Evaluación de Métodos de Regresión lineal en una red altimétrica topográfica

Justo, Claudio E.[a]; Calandra, María Valeria[b]

[a] Departamento Agrimensura, UIDET GAMEFI, Argentina.
[b] Departamento de Ciencias Básicas, UIDET GAMEFI,
[a,b] Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata, Argentina.
Claudio.justo@ing.unlp.edu.ar. mava@mate.unlp.edu.ar.

Resumen

Este trabajo presenta la comparación de distintos métodos de ajuste para el análisis de observaciones realizadas en el relevamiento de una red altimétrica topográfica. Los métodos evaluados fueron el tradicional de Mínimos Cuadrados Ponderados, comparado con los resultados obtenidos mediante otros dos métodos alternativos de ajuste, siendo estos los Métodos de Regresión Robusta llamados M-Estimadores y MM-Estimadores. Se evaluó la incidencia de los valores atípicos con los tres métodos. Se encontró que el método tradicional presenta buenos resultados en el rango de los valores atípicos presentes. De acuerdo con la comparación de los resultados, puede considerarse a Mínimos Cuadrados Ponderados como confiable, en este caso, aunque los otros dos métodos podrían brindar información útil para el análisis de los resultados obtenidos.

Palabras clave: métodos de regresión, mínimos cuadrados, valores atípicos, residuos.

INTRODUCCIÓN

El ajuste de redes altimétricas topográficas es realizado en forma extendida mediante el método de Mínimos Cuadrados Ponderados (Justo, 2018). Para la ponderación a cada desnivel de una red altimétrica topográfica se le asigna para el ajuste un peso de 1/L donde L es la longitud del recorrido necesario para obtener cada medición. Los desniveles son las variables de respuestas y las variables predictoras son coeficientes -1, 0, 1 por tratarse de una red de Grafos. El modelo altimétrico topográfico, es válido para determinar las diferencias de alturas entre puntos y poder resolver la dirección del escurrimiento de fluidos en el entorno de obras a nivel municipal. En Geodesia al modelo topográfico se lo denomina Sistema de Alturas Geométricas. Para poder dejar establecidas las alturas de marcas físicas colocadas expresamente con ese propósito, y conocidas como ménsulas, es que se realizan mediciones de desniveles entre ellas. El desnivel entre dos ménsulas A y B se obtiene mediante la sumatoria de *n* desniveles individuales medidos a lo largo del itinerario que se requiere para llegar de una a otra. Estos desniveles obtenidos serán las observaciones que se someterán a un ajuste por Mínimos Cuadrados Ponderados para salvar la inconsistencia debida a los factores aleatorios que están siempre presentes en las mediciones. La estimación por MCP permite obtener indicadores de la calidad del trabajo realizado. Se presentan mediciones realizadas en el campus de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata (UNLP) donde existe una red altimétrica con ménsulas distribuidas en casi todos los edificios de las distintos Departamentos. (Figura 1). Las redes mencionadas comparten el mismo origen o datum en el Cero del Mareógrafo de la ciudad de Mar del Plata, Argentina. El análisis de regresión es una de las técnicas estadísticas más empleadas, dentro del mismo, el método de Mínimos Cuadrados clásico es considerado poco robusto cuando las observaciones no provienen de una distribución normal o hay observaciones atípicas. Los valores atípicos pueden ser causados por sucesos excepcionales o podrían ser los resultados de un factor

Figura 1. Esquema de la Red Altimétrica (Campus Facultad de Ingeniería, UNLP)

aún no considerado en un estudio. Incluso podría estar sucediendo algo sistemáticamente. Hay circunstancias en el que los datos pueden eliminarse de forma justificada, pero en general, dado que hay observaciones no necesariamente "malas", es razonable concluir que no deben descartarse. Para evaluar la respuesta ante esta situación se introduce una comparación con estimaciones hechas por dos métodos robustos. Para que un estimador de regresión sea robusto sea de utilidad práctica debe tener punto de ruptura y eficiencia asintótica relativa altos. El punto de ruptura es la mínima fracción de datos atípicos que puede causar que el estimador no se útil. Este valor se puede usar como una medida de la robustez del estimador. El punto de ruptura finito de los estimadores mínimos cuadráticos es 1/n, para una muestra de tamaño n, equivale a decir que una sola observación puede distorsionar el estimador. El punto de ruptura a veces es expresado en porcentaje en el caso de EMC el porcentaje es o%. Esto tiene un impacto potencialmente grave sobre su uso práctico. Cuando las observaciones provienen de una Distribución Normal y no hay observaciones atípicas es correcto, además de seguro, utilizar Estimadores Mínimo Cuadráticos (EMC). Además del punto de ruptura, para caracterizar a los estimadores robustos, se define la eficiencia asintótica de estos, como el cociente asintótico entre el cuadrado medio residual obtenido con los EMC y el cuadrado medio residual obtenido con el procedimiento robusto. Es deseable que esa medida de eficiencia se aproxime a 1.

DESARROLLO

El modelo lineal clásico relaciona las variables dependientes, o respuestas y_i , con las variables dependientes o explicativas $x_{i1}, x_{i2} \ldots\ldots x_{ip}$ para $i = 1{,}2 \ldots.n$, tal que:

$$y_i = x_i^t\beta + \varepsilon_i \quad i = 1{,}2 \ldots.n \;, \text{ con } x_i^t = (x_{i1}, x_{i2} \ldots\ldots x_{ip}) \quad \beta^t = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p) \tag{1}$$

ε_i es el término del error, una variable aleatoria perteneciente a una Distribución Normal con media 0 y varianza σ^2. Es necesario fijar $x_{i1} = 1$ para todo i para que el primer elemento de β corresponda al término independiente. En este caso trabajaremos sin el término independiente ya que se cuenta con la información del datum u origen de las referencias de alturas y que permite eliminar el déficit de rango que ocurriría de solo tener información relativa a las alturas de los desniveles puros El conjunto de todas las observaciones junto con los β lleva al modelo de Ecuaciones de Observación $Y = X.\beta + \varepsilon$ .Donde X es la matriz de *n x p* con elementos x_{ij}, el vector ε es un vector con elementos ε_i el vector Y con elementos y_i. Para ajustar ese modelo a los datos, se debe usar un estimador de regresión y luego estimar los parámetros desconocidos de β , que se denotan por $\hat{\beta}^t = (\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \ldots, \hat{\beta}_p)$. El valor ajustado de y_i es $\hat{y}_i = x_i^t\hat{\beta}$ y se puede usar este valor para calcular el residuo $i - ésimo\; r_i = y_i - \hat{y}_i$. En el método de Mínimos Cuadrados el valor $\hat{\beta}_{MC}$ resulta de minimizar la suma de los cuadrados de los residuos $\sum_{i=1}^{n} r_i^2$.Aunque el estimador de Mínimos Cuadrados (MC) es fácil de calcular, también es muy sensible a las desviaciones de los supuestos del modelo. Las observaciones que están alejadas de la mayoría de los datos pueden afectar drásticamente al resultado de la estimación, a estos valores se los llama atípicos (outliers). Un valor atípico en el caso de una regresión es un valor y_i que se aleja de la relación lineal seguida de la mayoría de los datos (valores atípicos verticales). Otro tipo de dato atípico, en las regresiones, es aquel que se aleja del conjunto de la mayoría de las variables explicativas del modelo (valores atípicos horizontales). Cabe recordar que las variables explicativas consisten de -1, 0 y 1 por tratarse del modelado de una red de Grafos (Strang y Borre, 1997) lo que nos previene de encontrarnos ante este tipo de valores atípicos salvando el caso de una equivocación. El objetivo principal de la estadística robusta es proveer métodos para el análisis de datos que sean confiables aún en la presencia de datos atípicos y que sean casi tan buenos como el estimador clásico óptimo de (MC) cuando no hay datos atípicos. La robustez de un estimador se mide por su estabilidad cuando una fracción pequeña de las observaciones es reemplazada de forma arbitraria por datos atípicos que pueden no cumplir con el modelo estadístico asumido. Un estimador robusto no debería verse mayormente afectado por una proporción pequeña de datos atípicos. Una medida cuantitativa de la robustez de un estimador, propuesta por Donoho y Huber (1983), es el punto de ruptura finito. El punto de ruptura finito de un estimador es la máxima fracción de datos atípicos que el estimador puede tolerar sin verse completamente afectado. Es sabido que el estimador de MC tiene punto de ruptura infinito cero, esto es, una sola observación atípica puede arruinarlo completamente. Un método de estimación robusta en modelos lineales está dado por M-estimación. El concepto de un M-estimador para un modelo de regresión lineal fue introducido por Huber (1973). Un M-estimador de regresión de β se define como el $\hat{\beta}_M$, tal que minimiza:

$$\sum_{i=1}^{n} \rho(\frac{y_i - x_i^t \beta}{S}) \tag{5}$$

Siendo $\rho(u)$ una función continua y, simétrica, llamada función objetivo, con un único mínimo en 0 (Andersen, 2008; Rousseeuw y Leroy, 1987). S es un estimador de escala de los residuos que puede ser estimado antes o en simultáneo. S podría ser la mediana del valor absoluto de los residuos de algún estimador de residuos inicial. No usar estimador de escala *S* en (5), es lo mismo que haciendo abuso de notación sustituir *S* por 1. El hecho de usar el estimador de escala es importante ya que el M-estimador, no es necesariamente invariante con respecto a cambios de escala (es decir, si se multiplicaran los errores $y_i - x_i^t \beta$ por una constante, la nueva solución de la ecuación podría no ser igual que la anterior). En realidad, los estimadores MC de regresión son un caso poco robusto de M-estimadores con función objetivo $\rho(u) = u^2$. La vulnerabilidad de MC proviene del mayor peso que se otorga a los valores extremos o atípicos por elevar al cuadrado los residuos a ser minimizados. En el caso de los M-estimadores de regresión propuestos por Huber (1973), la función objetivo se define de la siguiente manera:

$$\rho(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}u^2, \ |u| < a \\ \frac{1}{2}|u| - \frac{1}{2}a^2, \ |u| \geq a \end{cases} \tag{6}$$

La constante a es conocida como constante de ajuste, en el caso del presente trabajo $a = 1{,}345$ que corresponde a una propuesta de Huber (1973) con alta eficiencia asintótica, cercana a 0,95. El estimador M de Huber es robusto frente a valores extremos en la dirección de *Y* pero no es robusto frente a valores extremos en la dirección X. Cuando la varianza de los errores ε_i no es la misma para toda *i*, los estimadores M son más eficientes que el estimador MC ordinario. El estimador MM es un tipo especial de estimador M y fue propuesto por Yohai (1987). Los estimadores MM son considerados como una generalización de los estimadores M. Están basados en una función ρ_1 que determina las propiedades robustas del estimador (Stuart, 2011). En este caso ρ_1 , es una función acotada, no decreciente y simétrica alrededor del cero. Un MM-estimador de regresión de β se define como el $\hat{\beta}_{MM}$, tal que minimiza:

$$\sum_{i=1}^{n} \rho_1(\frac{y_i - x_i^t \beta}{\hat{\sigma}}) \tag{7}$$

Donde $\hat{\sigma}$ es un S- estimador de escala robusto introducido por Rousseauw y Yohai (1984) (Maronna y otros, 2019; Montgomery y otros, 2006). En este trabajo usamos ρ_1 , la función *bicuadrada* que se define como:

$$\rho_1(u) = \begin{cases} 3\mu^2 - 3\mu^4 + \mu^6, \ |\mu| \leq 1 \\ 1, \ |\mu| > 1 \end{cases} \tag{8}$$

Que de acuerdo con la terminología de Maronna y otros (2019) es una *ρ-función acotada*, lo que permitiría lidiar tanto con valores atípicos verticales como horizontales. En este caso, se puede alcanzar alta eficiencia asintótica y alto punto de ruptura.

MÍNIMOS CUADRADOS PONDERADOS

El modelo lineal clásico supone que ε_i, el término del error de (1), es una variable aleatoria, en nuestro caso de Distribución Normal con varianza σ^2 y media cero. La suposición de que la varianza de ε_i sea constante, no siempre se cumple, muchas veces la varianza de es de la forma $\sigma_i^2 = \frac{\sigma^2}{w_i}$ donde para cada i , w_i es un número positivo. El hecho de que la varianza de ε_i, sea constante es una suposición fuerte, en ese caso se dice que el modelo es homocedástico, en caso contrario se dice que es heterocedástico. En este último caso se usa para subsanar tal situación, Mínimos Cuadrados Ponderados (MCP) para estimar β. Si se denota con $\hat{\beta}_{MCP}$ el estimador de β por MCP, entonces $\widehat{\beta}_{MCP}$ es el estimador que minimiza la suma de los cuadrados de los residuos ponderados:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \left(y_i - x_i^t \beta\right)^2 \qquad (9)$$

El uso de la suma de cuadrados residual ponderada reconoce que algunos de los errores son más variables que otros, ya que los casos con grandes valores de w_i tendrán pequeñas varianzas y por lo tanto se les dará más peso en la suma de los cuadrados de los residuos (Weisberg, 2005). Es decir que MCP es útil en el caso presencia de heterocedasticidad. Además, el modelo de ajuste MCP se trata como el ajuste MC ordinario, si escribimos la ecuación (9) como:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\tilde{y}_i - \tilde{x}_i^t \beta\right)^2 \quad \text{Con } \tilde{y}_i = \sqrt{w_i}\, y_i \ \text{ y } \ \tilde{x}_i^t = \sqrt{w_i}\, x_i^t \qquad (10)$$

En el caso del ajuste de las mediciones de una red altimétrica topográfica del modo convencional la varianza de ε_i es de la forma $\sigma_i^2 = \frac{\sigma^2}{w_i}$ con una ponderación $w_i = \frac{1}{L_i}$ donde L_i es la longitud del recorrido necesario para obtener cada medición. Por lo tanto, se aplica MCP para subsanar la heterosedasticidad. Pero con esto, no se resuelve la influencia de los valores atípicos si los hubiera. Con este ajuste buscaremos explicar las observaciones y_i con los valores de las cotas ajustadas $\hat{\beta}_{MCP}$ mediante la expresión (10).El valor de la varianza de y_i denotada por $Var(y_i)$ dependerá de la distancia que fue necesaria recorrer para su determinación y puede expresarse como la propagación de una varianza kilométrica y la cantidad de kilómetros recorridos para obtener y_i denotada por Q_i. (Ver Tabla1) $Var(y_i) = \sigma_{Km^2}^2 \; Q_i$. La ponderación $w_i$se obtiene de la inversa de los cofactores Q_i de $Var(y_i)$. Estos cofactores se encuentran en la Tabla 1 columna 3. Los parámetros $\hat{\beta}_{MCP}$ del ajuste por MCP están en la Tabla 2.

MEDICIÓN Y AJUSTES

El levantamiento de las variables de respuesta, los desniveles, se realizó mediante el método de nivelación geométrica desde el medio (Wolf y Ghilani, 2006) con niveles automáticos de 28 aumentos. Los desniveles medidos pueden verse en la Tabla 1 columna 2. La red consta de 8 ménsulas como las de la figura 1 y se les ha otorgado la siguiente nomenclatura: Agrimensura Vieja (AV), Agrimensura Nueva (AV), Partenón (P), Química 1 (Q1), Química 2 (Q2), Hidráulica(H), Decanato (D), Construcciones (C) Estas ménsulas serán el soporte físico de las cotas de superficies equipotenciales cuyo valor será el resultado del ajuste de las observaciones de desnivel realizadas. Agrimensura Vieja (AV) sirvió para establecer el datum de referencia. En la Tabla 1, columna 1, se muestran los extremos de cada tramo medido. El vector β de 7x1 y que tiene las cotas a ajustar es: $\beta^t = (AN, Q_1, D, Q_2, H, P, C)$ La varianza de cada una las observaciones son directamente proporcionales al recorrido necesario para obtenerlas (Justo, 2018).

Observaciones	Valor	Distancia
AV-AN	2,046	0,14
AN-Q1	1,110	0,15
Q1-D	0,112	0,08
D-Q2	0,381	0,13
H-P	-1,615	0,20
Q2-C	-0,920	0.10
H-AN	0,166	0.10
Q1-C	-0,435	0.10
AV-P	0,267	0.20
H-C	0,842	0.15
AV-AN	-2,046	0,08
AN-Q1	-1,110	0,13
Q1-D	-0,111	0,08
D-Q2	-0,375	0,13
H-P	1,616	0,20
Q2-C	0,920	0.10
H-AN	-0,167	0.10
Q1-C	0,436	0.10
AV-P	-0,265	0.20
H-C	-0,842	0.15

Tabla 1. Observaciones Valor (m) con sus cofactores Distancia (km)

IDENTIFICACIÓN DE VALORES ATÍPICOS

Para identificar posibles valores atípicos en el ajuste se utilizaron los residuos: $r_i = y_i - \hat{y}_i$ Donde y_i son los desniveles medidos, e $\hat{y}_i$ son los valores ajustados de dichos desniveles por mínimos cuadrados pesados. También se calcularon los residuos estudentizados externos $t_{(i)}$ o residuos por el método Leave-One-Out (Maronna y otros, 2019) donde se mide la influencia de un dato atípico y_i, en los residuos, eliminando dicha observación del modelo y se define el residuo leave-one–out $r_{(i)}$, calculando $\boldsymbol{r_{(i)} = y_i - \hat{y}_{(i)}}$ **.** Donde $\hat{y}_{(i)}$ es el desnivel ajustado sin tener en cuenta el vector x_i y el valor medido y_i , es decir: $\hat{y}_{(i)} = x_i^t \hat{\beta}_{(i)}$ Se puede demostrar que $r_{(i)} = \frac{r_i}{1-v_{ii}}$. Donde v_{ii} son los elementos de la diagonal de la denominada *hat* matriz *H* definida como: $H = X(X^t X)^{-1} X^t$

Luego la versión estudentizada de $r_{(i)}$ resulta ser $t_{(i)} = \sqrt{1-v_{ii}}\,\frac{r_{(i)}}{S_{R(i)}} = \frac{r_i}{S_{R(i)}\sqrt{1-v_{ii}}}$ *i=1,…n*

Dónde r_i es el residuo de la observación i-ésima y $S^2_{R(i)}$ es la estimación de la varianza residual sin tener en cuenta la observación i-ésima en el modelo de regresión.

$$S^2_{R(i)} = \frac{(n-p)S_R^2 - r_i^2/\sqrt{1-v_{ii}}}{n-p-1}$$

Y $\boldsymbol{S_R^2}$ es la estimación de la varianza residual tomando todas las observaciones $\boldsymbol{S_R^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} r_i^2}{n-p}$

Bajo la hipótesis nula de que no existen atípicos, los residuos estudentizados $\boldsymbol{t_{(i)}}$tienen una ley *t de Student* con *n-p-1* grados de libertad. Luego tomamos $\boldsymbol{t_{Max}} = \mathbf{max}_{1\le i\le n}\, \boldsymbol{t_{(i)}}$. Para un nivel de significación $\boldsymbol{\alpha}$ diremos que la observación correspondiente al máximo residuo estudentizado es atípica si:$|\boldsymbol{t_{Max}}| > \boldsymbol{t_{n-p-1}^{1-\frac{\alpha}{2}}}$ donde $\boldsymbol{t_{n-p-1}^{1-\alpha/2}}$ es el percentil $\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)x100\%$ de la distribución T de Student con *n-p-1* grados de libertad. Esta red resultó con una varianza del ajuste de $\boldsymbol{S_R^2} =$ 0,00002304m² para un valor $\boldsymbol{\alpha = 0.05}$ el percentil $\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)x100\%$ de la distribución T de Student con *n-p-1=12* grados de libertad resultó ser $\boldsymbol{t_{n-p-1}^{1-\alpha/2} = 2,18}$ y $|\boldsymbol{t_{Max}}| = \mathbf{7,0212768}$ (Ver Tabla 2). Por lo tanto, se considera que es un valor atípico.

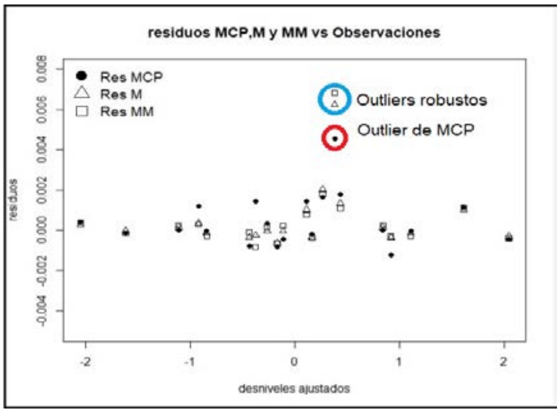

Figura 2. Gráfico de los Residuos vs. Desniveles Ajustados

DISCUSIÓN

Para aplicar los estimadores MCP, M y MM se empleó el paquete MASS (Venables y Ripley, 2002) En la Figura 2 se ve el gráfico de los residuos $r_i = y_i - \hat{y}_i$ correspondientes a los tres métodos versus los valores ajustados. Se puede apreciar que el ajuste por método de Mínimos Cuadrados Pesados es un poco más afectado (residuo MCP resaltado) ya que el residuo es más pequeño para este método que para los otros dos. En la Tabla 4 se pueden apreciar los valores de los residuos $r_i = y_i - \hat{y}_i$ para los tres métodos de ajuste y en la Tabla 3 los valores de los niveles ajustados (también para los tres métodos) en los que se observa una diferencia muy pequeña en algunos casos. En la Figura 2 se puede observar un gráfico de residuos versus los valores de los desniveles ajustados correspondientes a los tres métodos. También se resalta un residuo extremo para MCP en rojo y los residuos extremos de los dos métodos robustos resaltados en color celeste todos correspondientes a un mismo valor ajustado. En el gráfico, el residuo correspondiente a dicho valor es menor para MCP que en los métodos robustos (marcados en color celeste). Esto es debido a que el valor atípico distorsiona o corre el ajuste de regresión por MCP en su dirección. El procedimiento robusto tiende a dejar grandes los residuales asociados con valores atípicos, facilitando así la identificación. El procedimiento de estimación robusto produce, en este caso, casi los mismos valores ajustados de los parámetros obtenidos por el método MCP ya que los residuos tienen distribución Normal, y los valores atípicos no son significativos.

CONCLUSIONES

Consideramos oportuna la comparación entre los estimadores de MCP, los M y MM dada la posibilidad computacional actual con software como el R.

Agregar esta comparación a los ajustes realizados por MCP otorgará más herramientas de análisis. Los métodos de regresión robusta ofrecen una gran ayuda para ver si los valores atípicos representan valores influyentes. En este caso la diferencia entre los tres métodos no fue significativa, lo que nos permitió confirmar la adecuación de MCP. El método MCP nos permitió lidiar con la heterocedasticidad. Sin embargo, si hubiesen diferido, se deberían identificar las razones de tales diferencias. La estimación M introducida por Huber (1973) es un enfoque más simple que el ajuste MM. Aunque no es robusto a los puntos influyentes es decir en observaciones atípicas en la dirección de *X* ,pero en nuestro estudio, ese tipo de datos atípicos no se encuentran. El método MCP nos permitió lidiar con la heterocedasticidad, como así también los métodos robustos.

DH medido	DH ajustado MCP	r_i	$t_{(i)}$
2,046	2,046423	-0,0004231	-0,2946033
1,110	1,1100164	-0,0000164	-0,0103331
0,112	0,1105502	0,0014498	1,4412095
0,381	0,3764464	0,0045536	7,0212768
-1,615	-1,6148721	-0,0001279	-0,0699119
-0,920	-0,9212172	0,0012172	1,0040679
0,166	0,1661877	-0,0001877	-0,1433856
-0,435	-0,4342206	-0,0007794	-0,5861182
0,267	0,265363	0,0016367	0,9170405
0,842	0,8419835	0,0000165	0,0103408
-2,046	-2,046423	0,0004231	0,2946033
-1,110	-1,1100164	0,0000164	0,0103331
-0,111	-0,1105502	-0,0004498	-0,4158049
-0,375	-0,3764464	0,0014464	1,0294347
1,616	1,6148721	0,0011279	0,6262164
0,920	0,9212172	-0,0012172	-1,0040679
-0,167	-0,1661877	-0,0008123	-0,6300562
0,436	0,4342206	0,0017794	1,4269477
-0,265	-0,265363	0,0003633	0,1971074
-0,842	-0,8419835	-0,0000165	-0,0103408

Tabla 2. Observaciones, residuos brutos y estudentizados externos.

Ménsulas	MCP	M	MM
AN	17.960423	17.960300	17.960000
Q1	19.070440	19.070400	19.070000
D	19.180990	19.181400	19.175000
Q2	19.557436	19.556100	19.556000
H	17.794235	17.793900	17.794000
P	16.179363	16.179000	16.181000
C	18.636219	18.635800	18.636000

Tabla 3. Resultados de los coeficientes por los tres métodos de ajuste

Observacion	MCP	M	MM
AV-AN	-0.0004	-0.0004	-0.0004
AN-Q1	0.0000	-0.0002	-0.0003
Q1-D	0.0014	0.0010	0.0008
D-Q2	0.0046	0.0062	0.0068
H-P	-0.0001	0.0000	-0.0001
Q2-C	0.0012	0.0004	0.0003
H-AN	-0.0002	-0.0004	-0.0004
Q1-C	-0.0008	-0.0004	-0.0001
AV-P	0.0016	0.0020	0.0018
H-C	0.0000	0.0002	0.0003
AV-AN	0.0004	0.0003	0.0004
AN-Q1	0.0000	0.0002	0.0004
Q1-D	-0.0004	0.0000	0.0002
D-Q2	0.0014	-0.0002	-0.0008
H-P	0.0011	0.0010	0.0011
Q2-C	-0.0012	-0.0004	-0.0003
H-AN	-0.0008	-0.0006	-0.0006
Q1-C	0.0018	0.0014	0.0011
AV-P	0.0004	0.0000	0.00018
H-C	0.0000	-0.0002	-0.0003

Tabla 4. Residuos para cada observación según el método de ajuste

REFERENCIAS

Andersen, R. (2008). *Modern Methods for Robust Regression*. Thousand Oaks: SAGE Publications.

Donoho, D.L. y Huber, P.J. (1983). The notion of breakdown point. In "A Festschrift for Erich Lehmann" (P.J. Bickel, K. Doksum and J.L. Hodges, Jr., Eds.), Wadsworth, Belmont, CA, 157–184.

Huber, P.J. (1973). Robust regression: asymptotics, conjectures and Monte Carlo. *Annals of Statistics* 1, 799-821.

Justo C. (2018) Tratamiento Estadístico de una Red Altimétrica Topográfica. Tesis de Maestría en Ingeniería UNLP. http://sedici.unlp.edu.ar/handle/10915/65539

Maronna R.A., Douglas M.R., Yohai V.J. y Salibián-Barrera M.S. (2019). *Robust Statistics: Theory and Methods (with R)*. 2nd Edition, Wiley.

Montgomery, D.C., Pek, E.A. y Vining, G.G. (2006). *Introducción al Análisis de Regresión Lineal*. 3ª. Edición, Ed. Compañía Editorial Continental, México.

Rousseeuw, P.J. y Leroy A.M. (1987). *Robust Regression and Outlier Detection*. Hoboken, Wiley. DOI:10.1002/0471725382.

Rousseeuw P. y Yohai V. (1984) Robust Regression by Means of S-Estimators. En: Franke J., Härdle W., Martin D. (eds) *Robust and Nonlinear Time Series Analysis. Lecture Notes in Statistics*, vol 26. Springer, New York, NY.

Stuart, C.A. (2011). Robust Regression. Recuperado de: https://www.semanticscholar.org/paper/Robust-Regression-Stuart/f50f6e74b773ba0b89df34744523bd7c6b148125

Venables, W.N. y Ripley, B.D. (2002). *Modern Applied Statistics with S*, Fourth edition. Springer, New York. ISBN 0-387-95457-0,

Weisberg, S. (2005) *Applied linear regression* 3rd Ed John Wiley & Sons, Inc, New Jersey, USA.

Wolf, P. y Ghilani, C. (2006). *Adjustment Computations: Spatial Data Analysis*, Fourth Edition. Wiley.

Yohai, V. (1987). High Breakdown-Point and High Efficiency Robust Estimates for Regression. The Annals of Statistics, 15(2), 642-656.