

Modelo continuo de localización y diseño para un centro de distribución en ambiente competitivo

Pablo Escalona y Daniela Medina

Centro Integrado de Manufactura y Automatización CIMA-UTFSM,
Universidad Técnica Federico Santa María, Avenida España 1680, Valparaíso, Chile.
pablo.escalona@usm.cl, daniela.medina.miranda@gmail.com

Abstract. En este artículo se estudia la localización y diseño de un centro de distribución en ambiente competitivo en el plano continuo bajo demanda incierta. Se propone un modelo no lineal con restricciones que permite determinar la localización, precios y nivel de servicio ofertados en un ambiente competitivo por un nuevo proveedor. Se desarrollaron dos métodos de resolución, siendo uno de ellos, una modificación del Algoritmo de Weiszfeld. Estos métodos de resolución fueron aplicados a un ejemplo de escala industrial y permitieron explorar el impacto de las condiciones de mercado sobre la localización óptima del nuevo proveedor.

Keywords: Continuous location; competitive facility location models; service-level optimization; uncertainty; nonlinear programming; Weiszfeld-like algorithm.

1 Introducción

Varios factores deben tomarse en cuenta cuando un nuevo proveedor localiza su centro de distribución (C.D.) en una zona geográfica acotada. Los aspectos de mayor importancia son: (i) la existencia de competidores, (ii) la incerteza en el nivel de demanda y (iii) los atributos que los potenciales clientes consideran relevantes en el proceso de selección de proveedores y asignación.

Si en el área geográfica existen proveedores que ofertan el mismo tipo de producto, entonces el C.D. del nuevo proveedor tendrá que competir por una porción del mercado. En este trabajo se asume que los potenciales clientes del nuevo proveedor son tiendas minoristas (retail) de diferentes tamaños y que los proveedores distribuyen un producto no diferenciable. En consecuencia, la estrategia competitiva del nuevo proveedor debe enfocarse en la diferenciación a través del servicio prestado y/o el precio ofertado.

La localización de centros de distribución en mercados competitivos no es un tema estudiado en profundidad [13], a diferencia de la localización de *retail* en ambientes competitivos [12], [6], [9]. La literatura referente a la última se puede clasificar en dos líneas de investigación, a saber, (i) modelos de captura total [11] y (ii) modelos de preferencia proporcional [2], [3]. Uno de los primeros modelos de preferencia proporcional es presentado en [6], la que se basa en la ley de

gravitación de retail de Reilly [12]. Generalizaciones del modelo propuesto en [6] han sido presentadas en [9] y [4]. Otros modelos consideran que la participación de mercado se define como el cociente entre la calidad de la instalación y una función de la distancia al consumidor [2], [3]. Una visión alternativa es propuesta en [5], suponiendo que los clientes comprarán al proveedor más cercano. Estos modelos se basan en dos supuestos, a saber, (i) la demanda es fija y conocida, y (ii) el conjunto de instalaciones factibles y existentes tienen las mismas características de diseño. En resumen, la decisión de compra de un cliente depende de factores de atracción y de repulsión, los que generalmente se refieren a características de diseño de la instalación y la distancia entre ésta y sus clientes [9], [2], [3]. Para un proveedor que requiere instalar un C.D. en un área geográfica acotada se puede utilizar alguna de estas formas funcionales para determinar la proporción de demanda que un cliente le asignará, pero los atributos de atracción y repulsión deberán ser contextualizados.

Se han identificado en la literatura más de veinte atributos relevantes para un minorista en el proceso de selección de proveedores. Según [14] los atributos más importantes son la calidad, entrega a tiempo, desempeño en la entrega y el costo del producto. Los primeros tres atributos tienen relación con el nivel de servicio proporcionado por un proveedor, el cual es una característica de diseño de una instalación. A mayor nivel de servicio se espera mayor utilidad para el cliente, por lo que éste se puede considerar como un factor de atracción. Por otro lado, a mayor costo del producto se espera que la utilidad del cliente disminuya, por consiguiente se puede considerar como un factor de repulsión.

En este artículo se optimiza en forma simultánea las características de diseño y localización para un nuevo C.D. en un plano continuo. Este tipo de optimización ha sido abordada en [1], [8] y [3]. Sólo [3] optimiza en un plano continuo y considera las características de diseño en forma continua.

Modelos de localización en el plano continuo con demanda incierta han sido estudiados en [2] y [3]. En ambos artículos se optimiza la localización de una sola instalación, aunque puede extenderse a múltiples instalaciones. En el marco de este trabajo, se realizará la optimización para una sola instalación, la cual no tiene relación con los proveedores existentes, evitando así la canibalización, estudiada en [10].

Es necesario destacar que los centros de distribución poseen costos que en otras instalaciones no son relevantes, como los costos de almacenamiento e inventarios de seguridad. Los inventarios de seguridad proporcionan un nivel de servicio en términos de disponibilidad ante variaciones en la demanda, los cuales impactan en la entrega a tiempo, el desempeño en la entrega y el costo. En [7] se incorporan costos de inventario de seguridad a los modelos de localización de centros de distribución, siendo el nivel de servicio un parámetro del modelo. En cambio, [8], además de integrar estos costos, considera la optimización del nivel de servicio.

Como principal contribución, este artículo propone un modelo de localización y diseño óptimo de un C.D., cuando sólo se conoce la demanda agregada de los potenciales clientes, los precios ofertados por la competencia y los atributos

relevantes en la selección de un proveedor. La demanda esperada para el nuevo C.D. se representa como una función del nivel de servicio y precios ofertados a cada cliente, siguiendo la formulación en [6]. Por otro lado, se supone que la llegada de un nuevo competidor no produce una expansión de la demanda.

El resto del artículo se ordena como sigue: la Sección 2 presenta el modelo; la Sección 3 estudia los algoritmos de resolución del problema de optimización; la Sección 4 presenta un ejemplo computacional; la Sección 5 expone diferentes casos de estudio; finalmente, la Sección 6 entrega las conclusiones y futuros lineamientos de este trabajo.

2 Formulación del Modelo

Notación:

K	Conjunto de clientes, $i = \{1, ..n\}$,
J	Conjunto de competidores, $j = \{1, ..m\}$,
$N_i =$	$\{ j / \text{El competidor } j \text{ provee al cliente } i \}, \forall i \in K,$
V_i	Demanda agregada del cliente i . $\forall i \in K,$
(x_i, y_i)	Coordenadas de la ubicación del cliente i , $\forall i \in K,$
R	Razón de transporte del nuevo proveedor a un cliente,
S_j^i	Nivel de servicio del proveedor j percibida por el cliente i ,
P_{ij}	Precio negociado por el proveedor j con el cliente i , $\forall i \in K, \forall j \in J,$
λ_i	Percepción que tiene el cliente i del nivel de servicio del nuevo proveedor, $0 < \lambda_i < 1 \quad \forall i \in K,$
S	Costo de emitir una orden de reposición (OR),
I	Porcentaje anual que representa el costo de almacenamiento,
C	Costo unitario del producto puesto en bodega,
Te	Tiempo de reposición de productos en semanas,
σ_i^2	Varianza de la demanda semanal del cliente i , $\sigma_i^2 = (\Delta V_i)^2, \forall i \in K,$
Δ	Porcentaje del volumen anual demandado por el cliente i , $0 \leq \Delta \leq 1,$
(\bar{x}, \bar{y})	Coordenadas del nuevo C.D.,
P_i	Precio ofertado por el nuevo proveedor al cliente i ,
\mathbf{P}	Vector de precios ofertados por el nuevo proveedor, $\mathbf{P} = [P_i]_{ K },$
Ψ	Nivel de servicio del nuevo proveedor, $0.5 \leq \Psi \leq 1,$
d_i	Distancia euclidiana del nuevo proveedor al cliente i ,
Z_Ψ	Inversa de la función de distribución de la normal estándar.

Modelo compacto:

$$\max_{\bar{x}, \bar{y}, \mathbf{P}, \Psi} \left\{ \sum_{i \in K} V_i \mathbb{P}_i P_i - \sum_{i \in K} V_i \mathbb{P}_i (R d_i + C) - g(\Psi, \mathbf{P}) \right\} \quad (1)$$

s.a.

$$\Psi_{min} \leq \Psi \leq \Psi_{max} \quad (2)$$

$$\sum_{i \in K} V_i \mathbb{P}_i (R d_i + C) \leq \sum_{i \in K} V_i \mathbb{P}_i P_i \quad (3)$$

$$0 \leq P_i \leq \max_{j \in N_i} \{P_{ij}\}, \forall i \in K \quad (4)$$

$$(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2 \quad (5)$$

Donde

$g(\Psi, \mathbf{P})$ Función que representa el costo de almacenamiento y el costo de proveer un nivel de servicio Ψ en términos de la disponibilidad de producto y del vector de precios \mathbf{P} .

$$g(\Psi, \mathbf{P}) = \sqrt{\sum_{i \in K} V_i \mathbb{P}_i \frac{S \cdot I \cdot C}{2}} + Z_\Psi \cdot I \cdot C \sqrt{Te \sum_{i \in K} \mathbb{P}_i^2 \cdot \sigma_i^2} \quad (6)$$

\mathbb{P}_i Porcentaje de captura, se interpreta como la proporción de demanda que el cliente i -ésimo asigna al proveedor j -ésimo

$$\mathbb{P}_i = \frac{\frac{\Psi \lambda_i}{P_i^2}}{\frac{\Psi \lambda_i}{P_i^2} + \sum_{j \in N_i} \frac{S_j^i}{P_{ij}^2}}, \quad \forall i \in K \quad (7)$$

El objetivo de este modelo es maximizar los beneficios obtenidos por el C.D. representados por (1). La restricción (2) se refiere a las cotas del nivel de servicio impuestas por el mercado. Por otro lado, la restricción (3) hace referencia a cubrir los costos variables más relevantes. La expresión (4) busca que el precio de entrada del nuevo proveedor no supere el máximo precio que cobra la competencia a cada cliente y define la no-negatividad de los precios ofertados. La restricción (5) expresa la naturaleza de las variables de localización.

3 Métodos de Resolución

3.1 Programa computacional en MATLAB

Debido a la no linealidad del problema se hizo uso de la herramienta de optimización de MATLAB *fmincon*. Este comando permite encontrar el mínimo local de una función multivariable no lineal con restricciones lineales y no lineales.

3.2 Algoritmo de Weiszfeld modificado

Para que un vector $v^* = (\bar{x}^*, \bar{y}^*, \mathbf{P}^*, \Psi^*)$ sea máximo (global o local) de la función (1) debe satisfacer a las condiciones de primer orden (CPO). Para facilitar la notación, se utilizarán los vectores $\alpha \triangleq (\bar{x}, \bar{y})$, $\beta \triangleq (\mathbf{P}, \Psi)$ y $\beta_i \triangleq (P_i, \Psi)$. El algoritmo para este método es el siguiente:

1. Comenzar con un vector inicial $v^{(0)} = (\bar{x}^{(0)}, \bar{y}^{(0)}, \mathbf{P}^{(0)}, \Psi^{(0)}) = (\alpha^{(0)}, \beta^{(0)})$. Iniciar iteración con $t = 0$.

2. Calcular la siguiente iteración $v^{(t+1)} = (\bar{x}^{(t+1)}, \bar{y}^{(t+1)}, \mathbf{P}^{(t+1)}, \Psi^{(t+1)})$ como sigue:

$$\bar{x}^{(t+1)} = \frac{\sum_{i \in K} x_i H_i(\alpha^{(t)}) \mathbb{P}_i(\beta_i^{(t)})}{\sum_{i \in K} H_i(\alpha^{(t)}) \mathbb{P}_i(\beta_i^{(t)})}, \quad \bar{y}^{(t+1)} = \frac{\sum_{i \in K} y_i H_i(\alpha^{(t)}) \mathbb{P}_i(\beta_i^{(t)})}{\sum_{i \in K} H_i(\alpha^{(t)}) \mathbb{P}_i(\beta_i^{(t)})},$$

$$P_i^{(t+1)} = \Gamma(\alpha^{(t)}, \beta^{(t)}) + \sqrt{\frac{\Psi^{(t)}}{10 \mathbb{P}_i(\beta_i^{(t)}) l_i} + \Gamma(\alpha^{(t)}, \beta^{(t)})^2}$$

y $\Psi^{(t+1)}$ como solución de la ecuación

$$\sum_{i \in K} \left(\frac{\mathbb{P}_i(\mathbf{P}^{(t)}, \Psi) V_i}{\Psi} \left(P_i - C - R d_i(\alpha^{(t)}) \right) \left(1 - \mathbb{P}_i(\mathbf{P}^{(t)}, \Psi) \right) \right) - \frac{\partial g(\mathbf{P}^{(t)}, \Psi)}{\partial \Psi} = 0 \quad (8)$$

3. Si $v^{(t+1)}$ es infactible, entonces $v^{(t+1)}$ es igual a un punto del intervalo $[v^{(t)}, v^{(t+1)}]$ que se encuentre en el límite de la región factible.
4. Si la distancia entre dos vectores de iteración consecutivos $v^{(t)}$ y $v^{(t+1)}$ (medido bajo cierta norma) es menor que una tolerancia dada ε o $t > t_{max}$, entonces se acepta $v^{(t+1)}$ como un máximo local. Si no se cumple la condición anterior, $t = t + 1$ y volver al paso 2.

4 Ejemplo computacional de escala industrial

Esta sección introduce un ejemplo de escala industrial que permite comparar el desempeño de los métodos de resolución. El ejemplo corresponde a un distribuidor avícola que requiere implementar un nuevo C.D. en una región geográfica acotada. En esta región existen cinco empresas competidoras y un total de treinta y nueve retails (clientes) de diferentes tamaños.

Todos los resultados han sido obtenidos en sistema operativo Ubuntu 10.04.3 en un procesador Intel(R) Core(TM) 2Duo, 2.53 [GHz], 6.0 [Gb] de memoria RAM. Los programas han sido implementados en MATLAB 7.10.0.

Para todos los experimentos presentados en este artículo se utilizan los valores $S = 100.000$ [\$/OR], $I = 30$ [%/año], $C = 1.000$ [\$/un], $R = 28$ [\$/un/km], $Te = 2$ [semana], $\sigma_i^2 = (0.02V_i)^2$, $\Psi_{min} = 0.5$, $\Psi_{max} = 1$ y vector inicial $(\bar{x}^{(0)}, \bar{y}^{(0)}, \Psi^{(0)}) = (0, 0, 0.75)$ con $P_i^{(0)} = 1000 \quad \forall i \in K$.

Como se puede observar en la Tabla 1, los resultados óptimos para el problema de localización y diseño son similares para ambos métodos utilizados. Respecto al nivel de servicio óptimo Ψ^* es muy cercano al máximo Ψ_{max} y la localización óptima del nuevo C.D. (\bar{x}^*, \bar{y}^*) se encuentra en el cuadrante del cliente de mayor poder de compra. En cuanto al tiempo de ejecución y número de iteraciones, es el Algoritmo de Weiszfeld el que tiene un mayor tiempo computacional e iteraciones.

	<i>fmincon</i> A. de Weiszfeld	
Ψ^*	0.9914	0.9917
\bar{x}^*	4.5719	4.5728
\bar{y}^*	4.9637	4.9644
Valor F.O.[mill.]	47.028	47.028
No. de iteraciones	40	243
Tiempo de ej. [seg]	1.2773	2.641

Tabla 1. Comparación algoritmos

5 Efecto de las condiciones de mercado sobre la localización óptima

Se diseñaron tres experimentos para cuantificar el impacto de las condiciones del mercado sobre la localización óptima del nuevo C.D.. En particular, el impacto se mide en base a la distancia óptima entre la nueva instalación y el cliente de mayor poder de compra. Los experimentos se implementaron en un mercado reducido, subconjunto del ejemplo industrial presentado en la sección anterior, de tal forma de facilitar la interpretación de los resultados. La Tabla 2 contiene los parámetros utilizados en los tres experimentos descritos a continuación.

Cliente i	V_i	λ_i	S_1^i	S_2^i	P_{i1}	P_{i2}
1	40000	0.5	1	0.93	1500	1350
2	10000	1	0.70	0.65	1950	1890
3	10000	1	0.70	0.68	1780	1710
4	10000	1	0.70	0.75	1490	1685

Tabla 2. Datos experimentos

5.1 Experimento 1: Impacto del precio de la competencia

Este experimento explora el impacto del precio de los competidores sobre la localización óptima de la nueva instalación. Para esto, se modifica el precio ofertado por el competidos 1 al cliente 1 (P_{11}) entre \$1000 y \$2000 a pasos de \$50, determinando la localización óptima en cada situación puntual de negociación.

La Figura 1(a) presenta la evolución de la distancia óptima al cliente 1 en función del precio ofertado P_{11} . En esta figura se puede apreciar que la localización óptima del nuevo centro se modifica, debido a que las participaciones de mercado cambian al variar el precio ofertado por el proveedor 1. En particular, cuando el precio ofertado por el proveedor 1 varía entre \$1000 y \$1350 el cliente da mayor cuota al proveedor 2 y al nuevo competidor, debido a que éstos mantienen sus precios, mientras que el proveedor 1 lo aumenta. En este intervalo el precio óptimo ofertado por el nuevo proveedor al cliente 1 es igual al precio ofertado por el proveedor 2, equivalente al máximo precio. Por otro lado, cuando el precio que oferta el proveedor 1 al cliente 1 supera los \$1350, el cliente retira cuota al proveedor 1 y al nuevo competidor, traspasándola al proveedor 2.

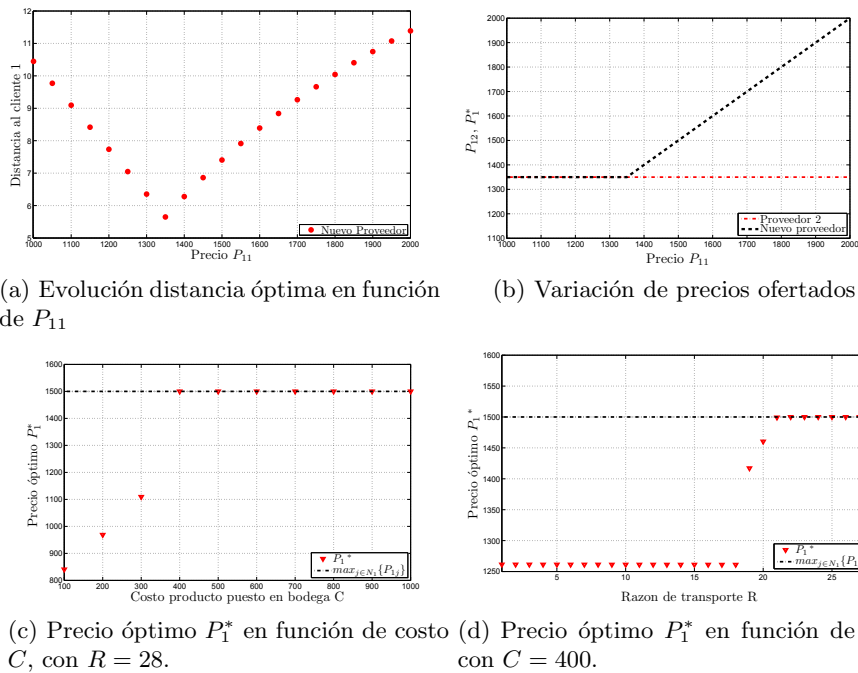


Figura 1. Análisis Experimento 1.

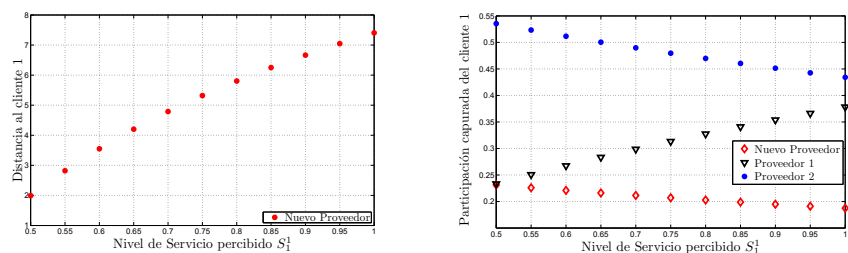
Esto se debe a que el proveedor 2 mantiene su precio, en tanto que el proveedor 1 y el nuevo competidor lo aumentan. Para este intervalo, nuevamente el precio óptimo del nuevo proveedor es igual al precio máximo ofertado que, en este caso, es impuesto por el proveedor 1.

En este experimento el precio ofertado por el nuevo proveedor al cliente 1, siempre es igual al máximo de la competencia i.e. $P_1^* = \max_{j \in N_1} \{P_{1j}\}$. Esto evidencia que la restricción (4) siempre está activa (Figura 1(b)). Se puede verificar que la activación de la restricción (4) no sólo depende de las condiciones de mercado sino también de la estructura de costos que posea el nuevo C.D., i.e. del costo unitario del producto puesto en bodega C y la razón de transporte R . En las Figuras 1(c) y 1(d) se puede visualizar que existe una estructura de costos de corte $\{\bar{R}, \bar{C}\}$ tal que si $R > \bar{R}$ o $C > \bar{C}$, el precio ofertado al cliente i -ésimo es siempre el máximo, i.e., $P_i^* = \max_{j \in N_i} \{P_{ij}\}, \forall i \in K$. En particular, para el set de datos del mercado reducido $\{\bar{R}, \bar{C}\}$ corresponde a $\{21, 400\}$.

En resumen, la localización óptima del nuevo C.D. depende del precio ofertado por la competencia y, en menor medida, de su estructura de costos.

5.2 Experimento 2: Impacto del nivel de servicio percibido

De la misma manera en que los precios ofertados por los competidores afectan la localización de la instalación, la percepción que tiene el cliente del nivel de



(a) Evolución distancia óptima en función de S_1^1 . (b) Participación capturada del cliente 1 en función de S_1^1 .

Figura 2. Análisis Experimento 2.

servicio de un proveedor constituye otro aspecto relevante al determinar la localización del nuevo C.D..

Con el propósito de ilustrar el efecto del nivel de servicio percibido sobre la localización óptima, se varía el nivel de servicio del competidor 1 percibido por el cliente 1, S_1^1 , entre 0.5 y 1 manteniendo constante el resto de los parámetros de la Tabla 2.

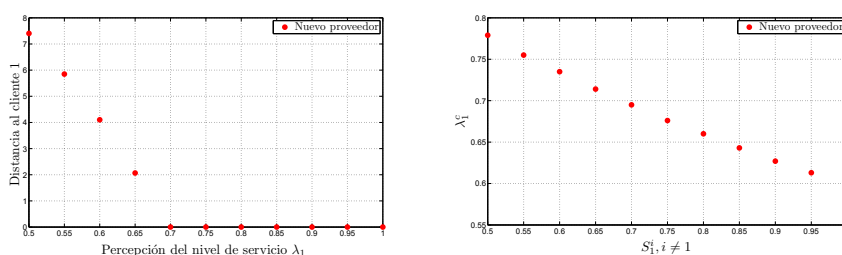
Se aprecia en la Figura 2(a) que, a medida que el nivel de servicio percibido aumenta, la distancia óptima asociada a dicho cliente aumenta. Esto resulta consistente con la intuición: si el cliente percibe un alto nivel de servicio en la competencia, entonces entregará mayor cuota a dicho proveedor, disminuyendo la participación de la nueva instalación.

Para corroborar el resultado anterior, se presenta en la Figura 2(b) la evolución de la participación de mercado de los distintos agentes, como función del nivel de servicio percibido S_1^1 . Como era de esperarse, a mayor nivel de servicio percibido, menor es la participación de mercado capturada por la nueva instalación, es decir la cantidad asignada por el cliente al nuevo proveedor es menor. De esta manera, para disminuir los costos de transporte hacia los demás clientes, la localización óptima puede encontrarse más alejada del cliente 1.

5.3 Experimento 3: Impacto de la percepción del nivel de servicio

El propósito de este experimento es estudiar la localización óptima, como función de la percepción que tiene un cliente del nivel de servicio del nuevo proveedor. Para esto, se varía la percepción del cliente 1, λ_1 , entre 0.5 y 1.

Como se puede intuir, la Figura 3(a) indica que la distancia al cliente de mayor poder de compra disminuye cuando su percepción del nivel de servicio aumenta. Este comportamiento se produce hasta un nivel de percepción tal que la distancia a este cliente es mínima. A este nivel se denominará “percepción de corte” (λ_i^c). Cuando la percepción del cliente es mayor que la percepción de corte, la decisión de localización no varía. En cambio, cuando la percepción del cliente es menor que la percepción de corte, el nuevo proveedor debería rea-



(a) Evolución distancia óptima en función de λ_1 (b) Cambio en percepción de corte λ_1^c al variar $S_1^i, \forall i \neq 1$.

Figura 3. Análisis Experimento 3.

lizar un esfuerzo para llegar a este valor de corte de tal forma que no exista arrepentimiento futuro en la decisión de localización.

Dada la relevancia de la percepción de corte, se procedió a analizar cómo varía ésta al cambiar las condiciones de mercado. En particular, se varió el nivel de servicio del proveedor 1 percibido por los clientes pequeños $S_1^i, \forall i \neq 1$ y se busca el valor de λ_1^c que produce la mínima distancia al cliente de mayor poder de compra. En la Figura 3(b) se puede notar, que al aumentar el nivel de servicio percibido por los clientes 2, 3 y 4, el valor de λ_1^c disminuye, i.e. se requiere una menor percepción del cliente 1 para alcanzar la distancia mínima a éste.

6 Conclusiones y trabajo futuro

En este artículo se presenta un nuevo modelo de localización continua y diseño para un C.D. en ambiente competitivo cuyo objetivo es determinar la localización, el nivel de servicio y los precios ofertados por un nuevo proveedor de tal forma de maximizar su beneficio, dada la existencia de un mercado competitivo.

El ingreso esperado del nuevo proveedor y sus costos dependen de la demanda capturada en este ambiente competitivo. Esta demanda capturada está relacionada con la forma en que los clientes seleccionan y asignan cuotas de mercado a sus proveedores. El modelo aquí presentado considera que el comportamiento de un cliente depende de atributos de atracción y de rechazo. El atributo de atracción es representado por la percepción del nivel de servicio del proveedor y el atributo de rechazo se relaciona con los precios ofertados.

El modelo propuesto en este artículo es de carácter no lineal sujeto a restricciones no lineales. Para su resolución numérica se proponen dos métodos. El primer método busca la ubicación y diseño óptimo a través del uso de instrucciones prediseñadas en un software de análisis matemático. El segundo método propuesto es una modificación del algoritmo de Weiszfeld. Esta modificación consiste en incluir las restricciones del problema en cada iteración del algoritmo.

Se estudió la localización óptima del nuevo C.D. al modificar las características del mercado. Los resultados relevantes fueron: 1) Existe una estruc-

tura de costos de corte tal que si el costo del producto puesto en bodega y/o la razón de transporte son mayores a ese nivel, los precios ofertados a cada cliente son iguales a los precios máximos ofrecidos por la competencia. 2) Si un cliente mejora su percepción de un competidor, la ubicación óptima del nuevo C.D. tiende a alejarse de ese cliente. 3) Existe un nivel de percepción para cada cliente tal que la distancia al C.D. es mínima, la cual se denomina “percepción de corte”. Si la percepción de un cliente es mayor que su percepción de corte la decisión de localización es óptima en el largo plazo. En cambio, si la percepción del cliente es menor que su percepción de corte no se asegura que la localización encontrada sea óptima en el largo plazo.

Como posibles extensiones de este trabajo se pueden mencionar (i) la incorporación de costos fijos, tales como el valor del terreno, (ii) desarrollo de un modelo que permita determinar la percepción de corte de cada cliente en el mercado y (iii) implementación del modelo en AMPL o GAMS haciendo uso de solver para problemas no lineales.

References

1. R. Aboolian, O. Berman, and D. Krass. Competitive facility location and design problem. *European Journal of operational research*, 182:40–62, 2007.
2. T. Drezner. Optimal continuous location of a retail facility, facility attractiveness, and market share: an interactive model. *Journal of retailing*, 70:49–64, 1994.
3. J. Fernández, B. Pelegrín, F. Plastria, and B. Tóth. Solving a huff-like competitive location and design model for profit maximization in the plane. *European Journal of operational research*, 179:1274–1287, 2007.
4. M.J. Hodgson. A location-allocation model maximizing consumers’ welfare. *Regional Studies*, 15:493–506, 1981.
5. H. Hotelling. Stability in competition. *The Economic journal*, 39:41–57, 1929.
6. D.L. Huff. Defining and estimating a trade area. *Journal of marketing*, 28:34–38, 1964.
7. Z.J. Max Shen and L. Qi. Incorporating inventory and routing costs in strategic location models. *European Journal of Operational Research*, 179(2):372–389, 2007.
8. P.A. Miranda and R.A. Garrido. Inventory service-level optimization within distribution network design problem. *International Journal of production economics*, 122:276–285, 2009.
9. M. Nakanishi and L.G. Cooper. Parameter estimates for multiplicative competitive interaction models: least square approach. *Journal of marketing research*, 11:303–311, 1974.
10. F. Plastria. Avoiding cannibalisation and/or competitor reaction in planar single facility location. *Journal of the operations research*, 48:148–157, 2005.
11. F. Plastria and E. Carrizosa. Optimal location and design of a competitive facility. *Mathematical programming*, 100:247–265, 2004.
12. W.J. Reilly. *The law of retail gravitation*. New York, W.J: Reilly, Inc., 1931.
13. C.S. Revelle and H.A. Eiselt. Location analysis: A synthesis and survey. *European Journal of Operational Research*, 165:1–19, 2005.
14. R. Verma and M.E. Pullman. An analysis of the supplier selection process. *International Journal of management science*, 26:739–750, 1998.