1)^{3+3}$

$$= (X-6)((X-4)^2-4) = (X-6)(X-6)(X-2) = (X-6)^2(X-2). \quad = p_T(X)$$

Así los autovalores de T son $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 2.$

Tenemos entonces dos *autoespacios* asociados

$$V_6 = \{v\in\mathbb{R}^3 \mid T(v) = 6v\} = \operatorname{Ker}(6\cdot\mathrm{id} - T)$$

$$V_2 = \{v\in\mathbb{R}^3 \mid T(v) = 2v\} = \operatorname{Ker}(2\cdot\mathrm{id} - T)$$

Por el teorema de la clase pasada, sabemos T que es diagonalizable si

$$\dim V_6 = 2$$

$$\dim V_2 = 1$$

$$6\cdot \mathrm{id} - T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$(6\cdot\mathrm{id} - T)(x,y,z) = 6(x,y,z) - T(x,y,z)$$

$$= 6(x,y,z) - (4x+2y, 2x+4y, 4x-4y+6z)$$

$= (6x - 4x - 2y, 6y - 2x - 4y, \cancel{6z} - 4x + 4y - \cancel{6z})$

$= (2x - 2y, -2x + 2y, -4x + 4y)$

Núcleo: $\begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \\ -4x + 4y = 0 \end{cases}$

Solución de un sistema homogéneo

matriz asociada: $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

Más corto: $[6 \cdot id - T]_E = [6 \cdot id] - [T]_E$

$= 6 \cdot I - [T]_E = \begin{pmatrix} 6-4 & -2 & 0 \\ -2 & 6-4 & 0 \\ -4 & 4 & 6-6 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

Resolvemos el sistema homogéneo

$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4 + 2F_1]{F_2 + F_1} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{\frac{1}{2}F_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x - y = 0$

$\Rightarrow x = y$

$\Rightarrow \ker(6\,id - T) = V_6 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y\}$

$= \{(x,x,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, z \in \mathbb{R}\}$

$= \{x(1,1,0) + z(0,0,1) \mid x, z \in \mathbb{R}\}$

$= \langle (1,1,0), (0,0,1) \rangle$

$\Rightarrow B_{V_6} = \{(1,1,0), (0,0,1)\}$

$\dim V_6 = 2$ ✓

Calculemos ahora una base de V_2

$$2 \cdot I - [T] = \begin{pmatrix} 2-4 & -2 & 0 \\ -2 & 2-4 & 0 \\ -4 & 4 & 2-6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ -4 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

Resolvemos

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ -4 & 4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 - 2F_1]{F_2 - F_1} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{4}F_3]{-\frac{1}{2}F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \Rightarrow x = -y \\ -2y + z = 0 \Rightarrow z = 2y \end{cases}$$

$(x,y,z) = (-y, y, 2y) = y(-1,1,2)$

$\Rightarrow B_{V_2} = \{(-1,1,2)\},$

$\dim V_2 = 1$

Base de $\mathbb{R}^3$ de autovectores es

$B = \{(1,1,0), (0,0,1), (-1,1,2)\}$

Calcular $[T]_B = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Calculemos ahora $p_T(T)$, que es una transformación lineal $p_T(T)$: $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

Para hacer el cálculo más simple, podemos calcular la matriz asociada en la base canónica E.

Por lo que vimos anteriormente (matrices de combinaciones lineales y composiciones de transformaciones lineales), tenemos que

$$[p(T)]_E = p([T]_E)$$

En otras palabras, la matriz del polinomio evaluado en T es la matriz dada por la evaluación del polinomio en la matriz de T.

Si $p(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$

$\Rightarrow p(T) = a_n T^n + a_{n-1} T^{n-1} + \dots + a_1 T + a_0 \, id$

$\Rightarrow [p(T)]_B = [a_n T^n + a_{n-1} T^{n-1} + \dots + a_1 T + a_0 \, id]_B$

$$= a_n[T^n]_B + a_{n-1}[T^{n-1}]_B + \cdots + a_1[T]_B + a_0[id]_B$$

$$= a_n[T]_B^n + a_{n-1}[T]_B^{n-1} + \cdots + a_1[T]_B + a_0 I$$

En nuestro caso

$$[T]_E = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 4 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$p_T(x) = (x-6)(x-6)(x-2)$$

$$[p_T(T)]_E = p_T([T]_E) = ([T]_E - 6I)([T]_E - 6I)([T]_E - 2I)$$

$$= \begin{pmatrix} 4-6 & 2 & 0 \\ 2 & 4-6 & 0 \\ 4 & -4 & 6-6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4-6 & 2 & 0 \\ 2 & 4-6 & 0 \\ 4 & -4 & 6-6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4-2 & 2 & 0 \\ 2 & 4-2 & 0 \\ 4 & -4 & 6-2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \mathbb{0}$$

Se corresponde a la t.l. nula.

Luego, tenemos que $p_T(T) = \mathbf{0}$ es la transformación lineal nula.

Pensemos entonces en la situación general.

Sean V un $\Bbbk$-espacio vectorial de dimensión finita y $T \in End(V)$.

Podemos considerar entonces el conjunto de *polinomios* dado por

$$\mathcal{J}(T) = \{p \in \Bbbk[X] : p(T) = \mathbf{0}\}$$

Sabemos que es no vacío porque $\mathcal{J}(T)$ contiene al polinomio nulo.

(En el ejemplo anterior, también contiene a $p_T(T)$)

Los elementos de $\mathcal{J}(T)$ se llaman ***polinomios anuladores*** de T.

De hecho, siempre existe un polinomio no nulo de grado menor o igual a $(\dim V)^2$ que anula a T:

Si $T : V \to V$ es t.l $\Rightarrow T \in End(V)$

Sabemos que $End(V) = Hom(V, V)$

y entonces $\dim End(V) = \dim V \dim V = (\dim V)^2$

Sup $\dim V = n \Rightarrow \dim End(V) = n^2$

Si tomamos las transf. lineales:

$id, T, T^2, T^3, \ldots, T^n, T^{n+1}, \ldots, T^{n^2}$

(son n^2+1 tran. lineales)

Como $\dim End(V) = n^2$, estas transf. son l.d $\Rightarrow \exists\ a_0, a_1, \ldots, a_{n^2} \in \Bbbk$ tales que

$$\mathbf{0} = a_0 id + a_1 T + \ldots + a_{n^2} T^{n^2}$$

Si tomamos $p(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_{n^2} X^{n^2}$

$\Rightarrow p(T) = \mathbf{0}$ y $p(X) \neq 0$

Definición

Sea V un $\mathbb{k}$-espacio vectorial de dimensión finita y $T \in \mathrm{End}(V)$.

Se define el **polinomio minimal** de T como el polinomio **mónico** de menor grado que anula a T.

Lo denotamos $m_T(X)$.

Observación

Vale que $\mathcal{J}(T)$ es cerrado para la suma y el producto:

Sup que $p(X), q(X) \in \mathcal{J}(T) \Rightarrow \begin{cases} p(T) = 0 \\ q(T) = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow (p+q)(T) = p(T) + q(T) = 0 + 0 = 0$$

$$(p \cdot q)(T) = p(T) \circ q(T) = 0 \circ 0 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p+q \in \mathcal{J}(T) \\ p \cdot q \in \mathcal{J}(T) \end{cases}$$

Más aún, vale que si $p(X) \in \mathcal{J}(T)$ y $q(X)$ es cualquier polinomio, entonces $q(X)p(X) \in \mathcal{J}(T)$:

$$(q \cdot p)(T) = q(T) \circ p(T) = q(T) \circ 0 = 0$$

(en part, $\mathcal{J}(T)$

(en part, $\mathcal{J}(T)$
es un esp vect)

Esto dice que $\mathcal{J}(T)$ es un ***ideal*** de $\Bbbk[X]$.

Más aún, *vale que* todo ideal $\mathcal{J}$ de $\Bbbk[X]$ es un ***ideal principal***, esto es, todo polinomio del ideal es un múltiplo de un polinomio fijo, que se llama generador. Este polinomio es el polinomio mónico de menor grado contenido en el ideal.

$$\mathcal{J} = \{ q(x)m(x) \mid q(x) \in \Bbbk[X] \}$$
$$= (m(x))$$

En el caso del ideal $\mathcal{J}(T)$, el generador es el polinomio minimal $m_T(X)$.

Por lo tanto, el polinimio minimal $m_T(X)$ divide a todo polinomio anulador de T:

$$\mathcal{J}(T) = \{ q(x)m_T(x) \mid q(x) \in \Bbbk[X] \}$$
$$= (m_T(X))$$

Ejemplo

Consideremos la transformación lineal dada por

$$T\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$T(x,y,z) = (4x + 2y, 2x + 4y, 4x - 4y + 6z)$

Entonces $p_T(X) = (X-6)^2(X-2)$.

Vimos que $p_T(T) = 0$

$\Rightarrow$ por definición $m_T(T) \mid p_T(T)$

Posibilidades:

- $m_T(x) = p_T(x)$
- $\cancel{m_T(x) = cte}$
- $\cancel{m_T(x) = (x-6)}$
- $\cancel{m_T(x) = (x-6)^2}$
- $\cancel{m_T(x) = (x-2)}$
- $m_T(x) = (x-6)(x-2)$

Obs: Sabemos que si $v \in \mathbb{R}^3$ es autovector $\Rightarrow$ $p(T)(v) = \underbrace{p(\lambda)}_{=0} v$ de autovalor λ

$\Rightarrow$ Si $v = (-1,1,2) \Rightarrow T(v) = 2v$

$$p(T)(v) = p(2)(v)$$

$p(x) = (x-6) \Rightarrow (T-6)(v) = (2-6)v$
$= -4v \neq 0$

Análogamente,

$p(x) = (x-6)^2 \Rightarrow (T-6)^2(v) = (2-6)^2 v =$
$= (-4)^2 v \neq (0,0,0)$

Chances: $m_T(x) = (x-6)(x-2)$

$m_T(x) = (x-6)^2(x-2) = p_T(x)$

Calculamos la matriz de ambos polinomios

$$[(T-6)(T-2)]_E = [T-6]_E [T-2]_E =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 4 & -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow m_T(X) = (X-6)(X-2) \neq p_T(X)$$

¿Cómo podemos determinar el polinomio minimal de una transformación lineal?

Proposición

Sea V un $\Bbbk$-espacio vectorial de dimensión finita y $T \in \mathrm{End}(V)$. Entonces $m_T(X)$ queda determinado por las siguientes propiedades:

(a) $m_T(X)$ es un polinomio mónico,

(b) $m_T(T) = 0$,

(c) Es el polinomio de menor grado que anula a T.

Observación

Al igual que hicimos antes, vamos a pasar la información de transformaciones lineales a matrices para facilitar los cálculos.

1) Si $A \in M_n(\Bbbk)$ es una matriz y $p(X) \in \Bbbk[X]$ un polinomio, entonces $p(A) \in M_n(\Bbbk)$ es una matriz.

Al igual que antes, $\dim M_n(\Bbbk) = n^2$, entonces $I, A, A^2, A^3, \ldots, A^{n^2}$ son matrices l.d. $\Rightarrow \exists\ a_0, a_1, \ldots, a_{n^2} \in \Bbbk$ tales que

$$0 = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots + a_{n^2} A^{n^2}$$

$$\Rightarrow p(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_{n^2} X^{n^2}$$

$\exists\ p(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_{n^2} X^{n^2}$

cumple que $p(A) = 0$ (matriz nula)

Se define entonces el conjunto de *polinomios* dado por

$$\mathcal{J}(A) = \{p \in \mathbb{k}[X] : p(A) = \mathbf{0}\}$$

Sabemos que es no vacío porque $\mathcal{J}(A)$ contiene al menos un polinomio.

Análogamente a lo anterior, vale que $\mathcal{J}(A)$ es un ideal de $\mathbb{k}[X]$.

Como tal está generado por un polinomio mónico de menor grado

$$\mathcal{J}(A) = (m_A(X))$$

Se define entonces el **polinomio minimal** de A como el polinomio **mónico** de menor grado que anula a A.

Lo denotamos $m_A(X)$.

1. Sea V un $\mathbb{k}$ −espacio vectorial con $\dim V = n$. Si $T \in \operatorname{End}(V)$ y B es una base de V, entonces

$[T]_B = A \in M_n(\mathbb{k})$ y vale que $m_T(X) = m_A(X)$.

Pues si $[m_T(T)]_B = m_T([T]_B)$

$$\begin{aligned} [m_T(T)]_B &= m_T([T]_B) \\ \| \\ [0]_B = 0 &= m_T([T]_B) \\ &= m_T(A) \end{aligned}$$

$\Rightarrow m_T(X)$ anula a $A \Leftrightarrow m_A(X) \mid m_T(X)$

Recíprocamente,

$$0 = m_A(A) \Rightarrow [0]_B = m_A([T]_B) =$$
$$= [m_A(T)]_B$$

$[-]_B$ es un isomorfismo

$$\Rightarrow \quad 0 = m_A(T) \Rightarrow m_T(X) \mid m_A(X)$$

$$\Rightarrow \quad m_T(X) = m_A(X)$$

1. Si $A \sim B$, entonces $m_A(X) = m_B(X)$. Ejercicio

Teorema

Sean V un $\Bbbk$-espacio vectorial de dimensión finita y $T \in \mathrm{End}(V)$.

Entonces el polinomio minimal $m_T(X)$ y el polinomio característico $p_T(X)$ de T tienen las mismas raíces, salvo multiplicidades.

Demostración

Sabemos que las raíces de $p_T(X)$ son los autovalores de T.

Luego, hay que probar que los autovalores de T son raíces de $m_T(X)$, el polinomio minimal, y viceversa, que todas las raíces del minimal son autovalores de T.

Recordemos que el minimal cumple que

- es mónico
- $m_T(T) = 0$
- es el de menor grado

Así, si $v \in V$ es un autovector de T de autovalor $\lambda \Rightarrow T(v) = \lambda v$

Además vale que $\forall q \in \Bbbk[X]$,

$$q(T)(v) = q(\lambda) v$$

$q(T)(v) = q(\lambda) v$

Entonces

$$0 = 0(v) = m_T(T)(v) = \underbrace{m_T(\lambda)}_{\in \mathbb{k}}(v)$$

$\Rightarrow \quad 0 = m_T(\lambda) \Rightarrow \lambda$ es raíz de $m_T(X)$

Veamos ahora que toda raíz de $m_T(X)$ es un autovalor de T.

Sea a una raíz de $m_T(X)$

$\Rightarrow \quad m_T(a) = 0 \quad$ y $\quad (X-a) \mid m_T(X)$

Entonces existe un polinomio $q(X) \in \mathbb{k}[X]$ tal que

$$m_T(X) = (X-a)\, q(X)$$

y $\quad \operatorname{gr} q(X) < \operatorname{gr} m_T(X)$.

Pero, sabemos que $0 = m_T(T)$

$\Rightarrow \quad 0 = m_T(T) = (T - a\,id)\, q(T)$

Como $m_T(X)$ es el polinomio de grado mínimo que anula a T, $q(T) \neq 0$, la transf. lineal nula.

Así, $\exists\ w \in V$ tal que $\underbrace{q(T)(w)}_{\in V} \neq 0$

Sea $v = q(T)(w)$. Entonces

$$0 = 0(v) = m_T(T)(v) = (T - a\,id)\underbrace{q(T)(w)}_{= v}$$

$$= (T - a\,id)(v)$$

$$= T(v) - av$$

$\Rightarrow T(v) = av$ y $v \neq 0$

Por lo tanto, v es autovector de T de autovalor a, y a es autovalor de T.

$\blacksquare$

Teorema de Cayley-Hamilton

lunes, 7 de junio de 2021 11:32

En esta clase hablaremos sobre la relación entre polinomio característico y polinomio minimal de una transformación lineal.

Sean V un $\Bbbk$-espacio vectorial de dimensión finita y $T \in \mathrm{End}(V)$.

Recordemos que el polinomio característico de T se define como

$$p_T(X) = \det(X \cdot \mathrm{id} - T) = \det(X \cdot I - [T]_B)$$

donde B es cualquier base de V.

La particularidad del polinomio característico $p_T(X)$ de T es que sus raíces son los **autovalores** de T.

Con respecto al polinomio minimal, su definición es la siguiente:

Definición

Sea V un $\Bbbk$-espacio vectorial de dimensión finita y $T \in \mathrm{End}(V)$.

Se define el **polinomio minimal** de T como el polinomio **mónico** de menor grado que anula a T.

Lo denotamos $m_T(X)$.

En principio, no tenemos una forma explícita de calcularlo, aunque sabemos que existe.

Habíamos visto que queda determinado por las siguientes propiedades:

Proposición

Sea V un $\Bbbk$-espacio vectorial de dimensión finita y $T \in \mathrm{End}(V)$. Entonces $m_T(X)$ queda determinado por las siguientes propiedades:

(a) $m_T(X)$ es un polinomio mónico,

determinado por las siguientes propiedades:

(a) $m_T(X)$ es un polinomio mónico,

(b) $m_T(T) = 0$,

(c) Es el polinomio de menor grado que anula a T.

De esto resulta que si $q(X) \in \Bbbk[X]$ es un polinomio tal que $q(T) = \mathbf{0}$ entonces

$$m_T(X) \mid q(X)$$

i.e. el polinomio minimal de T lo divide.

Y al final de la clase habíamos enunciado el siguiente resultado, cuya prueba está contenida en las notas.

El teorema nos dice que las raíces del polinomio minimal también son los autovalores.

No sabemos aún con qué multiplicidad.

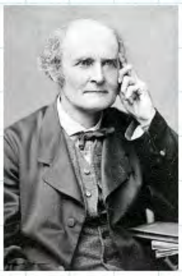
Teorema

Sean V un $\Bbbk$-espacio vectorial de dimensión finita y $T \in \mathrm{End}(V)$.

Entonces el polinomio minimal $m_T(X)$ y el polinomio característico $p_T(X)$ de T tienen las mismas raíces, salvo multiplicidades.

El Teorema de Cayley-Hamilton nos dice que las multiplicidades de las raíces del polinomio minimal $m_T(X)$ son menores que las multiplicidades de las raíces del característico $p_T(X)$.

En *criollo*, $m_T(X)$ divide a $p_T(X)$



Arthur Cayley (1821-1895)
Introdujo la multiplicación de matrices
Primera definición moderna de grupo
Combinatoria: Grafo de Cayley

William Rowan Hamilton (1805-1865)
Matemático, físico y astrónomo irlandés
Creó los cuaterniones
Introdujo el *Hamiltoniano*, fundamental en mecánica cuántica.

Lewis Hamilton
Nada que ver, pero fue campeón de F1!

Teorema (Cayley-Hamilton)

Sean V un $\Bbbk$-espacio vectorial de dimensión finita y $T \in \mathrm{End}(V)$.

Entonces $p_T(T) = \mathbf{0}$.

En particular, el polinomio minimal $m_T(X)$ divide al polinomio característico $p_T(X)$.

Demostración (video aparte) ■

Ejemplos

Consideremos $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$T(x, y) = (x + y, x)$

$E = \{(1,0), (0,1)\}$ base canónica

$$[T]_E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$p_T(X) = \det\left(\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} X-1 & -1 \\ -1 & X \end{pmatrix}$$

$$= (X-1)X - 1 = X^2 - X - 1$$

$= (X-1)X - 1 = X^2 - X - 1$

$$[P_T(T)]_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Raíces $\quad x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$\lambda_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow P_T(X) = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)$

Como el minimal tiene las mismas raíces y $m_T(X) \mid P_T(X)$

$\Rightarrow m_T(X) = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2) = P_T(X)$

En este caso, T es diagonalizable

1.

2. Supongamos que tenemos $T \in \mathrm{End}(V)$ diagonalizable con autovales $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ distintos entre si.

   Entonces $m_T(X) = (X-\lambda_1) \cdots (X-\lambda_s)$

Si T es diagonalizable, entonces existe una base de autovectores y podemos descomponer a V como suma directa

$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_s$

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s$$

donde $V_i = \{ v \in V \mid T(v) = \lambda_i v \}$

$=$ autoespacio asociado a λ_i

Base de $V = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_s$

B_i base de V_i

Si $v \in V \Rightarrow v = v_1 + \cdots + v_s$

para únicos $v_i \in V_i$

$\Rightarrow T(v) = T(v_1) + \cdots + T(v_s)$

$= \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_s v_s$

Y vimos que si $T(v) = \lambda v$

$\Rightarrow p(T)(v) = p(\lambda) v$

Luego, si $p(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_s)$

$p(T)(v) = p(T)(v_1 + v_2 + \cdots + v_s)$

$= p(T)(v_1) + p(T)(v_2) + \cdots + p(T)(v_s)$

$= \underbrace{p(\lambda_1)}_{=0} v_1 + \underbrace{p(\lambda_2)}_{=0} v_2 + \cdots + \underbrace{p(\lambda_s)}_{=0} (v_s)$

$= 0 \quad \forall v \in V \Rightarrow p(T) = 0$
como t.l.

Como $m_T(X) \mid p(T) = (X-\lambda_1)\cdots(X-\lambda_s)$

es igual pues:

1) $p(T)$ es mónico ✓
2) $p(T)$ tiene todas las raíces del característico, como el minimal
3) $p(T)$ es de grado mínimo!

Ejemplo

$T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$T(x,y,z) = (4x+2y,\ 2x+4y,\ 4x-4y+6z)$

es diagonalizable, $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 2$

$\mathbb{R}^3 = V_6 \oplus V_2$

$p_T(X) = (x-6)^2(x-2)$

$m_T(X) = (x-6)(x-2)$

$B_6 = \{(1,1,0),(0,0,1)\}$

$B_2 = \{(-1, 1, 2)\}$

Si $v \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow v = v_6 + v_2$

$v_6 \in V_6$, $v_2 \in V_2$

De hecho, vale la recíproca:

Teorema

Sean V un $\mathbb{k}$-espacio vectorial de dimensión finita y $T \in \mathrm{End}(V)$.

Entonces T es diagonalizable si y sólo $m_T(X) = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_s)$

donde $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ son los distintos autovalores de T.

Para probar este teorema, vamos a necesitar una nueva herramienta que nos va a servir para situaciones más generales:

Comprender cómo podemos descomponer un espacio vectorial usando espacios asociados a una transformación lineal.

Sea V un $\mathbb{k}$-esp. vect. de dimensión finita, $T \in \mathrm{End}(V)$ y $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ autovalores distintos de T

Vimos que T es diagonalizable si

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s$$

con V_i autoespacio relacionado a λ_i

$\Rightarrow$ $\forall v \in V$, existen únicos

$v_1 \in V_1, v_2 \in V_2, \dots, v_s \in V_s$ tales que

$$v = v_1 + v_2 + \dots + v_s$$

Esto produce que

$$T(v) = T(v_1 + v_2 + \dots + v_s)$$
$$= T(v_1) + T(v_2) + \dots + T(v_s)$$
$$= \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_s v_s$$

Notar que

- Si $v_i \in V_i = \{v \in V \mid T(v) = \lambda_i v\}$

  $\Rightarrow T(v_i) = \lambda_i v_i \in V_i$

  Escribimos $T(V_i) \subseteq V_i \;\; \forall i$

- Si $v \in V$, $\exists!\; v_i \in V_i$

  $$v = v_1 + v_2 + \dots + v_s$$

  y $T(v) = \underbrace{\lambda_1 v_1}_{\in V_1} + \underbrace{\lambda_2 v_2}_{\in V_2} + \dots + \underbrace{\lambda_s v_s}_{\in V_s}$

Ejemplo

$T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$T(x,y,z) = (4x+2y,\ 2x+4y,\ 4x-4y+6z)$

Autovalores $\lambda_1 = 6,\ \lambda_2 = 2$

$V_6 = \langle (1,1,0),(0,0,1) \rangle$

$V_2 = \langle (-1,1,2) \rangle$

Si $(0,2,3) \in \mathbb{R}^3 = V_6 \oplus V_2$

$$(0,2,3) = \overbrace{(1,1,0)+(0,0,1)} + (-1,1,2)$$

$$= \underbrace{(1,1,1)}_{\in V_6} + \underbrace{(-1,1,2)}_{\in V_2}$$

$$\Rightarrow T(0,2,3) = T(1,1,1) + T(-1,1,2)$$
$$= 6(1,1,1) + 2(-1,1,2)$$
$$= (4,8,10)$$

$$\begin{cases} T(V_6) \subseteq V_6 \\ T(V_2) \subseteq V_2 \end{cases}$$

$$B = \{ \underbrace{(1,1,0),(0,0,1)}_{\text{base de } V_6}, \underbrace{(-1,1,2)}_{\text{base de } V_2} \}$$

$T(v_2) = v_2$ base de V_6 base de V_2

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$T|_{V_6} : V_6 \to V_6$, $T|_{V_6} = 6 \cdot id$

$T|_{V_2} : V_2 \to V_2$, $T|_{V_2} = 2 \cdot id$

Más aún $T \overset{!}{=} T|_{V_6} + T|_{V_2}$

Suma de subespacios invariantes

Sean V un $\mathbb{k}$-espacio vectorial de dimensión finita y $T \in \mathrm{End}(V)$.

Si $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ son los distintos autovalores de T y

$V_1, \dots, V_s$ los autoespacios asociados a estos autovalores

$$V_i = \{v \in V \mid T(v) = \lambda_i v\}$$

hemos visto que la transformación T es diagonalizable si podemos descomponer al espacio vectorial V como suma directa de los autoespacios

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$$

Notar que

- Si $v \in V_i$, entonces $T(v) = \lambda_i v$.

  Esto implica que $T(V_i) \subseteq V_i$ para todo $1 \leq i \leq s$.

- Si $v \in V_i$, entonces existen únicos $v_i \in V_i$ tales que

$$v = v_1 + v_2 + \cdots + v_s$$

y tenemos que

$$T(v) = T(v_1) + T(v_2) + \cdots + T(v_s)$$

Esto nos lleva a una descomposición de V en subespacios más chicos donde la transformación T es más simple.

Definición

Sean V un $\Bbbk$-espacio vectorial, $W \subseteq V$ un subespacio y $T \in \mathrm{End}(V)$.

Decimos que W es ***T* −invariante** si $T(W) \subseteq W$,

es decir $T(w) \in W$ para todo $w \in W$.

Sean V un $\Bbbk$-espacio vectorial, $T \in \mathrm{End}(V)$ y $W \subseteq V$ un subespacio T −invariante.

Tenemos que $T(W) \subseteq W$

Como $T(W) \subseteq W$, tenemos una transformación lineal de W en W, que notamos

Como $T(W) \subseteq W$, tenemos una transformación lineal de W en W, que notamos

$$T|_W: W \longrightarrow W \quad \in \mathrm{End}(W)$$

la misma se denomina la **restricción** de T a W.

En el ejemplo anterior, teníamos que

T diagonalizable
$\lambda_1, \dots, \lambda_s$ autovalores distintos

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$$

donde cada V_i es T –invariante, pues era un autoespacio de T:

$$T|_{V_i}: V_i \longrightarrow V_i$$

$$T|_{V_i}(v) = \lambda_i v \quad \forall v \in V_i$$

$$T|_{V_i} = \lambda_i \cdot id$$

Ejemplo:

Consideremos la transformación lineal dada por

$$T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$T(x, y, z) = (4x + 2y, 2x + 4y, 4x - 4y + 6z)$

Si tomamos la base canónica $E = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ la matriz de T en esta base es

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 4 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico de T es

$$p_T(X) = (X-6)^2(X-2).$$

Así los autovalores de T son $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 2$.

El polinomio minimal de T es

$$m_T(X) = (X-6)(X-2).$$

Los autoespacios asociados son

$$V_6 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid T(v) = 6v\} = \operatorname{Ker}(6 \cdot \mathrm{id} - T) = \langle (1,1,0), (0,0,1) \rangle$$

$$V_2 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid T(v) = 2v\} = \operatorname{Ker}(2 \cdot \mathrm{id} - T) = \langle (-1,1,2) \rangle$$

$$\mathbb{R}^3 = V_6 \oplus V_2$$

$$T|_{V_6} : V_6 \longrightarrow V_6$$

$$T|_{V_2} : V_2 \longrightarrow V_2$$

En general, si T es diagonalizable con autovalores distintos $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ y autoespacios asociados $V_1, \ldots, V_s$

$$\Rightarrow \quad V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$$

$B = B_1 \cup \cdots \cup B_s$, B_i base de V_i

- $T(V_i) \subseteq V_i$
- $T|_{V_i} = \lambda_i \cdot \mathrm{id}$ — Se corresponde a V_i

- $T|_{V_i} = \lambda_i \cdot Id$ — se corresp. a V_i

- $$[T]_B = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1\end{matrix}} & \cdots & 0 \\ 0 \cdots 0 & \boxed{\begin{matrix}\lambda_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_2\end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \cdots \\ 0 \end{matrix} \\ 0 \cdots & \cdots 0 & \boxed{\begin{matrix}\lambda_s & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_s\end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Se corresp a V_2

Se corresp. a V_s

$$\boxed{\text{Matriz de bloques}}$$

Proyecciones y descomposiciones en suma directa

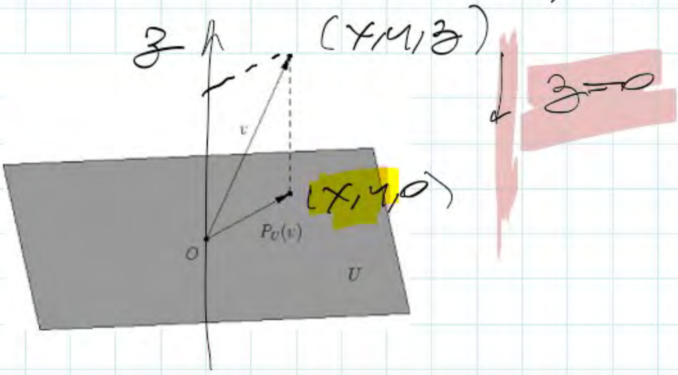
miércoles, 9 de junio de 2021 11:35

La clase de hoy trata sobre descomposiciones de un espacio vectorial con respecto a una transformación lineal.

Dada una descomposición de un espacio $\forall v \in V, \exists!\, v_1, \dots, v_s$

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s \qquad v = v_1 + \cdots + v_s$$

podemos *proyectar* todo vector V, a los distintos subespacios V_i. $, v_i \in V_i$



Estas funciones son transformaciones lineales que se llaman *proyecciones*:

Definición

Sea V un $\Bbbk$-espacio vectorial.

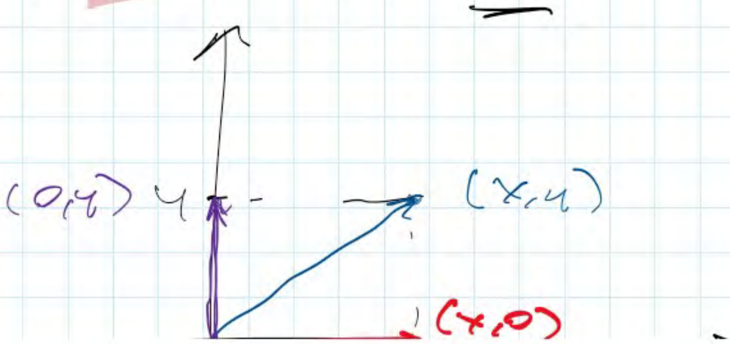
Una **proyección** E de V es un operador lineal $E: V \longrightarrow V$ que cumple que $E^2 = E$.

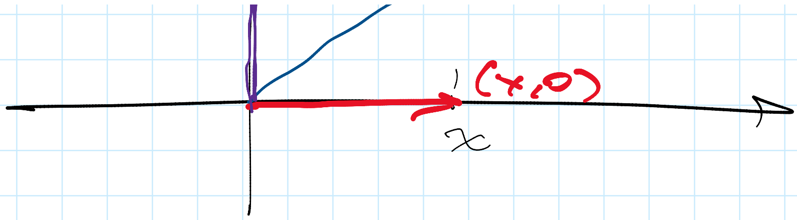
Ejemplos

1) Sea V un $\Bbbk$-espacio vectorial. $\quad id \circ id = id$ ✓
   id_V y $\mathbf{0}$ son proyecciones $\quad 0 \circ 0 = 0$ ✓

2) $V = \mathbb{R}^2$

   a) $E_1: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $E_1(x,y) = (x,0)$ $\quad$ es t. l.





$$E_1 \circ E_1(x,y) = E_1(E_1(x,y)) = E_1(x,0)$$
$$= (x,0) = E_1(x,y)$$

$$\Rightarrow \quad E_1^2 = E_1$$

$\operatorname{Im} E_1 = \langle (1,0) \rangle$ eje x

$\ker E_1 = \langle (0,1) \rangle$ eje y

b) $E_2 \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $E_2(x,y) = (0,y)$

$$E_2^2(x,y) = E_2(E_2(x,y)) = E_2(0,y) = (0,y)$$
$$= E_2(x,y) \Rightarrow E_2^2 = E_2$$

$\operatorname{Im} E_2 = \langle (0,1) \rangle$ eje y

$\ker E_2 = \langle (1,0) \rangle$ eje x

Vale que $\quad (x,y) = (x,0) + (0,y)$

$$(x,y) = \underbrace{E_1(x,y)}_{\text{eje } x} + \underbrace{E_2(x,y)}_{\text{eje } y}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{R}^2 = \langle (1,0) \rangle \oplus \langle (0,1) \rangle$$

Observaciones

Sea V un $\Bbbk$-espacio vectorial y $E \in \mathrm{End}(V)$ una proyección.

(a) $v \in Im\, E \iff E(v) = v$

$\Rightarrow)$ Si $v \in Im\, E \Rightarrow \exists\, w \in V$ tal que

$v = E(w) \Rightarrow E(v) = E(E(w)) = E^2(w)$

$\underset{E \text{ proy}}{=} E(w) = v$

$\Leftarrow)$ Si $E(v) = v \Rightarrow v \in Im\, E$.

(b) $V = Ker\, E \oplus Im\, E$

$$\overset{Ker\, E}{} \qquad \overset{Im\, E}{}$$

Si $v \in V \Rightarrow v = v - E(v) + E(v)$

Vale que $v - E(v) \in Ker\, E$ $\forall v \in V$:

$E(v - E(v)) = E(v) - E(E(v)) \underset{E \text{ proy}}{=} E(v) - E(v)$

$= 0$

Vale que $E(v) \in Im\, E$:

$E(E(v)) = E(v)$

Veamos que $Ker\, E \cap Im\, E = \{0\}$

Sup que $v \in Ker\, E \cap Im\, E$

Si $v \in Im\, E \underset{(a)}{\Rightarrow} E(v) = v$

Si $v \in Ker\, E \Rightarrow E(v) = 0$

$\left.\right\} \underline{\underline{v = 0}}!$

(c) $id_E - E$ es una proyección.

(c) $id_E - E$ es una proyección.

$id - E$ es t.l ✓

$(id - E) \circ (id - E) = id \circ id - E \circ id - id \circ E + \underbrace{E \circ E}_{E}$

$= id - E - \cancel{E} + \cancel{E}$

$= id - E$

(d) $Ker\, E = Im\, (id_E - E)$

Ejercicio

(e) Si λ es un autovalor de E, entonces $\lambda \in \{0,1\}$.

Si E es una proy. $\Rightarrow E^2 = E$

$\Rightarrow E^2 - E = 0$

$\Rightarrow$ Si $p(X) = X^2 - X \Rightarrow p(E) = 0$

$\Rightarrow m_E(X) \mid X^2 - X$

Como $X^2 - X = X(X-1)$

Raices de $X^2 - X = \{0, 1\}$

$\Rightarrow$ raices del minimal $\subseteq \{0,1\}$

Como las raices de $m_E(X)$ son los autovalores, se sigue el resultado.

(f) Si $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$ es una descomposición de V en suma directa, podemos definir las proyecciones

$$E_i : V \longrightarrow V \qquad \forall\, 1 \leq i \leq s$$

como sigue:

Si $v \in V$ entonces existen únicos $v_i \in V_i$ tales que

$$v = v_1 + \cdots + v_s$$

Definimos entonces para todo $1 \leq i \leq s$

$$E_i(v) = v_i$$

Es una t. l.:

Si $v, w \in V$, $\lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow v = v_1 + v_2 + \dots + v_s$
$w = w_1 + w_2 + \dots + w_s$

donde $v_i, w_i \in V_i$ son únicos

$$\Rightarrow v + \lambda w = (v_1 + \dots + v_s) + \lambda(w_1 + \dots + w_s)$$
$$= \underbrace{(v_1 + \lambda w_1)}_{\in V_1} + \underbrace{(v_2 + \lambda w_2)}_{\in V_2} + \dots + \underbrace{(v_s + \lambda w_s)}_{\in V_s}$$

$$\Rightarrow E_i(v + \lambda w) = v_i + \lambda w_i$$
$$= E_i(v) + \lambda E_i(w)$$

$\Rightarrow E_i$ es t. l.

Vale que

$$E(v) = v_i = \underbrace{0}_{\in V_1} + \dots + 0 + v_i + 0 + \dots + \underbrace{0}_{\in V_s}$$

- $E_i(V_i) = V_i$
- $E_i(V_j) = \{0_V\}$ si $i \neq j$

$\operatorname{Im} E_i = V_i$

$V_j \subseteq \ker E_i$ si $i \neq j$

En particular, los subespacios V_i son invariantes para todas las proyecciones.

Además se tiene

Si $v \in V \Rightarrow \exists!\ v_1 \in U_1, v_2 \in U_2, \ldots, v_s \in U_s$ tal que

$$v = v_1 + v_2 + \cdots + v_s$$

$$\Rightarrow v = E_1(v) + E_2(v) + \cdots + E_s(v)$$

$$\Rightarrow id(v) = (E_1 + E_2 + \cdots + E_s)(v)$$

$$\Rightarrow \boxed{id = E_1 + E_2 + \cdots + E_s}$$

Vale que

$$\begin{cases} E_i E_j = 0 & \text{si } i \neq j \\ E_i^2 = E_i & \end{cases}$$

(E_i son idempotentes)

En conclusión, tenemos el siguiente teorema

Teorema

Sean V un $\mathbb{k}$-espacio vectorial y $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$ una descomposición de V en suma directa.

Si definimos las proyecciones $E_i: V \longrightarrow V$ como antes, para todo $1 \leq i \leq s$, tenemos que

(a) E_i es una proyección para todo $1 \leq i \leq s$;

(b) $E_i E_j = 0$ si $i \neq j$;

(c) $id_V = E_1 + E_2 + \cdots + E_s$;

(d) $Im\, E_i = V_i$.

(d) $Im\ E_i = V_i$.

Recíprocamente, si existen $E_1, E_2, \dots, E_s$ que satisfacen los items $(a), \dots, (d)$ y se toma $Im\ E_i = V_i$, entonces

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$$

Demostración Hicimos una implicación, resta probar la recíproca (Ejercicio) ■

Ejemplo

Consideremos la transformación lineal dada por

$$T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$T(x, y, z) = (4x + 2y, 2x + 4y, 4x - 4y + 6z)$

Si tomamos la base canónica $E = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ la matriz de T en esta base es

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 4 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico de T es

$$p_T(X) = (X-6)^2(X-2).$$

Así los autovalores de T son $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 2.$

El polinomio minimal de T es

$$m_T(X) = (X-6)(X-2).$$

Los autoespacios asociados son

$V_6 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid T(v) = 6v\} = \mathrm{Ker}(6 \cdot \mathrm{id} - T) = \langle (1,1,0), (0,0,1) \rangle$

$V_2 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid T(v) = 2v\} = \mathrm{Ker}(2 \cdot \mathrm{id} - T) = \langle (-1,1,2) \rangle$

Tenemos que $\mathbb{R}^3 = V_6 \oplus V_2$

$E_6 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\operatorname{Im} E_6 = V_6$

$E_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\operatorname{Im} E_2 = V_2$

Base de $\mathbb{R}_3$: $B = \{ \underbrace{(1,1,0),(0,0,1)}_{\in V_6}, \underbrace{(-1,1,2)}_{\in V_2} \}$

$E_6(1,1,0) = (1,1,0)$

$E_6(0,0,1) = (0,0,1)$ $\qquad E_6^2 = E_6$

$E_6(-1,1,2) = (0,0,0)$

$E_2(1,1,0) = (0,0,0)$

$E_2(0,0,1) = (0,0,0)$ $\qquad E_2^2 = E_2$

$E_2(-1,1,2) = (-1,1,2)$

Si $(0,2,3) \in \mathbb{R}^3$

$(0,2,3) = 1(1,1,0) + 1(0,0,1) + 1(-1,1,2)$

$= (1,1,1) + (-1,1,2)$

$E_6(0,2,3) = (1,1,1)$

$E_2(0,2,3) = (-1,1,2)$

Tenemos que

$id = E_6 + E_2$

Tenemos que

$$id = E_6 + E_2$$

$$T = 6 \cdot E_6 + 2 \cdot E_2$$

pues $v = v_6 + v_2$, $E_6(v) = v_6$

$E_2(v) = v_2$

$\Rightarrow T(v) = T(\underbrace{v_6}_{\in V_6}) + T(\underbrace{v_2}_{\in V_2})$

$= 6 v_6 + 2 v_2$

$= 6 E_6(v) + 2 E_2(v)$ $\forall v$

$T(v) = (6 \cdot E_6 + 2 \cdot E_2)(v)$

$\Rightarrow T = 6 \cdot E_6 + 2 \cdot E_2$

Aplicamos ahora lo que estuvimos viendo de proyecciones a operadores diagonalizables.

De esta forma, caracterizamos a los operadores diagonalizables de acuerdo a la descomposición en proyecciones, que inducen una descomposición del espacio vectorial.

Teorema

Sean V un $\Bbbk$-espacio vectorial y $T \in \mathrm{End}(V)$.

Si T es diagonalizable con autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ distintos, entonces existen $E_1, \ldots, E_s \in \mathrm{End}(V)$ tales que

(a) $T = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \cdots + \lambda_s E_s$

T es comb. lineal de proyecciones
los coef son los autovalores

(b) $id_V = E_1 + E_2 + \cdots + E_s$;

(c) $E_i E_j = 0$ si $i \neq j$;

(d) $E_i^2 = E_i$;

$(c)\ E_iE_j = 0$ si $i \neq j$;

autovalores

$(d)\ {E_i}^2 = E_i$;

$(e)\ Im\, E_i = V_i$.

Recíprocamente, si existen escalares distintos $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ y operadores lineales $E_1, E_2, \dots, E_s$ que satisfacen los items $(a), (b), (c)$, entonces T es diagonalizable con autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ y se satisfacen (d) y (e).

Demostración Hicimos una implicación, resta probar la recíproca (Ejercicio) ■

Observación

si $i \neq j$

Si se tiene que

$E_iE_j = 0$

$T = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \cdots + \lambda_s E_s$, E_i proyecciones $(E_i^2 = E_i)$

entonces para todo $p(X) \in \Bbbk[X]$ se tiene que

$$p(T) = p(\lambda_1)E_1 + p(\lambda_2)E_2 + \quad + p(\lambda_s)E_s$$

pues como $E_i^2 = E_i$, $E_iE_j = 0$, si

$$p(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0$$

$$\Rightarrow p(T) = p(\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \dots + \lambda_s E_s)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k (\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \dots + \lambda_s E_s)^{k}$$

$$\{ \ (\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \dots + \lambda_s E_s)(\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \dots + \lambda_s E_s)$$

$\{ (\lambda_1 \tau_1 + \lambda_2 \tau_2 + \cdots + \lambda_s \tau_s \mid (\lambda_1 \tau_1 + \lambda_2 \tau_2 + \cdots + \lambda_s \tau_s)$

$= \lambda_1^2 \tau_1^2 + \cancel{\lambda_1 \lambda_2 \tau_1 \tau_2}^{0} + \cdots + \lambda_s^2 \tau_s^2$

$= \lambda_1^2 \tau_1 + \lambda_2^2 \tau_2 + \cdots + \lambda_s^2 \tau_s \}$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k (\lambda_1^k \tau_1 + \lambda_2^k \tau_2 + \cdots + \lambda_s^k \tau_s)$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda_1^k\right)\tau_1 + \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda_2^k\right)\tau_2 + \cdots + \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda_s^k\right)\tau_s$$

$$= p(\lambda_1)\tau_1 + p(\lambda_2)\tau_2 + \cdots + p(\lambda_s)\tau_s$$

Ejemplo

Consideremos la transformación lineal dada por

$$T\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$T(x, y, z) = (4x + 2y, 2x + 4y, 4x - 4y + 6z)$

Los autoespacios asociados son

$$V_6 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid T(v) = 6v\} = \mathrm{Ker}(6 \cdot \mathrm{id} - T) = \langle (1,1,0), (0,0,1) \rangle$$

$$V_2 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid T(v) = 2v\} = \mathrm{Ker}(2 \cdot \mathrm{id} - T) = \langle (-1,1,2) \rangle$$

Si tomamos la base canónica $B = \{(1,1,0), (0,0,1), (-1,1,2)\}$ la matriz de T en esta base es

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\tau_6 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \mathrm{Im}\, \tau_6 = V_6$

$\tau_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \mathrm{Im}\, \tau_2 = V_2$

$$\mathrm{id} = \tau_6 + \tau_2$$

$$T = 6 \cdot \tau_6 + 2 \cdot \tau_2$$

Si $p(x) = 2x^2 + 9x + 2$

$\Rightarrow p(T) = p(6)\tau_6 + p(2)\tau_2$

$$p(T) = 128\,\tau_6 + 28\,\tau_2$$

Ejercicio Describir en formula τ_6 y τ_2

$\tau_6(x,y,z) = ?$

$\tau_2(x,y,z) = ?$

Si tomamos
$$\begin{cases} p_2(x) = \dfrac{(x-2)}{(6-2)} = \dfrac{x-2}{4} \\ p_1(x) = \dfrac{(x-6)}{(2-6)} = \dfrac{x-6}{-4} \end{cases}$$

Cumplen que
$$\begin{cases} p_2(6) = 1 \\ p_2(2) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} p_1(6) = 0 \\ p_1(2) = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow p_1(T) = \underbrace{p_1(6)}_{=0} E_6 + \underbrace{p_1(2)}_{=1} E_2$$

$$\boxed{p_1(T) = E_2}$$

$$p_2(T) = \underbrace{p_2(6)}_{=1} E_6 + \underbrace{p_2(2)}_{=0} E_2$$

$$\boxed{p_2(T) = E_6}$$

En general, si V un $\mathbb{k}$-espacio vectorial de dimensión finita y $T \in End(V)$ es un operador diagonalizable con autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ distintos y

Por cada autovalor tengo un polinomio

$$p_i(X) = \prod_{j \neq i} \frac{(X - \lambda_j)}{(\lambda_i - \lambda_j)} \qquad \forall 1 \leq i \leq s$$

Polinomios de Lagrange

tenemos que $p_i(T) = E_i$ son las proyecciones!

Con esto podemos probar

Teorema

Sean V un $\mathbb{k}$-espacio vectorial de dimensión finita y $T \in \mathrm{End}(V)$.

Entonces T es diagonalizable si y sólo $m_T(X) = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_s)$

donde $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ son los distintos autovalores de T.

Demostración Video aparte. ∎

Caracterización de transformaciones diagonalizables por su polinomio minimal

miércoles, 16 de junio de 2021 13:03

Teorema

Sean V un $\mathbb{k}$-espacio vectorial de dimensión finita y $T \in \mathrm{End}(V)$.

Entonces T es diagonalizable si y sólo $m_T(X) = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_s)$

donde $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ son los distintos autovalores de T.

Demostración

$\Rightarrow$) Sup que T es diagonalizable

Entonces, por definición, existe una base de autovectores

$$B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

Si los autovalores distintos son $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$, entonces tenemos s autoespacios, cada uno por cada autovalor.

$$V_1 = \{v \in V \mid T(v) = \lambda_1 v\}$$
$$V_2 = \{v \in V \mid T(v) = \lambda_2 v\}$$
$$\vdots$$
$$V_s = \{v \in V \mid T(v) = \lambda_s v\}$$

Notar que si $v \in V_i$, para cualquier polinomio $q \in \mathbb{k}[X]$ tenemos que

$$q(T)(v) = \underbrace{q(\lambda_i)}_{\in \mathbb{K}} v$$

Tomando el polinomio

$$q(X) = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\cdots(X-\lambda_s)$$

tenemos que

$$q(T)(v_i) = q(\lambda_{j_i}) v_i$$

$$= 0 \cdot v_i = 0$$

$\forall v_i \in B$.

Esto implica que $q(T) = 0$

Por la def. del polinomio minimal

$\Rightarrow m_T(X) \mid (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\cdots(X-\lambda_s)$

Pero por otro lado, probamos que las raíces del minimal son las mismas que el característico, que son los autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$

$\Rightarrow (X-\lambda_1) \mid m_T(X)$

$\vdots$

$(X-\lambda_s) \mid m_T(X)$ $\Rightarrow$ $\lambda_i \neq \lambda_j$

$(x-\lambda_s) \mid m_T(x)$ ($\lambda_i \neq \lambda_j$

$\Rightarrow (x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_s) \mid m_T(x)$

$\Rightarrow m_T(x) = (x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_s)$

$\Leftarrow$) Supongamos que

$$m_T(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_s)$$

Para cada $1 \leq i \leq s$ tomemos

$$p_i(x) = \prod_{j\neq i} \frac{(x-\lambda_j)}{(\lambda_i-\lambda_j)} = \frac{m_T(x)}{(x-\lambda_i)}$$

Cumple que $\begin{cases} p_i(\lambda_j) = 0 & \text{si } i \neq j \\ p_i(\lambda_i) = 1 & \end{cases}$

Veamos que $\{p_1(x), p_2(x), \ldots, p_s(x)\}$ son l. i.:

Supongamos que

$$0 = a_1 p_1(x) + a_2 p_2(x) + \cdots + a_s p_s(x)$$

con $a_1, \dots, a_s \in \mathbb{k}$

Evaluando en λ_i en ambos lados tenemos que

$$O(\lambda_i) = \underline{0} = a_1 \cancel{p_1(\lambda_i)}^{0} + a_2 \cancel{p_2(\lambda_i)}^{0} + \dots + a_s \cancel{p_s(\lambda_i)}^{0}$$

$$= a_i \underbrace{p_i(\lambda_i)}_{=1} = \underline{a_i}$$

Como vale $\forall i$, se sigue que todos los a_i son 0.

Tenemos entonces s polinomios l.i. de grado $s-1$

luego, son una base de $\underline{\mathbb{k}_{s-1}[x]}$!!

En particular, si $q(x) \in \mathbb{k}_{s-1}[x]$

$\Rightarrow \exists\ a_1, \dots, a_s \in \mathbb{k}$ tales que

$$q(x) = a_1 p_1(x) + a_2 p_2(x) + \dots + a_s p_s(x)$$

$$\Rightarrow q(\lambda_i) = a_1 p_1(\lambda_i) + a_2 p_2(\lambda_i) + \dots + a_s p_s(\lambda_i)$$

$$\Rightarrow \boxed{q(\lambda_i) = a_i \underline{p_i(\lambda_i)} = a_i}$$

$\Rightarrow \boxed{q(\lambda_i) = a_i \underbrace{p_i(\lambda_i)}_{=1} = a_i}$

Es decir,

$$q(X) = q(\lambda_1)p_1(X) + q(\lambda_2)p_2(X) + \cdots + q(\lambda_s)p_s(X)$$

En particular, $(s-1 \geq 1,\ s \geq 2)$

$$\begin{cases} 1 = p_1(X) + p_2(X) + \cdots + p_s(X) \\ X = \lambda_1 p_1(X) + \lambda_2 p_2(X) + \cdots + \lambda_s p_s(X) \end{cases}$$

[Mirar el caso $\underline{\underline{s=1}}$ $m_T(X) = (X-\lambda_1)$

$T - \lambda_1 I = 0 \Rightarrow T = \lambda_1 \, id$]

Tomamos $E_i = p_i(T)$ $\forall i$

De lo de arriba tenemos que

$$\begin{cases} id = E_1 + E_2 + \cdots + E_s \\ T = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \cdots + \lambda_s E_s \end{cases}$$

Así, tenemos que si las E_i son proyecciones que cumplen

$$\begin{cases} E_i^2 = E_i \\ E_i E_j = 0 \quad \text{si } i \neq j \end{cases}$$

resulta que T es diagonalizable

Veamos que $E_i E_j = 0$ (como t.l.)

$$E_i E_j = \prod_{k\neq i} \frac{(T-\lambda_k)}{(\lambda_i-\lambda_k)} \prod_{l\neq j} \frac{(T-\lambda_l)}{(\lambda_j-\lambda_l)}$$

$$= \underbrace{m_T(T)}_{=0}\, q(T) = 0$$

Como $I = E_1 + E_2 + \dots + E_s$

$\Rightarrow \quad I \circ E_i = (E_1 + E_2 + \dots + E_s) E_i$

$$= \cancel{E_1 E_i} + \cancel{E_2 E_i} + \dots + E_s E_i$$

$\Rightarrow \quad E_i = E_i \circ E_i = E_i^2$

$\Rightarrow \quad E_i$ es una proyección $\forall\, 1 \leq i \leq s.$ $\blacksquare$

Teoremas de Descomposición

¿Qué pasa si el polinomio minimal $m_T(X)$ no es producto de factores lineales, i.e. T no es diagonalizable?

Veamos un ejemplo:

Consideremos la transformación lineal dada por

$$T:\ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$T(x,y,z) = (2x, x+2y, -z)$

Si tomamos la base canónica $E = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ la matriz de T en esta base es

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$p_T(X) = \det \begin{pmatrix} X-2 & 0 & 0 \\ -1 & X-2 & 0 \\ 0 & 0 & X+1 \end{pmatrix} = (X-2)^2 (X+1)^1$$

$$V_2 = \{ v \in \mathbb{R}^3 \mid T(v) = 2v \}$$

$$V_{-1} = \{ v \in \mathbb{R}^3 \mid T(v) = -v \} \Rightarrow \dim V_{-1} = 1$$

$$V_2 = \ker(2 \cdot id - T)$$

$$2I - [T] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Sist. homogéneo asoc. $\begin{cases} -x = 0 \Rightarrow \boxed{x=0} \\ 3z = 0 \Rightarrow \boxed{z=0} \end{cases}$

$$\Rightarrow V_2 = \langle (0,1,0) \rangle$$

$\Rightarrow \dim V_2 = 1$ y T no es diag.

$V_{-1} = \ker(-1 \cdot \mathrm{Id} - T)$

$$(-1)I - [T]_E = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sist. homog. asociado: $\begin{cases} -3x = 0 \Rightarrow \boxed{x=0} \\ -x-3y=0 \\ \Rightarrow \boxed{y=0} \end{cases}$

$V_{-1} = \langle (0,0,1) \rangle \;\&\; \dim V_{-1} = 1$

Como $m_T(x) \mid p_T(x) = (x-2)^2(x+1)$, tiene las mismas raíces y T no es diag. se sigue que

$$m_T(x) = p_T(x) = (x-2)^2(x+1)$$

Sabemos que $p_T(T) = 0$.

Calculemos el espacio nulo de $(T - 2 \cdot \mathrm{id})^2$, esto es, $\mathrm{Ker}\,(T - 2 \cdot \mathrm{id})^2$

Calculemos $\ker(2\mathrm{id} - T)^2$

$$(2I - [T]_E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$ el sist. homog. asoc. es

$\} \; 3z = 0$

$\Rightarrow z = 0$

La solución está dada por

$$\langle \underbrace{(1,0,0)}_{?}, \underbrace{(0,1,0)}_{\text{es autovector!}} \rangle$$

Base de $\ker(2 \cdot id - T)^2 = \{(1,0,0),(0,1,0)\}$

Base de $\ker((-1) \cdot id - T) = \{(0,0,1)\}$

La unión me da una base de $\mathbb{R}^3$!!

$$\mathbb{R}^3 = \ker(2 \cdot id - T)^2 \oplus \ker((-1) \cdot id - T)$$

Luego, si T no es diagonalizable, reemplazamos los espacios propios

$$V_\lambda = Ker\,(T - \lambda \cdot \mathrm{id})$$

por los espacios nulos *generalizados*

$$V_\lambda = Ker(T - \lambda \cdot \mathrm{id})^{m_\lambda}$$

donde m_λ es la potencia que aparece el factor $(X - \lambda)$ en el polinomio minimal $m_T(X)$.

En resumen, si V es un $\mathbb{k}$-espacio vectorial de dimensión finita y $T \in \mathrm{End(V)}$ con

$$m_T(X) = (X - \lambda_1)^{m_1} \cdots (X - \lambda_s)^{m_s}$$

donde $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ son los distintos autovalores de T, veremos que V admite una descomposición

$$V = \text{Ker}\,(T - \lambda_1 \cdot \text{id})^{m_1} \oplus \cdots \oplus \text{Ker}\,(T - \lambda_s \cdot \text{id})^{m_s}$$

Teorema (Teorema de descomposición prima)

Sean V un $\Bbbk$-espacio vectorial de dimensión finita y $T \in \text{End}(V)$.

Supongamos que

$$\text{m}_T(X) = {p_1}^{m_1} \cdots {p_s}^{m_s}$$

donde $p_1, \dots, p_s$ son polinomios irreducibles distintos sobre $\Bbbk$ con $m_i \in \mathbb{N}$. Si $V_i = \text{Ker}\, {p_i}^{m_i}$, entonces

(a) $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s$;

(b) Cada V_i es invariante por T;

(c) Si $T_i = T|_{V_i}$ entonces $\text{m}_{T_i}(X) = {p_i}^{m_i}$ para todo $1 \le i \le s$.

Demostración

Idea

1) Descomposición de V

$\boxed{\text{Teo}}$

Proyecciones $\tau_1, \dots, \tau_s$

- $\tau_i^2 = \tau_i$
- $\tau_i \tau_j = 0 \quad i \neq j$
- $\text{id} = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_s$

$$\boxed{\text{Im}\, \tau_i = V_i}$$

2) Proyecciones:

Si $m_T(x) = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_s^{m_s}$, producto de fact.

irred distintos

$\Rightarrow p_1, p_2, \dots, p_s$ son coprimos

los siguientes polinomios también son coprimos

$$f_i = \frac{m_T(x)}{p_i^{m_i}}$$

por ejemplo $f_1 = p_2^{m_2} p_3^{m_3} \cdots p_s^{m_s}$

$\Rightarrow \exists$ polinomios $h_1, \dots, h_s$ tales que

$$1 = \underbrace{h_1 f_1}_{g_1} + \underbrace{h_2 f_2}_{g_2} + \cdots + \underbrace{h_s f_s}_{g_s}$$

$\Rightarrow 1 = g_1 + g_2 + \cdots + g_s$ polinomios

$\boxed{\text{Evalúo en } T}$

$\Rightarrow id = g_1(T) + g_2(T) + \cdots + g_s(T)$

Obs Tenemos un algoritmo para encontrar $g_1, g_2, \dots, g_s$

Las proyecciones son

$$\boxed{t_i = g_i(T)} \quad \forall i.$$

$$\boxed{V_i = \operatorname{Im} t_i}$$

■

Ejemplo

Consideremos la transformación lineal dada por

$$T:\ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$T(x, y, z) = (2x, x + 2y, -z)$

Si tomamos la base canónica $E = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ la matriz de T en esta base es

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Sabemos que $p_T(X) = (X-2)^2(X+1) = m_T(X)$

$$\left.\begin{aligned} p_1(X) &= (X-2) \\ p_2(X) &= (X+1) \end{aligned}\right\} \qquad f_1(X) = \frac{m_T(X)}{(X-2)^2} = (X+1)$$

$$f_2(x) = \frac{m_T(x)}{(x+1)} = (x-2)^2$$

$$1 = -\frac{1}{9}(x-5)(x+1) + \frac{1}{9}(x-2)^2$$

$$\begin{array}{r|l} x^2 - 4x + 4 & x+1 \\ \hline -\;x^2 + x & x-5 \\ \hline -5x+4 & \\ -\;-5x-5 & \\ \hline 9 & \end{array}$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 = (x-5)(x+1) + 9$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 - (x-5)(x+1) = 9$$

$$\Rightarrow \frac{1}{9}(x-2)^2 - \frac{1}{9}(x-5)(x+1) = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_1 = -\frac{1}{9}(T-5)(T+1) \\ E_2 = \frac{1}{9}(T-2)^2 \end{cases}$$ dos proyecciones

$$[E_1] = -\frac{1}{9}([T] - 5I)([T] + I)$$

$$= -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2-5 & 0 & 0 \\ 1 & 2-5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

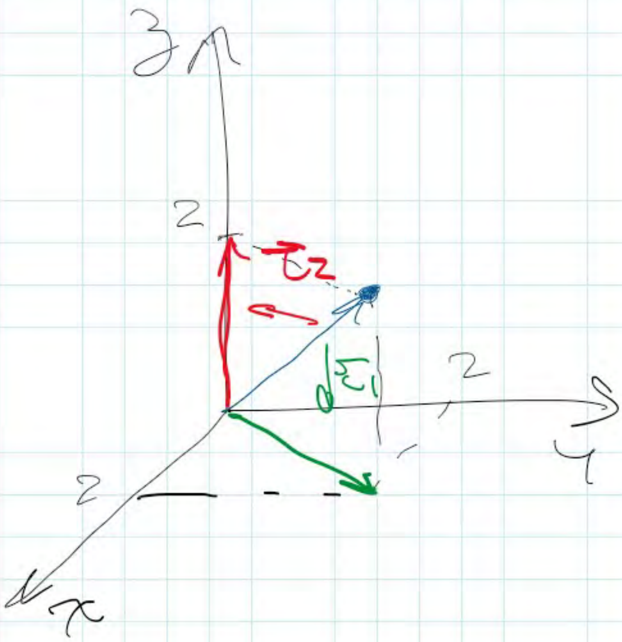
$$= -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[E_2] = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[E_2(x,y,z)]_E = [E_2]\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$



$V_{-1} = \mathrm{Im}\, E_2$

$V_2 = \operatorname{Im} \pi_1$

Sabemos que $\quad Id = \pi_1 + \pi_2$

$\Rightarrow \quad \boxed{T = T\pi_1 + T\pi_2}$

Definir una transformación diagonalizable usando las proyecciones

$$D = 2\pi_1 + (-1)\pi_2$$

Tomamos

$$N = T - D$$

$\Rightarrow \quad N = T\pi_1 + T\pi_2 - 2\pi_1 - (-1)\pi_2$

$\Rightarrow \quad N = (T-2)\pi_1 + (T+1)\pi_2$

En matrices,

$$[N] = [T] - [D] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vale que $\boxed{N^2 = 0}$ Nilpotente

y $\boxed{T = D + N}$

En general, si V es un $\mathbb{k}$-espacio vectorial de dimensión finita y $T: V \longrightarrow V$ es una transformación lineal con

$$\mathrm{m}_T(X) = {p_1}^{m_1} \cdots {p_s}^{m_s}$$

donde $\boldsymbol{p_i = (X - \lambda_i)}$, usando el teorema anterior tenemos:

- $E_i =$ proyección al subespacio $Ker\ {p_i}^{m_i}$, son polinomios en T,
- $id = E_1 + E_2 + \cdots + E_s$,
- $T = TE_1 + TE_2 + \cdots + TE_s$.

} son igualdades de t.l.

Definimos la transformación lineal

$$D = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \cdots + \lambda_s E_s$$

$\Rightarrow$ D es diagonalizable por el teorema de la clase pasada.

Como cada proyección E_i es un polinomio en T $\Rightarrow$ D es un polinomio en T

Tomamos

Tomamos

$$\boxed{N = T - D}$$

Como D es un polinomio en T, N también es un polinomio en T

Vale que

$$\begin{cases} ND = DN \\ TD = DT \\ TN = NT \end{cases}$$

¡conmutan entre sí!

$$N = T - D = (TE_1 + TE_2 + \dots + TE_s) - (\lambda_1 E_1 + \dots + \lambda_s E_s)$$
$$= (T - \lambda_1 id)E_1 + \dots + (T - \lambda_s id)E_s$$

Así,

$$N^m = (T - \lambda_1 id)^m \underbrace{E_1}_{\ker(T-\lambda_1 id)^{m_1}} + \dots + (T - \lambda_s id)^m \underbrace{E_s}_{\ker(T-\lambda_s id)^{m_s}}$$

Si $m \geq \max\{m_i\} \Rightarrow \boxed{N^m = 0}$

N es nilpotente

$$\left\{ \begin{array}{l} (T-\lambda_i I)E_i (T-\lambda_j I)E_j = \\ = (T-\lambda_i I)(T-\lambda_j I)E_i E_j \end{array} \right.$$

$$= (T - \lambda_i I)(T - \lambda_j I)\underbrace{\tau_i \tau_j}_{\delta_{ij}\tau_i}$$

Definición

Sea V un $\mathbb{k}$-espacio vectorial y $N \in \mathrm{End}(V)$.

Decimos que N es **nilpotente** si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $N^m = \mathbf{0}$.

Ejemplo

Consideremos la transformación lineal dada por

$$T\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$T(x,y) = (y,0)$$

$$T^2(x,y) = T(T(x,y)) = T(y,0) = (0,0)$$

$\Rightarrow T^2 = 0$ y T es nilpotente

$$[T]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad V_0 = \langle (1,0) \rangle$$

$\Rightarrow p_T(x) = x^2$

$m_T(x) = x^2$ No es diag

Ejercicio: calcular todas $A \in M_2(\mathbb{R})$

[illegible] $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$ [illegible]

Ejercicio: Calcula todas $A \in M_2(\mathbb{k})$ tales que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Observación

Si V es un $\mathbb{k}$-espacio vectorial de dimensión finita $\dim V = n$, y $N \in \operatorname{End}(V)$ es nilpotente, entonces $p_N(X) = X^n$.

Si N es nilpotente $\Rightarrow N^m = 0$

$\Rightarrow p(X) = X^m$ anula a la trans. N

$\Rightarrow m_N(X) \mid p(X) = X^m$

$\Rightarrow m_N(X) = X^l, \ l \leq m$

Como $m_N(X) \mid p_N(X) \Rightarrow \boxed{p_N(X) = X^n}$

Teo Cayley-Hamilton

Teorema

Sean V un $\mathbb{k}$-espacio vectorial de dimensión finita y $T \in \operatorname{End}(V)$.

Supongamos que

$$\mathrm{m}_T(X) = (X - \lambda_1)^{m_1} (X - \lambda_2)^{m_2} \cdots (X - \lambda_s)^{m_s}$$

i.e. $\mathrm{m}_T(X)$ se factoriza como producto de factores lineales, por ejemplo en $\mathbb{k} = \mathbb{C}$.
Entonces existe un operador diagonalizable D y un operador nilpotente N tales que

(a) $T = D + N$;

(b) $DN = ND$.

$(a)\ T = D + N$;

$(b)\ DN = ND$.

Más aún, D y N son únicos con esta propiedad y están dados por polinomios en T.

Demostración

Idea

1) Usando la descomp. de $m_T(x)$ encuentro las proyecciones

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s$$

donde $V_i = \ker (T - \lambda_i I)^{m_i}$

2) La proyección π_i es al espacio V_i

Se encuentra usando

$$f_i = \frac{m_T(x)}{(x-\lambda_i)^{m_i}} \quad \text{coprimos}$$

$$1 = h_1 f_1 + \cdots + h_s f_s$$

$$\Rightarrow \quad \pi_i = (h_i f_i)(T)$$

3) $D = \lambda_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2 + \cdots + \lambda_s \pi_s$

$$N = T - D$$

D es diagonal

T es nilpotente

es nilpotente

■

Ejemplo

Consideremos la transformación lineal dada por

$$T\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$T(x, y, z) = (2x, x + 2y, -z)$

Si tomamos la base canónica $E = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ la matriz de T en esta base es

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N}$$

$N^2 = 0$

Forma de Jordan

lunes, 14 de junio de 2021 12:45

Recodemos de la clase pasada el siguiente teorema

Teorema

Sean V un $\Bbbk$-espacio vectorial de dimensión finita y $T \in \mathrm{End}(V)$.

Supongamos que

$$\mathrm{m}_T(X) = (X-\lambda_1)^{m_1}(X-\lambda_2)^{m_2}\cdots(X-\lambda_s)^{m_s}$$

i.e. $\mathrm{m}_T(X)$ se factoriza como producto de factores lineales, por ejemplo en $\Bbbk = \mathbb{C}$.
Entonces existe un operador diagonalizable D y un operador nilpotente N tales que

(a) $T = D + N$;

(b) $DN = ND$.

Más aún, D y N son únicos con esta propiedad y están dados por polinomios en T.

Corolario

Sea V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión finita. Todo $T \in \mathrm{End}(V)$ se escribe como $T = D + N$, donde D es diagonalizable, N es nilpotente, D y N son polinomios en T, y son únicos con esta propiedad

La **forma de Jordan** consiste en describir de una manera explícita toda transformación como suma de una transformación diagonalizable más una nilpotente.

Como ya sabemos describir las transformaciones diagonalizables, vamos a describir las nilpotentes.

$v \in V$, $\quad w = 2v + 3T^2(v) - 5T(v)$

$\quad = (2 + 3T^2 - 5T)(v)$

Definición

Sea V un $\Bbbk$-espacio vectorial, $T \in \mathrm{End}(V)$ y $v \in V$.

El **subespacio T-cíclico** generado por v es

Sea V un $\Bbbk$-espacio vectorial, $T \in \operatorname{End}(V)$ y $v \in V$.

El **subespacio T-cíclico** generado por v es

$$\mathcal{Z}(v,T) = \{p(T)v \mid p \in \Bbbk[X]\}$$

Si $V = \mathcal{Z}(v,T)$, decimos que v es un **vector cíclico** de T.

Ejemplo

Consideremos la transformación lineal dada por

$$T\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$T(x,y) = (y,0)$$

Si tomamos $v = (0,1)$, tenemos que

$T(0,1) = (1,0)$, $T^2(0,1) = T(1,0) = (0,0)$

Como $\{(0,1), (1,0)\}$ son base de $\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ $\mathcal{Z}(v,T) = \mathbb{R}^2$

Obs Cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ es un vector cíclico: $v = (a,b)$ $\boxed{b \neq 0.}$

$T(v) = T(a,b) = (b,0)$
$T^2(v) = T^2(a,b) = T(b,0) = (0,0)$
$\Rightarrow$ T es nilpotente

Si $q \in \mathbb{R}[X]$ $\Rightarrow$ $q(X) = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0$

$q(T)(v) = (a_n \cancel{T^n} + a_{n-1} \cancel{T^{n-1}} \dots + a_1 T + a_0 I)(v)$

$= (a_1 T + a_0 I)(v) = a_1 T(v) + a_0 v$

Si $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow (x,y) = x(1,0) + y(0,1)$

Si $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow (x,y) = x(1,0) + y(0,1)$

Si $v = (0,1) \Rightarrow (x,y) = xT(0,1) + y(0,1)$

$\Rightarrow (x,y) = xT(v) + yv$

$\Rightarrow (x,y) = (xT + y)(v)$

Por ejemplo,

$(3,4) = (\underbrace{3T + 4I}_{q(X) = 3X+4})(0,1)$

$(-1,3) = (-T + 3I)(0,1)$

¿Cuándo podemos asegurar que una transformación lineal tenga un vector cíclico?

Al igual que en el caso de transformaciones diagonalizables, cuando existe una base donde la matriz es de una forma determinada:

Definición

Sea $p(X) = X^m + a_{m-1}X^{m-1} + \cdots + a_1 X + \ a_0$ un polinomio en $\mathbb{k}[X]$.

Se define la **matriz compañera de p** o la **matriz asociada a p** como

$$[p] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & -a_{m-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{m-1} \end{pmatrix}$$

gr $p = m$

p mónico

Ejemplo

Ejemplo

Consideremos $p(X) = X^2 + 1$ $= 1.X^2 + 0X + 1.1$

$$[p] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_{[T]}(X) = \det \begin{pmatrix} X & +1 \\ -1 & X \end{pmatrix} = X^2+1$$

Notar que el polinomio característico de la matriz compañera de p coincide con p:

En efecto,

$$P_{[p]}(X) = \det \begin{pmatrix} X & 0 & \cdots & & a_0 \\ -1 & X & & & a_1 \\ 0 & -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X+a_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= p(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$$

Moraleja: Todo polinomio es el polinomio característico de una matriz

> **Teorema**
>
> Sean V un $\mathbb{k}$-espacio vectorial de dimensión finita y $T \in \mathrm{End}(V)$.
>
> Entonces T tiene un vector cíclico si y sólo si existe una base ordenada B de V tal que
>
> $$[T]_B = [m_T(X)]$$
>
> *i.e.* la matriz de T en la base B es la matriz compañera del polinomio minimal $m_T(X)$ de T.

Demostración

Idea $\Rightarrow$) Si $v \in V$ es un vector cíclico, entonces $V = Z(v, T)$

$= \{ q(T)(v) \mid q(X) \in \mathbb{k}[T] \}$

Vale que $B = \{ v, T(v), T^2(v), \dots, T^{n-1}(v) \}$

Vale que $B = \{ v, T(v), T^2(v), \dots, T^{\ell-1}(v) \}$ es una base de V.

Notar que $m_T(T) = 0 \Rightarrow m_T(T)(v) = 0$

Si $m_T(X) = X^\ell + a_{\ell-1} X^{\ell-1} + \dots + a_1 X + a_0$

$$\Rightarrow 0 = m_T(T)(v) = T^\ell(v) + a_{\ell-1} T^{\ell-1}(v) + \dots + a_0 v$$

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & & -a_0 \\ 1 & 0 & & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & -a_{\ell-1} \end{bmatrix} = [m_T(X)]$$

$\Leftarrow$) Reconstruir lo que hicimos

$$\text{Si } [m_T(X)] = [T]_B = \begin{bmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & -a_1 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \; 1 & -a_{\ell-1} \end{bmatrix}$$

$$B = \{ \underset{}{v_0}, \underset{\substack{\shortparallel \\ T(v_0)}}{v_1}, \underset{\substack{\shortparallel \\ T(v_1) \\ \shortparallel \\ T^2(v_0)}}{v_2}, \dots, \underset{\substack{\shortparallel \\ T(v_{\ell-2}) \\ \shortparallel \\ T^{\ell-1}(v_0)}}{v_{\ell-1}} \}$$

$\blacksquare$

Corolario

Si $p(X) = X^m + a_{m-1}X^{m-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ es un polinomio en $\mathbb{k}[X]$ y $A = [p]$ es la matriz compañera de p. Entonces

$$p = m_A(X) = p_A(X)$$

Ejemplo $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$p_T(X) = (X-1)^2(X-2) =$
$(X^2-2X+1)(X-2) =$
$= X^3 - 4X^2 + 5X - 2$

$m_T(X) = (X-1)(X-2)$

$[T] = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$, $[p_T(X)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} = A$

$p_A(X) = p_T(X)$

$m_A(X) = p_A(X) \neq m_T(X)$

Teorema (Teorema de descomposición cíclica)

Sean V un $\mathbb{k}$-espacio vectorial de dimensión finita y $T \in \mathrm{End}(V)$.

Entonces existen vectores no nulos $v_1, v_2, \ldots, v_r \in V$ tales que

(a) $V = Z(v_1,T) \oplus Z(v_2,T) \oplus \cdots \oplus Z(v_r,T)$;

(b) Si $p_i(X) = m_{T_i}(X)$, con $T_i = T|_{Z(v_i,T)}$, entonces $p_1(X)$ es el minimal de T, y $p_k(X) \mid p_{k-1}(X)$.

Más aún, r y $p_1(X), \ldots, p_r(X)$ están unívocamente determinados.

Corolario

Sean V un $\Bbbk$-espacio vectorial de dimensión finita y $T \in \mathrm{End}(V)$.

Entonces T tiene un vector cíclico si y sólo si $m_T(X) = p_T(X)$.

Ejemplo

Consideremos la transformación lineal dada por

$$T\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$T(x, y, z) = (2x, x + 2y, -z)$

Si tomamos la base canónica $E = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ la matriz de T en esta base es

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Sabemos que $m_T(X) = p_T(X) = (X-2)^2(X+1)$ $\Rightarrow$ por el Teo anterior tiene un vector cíclico

$T(1,0,0) = (2,1,0)$

$T(0,1,0) = (0,2,0) = 2(0,1,0)$

$T(0,0,1) = (0,0,-1) = (-1)(0,0,1)$

$v = (1,0,1)$ $\qquad B = \{(1,0,1), (2,1,-1), (4,4,1)\}$

$T(v) = (2,1,-1)$

$T^2(v) = (4,4,1)$

$P_T(X) = (X-2)^2(X+1) = (X^2 - 4X + 4)(X+1)$

$$P_T(X) = (X-2)^2(X+1) = (X^2-4X+4)(X+1)$$
$$= X^3 - 4X^2 + 4X + X^2 - 4X + 4$$
$$= X^3 - 3X^2 + 4$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \underset{\substack{\parallel \\ [T]_B}}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}} = [m_T(X)]$$

Apliquemos ahora el teorema de descomposición cíclica a transformaciones nilpotentes.

Sean V un $\mathbb{k}$-espacio vectorial de dimensión finita, $\dim V = n$, y $N \in \mathrm{End}(V)$ nilpotente.

Por el teorema de descomposición cíclica, se V descompone como

$$V = \mathcal{Z}(v_1, N) \oplus \mathcal{Z}(v_2, N) \oplus \cdots \oplus \mathcal{Z}(v_r, N);$$

Donde además,

- $p_i(X) = m_{N_i}(X)$, con $N_i = N|_{\mathcal{Z}(v_i,N)}$,
- $p_1(X)$ es el minimal de N,
- $p_k(X) \mid p_{k-1}(X)$.

Si N es nilpotente $\Rightarrow N^m = 0$

$p(X) = X^m$ anula a N

Como $N \in \mathrm{End}(V)$ es nilpotente, $m_N(X) = X^{\ell}$, con $\ell \leq n = \dim V$.

Luego, $p_k(X) = X^{\ell_k}$ con $\ell_1 = \ell$, y $\ell_r \leq \ell_{r-1} \leq \cdots \leq \ell_1 = \ell$

Más aún, la matriz compañera de $p_k(X)$ es

$$[p_k] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

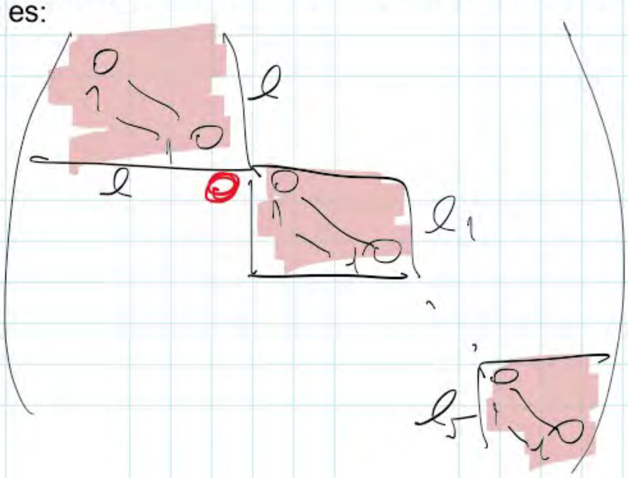
$$[p_k] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Como en cada subespacio cíclico existe un vector cíclico, para cada uno de ellos hay una base B_k donde la matriz de la transformación es la matriz compañera de $p_k(X)$:

$$[N_k]_{B_k} = [p_k]$$

Tomando la unión de las bases $B = \bigcup_{k=1}^{r} B_k$ tenemos una base de V, y la matriz del operador nilpotente N en esa base es:

$$[N]_B = \begin{pmatrix} [p_1] & & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [p_2] & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & [p_r] & \end{pmatrix} =$$



Forma de Jordan

Combinamos ahora el teorema de descomposición cíclica con el teorema de descomposición prima.

Sean V un $\mathbb{k}$-espacio vectorial de dimensión finita y $T \in \mathrm{End}(V)$.

Supongamos que

$$p_T(X) = (X-\lambda_1)^{d_1}(X-\lambda_2)^{d_2}\cdots(X-\lambda_s)^{d_s}$$

donde $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ son todos distintos entre sí. Entonces

$$m_T(X) = (X-\lambda_1)^{m_1}(X-\lambda_2)^{m_2}\cdots(X-\lambda_s)^{m_s}$$

Tomamos $V_i = \ker(T-\lambda_i I)^{m_i}$

$\Rightarrow$ Vimos que (Teo desc. prima)

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s$$

$T|_{V_i}: V_i \to V_i$ tiene minimal

$$m_{T_i}(x) = (x-\lambda_i)^{m_i}$$

Tomamos $N_i = T_i - \lambda_i I$ es una transf. lineal $N_i : V_i \to V_i$

y tal que

$$N_i^{m_i} = (T_i - \lambda_i I)^{m_i} = m_{T_i}(T_i) = 0$$

$\Rightarrow$ N_i es nilpotente, $N_i \in \mathrm{End}(V_i)$

Además, $T_i = \lambda_i I + N_i$

Como N_i es nilpotente, por el teorema de descomposición cíclica tenemos que existe una base B_i tal que

$$[N_i]_{B_i} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & & \\ 1 & \ddots & \\ & 1 & 0 \end{matrix}} & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} 0 & & \\ 1 & \ddots & \\ & 1 & 0 \end{matrix}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} 0 & & \\ 1 & \ddots & \\ & 1 & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [T_i]_{B_i} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \lambda_i & & & \\ 1 & \lambda_i & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_i \end{matrix} & & & \\ & \begin{matrix} \lambda_i & & & \\ 1 & \lambda_i & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_i \end{matrix} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \begin{matrix} \lambda_i & & & \\ 1 & \lambda_i & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_i \end{matrix} \end{pmatrix} \begin{matrix} J_{i_1} \\ J_{i_2} \\ \\ J_{i_l} \end{matrix}$$

Bloque de Jordan

$[\lambda_i I + N_i]_{B_i}$

- Los bloques me van decreciendo en tamaño
- $\#$ bloques que tenemos es $\dim \ker (T - \lambda_i I)$

Cada bloque se denomina la **matriz elemental de Jordan con autovalor λ_i**

Si tomamos todas las bases correspondientes a los subespacios V_i, tenemos una base de V y la matriz de T en esa base es una matriz de bloques de la forma

$$[T]_B = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & A_s \end{pmatrix}$$

y cada bloque también es una matriz de bloques compuesto por matrices elementales de Jordan:

$$A_i = \begin{pmatrix} J_{i_1} & & & \\ & J_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{i_l} \end{pmatrix}$$

bloque elem. de Jordan

$$A_i = \begin{pmatrix} J_{i_1} & & & \\ & J_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{i_\ell} \end{pmatrix}$$

bloque elem. de Jordan

$$J_{i_1} = \begin{pmatrix} \lambda_i & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

Si una matriz tiene las características de arriba, diremos que está en **forma de Jordan**

Teorema (Forma de Jordan)

Sean V un $\Bbbk$-espacio vectorial de dimensión finita y $T \in \mathrm{End}(V)$ tal que

$$p_T(X) = (X - \lambda_1)^{d_1}\,(X - \lambda_2)^{d_2} \cdots (X - \lambda_s)^{d_s}$$

donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ son todos distintos entre sí. Entonces existe una base ordenada B de V tal que $[T]_B$ está en la forma de Jordan.

Más aún, la matriz es única salvo el orden de los autovalores.

Corolario

Sean A y B dos matrices. Entonces

$A \sim B \iff A$ y B tienen la misma forma de Jordan salvo el orden de los bloques.

Demostraciones del teorema y del corolario en video aparte.

Algoritmo para encontrar la forma de Jordan

Supongamos que tenemos V un $\Bbbk$-espacio vectorial de dimensión finita y $T \in \mathrm{End}(V)$ tal que

$$p_T(X) = (X - \lambda_1)^{d_1} (X - \lambda_2)^{d_2} \cdots (X - \lambda_s)^{d_s}$$

donde $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ son todos distintos entre sí.

Queremos encontrar una base B de V tal que la matriz $[T]_B = A$ esté en forma de Jordan.

1. La matriz A es una matriz de bloques

$$A = [T]_B = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & A_s \end{pmatrix}$$

donde tenemos tantos bloques en la diagonal como autovalores distintos.

2. Los elementos de cada bloque A_i son 0 si no estpan en la diagonal o en la diagonal inferior.

3. En la diagonal de A_i está el autovalor λ_i.

4. Cada matriz A_i es una matriz de bloques elementales de Jordan con autovalor λ_i.
   La cantidad de bloques es la dimensión de $\mathrm{Ker}(T - \lambda_i \cdot \mathrm{id})$.

   $n_i = \dim \mathrm{Ker}(T - \lambda_i \cdot \mathrm{id}) =$ multiplicidad geométrica de λ_i.

   Notar que si $n_i = d_i$ para todo i, entonces T es diagonalizable.

   $d_i =$multiplicidad algebraica de λ_i.

5. Todo bloque J_{i_1} de la matriz A_i tiene tamaño $m_i \times m_i$, donde m_i es la multiplicidad de λ_i como autovalor del polinomio minimal $m_T(X)$.

Pasos a seguir para lograr los 5 puntos de arriba:

1. Calculamos el polinomio característico $p_T(X)$ de T y lo factorizamos

$$p_T(X) = (X-\lambda_1)^{d_1}(X-\lambda_2)^{d_2}\cdots(X-\lambda_s)^{d_s}$$

donde $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ son todos distintos entre sí.

$\Longrightarrow$ hay s bloques distintos A_i en la matriz $[T]_B = A$.

2. Calculamos las matrices A_i para cada i.

Para eso calculamos

(a) Calculamos $T-\lambda_i$ y su nulidad $\Longrightarrow$ nos dice la cantidad de bloques de Jordan de A_i .

(b) Calculamos $(T-\lambda_i)^2$ y su nulidad,

(c) Calculamos $(T-\lambda_i)^3$ y su nulidad,

$\vdots$

(d) Calculamos $(T-\lambda_i)^{m_i}$ y su nulidad $\Longrightarrow$ nos dice el tamaño del primer bloque de Jordan de A_i .

3. Calculamos

$\dim \operatorname{Ker}(T-\lambda_i)^{\ell} - \dim \operatorname{Ker}(T-\lambda_i)^{\ell-1}$ = nos dice la cantidad de bloques de tamaño $\geq \ell$

4. Tomamos los vectores de $\operatorname{Ker}(T-\lambda_i)^{m_i}$ que no estén en la base de $\operatorname{Ker}(T-\lambda_i)^{m_i-1}$.

5. Vamos tomando los otros aplicando T hasta llegar a una base:

Si $v \in \operatorname{Ker}(T-\lambda_i)^{m_i}$ y $v \notin \operatorname{Ker}(T-\lambda_i)^{m_i-1}$, entonces

$v_0 = v;$
$v_1 = (T-\lambda_i)v_0;$
$v_2 = (T-\lambda_i)^2 v_0 = (T-\lambda_i)v_1;$
$v_3 = (T-\lambda_i)^2 v_0 = (T-\lambda_i)v_2;$

Si $\{v, w\} \in \operatorname{Ker}(T-\lambda_i)^{m_i}$ son *l.i.* y $w \notin \operatorname{Ker}(T-\lambda_i)^{m_i}$ hacemos lo mismo con w.

Ejemplo

Consideremos la transformación lineal dada por

$$T\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

$T(x,y,z,w) = (2x+3z, x+2y+3w, 2z, z+2w)$

Si tomamos la base canónica $E = \{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1\}$ la matriz de T en esta base es

$$A = [T]_E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejemplo forma de Jordan

jueves, 17 de junio de 2021 14:51

Consideremos la transformación lineal dada por

$$T\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

$$T(x,y,z,w) = (2x+3z, x+2y+3w, 2z, z+2w)$$

Si tomamos la base canónica $E = \{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1\}$ la matriz de T en esta base es

$$A = [T]_E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$T(0,0,1,0) = (3,0,2,1)$

$T(3,0,0,1) = (6,6,0,2)$

$T(0,6,0,0) = (0,12,0,0)$

$$P_A(x) = \det \begin{pmatrix} x-2 & 0 & -3 & 0 \\ -1 & x-2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & x-2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x-2 \end{pmatrix}$$

$$= (x-2)(-1)^{3+3} \det \begin{pmatrix} x-2 & 0 & 0 \\ -1 & x-2 & -3 \\ 0 & 0 & x-2 \end{pmatrix}$$

$$= (x-2)^2 \det \begin{pmatrix} x-2 & 3 \\ 0 & x-2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P_A(x) = (x-2)^4$$

Tenemos sólo 1 autovalor

Tenemos sólo un bloque corresp. al autovalor 2

$\underline{\ker(T-2I)}$: autoespacio para $\lambda=2$

$$A-2I=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sist. homogéneo asociado

$$\begin{cases} 3z=0 \\ x+3w=0 \\ z=0 \end{cases}$$

$x=-3w$

Si $(x,y,z,w)\in \ker(T-2I)$

$\Rightarrow (x,y,z,w)=(-3w,y,0,w)$

$=w(-3,0,0,1)+y(0,1,0,0)$

$\Rightarrow B_1=\{\underbrace{(-3,0,0,1)}_{\text{autov.}},\underbrace{(0,1,0,0)}_{\text{autov.}}\}$

base de $\ker(T-2I)$

autovectores de autovalor 2

$\dim \ker(T-2I)=2$

$\Rightarrow$ 2 bloques elementales de Jordan

No es diagonalizable

$\ker(T-2I)^2$

$$(A-2I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sist homog asociado

$\{ 6z = 0$

$\Rightarrow \underline{z = 0}$

Si $(x,y,z,w) \in \ker (T-2I)^2$

$\Rightarrow (x,y,z,w) = (x,y,0,w)$

$= x(1,0,0,0) + y(0,1,0,0) + w(0,0,0,1)$

$B_2 = \{ (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,0,1) \}$

Notar que vale siempre que

$\ker (T-2I) \subseteq \ker (T-2I)^2$

$\dim \ker (T-2I)^2 - \dim \ker (T-2I) =$

$= 3 - 2 = 1 = \#$ bloques de tamaño ≥ 2

$\underline{\ker (T-2I)^3}$

$(A-2I)^3 = (A-2I)^2(A-2I)$

$$(A-2I)^3 = (A-2I)^2(A-2I)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad m_T(X) = (X-2)^3$$

$$P_T(X) = (X-2)^4$$

* T no es diagonalizable
* T no es cíclica
* El bloque más grande de Jordan asociado a $\lambda=2$ tiene tamaño 3×3

Tenemos la forma de Jordan

$$[T]_B = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\dim \ker(T-2I)^3 - \dim(\ker T-2I)^2 =$$
$$4 - 3 = 1$$

$\Rightarrow$ 1 bloques de tamaño ≥ 3

Tomemos una base de $\ker(T-2I)^3$

$B_3 = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$

$\dim \ker (T-2I)^3 = 4$

Recordemos

$\left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} = 1$ ⇝ un vector cíclico

- $\dim \ker (T-2I)^2 = 3$

$B_2 = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,0,1)\}$

$= 1$ ⇝ el mismo vector cíclico

- $\dim \ker (T-2I) = 2$

$B_1 = \{\underbrace{(-3,0,0,1)}_{\text{autov.}}, \underbrace{(0,1,0,0)}_{\text{autov.}}\}$

Encontramos la base

Tomamos $v_0 \in B_3$ y $v_0 \notin \ker (T-2I)^2$

$\Rightarrow v_0 = (0,0,1,0)$

$v_1 = (T-2I)v_0$

$= (T-2I)(0,0,1,0)$

$= T(0,0,1,0) - 2(0,0,1,0)$

$= (3,0,2,1) - (0,0,2,0)$

$= \boxed{(3,0,0,1) = v_1}$

$$= \boxed{(3,0,0,1) = v_1}$$

$$v_2 = (T - 2I)(v_1)$$

$$= T(3,0,0,1) - 2(3,0,0,1)$$

$$= (6,6,0,2) - (6,0,0,2)$$

$$= \boxed{(0,6,0,0) = v_2}$$

$$(0,0,0,0) = (T-2I)(0,6,0,0)$$

$$= T(0,6,0,0) - 2(0,6,0,0)$$

$$= (0,12,0,0) - (0,12,0,0) \checkmark$$

$$\overline{B}_1 = \{ v_0, v_1, v_2 \}$$

$$= \{ (0,0,1,0), (3,0,0,1), (0,6,0,0) \}$$

El otro vector cíclico que tenemos es $w_0 = (-3,0,0,1)$

$$\overline{B}_2 = \{ w_0 \} = \{ (-3,0,0,1) \}$$

La base que me da la forma de Jordan es

$$B = \overline{B}_1 \cup \overline{B}_2 =$$

$$B = \overline{B}_1 \cup \overline{B}_2 =$$

$$= \{(0,0,1,0),(3,0,0,1),(0,6,0,0),(-3,0,0,1)\}$$

$$\Rightarrow [T]_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= C_{BE} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} C_{EB}$$

$$= C_{EB}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Espacios con producto interno

lunes, 21 de junio de 2021 11:22

En el resto de la materia trataremos de introducir algunos conceptos geométricos en $\Bbbk$-espacios vectoriales:

- Distancia
- Ángulos
- Perpendicularidad

La idea es extender las nociones que conocemos de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$.

Esto se podrá hacer sólo sobre espacios vectoriales que poseen una función especial.

De aquí en adelante supondremos que

$$\Bbbk = \mathbb{C} \text{ o } \Bbbk = \mathbb{R}$$

Definición

Supongamos que $\Bbbk = \mathbb{C}$ o $\Bbbk = \mathbb{R}$. Sea V un $\Bbbk$-espacio vectorial.

Un **producto interno o producto escalar** sobre V es una función

$$\langle -,- \rangle \colon V \times V \longrightarrow \Bbbk$$

tal que $\forall\, v, w \in V, \lambda \in \Bbbk$ se cumple que

(a) $\langle u+v, w\rangle = \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle$

(b) $\langle \lambda v, w\rangle = \lambda \langle v,w\rangle$

Linealidad en la primera componente

(c) $\langle v,w\rangle = \overline{\langle w,v\rangle}$

(d) $\langle v,v\rangle > 0$ si $v \neq 0$.

Ejemplos

1) $V = \mathbb{R}^3$

$\langle -,- \rangle \colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$,

$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$

$\ldots, x_2, x_3), \; y = (y_1, y_2, y_3)$

$\langle -,- \rangle \colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},$

$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \; = x_i y_i$

(a) $\langle (x_1, x_2, x_3) + (z_1, z_2, z_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle =$

$= \langle (x_1 + z_1, x_2 + z_2, x_3 + z_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle =$

$= (x_1 + z_1) y_1 + (x_2 + z_2) y_2 + (x_3 + z_3) y_3 =$

$= x_1 y_1 + z_1 y_1 + x_2 y_2 + z_2 y_2 + x_3 y_3 + z_3 y_3$ ✓

$= \langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle + \langle (z_1, z_2, z_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle$

(b) $\langle \lambda (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle =$

$= \langle (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle$

$= (\lambda x_1) y_1 + (\lambda x_2) y_2 + (\lambda x_3) y_3$

$= \lambda (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)$

$= \lambda \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ ✓

(c) $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \in \mathbb{R}$

$= y_1 x_1 + y_2 x_2 + y_3 x_3$

$= \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle = \overline{\langle \vec{y}, \vec{x} \rangle}$

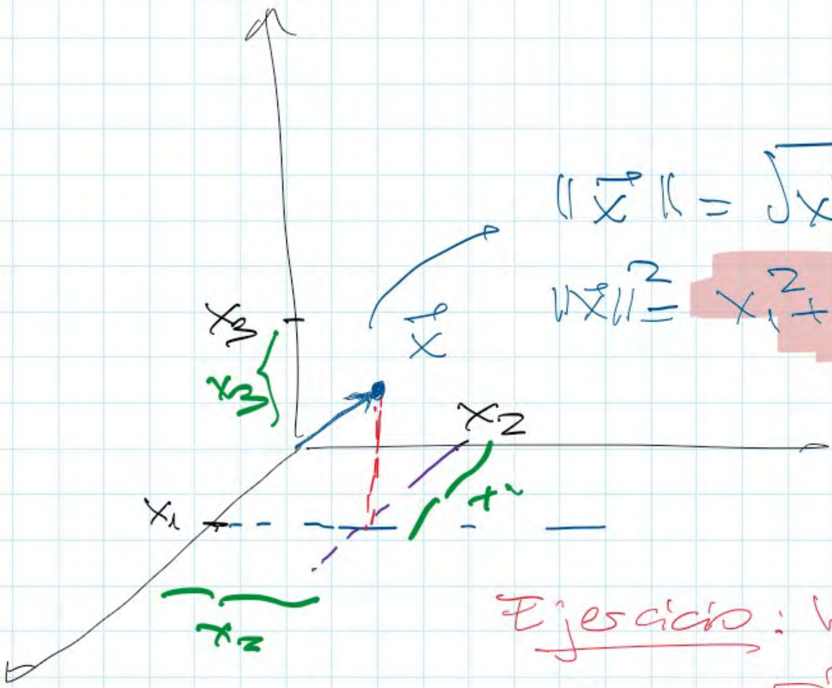
✓

(d) $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \langle (x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3) \rangle$

$= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq 0$

$\in \mathbb{R}$

y $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$



$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

$\|\vec{x}\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

Ejercicio: Hacerlo para $\mathbb{R}^2$

2) $V = \mathbb{R}^n$

$\langle -,- \rangle \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = x_k y_k$$

$n = 1$

$\langle \, , \, \rangle : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\langle a, b \rangle = a.b$

$\langle a, a \rangle = a^2$

$\|a\| = \sqrt{a^2} = |a|$

(a) $\langle \vec{x} + \vec{z}, \vec{y} \rangle =$

$= (x_k + z_k) y_k$

$= x_k y_k + z_k y_k$

$= \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{z}, \vec{y} \rangle$ ✓

(b) $\langle \lambda \vec{x}, \vec{y} \rangle = (\lambda x_k) y_k = \lambda (x_k y_k)$

$$= \lambda \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$$ ✓

(c) $\langle \vec{y}, \vec{x} \rangle = y_k x_k = x_k y_k = \overline{x_k y_k}$

$\in \mathbb{R}$

$$= \overline{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}$$ ✓

(d) $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = x_k x_k = x_k^2 > 0$

si $\vec{x} \neq \vec{0}$ ✓

(b) Si tomamos $\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^{n\times 1}$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [\vec{x}]$$

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = [x_1 \; x_2 \; \cdots \; x_n] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

$$= \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$$

$$[y_1 \; \cdots \; y_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \end{bmatrix} = [\vec{y}]^t [\vec{x}]$$

$$= [y_1 \cdots y_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [\vec{y}]^t [\vec{x}]$$

3) $V = \mathbb{R}^2$

$\langle -, - \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$,

$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 - 2\, x_1 y_2 - 2\, x_2 y_1 + 6\, x_2 y_2$

(a) $\langle (x_1, x_2) + (z_1, z_2), (y_1, y_2) \rangle =$

$= \langle (x_1 + z_1, x_2 + z_2), (y_1, y_2) \rangle$

$= (x_1 + z_1) y_1 - 2 (x_1 + z_1) y_2 - 2 (x_2 + z_2) y_1$
$+ 6 (x_2 + z_2) y_2$

$= x_1 y_1 + z_1 y_1 - 2 x_1 y_2 - 2 z_1 y_2 - 2 x_2 y_1 - 2 z_2 y_1$
$+ 6 x_2 y_2 + 6 z_2 y_2$

$= \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{z}, \vec{y} \rangle$ ✓

(b) $\langle \lambda \vec{x}, \vec{y} \rangle = \lambda \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ Ejercicio

(c) $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$ ✓

(d) $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \underbrace{x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_1 + 6x_2^2}$

cuadrática en x_1, x_2

$= x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2 + 4x_2^2 - 4x_2^2$

$= \underbrace{(x_1 - 2x_2)^2}_{\geq 0} + \underbrace{2x_2^2}_{\geq 0} \geq 0$ ✓

$= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \vec{x} = (0,0).$

Ejercicio: Chequear que

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = [y_1 \; y_2] \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Observación

1) Sea V un espacio vectorial con producto interno.

$\langle v, 0_V \rangle = 0$ para todo $v \in V$.

$\langle 0_V, v \rangle = \langle 0_V + 0_V, v \rangle \underset{(a)}{=} \langle 0_V, v \rangle + \langle 0_V, v \rangle$

$\Rightarrow 0 = \langle 0_V, v \rangle$

$\Rightarrow 0 = \langle 0_V, v \rangle$

Como $0 = \overline{0} \underset{(c)}{=} \overline{\langle v, 0_V \rangle} = \langle v, 0_V \rangle$

2) Los ítems $(a), (b)$ y (c) dicen que

(a') $\langle u, v+w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$

(b') $\langle u, \lambda v \rangle = \overline{\lambda} \langle u, v \rangle$

Casi-lineal en la segunda variable

Sesqui-lineal: $1 + 1/2$ lineal

* lineal en la primera variable
* casi-lineal en la segunda

En $\mathbb{R}$, todo producto interno es lineal en la segunda variable

$\Rightarrow \langle \, , \rangle$ es $\boxed{\text{bilineal}}$

(a') $\langle u, v+w \rangle \underset{(c)}{=} \overline{\langle v+w, u \rangle} \underset{(a)}{=} \overline{\langle v, u \rangle + \langle w, u \rangle}$

$= \overline{\langle v, u \rangle} + \overline{\langle w, u \rangle} = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$ ✓

(b') $\langle u, \lambda v \rangle = \overline{\langle \lambda v, u \rangle} \underset{(b)}{=} \overline{\lambda \langle v, u \rangle}$

$= \overline{\lambda}\, \overline{\langle v, u \rangle} = \overline{\lambda} \langle u, v \rangle$ ✓

3)
$\langle v,v\rangle = \overline{\langle v,v\rangle} \Rightarrow \langle v,v\rangle \in \mathbb{R}, \forall\, v \in V.$

4) $\langle v,v\rangle > 0$ si $v \neq 0$ dice que $\langle -,-\rangle$ es *definida positiva*

Un producto interno es una forma sesqui-lineal, simétrica-conjugada y definida positiva

Ejemplos

1. $V = \mathbb{C}^n$

$\langle -,-\rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$

$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$

$$\langle (x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k} = x_k \overline{y_k}$$

(a) $\langle \vec{x}+\vec{z}, \vec{y}\rangle = (x_k+z_k)\overline{y_k}$
$= x_k\overline{y_k} + z_k\overline{y_k} = \langle \vec{x},\vec{y}\rangle + \langle \vec{z},\vec{y}\rangle$

(b) $\langle \lambda \vec{x}, \vec{y}\rangle = (\lambda x_k)\overline{y_k} = \lambda(x_k\overline{y_k})$
$= \lambda \langle \vec{x},\vec{y}\rangle$

(c) $\langle \vec{y},\vec{x}\rangle = y_k\overline{x_k} = \overline{x_k}\, y_k$
$= \overline{(x_k\overline{y_k})} = \overline{\langle \vec{x},\vec{y}\rangle}$

(d) $\langle \vec{x},\vec{x}\rangle = x_k\overline{x_k} = |x_k|^2$

$$= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{|x_k|^2}_{\in \mathbb{R}_{\geq 0}} > 0 \text{ si } \vec{x} \neq \vec{0}$$

Notación matricial

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_k \overline{y_k} = \begin{bmatrix} \overline{y_1} & \overline{y_2} & \cdots & \overline{y_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= \overline{[\vec{y}]}^t [\vec{x}]$$

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = [\vec{y}]^* [\vec{x}]$$

2) $V = M_n(\mathbb{k}), \mathbb{k} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Sabemos que $M_n(\mathbb{k}) = \mathbb{k}^{n \times n} \simeq \mathbb{k}^{n^2}$

Por ejemplo

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \longleftrightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

$$\mathbb{C}^{2\times 2} \longleftrightarrow \mathbb{C}^4$$

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_k \overline{y_k} = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + x_3\overline{y_3} + x_4\overline{y_4}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix} \right\rangle = x_k \overline{y_k}$$

Definimos $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$

$$\langle A,B\rangle = a_{ij}\overline{b_{ij}}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\overline{b_{ij}}$$

Esto da un producto interno pues es un producto interno en $\mathbb{C}^{n^2}$ y usamos $\mathbb{C}^{n\times n}\simeq \mathbb{C}^{n^2}$

$$\langle A,B\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\overline{b_{ij}} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{b_{ij}}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\underline{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}}\,\underline{(\overline{B}^{t})_{ji}}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (A\overline{B}^{t})_{ii} = \sum_{i=1}^{n} (AB^{*})_{ii}$$

$$= \mathrm{tr}\,(AB^{*}) = \langle A,B\rangle$$

producto interno canónico de matrices

Definimos para $B \in M_n(\mathbb{C})$,

$$\boxed{B^* = \bar{B}^t}$$

la matriz transpuesta conjugada

$$\text{Si } B = \begin{pmatrix} i & 1+i \\ 2 & 1/3 \end{pmatrix} \Rightarrow B^* = \begin{pmatrix} -i & 2 \\ 1-i & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\Big\langle \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 2+i \\ i/2 & 1/2 \end{pmatrix}}_{A}, \underbrace{\begin{pmatrix} i & 1+i \\ 2 & 1/3 \end{pmatrix}}_{B} \Big\rangle = tr(AB^*)$$

$$= 3 + \frac{1}{6} + i.$$

En general, en $M_n(\mathbb{C})$ se define

$$\langle A, B \rangle = tr(AB^*) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\overline{b_{ij}}$$

3) Sean V, W dos $\mathbb{k}$ –espacios vectoriales y $\langle -, - \rangle: W \times W \longrightarrow \mathbb{k}$ un producto interno.

Si $T: V \longrightarrow W$ es una transformación lineal **inyectiva**, podemos definir un producto interno en V como sigue:

$$\langle -, - \rangle_T: V \times V \longrightarrow \mathbb{k}$$

$$\langle u, v \rangle_T = \langle T(u), T(v) \rangle, \qquad \text{para todo } u, v \in V.$$

(a) $\langle u + w, v \rangle_T = \langle T(u+w), T(v) \rangle =$

$\underset{\text{T-Lineal}}{=} \langle T(u) + T(w), T(v) \rangle$

$$= \langle T(u), T(v)\rangle + \langle T(w), T(v)\rangle$$
$$= \langle u, v\rangle_T + \langle w, v\rangle_T$$

(b) $\langle \lambda u, v\rangle_T = \langle T(\lambda u), T(v)\rangle =$

$$\underset{T\text{- lineal}}{=} \langle \lambda T(u), T(v)\rangle$$

$$\underset{(b)}{=} \lambda \langle T(u), T(v)\rangle = \lambda \langle u, v\rangle_T$$

(c) $\langle u, v\rangle_T = \langle T(u), T(v)\rangle = \overline{\langle T(v), T(u)\rangle}$
$$= \overline{\langle v, u\rangle}_T$$

(d) $\langle u, u\rangle_T = \langle T(u), T(u)\rangle > 0$

Si $T(u) \neq 0 \iff u = 0$

T inyectiva

$m \geq n$

Si tomamos $V = \mathbb{k}^{n\times 1}$, $W = \mathbb{k}^{m\times 1}$ y $T: \mathbb{k}^{n\times 1} \longrightarrow \mathbb{k}^{m\times 1}$ dada por una matriz $A \in \mathbb{k}^{m\times n}$

$T(X) = AX$ para todo $X \in \mathbb{k}^{n\times 1}$, tenemos $\quad \operatorname{rg} A = n$

$\langle X, Y\rangle_A = \langle AX, AY\rangle = (AY)^*(AX)$

$$= \overline{(AY)}^t (AX) = (\overline{A}\,\overline{Y})^t (AX)$$
$$= (\overline{Y}^t \overline{A}^t)(AX)$$
$$= \overline{Y}^t (\overline{A}^t A) X$$

Vamos a ver que todos los productos

Vamos a ver que todos los productos internos tienen esta forma, en espacios vectoriales de dimensión finita.

4) Si V es un $\Bbbk$-espacio vecorial de dimensión finita con $\dim V = n$ y base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$, entonces tenemos un isomorfismo de espacios vectoriales

$$[-]_B : V \longrightarrow \Bbbk^n$$
$$[v_i]_B = e_i \qquad \forall 1 \le i \le n.$$
$$= (0, 0, \ldots, \underset{i}{1}, 0, \ldots, 0)$$

Definimos así un producto interno en V:

$$\langle -, - \rangle_B : V \times V \longrightarrow \Bbbk$$

$$\langle u, v \rangle_B = \langle [u]_B, [v]_B \rangle = \overline{[v]_B}^t [u]_B, \qquad \text{para todo } u, v \in V.$$

Si $u = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n$

$v = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \ldots + b_n v_n$

$$\Leftrightarrow [u]_B = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad [v]_B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \langle u, v \rangle_B = \langle [u]_B, [v]_B \rangle =$$
$$= \overline{[v]_B}^t [u]_B$$

$$= \overline{[v]}_B^{\,t} [u]_B$$

$$= [v]_B^{*} [u]_B$$

$$= [\overline{b_1}\ \overline{b_2} \cdots \overline{b_n}] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = a_k \overline{b_k} = \sum_{k=1}^{n} a_k \overline{b_k}$$

Claramente, los valores $\langle v_i, v_j \rangle_B$ determinan el producto interno

Norma y distancia

martes, 22 de junio de 2021 14:37

De aquí en adelante supondremos que

$$\Bbbk = \mathbb{C} \text{ o } \Bbbk = \mathbb{R}$$

Definición

Supongamos que $\Bbbk = \mathbb{C}$ o $\Bbbk = \mathbb{R}$. Sea V un $\Bbbk$-espacio vectorial.

Un **producto interno o producto escalar** sobre V es una función

$$\langle -,- \rangle \colon V \times V \longrightarrow \Bbbk$$

tal que $\forall\, v, w \in V, \lambda \in \Bbbk$ se cumple que

(a) $\langle u+v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$ Linealidad en la primera componente

(b) $\langle \lambda v, w\rangle = \lambda \langle v, w\rangle$

(c) $\langle v, w\rangle = \overline{\langle w, v\rangle}$

(d) $\langle v, v\rangle > 0$ si $v \neq 0$.

Ejemplo

$V = \mathbb{R}^2$

$\langle -,- \rangle \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$,

$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2)\rangle = x_1 y_1 - 2\, x_1 y_2 - 2\, x_2 y_1 + 6\, x_2 y_2$

Tomemos la base canónica $B = \{(1,0), (0,1)\}$

$\langle (1,0), (1,0)\rangle = 1 \cdot 1 = 1$

$\langle (1,0), (0,1)\rangle = -2$

$\langle (0,1), (1,0)\rangle = -2$

$\langle (0,1), (0,1)\rangle = 6$

S: $(x_1, x_2) = x_1(1,0) + x_2(0,1)$
$(y_1, y_2) = y_1(1,0) + y_2(0,1)$

$\langle (x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle =$

$= \langle x_1(1,0) + x_2(0,1),\ y_1(1,0) + y_2(0,1)\rangle$

$\overset{(a)}{=} \langle x_1(1,0),\ y_1(1,0) + y_2(0,1)\rangle + \langle x_2(0,1),\ y_1(1,0) + y_2(0,1)\rangle$

$\overset{(b)}{=} x_1 \langle (1,0),\ y_1(1,0) + y_2(0,1)\rangle + x_2 \langle (0,1),\ y_1(1,0) + y_2(0,1)\rangle$

$= x_1\langle (1,0),\ y_1(1,0)\rangle + x_1\langle (1,0),\ y_2(0,1)\rangle + x_2\langle (0,1),\ y_1(1,0)\rangle + x_2\langle (0,1),\ y_2(0,1)\rangle$

$= x_1y_1\langle (1,0),(1,0)\rangle + x_1y_2\langle (1,0),(0,1)\rangle + x_2y_1\langle (0,1),(1,0)\rangle + x_2y_2\langle (0,1),(0,1)\rangle$

$= x_1y_1\,1 + x_1y_2(-2) + x_2y_1(-2) + x_2y_2\,6$

$$= \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle e_1,e_1\rangle & \langle e_1,e_2\rangle \\ \langle e_2,e_1\rangle & \langle e_2,e_2\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

En general, si V es un $\mathbb{k}$-espacio vectorial de dimensión finita con $\dim V = n$ y base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$

Si $\langle \, , \, \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{k}$ es un producto interno y $v, w \in V$

$$\Rightarrow v = a^1 v_1 + a^2 v_2 + \dots + a^n v_n = \sum_{i=1}^{n} a^i v_i$$

$$w = b^1 v_1 + b^2 v_2 + \dots + b^n v_n = \sum_{j=1}^{n} b^j v_j$$

$$\Rightarrow [v]_B = \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^n \end{bmatrix} , \quad [w]_B = \begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^n \end{bmatrix}$$

$$\langle v, w \rangle = \langle a^i v_i , b^j v_j \rangle$$

$$\Rightarrow \langle v, w \rangle = a^i \overline{b^j} \langle v_i , v_j \rangle$$

$$= [\overline{b^1} \ \overline{b^2} \dots \overline{b^n}] \underbrace{\begin{bmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \dots & \langle v_1, v_n \rangle \\ \langle v_2, v_1 \rangle & \dots & \langle v_2, v_n \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle v_n, v_1 \rangle & \dots & \langle v_n, v_n \rangle \end{bmatrix}}_{G_B} \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^n \end{bmatrix}$$

$$= [w]_B^* \, G_B [v]_B \in \mathbb{k}$$

Definición

Sea V un $\mathbb{k}$-espacio vectorial de dimensión finita con $\dim V = n$ y base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$.

Sea $\langle -, - \rangle \colon V \times V \longrightarrow \mathbb{k}$ un producto interno en V.

La matriz $G = (g_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ dada por $g_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$ para todo $1 \leq i, j \leq n$ se llama la **matriz del producto interno o la matriz de Gram** asociada a la base B.

Jørgen Pedersen Gram
(Danés, 1850-1916)

Observación

Vale que $G = G^*$

Autoadjunta

Si $G = (\langle v_i, v_j \rangle)_{i,j}$

$$\Rightarrow G^* = \overline{G}^t = \left(\overline{\langle v_j, v_i \rangle}\right)_{i,j}$$

$$\underset{(c)}{=} (\langle v_i, v_j \rangle)_{i,j} = G$$

Ejemplos

1) $V = \mathbb{C}^n, \mathbb{R}^n$, con $\langle -, - \rangle$ canónico $\Longrightarrow G = I$

$$\langle (x^1, \dots, x^n), (y^1, \dots, y^n) \rangle = x^i \bar{y}^i = \sum_{i=1}^{n} x^i \bar{y}^i$$

$$e_i = (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0)$$

$$\Rightarrow \langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} = \delta_{ij}$$

$$\Rightarrow \boxed{G = I}$$

1 si $n = j$

$\Rightarrow \boxed{G_E = I}$

2) $V = \mathbb{R}^2$

$E = \{(1,0),(0,1)\}$

$\langle -,- \rangle \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$,

$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 - 2\, x_1 y_2 - 2\, x_2 y_1 + 6\, x_2 y_2$

$G_E = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$

Tomemos la base $B = \{(1,1), (1,-1)\}$

$\langle (1,1),(1,1) \rangle = [1, 1] \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3$

$\langle (1,1),(1,-1) \rangle = [1, 1] \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = -5$

$\langle (1,-1),(1,1) \rangle = -5$

$\langle (1,-1),(1,-1) \rangle = 11$

$\Rightarrow G_B = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 11 \end{bmatrix}$

Observación

Si G es una matriz de un producto interno, debe cumplir que

$X = [v]_B$

- $G = G^*$
- $X^* G X > 0$ si $X \neq 0$

Sale de $\langle v, v \rangle > 0$ si $v \neq 0$

En particular, G debe ser inversible y los elementos de la diagonal deben ser positivos.

- Es inversible pues, si no lo fuese, tendríamos que $rg\, G < n$

En este caso, el sistema homog asociado $GX = 0$ tiene asociado $GX = 0$ tiene soluciones no triviales. $\Rightarrow \exists X \neq \vec{0}$ tal que $GX = \vec{0}$

$\Rightarrow X^* G X = 0$ ¡Abs!

pues por la prop. (d)

$X^* G X > 0$

- $g_{ii} = [0, \dots, \underset{i}{1}, \dots 0]\, G \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \end{array}$

pues $g_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle = [v_i]_B^* \, G \, [v_j]_B$

$= [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]\, G \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \end{array}$

$\Rightarrow g_{ii} = \langle v_i, v_i \rangle \underset{(d)}{>} 0 \quad \forall i$

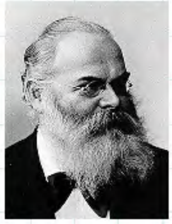
Definición

Un **espacio con producto interno** es un espacio vectorial real o complejo V junto con un producto interno $\langle -, - \rangle \colon V \times V \longrightarrow \mathbb{k}$.

Lo notaremos $(V, \langle -, - \rangle)$ o simplemente por V

Augustin Louis Cauchy
(Francés, 1789-1857)

Hermann Amandus Schwarz
(Alemán, 1843-1921)
Alumno de Weierstrass



Proposición (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)

Sea $(V, \langle -, - \rangle)$ un espacio con producto interno.

Entonces

$$|\langle v, w\rangle|^2 \leq \langle v, v\rangle\langle w, w\rangle$$

para todo $v, w \in V$.

Demostración Si $w = 0$, vale la igualdad

Si $w \neq 0$, tomamos $\alpha = \dfrac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle}$

$$\Rightarrow \langle w, v\rangle \underset{(c)}{=} \overline{\langle v, w\rangle} \underset{(d)}{=} \overline{\frac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle}} \langle w, w\rangle$$

$$= \bar{\alpha} \langle w, w\rangle$$

Vale que

$$0 \leq \langle v - \alpha w, v - \alpha w\rangle =$$

$$= \langle v, v\rangle - \langle v, \alpha w\rangle - \langle \alpha w, v\rangle + \langle \alpha w, \alpha w\rangle$$

$$= \langle v, v\rangle - \bar{\alpha}\langle v, w\rangle - \alpha\cancel{\langle w, v\rangle} + \alpha\bar{\alpha}\cancel{\langle w, w\rangle}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \langle v, v\rangle - \bar{\alpha}\langle v, w\rangle$$

$\Rightarrow 2\,\langle v,w\rangle \leq \langle v,v\rangle$

$\Rightarrow \dfrac{\overline{\langle v,w\rangle}\langle v,w\rangle}{\langle w,w\rangle} \leq \langle v,v\rangle$

$\Rightarrow \overline{\langle v,w\rangle}\langle v,w\rangle \leq \langle v,v\rangle\langle w,w\rangle$ ■

Ejemplos

$V = \mathbb{R}^2, \langle -,-\rangle$ canónico.

Tomemos $v = (1,1)$ y $w = (x,y)$ $\begin{cases} \langle (1,1),(1,1)\rangle = 2 \\ \langle (x,y),(x,y)\rangle = x^2+y^2 \end{cases}$

$\Rightarrow \langle (1,1),(x,y)\rangle = x+y$

$$|\langle v,w\rangle|^2 \leq \langle v,v\rangle\langle w,w\rangle$$

$$\Rightarrow \quad |x+y|^2 \leq 2(x^2+y^2)$$

$$\Rightarrow \quad (x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2) \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$$

2) $V = C([0,1])$ continuas

$\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$ es un p.i.

$$\left|\int_0^1 f(x)g(x)\,dx\right| \leq \left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^{1/2}\left(\left(\int_0^1 g(x)\,dx\right)^{1/2}\right.$$

Definición

Sea V un espacio con producto interno. Para todo $v \in V$ se define la **norma de v** como

$$\|v\| = \langle v, v\rangle^{1/2}$$

Teorema

Sea V un espacio con producto interno. Para todo $v, w \in V,\ \lambda \in \mathbb{k}$ se tiene que

$(a)\ \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$ → reescalar

$(b)\ \|v\| > 0\ \forall\, v \neq 0.$ → prop (d) de p.i.

$(c)\ |\langle v, w\rangle| \leq \|v\| \|w\|$ → Cauchy–Schwartz

$(d)\ \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ → Desigualdad triangular

Demostración

$$(a) \quad \|\lambda v\| = \langle \lambda v, \lambda v\rangle^{1/2}$$
$$= \left(\lambda \bar{\lambda} \langle v, v\rangle\right)^{1/2}$$
$$= \left(|\lambda|^2 \|v\|^2\right)^{1/2}$$
$$= |\lambda| \|v\| \checkmark$$

$$(d) \quad \|v + w\|^2 \underset{\text{def}}{=} \langle v + w, v + w\rangle$$

$$\underset{(a)}{=} \langle v, v\rangle + \langle v, w\rangle + \langle w, v\rangle + \langle w, w\rangle$$

$$\underset{(c)}{=} \|v\|^2 + \langle v, w\rangle + \overline{\langle v, w\rangle} + \|w\|^2$$

$$= \|v\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\langle v, w\rangle) + \|w\|^2$$

$$= \|v\|^2 + \underbrace{2\,\mathrm{Re}(\langle v,w\rangle)}_{\leq} + \|w\|^2$$

$$\leq \|v\|^2 + \underbrace{2|\langle v,w\rangle|}_{\substack{\leq \\ C\text{-}S}} + \|w\|^2$$

$$\leq \|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2 = (\|v\|+\|w\|)^2$$

$$\Rightarrow \quad \|v+w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad ✓$$

■

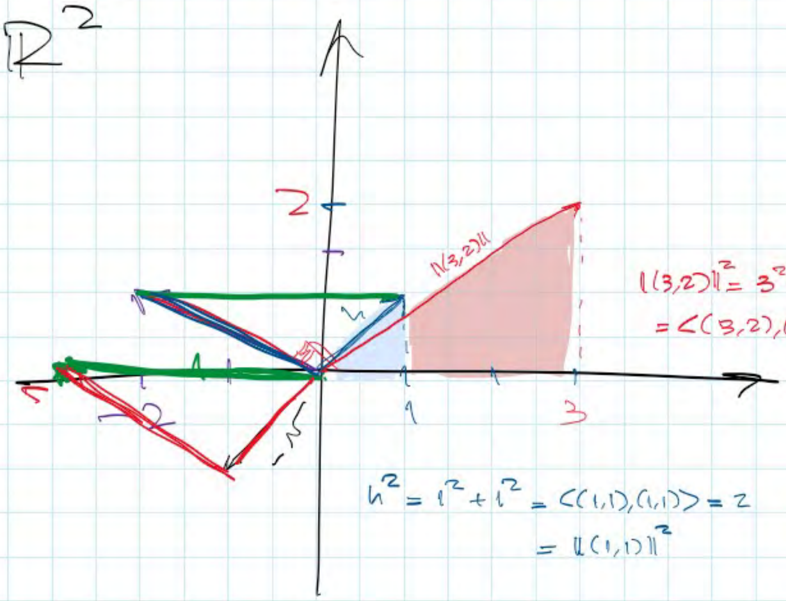
Ejemplo

$V = \mathbb{R}^2$

$u = (-2,1)$

$v = (1,1)$

$w = (3,2)$



$\|(3,2)\|^2 = 3^2+2^2$
$= \langle(3,2),(3,2)\rangle$

$h^2 = 1^2+1^2 = \langle(1,1),(1,1)\rangle = 2$
$= \|(1,1)\|^2$

$$d(u,v) = \|u-v\| \leq \underbrace{\|u\|}_{d(0,u)} + \underbrace{\|v\|}_{d(0,v)}$$

Observación

La norma $\|\,\|: V \to \mathbb{k}$ da una noción de distancia en V:

$$d(v,w) = \|v - w\| \qquad \forall\, v,w \in V.$$

Vale que

- $d(v,v) = 0 \qquad \forall\, v \in V,$

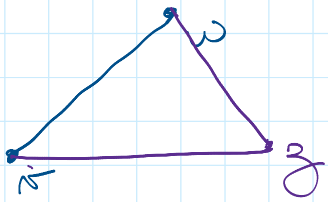
$$d(v,v) = \|v-v\| = \|0\| = \langle 0,0\rangle^{1/2} = 0 \quad ✓$$

$d(v,w) = d(w,v) \qquad \forall\, v,w \in V,$

$d(v,w) = d(w,v) \qquad \forall\, v,w \in V,$

$$d(v,w) = \|v-w\| = \|(-1)(w-v)\| = |-1|\,\|w-v\|$$
$$= \|w-v\| = d(w,v) \quad ✓$$

- $d(v,w) \leq d(v,z) + d(z,w) \qquad \forall\, v,w,z \in V.$



$$d(v,w) = \|v-w\| =$$
$$= \|(v-z)+(z-w)\|$$
$$\leq \|v-z\| + \|z-w\|$$
$$= d(v,z) + d(z,w)$$

Hemos visto que la noción de distancia coincide con las nociones conocidas en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

Notar que

$$\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 \iff \langle v,w\rangle = 0$$

Conjuntos ortogonales y Proceso de Gram-Schmidt

jueves, 24 de junio de 2021 13:20

Recordemos primero la definición de norma y distancia de la clase pasada.

Definición

Sea V un espacio con producto interno. Para todo $v \in V$ se define la **norma de v** como

$$\|v\| = \langle v, v \rangle^{1/2}$$

Teorema

Sea V un espacio con producto interno. Para todo $v, w \in V,\ \lambda \in \mathbb{k}$ se tiene que

$(a)\ \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$ → reescalar

$(b)\ \|v\| > 0\ \forall\, v \neq 0.$ → prop (d) de p.i.

$(c)\ |\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|$ → Cauchy-Schwartz

$(d)\ \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ → Desigualdad triangular

La norma $\|\cdot\|: V \longrightarrow \mathbb{k}$ da una noción de distancia en V:

$$d(v, w) = \|v - w\| \qquad \forall\, v, w \in V.$$

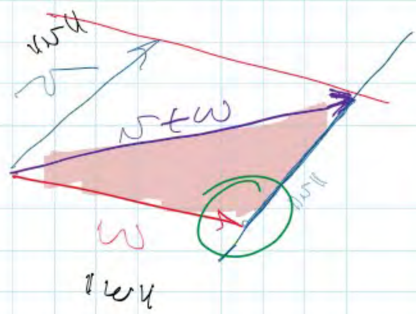
Observación (Teorema de Pitágoras)

Sea V un espacio con producto interno y $v, w \in V$.

Si $\langle v, w \rangle = 0$ entonces

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$$

Más aún, si $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, entonces vale la recíproca.



$\|v+w\|^2 = \langle v+w, v+w \rangle =$

$= \langle v, v \rangle + \langle v, w \rangle + \langle w, v \rangle + \langle w, w \rangle$

$= \langle v,v\rangle + \langle v,w\rangle + \langle w,v\rangle + \langle w,w\rangle$

$= \|v\|^2 + \|w\|^2 + \langle v,w\rangle + \overline{\langle v,w\rangle}$

$= \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\underbrace{\langle v,w\rangle}_{=0}$

$= \|v\|^2 + \|w\|^2$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R} \Rightarrow \mathrm{Re}\langle v,w\rangle = \langle v,w\rangle$

Entonces $\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$

$\Rightarrow 2\,\mathrm{Re}\langle v,w\rangle = 0$

$\Rightarrow \mathrm{Re}\langle v,w\rangle = 0$

$\underset{\mathbb{K}=\mathbb{R}}{\Rightarrow} \langle v,w\rangle = 0$

Ejercicio: Encontrar $v,w \in \mathbb{C}^2$ tales que $\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$ pero $\langle v,w\rangle \neq 0$.

Definición

Sea V un espacio con producto interno.

Decimos que $v, w \in V$ son **ortogonales** si $\langle v, w\rangle = 0$ y escribimos $v \perp w$.

Si $S = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ es un subconjunto de V, decimos que S es un **conjunto ortogonal** si

$$\langle v_i, v_j\rangle = 0 \quad \text{para todo } 1 \leq i, j \leq m. \;, i \neq j$$

Si además $\|v_i\| = 1 \;\forall\, 1 \leq i \leq m$, decimos que S es un **conjunto ortonormal.**

Ejemplos

1) $V = \mathbb{C}^n, \mathbb{R}^n$, con $\langle -,- \rangle$ canónico.

Bases canónicas $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

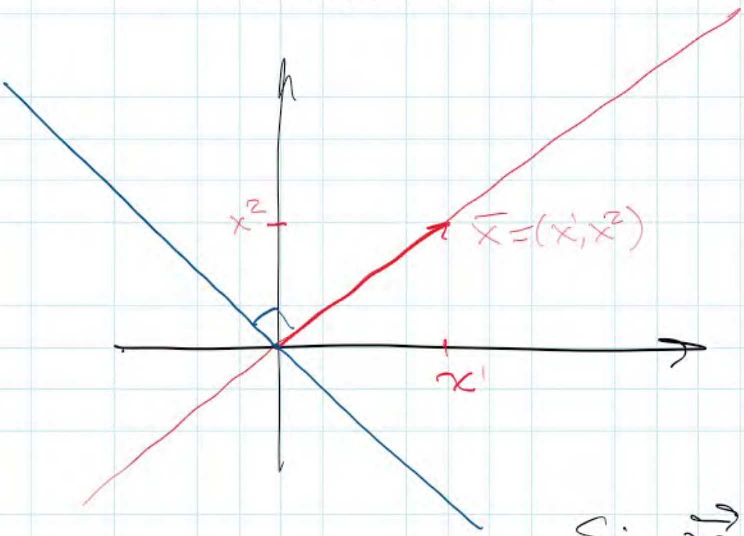
$e_i = (0, \dots 0, \underset{i}{1}, 0, \dots 0)$

$\langle e_i, e_j \rangle = \langle (0, \dots 0, \underset{i}{1}, 0, \dots 0), (0, 0, \dots 0, \underset{j}{1}, 0, \dots 0) \rangle$

$= \delta_{ij} \quad \forall\, 1 \leq i, j \leq n$

$\Rightarrow \mathcal{E}$ es un conjunto ortonormal

$V = \mathbb{R}^2$, con $\langle -, - \rangle$ canónico.



Si $\vec{x} \perp \vec{y}$

$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$

$\Rightarrow \langle (x^1, x^2), (y^1, y^2) \rangle = 0$

$\Rightarrow x^1 y^1 + x^2 y^2 = 0$

$x^1 y^1 = -x^2 y^2$

Si $\vec{x} \neq (0, 0)$, $x^1 \neq 0$ ó $x^2 \neq 0$

Si $x^1 \neq 0 \Rightarrow y^1 = -\frac{x^2}{x^1} y^2$

$\vec{y} = \left(-\frac{x^2}{x^1} y^2, y^2\right)$

$= y^2 \left(-\frac{x^2}{x^1}, 1\right)$

$y^2 = x^1$

$= (-x^2, x^1)$

$(x^1, x^2) \perp (-x^2, x^1)$

p.i. canónico.

Si $\{(1, -1), (1, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ es ortogonal

$\langle , \rangle$ canónico

pero no ortonormal

$\langle\, , \rangle$ canónico

pero no ortonormal

$\langle (1,-1), (1,1) \rangle = 0$

Per $\left\langle \frac{(1,-1)}{\sqrt{2}}, \frac{(1,-1)}{\sqrt{2}} \right\rangle = \frac{2}{(\sqrt{2})^2} = \frac{2}{2} = 1$

$\Rightarrow \|(1,-1)\| = \sqrt{2}$ $\quad \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) \right\}$

$\|(1,1)\| = \sqrt{2}$

es ortonormal.

$V = \mathbb{R}^{n\times n}$, con $\langle A,B\rangle = tr(B^*A)$ canónico.

Base canónica $E = \{E_{ij}\}_{1\le i,j\le n}$

$$E_{ij} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \hline \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array} i$$

$\langle E_{ij}, E_{kl} \rangle = tr(E_{ij} E_{kl}^*)$

$= tr(E_{ij} \overline{E}_{kl}^t) = tr(E_{ij} E_{kl}^t)$

$= tr(E_{ij} E_{lk}) = tr(\delta_{jl} E_{ik})$

$= \delta_{jl} \delta_{ik}$

1.

$\Rightarrow E$ es un conjunto ortonormal

2. $V = C([0,1])$,

$$\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

Si definimos

$f_n(x) = \sqrt{2}\cos(2\pi n\, x)$
$g_n(x) = \sqrt{2}\,\text{sen}\,(2\pi n\, x)$

Entonces

$S = \{1, f_1, g_1, f_2, g_2, f_3, g_3, \dots\}$

es un conjunto ortonormal

Teorema

Sea V un espacio con producto interno.

Un conjunto ortogonal de vectores no nulo es linealmente independiente.

Demostración

Sup que $\{v_1, \dots, v_m\}$ es un conjunto ortogonal.

Si $\vec{0} = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m$, $a_i \in \mathbb{K}$

$$0 = \langle \vec{0}, v_i \rangle = \langle a_1 v_1 + \dots + a_i v_i + \dots + a_m v_m, v_i \rangle$$

$$= \langle a_1 v_1, v_i \rangle + \dots + \langle a_i v_i, v_i \rangle + \dots + \langle a_m v_m, v_i \rangle$$

$$= a_1 \underbrace{\langle v_1, v_i \rangle}_{0} + \dots + a_i \underbrace{\langle v_i, v_i \rangle}_{\neq 0} + \dots + a_m \underbrace{\langle v_m, v_i \rangle}_{0}$$

$$= a_i \langle v_i, v_i \rangle = a_i \|v_i\|^2$$

$$\Rightarrow 0 = a_i \underbrace{\|v_i\|^2}_{\neq 0} \Rightarrow \boxed{a_i = 0} \quad \forall i$$

$\Rightarrow$ los vectores son l.i.

■

Corolario

Sean V un espacio con producto interno, $S = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ un conjunto ortogonal de V y $v \in \langle S \rangle$, con $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_m v_m$. Entonces

$$a_i = \frac{\langle v, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} \quad \forall\, 1 \le i \le m, \qquad \text{y} \qquad v = \sum_{i=1}^{m} \frac{\langle v, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} v_i$$

Demostración

Si $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_m v_m = a_i v_i$

tomamos $\langle v, v_j \rangle = \langle a_i v_i, v_j \rangle$

$$= a_i \underbrace{\langle v_i, v_j \rangle}_{0 \text{ si } i \neq j}$$

$$\Rightarrow \langle v, v_j \rangle = a_j \underbrace{\langle v_j, v_j \rangle}_{\neq 0}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_j = \frac{\langle v, v_j \rangle}{\langle v_j, v_j \rangle}} = \frac{\langle v, v_j \rangle}{\|v_j\|^2}$$

■

Observación

Sea V un espacio con producto interno de dimensión finita y $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de V que es un conjunto ortogonal.

Entonces conocemos **toda combinación lineal** usando el producto interno:

pues por lo anterior

$$v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle v, v_i \rangle}{\underbrace{\langle v_i, v_i \rangle}_{\|v_i\|^2}} v_i = \frac{\langle v, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} v_i$$

$\mathbb{R}^n$, $\vec{x} = (x^1, x^2, \dots, x^n) = x^1 e_1 + x^2 e_2 + \cdots + x^n e_n$

$$= \frac{\langle \vec{x}, e_1 \rangle}{\|e_1\|^2} e_1 + \dots + \frac{\langle \vec{x}, e_n \rangle}{\|e_n\|^2} e_n$$

Teorema (Proceso de Gram-Schmidt)

Sea V un espacio con producto interno y $S = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ un conjunto linealmente independiente de V con $W = \langle v_1, v_2, \dots, v_m \rangle$.

Entonces existe una base ortogonal $B = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ de W tal que para todo $1 \leq k \leq m$ vale que $\{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ es una base de $\langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$.

Demostración

La demostración sale por inducción (recursividad)

$m = 1$

$$w_1 = v_1 \rightarrow \langle v_1 \rangle = \langle w_1 \rangle$$

$m = 2$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 \Rightarrow v_2 = w_2 + \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1$$

$$\Rightarrow v_2 \in \langle w_1, w_2 \rangle$$

$$w_2 \in \langle v_1, v_2 \rangle$$

$$\Rightarrow \langle v_1, v_2 \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle$$

$$\Rightarrow v_2 \in \langle w_1, w_2 \rangle$$

$$w_2 \in \langle v_1, v_2 \rangle$$

$$\Rightarrow \langle v_1, v_2 \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle$$

Veamos que $w_1 \perp w_2$

$$\langle w_2, w_1 \rangle = \left\langle v_2 - \frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 \,,\, v_1 \right\rangle$$

$$= \langle v_2, v_1 \rangle - \left\langle \frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 , v_1 \right\rangle$$

$$= \langle v_2, v_1 \rangle - \frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\cancel{\langle v_1, v_1 \rangle}} \cancel{\langle v_1, v_1 \rangle} = 0$$

$m = 3$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1$$

Chequear que $\langle w_3, w_2 \rangle = 0$

$\langle w_3, w_1 \rangle = 0$

$$v_3 \in \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$$

$$w_3 \in \langle v_3, w_2, w_1 \rangle = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$$

$$\Rightarrow \langle w_1, w_2, w_3 \rangle = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$$

$n = k+1$ a partir de $n = k$

$$w_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle w_{k+1}, w_i \rangle w_i}{\langle w_i, w_i \rangle}$$

Vale que $\langle w_i, w_j \rangle = 0 \quad \forall 1 \leq i, j \leq k+1$

$\langle w_1, \dots, w_{k+1} \rangle = \langle v_1, \dots v_k \rangle$

■

Corolario

Todo espacio con producto interno de dimensión finita tiene una base ortonormal

Demostración

Si V es un espacio con producto interno de dimensión finita y $B = \{v_1, \dots v_n\}$ es una base, por el Proceso de Gram-Schmidt, existe un conjunto ortogonal $\{w_1, \dots w_n\}$ tal que

$$\langle v_1, \dots v_n \rangle = \langle w_1, \dots, w_n \rangle$$

$\Rightarrow V = \langle w_1, \dots w_n \rangle$

$\Rightarrow \{w_1, \dots, w_n\}$ es una base

Finalmente, tomamos

[illegible] es base

Finalmente, tenemos

$\overline{B} = \left\{ \frac{w_1}{\|w_1\|}, \frac{w_2}{\|w_2\|}, \dots, \frac{w_n}{\|w_n\|} \right\}$ es base ortonormal

■

Ejemplo

Consideremos $V = \mathbb{R}^3$, $\langle , \rangle$ canónico

$v_1 = (1,-1,2)$

$v_2 = (3,0,1)$

$w_1 = v_1 = (1,-1,2)$

$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1$

$\langle w_1, w_1 \rangle = \langle v_1, v_1 \rangle = \langle (1,-1,2),(1,-1,2) \rangle$

$= 1 + 1 + 4 = 6$

$\langle v_2, w_1 \rangle = \langle (3,0,1), (1,-1,2) \rangle$

$= 3 + 0 + 2 = 5$

$\Rightarrow w_2 = (3,0,1) - \frac{5}{6}(1,-1,2)$

$= \left(3 - \frac{5}{6}, \frac{5}{6}, 1 - \frac{10}{6}\right)$

$= \left(\frac{13}{6}, \frac{5}{6}, -\frac{4}{6}\right)$

Si buscamos $w_3 = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tal que

$\left.\begin{array}{l} \langle w_1, w_3 \rangle = 0 = x - y + 2z \\ \langle w_2, w_3 \rangle = 0 = \frac{13}{6}x + \frac{5}{6}y - \frac{4}{6}z \end{array}\right\}$

$\Rightarrow \{w_1, w_2, w_3\}$ es l.i.

$\Rightarrow$ es una base de $\mathbb{R}^3$

Definición

Sea V un espacio con producto interno y S un subconjunto no vacío de V.
El **complemento ortogonal** de S es

$$S^\perp = \{v \in V \mid \langle s, v\rangle = 0 \ \ \forall\, s \in S\}$$

Ejemplos

1) $\{0\}^\perp = V$

$V^\perp = \{0\}$

2) $V = \mathbb{R}^3$, $s = (1,-1,2)$

$s^\perp = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \langle v, s\rangle = 0\}$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$

solución de un sistema homogéneo

$\dim S^\perp = 2$

Teorema (Mejor aproximación a un subespacio)

Sea V un espacio con producto interno, $W \subseteq V$ un subespacio y $v \in V$.
Si W es de dimensión finita y $B = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ es una base ortogonal de W entonces

(a) $w = \sum_{i=1}^{m} \frac{\langle v, w_i\rangle}{\|w_i\|^2} w_i \in W$ es la **mejor aproximación** de v al espacio W, *i.e.*

$$\|v - w\| \leq \|v - z\| \quad \forall\, z \in W$$

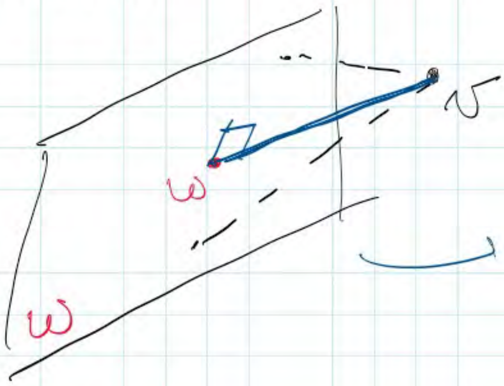
y es el único con esta propiedad.

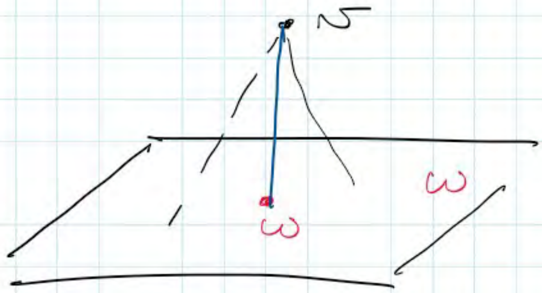
$$\|v - w\| \leq \|v - z\| \quad \forall z \in W$$

y es el único con esta propiedad.

(b) El vector $v - w$ es ortogonal a W, es decir $\langle v - w, u\rangle = 0 \quad \forall\, u \in W$.

Demostración





(b) Veamos que $v - w \perp z \quad \forall z \in W$

Para ver que ~~todo~~ $z \in W$ es ortogonal a $v - w$, basta probarlo para los elementos de la base $\{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ pues z es combinación lineal de ellos

Así, $\langle v - w, w_j \rangle =$

$$= \left\langle v - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v, w_i\rangle}{\langle w_i, w_i\rangle} w_i,\ w_j \right\rangle$$

$$= \langle v, w_j\rangle - \sum_{i=1}^{k} \left\langle \frac{\langle v, w_i\rangle}{\langle w_i, w_i\rangle} w_i, w_j \right\rangle$$

$$= \langle v, w_j\rangle - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v, w_i\rangle}{\langle w_i, w_i\rangle} \underbrace{\langle w_i, w_j\rangle}_{=0}$$

$$i=1 \qquad \langle w_i, w_i\rangle \qquad \underbrace{}_{=0 \text{ si } i\neq j}$$

$$= \langle v, w_j\rangle - \frac{\langle v, w_j\rangle}{\cancel{\langle w_j, w_j\rangle}} \cancel{\langle w_j, w_j\rangle}$$

$$= 0$$

(a) Si $z \in W$

$$\|v-z\|^2 = \|(v-w)+(w-z)\|^2$$

$$= \underbrace{\|v-w\|^2}_{\geq 0} + \underbrace{\|w-z\|^2}_{\geq 0} + \underbrace{2\operatorname{Re}\langle v-w, \overset{\in W}{w-z}\rangle}_{=0}$$

$$\Rightarrow \|v-z\|^2 \geq \|v-w\|^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\|v-z\| \geq \|v-w\|}$$

■

Ejemplo $\quad V = \mathbb{R}^3$

$$v = (0,0,2)$$

$$W = \langle \overset{w_1}{(1,-1,2)}, \left(\tfrac{13}{6}, \tfrac{5}{6}, -\tfrac{4}{6}\right)\rangle$$

$$w = \quad + \frac{\langle v, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 + \frac{\langle v, w_2\rangle}{\langle w_2, w_2\rangle} w_2 \in W$$

$$w = \frac{4}{6}(1,-1,2) + \frac{-8/6}{\|w_2\|^2}\left(\tfrac{13}{6}, \tfrac{5}{6}, -\tfrac{4}{6}\right)$$

$$\langle w_2, w_2\rangle = \left(\tfrac{13}{6}\right)^2 + \left(\tfrac{5}{6}\right)^2 + \left(-\tfrac{4}{6}\right)^2 = \|w_2\|^2$$

Operadores Autoadjuntos y Unitarios

martes, 29 de junio de 2021 14:28

Teorema (Mejor aproximación a un subespacio)

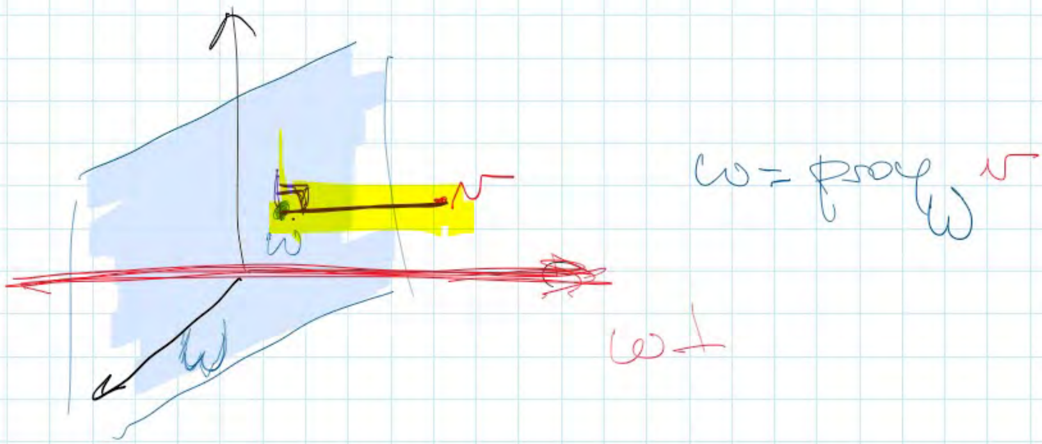
Sea V un espacio con producto interno, $W \subseteq V$ un subespacio y $v \in V$.
Si W es de dimensión finita y $B = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ es una base ortogonal de W entonces

(a) $w = \sum_{i=1}^{m} \frac{\langle v, w_i \rangle}{\|w_i\|^2} w_i \in W$ es la **mejor aproximación** de v al espacio $W, i.e.$

$$\|v - w\| \leq \|v - z\| \qquad \forall\, z \in W$$

y es el único con esta propiedad.

(b) El vector $v - w$ es ortogonal a W, es decir $\langle v - w, u \rangle = 0 \quad \forall\, u \in W$.



Definición

El vector $w = proy_W v = \sum_{i=1}^{m} \frac{\langle v, w_i \rangle}{\underbrace{\|w_i\|^2}_{=1}} w_i \in W$ se denomina la **proyección ortogonal** de v en W.

La función $proy_W : V \longrightarrow W$ es una función lineal que se denomina la **proyección ortogonal** de V sobre W, *i.e.* $proy_W{}^2 = proy_W, \mathrm{Im}\,(proy_W) = W$.

Si $B_W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ es una base ortogonal

Si $B_W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ es una base ortogonal de W, $\dim W = k$

Si $u, v \in V$, $\lambda \in \mathbb{k}$, entonces

$$\text{proy}_W(v + \lambda u) = \text{proy}_W(v) + \lambda\,\text{proy}_W(u)$$

$$\text{proy}_W(v + \lambda u) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v + \lambda u, w_i \rangle}{\|w_i\|^2} w_i$$

$$\underset{\text{prod. p. i}}{=} \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v, w_i \rangle + \lambda \langle u, w_i \rangle}{\|w_i\|^2} w_i$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\langle v, w_i \rangle}{\|w_i\|^2} w_i + \lambda \frac{\langle u, w_i \rangle}{\|w_i\|^2} w_i \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v, w_i \rangle}{\|w_i\|^2} w_i + \sum_{i=1}^{k} \lambda \frac{\langle u, w_i \rangle}{\|w_i\|^2} w_i$$

$$= \text{proy}_W(v) + \lambda\,\text{proy}_W(u)$$

Es una proyección a W

$$\text{proy}_W(v) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v, w_i \rangle}{\|w_i\|^2} w_i \in W$$

$$\Rightarrow \text{Im}\,\text{proy}_W \subseteq W$$

Si $w \in W \Rightarrow w = a_1 w_1 + \dots + a_k w_k = a_i w_i$

y vimos que $= \sum_{i=1}^{k} a_i w_i$

$i=1$

$$a_i = \frac{\langle w, w_i \rangle}{\|w_i\|^2}$$

$$\Rightarrow w = \frac{\langle w, w_i \rangle}{\|w_i\|^2} w_i = proy_W w$$

$$\Rightarrow proy_W w = proy_W^2 w$$

Si $v \in V$, $proy_W^2 v = proy_W(\underbrace{proy_W v}_{w})$

$$= proy_W v$$

$$\Rightarrow proy_W^2 = proy_W$$

Recordar que si P es una proy. entonces $id - P$ es otra proyección y tenemos

$$V = \operatorname{Im} P \oplus \ker P$$
$$= \ker(I-P) \oplus \ker P$$

Si $P = proy_W$, tenemos

Corolario

La función $p_{W^\perp}: V \to W^\perp$, $p_{W^\perp}(v) = v - proy_W v$ para todo $v \in V$

es una proyección ortogonal sobre $W^\perp$

La imagen de $P_{W^\perp}$ es $W^\perp$

La imagen de $P_{W^\perp}$ es $W^\perp$

$W^\perp = \{ v \in V \mid \langle v, w \rangle = 0 \ \forall w \in W \}$

Si $v \in V$, $P_{W^\perp}(v) = v - \underbrace{proy_W v}_{W}$

Por el teo anterior,

$$\langle v - proy_W v, z \rangle = 0 \quad \forall z \in W$$

$$\Rightarrow \operatorname{Im} P_{W^\perp} = \operatorname{Im} I - proy_W = W^\perp$$

$$\Rightarrow V = W \oplus W^\perp$$

Teorema (Complemento ortogonal)

Sea V un espacio con producto interno, y $W \subseteq V$ un subespacio de dimensión finita. Entonces $proy_W: V \to W$ es una proyección lineal y $W^\perp = \operatorname{Ker}(proy_W)$.

En particular, se tiene que

$$V = W \oplus W^\perp$$

Demostración

Si W tiene dimensión finita, tenemos una base $\{z_1, z_2, \dots, z_k\}$. Por Gram-Schmidt puedo encontrar una base ortogonal $B_W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$

Definimos

$$proy_W : V \longrightarrow W$$

$$proy_W(v) = \sum_{i=1}^{k} \underline{\langle v, w_i \rangle}\, w_i$$

1, 0

$$\operatorname{proy}_W(v) = \sum_{i=1} \frac{\langle v, w_i\rangle}{\|w_i\|^2} w_i$$

$\times$) • proy_W es una proyección

- $\operatorname{Im} \operatorname{proy}_W = W$
- $\ker \operatorname{proy}_W = W^\perp$ (Ejercicio)
- $V = \operatorname{Im} \operatorname{proy}_W \oplus \ker \operatorname{proy}_W$

$\Rightarrow V = W \oplus W^\perp$

■

Hemos usado en todos los cálculos anteriores que, dado $w \in W$, la función

$$f_w : V \longrightarrow \Bbbk, \qquad f_w(v) = \langle v, w\rangle \ \forall\, v \in V$$

es una transformación lineal.

Así, todo $v \in V$ define una funcional lineal y se tiene una función

$$\begin{aligned} V &\longrightarrow V^* \\ w &\mapsto \langle -, w\rangle = f_w \end{aligned}$$

Ejemplo $V = \mathbb{R}^3$

$w = (2, 1, -4)$

$f_w : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$f_w(x, y, z) = \langle (x, y, z), (2, -1, -4)\rangle$

$= 2x - y - 4z$

$\mathcal{E} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

$C = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

$E^* = \{f_1, f_2, f_3\} = \langle -, (0,0,1)\rangle$

$f_1 = \langle -, (1,0,0)\rangle$

$f_2 = \langle -, (0,1,0)\rangle$

Atención: si $\mathbb{k} = \mathbb{C}$, esta función no es lineal!

Si $\dim V < \infty$, todos los funcionales son de esta forma.

Frigyes Riesz
(Hungría 1880-1956)

Maurice Fréchet
(Francia 1878-1973)

Teorema (Teorema de Representación de Riesz-Fréchet)

Sean V un espacio con producto interno de dimensión finita y $f \in V^*$.

Entonces existe un **único** $w \in V$ tal que

$$f(v) = \langle v, w\rangle \qquad \forall\, v \in V.$$

Demostración

Consideremos una base ortonormal de V (esto se puede por Gram-Schmidt)

$B = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$

Si tomamos

$$w = \sum_{i=1}^{n} \overline{f(w_i)}\, w_i \in V$$

$$\Rightarrow \langle v, w \rangle = \langle v, \sum_{i=1}^{n} \overline{f(w_i)}\, w_i \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \langle v, \overline{f(w_i)}\, w_i \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \overline{\overline{f(w_i)}} \langle v, w_i \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(w_i) \overbrace{\langle v, w_i \rangle}^{\in \mathbb{k}}$$

$$\underset{f \text{ lineal}}{=} f\Big(\underbrace{\sum_{i=1} \langle v, w_i \rangle w_i}_{v} \Big) = f(v)$$

■

Veamos ahora la relación que hay entre el producto y $\mathrm{End}(V)$.

Teorema

Sean V un espacio con producto interno de dimensión finita y $T \in \mathrm{End}(V)$.

Entonces existe un **único** $\boldsymbol{T^*} \in \mathrm{End}(V)$ tal que

$$\langle T(v), w \rangle = \langle v, T^*(w) \rangle \qquad \forall\, v, w \in V.$$

Demostración

Si $T: V \to V$ es una t.l,

para $v, w \in V$

$$\langle T(v), w \rangle \in \mathbb{k}$$

Esto define un funcional lineal

$$f : V \longrightarrow \mathbb{k}, \quad f(v) = \langle T(v), w \rangle$$

(es lineal pues $\langle \, , \rangle$ es lineal en la primera coord. y T es lineal)

Por el teorema de rep. de Riesz $\exists! \, w' \in V$ tal que

$$f(v) = \langle v, w' \rangle$$

Así, para $w \in V$ tenemos asignado un w' como arriba

Esta asignación resulta una transformación linea

$$w \longrightarrow w'$$

que llamamos T^* porque resulta única.

■

Definición

Sean V un espacio con producto interno y $T \in \mathrm{End}(V)$.
Decimos que T tiene un **operador adjunto** sobre V si existe $T^* \in \mathrm{End}(V)$ tal que

$$\langle T(v), w \rangle = \langle v, T^*(w) \rangle \qquad \forall\, v, w \in V.$$

Si $T = T^*$, entonces decimos que T es **autoadjunto**. 

Sean V un espacio con producto interno y $T \in \mathrm{End}(V)$.
Decimos que T tiene un **operador adjunto** sobre V si existe $T^* \in \mathrm{End}(V)$ tal que

$$\langle T(v), w\rangle = \langle v, T^*(w)\rangle \qquad \forall\, v, w \in V.$$

Si $T = T^*$, entonces decimos que T es **autoadjunto**.

Observación

1) Vimos que si la dimensión de V es finita, entonces todo operador tiene un operador adjunto.

2) Supongamos que V un espacio con producto interno de dimensión finita, $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base ortogonal de V y $T \in \mathrm{End}(V)$.

   Entonces para todo $v \in V$ tenemos que

$$v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle v, v_i\rangle}{\|v_i\|} v_i$$

En particular, lo mismo vale para $T(v) \in V$

$$T(v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle T(v), v_i\rangle}{\|v_i\|^2} v_i$$

$$T(v_j) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\langle T(v_j), v_i\rangle}{\|v_i\|^2} v_i$$

$$\Rightarrow \quad [T]_B = \left(\frac{\langle T(v_j), v_i\rangle}{\|v_i\|^2} \right)_{i,j}$$

Teorema

Sean V un espacio con producto interno de dimensión finita, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base ortonormal de V y $T \in \mathrm{End}(V)$.

Entonces

$$[T^*]_B = \overline{[T]_B}^{\,t} = [T]_B^{\,*}$$

Demostración

Por lo hecho antes

$$[T]_B = \left(\langle T(v_j), v_i \rangle \right)_{ij}$$

Pero, $\langle T(v_j), v_i \rangle = \langle v_j, T^*(v_i) \rangle$

$$= \overline{\langle T^*(v_i), v_j \rangle}$$

$$\Rightarrow \langle T(v_j), v_i \rangle = \overline{\langle T^*(v_i), v_j \rangle}$$

$$\Rightarrow [T^*]_B = \left(\langle T^*(v_j), v_i \rangle \right)_{ij}$$

$$= \overline{[T]_B}^{\,t} = [T]_B^{\,*}$$

■

Observación

Si T es autoadjunto, entonces $[T]_B{}^* = [T]_B$.

Más aún, vale el recíproco: si $[T]_B{}^* = [T]_B$ para alguna base ortogonal, entonces T es autoadjunto.

Ejemplo

Si $T\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ está dada en la base canónica por

$$[T]_E = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$T^* : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$[T^*]_E = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = [T]_E^t$$

$\Rightarrow$ $T = T^*$ es autoadjunto

2) $T\colon \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$

$$[T]_E = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 2-i & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [T]_E^* = \begin{bmatrix} 1 & 2+i \\ i & 3 \end{bmatrix} \neq [T]_E$$

Teorema

Sean V un espacio con producto interno de dimensión finita y $T \in \mathrm{End}(V)$ un operador **autoadjunto**. Entonces

(a) Existe una base ortonormal de autovectores, en particular, T es diagonalizable.

(b) Todos sus autovalores son número reales.

(c) Si $T(v) = \lambda v$ y $T(w) = \mu\, w, \lambda \neq \mu$, entonces $\langle v, w\rangle = 0$.

(b) Si $v \in V$ es autovector de autovalor $\lambda \Rightarrow T(v) = \lambda v$

$$\Rightarrow \langle T(v), v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \lambda \underbrace{\langle v, v\rangle}_{\neq 0}$$

$$\langle v, T^*(v)\rangle = \langle v, T(v)\rangle = \langle v, \lambda v\rangle = \bar{\lambda} \underbrace{\langle v, v\rangle}_{\neq 0}$$

$$\Rightarrow \lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \boxed{\lambda \in \mathbb{R}}$$

(c) Ejercicio!

Teorema (Propiedades de los operadores adjuntos)

Sean V un espacio con producto interno de dimensión finita. Si $T, S \in \mathrm{End}(V)$, entonces

(a) $(T+S)^* = T^* + S^*$.

(b) $(cT)^* = \bar{c}\, T^*$.

(c) $(TS)^* = S^* T^*$.

(c) $(T^*)^* = T$.

Demostración Ejercicio ∎

Definición

Sean V, W dos espacios con producto interno y $T \in \mathrm{Hom}(V,W)$.
Decimos que T **preserva productos internos** si

$$\langle T(v), T(u)\rangle_W = \langle v, u\rangle_V \qquad \forall\, v, u \in V.$$

Si T preserva productos internos, entonces $\|T(v)\|_W = \|v\|_V \ \forall\, v \in V$.

Observación

1) Supongamos que V y W tienen dimensión finita.

   Vale que T preserva productos internos **si y sólo si** manda una base ortonormal a una base ortonormal.

   En particular, se tiene que T es un isomorfismo y $\dim V = \dim W$.

2) Tomemos ahora $V = W$ de dimensión finita y $T \in \mathrm{End}(V)$ que preserva p.i

$$\langle T(v), T(v)\rangle = \langle v, v\rangle$$

$$\Leftrightarrow \langle v, v\rangle = \langle v, T^*T(v)\rangle \qquad \forall\, v$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{c} T^*T = id \\ TT^* = id \end{array}}$$

Definición

Sean V un espacio con producto interno y $T \in \mathrm{End}\,(V)$.
Decimos que T es un **operador unitario** si T preserva productos internos, *i.e.*

$$\langle T(v), T(u)\rangle = \langle v, u\rangle \qquad \forall\, v, u \in V.$$

Teorema

Sean V un espacio con producto interno y $U \in \mathrm{End}(V)$.

Entonces U es unitario si y sólo si existe su operador adjunto U^* y $U^*U = id = UU^*$.

Demostración (Ejercicio)

■

Ejemplo

Para todo $\theta \in [0,2\pi]$ definimos la transformación lineal $U_\theta: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

dada por la matriz en la base canónica

$$[U_\theta] = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

rotación en θ

sentido anti-horario

$$\overline{[U_\theta]}^t = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = [U_\theta]^*$$

$$[U_\theta][U_\theta]^* = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{U_\theta \text{ es unitaria}}$$

Definición

Una matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$ se dice **unitaria** si $AA^* = I$.

Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ es unitaria, decimos que es **ortogonal**.

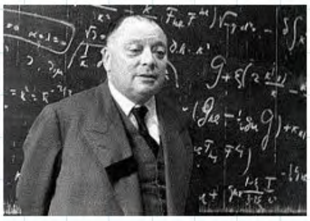
Ejemplo

1) Las matrices $[U_\theta]$ del ejemplo anterior son ortogonales.

2) **Matrices de Pauli:** son matrices *unitarias y autoadjuntas* de traza cero que generan un subespacio vectorial real de $M_2(\mathbb{C})$ de dimensión 3 dado por

$$\mathfrak{su}_2(\mathbb{R}) = \{A \in M_2(\mathbb{C}) \mid tr(A) = 0, A = A^*\}$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$



Wolfgang Pauli
(Físico austríaco, 1900-1958)

Formas bilineales

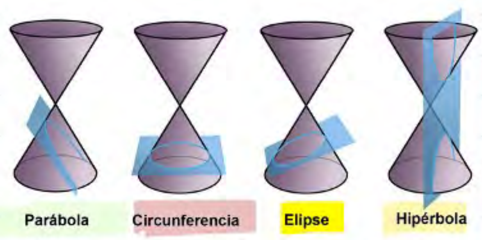
martes, 6 de julio de 2021 12:18

Con este tema cerramos el curso de álgebra lineal para Astronomía.

Las formas bilineales están estrechamente relacionadas a los productos internos y a distintas nociones geométricas. De hecho, todo producto interno sobre el cuerpo de los números reales es una forma bilineal.

Como aplicación, veremos que las formas bilineales nos ayudan a describir formas cuadráticas. Los objetos geométricos (de dimensión dos) asociados son denominados cónicas. Las secciones de las cónicas dan

- Parábolas
- Hipérbolas
- Circunferencias
- Elipses



En esta sección trabajaremos sobre cualquier cuerpo $\mathbb{k}$, salvo que se especifique lo contrario

Definición

Sea V un $\mathbb{k}$-espacio vectorial.

Una **forma bilineal** sobre V es una función

$$b: V \times V \longrightarrow \mathbb{k}$$

tal que $\forall\, u, v, w \in V, \lambda \in \mathbb{k}$ se cumple que

$(a)\ b(\lambda u + v, w) = \lambda b(u, w) + b(v, w)$

$(b)\ b(u, \lambda v + w) = \lambda b(u, v) + b(u, w)$

Ejemplos

1) Si $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ y $\langle -, - \rangle$ es un producto interno sobre V, entonces

$b(v, w) = \langle v, w \rangle$ es una forma bilineal.

$\vec{x} = (x^1, x^2, \dots, x^4)$

$\vec{y} = (y^1, y^2, \dots, y^4)$

Por ej, $V = \mathbb{R}^4$

$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x^i y^i = y^i x^i = x^1 y^1 + x^2 y^2 + \dots + x^4 y^4$

2) La función dada por

2) La función dada por $\langle x,y\rangle = x^2y^2 = y^2x^2 = x^2y^2 + x^2y^2 + \dots + x^2y^2$

$$b(v,w) = 0 \ \forall\, v,w \in V$$

es siempre una forma bilineal para todo espacio vectorial V.

3) Consideremos un espacio vectorial V y dos funcionales $f,g \in V^*$.
Entonces

$$b(v,w) = f(v)g(w) \qquad \forall\, v,w \in V$$

es una forma bilineal.

Tenemos que $b : V \times V \to \mathbb{k}$

(a) $b(\lambda u + v, w) \overset{def}{=} \underbrace{f(\lambda u+v)}_{\in \mathbb{k}}\underbrace{g(w)}_{\in \mathbb{k}}$

$= (\lambda f(u) + f(v))g(w)$ f lineal

$= \lambda f(u)g(w) + f(v)g(w)$

$= \lambda b(u,w) + b(v,w)$ ✓

(b) $b(u, \lambda v + w) = f(u)g(\lambda v + w)$

$= f(u)(\lambda g(v) + g(w))$

$= f(u)\lambda g(v) + f(u)g(w)$

$= \lambda f(u)g(v) + f(u)g(w)$

$= \lambda b(u,v) + b(u,w)$ ✓

Denotamos por

$Bil(V) = \{b : V \times V \to \mathbb{k} \mid b$ es una forma bilineal$\}$

al conjunto de todas las formas bilineales en V.

Veamos que es un espacio vectorial:

- Suma: Si b_1, b_2 son dos formas bilineales, definimos

$(b_1 + b_2) : V \times V \to \mathbb{k}$ $\quad \forall v,w \in V$

$(b_1+b_2)(v,w) = b_1(v,w)+b_2(v,w)$

b_1+b_2 es una forma bilineal:

(a) $(b_1+b_2)(\lambda u+v,w) =$

$\underset{\text{def}}{=} b_1(\lambda u+v,w)+b_2(\lambda u+v,w)$

$\underset{b_1, b_2 \text{ son bilineales}}{=} \lambda b_1(u,w)+b_1(v,w)+\lambda b_2(u,w)+b_2(v,w)$

$= \lambda(b_1(u,w)+b_2(u,w))+(b_1(v,w)+b_2(v,w))$

$= \lambda(b_1+b_2)(u,w)+(b_1+b_2)(v,w)$ ✓

(b) es análogo.

- Producto por escalar

Si $\lambda \in \mathbb{K}$, b una forma bilineal, definimos $(\lambda\cdot b): V\times V \to \mathbb{K}$

$$(\lambda\cdot b)(v,w) = \lambda b(v,w)$$

$\lambda\cdot b$ es una forma bilineal

(a) $(\lambda\cdot b)(\beta u+v,w) =$

$= \lambda(b(\beta u+v,w))$

$= \lambda(\beta b(u,w)+b(v,w))$

$= \beta\lambda b(u,w)+\lambda b(v,w)$

$= \beta(\lambda b)(u,w)+(\lambda b)(v,w)$ ✓

(b) es análogo.

- El neutro de la suma es

la forma bilineal $b(v,w)=0 \ \forall v,w \in V$.

En lo que sigue, trataremos de describir este espacio vectorial de forma
más explícita

Observación

Recordar que, por la *propiedad universal* del producto tensorial, tener una forma bilineal

$$b\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{k}$$

es lo mismo que tener una **transformación lineal**

$$\tilde{b}\colon V \otimes V \longrightarrow \mathbb{k}$$

De manera que $\tilde{b}(v \otimes w) = b(v,w) \quad \forall\, v,w \in V.$

$$\begin{tikzcd}
V \times V \arrow[rr] \arrow[dr, "b"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & V \otimes V \arrow[dl, dashed, "\tilde{b}"] \\
& \mathbb{k} &
\end{tikzcd}$$

$\tilde{b}$ transf. lineal

Así, tenemos que $\boxed{Bil(V) = (V \otimes V)^*}$

En particular, si $\dim V < \infty$, entonces $\dim Bil(V) = (\dim V)^2$

pues $\dim(V \otimes V)^* = \dim(V \otimes V) = (\dim V)^2$

Al igual que se define la matriz de Gram para un producto interno, podemos definir la matriz asociada a una forma bilineal sobre un espacio vectorial de **dimensión finita**.

Definición

Sea V un $\mathbb{k}$-espacio vectorial de dimensión finita y $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base.

Si $b\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{k}$ es una forma bilineal, se define **la matriz de b en la base B** como

$$[b]_B = (b(v_i, v_j))_{1 \le i,j \le n}$$

Observación

Si $\vec{x}, \vec{y} \in V$ $\Rightarrow$ $\vec{x} = x^1 v_1 + x^2 v_2 + \dots + x^n v_n$

$$[\vec{x}]_B = \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}$$

$$\vec{x} = x^i v_i$$

$\vec{y} = y^1 v_1 + \dots + y^n v^n$, $\quad [\vec{y}]_B = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$

$= y^i v_i$

$$b(\vec{x}, \vec{y}) = b(x^i v_i, y^j v_j)$$

$$= x^i y^j b(v_i, v_j)$$

$$= x^i b(v_i, v_j) y^j$$

$$= [x^1\ x^2 \dots x^n] \begin{pmatrix} b(v_1,v_1) & \dots & b(v_1,v_n) \\ \vdots & & \vdots \\ b(v_n,v_1) & \dots & b(v_n,v_n) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$= [\vec{x}]_B^t \underbrace{(b(v_i, v_j))}_{A} [\vec{y}]_B$$

En notación tensorial tenemos que

$$b((x^i)_B, (y^j)_B) = x^i \underbrace{b(v_i, v_j)}_{b_{ij}} y^j$$

Recíprocamente, notar que si tenemos una matriz cualquiera $A \in M_n(\mathbb{k})$ podemos definir la forma bilineal

$$b_A : V \times V \to \mathbb{k} \qquad b_A(v,w) = [v]_B{}^t\, A\, [w]_B$$

Ejercicio: verificar que es una forma bilineal.

Teorema

Sean V un espacio vectorial de dimensión finita y B una base de V. Entonces

$$\mathrm{Bil}(V) \simeq M_n(\mathbb{k})$$

como espacios vectoriales. El isomorfismo viene dado por

$$b \mapsto [b]_B$$

$$b_A \leftarrow A$$

Demostración

Veamos que la función

$$\begin{aligned} \mathrm{Bil}(V) &\longrightarrow M_n(\mathbb{k}) \\ b &\longmapsto [b]_B \end{aligned}$$

es lineal: Si $b_1, b_2 \in \mathrm{Bil}(V)$

$$\Rightarrow (b_1 + t b_2)(v,w) = b_1(v,w) + t b_2(v,w)$$

$\forall v, w \in V$

$\Rightarrow (b_1+b_2)(v_i, v_j) = b_1(v_i, v_j) + b_2(v_i, v_j)$

$\Rightarrow [b_1+b_2]_B = [b_1]_B + [b_2]_B$

De la misma forma, si $\lambda \in \mathbb{K}$, $b \in Bil(V)$

$$[\lambda b]_B = \lambda [b]_B$$

$$(\lambda b)(v_i, v_j) = \lambda (b(v_i, v_j))$$

Veamos que ambas funciones son inversas: Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ definimos

$$b_A(v, w) = [v]_B^t A [w]_B$$

Si $A = (b(v_i, v_j)) = [b]_B$

$$\Rightarrow b_{[b]_B}(v, w) = [v]_B^t (b(v_i, v_j)) [w]_B$$

$$= b(v, w)$$

■

Ejercicio: Si V es un espacio vectorial de dimensión finita, B_1, B_2 son dos bases de V, y $b: V \times V \to \mathbb{K}$ una bases de V, y $b: V \times V \to k$ una forma bilineal, mostrar que

$$\boxed{[b]_{B'} = C_{BB'}^t \, [b]_B \, C_{BB'}}$$

Corolario

Sean V un espacio vectorial de dimensión finita, $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de V y $B^* = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ su base dual. Entonces las funciones

$$b_{ij}(v, w) = f_i(v) f_j(w) \qquad \forall\, 1 \leq i, j \leq n$$

son una base de $Bil(V)$.

Demostración

Como $\dim Bil(V) = \dim M_n(k) = n^2$, basta ver que las formas bilineales $b_{ij}(v,w) = f_i(v) f_j(w)$ generan el espacio $Bil(V)$.

Si $b \in Bil(V)$, por la demostración del teorema,

$$b(\vec{x}, \vec{y}) = [\vec{x}]_B^t \left(b(v_i, v_j) \right) [\vec{y}]_B$$

Como $[\vec{x}]_B = \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x} = x^1 v_1 + \cdots + x^n v_n$

$= f_1(\vec{x}) v_1 + \cdots + f_n(\vec{x}) v_n$

$\Rightarrow [\vec{x}]_B = \begin{bmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_n(\vec{x}) \end{bmatrix}, \quad [\vec{y}]_B = \begin{bmatrix} f_1(\vec{y}) \\ \vdots \\ f_n(\vec{y}) \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow b(\vec{x}, \vec{y}) = f_i(\vec{x}) b(v_i, v_j) f_j(\vec{y})$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} f_i(\vec{x}) b(v_i, v_j) f_j(\vec{y})$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \underbrace{b(v_i, v_j)}_{\in \mathbb{K}} \underbrace{f_i(\vec{x}) f_j(\vec{y})}_{b_{ij}(\vec{x}, \vec{y})}$$

$$b(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i,j=1}^{n} b(v_i, v_j)\, b_{ij}(\vec{x}, \vec{y})$$

$\Rightarrow \{b_{ij}\}$ generan $\mathrm{Bil}(V)$.

Definición

Decimos que una forma bilineal es **simétrica** si

$$b(v,w) = b(w,v) \qquad \text{para todo } v,w \in V.$$

En particular, si V es un espacio vectorial de dimensión finita, tenemos que b es simétrica si y sólo si $[b]_B$ es una matríz simétrica para toda base B de V. $([b]_B = [b]_B^t)$

Análogamente, decimos que una forma bilineal es **antisimétrica** si

$$b(v,w) = -b(w,v) \qquad \text{para todo } v,w \in V.$$

En particular, si V es un espacio vectorial de dimensión finita, tenemos que b es antisimétrica si y sólo si $[b]_B$ es una matríz antisimétrica para toda base B de V. $([b]_B^t = -[b]_B)$

Observación

1) Todo producto interno sobre los números reales es una forma bilineal simétrica.

$$b(\vec{x},\vec{y}) = \langle \vec{x},\vec{y}\rangle = \overline{\langle \vec{y},\vec{x}\rangle} = \langle \vec{y},\vec{x}\rangle = b(\vec{y},\vec{x})$$

$\mathbb{K}=\mathbb{R}$

2) Toda forma bilineal se puede escribir como suma de una forma bilineal simétrica y una forma bilineal antisimétrica.

Si $b \in Bil(V)$

$$\begin{aligned} b(v,w) &= \tfrac{1}{2} b(v,w) + \tfrac{1}{2}(b,w) \\ &= \tfrac{1}{2} b(v,w) + \tfrac{1}{2} b(w,v) \\ &\quad + \tfrac{1}{2} b(v,w) - \tfrac{1}{2} b(w,v) \\ &= \tfrac{1}{2}\big(b(v,w) + b(w,v)\big) \quad \text{Simétrica} \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\big(b(v,w) - b(w,v)\big) \end{aligned}$$

$\longrightarrow$ antisimétrica

Teorema

Sean V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo de característica cero, y b una forma bilineal simétrica sobre V. Entonces existe una base de V tal que $[b]_B$ es diagonal.

Si b es una forma bilineal simétrica, la **forma cuadrática** asociada a b es la función

$q: V \to \mathbb{k}$ definida por

$$q(v) = b(v, v) \qquad \forall\, v \in V.$$

Ejemplo $V = \mathbb{R}^n$, $b = \langle , \rangle$ canónico

$$q(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \|\vec{x}\|^2$$
$$= x^1x^1 + \dots + x^nx^n = (x^1)^2 + \dots + (x^n)^2$$

Para distintos valores $a \in \mathbb{k}$, tenemos *hipersuperficies* que se denominan **cuádricas**

$$q(v) = a$$

Los puntos de las cuádricas son los que satisfacen la ecuación.

Los distintos tipos de cuádricas dependen de los autovalores de la matriz asociada a la forma bilineal simétrica

Ejemplos

1) Si $V = \mathbb{R}^n$ y tomamos como $b(\vec{x}, \vec{y}) = x^i y^i$ el producto interno canónico, entonces

$$q(\vec{x}) = (x^i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x^i)^2 = (x^1)^2 + \dots + (x^n)^2$$

Si $a = 0$, cuádrica $q(\vec{x}) = 0$

$$(x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2 = 0$$

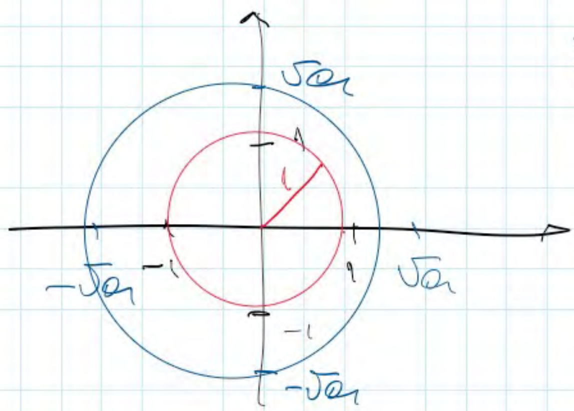
El único vector que la cumple es
$$\vec{0} = (0, 0, \ldots, 0)$$

Si $a < 0$, $q(\vec{x}) = 0$ no tiene sol.

Si $n = 2$ $\quad \vec{x} = (x, y)$

$$q(\vec{x}) = q(x,y) = b((x,y),(x,y))$$
$$= \langle (x,y),(x,y) \rangle = x^2 + y^2$$

Si $a = 1$ $\quad x^2 + y^2 = 1$



$x^2 + y^2 = a$

$a > 0$

$$[b]_E = (b(e_i, e_j)) = (\langle e_i, e_j \rangle) = I$$

$n = 2$ $\quad = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$n = 3$ $\quad$ esfera

2) $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad V = \mathbb{R}^2$

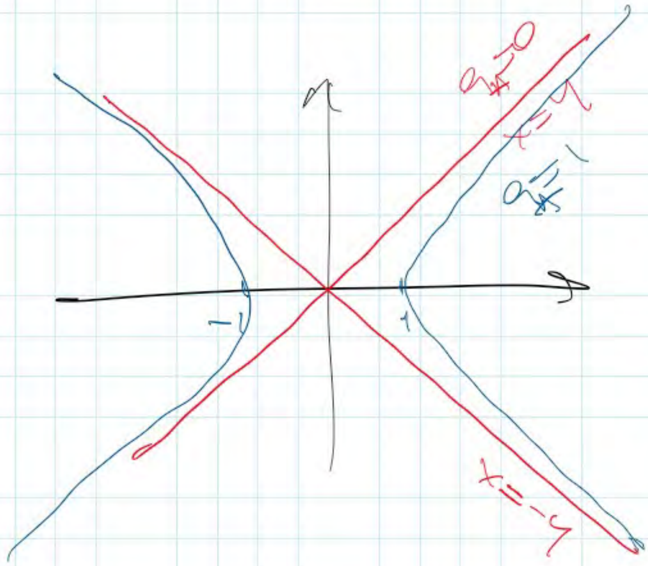
$$b_A((x,y),(u,z)) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x & -y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ z \end{bmatrix} = xu - yz$$

$$q_A(x,y) = b_A((x,y),(x,y))$$

$$\boxed{q_A(x,y) = x^2 - y^2}$$

$$q_A(x,y) = 0$$



$$q_A(x,y) = 1$$

$$x^2 - y^2 = 1$$

3) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$b_A((x,y),(u,z)) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2x - y & -x + 2y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ z \end{bmatrix}$$

$$= (2x - y)u + (-x + 2y)z$$

$$q_A(x,y) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$q_A(x,y) = [x\ y]\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$= 2x^2 - 2xy + 2y^2$$

Diagonalizamos $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

Autovalores

$$P_A(x) = \det\begin{pmatrix} x-2 & 1 \\ 1 & x-2 \end{pmatrix} =$$

$$= (x-2)^2 - 1$$

$$P_A(x) = (x-2)^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-2)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

Autovectores

$\lambda = 1$ ker $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+F_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sist. homog. asos. $-x+y=0$

$\Leftrightarrow \quad x = y$

$$V_1 = \{(x,y) \mid x = y\}$$
$$= \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{x(1,1) \mid x \in \mathbb{R}\}$$
$$= \langle (1,1) \rangle$$

$\underline{\lambda = 3}$ ker $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sist hom. asoc $\quad x + y = 0$

$\Leftrightarrow \quad y = -x$

$$V_3 = \{(x,y) \mid y = -x\}$$
$$= \{(x,-x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$
$$= \langle (1,-1) \rangle$$

Base de autovect.

$$B = \{(1,1), (1,-1)\}$$

es ortogonal con respec al prod. int. canónico

Base ortonormal

$$\|(1,1)\| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

$$\|(1,-1)\| = \sqrt{2}$$

$$B_{on} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1) \right\}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}_{E} = C_{BE}^{-1} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}}_{B} C_{BE}$$

base ortonormal $\Rightarrow$ $C_{BE}^{-1} = C_{BE}^{t}$

$$C_{EB} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C_{EB}^{-1} = C_{EB}^{t} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = I$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\Rightarrow (x,y) = \sqrt{2}\left(\frac{x+y}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) + \sqrt{2}\left(\frac{x-y}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$$

$$(x,y) = \frac{x+y}{\sqrt{2}}\,\frac{(1,1)}{\sqrt{2}} + \left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)\frac{(1,-1)}{\sqrt{2}}$$

$$[(x,y)]_B = \left[\frac{x+y}{\sqrt{2}}, \frac{x-y}{\sqrt{2}}\right]$$

$$q(x,y) = [x,y]_B^t \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_B$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{x+y}{\sqrt{2}} & \frac{x-y}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{x+y}{\sqrt{2}} \\ \frac{x-y}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$= 2x^2 - 2xy + 2y^2$$

$$A = \frac{x+y}{2}$$

$$B = \frac{x-y}{2}$$

$$q(A,B) = [A \ B] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

$$q(A,B) = A^2 + 3B^2$$

Si $a = 1$

$$q(A,B) = A^2 + 3B^2 = 1$$

$$= \frac{A^2}{1^2} + \frac{B^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1$$