

PUBLICACIONES DEL OBSERVATORIO ASTRONÓMICO DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

DIRECTOR : CAPITÁN DE FRAGATA (R.) GUILLERMO O. WALLBRECHER

SERIE ASTRONÓMICA. — Tomo XXVII₁

TABLAS
PARA EL CALCULO DE LAS EFEMERIDES PLANETARIAS
POR EL METODO DE EXTRAPOLACION

POR

PASCUAL SCONZO



LA PLATA
OBSERVATORIO ASTRONÓMICO

—
1949



UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

RECTOR

DOCTOR JULIO M. LAFFITTE

VICERRECTOR

INGENIERO HECTOR CEPPI

CONSEJO UNIVERSITARIO

Consejeros

DOCTOR ALFREDO SCHAFFROTH, DOCTOR ROBERTO CRESPI GHERZI, INGENIERO MARTÍN SOLARI, DOCTOR JULIO H. LYONNET, DOCTOR HERNÁN GONZÁLEZ, INGENIERO AGRÓNOMO CÉSAR A. FERRI, INGENIERO JOSÉ M. CASTIGLIONI, DOCTOR GUIDO PACELLA, DOCTOR OSVALDO A. ECKELL, INGENIERO HÉCTOR CEPPI, INGENIERO ARTURO M. GUZMÁN, DOCTOR ROBERTO H. MARFANY, PROFESOR ARTURO CAMBOURS OCAMPO, DOCTOR EMILIANO J. MAC DONAGH, CAPITÁN DE FRAGATA (R.) GUILLERMO O. WALLBRECHER.

SECRETARIO GENERAL

DOCTOR JOSE ARMANDO SECO VILLALBA

PROSECRETARIO

DON VICTORIANO F. LUACES

OFICIAL MAYOR

SEÑOR JOSE MUÑOZ

INSTITUTO DEL OBSERVATORIO ASTRONÓMICO Y ESCUELA SUPERIOR DE ASTRONOMÍA Y GEOFÍSICA

DIRECTOR

CAPITAN DE FRAGATA (R.) GUILLERMO O. WALLBRECHER

SECRETARIO

ABOGADO ANDRÉS GUILLEN

PROSECRETARIO

RICARDO J. NOWINSKI

PERSONAL DOCENTE Y CIENTÍFICO

Jefes de Departamento y Profesores : ING. MIGUEL A. AGABIOS (Coordinador Interdepartamental-Astrometría, Segundo Curso); AGRIM. ÁNGEL A. BALDINI (Geodesia-Gravimetría y Mareas); ING. SIMÓN GERSHÁNIK (Geofísica-Sismología); DR. LIVIO GRATTON (Astrofísica-Astrofísica, I y II Curso); AGRIM. MIGUEL ITZIGSOHN (Astrometría-Astrometría, Primer Curso); DR. ALEXANDER WILKENS (Astronomía teórica y Cosmogonía-Mecánica Celeste).

Profesores : AGRIM. GUILLERMO H. BOREL (Astronomía General); DR. REYNALDO P. CESCO (Análisis matemático, III Curso); AGRIM. ÁNGEL A. BALDINI (Geodesia Superior y Determinaciones Geográficas) Interino; AGRIM. VÍCTOR J. MENECLIER (Astronomía Esférica); DR. PASCUAL SCONZO (Cálculos Científicos); DR. LEÓNIDAS SLAUCITAJIS (Magnetismo Terrestre y Electricidad Atmosférica).

PERSONAL CIENTÍFICO

Jefes de División y Astrónomos de Primera : AGRIM. GUILLERMO H. BOREL (Círculo Meridiano); DR. REYNALDO P. CESCO (Astronomía Teórica); PROF. SILVIO MANGARIELLO (Círculo Meridiano); AGRIM. HUGO A. MARTÍNEZ (Círculo Meridiano); DR. FRANZ PINGSDORF (Estrellas Variables); DR. PASCUAL SCONZO (Efemérides, Pequeños Planetas); DR. SERGIO SLAUCITAJIS (Círculo Meridiano); DR. LEÓNIDAS SLAUCITAJIS (Magnetismo Terrestre); ING. NUMA TAPIA (Fotometría Fotográfica); DR. HERBERT WILKENS (Estadística Estelar).

PERSONAL DOCENTE Y AUXILIAR

Jefe de Biblioteca : PROF. NIDIA ETHEL GUILLAMÓN.

Jefes de Trabajos Prácticos : DR. SERGIO SLAUCITAJIS (Astronomía Esférica); DR. HERBERT WILKENS (Astrofísica).

Ayudantes de Trabajos Prácticos : SRTA. ALICIA B. DI BELLA (Idioma Inglés); SRTA. ARACELI STICHLING (Idioma Alemán).

ADMINISTRACIÓN

Administrador-habilitado : SEÑOR JUAN JOSÉ SAGGESSE.

PERSONAL TÉCNICO DE TALLERES

Jefes : ING. ELIO MAFFI (Departamento de Óptica); SR. JOSÉ A. RODRÍGUEZ (Departamento de Talleres); SR. RAMÓN SÁNCHEZ (Taller de Mecánica de Precisión); SR. ANTONIO PALUMMO (Taller de Ebanistería); SR. MARIO A. TOMASINI (Taller de Electricidad).

TABLAS PARA EL CÁLCULO DE LAS EFEMERIDES PLANETARIAS POR EL METODO DE EXTRAPOLACION

I

INTRODUCCIÓN

El conocido método de extrapolación para obtener una serie de posiciones heliocéntricas, de las cuales luego es fácil deducir la correspondiente serie de posiciones geocéntricas de un cuerpo celeste que se mueve alrededor del Sol recorriendo órbitas que son secciones cónicas, actualmente es empleado con mucha frecuencia en los cálculos de efemérides de asteroides y cometas.

El hecho de ser este método aplicable para todas las excentricidades hace indiscutible las ventajas de su uso ; además, se adapta perfectamente al cálculo mecánico. Originariamente, el método data de los trabajos de Cowell ¹ y de Numerow ². Su aplicación resulta muy facilitada si se poseen tablas adecuadas a las particularidades del cálculo ; las existentes se encuentran en las *Tafeln zur theoretischen Astronomie* ³ y se refieren a los intervalos de extrapolación $w=2, 4$ y 8 días, respectivamente.

En el reciente Congreso de la U. A. I. ⁴, la comisión n° 20 (Petites planètes, etc.) adoptó la decisión de calcular las efemérides aproximadas de oposición de los asteroides para 6 fechas consecutivas espaciadas de 10 días una de otra. Una decisión análoga se adoptó para los cometas, cuyas efemérides deben calcularse en lo sucesivo con intervalos de 5 ó 10 días. En consecuencia faltan a las tablas citadas las columnas de los intervalos w correspondientes a 5 y 10 días, respectivamente. La presente publicación suplirá esta falta.

¹ P. H. COWELL and A. C. D. CROMMELIN, *Essay on the return of Halley's comet*. Publ. d. A. G. N° 23, 1910.

² B. NUMEROW, *Méthode nouvelle de la détermination des orbites et de calcul des éphémérides en tenant compte des perturbations* (en idioma ruso). Leningrado, 1922. Ver también N. COMMENDANTOFF, *Sur l'emploi de la méthode d'extrapolation de B. Noumerow pour le calcul des éphémérides*. J. d. O. 10, 8. 1926.

³ De J. BAUSCHINGER, 2ª edición por G. Stracke. Leipzig, 1934. (Tabla N° 18). De este último autor ver también : *Zur Ephemeridenrechnung nach Cowell* A. N. 236, 96. 1929.

⁴ Que tuvo lugar en Zurich en el mes de agosto de 1948.

Considerando además que en nuestro observatorio se calculan las efemérides de un gran número de asteroides — asignados por la central de los pequeños planetas, el Cincinnati Observatory, de acuerdo con una resolución de la anteriormente citada comisión n° 20 — he creído oportuno, con la finalidad de dar una *guía* a los estudiantes que se dedican a la tarea de este cálculo, hacer una exposición del método, aportando pequeñas modificaciones prácticas sugeridas por una larga experiencia. Tales modificaciones resultan evidentes examinando la particular disposición que he dado a los esquemas de cálculo de las efemérides aproximadas (ver ejemplos).

II

EXPOSICIÓN DEL MÉTODO APROXIMADO DE EXTRAPOLACIÓN

1. El movimiento no perturbado de un cuerpo celeste P que se mueve alrededor del Sol S con ley newtoniana, se puede representar, como es conocido, con las ecuaciones diferenciales de 2° orden :

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -k^2 \frac{x}{r^3} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -k^2 \frac{y}{r^3}, \quad r = \text{SP} = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -k^2 \frac{z}{r^3}. \end{aligned} \quad (1)$$

donde k es la constante de Gauss 0.0172021, y la masa m de P se supone despreciable respecto de la del Sol que es tomada como unidad. Las coordenadas x, y, z son heliocéntricas ecuatoriales.

Para integrar numéricamente el sistema (1) supongamos conocer dos ternas de valores :

$$\begin{aligned} (x_{-1}, \quad y_{-1}, \quad z_{-1}), \\ (x_0, \quad y_0, \quad z_0), \end{aligned}$$

correspondientes, respectivamente, a dos valores t_{-1} y t_0 del tiempo t , e imaginemos que t tome los valores de una progresión aritmética simple de constante w :

$$t_i = t_0 + iw \quad (i = -1, 0, 1, 2, \dots). \quad (2)$$

Nos proponemos ahora calcular por el método de extrapolación los valores de las coordenadas (x_1, y_1, z_1) correspondientes al valor $t_1 = t_0 + w$ del tiempo t .

Pongamos en general :

$$x | y | z = u(t), \quad (3)$$

es decir, denotemos con $u(t)$ una cualquiera de las coordenadas x, y, z .

Del cálculo de las diferencias finitas se sabe que es :

$$\begin{aligned} u(t_0 + w) &= u(t_0) + u' \left(t_0 + \frac{1}{2} w \right) \\ &= u(t_0) + u' \left(t_0 - \frac{1}{2} w \right) + u''(t_0) \\ &= 2u(t_0) - u(t_0 - w) + u''(t_0) \end{aligned} \quad (4)$$

Por otra parte la fórmula de Taylor nos proporciona el siguiente desarrollo :

$$u(t_0 + iw) = u(t_0) + \frac{iw}{1!} u'(t_0) + \frac{i^2 w^2}{2!} u''(t_0) + \frac{i^3 w^3}{3!} u'''(t_0) + \dots$$

y para $i = 1$ e $i = -1$ se tiene respectivamente :

$$\begin{aligned} u(t_0 + w) &= u(t_0) + \frac{w}{1!} u'(t_0) + \frac{w^2}{2!} u''(t_0) + \frac{w^3}{3!} u'''(t_0) + \dots \\ u(t_0 - w) &= u(t_0) - \frac{w}{1!} u'(t_0) + \frac{w^2}{2!} u''(t_0) - \frac{w^3}{3!} u'''(t_0) + \dots \end{aligned}$$

y sumando miembro a miembro :

$$u(t_0 + w) + u(t_0 - w) = 2u(t_0) + w^2 u''(t_0) + R(t_0), \quad (5)$$

donde hemos puesto para abreviar :

$$R(t_0) = \frac{2w^4}{4!} u^{(4)}(t_0) + \frac{2w^6}{6!} u^{(6)}(t_0) + \dots \quad (6)$$

De las (4) y (5) sigue :

$$u''(t_0) = w^2 u''(t_0) + R(t_0) \quad (7)$$

Si se prescinde de $R(t_0)$, teniendo en cuenta las (1), se puede escribir :

$$u''(t_0) = w^2 u''(t_0) = w^2 \left(\frac{d^2 u}{dt^2} \right)_0 = -w^2 k^2 \frac{u_0}{r_0^3}$$

y por lo tanto la (4) se transforma en :

$$u(t_0 + w) = 2u(t_0) - u(t_0 - w) - w^2 k^2 \frac{u(t_0)}{r_0^3} \quad (8)$$

o sea :

$$u_1 = \left(2 - \frac{w^2 k^2}{r_0^3} \right) u_0 - u_{-1}, \quad r_0 = (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{1/2}.$$

Luego por iteración se obtiene :

$$\begin{aligned} u_2 &= \left(2 - \frac{w^2 k^2}{r_1^3} \right) u_1 - u_0, & r_1 &= (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)^{1/2} \\ &\dots\dots\dots & &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

La cantidad :

$$\lambda_i = 2 - \frac{w^2 k^2}{r_2^3} \quad (9)$$

se puede tabular simplemente para distintos y constantes valores de w en función de r^2 ; y entonces se tiene en definitiva la fórmula general de extrapolación :

$$\boxed{u_{i+1} = \lambda_i u_i - u_{i-1}} \quad (10)$$

2. Calculemos ahora la expresión (6) de $R(t_0)$, que se puede llamar el resto, y de la cual habíamos prescindido en la deducción de la (8). Si se pone :

$$U(t_0) = w^2 u''(t_0)$$

resulta :

$$U^{(n)}(t_0) = w^2 u^{(n+2)}(t_0)$$

y la (6) se transforma en :

$$R(t_0) = \frac{2w^2}{4!} U^{(2)}(t_0) + \frac{2w^4}{6!} U^{(4)}(t_0) + \frac{2w^6}{8!} U^{(6)}(t_0) + \dots \quad (11)$$

Pero se sabe, por otra parte, que las expresiones de las derivadas en función de las diferencias finitas de distintos órdenes son :

$$w^2 U^{(2)} = U^{ii} - \frac{1}{12} U^{iv} + \frac{1}{90} U^{vi} - \dots$$

$$w^4 U^{(4)} = U^{iv} - \frac{1}{6} U^{vi}$$

$$w^6 U^{(6)} = U^{vi} - \dots$$

.....

Si se sustituyen estas expresiones en la (11) se tiene :

$$R(t_0) = \frac{1}{12} U^{ii} - \frac{1}{240} U^{iv} + \frac{31}{60480} U^{vi} - \dots \quad (12)$$

y si se elige un intervalo w convenientemente pequeño, $R(t_0)$ adquiere por la (12) un valor despreciable. Esto justifica la fórmula general de extrapolación (10), que resulta así de aspecto sumamente simple y de fácil aplicación. Cuando se calculan efemérides aproximadas de asteroides, eligiendo un intervalo $w = 10^d$ y despreciando el resto $R(t)$, el error que se acumula extendiendo el cálculo hasta la sexta fecha, es decir para $t_5 = t_{-1} + 6w$, es de unas unidades de la cuarta cifra decimal.

Es importante hacer notar que el procedimiento de extrapolación que hemos expuesto es independiente del valor de la excentricidad de la órbita, porque dicho procedimiento se funda en las ecuaciones diferenciales (1) del movimiento, por lo cual resulta aplicable indiferentemente al caso de los planetas (órbitas elípticas), como al de los cometas (que poseen órbitas elípticas y parabólicas y a veces también hiperbólicas).

III

TABLA DE LOS VALORES $10^7 \cdot w^2 k^2 r^{-3}$
(Método de Cowell)

r^2	$w=5d$		$w=10d$		r^2	$w=5d$		$w=10d$	
1.50	40268.5		161074.1		1.95	27167.6	210.3	108670.2	841.4
51	39869.2	399.3	159476.6	1597.5	96	26959.9	207.7	107839.7	830.5
52	39476.4	392.8	157905.4	1571.2	97	26754.9	205.0	107019.6	820.1
53	39090.0	386.4	156359.9	1545.5	98	26552.5	202.4	106209.8	809.8
54	38709.9	380.1	154839.4	1520.5	99	26352.6	199.9	105410.2	799.6
1.55	38335.8	374.1	153343.4	1496.0	2.00	26155.2	197.4	104620.7	789.5
56	37967.8	368.0	151871.2	1472.2	01	25960.2	195.0	103840.9	779.8
57	37605.7	362.1	150422.7	1448.5	02	25767.7	192.5	103070.8	770.1
58	37249.2	356.5	148996.7	1426.0	03	25577.5	190.2	102310.1	760.7
59	36898.3	350.9	147593.4	1403.3	04	25389.7	187.8	101558.7	751.4
1.60	36553.0	345.3	146211.9	1381.5	2.05	25204.1	185.6	100816.5	742.2
61	36212.9	340.1	144851.7	1360.2	06	25020.8	183.3	100083.3	733.2
62	35878.2	334.7	143512.6	1349.1	07	24839.7	181.1	99359.0	724.3
63	35548.5	329.7	142193.9	1318.7	08	24660.8	178.9	98643.3	715.7
64	35223.8	324.7	140895.4	1298.5	09	24484.0	176.8	97936.2	707.1
1.65	34904.1	319.7	139616.5	1278.9	2.10	24309.4	174.6	97237.5	698.7
66	34589.2	314.9	138356.8	1259.7	11	24136.8	172.6	96547.0	690.5
67	34279.0	310.2	137115.9	1240.9	12	23966.2	170.6	95864.7	682.3
68	33973.4	305.6	135893.5	1222.4	13	23797.6	168.6	95190.4	674.3
69	33672.3	301.1	134689.1	1204.4	14	23631.0	166.6	94524.0	666.4
1.70	33375.6	296.7	133502.5	1186.6	2.15	23466.3	164.7	93865.3	658.7
71	33083.3	292.3	132333.0	1169.5	16	23303.5	162.8	93214.2	651.1
72	32795.2	288.1	131180.7	1152.3	17	23142.6	160.9	92570.6	643.6
73	32511.2	284.0	130044.9	1135.8	18	22983.6	159.0	91934.4	636.2
74	32231.4	279.8	128925.4	1119.5	19	22826.3	157.3	91305.4	629.0
1.75	31955.5	275.9	127821.9	1093.5	2.20	22670.9	155.4	90683.6	621.8
76	31683.5	272.0	126734.1	1087.8	21	22517.2	153.7	90068.8	614.8
77	31415.4	268.1	125661.7	1072.4	22	22365.2	152.0	89460.9	607.9
78	31151.1	264.3	124604.2	1057.5	23	22214.9	150.3	88859.8	601.1
79	30890.4	260.7	123561.4	1042.8	24	22066.4	148.5	88265.4	594.4
1.80	30633.3	257.1	122533.2	1028.2	2.25	21919.4	147.0	87677.6	587.8
81	30379.8	253.5	121519.2	1014.0	26	21774.1	145.3	87096.3	581.3
82	30129.7	250.1	120519.0	1000.2	27	21630.4	143.7	86521.4	574.9
83	29883.1	246.6	119532.5	986.5	28	21488.2	142.2	85952.9	568.5
84	29639.8	243.3	118559.4	973.1	29	21347.6	140.6	85390.5	562.4
1.85	29399.8	240.0	117599.4	960.0	2.30	21208.5	139.1	84834.2	556.3
86	29163.1	236.7	116652.3	947.1	31	21071.0	137.5	84283.9	550.3
87	28929.5	233.6	115717.8	934.5	32	20934.9	136.1	83739.5	544.4
88	28698.9	230.6	114795.7	922.1	33	20800.3	134.6	83201.0	538.5
89	28471.5	227.4	113885.9	909.8	34	20667.1	133.2	82668.3	532.7
1.90	28247.0	224.5	112988.0	897.9	2.35	20535.3	131.8	82141.1	527.2
91	28025.5	221.5	112101.8	886.2	36	20404.9	130.4	81619.6	521.5
92	27806.8	218.7	111227.1	874.7	37	20275.9	129.0	81103.6	516.0
93	27591.0	215.8	110363.8	863.3	38	20148.2	127.7	80593.0	510.6
94	27377.9	213.1	109511.6	852.2	39	20021.9	126.3	80087.7	505.3

r^2	$w=5d$		$w=10d$		r^2	$w=5d$		$w=10d$	
2.40	19896.9	125.0	79587.7	500.0	2.90	14979.8	77.8	59919.1	311.3
41	19773.2	123.7	79092.8	494.9	91	14902.6	77.2	59610.5	308.6
42	19650.8	122.4	78603.1	489.7	92	14826.1	76.5	59304.6	305.9
43	19529.6	121.2	78118.4	484.7	93	14750.3	75.8	59001.2	303.4
44	19409.7	119.9	77638.6	479.8	94	14675.1	75.2	58700.5	300.7
2.45	19290.9	118.8	77163.8	474.8	2.95	14600.6	74.5	58402.2	298.8
46	19173.4	117.5	76693.7	470.1	96	14526.6	74.0	58106.5	295.7
47	19057.1	116.3	76228.5	465.2	97	14453.3	73.3	57813.3	293.2
48	18942.0	115.1	75767.9	460.6	98	14380.6	72.7	57522.6	290.7
49	18828.0	114.0	75311.9	456.0	99	14308.6	72.0	57234.2	288.4
2.50	18715.1	112.9	74860.5	451.4	3.00	14237.1	71.5	56948.3	285.9
51	18603.4	111.7	74413.5	447.0	01	14166.2	70.9	56664.7	283.6
52	18492.8	110.6	73971.0	442.5	02	14095.9	70.3	56383.5	281.2
53	18383.2	109.6	73532.9	438.1	03	14026.2	69.7	56104.6	278.9
54	18274.8	108.4	73099.1	433.8	04	13957.0	69.2	55828.0	276.6
2.55	18167.4	107.4	72669.5	429.6	3.05	13888.4	68.6	55553.7	274.3
56	18061.0	106.4	72244.1	425.4	06	13820.4	68.0	55281.6	272.1
57	17955.7	105.3	71822.9	421.2	07	13752.9	67.5	55011.7	269.9
58	17851.4	104.3	71405.7	417.2	08	13686.0	66.9	54744.0	267.7
59	17748.1	103.3	70992.6	413.1	09	13619.6	66.4	54478.5	265.5
2.60	17645.8	102.3	70583.4	409.2	3.10	13553.8	65.8	54215.1	263.4
61	17544.5	101.3	70178.1	405.3	11	13488.4	65.4	53953.8	261.3
62	17444.2	100.3	69776.7	402.4	12	13423.7	64.7	53694.6	259.2
63	17344.8	99.4	69379.1	397.6	13	13359.4	64.3	53437.5	257.1
64	17246.3	98.5	68985.3	393.8	14	13295.6	63.8	53182.4	255.1
2.65	17148.8	97.5	68595.2	390.1	3.15	13232.3	63.3	52929.4	253.0
66	17052.2	96.6	68208.8	386.4	16	13169.6	62.7	52678.3	251.1
67	16956.5	95.7	67825.9	382.9	17	13107.3	62.3	52429.3	249.0
68	16861.7	94.8	67446.7	379.2	18	13045.5	61.8	52182.1	247.2
69	16767.7	94.0	67070.9	375.8	19	12984.2	61.3	51937.0	245.1
2.70	16674.7	93.0	66698.6	372.3	3.20	12923.4	60.8	51693.7	243.3
71	16582.4	92.3	66329.8	368.8	21	12863.1	60.3	51452.3	241.4
72	16491.1	91.3	65964.3	365.5	22	12803.2	59.9	51212.8	239.5
73	16400.6	90.5	65602.2	362.1	23	12743.8	59.4	50975.2	237.6
74	16310.9	89.7	65243.4	358.8	24	12684.8	59.0	50739.4	235.8
2.75	16222.0	88.9	64887.9	355.5	3.25	12626.3	58.5	50505.4	234.0
76	16133.9	88.1	64535.5	352.4	26	12568.3	58.0	50273.2	232.2
77	16046.6	87.3	64186.4	349.1	27	12510.7	57.6	50042.7	230.5
78	15960.1	86.5	63840.4	346.0	28	12453.5	57.2	49814.0	228.7
79	15874.4	85.7	63497.4	343.0	29	12396.8	56.7	49587.1	226.9
2.80	15789.4	85.0	63157.6	339.8	3.30	12340.5	56.3	49361.9	225.2
81	15705.2	84.2	62820.7	336.9	31	12284.6	55.9	49138.4	223.5
82	15621.7	83.5	62486.9	333.8	32	12229.1	55.5	48916.5	221.9
83	15539.0	82.7	62156.0	330.9	33	12174.1	55.0	48696.3	220.2
84	15457.0	82.0	61828.0	328.0	34	12119.4	54.7	48477.8	218.5
2.85	15375.7	81.3	61502.9	325.1	3.35	12065.2	54.2	48260.9	216.9
86	15295.1	80.6	61180.6	322.3	36	12011.4	53.8	48045.6	215.3
87	15215.3	79.8	60861.1	319.5	37	11958.0	53.4	47831.9	213.7
88	15136.1	79.2	60544.4	316.7	38	11904.9	53.1	47619.8	212.1
89	15057.6	78.5	60230.4	314.0	39	11852.3	52.6	47409.2	210.6

r^a	$w=5^d$		$w=10^d$		r^a	$w=5^d$		$w=10^d$	
3.40	11800.1	52.2	047200.2	209.0	3.90	09605.2	37.0	038420.7	148.3
41	11748.2	51.9	046992.8	207.4	91	09568.4	36.8	038273.4	147.3
42	11696.7	51.5	046786.8	206.0	92	09531.8	36.6	038127.1	146.3
43	11645.6	51.1	046582.4	204.4	93	09495.4	36.4	037981.6	145.5
44	11594.8	50.8	046379.4	203.0	94	09459.3	36.1	037837.1	144.5
3.45	11544.5	50.3	046177.9	201.5	3.95	09423.4	35.9	037693.5	143.6
46	11494.5	50.0	045977.8	200.1	96	09387.7	35.7	037550.9	142.6
47	11444.8	49.7	045779.2	198.6	97	09352.3	35.4	037409.1	141.8
48	11395.5	49.3	045582.0	197.2	98	09317.0	35.3	037268.2	140.9
49	11346.6	48.9	045386.3	195.7	99	09282.0	35.0	037128.1	140.1
3.50	11298.0	48.6	045191.9	194.4	4.00	09247.3	34.7	036989.0	139.1
51	11249.7	48.3	044998.9	193.0	01	09212.7	34.6	036850.7	138.3
52	11201.8	47.9	044807.3	191.6	02	09178.3	34.4	036713.3	137.4
53	11154.3	47.5	044617.0	190.3	03	09144.2	34.1	036576.7	136.6
54	11107.0	47.3	044428.1	188.9	04	09110.3	33.9	036441.0	135.7
3.55	11060.1	46.9	044240.5	187.6	4.05	09076.5	33.8	036306.1	134.9
56	11013.6	46.5	044054.2	186.3	06	09043.0	33.5	036172.1	134.0
57	10967.3	46.3	043869.3	184.9	07	09009.7	33.3	036038.9	133.2
58	10921.4	45.9	043685.6	183.7	08	08976.6	33.1	035906.4	132.5
59	10875.8	45.6	043503.2	182.4	09	08943.7	32.9	035774.8	131.6
3.60	10830.5	45.3	043322.0	181.2	4.10	08911.0	32.7	035644.0	130.8
61	10785.5	45.0	043142.1	179.9	11	08878.5	32.5	035514.0	130.0
62	10740.9	44.6	042963.5	178.6	12	08846.2	32.3	035384.8	129.2
63	10696.5	44.4	042786.1	177.4	13	08814.1	32.1	035256.4	128.4
64	10652.5	44.0	042609.9	176.2	14	08782.2	31.9	035128.7	127.7
3.65	10608.7	43.8	042434.9	175.0	4.15	08750.5	31.7	035001.8	126.9
66	10565.3	43.4	042261.1	173.8	16	08718.9	31.6	034875.7	126.1
67	10522.1	43.2	042088.5	172.6	17	08687.6	31.3	034750.3	125.4
68	10479.3	42.8	041917.1	171.4	18	08656.4	31.2	034625.7	124.6
69	10436.7	42.6	041746.8	170.3	19	08625.4	31.0	034501.8	123.9
3.70	10394.4	42.3	041577.7	169.1	4.20	08594.7	30.7	034378.6	123.2
71	10352.4	42.0	041409.7	168.0	21	08564.1	30.6	034256.2	122.4
72	10310.7	41.7	041242.8	166.9	22	08533.6	30.5	034134.5	121.7
73	10269.3	41.4	041077.1	165.7	23	08503.4	30.2	034013.6	120.9
74	10228.1	41.2	040912.4	164.7	24	08473.3	30.1	033893.3	120.3
3.75	10187.2	40.9	040748.9	163.5	4.25	08443.4	29.9	033773.7	119.6
76	10146.6	40.6	040586.4	162.5	26	08413.7	29.7	033654.9	118.8
77	10106.3	40.3	040425.1	161.3	27	08384.2	29.5	033536.7	118.2
78	10066.2	40.1	040264.7	160.4	28	08354.8	29.4	033419.3	117.4
79	10026.4	39.8	040105.5	159.2	29	08325.6	29.2	033302.5	116.8
3.80	09986.8	39.6	039947.3	158.2	4.30	08296.6	29.0	033186.4	116.1
81	09947.5	39.3	039790.1	157.2	31	08267.7	28.9	033071.0	115.4
82	09908.5	39.0	039634.0	156.1	32	08239.0	28.7	032956.2	114.8
83	09869.7	38.8	039478.8	155.2	33	08210.5	28.5	032842.1	114.1
84	09831.2	38.5	039324.7	154.1	34	08182.2	28.3	032728.6	113.5
3.85	09792.9	38.3	039171.6	153.1	4.35	08154.0	28.2	032615.8	112.8
86	09754.9	38.0	039019.5	152.1	36	08125.9	28.1	032503.7	112.1
87	09717.1	37.8	038868.4	151.1	37	08098.0	27.9	032392.2	111.5
88	09679.5	37.6	038718.2	150.2	38	08070.3	27.7	032281.3	110.9
89	09642.2	37.3	038569.0	149.2	39	08042.8	27.5	032171.1	110.2

r^s	$w=5d$		$w=10d$		r^s	$w=5d$		$w=10d$	
4.40	08015.4	27.4	032061.5	109.6	4.90	06820.4	20.9	027281.5	83.7
41	07988.1	27.3	031952.5	109.0	91	06799.6	20.8	027198.2	83.3
42	07961.0	27.1	031844.1	108.4	92	06778.8	20.8	027115.3	82.9
43	07934.1	26.9	031736.4	107.7	93	06758.2	20.6	027032.9	82.4
44	07907.3	26.8	031629.2	107.2	94	06737.7	20.5	026950.8	82.1
4.45	07880.7	26.6	031522.6	106.6	4.95	06717.3	20.4	026869.2	81.6
46	07854.2	26.5	031416.7	105.9	96	06697.0	20.3	026788.0	81.2
47	07827.8	26.4	031311.3	105.4	97	06676.8	20.2	026707.2	80.8
48	07801.6	26.2	031206.5	104.8	98	06656.7	20.1	026626.8	80.4
49	07775.6	26.0	031102.3	104.2	99	06636.7	20.0	026546.8	80.0
4.50	07749.7	25.9	030998.7	103.6	5.00	06616.8	19.9	026467.2	79.6
51	07723.9	25.8	030895.7	103.0	01	06597.0	19.8	026388.0	79.2
52	07698.3	25.6	030793.2	102.5	02	06577.3	19.7	026309.2	78.8
53	07672.8	25.5	030691.3	101.9	03	06557.7	19.6	026230.7	78.5
54	07647.5	25.3	030590.0	101.3	04	06538.2	19.5	026152.7	78.0
4.55	07622.3	25.2	030489.2	100.8	5.05	06518.8	19.4	026075.1	77.6
56	07597.2	25.1	030388.9	100.3	06	06499.5	19.3	025997.8	77.3
57	07572.3	24.9	030289.2	99.7	07	06480.2	19.3	025920.9	76.9
58	07547.5	24.8	030190.1	99.1	08	06461.1	19.1	025844.4	76.5
59	07522.9	24.6	030091.5	98.6	09	06442.1	19.0	025768.3	76.1
4.60	07498.4	24.5	029993.4	98.1	5.10	06423.1	19.0	025692.6	75.7
61	07474.0	24.4	029895.9	97.5	11	06404.3	18.8	025617.2	75.4
62	07449.7	24.3	029798.9	97.0	12	06385.5	18.8	025542.2	75.0
63	07425.6	24.1	029702.4	96.5	13	06366.9	18.6	025467.5	74.7
64	07401.6	24.0	029606.4	96.0	14	06348.3	18.6	025393.2	74.3
4.65	07377.7	23.9	029510.9	95.5	5.15	06329.8	18.5	025319.3	73.9
66	07354.0	23.7	029416.0	94.9	16	06311.4	18.4	025245.7	73.6
67	07330.4	23.6	029321.6	94.4	17	06293.1	18.3	025172.5	73.2
68	07306.9	23.5	029227.6	94.0	18	06274.9	18.2	025099.7	72.8
69	07283.6	23.3	029134.2	93.4	19	06256.8	18.1	025027.2	72.5
4.70	07260.3	23.3	029041.3	92.9	5.20	06238.7	18.1	024955.0	72.2
71	07237.2	23.1	028948.8	92.5	21	06220.8	17.9	024883.2	71.8
72	07214.2	23.0	028856.9	91.9	22	06202.9	17.9	024811.7	71.5
73	07191.4	22.8	028765.4	91.5	23	06185.1	17.8	024740.6	71.1
74	07168.6	22.8	028674.4	91.0	24	06167.5	17.6	024669.8	70.8
4.75	07146.0	22.6	028583.9	90.5	5.25	06149.8	17.7	024599.3	70.5
76	07123.5	22.5	028493.9	90.0	26	06132.3	17.5	024529.2	70.1
77	07101.1	22.4	028404.4	89.5	27	06114.9	17.4	024459.4	69.8
78	07078.8	22.3	028315.3	89.1	28	06097.5	17.4	024390.0	69.4
79	07056.7	22.1	028226.6	88.7	29	06080.2	17.3	024320.9	99.1
4.80	07034.6	22.1	028138.5	88.1	5.30	06063.0	17.2	024252.1	68.8
81	07012.7	21.9	028050.8	87.7	31	06045.9	17.1	024183.6	68.5
82	06990.9	21.8	027963.5	87.3	32	06028.9	17.0	024115.4	68.2
83	06969.2	21.7	027876.7	86.8	33	06011.9	17.0	024047.6	67.8
84	06947.6	21.6	027790.4	86.3	34	05995.0	16.9	023980.1	67.5
4.85	06926.1	21.5	027704.5	85.9	5.35	05978.2	16.8	023912.9	67.2
86	06904.8	21.3	027619.0	85.5	36	05961.5	16.7	023846.0	66.9
87	06883.5	21.3	027534.0	85.0	37	05944.9	16.6	023779.4	66.6
88	06862.4	21.1	027449.4	84.6	38	05928.3	16.6	023713.1	66.3
89	06841.3	21.1	027365.2	84.2	39	05911.8	16.5	023647.2	65.9

r^a	$w=5^d$		$w=10^d$		r^a	$w=5^d$		$w=10^d$	
5.40	05895.4	16.4	023581.5	65.7	5.90	05162.1	13.1	020648.3	52.6
41	05879.0	16.4	023516.2	65.3	91	05149.0	13.1	020595.9	52.4
42	05862.8	16.2	023451.1	65.1	92	05135.9	13.1	020543.8	52.1
43	05846.6	16.2	023386.4	64.7	93	05123.0	12.9	020491.8	52.0
44	05830.5	16.1	023321.9	64.5	94	05110.0	13.0	020440.1	51.7
5.45	05814.4	16.1	023257.8	64.1	5.95	05097.1	12.9	020388.6	51.5
46	05798.5	15.9	023193.9	63.9	96	05084.3	12.8	020337.3	51.3
47	05782.6	15.9	023130.3	63.6	97	05071.6	12.7	020286.2	51.1
48	05766.8	15.8	023067.0	63.3	98	05058.8	12.8	020235.4	50.8
49	05751.0	15.8	023004.0	63.0	99	05046.2	12.6	020184.7	50.7
5.50	05735.3	15.7	022941.3	62.7	6.0	05033.6	12.6	020134.3	50.4
51	05719.7	15.6	022878.9	62.4	1	04910.3	123.3	019641.2	493.1
52	05704.2	15.5	022816.8	62.1	2	04792.0	118.3	019167.9	473.3
53	05688.7	15.5	022754.9	61.9	3	04678.3	113.7	018713.4	454.5
54	05673.3	15.4	022693.3	61.6	4	04569.1	109.2	018276.5	436.9
5.55	05658.0	15.3	022632.0	61.3	6.5	04464.1	105.0	017856.3	420.2
56	05642.7	15.3	022571.0	61.0	6	04363.0	101.1	017452.1	404.2
57	05627.6	15.1	022510.2	60.8	7	04265.7	97.3	017062.8	389.3
58	05612.4	15.2	022449.7	60.5	8	04172.0	93.7	016687.8	375.0
59	05597.4	15.0	022389.5	60.2	9	04081.6	90.4	016326.3	361.5
5.60	05582.4	15.0	022329.6	59.9	7.0	03994.4	87.2	015977.7	348.6
61	05567.5	14.9	022269.9	59.7	1	03910.3	84.1	015641.4	336.3
62	05552.6	14.9	022210.5	59.4	2	03829.2	81.1	015316.7	324.7
63	05537.8	14.8	022151.3	59.2	3	03750.8	78.4	015003.0	313.7
64	05523.1	14.7	022092.5	58.8	4	03675.0	75.8	014699.9	303.1
5.65	05508.5	14.6	022033.8	58.7	7.5	03601.7	73.3	014406.9	293.0
66	05493.9	14.6	021975.5	58.3	6	03530.9	70.8	014123.5	283.4
67	05479.3	14.6	021917.3	58.2	7	03462.3	68.6	013849.3	274.2
68	05464.9	14.4	021859.5	57.8	8	03395.9	66.4	013583.8	265.5
69	05450.5	14.4	021801.9	57.6	9	03331.7	64.2	013326.7	257.1
5.70	05436.1	14.4	021744.5	57.4	8.0	03269.4	62.3	013077.6	249.1
71	05421.9	14.2	021687.4	57.1	1	03209.0	60.4	012836.2	241.4
72	05407.6	14.3	021630.6	56.8	2	03150.5	58.5	012602.1	234.1
73	05393.5	14.1	021574.0	56.6	3	03093.8	56.7	012375.0	227.1
74	05379.4	14.1	021517.6	56.4	4	03038.7	55.1	012154.7	220.3
5.75	05365.4	14.0	021461.5	56.1	8.5	02985.2	53.5	011940.8	213.9
76	05351.4	14.0	021405.7	55.8	6	02933.3	51.9	011733.2	207.6
77	05337.5	13.9	021350.0	55.7	7	02882.9	50.4	011531.4	201.8
78	05323.7	13.8	021294.7	55.3	8	02833.9	49.0	011335.4	196.0
79	05309.9	13.8	021239.5	55.2	9	02786.2	47.7	011144.9	190.5
5.80	05296.2	13.7	021184.6	54.9	9.0	02739.9	46.3	010959.7	185.2
81	05282.5	13.7	021129.9	54.7	1	02694.9	45.0	010779.5	180.2
82	05268.9	13.6	021075.5	54.4	2	02651.1	43.8	010604.3	175.2
83	05255.3	13.6	021021.3	54.2	3	02608.4	42.7	010433.7	170.6
84	05241.8	13.5	020967.3	54.0	4	02566.9	41.5	010267.6	166.1
5.85	05228.4	13.4	020913.6	53.7	9.5	02526.5	40.4	010106.0	161.6
86	05215.0	13.4	020860.1	53.5	6	02487.1	39.4	009948.5	157.5
87	05201.7	13.3	020806.8	53.3	7	02448.8	38.3	009795.0	153.5
88	05188.4	13.3	020753.7	53.1	8	02411.4	37.4	009645.5	149.5
89	05175.2	13.2	020700.9	52.8	9	02374.9	36.5	009499.7	145.8

r^2	$w=5d$		$w=10d$		r^2	$w=5d$		$w=10d$	
10.0	02339.4	35.5	009357.6	142.1	15.0	01273.4	12.8	005093.6	51.4
1	02304.7	34.7	009218.9	138.7	1	01260.8	12.6	005043.1	50.5
2	02270.9	33.8	009083.7	135.2	2	01248.4	12.4	004993.4	49.7
3	02237.9	33.0	008951.7	132.0	3	01236.1	12.3	004944.5	48.9
4	02205.7	32.2	008822.9	128.8	4	01224.1	12.0	004896.5	48.0
10.5	02174.3	31.4	008697.2	125.7	15.5	01212.3	11.8	004849.1	47.4
6	02143.6	30.7	008574.4	122.8	6	01200.6	11.7	004802.6	46.5
7	02113.6	30.0	008454.5	119.9	7	01189.2	11.4	004756.8	45.8
8	02084.3	29.3	008337.3	117.2	8	01177.9	11.3	004711.7	45.1
9	02055.7	28.6	008222.9	114.4	9	01166.8	11.1	004667.3	44.4
11.0	02027.7	28.0	008111.0	111.9	16.0	01155.9	10.9	004623.6	43.7
1	02000.4	27.3	008001.6	109.4	1	01145.2	10.7	004580.6	43.0
2	01973.7	26.7	007894.7	106.9	2	01134.6	10.6	004538.3	42.3
3	01947.5	26.2	007790.1	104.6	3	01124.1	10.5	004496.6	41.7
4	01922.0	25.5	007687.9	102.2	4	01113.9	10.2	004455.5	41.1
11.5	01896.9	25.1	007587.8	100.1	16.5	01103.8	10.1	004415.1	40.4
6	01872.5	24.4	007489.9	97.9	6	01093.8	10.0	004375.2	39.9
7	01848.5	24.0	007394.1	95.8	7	01084.0	9.8	004336.0	39.2
8	01825.1	23.4	007300.3	93.8	8	01074.3	9.7	004297.3	38.7
9	01802.1	23.0	007208.5	91.8	9	01064.8	9.5	004259.2	38.1
12.0	01779.6	22.5	007118.5	90.0	17.0	01055.4	9.4	004221.7	37.5
1	01757.6	22.0	007030.5	88.0	1	01046.2	9.2	004184.7	37.0
2	01736.1	21.5	006944.2	86.3	2	01037.1	9.1	004148.3	36.4
3	01714.9	21.2	006859.7	84.5	3	01028.1	9.0	004112.4	35.9
4	01694.2	20.7	006776.9	82.8	4	01019.2	8.9	004077.0	35.4
12.5	01673.9	20.3	006695.7	81.2	17.5	01010.5	8.7	004042.1	34.9
6	01654.0	19.9	006616.2	79.5	6	01001.9	8.6	004007.7	34.4
7	01634.5	19.5	006538.2	78.0	7	00993.4	8.5	003973.8	33.9
8	01615.4	19.1	006461.7	76.5	8	00985.1	8.3	003940.3	33.5
9	01596.7	18.7	006386.7	75.0	9	00976.8	8.3	003907.4	32.9
13.0	01578.3	18.4	006313.2	73.5	18.0	00968.7	8.1	003874.8	32.6
1	01560.3	18.0	006241.0	72.2	1	00960.7	8.0	003842.8	32.0
2	01542.6	17.7	006170.2	70.8	2	00952.8	7.9	003811.1	31.7
3	01525.2	17.4	006100.8	69.4	3	00945.0	7.8	003780.0	31.1
4	01508.2	17.0	006032.6	68.2	4	00937.3	7.7	003749.2	30.8
13.5	01491.4	16.8	005965.7	66.9	18.5	00929.7	7.6	003718.8	30.4
6	01475.0	16.4	005900.0	65.7	6	00922.2	7.5	003688.9	29.9
7	01458.9	16.1	005835.6	64.4	7	00914.8	7.4	003659.3	29.6
8	01443.1	15.8	005772.2	63.4	8	00907.5	7.3	003630.2	29.1
9	01427.5	15.6	005710.1	62.1	9	00900.3	7.2	003601.4	28.8
14.0	01412.2	15.3	005649.0	61.1	19.0	00893.2	7.1	003573.0	28.4
1	01397.2	15.0	005589.0	60.0	1	00886.2	7.0	003545.0	28.0
2	01382.5	14.7	005530.1	58.9	2	00879.3	6.9	003517.3	27.7
3	01368.0	14.5	005472.2	57.9	3	00872.5	6.8	003490.0	27.3
4	01353.8	14.2	005415.3	56.9	4	00865.8	6.7	003463.1	26.9
14.5	01339.8	14.0	005359.3	56.0	19.5	00859.1	6.7	003436.5	26.6
6	01326.1	13.7	005304.4	54.9	6	00852.5	6.6	003410.2	26.3
7	01312.6	13.5	005250.3	54.1	7	00846.1	6.4	003384.3	25.9
8	01299.3	13.3	005197.2	53.1	8	00839.7	6.4	003358.7	25.6
9	01286.2	13.1	005145.0	52.2	9	00833.3	6.4	003333.4	25.3

r^a	$w=5d$		$w=10d$		r^a	$w=5d$		$w=10d$	
20.0	00827.1	6.2	003308.4	25.0	25.0	00591.8	3.6	002367.3	14.3
1	00820.9	6.2	003283.7	24.7	1	00588.3	3.5	002353.2	14.1
2	00814.8	6.1	003259.4	24.3	2	00584.8	3.5	002339.2	14.0
3	00808.8	6.0	003235.3	24.1	3	00581.3	3.5	002325.3	13.9
4	00802.9	5.9	003211.6	23.7	4	00577.9	3.4	002311.6	13.7
20.5	00797.0	5.9	003188.1	23.5	25.5	00574.5	3.4	002298.0	13.6
6	00791.2	5.8	003164.9	23.2	6	00571.1	3.4	002284.6	13.4
7	00785.5	5.7	003142.0	22.9	7	00567.8	3.3	002271.2	13.4
8	00779.8	5.7	003119.4	22.6	8	00564.5	3.3	002258.0	13.2
9	00774.3	5.5	003097.0	22.4	9	00561.2	3.3	002245.0	13.0
21.0	00768.7	5.6	003074.9	22.1	26.0	00558.0	3.2	002232.0	13.0
1	00763.3	5.4	003053.1	21.8	1	00554.8	3.2	002219.2	12.8
2	00757.9	5.4	003031.5	21.6	2	00551.6	3.2	002206.5	12.7
3	00752.5	5.4	003010.2	21.3	3	00548.5	3.1	002194.0	12.5
4	00747.3	5.2	002989.1	21.1	4	00545.4	3.1	002181.5	12.5
21.5	00742.1	5.2	002968.3	20.8	26.5	00542.3	3.1	002169.2	12.3
6	00736.9	5.2	002947.7	20.6	6	00539.2	3.1	002156.9	12.3
7	00731.8	5.1	002927.3	20.4	7	00536.2	3.0	002144.8	12.1
8	00726.8	5.0	002907.2	20.1	8	00533.2	3.0	002132.8	12.0
9	00721.8	5.0	002887.3	19.9	9	00530.2	3.0	002121.0	11.8
22.0	00716.9	4.9	002867.7	19.6	27.0	00527.3	2.9	002109.2	11.8
1	00712.1	4.8	002848.2	19.5	1	00524.4	2.9	002097.5	11.7
2	00707.2	4.9	002829.0	19.2	2	00521.5	2.9	002086.0	11.5
3	00702.5	4.7	002810.0	19.0	3	00518.6	2.9	002074.5	11.5
4	00697.8	4.7	002791.2	18.8	4	00515.8	2.8	002063.2	11.3
22.5	00693.2	4.6	002772.6	18.6	27.5	00513.0	2.8	002051.9	11.3
6	00688.6	4.6	002754.2	18.4	6	00510.2	2.8	002040.8	11.1
7	00684.0	4.6	002736.1	18.1	7	00507.4	2.8	002029.7	11.1
8	00679.5	4.5	002718.1	18.0	8	00504.7	2.7	002018.8	10.9
9	00675.1	4.4	002700.3	17.8	9	00502.0	2.7	002008.0	10.8
23.0	00670.7	4.4	002682.7	17.6	28.0	00499.3	2.7	001997.2	10.8
1	00666.3	4.4	002665.3	17.4	1	00496.6	2.7	001986.6	10.6
2	00662.0	4.3	002648.1	17.2	2	00494.0	2.6	001976.0	10.6
3	00657.8	4.2	002631.0	17.1	3	00491.4	2.6	001965.5	10.5
4	00653.5	4.3	002614.2	16.8	4	00488.8	2.6	001955.2	10.3
23.5	00649.4	4.1	002597.5	16.7	28.5	00486.2	2.6	001944.9	10.3
6	00645.3	4.1	002581.0	16.5	6	00483.7	2.5	001934.7	10.2
7	00641.2	4.1	002564.7	16.3	7	00481.1	2.6	001924.6	10.1
8	00637.1	4.1	002548.6	16.1	8	00478.6	2.5	001914.6	10.0
9	00633.1	4.0	002532.6	16.0	9	00476.2	2.4	001904.7	9.9
24.0	00629.2	3.9	002516.8	15.8	29.0	00473.7	2.5	001894.8	9.9
1	00625.3	3.9	002501.1	15.7	1	00471.3	2.4	001885.0	9.8
2	00621.4	3.9	002485.7	15.4	2	00468.8	2.5	001875.4	9.6
3	00617.6	3.8	002470.3	15.4	3	00466.4	2.4	001865.8	9.6
4	00613.8	3.8	022455.2	15.1	4	00464.1	2.3	001856.3	9.5
24.5	00610.0	3.8	002440.1	15.1	29.5	00461.7	2.4	001846.8	9.5
6	00606.3	3.7	002425.3	14.8	6	00459.4	2.3	001837.5	9.3
7	00602.6	3.7	002410.6	14.7	7	00457.1	2.3	001828.2	9.3
8	00599.0	3.6	002396.0	14.6	8	00454.8	2.3	001819.0	9.2
9	00595.4	3.6	002381.6	14.4	9	00452.5	2.3	001809.9	9.1

r^2	$m=5^d$	$m=10^d$	r^2	$m=5^d$	$m=10^d$
30.0	00450.2 2.3	001800.9 9.0	35.0	00357.3 1.5	001429.1 6.2
1	00448.0 2.2	001791.9 9.0	1	00355.8 1.5	001423.0 6.1
2	00445.7 2.3	001783.0 8.9	2	00354.2 1.6	001416.9 6.1
3	00443.5 2.2	001774.2 8.8	3	00352.7 1.5	001410.9 6.0
4	00441.4 2.1	001765.4 8.8	4	00351.2 1.5	001404.9 6.0
30.5	00439.2 2.2	001756.8 8.6	35.5	00349.8 1.4	001399.0 5.9
6	00437.0 2.2	001748.2 8.6	6	00348.3 1.5	001393.1 5.9
7	00434.9 2.1	001739.6 8.6	7	00346.8 1.5	001387.3 5.8
8	00432.8 2.1	001731.2 8.4	8	00345.4 1.4	001381.5 5.8
9	00430.7 2.1	001722.8 8.4	9	00343.9 1.5	001375.7 5.8
31.0	00428.6 2.1	001714.4 8.4	36.0	00342.5 1.4	001370.0 5.7
1	00426.5 2.1	001706.2 8.2	1	00341.1 1.4	001364.3 5.7
2	00424.5 2.0	001698.0 8.2	2	00339.7 1.4	001358.6 5.7
3	00422.5 2.0	001689.8 8.2	3	00338.3 1.4	001353.0 5.6
4	00420.4 2.1	001681.8 8.0	4	00336.9 1.4	001347.4 5.6
31.5	00418.4 2.0	001673.8 8.0	36.5	00335.5 1.4	001341.9 5.5
6	00416.5 1.9	001665.8 8.0	6	00334.1 1.4	001336.4 5.5
7	00414.5 2.0	001658.0 7.8	7	00332.7 1.4	001331.0 5.4
8	00412.5 2.0	001650.2 7.8	8	00331.4 1.3	001325.5 5.5
9	00410.6 1.9	001642.4 7.8	9	00330.0 1.4	001320.2 5.3
32.0	00408.7 1.9	001634.7 7.7	37.0	00328.7 1.3	001314.8 5.4
1	00406.8 1.9	001627.1 7.6	1	00327.4 1.3	001309.5 5.3
2	00404.9 1.9	001619.5 7.6	2	00326.1 1.3	001304.2 5.3
3	00403.0 1.9	001612.0 7.5	3	00324.7 1.4	001299.0 5.2
4	00401.1 1.9	001604.5 7.5	4	00323.4 1.3	001293.8 5.2
32.5	00399.3 1.8	001597.1 7.4	37.5	00322.1 1.3	001288.6 5.2
6	00397.4 1.9	001589.8 7.3	6	00320.9 1.2	001283.4 5.2
7	00395.6 1.8	001582.5 7.3	7	00319.6 1.3	001278.3 5.1
8	00393.8 1.8	001575.3 7.2	8	00318.3 1.3	001273.3 5.0
9	00392.0 1.8	001568.1 7.2	9	00317.1 1.2	001268.2 5.1
33.0	00390.2 1.8	001561.0 7.1	38.0	00315.8 1.3	001263.2 5.0
1	00388.5 1.7	001553.9 7.1	1	00314.6 1.2	001258.3 4.9
2	00386.7 1.8	001546.9 7.0	2	00313.3 1.3	001253.3 5.0
3	00385.0 1.7	001539.9 7.0	3	00312.1 1.2	001248.4 4.9
4	00383.3 1.7	001533.0 6.9	4	00310.9 1.2	001243.6 4.8
33.5	00381.5 1.8	001526.1 6.9	38.5	00309.7 1.2	001238.7 4.9
6	00379.8 1.7	001519.3 6.8	6	00308.5 1.2	001233.9 4.8
7	00378.1 1.7	001512.6 6.7	7	00307.3 1.2	001229.1 4.8
8	00376.5 1.6	001505.9 6.7	8	00306.1 1.2	001224.4 4.7
9	00374.8 1.7	001499.2 6.7	9	00304.9 1.2	001219.7 4.7
34.0	00373.2 1.6	001492.6 6.6	39.0	00303.7 1.2	001215.0 4.7
1	00371.5 1.7	001486.0 6.6	1	00302.6 1.1	001210.3 4.7
2	00369.9 1.6	001479.5 6.5	2	00301.4 1.2	001205.7 4.6
3	00368.3 1.6	001473.1 6.4	3	00300.3 1.1	001201.1 4.6
4	00366.7 1.6	001466.7 6.4	4	00299.1 1.2	001196.5 4.6
34.5	00365.1 1.6	001460.3 6.4	39.5	00298.0 1.1	001192.0 4.5
6	00363.5 1.6	001453.9 6.4	6	00296.9 1.1	001187.5 4.5
7	00361.9 1.6	001447.7 6.2	7	00295.7 1.2	001183.0 4.5
8	00360.4 1.5	001441.4 6.3	8	00294.6 1.1	001178.5 4.5
9	00358.8 1.6	001435.3 6.1	9	00293.5 1.1	001174.1 4.4

r^2	$w=5d$		$w=10d$		r^2	$w=5d$		$w=10d$	
40.0	00292.4	1.1	001169.7	4.4	41.0	00281.8	1.0	001127.2	4.1
1	00291.3	1.1	001165.3	4.4	1	00280.8	1.0	001123.0	4.2
2	00290.2	1.1	001161.0	4.3	2	00279.7	1.1	001119.0	4.0
3	00289.2	1.0	001156.7	4.3	3	00278.7	1.0	001114.9	4.1
4	00288.1	1.1	001152.4	4.3	4	00277.7	1.0	001110.9	4.0
40.5	00287.0	1.1	001148.1	4.3	41.5	00276.7	1.0	001106.9	4.0
6	00286.0	1.0	001143.9	4.2	6	00275.7	1.0	001102.9	4.0
7	00284.9	1.1	001139.6	4.3	7	00274.7	1.0	001098.9	4.0
8	00283.9	1.0	001135.5	4.1	8	00273.7	1.0	001095.0	3.9
9	00282.8	1.1	001131.3	4.2	9	00272.8	0.9	001091.0	4.0
					42.0	00271.8	1.0	001087.2	3.8

IV

TABLA DEL COEFICIENTE $\lambda = 2 - w^2 k^2 r^{-3}$

(Método aproximado de extrapolación)

$w = 5d$

r^2	λ		r^2	λ		r^2	λ	
2.0	1.997384	185	4.0	1.999075	34	6.0	1.999497	12
1	7569	164	1	199	32	1	509	12
2	7733	146	2	141	29	2	521	11
3	7879	131	3	170	28	3	532	11
4	8010	118	4	198	27	4	543	11
2.5	1.998128	107	4.5	1.999225	25	6.5	1.999554	10
6	8235	98	6	250	24	6	564	9
7	8333	88	7	274	23	7	573	9
8	8421	81	8	297	21	8	583	9
9	8502	74	9	318	20	9	592	9
3.0	1.998576	69	5.0	1.999338	20	7.0	1.999601	72
1	8645	63	1	358	18	8.0	673	53
2	8708	58	2	376	18	9.0	726	40
3	8766	54	3	394	16	10.0	766	31
4	8820	50	4	410	16	11.0	797	25
3.5	1.998870	47	5.5	1.999426	16	12.0	1.999822	20
6	8917	44	6	442	14	13.0	842	17
7	8961	40	7	456	14	14.0	859	14
8	9001	38	8	470	14	15.0	873	11
9	9039	36	9	484	13	16.0	884	10
						17.0	894	9
						18.0	903	8
						19.0	911	6
						20.0	917	

$w = 10^d$

ρ^2	λ	ρ^2	λ	ρ^2	λ			
2.0	1.989538	738	6.0	1.997987	49	10.0	1.999064	14
1	990276	656	1	8036	47	1	078	14
2	990932	585	2	8083	46	2	092	13
3	991517	526	3	8129	43	3	105	13
4	992041	473	4	8172	42	4	118	12
2.5	1.992514	428	6.5	1.998214	41	10.5	1.999130	13
6	2942	388	6	8255	39	6	143	12
7	3330	354	7	8294	37	7	155	11
8	3684	324	8	8331	36	8	166	12
9	4008	297	9	8367	35	9	178	11
3.0	1.994305	273	7.0	1.998402	34	11.0	1.999189	10
1	4578	253	1	8436	32	1	199	12
2	4831	233	2	8468	32	2	211	10
3	5064	216	3	8500	30	3	221	10
4	5280	201	4	8530	29	4	231	10
3.5	1.995481	187	7.5	1.998559	29	11.5	1.999241	10
6	5668	174	6	8588	27	6	251	10
7	5842	163	7	8615	27	7	261	9
8	6005	153	8	8642	25	8	270	9
9	6158	143	9	8667	25	9	279	9
4.0	1.996301	135	8.0	1.998692	24	12.0	1.999288	9
1	6436	126	1	8716	24	1	297	9
2	6562	119	2	8740	22	2	306	8
3	6681	113	3	8762	23	3	314	8
4	6794	106	4	8785	21	4	322	8
4.5	1.996900	100	8.5	1.998806	21	12.5	1.999330	8
6	7000	96	6	8827	20	6	338	8
7	7096	90	7	8847	19	7	346	8
8	7186	86	8	8866	20	8	354	7
9	7272	81	9	8886	18	9	361	7
5.0	1.997353	78	9.0	1.998904	18	13.0	1.999368	67
1	7431	73	1	8922	18	14.0	435	56
2	7504	71	2	8940	17	15.0	491	47
3	7575	67	3	8957	16	16.0	538	40
4	7642	64	4	8973	16	17.0	578	35
5.5	1.997706	61	9.5	1.998989	16	18.0	1.999613	30
6	7767	59	6	9005	15	19.0	643	26
7	7826	56	7	9020	15	20.0	669	
8	7882	53	8	9035	14			
9	7935	52	9	9050	14			

V

EJEMPLOS

Cálculo de efemérides aproximadas

A) De oposición del asteroide (627) Charis.

Con los elementos orbitales :

Epoca : 1933 Mayo 21				Constantes				
M_0	293°478	ω	177°613	} 1950.0	a_x	+0.77363	, b_x	+0.63004
φ	3.383	Ω	143.053		a_y	-0.58319	, b_y	+0.74962
μ	718"676	i	6.449		a_z	-0.24782	, b_z	+0.20277
a	2.8995							

el cálculo directo (con 5 decimales) de las coordenadas heliocéntricas ecuatoriales da :

	1950 Dic. 15	1950 Dic. 25	1951 Febr. 3
x	-0.52068	-0.61615	-0.99020
y	+2.81748	+2.80179	+2.70936
z	+0.96800	+0.96962	+0.96574

Para aplicar el método de extrapolación tomamos como valores iniciales los correspondientes a las fechas Diciembre 15 y Diciembre 25 ; en el esquema siguiente esos valores se encuentran en la primera y segunda columna y están en **negrita**. En cada columna los productos λx , λy , λz se refieren a los valores de la columna sucesiva ; a partir de la tercera columna las coordenadas x , y , z se obtienen con la fórmula general de extrapolación (10), es decir :

$$x_{i+1} = \lambda_i x_i - x_{i-1}$$

$$y_{i+1} = \lambda_i y_i - y_{i-1}$$

$$z_{i+1} = \lambda_i z_i - z_{i-1}$$

El coeficiente de extrapolación λ_i se saca cada vez de la tabla IV en función de $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$ ($w = 10^4$)

¹ Cfr. *Petites planètes*, Parte II, Leningrado, 1947.

Dic. 15	Dic. 25	Enero 4	Enero 14	Enero 24	Febr. 3	1950/51
-1.2317	-1.4212	-1.6091	-1.7953			λx
-0.5207	-0.6162	-0.7110	-0.8050	-0.8981	-0.9903	x
-0.1296	+0.0448	+0.2179	+0.3842	+0.5386	+0.6764	X
-0.6503	-0.5714	-0.4931	-0.4208	-0.3595	-0.3139	$\Delta \cos \delta \cos \alpha$
						$\cos \alpha$
+5.6006	+5.5632	+5.5199	+5.4707			λy
+2.8175	+2.8018	+2.7831	+2.7614	+2.7368	+2.7093	y
-0.8951	-0.9014	-0.8797	-0.8307	-0.7559	-0.6577	Y
+1.9224	+1.9004	+1.9034	+1.9307	+1.9809	+2.0516	$\Delta \cos \delta \sin \alpha$
+0.9473	+0.9577	+0.9680	+0.9771	+0.9839	+0.9885	$\sin \alpha$
-0.3383	-0.3007	-0.2591	-0.2180	-0.1815	-0.1530	$\operatorname{tg} \alpha \text{ ó } \operatorname{ctg} \alpha$
7 ^h 14 ^m .8	7 ^h 6 ^m .9	6 ^h 58 ^m .1	6 ^h 49 ^m .2	6 ^h 41 ^m .2	6 ^h 34 ^m .8	α
+1.9382	+1.9384	+1.9386	+1.9358			λz
+0.9680	+0.9696	+0.9702	+0.9698	+0.9684	+0.9660	z
-0.3882	-0.3909	-0.3815	-0.3603	-0.3278	-0.2853	Z
+0.5798	+0.5787	+0.5887	+0.6095	+0.6406	+0.6807	$\Delta \sin \delta$
+2.0293	+1.9843	+1.9663	+1.9759	+2.0133	+2.0755	$\Delta \cos \delta$
		+0.9580	+0.9555			$\cos \delta$
+0.2857	+0.2916	+0.2994	+0.3085	+0.3182	+0.3280	$\operatorname{tg} \delta$
+15°57'	+16°15'	+16°40'	+17°9'	+17°39'	+18°10'	δ
	9.1699	9.1925	9.2139	9.2345		r^2
	1.99893	1.99894	1.99894	1.99895		λ
		0.4817	0.4823			[r]
		2.0525	2.0679			Δ
		0.3123	0.3156			[Δ]

Oposición 4

Los valores de x , y , z arriba indicados (cálculo directo) de la fecha Febrero 3, con respecto a los calculados por el método de extrapolación (última columna) difieren, respectivamente, de +1, +1, -3 unidades de la cuarta cifra decimal, lo cual debe considerarse un buen acuerdo si se tiene en cuenta el grado de precisión que se quiere alcanzar.

B) De oposición del asteroide (1339) Désagneuxa.

Con los elementos orbitales :

Epoca : 1934 Dic. 26				Constantes			
M_0	357°888	ω	155°751	a_x	+0.03414	b_x	-0.98950
φ	3.144	Ω	292.041	a_y	+0.89039	b_y	+0.09391
μ	675''714	i	8.710	a_z	+0.45394	b_z	-0.10977
a	3.0211						

¹ Cfr. *Petites planètes*, Parte II, Leningrado, 1947.

el cálculo directo da :

	1950 Dic. 15	1950 Dic. 25	1951 Febr. 3
x	-0.60032	-0.70120	-1.09465
y	+2.53442	+2.52071	+2.43420
z	+1.18138	+1.15846	+1.05242

y el método de extrapolación ($w = 10^d$) :

Dic. 15	Dic. 25	Enero 4	Enero 14	Enero 24	Febr. 3	1950/51
-1.4015	-1.6014	-1.7993	-1.9950			λx
-0.6003	-0.7012	-0.8012	-0.9002	-0.9981	-1.0948	x
-0.1296	+0.0448	+0.2179	+0.3842	+0.5386	+0.6764	X
-0.7299	-0.6564	-0.5833	-0.5160	-0.4595	-0.4184	$\Delta \cos \delta \cos z$
						$\cos z$
+5.0382	+5.0044	+4.9643	+4.9179			λy
+2.5344	+2.5207	+2.5038	+2.4837	+2.4605	+2.4342	y
-0.8951	-0.9014	-0.8797	-0.8307	-0.7559	-0.6577	Y
+1.6393	+1.6193	+1.6241	+1.6530	+1.7046	+1.7765	$\Delta \cos \delta \sin z$
+0.9135	+0.9268	+0.9411	+0.9545	+0.9655	+0.9734	$\sin z$
-0.4453	-0.4054	-0.3592	-0.3122	-0.2696	-0.2355	$\operatorname{tg} z \text{ ó } \operatorname{ctg} z$
7 ^b 36 ^m 0	7 ^b 28 ^m 3	7 ^b 19 ^m 0	7 ^b 9 ^m 4	7 ^b 0 ^m 4	6 ^b 53 ^m 0	z
+2.3155	+2.2668	+2.2152	+2.1608			λz
+1.1814	+1.1585	+1.1341	+1.1083	+1.0811	+1.0525	z
-0.3882	-0.3909	-0.3815	-0.3603	-0.3278	-0.2853	Z
+0.7932	+0.7676	+0.7526	+0.7480	+0.7533	+0.7672	$\Delta \sin \delta$
+1.7945	+1.7472	+1.7257	+1.7318	+1.7655	+1.8250	$\Delta \cos \delta$
		+0.9166	+0.9180			$\cos \delta$
+0.4420	+0.4393	+0.4361	+0.4319	+0.4267	+0.4204	$\operatorname{tg} \delta$
+23°51'	+23°43'	+23°34'	+23°22'	+23°6'	+22°48'	δ
	8.1877	8.1971	8.2075	8.2190		r^2
	1.99874	1.99874	1.99874	1.99875		λ
		0.4569	0.4571			$[r]$
		1.8827	1.8865			Δ
		0.2748	0.2757			$[\Delta]$

Oposición 8

Las diferencias entre los valores de las coordenadas x, y, z para la última fecha según el cálculo directo y los obtenidos por el método de extrapolación, resultan así satisfactoriamente de +1, 0, -1 unidades de la cuarta cifra decimal.

C) Del cometa 1949a. Con los elementos orbitales :

		Constantes	
T 1950 Enero 19.516	ω 40°16'	m_x -2.17570	n_x +0.75514
q 2.5484	Ω 221 39	m_y -0.93233	n_y +2.60650
	i 131 19	m_z +0.94411	n_z +4.31424

¹ Cfr. *Announcement Card* N° 996 de Harvard.

el cálculo directo da :

	1949 Mayo 21	1949 Mayo 26	1949 Junio 15
x	-1.76679	-1.78819	-1.87071
y	-2.21933	-2.20419	-2.13990
z	-2.20652	-2.14781	-1.90937

y el método de extrapolación ($w=5^d$) :

Mayo 21	Mayo 26	Mayo 31	Junio 5	Junio 10	Junio 15	1949
-3.5761	-3.6183	-3.6599	-3.7009			λx
-1.7668	-1.7882	-1.8093	-1.8301	-1.8506	-1.8708	x
+0.5119	+0.4374	+0.3597	+0.2795	+0.1973	+0.1138	X
-1.2549	-1.3508	-1.4496	-1.5506	-1.6533	-1.7570	$\Delta \cos \delta \cos \alpha$
-0.6627	-0.7032	-0.7396	-0.7717	-0.7993	-0.8228	$\cos \alpha$
-4.4080	-4.3770	-4.3452	-4.3126			λy
-2.2193	-2.2042	-2.1887	-2.1728	-2.1565	-2.1398	y
+0.8012	+0.8385	+0.8698	+0.8949	+0.9137	+0.9261	Y
-1.4181	-1.3657	-1.3189	-1.2779	-1.2428	-1.2137	$\Delta \cos \delta \sin \alpha$
+1.1301	+1.0111	+0.9098	+0.8241	+0.7517	+0.6908	$\text{tg } \alpha \text{ ó } \text{ctg } \alpha$
$15^h 14^m 0$	$15^h 1^m 3$	$14^h 49^m 2$	$14^h 38^m 0$	$14^h 27^m 7$	$14^h 18^m 6$	α
-4.2953	-4.1772	-4.0585	-3.9390			λz
-2.2065	-2.1478	-2.0888	-2.0294	-1.9697	-1.9096	z
+0.3475	+0.3636	+0.3772	+0.3881	+0.3963	+0.4016	Z
-1.8590	-1.7842	-1.7116	-1.6413	-1.5734	-1.5080	$\Delta \sin \delta$
+1.8936	+1.9209	+1.9600	+2.0093	+2.0684	+2.1354	$\Delta \cos \delta$
+0.7137	+0.7327	+0.7131	+0.7744	+0.7958	+0.8168	$\cos \delta$
-0.9817	-0.9288	-0.8733	-0.8169	-0.7607	-0.7062	$\text{tg } \delta$
$-44^{\circ} 28'$	$-42^{\circ} 53'$	$-41^{\circ} 08'$	$-39^{\circ} 15'$	$-37^{\circ} 16'$	$-35^{\circ} 14'$	δ
2.653	2.622	2.749	2.595	2.599	2.614	Δ
	12.6692	12.4271	12.1888	11.9549		r^2
	1.99984	1.99983	1.99983	1.99982		λ

También en este caso las diferencias entre los valores obtenidos, por ambos métodos, de las coordenadas heliocéntricas ecuatoriales x , y , z , relativas a la fecha 1949 Junio 15 son satisfactorias, porque resultan de +1, -1, +2 unidades de la última cifra decimal considerada.

MINISTERIO DE EDUCACION
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA
PUBLICACIONES DEL OBSERVATORIO ASTRONOMICO

SERIE ASTRONOMICA

(Antes Publicaciones)

- I.*. W. J. HUSSEY, Descripción general del Observatorio, su posición geográfica y observaciones de Cometas y de Estrellas Dobles (1914).
- II. FÉLIX AGUILAR, Resultado de las observaciones en la Zona -57° a -61° con el Círculo Meridiano Gautier, durante el año 1914 (1916).
- III.*. PABLO T. DELAVAN, Resultado de las observaciones en la Zona -52° a -56° durante los años 1913, 1914 y 1915.
FÉLIX AGUILAR, Resultado de las observaciones en la Zona -57° a -61° durante el año 1915 (1916).
- IV.₁. BERNHARD H. DAWSON, Resultado de las observaciones con la Ecuatorial de 433 milímetros de abertura, efectuadas de 1912 a 1917 (1918).
- IV.₂. BERNHARD H. DAWSON, Resultado de las observaciones con la Ecuatorial de 433 milímetros de abertura, efectuadas de 1918.0 a 1921.5 (1922).
- V. PABLO T. DELAVAN, Catálogo La Plata A de 7412 Estrellas de declinaciones comprendidas entre -52° a -57° (1875) para el equinoccio 1925 (1919).
- VI.₁. HUGO A. MARTÍNEZ, Determinación de la Órbita del Planeta (796) Sarita (1920).
- VI.₂.*. NUMA TAPIA, Medidas micrométricas de Estrellas Dobles y Vecinas (1921).
- VI.₃.*. BERNHARD H. DAWSON, Elementos de la Estrella Variable SV Centauri (1921).
- VI.₄. BERNHARD H. DAWSON, Errores de trazo del Círculo Meridiano Gautier (1925).
- VI.₅. JUAN HARTMANN, Nueva determinación de la Longitud geográfica (1928).
- VI.₆. BERNHARD H. DAWSON, Medidas micrométricas de estrellas dobles efectuadas con el refractor de 433 milímetros de abertura (1937).
- VI.₇. BERNHARD H. DAWSON, Observaciones de planetas y cometas (1942).
- VI.₈. GUALBERTO M. IANNINI, Medidas micrométricas de estrellas dobles. Posible movimiento rectilíneo de β 311 y una nueva determinación de la órbita de ψ Argus (1942).
- VI.₉. ALBA DORA NINA SCHREIBER, Observaciones fotográficas de Ceres (1944).
- VII. FÉLIX AGUILAR y BERNHARD H. DAWSON, Catálogo La Plata B de 7792 Estrellas de declinaciones comprendidas entre -57° a -62° (1875) para el equinoccio 1925 (1924).
- VIII. HUGO A. MARTÍNEZ, Catálogo La Plata C de 4412 Estrellas entre $61^{\circ}50'$ y $66^{\circ}10'$ declinación austral (1875) para el equinoccio 1925 (1924).
- IX. VIRGINIO MANGANIELLO, Catálogo La Plata D de 4513 Estrellas entre $65^{\circ}50'$ y $72^{\circ}10'$ de declinación austral (1875) para el equinoccio 1925 (1936).
- X.₁. NUMA TAPIA, Catálogo La Plata E (primera entrega) de 2486 estrellas entre $72^{\circ}10'$ y $82^{\circ}10'$ de declinación austral (1875), para el equinoccio 1925 (1947).
- XI.₁. HUGO A. MARTÍNEZ, Estrellas Kapteyn (1927).

* Agotados (out of print).

- XI₂. HUGO A. MARTÍNEZ, Estrellas Eros (1933).
 XI. HUGO A. MARTÍNEZ, Estrellas de Latitud (1933).
 XII. HUGO A. MARTÍNEZ, 2123 Estrellas del Catálogo de Boss, comprendidas entre -15° y -80° (1936).
 XIII. HUGO A. MARTÍNEZ, Catálogo La Plata F de 4828 Estrellas entre $46^{\circ}50'$ y $52^{\circ}10'$ de declinación austral (1875) para el equinoccio 1935 (1938).
 XIV. ALEXANDER WILKENS, La Constitución Dinámica de las Estrellas de Paralaje Conocida estudiada especialmente en base a los Movimientos Lineales Tangenciales (1939).
 XV. HUGO A. MARTÍNEZ, Estrellas Kapteyn (1939).
 XVI. ALEXANDER WILKENS, Determinación de órbitas de planetas y cometas (1939).
 XVII. REYNALDO P. CESCO, Perturbaciones seculares de Plutón (1941).
 XVIII. ALEXANDER WILKENS, La Accleración Secular de los Ejes Mayores de las Órbitas Planetarias (1942).
 XIX. HUGO A. MARTÍNEZ, Catálogo de 3710 estrellas Galácticas Australes (1943).
 XX. ALEXANDER WILKENS, Determinaciones de temperaturas espectrográficas de estrellas dobles (1944).
 XX₁. JORGE SAHADE, Determinación de las intensidades de las líneas H_δ, G, H_γ y H_β en los espectros estelares (1944).
 XX₂. JORGE LANDI DESSY, La Binaria ρ Eridani (1949).
 XXI₁. ALEXANDER WILKENS, Estadística de las velocidades absolutas estelares en su relación con las magnitudes absolutas y los tipos espectrales (1945).
 XXI₂. GUALBERTO M. IANNINI, Órbita definitiva del cometa Whipple-Bernasconi-Kulin (1945).
 XXI₃. ALEXANDER WILKENS, Aceleración secular de los semi-Ejes mayores y de las longitudes medias de los planetas, en especial de la Tierra, y sus satélites (1945).
 XXII. HERBERT WILKENS, Estadística estelar, simultáneamente en varias longitudes de onda efectivas, y las leyes de la absorción interestelar (1945).
 XXIII. HERBERT WILKENS, Las fórmulas de la absorción interestelar general en 8 longitudes de onda efectiva. (1947).
 XXIV₁. BERNHARD H. DAWSON, Ocultaciones de estrellas por la Luna observadas en La Plata de 1933 a 1940 (1947).
 XXIV₂. BERNHARD H. DAWSON, Estrellas zodiacales determinadas en fotografías (1947).
 XXV₁. ALEXANDER WILKENS, Teoría sobre la acumulación de los perihelios y nodos de los asteroides (1949).
 XXVI. FRANCISCO PINGSDORF (En Prensa), Investigaciones sobre estrellas variables (1949).

SERIE ESPECIAL

- I. La Escuela Superior de Ciencias Astronómicas y Conexas (1945).
- II. MANUEL GONZÁLEZ FERNÁNDEZ, Elementos de Geografía Matemática. Cartografía (1948).
- III. Plan de Estudios de la Escuela Superior de Astronomía y Geofísica (1948).
- IV. V. J. MENECLIER, Fórmulas de Fabritius (1949).
- V. MANUEL GONZÁLEZ FERNÁNDEZ, Transformación del problema Geodésico-Elipsóidico en un problema esférico. Solución de Gauss. Transporte de coordenadas (1949).
- VI. GUILLERMO O. WALLBRECHER, Memoria anual correspondiente al año 1947 (1949).
- VII. PASCUAL SCONZO, Sobre la actualidad de la reforma del calendario (1949).
- VIII. LIVIO GRATTON, Ideas modernas sobre la interpretación del diagrama espectro-luminosidad (1949).

SERIE GEOFÍSICA

(Antes Contribuciones Geofísicas)

- I₁. JUAN HARTMANN, Reorganización del servicio sísmico en La Plata, y observaciones sísmicas efectuadas en los años 1922 a 1924 (1926).
- I₂. P. A. LOOS, Los terremotos del 17 de diciembre de 1920 en Costa de Araujo, Lavalle, La Central, Tres Porteñas, etc. (1926).
- I₃. FEDERICO LÜNKENHEIMER, Resultados Sismométricos de los años 1907 a 1922 (1927).
- II₁. FEDERICO LÜNKENHEIMER, Resultados Sismométricos del año 1925 (1927).

- II₂. P. A. Loos, El terremoto argentino-chileno del 14 de abril de 1927 (1928).
- II₃. JUAN HARTMANN, Dos aparatos para facilitar la determinación de los epicentros sísmicos (1928).
- II₄. FEDERICO LÚNKENHEIMER, Método mecánico-gráfico para determinar el epicentro en base de tres observaciones de P (1928).
- II₅. FEDERICO LÚNKENHEIMER, Elementos nuevos para la determinación de los epicentros (1928).
- III₁. FEDERICO LÚNKENHEIMER, Resultados Sismométricos del año 1926 (1929).
- III₂. FEDERICO LÚNKENHEIMER, El terremoto sud-mendocino del 30 de mayo de 1929 (1930).
- III₃. FEDERICO LÚNKENHEIMER, Resultados Sismométricos del año 1927 (1931).
- IV₁. FEDERICO LÚNKENHEIMER, Resultados Sismométricos del año 1928 (1933).
- IV₂. FEDERICO LÚNKENHEIMER, Las fluctuaciones de las manchas solares y la sismicidad general de la tierra (1934).
- IV₃. FEDERICO LÚNKENHEIMER, El período anual de la sismicidad general de la tierra (1934).
- IV₄. FEDERICO LÚNKENHEIMER, Resultados Sismométricos del año 1929 (1934).
- V₁. FEDERICO LÚNKENHEIMER, Resultados Sismométricos del año 1930 (1936).
- V₂. FEDERICO LÚNKENHEIMER, Método numérico para el cálculo de epicentros en base de tres horas de P (1936).
- V₃. FEDERICO LÚNKENHEIMER, Resultados Sismométricos del año 1931 (1936).
- V₄. FEDERICO LÚNKENHEIMER, Resultados Sismométricos del año 1932 (1937).
- VI₁. FEDERICO LÚNKENHEIMER, Resultados Sismométricos del año 1933 (1937).
- VI₂. SIMÓN GERSHÁNIK, Resultados Sismométricos del año 1934 (1937).
- VI₃. SIMÓN GERSHÁNIK, Resultados Sismométricos del año 1935 (1941).

SERIE GEODÉSICA

- I₁. FÉLIX AGUILAR, Reparación del aparato cuadripéndular Askania N° 81592 del Instituto Geográfico Militar y determinación de los coeficientes de densidad y de temperatura de los péndulos de Invar (1936).
- I₂. VIRGINIO MANGANIELLO, Valores de la aceleración de la gravedad, determinados por el personal del Observatorio entre los años 1936 y 1941 (Comunicado de la Dirección) (1944).
- I₃. JOSÉ MATEO, Cronómetros tipo marina. Variaciones de marcha a corto período y utilización en las medidas gravimétricas pendulares (1945).
- II. FÉLIX AGUILAR, Una solución del Método Gauss generalizado a más de 3 Astros y tablas auxiliares para tiempo sidéreo y acimut en el instante de la observación (1942), Segunda edición.
- III. ENRIQUE LEVÍN, Determinación de la diferencia de gravedad La Plata-Potsdam (1943).
- IV. JOSÉ MATEO y ENRIQUE LEVÍN, Observaciones gravimétricas pendulares (años 1936-1941). Perfil gravimétrico norte-sur en base a 133 estaciones (1945).
- V₁. Determinaciones gravimétricas pendulares en el Arco de Meridiano Argentino (1947).

SERIE CIRCULARES

Efemérides de pequeños planetas. (Circulares 1, 2, 3, 4 y 5).



PUBLICACIONES DEL OBSERVATORIO ASTRONOMICO
DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

Director: Capitán de Fragata (R.) GUILLERMO O. WALLBRECHER

SERIE ASTRONOMICA XXVII₂

CALCULO
NUMERICO DE UNA ORBITA
A PARTIR DE UNA SOLUCION
APROXIMADA

POR

PASCUAL SCONZO



LA PLATA
IMPRESA MORENO
1951

MINISTERIO DE EDUCACION DE LA NACION
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

Rector

Doctor LUIS IRIGOYEN

Vicerrector

Doctor PEDRO GUILLERMO PATERNOSTO

Consejeros

Ing. Agrón. René R. E. Thiery, Ing. José María Castiglioni; Ing. Carlos Pascali, Ing. Obdulio J. F. Ferrari; Prof. Silvio Mangariello, Prof. Arturo Cambours Ocampo; Dr. Carlos María Harispe, Dr. Horis del Prete; Dr. José Fortunato Molfino, Dr. Pedro Guillermo Paternosto; Dr. Pascual R. Cervini, Dr. José F. Morano Brandi; Dr. Benito Pérez, Dr. Eugenio E. Mordegliá.

Secretario General Interino

Don VICTORIANO F. LUACES

Secretario Administrativo

Don RAFAEL GUILLERMO ROSA

Contador General

Don HORACIO J. BLAKE

**INSTITUTO DEL OBSERVATORIO ASTRONÓMICO
Y ESCUELA SUPERIOR DE ASTRONOMÍA Y GEOFÍSICA**

Director

Capitán de Fragata (R.) GUILLERMO O. WALLBRECHER

Secretario

Abogado ANDRES GUILLEN

Prosecretario

Señor RICARDO J. NOWINSKI

Jefes de Departamento y Profesores: Agrim. Angel A. Baldini (Geodesia-Gravimetría y Mareas); Dr. Alejandro Corpaciu (Gravimetría-Geodesia Superior); Ing. Simón Gershánik (Geofísica-Sismología); Dr. Livio Gratton (Astrofísica-Astrofísica, I y II Curso); Agrim. Miguel Itzigsohn (Astrometría-Astrometría, I Curso); Dr. Pascual Sconzo (Cálculos científicos); Dr. Leónidas Slaucitajs (Magnetismo Terrestre y Electricidad Atmosférica); Dr. Sergio Slaucitajs (Astronomía Meridiana); Dr. Alexander Wilkens (Astronomía teórica y Cosmogonía-Mecánica Celeste).

Profesores: Ing. Miguel A. Agabios (Astrometría, II Curso); Agrim. Guillermo H. Borel (Astronomía General); Dr. Reynaldo P. Cesco (Análisis matemático, III Curso); Agrim. Víctor J. Meneclier (Astronomía Esférica).

PERSONAL CIENTIFICO

Jefes de División y Astrónomos de Primera: Agrim. Guillermo H. Borel (Círculo Meridiano); Dr. Germán Fernández (Astronomía teórica); Dr. Herbert Wilkens (Estadística Estelar); Sr. Jacobo Gordon (Efemérides); Sr. Ignacio A. Rivas (Efemérides); Prof. Silvio Mangariello (Círculo Meridiano).

PERSONAL DOCENTE Y AUXILIAR

Jefe de Biblioteca: Prof. Nidia Ethel Guillamón.

Jefes de Trabajos Prácticos: Dr. Sergio Slaucitajs (Astronomía Esférica); Dr. Herbert Wilkens (Astrofísica).

Ayudantes de Trabajos Prácticos: Srta. Alicia M. Di Bella (idioma Inglés); Srta. Araceli Stichling (Idioma Alemán); Srta. Elida Olga Herrero Araldi (Asistente de Óptica).

PERSONAL TECNICO

Jefe del Departamento de Talleres: Ing. José A. Rodríguez.

ADMINISTRACION Y PUBLICACIONES

Administrador-habilitado: Sr. Juan José Saggese.

Publicaciones y Canje: Sr. Antonio Guillén.

CALCULO NUMERICO DE UNA ORBITA A PARTIR DE UNA SOLUCION APROXIMADA

Por PASCUAL SCONZO *

ABSTRACT

According to Wilkens, Stumpff and Väisälä's ideas, in this paper practical directions to solve the problem of orbits computation are given, when a starting approximate solution is known, for instance, a circular or elliptic orbit deduced from very short time-intervals. Otherwise to obtain the first approximation, Wilkens' method in α , δ co-ordinates is useful, Successive approximations in the case of larger time-intervals can be carried out using the Lagrangian F and G series until 5 th or 6 th order terms and computing simultaneously the position and the velocities components by three hypothesis Δ_{0-w} , Δ_0 , Δ_{0+w} on the geocentric distance at the time $t = t_0$ (w is an arbitrary small quantity). But from a given geocentric distance the position and only two of the velocities' components can be univocally derived; for the remaining component two different values are available, whose difference we denote with ε .

If ε_{-w} , ε_0 , ε_{+w} are the values of ε corresponding to the above three hypothesis, the true value of Δ_0 is determined using an inverse interpolation formula with the condition $\varepsilon = 0$ (see below note (9) and (10)).

Another way to reach the solution is an iterative process applied to the system of equation (31) on page 19.

In order to explain the meaning of the numerical process two examples are added at the end.

In an appendix, tables facilitating the computation of the F and G series are also added.

(*) Jefe del Departamento de Cálculos y Efemérides en el Instituto Superior del Observatorio Astronómico y Profesor de Cálculos Científicos en la Escuela Superior de Astronomía y Geofísica.

CALCULO NUMERICO DE UNA ORBITA A PARTIR DE UNA SOLUCION APROXIMADA

Por PASCUAL SCONZO

1. — Generalidades sobre el problema de la determinación de órbitas.

La determinación de la órbita de un cuerpo del sistema solar constituye en esencia un problema de cálculo numérico. Para resolver este problema, las soluciones hoy conocidas son tantas que parece a primera vista superfluo buscar otras nuevas. En efecto, los métodos conocidos hasta el presente, que reúnen elegancia y rigor y que están vinculados a los nombres célebres de Lagrange, Laplace, Gauss, Encke ⁽¹⁾ y a aquellos otros, más próximos a nuestro tiempo, de Harzer, Charlier, Andoyer, Leuschner, Wilkens ⁽²⁾, nada dejan que desear en lo referente a la perfección de los desarrollos matemáticos y a la exactitud de los resultados obtenibles.

Sin embargo en los últimos decenios han sido hechas fructuosas tentativas con la intención de aportar modificaciones a los métodos ya consagrados, y que por otra parte habían soportado satisfactoriamente una larga serie de pruebas, con las cuales modificaciones habrían de conseguirse procedimientos más expeditivos y más apropiados a las necesidades de la práctica y esquemas de fórmulas más adecuados a los modernos medios mecánicos de cálculo. Entre las más notables de tales innovaciones han de contarse, a mi juicio, las de Veithen-Merton ⁽³⁾, de Stumpff ⁽⁴⁾ y de Herget ⁽⁵⁾. Sin temor de ser desmentido puedo agregar que el método clásico de Gauss-Encke, adaptado al cálculo mecánico por Veithen-Merton y magistralmente expuesto en el tratado de G. Stracke citado en ⁽³⁾, no ha sido todavía superado seriamente por ninguno de los otros métodos y con frecuencia recurre al mismo el más experimentado calculador.

En el presente trabajo me propongo ilustrar qué provecho se puede obtener de las ideas de Wilkens y de Stumpff con la finalidad anteriormente indicada, de lograr esquemas para un cálculo rápido, refiriéndome particularmente a la segunda fase del cálculo de la órbita de un asteroide, esto es, después que se conoce una solución aproximada.

Como es sabido, el planteo del problema de la determinación de la órbita de un cuerpo P que se mueve en torno al Sol bajo la ley newtoniana de atracción, se puede formular del modo siguiente: Dadas tres observaciones distintas y completas de P (o sea en las coordenadas α y δ) correspondientes a tres distintos instantes, determinar la trayectoria y la ley del movimiento de P sobre ésta.

Todos los métodos siguen, para alcanzar este objetivo, uno u otro de dos caminos fundamentales, los cuales se diferencian entre sí por que en uno (el seguido por los métodos del tipo de Lagrange-Laplace) se determina la posición heliocéntrica P_0 y la velocidad v_0 de P en un determinado instante $t = t_0$ mientras que en el otro (el seguido por los métodos del tipo de Gauss-Encke) se busca determinar dos posiciones heliocéntricas P_1 y P_3 de P correspondientes a dos instantes $t = t_1$ y $t = t_3$, respectivamente. En ambos casos se procede siempre por aproximaciones sucesivas.

En el presente trabajo me refiero al primero de los dos caminos indicados y trataré algunos procedimientos calculísticos que pueden resultar de gran conveniencia práctica en aquellos casos en los cuales, como ya he dicho, se conoce "a priori" una solución aproximada cualquiera (Orbita previamente calculada en base a observaciones muy vecinas en el tiempo, órbita circular, conocimiento aproximado de una distancia geocéntrica o heliocéntrica, etc.). Esta circunstancia se presenta muy a menudo, por ejemplo, cuando se desea determinar "ex novo" la órbita de uno de aquellos asteroides, que a pesar de figurar en la lista de los numerados, no fué posible seguirlo ni con la observación ni con el cálculo por un lapso considerable de tiempo, de manera que si hay observaciones recientes éstas no resultarán representadas satisfactoriamente por las posiciones calculadas en las efemérides. En tal caso la nueva determinación de la órbita, que satisfaga exactamente a las observaciones más recientes, se puede efectuar aprovechando como solución aproximada los elementos conocidos. Como en el transcurso del planteo analítico haré uso reiterado de una notable propiedad establecida originariamente por Lagrange, recordaré en un párrafo introductorio las series F y G que intervienen en el desarrollo de las coordenadas heliocéntricas en series según potencias del tiempo; luego indicaré las modificaciones que creo útil se hayan de introducir en el método de Wilkens para que resulte aplicable al caso de las coordenadas heliocéntricas ecuatoriales, y esto para lograr la primera aproximación; finalmente expondré dos distintos procedimientos para el cálculo de las aproximaciones sucesivas. Un párrafo ulterior será dedicado a las aplicaciones numéricas y en el Apéndice se encontrarán las Tablas de las cantidades A, B, C, D que sirven para controlar el cálculo de los valores numéricos de las series F y G.

2. — Las series F y G y la fórmula fundamental de Lagrange.

Denctemos con u una cualquiera de las coordenadas heliocéntricas ecuatoriales x , y , z del cuerpo celeste P que se mueve en torno al Sol. Supongamos que la masa m de P sea despreciable respecto a la del Sol, tomada como unidad, y sea k la constante de Gauss igual a: 0,0172021. Introduciendo como variable independiente, en lugar del tiempo t , al así llamado tiempo reducido τ , dado por la expresión:

$$\tau = k \cdot (t - t_0)$$

donde t_0 es el origen de los tiempos, las ecuaciones diferenciales de segundo orden del movimiento (no perturbado) de P toman entonces la forma muy simple:

$$u'' = -u \cdot r^{-3} \qquad r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \qquad (1)$$

Aquí u'' , como es obvio, representa la derivada segunda de u respecto a la variable τ .

Ahora bien, para u se puede escribir el siguiente desarrollo en serie:

$$u = u_0 + u'_0 \tau + \frac{1}{2!} u''_0 \tau^2 + \frac{1}{3!} u'''_0 \tau^3 + \dots \qquad (2)$$

y es fácil probar que teniendo en cuenta la (1) y las derivadas sucesivas de la misma, resulta la fórmula fundamental de Lagrange ⁽⁶⁾:

$$u = F \cdot u_0 + G \cdot u'_0 \quad (3)$$

donde

$$F = 1 + \sum_{j=2}^{\infty} f_j \tau^j$$

$$G = \tau + \sum_{j=3}^{\infty} g_j \tau^j \quad (4)$$

y los coeficientes f_j y g_j son funciones de r_0 , r'_0 y r''_0 . Si para mayor brevedad se pone:

$$\xi_0 = \frac{1}{2 r_0^3}$$

$$\sigma_0 = \frac{r'_0}{r_0} = \frac{x_0 x'_0 + y_0 y'_0 + z_0 z'_0}{r_0^2}$$

$$V_0^2 = x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2 \quad (5)$$

$$\eta_0 = \frac{r''_0}{r_0} = \frac{V_0^2}{r_0^2} - (2 \xi_0 + \sigma_0^2),$$

se encuentra que hasta los términos de sexto orden inclusive es:

$$f_2 = -\xi_0$$

$$f_3 = \xi_0 \sigma_0$$

$$f_4 = \frac{1}{12} \xi_0 (2 \xi_0 + 3 \eta_0 - 12 \sigma_0^2)$$

$$f_5 = -\frac{1}{4} \xi_0 \sigma_0 (2 \xi_0 + 3 \eta_0 - 4 \sigma_0^2)$$

$$f_6 = -\left[\frac{1}{180} \xi_0^2 (2 \xi_0 + 24 \eta_0 - 186 \sigma_0^2) + \frac{1}{8} \xi_0 (8 \sigma_0^4 - 12 \sigma_0^2 \eta_0 + \eta_0^2) \right]$$

$$g_3 = -\frac{1}{3} \xi_0$$

$$g_4 = \frac{1}{2} \xi_0 \sigma_0$$

$$g_5 = \frac{1}{60} \xi_0 (2 \xi_0 + 9 \eta_0 - 36 \sigma_0^2)$$

$$g_6 = -\frac{1}{12} \xi_0 \sigma_0 (2 \xi_0 + 6 \eta_0 - 8 \sigma_0^2) \quad (6)$$

Acerca de la convergencia de las series F y G debemos decir que desde el punto de vista del cálculo numérico, empleando un determinado número de cifras decimales, generalmente seis, se presentan dificultades cuando el intervalo de tiempo ($t - t_0$) se acerca a 58 días, esto es, cuando τ se acerca a la unidad. Para intervalos de tiempo que no superen 30 días (casos normales en la determinación de órbitas) y para órbitas no muy excéntricas las aplicaciones numéricas nos han mostrado que, en general, es suficiente la consideración hasta los términos de quinto orden, y excepcionalmente los de sexto orden en τ .

Siguiendo a K. Stumpff en el intento de tabular las series F y G, estimamos conveniente lograr por lo tanto una representación de F hasta los términos de quinto orden y de G hasta los términos de sexto orden. Es fácil probar que poniendo:

$$f = \xi_0 \tau^2, \quad g = \sigma_0 \tau, \quad h = \eta_0 \tau^2$$

$$\begin{aligned}
A &= g^4 - g^2 + g - 1 \\
B &= -\frac{1}{2}g + \frac{1}{6} \\
C &= \frac{2}{3}g^3 - \frac{3}{5}g^2 + \frac{1}{2}g - \frac{1}{3} \\
D &= -\frac{1}{6}g + \frac{1}{30} \tag{7} \\
\Phi &= f \left\{ A + \left(f + \frac{3}{2}h \right) B \right\} \\
\Gamma &= f \left\{ C + \left(f + \frac{9}{2}h \right) D \right\} ,
\end{aligned}$$

y después de cálculos sencillos se tiene:

$$\begin{aligned}
F &= 1 + \Phi \\
G &= \tau (1 + \Gamma) \tag{8}
\end{aligned}$$

con un error en G del orden de $\frac{1}{4} f. g. h. \tau$.

La tabulación de las cantidades A, B, C, D, es muy fácil y resulta ventajosa por el hecho de que aparece siempre el mismo argumento g. Las tablas que nosotros damos en el Apéndice se extienden desde el valor -0.020 hasta $+0.020$ de g, con paso tabular de 0,001, lo que es suficiente para poder deducir A, B, C, D, en los casos más frecuentes que se presentan en la práctica, mediante una simple interpolación lineal.

3. — Cálculo de la primera aproximación por el método de Wilkens.

En la memoria citada en ⁽²⁾, Wilkens ha desarrollado un método laplaciano para calcular órbitas de cualquier excentricidad. A pesar de la elegancia y de la simplicidad teórica con las cuales el problema ha sido resuelto, así como también del alto grado de precisión con el cual se obtienen los resultados, este método no ha sido empleado frecuentemente en el mundo de los astrónomos calculadores, y hasta el presente se aplicó solo en muy pocos y contados casos. Cabe destacar que en el tratado de Stracke en el cual, entre los otros métodos, también se expone el de Wilkens, éste es el único que no viene acompañado con un ejemplo ilustrativo ⁽⁷⁾.

Sin embargo, puesto que el mismo merece, a nuestro juicio, ser tomado con mucha consideración, queremos contribuir a su divulgación entre los calculadores de órbitas introduciendo aquellas modificaciones que nos han sido sugeridas por la práctica con la finalidad de adaptarlo a los esquemas del cálculo mecánico.

Los cambios introducidos son los siguientes:

1º) Uso de las coordenadas ecuatoriales α y δ , que son las provistas directamente por los observadores, en lugar de las transformadas eclípticas λ y β , lo que hace ahorrar el cálculo previo y molesto de transformación y de reducción al llamado "Locus fictus".

2º) Uso de una disposición esquemática muy conveniente para el cálculo de los coeficientes de la ecuación fundamental de octavo grado, reteniendo desde el comienzo un término correctivo que hace aumentar la precisión de la primera aproximación.

3º) Resolución rápida, por aproximaciones sucesivas, de la ecuación fundamental de octavo grado.

Podemos pasar ahora a establecer el formulario correspondiente. Sean (α_1, δ_1) , (α_2, δ_2) , (α_3, δ_3) las coordenadas observadas de P en los tiempos t_1 , t_2 , y t_3 respectivamente, y elijamos como origen de los tiempos el instante de la segunda observación o sea $t_0 = t_2$.

Pongamos:

$$\begin{aligned} l_i &= \cos \delta_i \cos \alpha_i \\ m_i &= \cos \delta_i \sin \alpha_i \\ n_i &= \sin \delta_i \end{aligned} \quad (i = 1, 0, 3) \quad (9)$$

y denotemos con X_i, Y_i, Z_i las coordenadas topocéntricas del Sol en el tiempo t_i , referidas naturalmente al mismo equinoccio al cual están referidas las coordenadas observadas. Sean además Δ_i las distancias geocéntricas de P para los mismos instantes; como es conocido se tiene:

$$\begin{aligned} l_i \Delta_i &= x_i + X_i \\ m_i \Delta_i &= y_i + Y_i \\ n_i \Delta_i &= z_i + Z_i \end{aligned} \quad (10)$$

Eliminemos ahora Δ_i dividiendo por ejemplo la primera y segunda por la tercera; si se pone:

$$\begin{aligned} C_i &= \frac{l_i}{n_i}, & S_i &= \frac{m_i}{n_i} \\ A_i &= X_i - C_i Z_i, & B_i &= Y_i - S_i Z_i, \end{aligned} \quad (11)$$

se obtiene:

$$\begin{aligned} C_i z_i - x_i &= A_i \\ S_i z_i - y_i &= B_i \end{aligned} \quad (12)$$

Este modo de eliminar Δ_i es conveniente si las declinaciones observadas no son muy pequeñas (algo así como $|\delta| \geq 6^\circ$); en caso contrario se puede poner:

1º) $C_i = \frac{m_i}{l_i}$, $S_i = \frac{n_i}{l_i}$, si las ascensiones rectas observadas no son próximas a 6^h ó 18^h .

2º) $C_i = \frac{l_i}{m_i}$, $S_i = \frac{n_i}{m_i}$, si las ascensiones rectas observadas no son próximas a 0^h ó 12^h .

Con respecto a los casos 1º) y 2º), queda a cargo del lector cambiar los símbolos, según sea necesario, en las fórmulas que se desarrollarán a continuación.

Recordando la fórmula (3), las (12) adquieren las siguientes formas:

$$\begin{aligned} C_i (F_i z_0 + G_i z'_0) - (F_i x_0 + G_i x'_0) &= A_i \\ S_i (F_i z_0 + G_i z'_0) - (F_i y_0 + G_i y'_0) &= B_i \end{aligned} \quad (i = 1, 3) \quad (13)$$

con:

$$\tau_i = k \cdot (t_i - t_0)$$

y para $i = 0$ se tiene directamente:

$$\begin{aligned} x_0 &= C_0 z_0 - A_0 \\ y_0 &= S_0 z_0 - B_0 \end{aligned} \quad (14)$$

En la primera aproximación se supone que las series F_1 y G_1 se reducen respectivamente a las expresiones siguientes:

$$\begin{aligned} F &= 1 - \xi_0 \tau^2_1 & (\xi_0 &= \frac{1}{2} \tau^3_0) \\ G &= \tau_1 \end{aligned}$$

Las fórmulas (13) y (14) constituyen entonces un sistema de seis ecuaciones en las seis incógnitas $x_0, y_0, z_0, x'_0, y'_0, z'_0$. Puesto que x_0, y_0, z_0 figuran en ξ_0 para solucionar el presente sistema es conveniente dejar inalterada la expresión de ξ_0 y eliminar sucesivamente x_0, y_0, x'_0, y'_0 . Esto se consigue fácilmente si se calculan previamente los siguientes coeficientes:

$$\begin{aligned} P &= \tau_3 (C_1 - C_0) - \tau_1 (C_3 - C_0) & , & \quad p = \tau_3 (S_1 - S_0) - \tau_1 (S_3 - S_0) \\ Q &= \tau_1 \tau_3 \{ \tau_3 (C_3 - C_0) - \tau_1 (C_1 - C_0) \} & , & \quad q = \tau_1 \tau_3 \{ \tau_3 (S_3 - S_0) - \tau_1 (S_1 - S_0) \} \\ R &= \tau_3 (A_1 - A_0) - \tau_1 (A_3 - A_0) & , & \quad r = \tau_3 (B_1 - B_0) - \tau_1 (B_3 - B_0) \\ S &= \tau_1 \tau_3 (\tau_1 - \tau_3) A_0 & , & \quad s = \tau_1 \tau_3 (\tau_1 - \tau_3) B_0 \\ T &= \tau_1 \tau_3 (C_1 - C_3) & , & \quad t = \tau_1 \tau_3 (S_1 - S_3) \end{aligned} \quad (15)$$

En efecto, después de fáciles reducciones, se llega al sistema:

$$\begin{aligned} (P + \xi_0 Q) z_0 + T z'_0 &= R + \xi_0 S \\ (p + \xi_0 q) z_0 + t z'_0 &= r + \xi_0 s \end{aligned} \quad (16)$$

Puesto ahora:

$$\begin{aligned} a &= Rt - rT & , & \quad c = Pt - pT \\ b &= St - sT & , & \quad d = Qt - qT \end{aligned} \quad (17)$$

se obtiene en definitiva:

$$z_0 = \frac{a + b\xi_0}{c + d\xi_0} \quad (18)$$

y luego por la (14):

$$\begin{aligned} x_0 &= C_0 \left(\frac{a + b\xi_0}{c + d\xi_0} \right) - A_0 \\ y_0 &= S_0 \left(\frac{a + b\xi_0}{c + d\xi_0} \right) - B_0 \end{aligned} \quad (19)$$

El sistema de ecuaciones (18) y (19) puede solucionarse por medio de la ecuación de octavo grado que se obtiene eliminando ξ_0 ; nosotros preferimos solucionarlo rápidamente por aproximaciones sucesivas a partir de un valor inicial plausible de ξ_0 . Si nada se conoce al respecto conviene tomar 0.032 como primer valor aproximado de ξ_0 , que es el valor correspondiente a una distancia heliocéntrica $r_0 = 2,5$. Una vez obtenidas las coordenadas x_0, y_0, z_0 se puede pasar al cálculo de z'_0 por medio de:

$$z'_0 = \frac{1}{T} \{ R + \xi_0 S - z_0 (P + \xi_0 Q) \} \quad (20)$$

y como comprobación:

$$z'_0 = \frac{1}{t} \{ r + \xi_0 s - z_0 (p + \xi_0 q) \} \quad (20')$$

Queda por calcular x'_o e y'_o . Calculando previamente:

$$z_i = F_i z_o + G_i z'_o \quad (i = 1,3) \quad (21)$$

y volviendo a las fórmulas (13) se obtiene:

$$\begin{aligned} x'_o &= \frac{1}{G_i} (C_i z_i - F_i x_o - A_i) \\ y'_o &= \frac{1}{G_i} (S_i z_i - F_i y_o - B_i) \end{aligned} \quad (i = 1,3) \quad (22)$$

Por lo general, para $i = 1$ e $i = 3$ estos valores generalmente no coinciden exactamente; tomando los promedios de estos valores podemos considerar por terminado el cálculo en primera aproximación en cuanto hemos llegado al conocimiento aproximado de la posición P_o y de la velocidad V_o en el instante $t = t_o$. Solo debemos recordar que V_o es una velocidad ficticia que no ha de confundirse con la verdadera velocidad v_o que se obtiene cuando se toman las derivadas con respecto al tiempo t .

NOTA.

Dado que el sistema de ecuaciones (18) y (19) admite en general más de una solución real puede surgir la duda de que el proceso de aproximación sucesiva conduzca a una u otra de las soluciones. Se debe examinar entonces cuál es entre las distintas soluciones teóricas, la que corresponde al problema.

Elevando al cuadrado las (18) y (19) y sumándolas se obtiene la ecuación de octavo grado en ξ_o :

$$(a) \quad (2 \xi_o)^{-2/3} = (1 + C_o^2 + S_o^2) \left(\frac{a + b\xi_o}{c + d\xi_o} \right)^2 - 2 (A_o C_o + B_o S_o) \left(\frac{a + b\xi_o}{c + d\xi_o} \right) + A_o^2 + B_o^2.$$

Observemos que si se supone $Q = q = 0$ y en consecuencia $d = 0$ y se tiene en cuenta que es $\xi_o = \frac{1}{2} r_o^3$, la precedente ecuación adquiere la forma:

$$(b) \quad r_o^2 = \operatorname{cosec}^2 \delta_o \left(\frac{a}{c} + \frac{b}{2c} \frac{1}{r_o^3} \right)^2 - 2 (A_o C_o + B_o S_o) \left(\frac{a}{c} + \frac{b}{2c} \frac{1}{r_o^3} \right) + A_o^2 + B_o^2.$$

que ha sido encontrada por Wilkens y que permite establecer el *criterio* de Oppolzer sobre la multiplicidad de las soluciones⁽⁸⁾.

Nosotros queremos usar un medio geométrico sencillo para elegir la solución que nos interesa. Con tal fin despejamos ξ_o de la relación: (18):

$$(c) \quad \xi_o = \frac{c z_o - a}{b - d z_o},$$

resulta luego:

$$(d) \quad r_o^3 = \frac{b/2 - d/2 \cdot z_o}{-a + c z_o},$$

mientras que la (a) se puede escribir del modo siguiente:

$$(e) \quad r_o^2 = \operatorname{cosec}^2 \delta_o z_o^2 - 2 (A_o C_o + B_o S_o) z_o + A_o^2 + B_o^2.$$

El problema de la búsqueda de las raíces comunes a (d) y (e) se puede entonces interpretar como la determinación de los puntos donde se cortan las dos curvas del tipo:

$$(f) \quad \zeta = \frac{\frac{b}{2} - \frac{d}{2} z}{-a + c z}$$

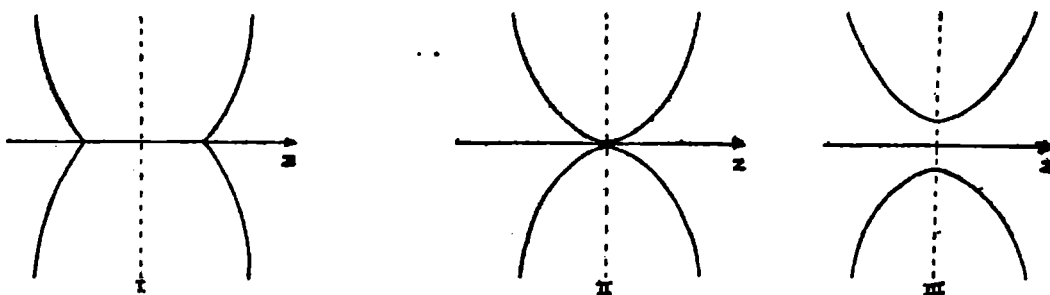
$$(g) \quad \zeta^{2/3} = \text{cosec}^2 \delta_0 z^2 - 2 (A_0 C_0 + B_0 S_0) z + A_0^2 + B_0^2.$$

La primera corresponde a una hipérbola equilátera cuyas asíntotas son paralelas a los ejes coordenados y cuyo centro de simetría 0 tiene por coordenadas: $\frac{a}{c}$ y $-\frac{d}{2c}$.

Las ramas de esta hipérbola están ubicadas en el primer y tercer cuadrante o en el segundo y cuarto cuadrante según que resulte: $a \cdot d - b \cdot c \leq 0$. La segunda representa una curva de sexto orden que posee un eje de simetría paralelo al eje de las ordenadas trazado por la abscisa: $(A C + B S) n^2$; además según que sea:

$$(A_0 C_0 + B_0 S_0) - \text{cosec}^2 \delta_0 (A_0^2 + B_0^2) \geq 0$$

posee respectivamente, una de las tres formas siguientes:



Puesto que ζ representa el cubo de una distancia se descartan en seguida los puntos de intersección de (f) y (g) que caen en el semiplano donde las ordenadas son negativas; siendo además $\zeta = R^3$ la solución trivial que corresponde al caso de la Tierra; la búsqueda de las soluciones que resuelven el problema en el caso asteroideal debe limitarse a los puntos de intersección de ambas curvas ubicados más arriba de la paralela al eje de las z trazada por la ordenada R^3 . Comúnmente queda un solo punto de intersección que puede tomarse en cuenta; en el caso de una verdadera solución doble se debe esperar una cuarta observación para decidir cuál es de las dos soluciones del problema la que corresponde a la realidad física.

4. — Cálculo de una órbita de asteroide a partir de una solución aproximada.

Para este cálculo que puede ser interpretado como un cálculo de segunda aproximación, vamos a indicar dos distintos procedimientos:

A) METODO DE LA VARIACION DE LA DISTANCIA GEOCENTRICA Δ_0 .

Hemos aplicado este método en los cálculos de órbitas de todos los asteroides no identificados que han sido descubiertos en nuestro Observatorio, aprovechando el valor aproximado de Δ_0 que proviene del cálculo de una órbita preliminar (circular, o elíptica relativa a un arco muy corto) ⁽⁹⁾. Nos hemos enterado ahora que también en el Observatorio de Turku (Finlandia) se ha empleado un método parecido por parte de Väisälä y de Oterma ⁽¹⁰⁾, que consiste en hacer distintas hipótesis sobre Δ_0 con valores muy cercanos entre sí. Para cada hipótesis quedan unívocamente determinadas las coordenadas x_0 , y_0 , z_0 y dos de las tres componentes de la velocidad; supongamos que sean éstas x'_0 y z'_0 . La deducción de la restante componente y'_0 puede efectuarse luego por medio de dos ecuaciones distintas, y en general se obtienen dos valores no coincidentes, que nosotros indicaremos con: $(y'_0)_1$ é $(y'_0)_3$; formada entonces la diferencia: $\varepsilon = (y'_0)_3 - (y'_0)_1$, el verdadero valor de Δ_0 que resuelve el problema se determina con procedimiento de interpolación inversa imponiendo la condición $\varepsilon = 0$.

Con la notación del párrafo anterior vamos a exponer el formulario que hemos empleado, empezando por establecer las fórmulas que permiten calcular la posición P_0 y las dos derivadas x'_0 y z'_0 a partir de Δ_0 .

De las fórmulas (10) para $i = 0$ siguen inmediatamente:

$$\begin{aligned} x_0 &= l_0 \Delta_0 - X_0 \\ y_0 &= m_0 \Delta_0 - Y_0 \\ z_0 &= n_0 \Delta_0 - Z_0 \end{aligned} \quad (23)$$

y teniendo en cuenta la primera de las (13) se obtiene:

$$\begin{aligned} G_1 (C_1 z'_0 - x'_0) &= A_1 - F_1 \bar{A}_1 \\ G_3 (C_3 z'_0 - x'_0) &= A_3 - F_3 \bar{A}_3 \end{aligned} \quad (24)$$

donde hemos puesto:

$$\begin{aligned} \bar{A}_1 &= C_1 z_0 - x_0 \\ \bar{A}_3 &= C_3 z_0 - x_0 \end{aligned} \quad (25)$$

Ponemos además:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{A_1 - F_1 \bar{A}_1}{G_1} \\ a_3 &= \frac{A_3 - F_3 \bar{A}_3}{G_3} \end{aligned} \quad (26)$$

resulta:

$$\begin{aligned} x'_0 &= \frac{a_1 c_3 - a_3 c_1}{c_1 - c_3} \\ z'_0 &= \frac{a_1 - a_3}{c_1 - c_3} \end{aligned} \quad (c_1 \neq c_3) \quad (27)$$

La segunda de las (13) para $i = 1$ e $i = 3$ tendría que proveer luego el mismo valor de y'_0 , pero esto no ocurre en general. Procediendo como se hizo para deducir las (22), en el caso presente se tiene:

$$\begin{aligned} z_1 &= F_1 z_0 + G_1 z'_0 \\ z_3 &= F_3 z_0 + G_3 z'_0 \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} (y'_0)_1 &= \frac{1}{G_1} (S_1 z_1 - F_1 y_0 - B_1) \\ (y'_0)_3 &= \frac{1}{G_3} (S_3 z_3 - F_3 y_0 - B_3) \end{aligned} \quad (29)$$

y finalmente se debe formar la diferencia:

$$\varepsilon = (y'_0)_3 - (y'_0)_1 \quad (30)$$

Si Δ_0 es un valor aproximado de la verdadera distancia geocéntrica en el instante $t = t_0$, nosotros estimamos conveniente proceder del modo siguiente: Calcular las fórmulas de (23) a (30) simultáneamente para las tres hipótesis $\Delta_0 - w$, Δ_0 , $\Delta_0 + w$, donde w es una cantidad pequeña que debe ser elegida de manera que la diferencia cambie de signo en el intervalo $(\Delta_0 - w; \Delta_0)$ o en el $(\Delta_0, \Delta_0 + w)$ y esto con el supuesto de que sea simplemente:

$$\begin{aligned} F_i &= 1 - \xi_0 \tau_i^2 \\ G_i &= \tau_i - \frac{1}{8} \xi_0 \tau_i^3 \end{aligned} \quad \{ \tau_i = k (t_i - t_0) \}$$

Denotemos con ε_{-w} , ε_0 , ε_{+w} los valores de ε correspondientes a las hipótesis antedichas. En función de estos valores, una cualquiera de las fórmulas interpolatorias de segundo orden para intervalos equidistantes permitirá deducir el valor de Δ_0 tal que resulta $\varepsilon = 0$.

Suponiendo por ejemplo que el cambio de signo se produzca en el intervalo $(\Delta_0 - w, \Delta_0)$, aplicando entonces la fórmula interpolatoria de Lagrange se debe resolver la ecuación de segundo grado en n :

$$\frac{1}{2} \varepsilon_{-w} (n^2 + n) + \varepsilon_0 (1 - n^2) + \frac{1}{2} \varepsilon_{+w} (n^2 - n) = 0$$

y si el cambio de signo se produjera en el otro intervalo $(\Delta_0, \Delta_0 + w)$, la ecuación de segundo grado a solucionar sería:

$$\frac{1}{2} \varepsilon_{-w} (n^2 - n) + \varepsilon_0 (1 - n^2) + \frac{1}{2} \varepsilon_{+w} (n^2 + n) = 0$$

En ambos casos, llamando con ν a la raíz de valor absoluto menor que la unidad, el valor de la distancia geocéntrica que se busca resulta: $\Delta_0 - \nu w$ ó $\Delta_0 + \nu w$.

A esta altura del proceso empieza el verdadero cálculo de segunda aproximación que consiste: en corregir los tiempos de observación por el tiempo-luz, poniendo:

$$\begin{aligned} \tau_i &= k (t_i^* - t_0^*) \\ t_i^* &= t_i - 0^d.005770 \Delta_i \end{aligned}$$

con:

$$\Delta_i = \frac{1}{n_i} (z_i + Z_i)$$

en tomar en cuenta todos los términos de las series F y G que tienen influencia dentro del orden de precisión numérica con que se trabaja, y en repetir el cálculo de las fórmulas (23) a (30) haciendo variar todavía, si es necesario, el valor de la distancia geocéntrica Δ_0 hasta que resulte nuevamente $\varepsilon = 0$.

NOTA I.

Haciendo intervenir explícitamente las distancias geocéntricas Δ_i es interesante deducir la ecuación que resulta transformando la condición $\varepsilon = 0$. Esta ecuación transformada establece el puente entre el presente método y el de Gauss. Se tiene:

$$(a) \quad \frac{1}{G_3} (S_3 z_3 - F_3 y_0 - B_3) - \frac{1}{G_1} (S_1 z_1 - F_1 y_0 - B_1) = 0$$

y por las (12):

$$(b) \quad G_1 (y_3 - F_3 y_0) - G_3 (y_1 - F_1 y_0) = 0$$

Después de hacer intervenir las (10), con fáciles reducciones se llega a:

$$(c) \quad G_3 m_1 \Delta_1 - (F_1 G_3 - F_3 G_1) m_0 \Delta_0 - G_1 m_3 \Delta_3 = G_3 Y_1 - (F_1 G_3 - F_3 G_1) Y_0 - G_1 Y_3$$

Dos relaciones análogas para las coordenadas X y Z se obtendrían si, en cambio de razonar sobre la componente y'_0 , se hubiera partido de x'_0 ó z'_0 .

Ahora bien, observando que las relaciones v_1 y v_3 , entre las áreas de los triángulos SP_1P_0 , SP_0P_3 , y el área del triángulo SP_1P_3 , se pueden expresar por medio de las fórmulas:

$$(d) \quad v_1 = \frac{G_3}{F_1 G_3 - F_3 G_1}, \quad v_3 = \frac{-G_1}{F_1 G_3 - F_3 G_1}$$

se concluye que la última ecuación (c), y sus correspondientes en las otras coordenadas, equivalen idénticamente a las ecuaciones fundamentales de partida del método clásico de Gauss.

B) METODO DE APROXIMACION POR ITERACION.

Sean $P_0 (x_0, y_0, z_0)$ y $V_0 (x'_0, y'_0, z'_0)$, respectivamente, la posición y la velocidad aproximada de P. Calculadas por primera vez las series F_i y G_i con todos los términos que sean necesarios y con los tiempos corregidos, este método de aproximaciones sucesivas consiste en calcular repetidamente el sistema de ecuaciones (13) y (14), que aquí vamos a escribir detalladamente después de haber reemplazado en la (13) los valores x_0 e y_0 dados por la (14):

$$\begin{aligned} F_1 (C_1 - C_0) z_0 + G_1 C_1 z'_0 - G_1 x'_0 &= A_1 - F_1 A_0 \\ F_3 (C_3 - C_0) z_0 + G_3 C_3 z'_0 - G_3 x'_0 &= A_3 - F_3 A_0 \\ F_1 (S_1 - S_0) z_0 + G_1 S_1 z'_0 - G_1 y'_0 &= B_1 - F_1 B_0 \\ F_3 (S_3 - S_0) z_0 + G_3 S_3 z'_0 - G_3 y'_0 &= B_3 - F_3 B_0 \end{aligned} \tag{31}$$

y en volver a calcular las series F_i y G_i . El proceso calculístico de iteración termina cuando los valores numéricos de F_i y G_i ya no experimentan ningún cambio más.

Este método resulta muy ventajoso en los casos de arcos no muy grandes y para la determinación de órbitas de asteroides descubiertos durante oposiciones perihélicas. En estas circunstancias particulares el producto $r_0 \cdot r'_0$ se aproxima a cero y por lo tanto resultan despreciables los coeficientes de los términos de tercer y cuarto orden de las series F_i y G_i , respectivamente.

La extensión de este método al caso en que se disponga de un número mayor de tres observaciones será tratado por mí en otra oportunidad. Cabe destacar además que si los intervalos de tiempo fueran tan grandes como para comprometer la convergencia de las series F_i y G_i , se podrían aprovechar las siguientes expresiones cerradas debidas a Kühnert ⁽¹¹⁾:

$$\begin{aligned}
 F_1 &= 1 + \frac{a}{r_0} \{ \cos (E_1 - E_0) - 1 \} \\
 G_1 &= a^{3/2} \{ \sin (E_1 - E_0) - e (\sin E_1 - \sin E_0) \} \quad , \quad (32)
 \end{aligned}$$

donde:

$$a = \frac{1}{\frac{2}{r_0} - V_0^2} \quad , \quad e \sin E_0 = \frac{r_0 r'_0}{a^{1/2}} \quad , \quad e \cos E_0 = r_0 V_0^2 - 1 \quad ,$$

$$M_0 = E_0 - e^0 \sin E_0$$

$$E_1 - e^0 \sin E_1 = M_0 + \frac{R^0 \tau_1}{a^{3/2}} \quad (R^0 = 57^{\circ}.29578)$$

NOTA II.

Los métodos A) y B), como es obvio, se pueden emplear también en los casos de determinación "ex novo" de órbitas fundadas en observaciones recientes, cuando los elementos conocidos (\bar{M}_0 , para la época $t = \bar{t}_0$, φ , μ , ω , Ω , i) no permiten reproducir satisfactoriamente las mismas observaciones.

Para la posición y velocidad aproximadas se pueden tomar los valores que provienen de los siguientes grupos de fórmulas:

$$\begin{aligned}
 E - e^0 \sin E &= \bar{M}_0 + \mu^0 (t_0 - \bar{t}_0) \quad (e^0 = R^0 \sin \varphi) \\
 P_0 \begin{cases} x_0 = aP_x (\cos E - e) + a \cos \varphi Q_x \sin E \\ y_0 = aP_y (\cos E - e) + a \cos \varphi Q_y \sin E \\ z_0 = aP_z (\cos E - e) + a \cos \varphi Q_z \sin E \end{cases}
 \end{aligned}$$

($P_x, P_y, P_z; Q_x, Q_y, Q_z$ constantes gaussianas)

$$V_0 \begin{cases} x'_0 = (a \cos \varphi Q_x \cos E - aP_x \sin E) \frac{dE}{d\tau} \\ y'_0 = (a \cos \varphi Q_y \cos E - aP_y \sin E) \frac{dE}{d\tau} \\ z'_0 = (a \cos \varphi Q_z \cos E - aP_z \sin E) \frac{dE}{d\tau} \end{cases}$$

$$\frac{dE}{d\tau} = \frac{1}{r_0 a^{1/2}} \quad , \quad r_0 = (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{1/2}$$

5. — Determinación de los elementos orbitales elípticos.

Sean ahora $x_0, y_0, z_0; x'_0, y'_0, z'_0$ los seis datos definitivos para el instante $t = t_0$. El problema de la determinación de los elementos orbitales no presenta ninguna dificultad más. He dado siempre la preferencia en las aplicaciones prácticas a los siguientes grupos de fórmulas ⁽¹²⁾:

$r_0 r'_0 = x_0 x'_0 + y_0 y'_0 + z_0 z'_0$ $V_0^2 = x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2$ $\frac{1}{a} = \frac{2}{r_0} - V_0^2$ $\mu^0 = \frac{k^0}{a^{3/2}} \quad (k^0 = 0.98560767)$ $e \sin E_0 = \frac{r_0 r'_0}{a^{1/2}}$ $e \cos E_0 = r_0 V_0^2 - 1$ $e = \sin \varphi, \quad e^0 = R^0 \sin \varphi$ $M_0 = E_0 - e^0 \sin E_0 \quad (\text{para } t = t_0)$		$(1) = \frac{\cos E_0}{r_0}$ $(2) = -\sqrt{a} \sin E_0$ $P_x = (1) x_0 + (2) x'_0$ $P_y = (1) y_0 + (2) y'_0$ $P_z = (1) z_0 + (2) z'_0$ $(3) = \frac{\sin E_0}{r_0 \cos \varphi}$ $(4) = \frac{a^{1/2}}{\cos \varphi} (\cos E_0 - e)$ $Q_x = (3) x_0 + (4) x'_0$ $Q_y = (3) y_0 + (4) y'_0$ $Q_z = (3) z_0 + (4) z'_0$
---	--	--

(sin ε , cos ε , sec ε , para el valor de ε referido al mismo equinocio de las observaciones.)

$$\begin{aligned} \sin i \sin \omega &= P_z \cos \varepsilon - P_y \sin \varepsilon \\ \sin i \cos \omega &= Q_z \cos \varepsilon - Q_y \sin \varepsilon \\ \sin \Omega &= (P_y \cos \omega - Q_y \sin \omega) \sec \varepsilon \\ \cos \Omega &= P_x \cos \omega - Q_x \sin \omega \end{aligned}$$

P r u e b a s

$(x_0 + x'_0)^2 + (y_0 + y'_0)^2 + (z_0 + z'_0)^2 = r_0^2 + V_0^2 + 2 r_0 r'_0$ $p = a \cos^2 \varphi = r_0 V_0^2 - (r_0 r'_0)^2$ $P_x \sin \omega + Q_x \cos \omega = -\cos i \sin \Omega$		$P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 = 1$ $Q_x^2 + Q_y^2 + Q_z^2 = 1$ $P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z = 0$
---	--	---

6. — Aplicaciones numéricas.

Los ejemplos numéricos que se darán a continuación se refieren a las órbitas de dos asteroides, y sirven para ilustrar los dos métodos A) y B) expuestos en el § 4. Además, el primer ejemplo enseña la aplicación del método de Wilkens con el esquema de cálculo del § 3.

I) Órbita del asteroide (931) Whitttemora.

Es éste el mismo ejemplo que en la referida obra de Stracke ⁽¹³⁾, se encuentra calculado con el método de Veithen-Merton, que como se sabe es el de Gauss-Encke adaptado al cálculo mecánico. Tomamos entonces de dicha fuente los datos observacionales y las coordenadas topocéntricas del Sol, que resumimos en el cuadro siguiente:

	1	0	3
1920 t _i {	Marzo 20.37065	Abril 6.39902	Abril 22.34421
	20.37065	37.39902	53.34421
α _i	169°.96329	167°.36058	+ 166°.03171
δ _i	+ 18.79156	+ 19.61153	+ 19.60042
l _i	— 0.932209	— 0.919162	— 0.914198
m _i	+ 0.164989	+ 0.206121	+ 0.227398
n _i	+ 0.322126	+ 0.335641	+ 0.335459
X _i	+ 0.996424	+ 0.958665	+ 0.849396
Y _i	— 0.000764	+ 0.265070	+ 0.494107
Z _i	— 0.000345	+ 0.114958	+ 0.214305

Luego agregamos el cálculo de los fórmulas (11), (15) y (17):

	1	0	3
t _i — t ₀	— 17.02837		+ 15.94519
τ _i	— 0.292924		+ 0.274291
τ _i ²	+ 0.085804		+ 0.075236
τ _i ³	— 0.025134		+ 0.020637
C _i	— 2.893924	— 2.738527	— 2.725219
S _i	+ 0.512189	+ 0.614111	+ 0.677871
A _i	+ 0.995426	+ 1.273481	+ 1.433424
B _i	— 0.000587	+ 0.194473	+ 0.348836

Fórmulas de comprobación: $Z_i (C_i + S_i) + A_i + B_i - (X_i + Y_i) = 0$; $1 + C_i^2 + S_i^2 = \frac{1}{n_i^2}$

$$\begin{aligned} \tau_1 \tau_3 &= 0.080346, & \frac{C_1 - C_3}{\tau_1 - \tau_3} &= 0.567215, & \tau_1 \tau_3 (\tau_1 - \tau_3) &+ 0.045573 \\ P &= 0.038725_8, & p &= 0.009279_5 \\ Q &+ 0.003364_0, & q &+ 0.000993_6 \\ R &= 0.029416_8, & r &= 0.008286_6 \\ S &+ 0.058036_3, & s &+ 0.008862_7 \\ T &+ 0.013554_8, & t &+ 0.013311_9 \\ a &= 0.000279_3, & c &= 0.000389_7 \\ b &+ 0.000652_4, & d &+ 0.000031_3 \end{aligned}$$

Empezamos ahora el cálculo de la: **Primera Aproximación.**

Por la (18) resulta:

$$[a] \quad z_0 = \frac{-2.793 + 6.524 \xi_0}{-3.897 + 0.313 \xi_0}$$

y teniendo en cuenta las fórmulas (14) podemos escribir:

$$[b] \quad \begin{aligned} x_0 &= -2.738527 z_0 - 1.273481 \\ y_0 &= +0.614111 z_0 - 0.194473 \end{aligned}$$

La resolución del sistema de ecuaciones [a] y [b], con la condición de que sea $\xi_0 = \frac{1}{2} (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{-3/2}$ provee por aproximaciones sucesivas.

$$z_0 = +0.6932$$

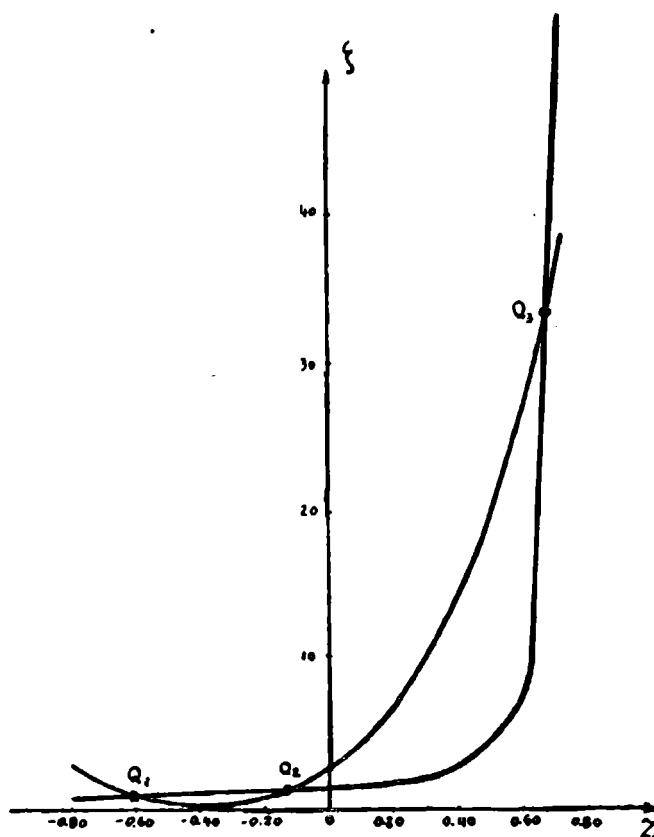
y por consiguiente resulta:

$$\begin{aligned}
 x_0 &= -3.171828 \\
 y_0 &= +0.231229 \\
 r^2_0 &= 10.594486 \\
 \xi_0 &= 0.014500 \\
 \frac{1}{3} \xi_0 &= 0.004833
 \end{aligned}$$

En nuestro caso numérico las soluciones reales del sistema de ecuaciones [a] y [b], según las consideraciones desarrolladas en la Nota del § 3, se obtienen como puntos de intersección de las dos curvas:

$$\begin{aligned}
 \xi &= \frac{0.156_5 z - 3.262}{3.897 z - 2.793} & (\xi = r^3) \\
 \xi^{2/3} &= 8.876659 z^2 + 6.736068 z + 1.659574
 \end{aligned}$$

Dibujando solamente las ramas de las curvas situadas en el semiplano de las ordenadas positivas como en la figura siguiente:



se ve que se tienen tres puntos de intersección Q_1 , Q_2 , Q_3 . El punto Q_2 de abscisa $z = 0.11$ corresponde a la Tierra; el punto Q_1 , entonces, no corresponde a una solución asteroidal; queda en consideración solamente el punto Q_3 cuya abscisa aproximada es $z = +0.69$.

Las fórmulas (20) y (20') dan:

$$z'_0 = 0.130168 \quad , \quad z'_0 = 0.130372 \quad ; \quad \text{valor promedio: } z'_0 = 0.130270$$

Los valores aproximados de F y G hasta los términos de 2º y 3º orden respectivamente, son:

$$\begin{aligned}
 F_1 &+ 0.998756 & , & & F_3 &+ 0.998909 \\
 G_1 &- 0.292803 & , & & G_3 &+ 0.274191
 \end{aligned}$$

y en consecuencia, por la (21):

$$z_1 = +0.730481 \quad , \quad z_3 = +0.656725$$

Las (22) proveen finalmente:

$$\begin{aligned}
 x'_0 &= 0.199793 & , & & x'_0 &= 0.199773 & ; & & \text{valor promedio: } x'_0 &= 0.199783 \\
 y'_0 &= 0.491081 & , & & y'_0 &= 0.491037 & & & & y'_0 &= 0.491059
 \end{aligned}$$

SEGUNDA APROXIMACION.

Estamos ahora en condiciones de corregir los tiempos de observación y de calcular los valores de las series F y G con todos los términos que sean necesarios para alcanzar la precisión de una unidad de la sexta cifra decimal.

Se tiene:

	1	0	3
$z_i + Z_i$	+ 0.730481	+ 0.808158	+ 0.871030
$\Delta_i = \frac{1}{n_i} (z_i + Z_i)$	2.2666	2.4078	2.5965
$- 0^d.005770 \Delta_i$	- 0.01308	- 0.01389	- 0.01489
t^*_i	+ 20.35757	37.38513	53.32923
$t^*_i - t^*_o$	- 17.02756		+ 15.94410
τ_i	- 0.292910		+ 0.274272
τ^2_i	+ 0.085796		+ 0.075225
τ^3_i	- 0.025131		+ 0.020632
τ^4_i	+ 0.007361		+ 0.005659
τ^5_i	- 0.002156		+ 0.001552
τ^6_i	+ 0.000632		+ 0.000426
$x_o x'_o + y_o y'_o + z_o z'_o$	+ 0.429827	, $2 \xi_o + 3 \eta_o - 12 \sigma^2_o + 0.001702$	
σ_o	+ 0.040571	, $2 \xi_o + 3 \eta_o - 4 \sigma^2_o + 0.014870$	
V^2_o	+ 0.298022	, $2 \xi_o + 9 \eta_o - 36 \sigma^2_o - 0.052892$	
η_o	- 0.002515	, $2 \xi_o + 6 \eta_o - 8 \sigma^2_o + 0.000741$	
f_2	- 0.014500	, $g_3 - 0.004833$	
f_3	+ 0.000588	, $g_4 + 0.000294$	
f_4	+ 0.000002	, $g_5 - 0.000013$	
f_5	- 0.000002	, $g_6 \quad \quad \quad 0$	
$F_i = 1 - 0.014500 \tau^2_i + 0.000588 \tau^3_i + 0.000002 \tau^4_i - 0.000002 \tau^5_i$			
$G_i = \tau_i - 0.004833 \tau^3_i + 0.000294 \tau^4_i - 0.000013 \tau^5_i$			(i = 1,3)
[c]	$F_1 + 0.998741$, $F_3 + 0.998921$	
	$G_1 - 0.292786$, $G_3 + 0.274174$	

Podemos plantear ahora el sistema de ecuaciones (31):

$$\begin{aligned}
 - 0.155201 z_o + 0.847300 z'_o + 0.292786 x'_o &= - 0.276452 \\
 + 0.013294 z_o - 0.747184 z'_o - 0.274174 x'_o &= + 0.161317 \\
 - 0.101794 z_o - 0.149962 z'_o + 0.292786 y'_o &= - 0.194815 \\
 + 0.063691 z_o + 0.185855 z'_o - 0.274174 y'_o &= + 0.154573
 \end{aligned}$$

cuya solución provee:

$$\begin{aligned}
 z_o + 0.693120 & , & x'_o - 0.198860 & , & (V^2_o + 0.297971) \\
 & , & y'_o - 0.491294 & , & \\
 & & z'_o - 0.130598 & &
 \end{aligned}$$

Además, por las [b] se tiene:

$$\begin{aligned}
 x_o - 3.171609 & (r^2_o \ 10.592963) \\
 y_o + 0.231180 & (\xi_o \ 0.014503)
 \end{aligned}$$

La repetición del cálculo de las fórmulas (5) y (6) nos dice que varían solamente los coeficientes:

$$\begin{aligned}
 f_2 - 0.014503 & , & g_3 - 0.004834 \\
 f_3 + 0.000584 & , & g_4 + 0.000292
 \end{aligned}$$

quedando invariados todos los demás.

Si se tiene en cuenta que los nuevos valores:

$$\begin{array}{l} F_1 + 0.998741 \quad , \quad F_3 + 0.998921 \\ G_1 - 0.292786 \quad , \quad G_3 + 0.274174 \end{array}$$

son valores coincidentes con los [c] precedentes, podemos considerar concluido también el cálculo de la segunda aproximación y pasar al cálculo de los elementos orbitales. Se puede comprobar inmediatamente que el grado de precisión alcanzado es igual al provisto por el método de Gauss. En efecto, los valores de las relaciones de las áreas v_1 y v_3 , dadas por las fórmulas (d) de la Nota I del § 4, resultan:

$$v_1 = \frac{G_3}{F_1 G_3 - F_3 G_1} = 0.484151 \quad , \quad v_3 = \frac{-G_1}{F_1 G_3 - F_3 G_1} = 0.517017$$

que coinciden con los calculados por Stracke en el ejemplo citado en ⁽¹³⁾.

Cálculo de los elementos orbitales.

Aplicando el formulario del § 5 se tiene:

r_0	3.254683	,	$r_0 r'_0$	+ 0.426609	,	$\cos \varphi$	0.970300		
$\frac{l}{a}$	0.316528	,	$e \sin E$	+ 0.240014	,	$a \cos \varphi$	3.065447		
a	3.159278	,	$e \cos E$	- 0.030198 ₉	,	$r_0 \cos \varphi$	3.158019		
$a^{1/2}$	1.777436	,	$\cotg E$	- 0.125821 ₄	,	(1) - 0.038356	, (3) + 0.314177		
$a^{3/2}$	5.615414	,	E	97°.1713 ₅	,	(2) - 1.763531	, (4) - 0.671815		
μ	0°.175518 ₁	,	$\sin E$	+ 0.992177		Constantes gaussianas			
	(631''.865)		$\cos E$	- 0.124837		P_x	+ 0.472346	, Q_x	- 0.862850
			e	0.241906 ₄	,	P_y	+ 0.857545	, Q_y	+ 0.402690
			(φ)	13°.9990 ₈	,	P_z	+ 0.203728	, Q_z	+ 0.305500
	(para $t = t_0$)		M_0	83°.4195 ₆					
						1920 {			
						$\sin \varepsilon$	0.397944		
						$\cos \varepsilon$	0.917410		
						$\sec \varepsilon$	1.090025		
			$\sin i$	$\sin \omega$	- 0.154353	,	$\sin \Omega$	+ 0.920300	
			$\cos i$	$\cos \omega$	+ 0.120021	,	$\cos \Omega$	- 0.391214	
			$\cotg \omega$		- 0.777574 ₈	,	$\cotg \Omega$	- 0.425094 ₀	
			ω		307°.8677 ₄	,	Ω	113°.0300 ₅	
			$\sin \omega$		- 0.789430				
			$\cos \omega$		+ 0.613841				
			$\sin i$		+ 0.195524 ₆				
			i		11°.2753 ₇				

Finalmente, calculando mediante los elementos orbitales arriba deducidos, las posiciones teóricas para los tres instantes t_1, t_2, t_3 y para el instante $t_4 = 1920$ Abr. 14.31797 de una cuarta observación no empleada en el cálculo de la determinación de la órbita:

$$\alpha_4 \quad 166°.54783 \quad , \quad \delta_4 + 19°.69497$$

(Coordenadas topocéntricas del Sol: $X = +0.912908$; $Y = +0.382348$; $Z = +0.165837$), se obtienen, en el sentido observación-cálculo, los residuos siguientes:

	1	0	3	4
$\cos \delta \Delta \alpha$	- 0''.1	0''.0	- 0''.2	- 0''.8
$\Delta \delta$	+ 0.1	0.0	0.0	+ 0.1

que deben considerarse muy satisfactorios.

Nos queda por observar un hecho muy importante: si se comparan los elementos orbitales obtenidos por nosotros con los correspondientes calculados por Stracke se constatan entre ellos leves discrepancias, la más grande de las cuales alcanza en valor absoluto a casi $0^{\circ}.02$ en el elemento φ . Esto prueba, como ha sido notado también en casos parecidos por otros autores ⁽¹⁴⁾, que dentro de una prefijada precisión numérica (representación de las coordenadas observadas con residuos del orden de $1''$) queda un cierto margen de variabilidad en los elementos orbitales sin que con esto el cálculo teórico deje de reproducir satisfactoriamente las coordenadas mismas.

II) Órbita del asteroide 1948 PA.

Este asteroide fué descubierto en nuestro Observatorio en la fecha del 3 de Agosto de 1948 ⁽¹⁵⁾. Fueron realizadas las cuatro observaciones siguientes:

	1948 T. U.	α Equinocc'io	δ 1950.0
Agosto	3.26238	22 ^h 22 ^m 14 ^s .67	—23° 47' 41".2
Sept.	5.18310	21 59 04.24	—27 30 42 .1
Oct.	4.09609	47 06.76	—28 02 51 .7
„	28.07754	52 07.71	—26 37 25 .7

Elijamos las tres primeras observaciones como fundamentales para nuestro cálculo y empleamos el método A) del § 4.

Los datos iniciales están consignados en el cuadro siguiente:

i	1	0	3
t_i	3.26238	36.18310	65.09609
$t_i - t_0$	— 32.92072		+ 28.91299
τ_i	— 0.566306		+ 0.497364
τ_i^2	+ 0.320702		+ 0.247371
τ_i^3	— 0.181615		+ 0.123033
α_i	335°.56113	329°.76767	326°.77817
δ_i	— 23.79478	— 27.51169	— 28.04739
l_i		+ 0.766288	
m_i		— 0.446569	
n_i		— 0.461930	
X_i	— 0.663420	— 0.961613	— 0.982470
Y_i	+ 0.704363	+ 0.277629	— 0.171751
Z_i	+ 0.305499	+ 0.120428	— 0.074467
C_i	— 2.064670	— 1.658884	— 1.570178
S_i	+ 0.938265	+ 0.966747	+ 1.028351
A_i	— 0.032665	+ 0.761837	— 1.099396
	$C_1 - C_3 = 0.494492$		

1ª Aproximación

Supongamos no conocer nada acerca de la órbita que tenemos que determinar. Un cálculo previo, que aquí vamos a omitir, efectuado con cuatro cifras decimales y suponiendo simplemente $F_1 = 1$ y $G_1 = \tau_1$, nos indica que la diferencia ε —fórmula (30)— cambia de signo cuando

se pasa del valor 1,5 al valor 2,0 de la distancia geocéntrica Δ_0 . La representación gráfica de ε , admitiendo que varíe linealmente entre estos límites, nos provee el valor aproximado $\Delta_0 = 1.85$ para que resulte $\varepsilon = 0$.

Nuestras hipótesis iniciales serán entonces $\Delta_0 = 1.80$ y $\Delta_0 = 1.90$, y luego, una vez comprobado el efectivo cambio de signo de ε mediante el cálculo hasta 6 decimales de las fórmulas (23) a (30), agregaremos la tercera hipótesis complementaria $\Delta_0 = 1.85$. Nos limitamos a dar los resultados:

Hipótesis	$\Delta_0 - w$	1.80	,	Δ_0	1.85	,	$\Delta_0 + w$	1.90	
$10^6 \cdot \varepsilon$	ε_{-w}	+ 3322	,	ε_0	- 266	,	ε_{+w}	- 3888	(w = 0,05)

La aplicación de la fórmula interpolatoria de Lagrange para tres puntos, nos lleva a la siguiente ecuación de 2º grado en n:

$$1661(n^2 + n) - 266(1 - n^2) - 1944(n^2 - n) = 0$$

cuya solución en valor absoluto menor que la unidad es:

$$v = 0.07383$$

Resulta luego que $\Delta_0 = 1.85 - v \cdot w = 1.846308$ es el valor de la distancia geocéntrica para el cual se tiene $\varepsilon = 0$, como se puede comprobar. En efecto, el cálculo provee:

$$(\Delta_0 \quad 1.846308)$$

$$P_0 \begin{cases} x_0 + 2.376418 \\ y_0 - 1.102134 \\ z_0 - 0.973294 \end{cases} , \quad V_0 \begin{cases} x'_0 + 0.289965 \\ y'_0 + 0.542384 \\ z'_0 + 0.143795 \end{cases} \quad \varepsilon + 0.000003$$

$$(\Delta_1 \quad 1.8388 \quad , \quad \Delta_3 \quad 2.0647)$$

2ª Aproximación

Correcciones de los tiempos de observación	1	0	3
t^*_i	— 1061	— 1065	— 1191
$t^*_i - t^*_0$	3.25177	36.17245	65.08418
τ_i	— 0.566305		+ 0.497342
τ^2_i	+ 0.320701		+ 0.247349
τ^3_i	— 0.181615		+ 0.123017
τ^4_i	+ 0.102349		+ 0.031182
τ^5_i	— 0.058244		+ 0.030428
τ^6_i	+ 0.032984		+ 0.015133

Procediendo como en el ejemplo precedente, se tiene:

$$F_i = 1 - 0.022911 \tau^2_i - 0.000148 \tau^3_i + 0.000116 \tau^4_i + 0.000002 \tau^5_i$$

$$G_i = \tau_i - 0.007637 \tau^3_i - 0.000071 \tau^4_i + 0.000035 \tau^5_i + 0.000001 \tau^6_i$$

y repitiendo el cálculo con el valor de Δ_0 de la última hipótesis se obtiene $\varepsilon = + 0.000033$. Es necesario entonces aportar todavía una pequeña corrección a Δ_0 . Con la corrección empírica de

+ 2 unidades del cuarto orden decimal se obtiene $\varepsilon = + 0.000018$. Aplicando ahora la "regula falsi" entre las dos últimas hipótesis se tiene finalmente $\Delta_0 = 1.846748$. Con este valor definitivo de la distancia geocéntrica damos a continuación los cálculos en detalle de las fórmulas (23) a (30):

	Δ_0	1.846748	(Los demás coeficientes de las series F_i y G_i quedan inalterados)	
	x_0	+ 2.376754		
	y_0	— 1.102329		
	z_0	— 0.973496		
	$f_2 = -\xi_0$	— 0.022901		
	$g_3 = -\frac{1}{3}\xi_0$	— 0.007634		
	F_i	+ 0.992693	1	+ 0.994326
	G_i	— 0.564928	3	+ 0.496400
	$\bar{A}_i = C_i Z_0 - x_0$	— 0.366805		— 0.848192
	$G_i a_i = A_i - F_i \bar{A}_i$	+ 0.331460		— 0.256017
	a_i	— 0.586730		— 0.515747
	$\varepsilon_1 C_3 - \varepsilon_3 C_1$			— 0.143578
	$a_1 - a_3$			— 0.070982
	x'_0			+ 0.290356
	y'_0			+ 0.143545
	$z_i = F_i z_0 + G_i z'_0$	— 1.047475		— 0.896717
	$G_i y'_0 = S_i z_i - F_i y_0 - Y_i$	— 0.306259		+ 0.269108
	$(y'_0)_i$	— 0.542120		+ 0.542119
	ε			— 0.000001

La deducción de los elementos orbitales no presenta ninguna dificultad más. Damos los resultados del cálculo y los residuos para todas las observaciones disponibles.

Epoca $t_0 = 1948$ Sept. 5.17245 T. U.

M_0	348°.4689	ω	244°.4763	} Eclípticales
φ	6.7586	Ω	260.3802	
μ	632".587	i	12.2931	
a	3.156875			} Equinoccio 1950.0

	1	0	3	4
$\cos \delta \Delta \alpha$	+ 0".3	+ 0".4	+ 0".4	— 0".6
$\Delta \delta$	0.0	0.0	0.0	— 1.8

Estos últimos residuos han de considerarse también muy satisfactorios, como en el caso precedente, tanto más cuando se piensa que durante el lapso de 86 días el asteroide ha recorrido un arco de cerca de 15° de su órbita.

NOTAS BIBLIOGRAFICAS

- (1) Para una buena bibliografía sobre este tema consúltese R. Radau, *Bibliographie relative au calcul des orbites*, *Bulletin Astronomique*, T. XVI, 427 (1899), que contiene los datos de las principales publicaciones aparecidas desde la época de Newton hasta el año 1899.
- (2) Para las obras aparecidas posteriormente al año 1899 y hasta el año 1929, consúltese el Apéndice C del tratado de G. Stracke, *Bahnbestimmung* etc. Berlin 1929. En particular, para la memoria de Wilkens ver: A. N. 210, 81, (1919).
- (3) Ver G. Stracke, obra citada, pág. 75 y siguientes.
- (4) A. N. 243, 317 (1931) y 244, 433 (1932).
- (5) A. J. XLIV, 153 (1935).
- (6) Véase en Oppolzer, *Lehrbuch zur Bahnbestimmung*, T. I, 95 (1882) y en Lagrange, *Oeuvres*, IV, 500.
- (7) Son de nuestro conocimiento los ejemplos calculados en la memoria de Wilkens, citada en (2); de Stumpff citado en (4). y de J. Siroky, *Contributions from the Astronomical Institute*; Vol. I, nº 3, Brno (1947).
- (8) T. Oppolzer, tomo citado, pág. 364.
- (9) Hemos expuesto este método en la sesión de Coloquios astronómicos organizados en nuestro Observatorio, el día 4 de Marzo de 1950.
- (10) Por medio de la publicación que hemos recibido, intitulada: *Formulae and directions for computing the orbits of minor Planets and Comets*. Turku (1951).
- (11) A. N. 95, 145 (1879).
- (12) Ver *Planetary Co-ordinates for the years 1940-1960*. Table XIV, collected formulae, pág. 149.
- (13) Ver pág. 90 y siguientes.
- (14) Por ejemplo por H. Andoyer, *Cours de Mécanique Céleste*, T. I, pág. 164 (1923).
- (15) Ver MPC. 175.

A P E N D I C E

g	A	B	C	D
- 0.020	- 1.02041	+ 0.17637	- 0.34358	+ 0.03667
	104	50	53	17
19	01937	17617	34305	03650
	104	50	52	17
18	01833	17567	34253	03633
	104	50	52	16
17	01729	17517	34201	03617
	103	50	52	17
16	01626	17467	34149	03600
	103	50	52	17
15	01523	17417	34097	03583
	103	50	52	16
14	01420	17367	34045	03567
	103	50	51	17
13	01317	17317	33994	03550
	102	50	52	17
12	01215	17267	33942	03533
	103	50	51	16
11	01112	17217	33891	03517
	102	50	52	17
- 0.010	- 1.01010	+ 0.17167	- 0.33839	+ 0.03500
	102	50	51	17
9	00908	17117	33788	03483
	101	50	51	16
8	00807	17067	33737	03467
	102	50	51	17
7	00705	17017	33686	03450
	101	50	50	17
6	00604	16967	33636	03433
	101	50	51	16
5	00503	16917	33585	03417
	101	50	51	17
4	00402	16867	33534	03400
	101	50	50	17
3	00301	16817	33484	03383
	101	50	50	16
2	00200	16767	33434	03367
	100	50	51	17
1	00100	16717	33383	03350
	100	50	50	17
0.000	- 1.00000	+ 0.16667	- 0.33333	+ 0.03333
	100	50	50	16
1	99900	16617	33283	03317
	100	50	49	17
2	99800	16567	33234	03300
	99	50	50	17
3	99701	16517	33184	03283
	99	50	50	16
4	99602	16467	33134	03267
	99	50	49	17
5	99503	16417	33085	03250
	99	50	49	17
6	99404	16367	33036	03233
	99	50	50	16
7	99305	16317	32986	03217
	99	50	49	17
8	99206	16267	32937	03200
	98	50	49	17
9	99103	16217	32888	03183
	98	50	49	13
+ 0.010	- 0.99010	+ 0.16167	- 0.32839	+ 0.03167

	104	103	102
1	10.4	10.3	10.2
2	20.8	20.6	20.4
3	31.2	30.9	30.6
4	41.6	41.2	40.8
5	52.0	51.5	51.0
6	62.4	61.8	61.2
7	72.8	72.1	71.4
8	83.2	82.4	81.6
9	93.6	92.7	91.8

	101	100	99
1	10.1	10.0	9.9
2	20.2	20.0	19.8
3	30.3	30.0	29.7
4	40.4	40.0	39.6
5	50.5	50.0	49.5
6	60.6	60.0	59.4
7	70.7	70.0	69.3
8	80.8	80.0	79.2
9	90.9	90.0	89.1

	98	53	52
1	9.8	5.3	5.2
2	19.6	10.6	10.4
3	29.4	15.9	15.6
4	39.2	21.2	20.8
5	49.0	26.5	26.0
6	58.8	31.8	31.2
7	68.6	37.1	36.4
8	78.4	42.4	41.6
9	88.2	47.7	46.8

	51	50	49
1	5.1	5.0	4.9
2	10.2	10.0	9.8
3	15.3	15.0	14.7
4	20.4	20.0	19.6
5	25.5	25.0	24.5
6	30.6	30.0	29.4
7	35.7	35.0	34.3
8	40.8	40.0	39.2
9	45.9	45.0	44.1

	17	16
1	1.7	1.6
2	3.4	3.2
3	5.1	4.8
4	6.8	6.4
5	8.5	8.0
6	10.2	9.6
7	11.9	11.2
8	13.6	12.8
9	15.3	14.4

g	A	B	C	D
+ 0.010	- 0.99010	+ 0.16167	- 0.32839	+ 0.03167
11	98912	16117	32791	03150
12	98814	16067	32742	03133
13	98717	16017	32693	03117
14	98619	15967	32645	03100
15	98522	15917	32597	03083
16	98425	15867	32548	03067
17	98328	15817	32500	03050
18	98232	15767	32452	03033
19	98135	15717	32405	03017
+ 0.020	- 0.98039	+ 0.15667	- 0.32357	+ 0.03000

	98	97	96
1	9.8	9.7	9.6
2	19.6	19.4	19.2
3	29.4	29.1	28.8
4	39.2	38.8	38.4
5	49.0	48.5	48.0
6	58.8	58.2	57.6
7	68.6	67.9	67.2
8	78.4	77.6	76.8
9	88.2	87.3	86.4

	50	49	48
1	5.0	4.9	4.8
2	10.0	9.8	9.6
3	15.0	14.7	14.4
4	20.0	19.6	19.2
5	25.0	24.5	24.0
6	30.0	29.4	28.8
7	35.0	34.3	33.6
8	40.0	39.2	38.4
9	45.0	44.1	43.2

	47	17	16
1	4.7	1.7	1.6
2	9.4	3.4	3.2
3	14.1	5.1	4.8
4	18.8	6.8	6.4
5	23.5	8.5	8.0
6	28.2	10.2	9.6
7	32.9	11.9	11.2
8	37.6	13.6	12.8
9	42.3	15.3	14.4

USO DE LA TABLA

A continuación, damos un ejemplo de aplicación de la Tabla:
Sea controlar los valores de F_1 y G_1 dados en la página 15.

Se tiene:

$$\begin{aligned}
 \xi_0 &= 0.014503 & ; & & \sigma_0 &= 0.040273 & ; & & \eta_0 &= 0.002498 \\
 f &= 0.001244 & ; & & g &= -0.011796 & ; & & h &= -0.000214 \\
 & & & & A &= -1.01194 \\
 & & & & B &= +0.17257 \\
 & & & & C &= -0.33932 \\
 & & & & D &= +0.03530 \\
 & & & & F_1 &= +0.998741 \\
 & & & & G_1 &= -0.292786
 \end{aligned}$$

Como se puede comprobar directamente, los valores coinciden hasta la última unidad decimal.



