Método de Sylvanus Thomson

para la

ENSEÑANZA DE LA ÓPTICA GEOMÉTRICA

El método adoptado por la generalidad de los tratados elementales de Física para establecer la fórmula de las lentes, y la forma clásica que se da á la ecuación correspondiente, son evidentemente defectuosos por diferentes razones que no habrán escapado á los profesores encargados de enseñar los principios de la óptica geométrica, ni á los profesionales que, sin haberse ejercitado especialmente en este punto, han tenido que manipular instrumentos de óptica, en vista de sus aplicaciones á la topografía, la mineralogía, la fotografía, etc. . . .

El cálculo riguroso de la distancia focal en función de los radios de curvatura y de los índices de refracción, que se encuentra en los mejores autores, como Daguin, es tan complicado que puede decirse que está fuera del alcance de los principiantes. Para simplificarlo se emplean diferentes artificios que, bajo la aparente ventaja de suprimir cálculos laboriosos, introducen nuevas dificultades, sea porque suponen conocimientos de trigonometría, ó porque encierran aproximaciones mal justificadas, de manera que el alumno que repite la demostración del texto se da cuenta de que comete errores sin poder apreciar la magnitud de éstos y, si reflexiona un poco, adquiere la convicción de que se le ha hecho hacer un verdadero escamoteo.

Esta crítica se aplica, entre otros tratados, al de Ganot y por consiguiente, también á la serie bastante numerosa de aquellos que lo han copiado más ó menos servilmente. En otras obras serias y completas como la Física Médica de Gariel, p. e., se ha evitado la dificultad suprimiendo toda demostración analítica.

Creemos que esto se puede hacer sin muchos inconvenientes. Hablemos pues de distancia focal sin definir los elementos que la constituyen, y sobre esta base, sentemos la fórmula de los focos conjugados. Pero aquí se presentan otras dificultades: se trata de desenredar una verdadera madeja de ecuaciones ó de escamotear como precedentemente los términos embarazosos.

Por otra parte, de cualquier modo que se llegue al resultado final siguiendo los procedimientos ortodoxos, no se habrá penetrado el mecanismo íntimo de la refracción de la luz en las lentes. Como las manipulaciones geométricas y algebraicas efectuadas inspiran confianza, dan el sentimiento de la exactitud, no se dudará de que el fenómeno se produzca como lo indica la ecuación obtenida, pero de esto á comprenderlo, á verlo, á representárselo tal cual es, hay un verdadero abismo.

Pero á esto se puede objetar, no sin razón, que lo esencial es conocer la fórmula y poderla aplicar. Efectivamente en la práctica no se requiere otra cosa. Desgraciadamente, si no se recuerdan de memoria los diferentes casos á que dan lugar las lentes convergentes y divergentes con objetos reales y virtuales, se cometerán probablemente, errores debidos á confusiones de signo, por falta de un criterio seguro y cómodo que permita fijar el sentido convencional en que deben medirse las distancias de la lente al objeto y á su imagen; de manera que, dado un sistema un poco complicado de lentes, será difícil prever *rápidamente* sus propiedades ópticas. En cuanto á la fórmula clásica de los espejos, se establece sin muchas dificultades, pero su empleo es incómodo también, sobre todo cuando se trata de una combinación de lentes y espejos.

Todos estos inconvenientes pueden salvarse adoptando el método sencillo, elegante y *natural*, ideado y preconizado por Sylvanus Thomson, para el estudio de la óptica geométrica. Como este método, á pesar de haber sido publicado por su autor, hace más de quince años, en el *Philosophical Magazine*, no se ha vulgarizado todavía, hemos creído conveniente darlo á conocer mediante la exposición elemental que sigue, dedicada á los profesores de Física y á las personas que se ocupan de óptica á quienes podrá ser útil. Sólo hemos desarrollado los principios fundamentales y la parte que se refiere á las lentes esféricas delgadas; pero esto bastará sin duda, para dar una idea general de la aplicabilidad del procedimiento á casos complicados.

*

1. — **Curvatura de las ondas luminosas.** — Un punto *P* (fig. 1) que emite dentro de un medio homogéneo haces de luz divergente, es el centro de una serie de ondas luminoso esféricas, cuyo radio aumenta progresivamente á medida que se alejan de dicho punto. De manera que á poca distancia de *P*, estas ondas están constituidas por esferas de curvatura muy pronunciada, mientras que, á mayor distancia, la curvatura es más débil. Á una distancia muy considerable, las ondas son casi planas, ó en otros términos, su curvatura es casi nula. En una palabra, la curvatura disminuye á medida que aumenta la distancia, ó sea el radio de la esfera.

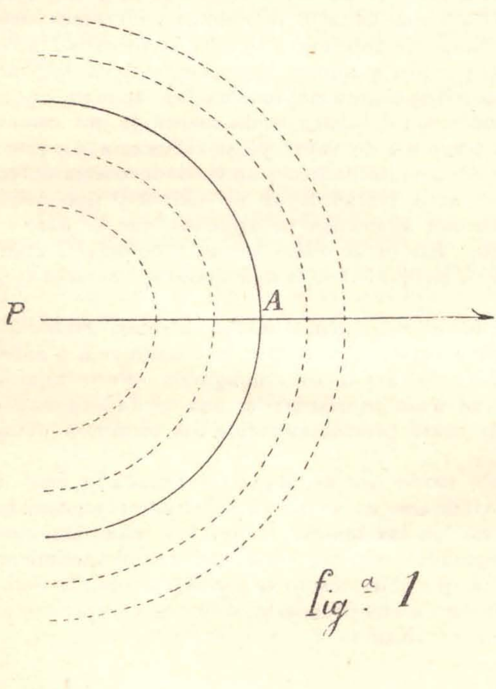
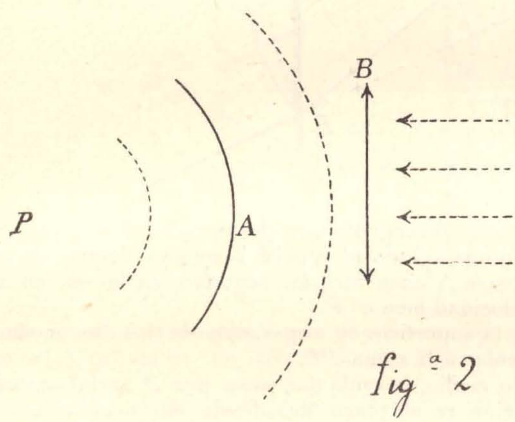


fig.ª 1

Para dar á este hecho una expresión más exacta, que esté de acuerdo con la noción intuitiva de curvatura, esta se define diciendo que es igual á la unidad dividida por el radio de la esfera. Por consiguiente en un puno A situado á una distancia $PA = r$ de P, la curvatura R de la onda será

$$R = \frac{1}{r}$$

También puede suceder que las ondas esféricas, en lugar de propagarse de P hacia A en el sentido de la flecha se dirijan en el sentido opuesto, y tiendan á converger al punto P desde centros de emisión situados á la derecha de A. Tal sería p. e., el caso de un haz de luz solar que incidiera como lo indican las flechas punteadas (fig. 2) sobre una lente convergente colocada en B. Las ondas concentradas por la lente sobre el punto P, al llegar á A, tendrían como precedentemente una curvatura



$$R = \frac{1}{r}$$

Para que el valor de la curvatura en un punto A determine por completo la naturaleza geométrica de la onda en dicho punto, es necesario, pues, que este valor dé á conocer no solamente la distancia de A al centro P de la onda, sino también que fije el sentido en que esta se propaga, para que no pueda haber confusión posible entre las ondas convergentes y divergentes que tienen el mismo centro.

A tal efecto se establece la siguiente convención: cuando una onda es divergente se da á la curvatura el signo —; cuando es convergente, el signo +. Así, en el primer caso considerado la curvatura será

$$R = -\frac{1}{r}$$

en el segundo

$$R' = +\frac{1}{r}$$

Queda todavía un caso intermedio entre los precedentes: el de una onda plana constituida por un haz de rayos paralelos; entonces, como no hay convergencia ni divergencia, la curvatura, que no puede ser positiva ni negativa, debe ser nula; y efectivamente un plano puede asemejarse á una esfera de radio infinito; le corresponde, por consiguiente la curvatura

$$R'' = \frac{1}{\infty} = 0$$

2. — **Refracción al través de una superficie plana.** — Cualquier circunstancia que aumente ó disminuya la velocidad con que se propaga la onda, modifica la curvatura de ésta y produce el fenómeno de la refracción.

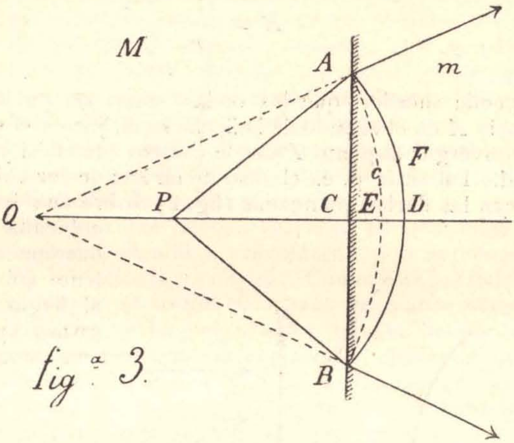


fig.ª 3.

Consideremos, p. e., una onda divergente que, después de haberse propagado desde un centro P con una velocidad igual á la unidad, dentro de un medio cualquiera M (aire, p. e.,) encuentra un segundo medio m, en el cual se propaga con una velocidad menor V.

Supongamos además que la superficie de separación de los dos medios sea un plano AB perpendicular á la recta PC.

Si no existiera el segundo medio, la onda que pasa por A sería una esfera de centro P, cuya sección en el plano del dibujo daría el arco de círculo $A\,DB$, es decir que, durante el tiempo empleado por la luz para recorrer la distancia PA, la onda llegaría en la dirección PC á la distancia $PC + CD = PA$.

Pero en realidad, sucede lo siguiente: si t, t', t'' son los tiempos que emplea la onda para recorrer la distancia PA, PC, PD en el medio M (siendo $t = t + t''$), — cuando se interpone el medio m la onda recorre por una parte la distancia PA durante el mismo tiempo t, y por otra parte, durante el intervalo igual $t' + t''$, la distancia PE que vamos á determinar. Después del intervalo t' la onda llega como precedentemente á C pero durante el intervalo t'' no puede propagarse sino hasta una distancia CE menor que CD. Más exactamente, si $V = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots,$ CE será igual á la mitad, á un tercio, á un cuarto de la distancia CD que sería recorrida durante el mismo tiempo con la velocidad 1. En general.

$$CE = v.\, CD \qquad (1)$$

Análogamente, en otras direcciones tales como PF, la influencia retardadora del medio m, impide que la onda se propague durante el tiempo t hasta F, y reduce su recorrido en una longitud GF, tanto mayor cuanto más próximo al eje PD se encuentre el punto F.

Supondremos que la onda modificada $AGEB$, conserva una forma esférica; para convencernos de la pequeñez del error así cometido, podemos construir gráficamente una serie de puntos tales como G, teniendo en cuenta la diferencia de velocidad en los dos medios, como lo hicimos para establecer la fórmula (1); veremos que la curva resultante $AGEB$ afecta una forma sensiblemente circular. Quiere decir esto que la luz se propaga en el medio m como si partiera del centro Q más distante de AB que P; en otros términos el haz refractado será menos divergente que en el primer medio.

Esto nos demuestra que los medios que disminuyen la velocidad de la luz producen un efecto convergente.

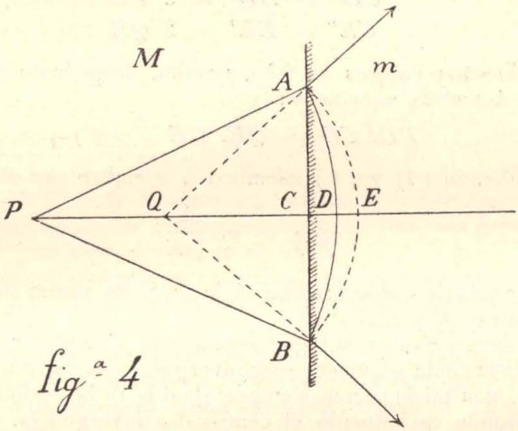


fig.ª 4

De igual manera se probaría que los medios que aumentan la velocidad de la luz producen un efecto divergente, como lo pone de manifiesto la fig. 4.

En este caso se tendría siempre $CE = v.\ CD$, pero CE sería mayor que CD.

3.—**Curvatura de la onda refractada.**—La fórmula (1) tiene gran importancia. En efecto, en las ondas consideradas, CE y CD son flechas correspondientes á la misma cuerda AB, y vamos á demostrar que, en consecuencia son proporcionales á la curvatura, de manera que la fórmula (1) será equivalente á esta otra:

$$R' = v.R \qquad (2)$$

siendo R y R' las curvaturas antes y después de la refracción.

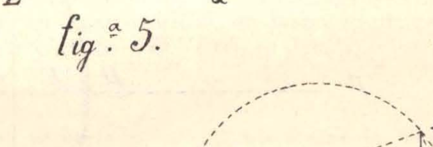


fig.ª 5.

Completemos (figs. 5 y 6) el trazado de los semicírculos AD, AE de las figuras precedentes que tienen por centro P y Q, para obtener los puntos D', E' diametralmente opuestos á D y E. En los triángulos

fig.ª 6.

rectángulos DAD' EAE' las alturas AC son medias proporcionales entre los segmentos que determinan sobre cada hipotenusa. Luego:

$$\overline{CA}^2 = CD'\ CD = CE'\ CE, \qquad (3)$$

pero si la altura AC es pequeña con respecto á los radios de los dos círculos (lo cual sucederá siempre que no sean muy anchos los haces cuya refracción se estudia) se tendrá con bastante aproximación:

$$CD' = DD' = 2\ PD$$
$$CE' = EE' = 2\ QE$$

Sustituyendo estos valores en (3), resulta, después de suprimir el factor 2 común á ambos miembros:

$$PD.\ CD = QE.\ CE \qquad (4)$$

Ahora, dividiendo (1) y (4) miembro á miembro, se obtiene:

$$\frac{1}{PD} = v.\ \frac{1}{QE}$$

relación que equivale evidentemente á la (2), en virtud de la definición de las curvaturas R y R.

Se demostraría sin dificultad que esta misma fórmula conviene también al caso en que la onda incidente es convergente, es decir tiene una curvatura positiva, con tal de tomar siempre igual á 1 la velocidad de la luz en el medio donde está situado el centro de convergencia.

4.—**Refracción de una onda plana cuando la superficie de separación de los dos medios es esférica.** — Para fijar las ideas, supongamos que el segundo medio m sea convexo con respecto al primero M y que la luz tenga velocidades 1 y v en los medios M y m respectivamente.

Si el medio M existiese solo, la onda incidente llegaría simultáneamente á los puntos A, B, C (fig. 7), empleando un tiempo t para recorrer la distancia DC, pero en el caso actual, durante este mismo tiempo, por razones análogas á las que indicamos en —2—, recorre una distancia menor DE, tal que

$$DE = v.\ DC \qquad (5)$$

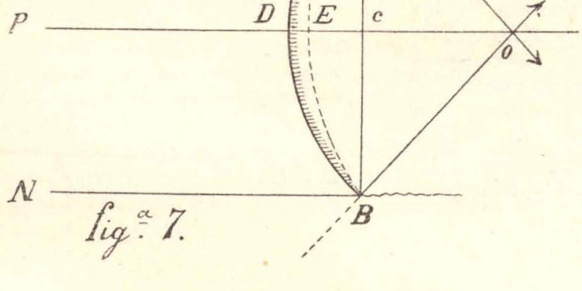


fig.ª 7.

La superficie AEB de la onda modificada, en lugar de ser plana, se vuelve curva; toma aproximadamente la forma de una esfera cuyo centro se encuentra en O. El haz de rayos primitivamente paralelos converge entonces hacia ese punto O, que se llama foco del medio refringente.

Según lo expuesto en — 3 —, la curvatura R de dicho medio y la de la onda F son proporcionales á las flechas CD y CE, de manera que:

$$\frac{F}{R} = \frac{CE}{CD} = \frac{CD - DE}{CD}$$

ó en virtud de (5):

$$\frac{F}{R} = \frac{CD - v.\, CD}{CD} \qquad (6)$$

Luego: $$F = R\,(1 - v) \qquad (7)$$

Mediante esta fórmula se calculará fácilmente la curvatura que imprime á una onda plana un medio refringente limitado por una superficie esférica convexa, cuya curvatura propia es R.

Como la onda refractada, en este caso, es convergente, el valor de F en la fórmula (7) deberá ser positivo. Para esto, basta que se convenga en atribuir el signo + á la curvatura R del medio m. Si la superficie ADB fuera convexa, se obtendría una fórmula idéntica á la (7); pero entonces la onda refractada sería divergente, el valor de F debería ser negativo, y en consecuencia sería preciso atribuir á la curvatura R el signo —.

Mediante estas convenciones, la misma fórmula (7) puede aplicarse todavía cuando v es mayor que 1 (es decir cuando el segundo medio es menos refringente que el primero). Entonces F resulta negativo cuando la superficie ADB es convexa y positivo en el caso contrario, lo cual está conforme con la experiencia. Además estos resultados podrían demostrarse directamente con solo suponer que el punto E de la fig. 7 cae á la derecha de C, por ser mayor el trayecto recorrido por la onda en m que en M, durante el mismo tiempo t.

En una palabra, para que la fórmula (7) convenga á todos los casos basta que se dé el signo + á la curvatura de m, cuando este medio presenta su convexidad hacia los rayos incidentes, y el signo — en el caso contrario.

La curvatura F impresa á una onda plana por un medio refringente se llama *curvatura focal* de dicho medio; no hay que confundirla con la curvatura propiamente dicha R.

5.—**Refracción de una onda cualquiera.**—Este caso difiere poco del precedente; pero antes de la interposición del medio refringente m, la onda tiene la forma esférica $AC'B$, en lugar de ACB, de manera que en la fórmula (5) hay que reemplazar CD por $CD - CC'$, es decir que:

$$DE = v.\,(CD - CC')$$

La curvatura F_2 de la onda refractada se calculará por la fórmula siguiente, modificación de la (6):

$$\frac{F_2}{R} = \frac{CD - v\,(CD - CC')}{CD}$$

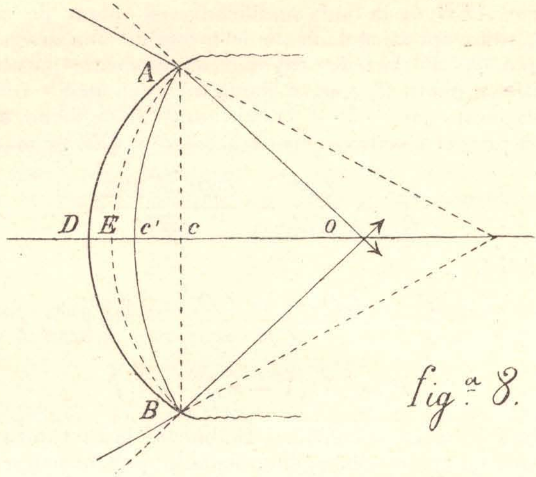


fig.ª 8.

Pero las flechas CD y CC' son proporcionales á R y á la curvatura primitiva F_1 de la onda; por consiguiente:

$$\frac{F_2}{R} = \frac{R - v\,(R - F_1)}{R}$$

$$F_2 = R - v\,R + v\,F_1 = R\,(1 - v) + v\,F_1$$

ó en virtud de (7):

$$F_1 = F + v\,F_1 \qquad (8)$$

es decir que la onda, al ser refractada, sufre dos efectos: 1º su curvatura F_1 adquiere el valor $v\,F_1$ como si la superficie de la separación de los dos medios fuera plana; 2º á esta curvatura se añade la curvatura focal del medio refringente.

La fórmula (8) se aplica á todos los casos, con tal de dar á las curvaturas los signos que les corresponden.

6.—**Refracción de las lentes delgadas.** — La curvatura de una onda que atraviesa una lente se modifica en general de tres maneras sucesivas; 1º á la incidencia; 2º á consecuencia del trayecto recorrido en el interior de la lente; 3º á la emergencia. Pero cuando la lente es de poco espesor, el 2º de los efectos enumerados es despreciable. Calcularemos el 1º y el 3º, suponiendo para mayor sencillez que la lente es biconvexa ó bicóncava y que sus dos radios de curvatura r son iguales. En tal caso, las dos curvaturas miradas desde un mismo punto parecerán de naturaleza opuesta, de manera que si la primera es positiva, la segunda será negativa y viceversa. Llamaremos R á la primera y $-\,R$ á la segunda.

Sea F_1 la curvatura inicial de la onda, F_2 la que tiene después de la incidencia y F_3 después de la emergencia; v la velocidad de la luz dentro de la lente, suponiendo igual á 1 la velocidad en el aire. Esta última será igual á $\frac{1}{v}$, cuando se suponga la primera igual á 1 como convendrá hacerlo cuando se quiera calcular el efecto 3º.

La curvatura focal de la primera cara de la lente será :

$$F = R\,(1 - v)$$

la de la segunda :

$$F' = -R\left(1 - \frac{1}{v}\right).$$

Tendremos además, en virtud de (8):

$$F_2 = R\,(1 - v) + v\,F_1$$

$$F_3 = -R\left(1 - \frac{1}{v}\right) + \frac{1}{v}\,F_2$$

Eliminando á F_2 entre estas ecuaciones, resulta

$$F_3 = -R + \frac{R}{v} + \frac{R}{v} - R + F_1$$

$$F_3 = 2\,R\left(\frac{1}{v} - 1\right) + F_1 \qquad (9)$$

En particular, si la curvatura inicial es nula :

$$F_0 = 2\,R\left(\frac{1}{v} - 1\right) \qquad (10)$$

siendo F_0 la curvatura focal del conjunto de la lente, ó sea la curvatura que ésta imprime á un haz de rayos paralelos.

Si f_0 es la distancia de la lente al centro de la onda emergente, tendremos evidentemente

$$F = \frac{1}{f_0}$$

y como

$$R = \frac{1}{r}$$

resulta

$$\frac{1}{f_0} = \frac{2}{a}\left(\frac{1}{v} - 1\right)$$

Por otra parte, si representamos por n al cuociente $\frac{1}{v}$, obtendremos la fórmula clásica :

$$\frac{1}{f_0} = \frac{2}{r}\,(n - 1)$$

en la cual el coeficiente n, llamado índice de refracción, es igual, como vemos, á la velocidad relativa de la luz en el medio externo con respecto al medio interno.

Las fórmulas (9) y (10) combinadas dan :

$$F_3 = F_0 + F_1 \qquad (11)$$

El significado de esta última ecuación es el siguiente: *el efecto de una lente sobre una onda luminosa consiste en que aquella superpone á la curvatura inicial de ésta su curvatura focal propia.*

Sería fácil demostrar la exactitud de este principio para todos los casos que no hemos considerado al establecer el valor F_0. En efecto, la ecuación (11) no implica como la (10) la igualdad de los dos radios de curvatura.

Su interpretación no ofrece dificultad alguna: los términos que la componen deberán ser afectados del signo $+$ cuando correspondan á ondas ó lentes divergentes.

Mediante esta convención única que fluye de las demostraciones anteriores, se obtiene fácilmente la ecuación clásica de los focos conjugados para los diferentes casos que pueden presentarse, recordando que, si una onda al llegar á una lente ó al salir de ella tiene una curvatura F, emana de un punto (ó tiende á converger á un punto) situado á una distancia

$$f = \frac{1}{F} \text{ de la lente.}$$

Por ejemplo, si se tiene un objeto virtual situado á la distancia p de una lente divergente ¿á qué distancia p' se formará la imagen y cuál será la naturaleza de ésta?

F_1 es positiva, F_0 negativa; por consiguiente, F_3 podrá ser positiva ó negativa. En el primer caso (imagen real)

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p} - \frac{1}{f_0}$$

en el segundo caso (imagen virtual)

$$-\frac{1}{p'} = \frac{1}{p} - \frac{1}{f_0}$$

Aquí conviene observar que á los objetos virtuales y á las imágenes reales corresponden ondas convergentes de curvatura positiva; á los objetos reales y á las imágenes virtuales, ondas divergentes de curvatura negativa.

Con igual facilidad se aplica la fórmula (11) al estudio de los sistemas de varias lentes. Para no extendernos demasiado, no desarrollamos este punto, en la convicción de que no ofrecerá dificultad al lector que haya seguido las demostraciones anteriores. La marcha á seguir es la siguiente: 1º se determina la curvatura de la onda que emerge de la primera lente (fórmula 11); 2º se deduce la curvatura que tiene la onda al incidir sobre la segunda lente, teniendo en cuenta la distancia d comprendida entre ésta y la primera; 3º con este elemento que representa el nuevo valor de F_1, se determina la curvatura de la onda al salir de la segunda lente, y así sucesivamente.

Para efectuar el cálculo 2º, basta tener presente que si una onda divergente adelanta una longitud d, su radio supuesto primitivamente igual á f, se transforma en $f + d$; si la onda es convergente, éste se transforma en $f - d$. Las curvaturas correspondientes son

$$\frac{1}{f} \text{ y } \frac{1}{f \pm d}$$

Ing. P. de Lepiney

(Inspector de Enseñanza Secundaria).