Universidad Nacional de La Plata

UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE LA PLATA

Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación

TESIS DE MAESTRÍA

***MAESTRIA EN EDUCACIÓN EN CIENCIAS EXACTAS Y
NATURALES***

Análisis de un dispositivo didáctico para el estudio de conceptos de

estadística en una Facultad de Ingeniería

Lic. María Valeria Calandra

Directora de Tesis: Dra. Viviana Angélica Costa

Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación

Universidad Nacional de La Plata

Octubre / 2021

Resumen

En este trabajo se propone un dispositivo didáctico para la enseñanza de ciertas temáticas relacionadas con el Control Estadístico de procesos para abordar algunas de las problemáticas observadas a partir de una investigación realizada sobre la enseñanza y aprendizaje de la *Distribución Normal* a nivel universitario.

Se elabora, implementa y evalúa una enseñanza por investigación mediante una *Actividad de Estudio e Investigación* (AEI) dentro del marco de la *Teoría Antropológica de lo Didáctico* (TAD) en un curso integrado por alumnos de grado y de posgrado para carreras de ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata (UNLP). La actividad propone enseñar en la pedagogía de la investigación y del cuestionamiento del mundo a partir del estudio de un problema en el cual el alumno toma un rol activo en contraposición a la enseñanza tradicional que se utiliza generalmente en el ámbito universitario. El proceso de estudio se organiza en torno a buscar respuesta a una pregunta, que en este caso es: *¿Cómo producir partes intercambiables de automóviles en una fábrica?*

El objetivo es describir y analizar la implementación de este tipo de dispositivos didácticos, en términos de la TAD para carreras de ingeniería, y las praxeologías (saberes y saberes-hacer) que se construyen durante el proceso de estudio.

Palabras clave— Enseñanza, Control estadístico de procesos, Distribución Normal, Didáctica, universidad.

Abstract

This thesis proposes a didactic device for the teaching of certain topics related to Statistical Process Control to address some of the problems observed from an investigation carried out on the teaching and learning of Normal Distribution at university level. A teaching by research is elaborated, implemented, and evaluated by means of a Study and Research Activity (SRA) within the framework of the Anthropological Theory of Didactics (ATD) in a course integrated by undergraduate and graduate students for engineering careers at the National University of La Plata (UNLP). The activity proposes to teach in the pedagogy of research and questioning the world from the study of a problem in which the student takes an active role as opposed to the traditional teaching generally used in the university environment. The study process is organized around the search for an answer to a question, which in this case is: *How to produce interchangeable car parts in a factory?*

The objective is to describe and analyze the implementation of this type of didactic devices, in terms of ATD for engineering careers, and the praxeologies (knowledge and know-how) that are constructed during the study process.

Keywords- Teaching, Statistical Process Control, Normal Distribution, Didactics, university.

Dedicatoria

A mi madre y a la memoria de mi padre, a mis hijos Jeremías, Celeste y Guadalupe, las luces de mi vida.

Agradecimientos

Agradezco muy especialmente a mi directora de tesis, Viviana Angélica Costa, por haber confiado en mí desde el minuto uno, por su apoyo constante, por su calidez, por su humildad y su grandeza.

A las Facultades de Ciencias Exactas e Ingeniería que me dieron la posibilidad de formarme y desarrollar mi profesión.

A la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación, por haberme brindado la oportunidad de llegar a este nivel en mis estudios académicos.

Al Ministerio de Educación de la Nación que, en el marco del Programa de Formación y Capacitación (ProFor), me han permitido acceder a una beca para cursar el posgrado.

Índice

Índice de Figuras	9
Índice de Tablas	10
1. Fundamentos de la elección del tema.....	12
2. Problema y preguntas de investigación.....	16
2.1. Preguntas de investigación	16
3. Objetivos de investigación	16
3.1. Objetivos generales	16
3.2. Objetivos específicos.....	17
3.3. Resultados esperados.....	17
5. Estado y situación del tema.....	18
6. Marco Teórico.....	21
6.1. La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD).....	21
6.2. Las Actividades de Estudio e Investigación.....	22
6.3. La Noción de Praxeología	24
6.4. Las dialécticas de la TAD	26
6.4.1. Dialéctica del estudio y de la investigación (o de las preguntas y de las respuestas)	26
6.4.2. Dialéctica de lo individual y de lo colectivo:	27
6.4.3. Dialéctica del análisis y de la síntesis, praxeológica y didáctica:.....	27
6.4.4. Dialéctica de entrar y salir de tema:	27
6.4.5. Dialéctica del paracaidista y del buscador de trufas:.....	27
6.4.6. Dialéctica de las cajas negras y cajas claras:	28
6.4.7. Dialéctica de la conjetura y de la prueba (<i>media –medio</i>):.....	28
6.4.8. Dialéctica de la lectura y de la escritura:	29
6.4.9. Dialéctica de la difusión y de la recepción:	29

7. Marco Conceptual	30
7.1. La Distribución Normal.....	30
7.2. Control estadístico de calidad.....	32
7.3. Tipos de Diagramas o Cartas de Control Shewart	37
7.3.1. Cartas de control para atributos	37
7.3.1.1. Cartas de proporción de defectos (p)	37
7.3.1.2. Cartas de control (np) o diagrama de cantidad de defectos (np)..	39
7.3.1.3. Cartas de control C.....	39
7.3.1.4. Cartas de control U.....	40
7.3.2. Gráfico de control para variables continuas	41
7.3.2.1. Cartas de control $\bar{X}$ -barra, S y Cartas de control $\bar{X}$ -barra, R	43
7.3.2.2 Cartas para monitorear la variabilidad del proceso.....	44
7.3.2.3. Cartas de control R.....	44
7.3.2.4. Cartas de control S	45
7.3.2.5. Cartas de control para mediciones individuales.....	46
8. Metodología de Investigación	47
8.1. Recursos Disponibles	50
8.2. Registro de datos y presentación de resultados	51
9. Estudio preliminar.....	53
10. Descripción y análisis de la implementación de la aei.....	59
10.1. Encuentro 1.....	59
10.1.1. Resumen del Encuentro 1	66
10.2. Encuentro 2.....	68
10.2.1. Resumen del Encuentro 2	77
10.3. Encuentro 3.....	78
10.3.1. Resumen del Encuentro 3	85
10.4. Encuentro 4.....	87

10.4.1. Resumen del Encuentro 4	94
10.5. Encuentro 5.....	97
10.5.1. Resumen del Encuentro 5	99
10.6. Encuentro 6.....	100
10.6.1. Resumen del Encuentro 6	106
11. Encuesta a los estudiantes	109
12. Conclusiones y trabajos a futuro	114
12.1. Conclusiones	114
12.2. Trabajos a futuro	118
13. Bibliografía	120
14. Anexo.	125

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Esquema de la TAD.....	25
Figura 2. Gráfica de la Distribución Normal.	31
Figura 3: Diagrama o Carta de Control.....	34
Figura 4: Zonas y Probabilidad Normal.....	35
Figura 5. Esquema de preguntas.	54
Figura 6. Esquema de las Organizaciones Matemáticas.	55
Figura 7: Esquema de pregunta generatriz y Organizaciones Matemáticas.	56
Figura 8. Protocolo 1.....	61
Figura 9. Protocolo 2.....	61
Figura 10. Protocolo 4.....	62
Figura 11. Protocolo 5.....	62
Figura 12. Protocolo 6.....	64
Figura 13. Protocolo 7.....	64
Figura 14. Protocolo 8.....	65
Figura 15. Protocolo 9.....	65
Figura 16. Protocolo 10.....	66
Figura 17. Esquema análisis praxeológico de la actividad 1.	70
Figura 18. Muestra real de un árbol de levas.	71
Figura 19. Protocolo 11.....	72
Figura 20. Protocolo 12.....	72
Figura 21. Protocolo 13. Recopilación bibliográfica de un grupo de alumnos: Histograma.	74
Figura 22. Recopilación bibliográfica de un grupo de alumnos.	74
Figura 23. Gráficos posibles de histogramas.	76
Figura 24. Distribución Normal.	79
Figura 25. Producción protocolo 14 de alumnos (Histograma).	80
Figura 26. Producción protocolo 14 Índice de Capacidad.	80
Figura 27. Transcripción de un grupo de alumnos.....	82
Figura 28. Transcripción de un grupo de alumnos.....	82
Figura 29. Transcripción de un grupo de alumnos.....	83
Figura 30. Análisis estadístico protocolo 16.	83
Figura 31. Análisis estadístico estimación de parámetros, protocolo 17.	84

Figura 32. Análisis estadístico cálculo de probabilidades, protocolo 17.	84
Figura 33. Esquema análisis praxeológico de la actividad 2.	90
Figura 34. Protocolo 18 de un grupo de alumnos (tabla).	91
Figura 35. Protocolo 19 de un grupo de alumnos (gráfico de tolerancia).	91
Figura 36. Protocolo 20 de alumnos (medidas descriptivas por período).	92
Figura 37. Protocolo 21 de alumnos (diagrama de cajas múltiples).	93
Figura 38. Tabla protocolo 21 de alumnos (medidas descriptivas).	93
Figura 39. Diagrama de cajas múltiple protocolo 22	94
Figura 40. Protocolo de Carta de Control por período.	98
Figura 41. Protocolo del cálculo de Índices de Capacidad.	99
Figura 42. Carta P actividad resuelta por un grupo de alumnos.	102
Figura 43. Carta de control np de un grupo de alumnos.	103
Figura 44. Producción de un grupo de alumnos.	104
Figura 45. Protocolo de un grupo de estudiantes.	105
Figura 46. Carta de control p	105
Figura 47. Carta de control np	106
Figura 48: Respuesta al cuestionario, pregunta 1.	110
Figura 49: Respuesta a la pregunta 2 del cuestionario.	110
Figura 50: Respuestas a la pregunta 3 del cuestionario.	110
Figura 51: Respuestas a la pregunta 4 del cuestionario.	111
Figura 52: Respuestas a la pregunta 5 del cuestionario.	111
Figura 53: Respuestas a la pregunta 6 del cuestionario.	112
Figura 54: Resultados a la pregunta 7 del cuestionario.	112
Figura 55: Resultados a la pregunta 9 del cuestionario.	113

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Matrícula del curso.	49
Tabla 2: Modelo para la presentación de lo realizado en cada Encuentro.	51
Tabla 3: Modelo Praxeológico de Referencia.	58
Tabla 4: Resumen del Encuentro 1.	67
Tabla 5: Datos de longitudes de árboles de leva.	69
Tabla 6: Resumen del Encuentro 2.	78
Tabla 7: Resumen del Encuentro 3.	87

Tabla 8: Datos de la longitud de árbol de leva durante 20 días.	88
Tabla 9: Resumen del Encuentro 4.	97
Tabla 10: Resumen del Encuentro 5.	100
Tabla 11: Resumen del Encuentro 6.	108

1. FUNDAMENTOS DE LA ELECCIÓN DEL TEMA

La estadística se enseña hoy día en todos los niveles educativos, pero son muchos los estudiantes que finalizan los cursos de estadística sin comprender correctamente algunos conceptos o son incapaces de hacer una adecuada interpretación de los resultados estadísticos, como se muestra en la amplia investigación sobre el tema. (Batanero, 2013).

En cuanto a la enseñanza de estadística y probabilidades en las carreras de ingeniería en la universidad se realizó una exploración bibliográfica que permitió tener en cuenta las dificultades en la enseñanza y el aprendizaje de ciertos conceptos, y las distintas estrategias didácticas y metodológicas utilizadas para revertirlas (Calandra y Costa, 2015). Esta revisión brindó información útil para elaborar en una etapa posterior un marco conceptual que sea adecuado para el desarrollo de una estrategia didáctica a ser implementada en cursos en carreras de ingeniería; que hizo posible plantearnos preguntas de investigación pertinentes, objetivos relevantes e hipótesis compatibles con lo que se sabe e ignora.

Por otro lado, la estadística es de fundamental importancia en toda situación del campo de la ingeniería que requiera el análisis de datos para la toma de decisiones informadas en presencia de incertidumbre y variación. Contribuye a facilitar el análisis estadístico de información que se requiera, entre otros, para el diseño de plantas de control de contaminación, diseño estructural de edificios comerciales e industriales y diseño de sistemas de transporte (Vardeman, 2002). La enseñanza de la estadística podría favorecer la adquisición de conocimientos que puedan ser aplicados para la optimización de procesos productivos industriales a partir del diseño e implementación de sistemas de control estadístico de procesos para mejorar la calidad de productos y servicios, especialmente cuando el estudiante trabaja a partir de proyectos de ingeniería (Mac Gillivray, 2002b).

En cuanto a su enseñanza, según Batanero (2013), la mejor forma de ayudar al estudiante a desarrollar su sentido estadístico, inclusive en el ámbito universitario, es basar las clases de estadística en el trabajo con proyectos, bien planteados por el profesor o escogidos libremente por los alumnos. En lugar de introducir los conceptos y técnicas descontextualizadas, o aplicadas únicamente a problemas tipo, difíciles de encontrar en la vida real.

En la enseñanza de probabilidades y estadística, dirigida a alumnos de las carreras de ingeniería, una de las tareas fundamentales es dotarlos de herramientas adecuadas que les permitan obtener conclusiones acerca de poblaciones, de modo que, aprovechando esta información puedan diseñar procedimientos, tomar decisiones, controlar productos y procesos, auditar organizaciones y muchas actividades propias de la profesión. Se pretende que los alumnos se apropien del conocimiento matemático teniendo en cuenta la aplicación en su práctica profesional y el perfil de estudiantes a los que se enseña. León (2007) comenta que la tendencia en las propuestas que se realizan en las distintas publicaciones sobre la enseñanza de la estadística, están orientadas a fortalecer el pensamiento estadístico más que el aprendizaje de fórmulas y ecuaciones. Sugieren la introducción en la enseñanza de más problemas reales, más análisis exploratorio de datos y usando la tecnología. Plantean proponer a los estudiantes problemas relacionados con su carrera. Favorecer la motivación del alumno mediante una actividad contextualizada. Y que la evaluación se use para apoyar la enseñanza y el aprendizaje. De acuerdo con Otero, Fanaro y Llanos (2013) es importante generar enfoques educativos innovadores centrados en el estudiante y su aprendizaje y en los procesos de construcción del conocimiento. Pretendiendo que los temas que se quiere enseñar surjan como respuesta a una problemática de interés al grupo de estudiantes a los que va dirigido y que el saber se pueda construir partiendo de ella. Dado que cuando la matemática se presenta como un conjunto de obras ya hechas, terminadas y cerradas, incuestionables, a los que a lo sumo se puede visitar, se produce un fenómeno que se denomina monumentalismo del saber, asociado al denominado paradigma monumentalista o de visita a las obras.

Por lo expuesto anteriormente y buscando romper con el esquema de clases magistrales tradicionales, es que se implementó y evaluó en esta tesis una enseñanza por investigación mediante una Actividad de Estudio e Investigación (AEI) dentro del marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) en un curso extracurricular integrado por alumnos de grado y posgrado para carreras de ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata (UNLP). La actividad propone enseñar en la pedagogía de la investigación y del “cuestionamiento del mundo” a partir del estudio de un problema en el cual el alumno toma un rol activo en contraposición a la enseñanza tradicional que se utiliza generalmente en el ámbito universitario. El proceso de estudio se organizó en torno a buscar respuesta a una pregunta. Que en este caso fue: ¿Cómo

producir partes intercambiables de automóviles en una fábrica? A su vez esta pregunta Q_0 derivó en otras preguntas $Q_{1,1}$, $Q_{1,2}$ y $Q_{1,3}$. Cuyas respuestas y discusión actuaron como eje articulador para la reconstrucción de las organizaciones matemáticas relativas a la Distribución Normal y Control Estadístico de Calidad. Además, permitieron introducir las razones de ser de una Actividad De Estudio e Investigación específica que para su realización requirió el estudio de algunos elementos relativos al Control de Calidad: Control Estadístico de Procesos y Cartas de Control, de importancia profesional para estudiantes de carreras de ingeniería.

La propuesta presentada en esta tesis permitió encontrar la razón de ser del estudio de la Distribución Normal y sus aplicaciones de un modo funcional, de modo de combatir la pérdida del sentido de su enseñanza y el abandono paulatino del antiguo paradigma de formación de ingenieros basado en la enseñanza como simple esquema de transferencia de conocimientos. Dentro de la estadística, la *Distribución Normal* es sin duda, el modelo continuo más importante, tanto por su aplicación directa, porque veremos que muchas variables de interés general pueden describirse por dicho modelo, como por sus propiedades, que han permitido el desarrollo de numerosas técnicas de inferencia estadística. En realidad, el nombre de Normal proviene del hecho de que durante un tiempo se creyó, por parte de médicos y biólogos, que muchas de las variables naturales de interés seguían este modelo. La otra razón de su relevancia es su aplicación para aproximar a otras distribuciones como la Binomial y la Poisson, entre otras. En el campo de la ingeniería cumple un rol trascendental en el control de calidad de los procesos industriales. Una aplicación importante, además, es el Teorema Central del límite en cálculo de probabilidades, que asegura que la media de variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas tiene una distribución aproximadamente Normal para muestras de tamaño suficientemente grandes, incluso en poblaciones no Normales. Muchos métodos estadísticos requieren la condición de Normalidad para su correcta aplicación.

En general en la educación universitaria la noción de Distribución Normal es presentada a los estudiantes como un producto acabado de la actividad matemática, y muchas veces se observa que los mismos resuelven las situaciones problemáticas planteadas de un modo mecánico sin comprender el significado y la razón del procedimiento realizado (Huck et al., 1986; Hawkins et al, 1992; Wilensky, 1995; Ruiz, 2006; Gutiérrez y Grima Cintas, 2013).

En este caso, el curso se basó en la utilización de técnicas de Control Estadístico de Procesos (CEP), en particular en el diseño y análisis de Cartas de Control (CC). Las CC se usan en el CEP para detectar si los procesos de elaboración de productos o servicios son defectuosos; o bien, para indicar que el proceso de producción se ha modificado y los productos o servicios se desvían de sus respectivas especificaciones de diseño. Uno de los pilares en los que se basa el diseño y la interpretación de una carta de control son la Distribución Normal, el Teorema Central del Límite, la aproximación Normal a la distribución Binomial y a la Distribución de Poisson.

2. PROBLEMA Y PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

Debido a las dificultades que presentan los alumnos en el aprendizaje de la Distribución Normal, reportadas en el capítulo 1, es que se expone en este trabajo una propuesta didáctica superadora y su implementación destinada en particular para alumnos de grado y graduados de carreras de ingeniería.

En particular se aplica un dispositivo didáctico en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) que Chevallard (1999) ha denominado Actividad de Estudio e investigación (AEI) para la enseñanza de temáticas de probabilidades y estadística. Se diseña e implementa esta propuesta didáctica alternativa a las existentes, que pretende el estudio con sentido de la Distribución Normal, a partir de la búsqueda de respuestas a un problema de control de calidad. También se realiza un análisis de la misma en el marco de la TAD, utilizando la noción de praxeología, de dialécticas y de los media. La idea es que dicha actividad permita contextualizar la enseñanza de la Distribución Normal como elemento motivador y que el estudiante encuentre una aplicación real en su área de interés. Además, se ha concebido desarrollar la enseñanza por métodos activos con el objeto de lograr estudiantes autónomos y fomentar la investigación.

2.1. Preguntas de investigación

- *¿Cómo diseñar una AEI para el estudio de temas del área de probabilidades y estadística para ser implementado en una Facultad de Ingeniería?*
- *¿Cuáles organizaciones matemáticas se construyen al implementarse una Actividad de Estudio de Investigación diseñada para el estudio de la Distribución Normal?*
- *¿Cómo se caracteriza, en el marco de la TAD, el proceso de estudio llevado a cabo a partir de la implementación de una AEI en una Facultad de Ingeniería?*

3. OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

3.1. Objetivos generales

- *Contribuir a la consolidación de áreas de investigación en Enseñanza de la Matemática, en particular de Probabilidades y Estadística.*
- *Diseñar, desarrollar, analizar y evaluar dispositivos didácticos para el estudio de temas del área probabilidades y estadística en contextos áulicos.*

3.2. Objetivos específicos

- *Describir y analizar la implementación de una AEI en términos de la TAD para carreras de ingeniería.*
- *Describir y analizar las praxeologías que se construyen a partir de una AEI cuyas cuestiones generatrices provienen del área del control estadístico de procesos de producción.*
- *Describir en el marco de la TAD, los media y dialécticas utilizadas en las etapas del desarrollo de la propuesta.*

3.3. Resultados esperados

La AEI podría permitir el estudio de un modo funcional de las OM relativas a la Distribución Normal, distribución del promedio de variables aleatorias, aproximación Normal a la distribución Binomial, aproximación Normal a la distribución Poisson y el Control Estadístico de Procesos. Esta propuesta abriría las puertas para pensar en nuevas AEI para el estudio de otros temas de probabilidades y además evaluar las posibles restricciones de la enseñanza actual de la noción de Distribución Normal en el ámbito de la Facultad de Ingeniería de la UNLP.

5. ESTADO Y SITUACIÓN DEL TEMA

Existen investigaciones en el área educativa que advierten de las dificultades en el aprendizaje por parte de los alumnos universitarios del concepto de variable aleatoria y distribución de probabilidad Normal. Huck, Cross y Clark (1986) han encontrado dificultades asociadas a la interpretación de la distribución Normal Estándar, indicando que algunos estudiantes creen que todas las puntuaciones tipificadas han de tomar un valor comprendido entre -3 y +3, mientras que otros opinan que no hay límite para los valores máximo y mínimo de estas puntuaciones.

Hawkins, Joliffe y Glickman (1992) describen en su trabajo los errores que cometen los alumnos universitarios al aproximar la distribución Binomial mediante la distribución normal, observan que en general aplican la corrección por continuidad de una forma mecánica, sin entender su significado.

Wilensky (1995) en su trabajo propone un problema a personas de distintas edades, incluyendo a profesionales con conocimientos de estadística y observan que en general, los sujetos de su investigación sabían resolver problemas relacionados con la distribución normal, pero no eran capaces de justificar su uso en lugar de otro concepto o distribución.

Tauber (citado en Ruiz, 2006), centra su estudio en el aprendizaje de alumnos universitarios de la distribución Normal y advierte sobre la existencia de ciertas dificultades de los alumnos para distinguir la distribución teórica y empírica, sobre todo cuando se ven en la necesidad de resolver problemas abiertos. También menciona que en los libros de texto no siempre se relaciona el estudio de la estadística descriptiva con el de la variable aleatoria y con el de las distribuciones de probabilidad. Es decir, no se hace una conexión entre el estudio del modelo probabilístico y el análisis de datos empíricos.

Gutiérrez y Grima Cintas (2013) afirman que, en cursos básicos de estadística, el capítulo que corresponde a Estadística Descriptiva se presenta como un tema aislado, que puede ir antes o después de la parte de Probabilidad. En estas condiciones no se aprovechan algunos desarrollos de la Estadística Descriptiva que podrían ser usados como un puente intuitivo para la comprensión de resultados más abstractos de la teoría de la probabilidad. Hace referencia específica al concepto de histograma como

representación de la función empírica de densidad para dar sentido a la definición de variable aleatoria continua. Afirma que la definición de variable aleatoria continua es muy poco intuitiva e introduce la función de densidad de probabilidad de manera muy artificial.

Un trabajo reciente es el de Nardecchia y Hevia (2003), quienes realizaron una investigación bibliográfica histórica tendiente a encontrar los posibles obstáculos didácticos en el aprendizaje de la variable aleatoria. Argumentan que, los estudiantes tienen predominantemente desarrollado el pensamiento determinístico sobre el probabilístico y que esto puede influir aún más en la presencia de ese obstáculo principalmente en la enseñanza superior. Concluyen, también, que históricamente no ha sido simple la construcción de un modelo adecuado a partir de los datos observados, de modo que esta vinculación entre la realidad y la variable aleatoria (como modelo matemático) puede constituir otro obstáculo con el que se podría enfrentar un estudiante. Así mismo, ellos enfatizan en la importancia de realizar estudios que nos indiquen la transposición didáctica que el concepto matemático ‘variable aleatoria’ ha sufrido para poder ser incorporado a la enseñanza en las instituciones educativas.

Según Ruiz y Albert (2005) abordan lo que consideran ellos como una de las ideas fundamentales en los cursos de Probabilidad y Estadística en las instituciones de enseñanza universitaria: la enseñanza del concepto de variable aleatoria en general. Utilizan como marco teórico la Teoría de Situaciones Didácticas y como metodología de investigación la Ingeniería Didáctica. Su trabajo consiste en saber cuál es el estado de apropiación de algunas ideas fundamentales estocásticas relativas a la variable aleatoria en dos estudiantes que acaban de ingresar al nivel universitario. Según estos autores, la pertinencia del desarrollo de un proyecto de investigación alrededor de la didáctica de la variable aleatoria se sustenta tanto en dificultades en su enseñanza y aprendizaje, como en razones propias del desarrollo del concepto en la probabilidad y la estadística como ciencias. Opinan además que el concepto de variable aleatoria propicia el paso de la estadística descriptiva y probabilidad básica hacia modelos probabilísticos.

Además, algunos estudiantes confunden la estandarización de una variable aleatoria con la transformación en Normal estándar (Calandra y Costa, 2015). En esta publicación se muestra la resolución del problema planteado por parte de un alumno. En la misma se observa que para resolverlo asume que la distribución de la variable

aleatoria continua es Normal, simplemente porque se les da como dato la media y el desvío estándar, cuando en realidad la distribución es desconocida y el ejercicio no es posible resolverlo. Esta forma mecánica de resolución se observó en aproximadamente el 80% de las producciones de los alumnos.

Por otro lado, Maltz (2015) desarrolla una forma de motivar la aparición de la Distribución Normal en los primeros cursos universitarios de probabilidades y comenta: “Muchos autores definen la distribución normal sin motivarla y esperan que sus buenas propiedades convengan a los alumnos de su importancia”. Según Ángel y otros (2007) la historia de la génesis de los distintos conceptos usados en probabilidades y estadística juega un papel importante ya que la descripción y el análisis de los pasos constructivos que se han dado en su evolución pueden reeditarse en favor del proceso de enseñanza. En este trabajo los autores hacen hincapié en que el estudio de la historia de la matemática influye en el diseño de experiencias didácticas y formulan una actividad para arribar a la distribución Normal partiendo de la distribución Binomial, utilizando la experimentación en el aula para que los alumnos “revivan” el proceso real seguido por Bernoulli y por De Moivre quien en 1773 descubrió la función de densidad de probabilidad de la distribución normal como una forma límite de la función Binomial.

Debido a las dificultades que presentan los alumnos en el aprendizaje de la Distribución Normal, es que se propone en este trabajo un modo alternativo de enseñarlos destinado en particular para cursos en carreras de ingeniería. En lo que sigue se describe el marco teórico en el que se sustenta la investigación.

6. MARCO TEÓRICO

6.1. La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD)

En esta investigación se adopta como referencial teórico la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) propuesta por Yves Chevallard (2004, 2007, 2012) que ha definido con precisión los fenómenos denominados: monumentalización del saber y pérdida de sentido de las cuestiones que se estudian en ámbitos educativos. El fundamento de estas definiciones y constructos se encuentran en lo que Chevallard ha denominado Pedagogía de la Investigación y del Cuestionamiento del Mundo (PICM) (Otero et al., 2013).

A partir de las ideas de Brousseau y de su teoría, Yves Chevallard desarrolla, en un principio, la Teoría de la Transposición Didáctica (TTD). En la misma posiciona argumentos emergentes como los de saber sabio, saber para enseñar, saber enseñado, saber aprendido, contemplando el saber a través de objetos: axiomas, teoremas, definiciones, entre otros (Camacho Ríos, 2010).

La transposición didáctica es el conjunto de transformaciones que sufre el saber sabio o saber científico en un saber con el fin de ser enseñado en el aula. La importancia de este concepto reside en el quiebre de la supuesta correspondencia entre el saber que se enseña y el conocimiento específico de la disciplina en el ámbito académico.

Hay dos transposiciones del saber, una externa, del saber sabio al saber a enseñar, que figura en la currícula, y luego otra interna, del saber a enseñar al saber enseñado, en la que participa el profesor por medio del desarrollo del saber en el aula. Luego del establecimiento de la TTD, Chevallard realiza una segunda contribución, al buscar una herramienta teórico-práctica que llevara a modelar y organizar en detalle las prácticas matemáticas, incluyendo los objetos de la matemática como componentes inseparables de éstas. Es la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, 1999). En el marco de la TAD, lo anterior da lugar a la noción de praxeología matemática. Según Chevallard, las matemáticas solamente se comprenden como una práctica humana antropológica, es decir una praxeología. La TAD sitúa la actividad matemática, y en consecuencia la actividad del estudio en matemáticas, en el conjunto de actividades humanas y de instituciones sociales. Esta postura epistemológica conduce a cualquiera que se someta a ella a atravesar en todos los sentidos muchas fronteras institucionales en cuyo interior debe sin embargo mantenerse, porque, normalmente, se respeta el reparto

del mundo social que las instituciones establecidas, y la cultura corriente que difunde los mensajes hasta la saciedad, dan por sentado, el reparto que nos presentan como casi natural, y a fin de cuentas obligado (Chevallard, 1999).

Para Chevallard, todo saber es una respuesta a una pregunta. También, precisa que para que se pueda hablar de sistema didáctico, es necesario no solamente que las preguntas tengan una respuesta, sino que igualmente estas respuestas hayan sido aceptadas en la sociedad de la época.

6.2. Las Actividades de Estudio e Investigación

Para la implementación de la Pedagogía de la Investigación y del cuestionamiento del mundo la TAD propone dos dispositivos didácticos: Las Actividades de Estudio e Investigación (AEI) y los Recorridos de Estudio e Investigación (REI). Ambos tienen como principal objetivo dar sentido y funcionalidad al estudio escolar de la matemática (Chevallard, 2009).

Las AEI y los REI tienen por objeto hacer surgir el estudio de los contenidos matemáticos de una forma funcional (y no formales) desde una perspectiva no monumentalista en la cual un saber no es un monumento que se visita, sino una herramienta ordenada al estudio de ciertos tipos de preguntas. El diseño de ambos dispositivos requiere del planteo de una “situación del mundo” que involucre una problemática que para ser resuelta requiera el estudio de determinadas OM. Para ello, ambos dispositivos se organizan en torno a una pregunta Q, seleccionada por el profesor, que tenga el potencial de generar el estudio por parte de los alumnos de ciertos contenidos matemáticos. La búsqueda de respuesta a la pregunta también generará más preguntas derivadas cuyas respuestas llevarán a la reconstrucción de determinadas organizaciones matemáticas (OM). Las respuestas a las preguntas junto con una actividad específica llevarán al estudio de técnicas y de elementos tecnológicos-teóricos específicos para resolver la actividad y serán una excusa para el estudio de las OM que se quieran cubrir del programa de estudio.

La introducción de la noción de las AEI y los REI en los sistemas de enseñanza conduce, a plantear la necesidad de replantear los programas de estudio en términos de un conjunto de actividades. La gestión de este modo de enseñanza exige a la comunidad de estudio integrada por los docentes y los alumnos, una transformación de su relación

con el saber, pues deja de ser algo que se conoce de antemano para volverse una construcción de común acuerdo en el transcurso de la clase.

El objetivo principal de estos dispositivos didácticos es introducir una nueva epistemología que le dé sentido y funcionalidad al estudio de la matemática. En un REI y en un AEI, los alumnos (X) investigan y estudian sobre una pregunta Q bajo la dirección de un profesor (Y) con el objetivo de aportar una respuesta R a la pregunta Q . Se coloca el exponente ♥ en R para indicar que la respuesta a Q ha sido producida bajo determinadas restricciones y que funciona como respuesta a Q bajo esas restricciones pues no existe respuesta universal y universalmente efectiva. Así, el sistema didáctico, denotado por $S(X; Y; Q)$, necesita instrumentos, recursos, obras, en definitiva, necesita un medio didáctico M que debe identificar, ordenar y aprender a utilizar con el objetivo de producir $R^♥$. Esto se denota por

$$[S(X; Y; Q) \rightarrow M] \rightarrow R^♥$$

Es decir, el sistema didáctico construye y organiza $\rightarrow$ el medio M con el cuál producirá $\rightarrow$ una respuesta $R^♥$. El medio M contiene respuestas pre-construidas, aceptadas por la cultura escolar disponibles, por ejemplo, en un libro, la Web, en el curso de un profesor, representadas como $R^◇$ y por obras, por ejemplo, teorías, montajes experimentales, praxeologías, denotadas por O consideradas útiles para deconstruir las respuestas $R^◇$ y extraer lo necesario allí para construir la respuesta $R^♥$. En el caso de una AEI es necesaria la condición que $R^♥$ contenga los principales componentes de una OM local previamente determinada y conocida. (Bosch y Gascón, 2010)

Por consiguiente, el medio M se formula de la siguiente manera:

$$M=\{R1^◇, R2^◇, R3^◇, ..., Rn^◇, Q_{n+1}, ..., Q_m, O_{m+1}, ..., O_p\}$$

Los REI permiten un estudio e investigación cuyas metas y fines se van construyendo a lo largo del proceso de estudio. La comunidad de estudio (profesores y estudiantes) construye y organiza el medio a lo largo del proceso y recorren las obras (matemáticas y/o extra-matemáticas) que resultan necesarias para responder Q . En cambio, las AEI dan lugar a procesos de estudio e investigación cuyo punto de partida también son las preguntas, pero en el caso de las AEI, las metas y fines de este proceso están parcialmente determinados de antemano. En el desarrollo de las AEI, en algún momento se deberán ejecutar una serie de ejercicios que permitirán trabajar con una

técnica de modo de que surja la OM local considerada. Chevallard (2013) propone que el abordaje de una AEI debe conducir al grupo de estudio a encontrar los elementos del saber deseado, o al menos, tener mayor probabilidad de encuentros con una obra esperada estudiar. Chevallard (2004, 2005, 2006) consideró los REI a partir del paso por diferentes actividades de estudio e investigación (AEI), como una sucesión de AEI, que provocan la integración de diferentes organizaciones matemáticas locales (OML) en estructuras más complejas y completas. En la práctica para cada saber matemático que se ha de enseñar, conviene crear una o varias actividades de estudio e investigación (AEI) que “fuercen” ese saber, de modo que el abordaje del problema generador de la AEI conduzca a la clase a encontrar, los elementos del saber deseado.

El dispositivo denominado AEI introduce la razón de ser de la OML que se quiere construir a partir del estudio de una cuestión a la que se tiene que dar respuesta. Dicha cuestión debe ser de interés para el grupo de alumnos a los que va dirigido y además debe actuar como eje articulador del proceso de estudio. La noción de AEI si bien se trata de una alternativa incompleta y limitada y es viable en nuestra facultad. Esas limitaciones parten del hecho que las cuestiones a estudiar son regularmente determinadas de antemano por el profesor, mientras que en los REI los alumnos deberían tener un papel destacado en la propuesta de las cuestiones a estudiar. La implementación de una AEI permite un mayor control de los tiempos didácticos que en el caso de la implementación de un REI, ya que esta última es funcional a la evolución de los recorridos.

6.3. La Noción de Praxeología

Para dar respuesta a ¿Cómo estudiar la pregunta Q? ¿Cómo estudiar la obra O?, Chevallard (1999), describe la actividad matemática utilizando la noción de praxeología, comprendiendo a las matemáticas como una práctica humana antropológica. Distingue entre dos tipos de praxeologías: la organización matemática (OM) y la organización didáctica (OD): la praxeología didáctica espontánea del profesor, también llamada organización didáctica (OD), que contiene, además de la praxis, los discursos que interpretan y justifican dichas prácticas, la cual es imprescindible modelar, y la praxeología (u organización) didáctica institucional, también llamada, organización matemática (OM), formada, a priori, por el conjunto de

los tipos de tareas, de técnicas, de tecnologías y teorías, movilizadas para el estudio concreto en una institución concreta. (Ver Figura 1)

Figura 1. Esquema de la TAD.

Las nociones de OD y OM constituyen las herramientas fundamentales para modelar cualquier actividad matemática, y constan a su vez de dos niveles. El nivel de la praxis o del hacer engloba un cierto tipo de tareas T y preguntas que se estudian, así como las técnicas τ para resolverlas, y el nivel del logos o del saber, que lo constituyen los discursos que describen, explican y justifican las técnicas que se utilizan.

Previamente al diseño e implementación de una AEI, como parte de un análisis didáctico y praxeológico, es fundamental, tanto para el investigador como para el director del proceso de estudio, la construcción de un Modelo Praxeológico de Referencia (MPR) (Chevallard, 1999). Este modelo consiste en la identificación, análisis y descripción de todas las obras (matemáticas y extra matemáticas) que podrían estudiarse, investigarse, construirse y/o reconstruirse al abordar la búsqueda de respuestas a la pregunta generatriz y a sus derivadas. Además, permite analizar los posibles recorridos a desarrollar a partir de cada una de esas preguntas.

También dentro de esta noción de praxeología se encuentra lo que se considera generalmente como el conocimiento o competencia de una persona que corresponde al equipamiento que una persona tiene a su disposición y que puede activar en un momento dado, que se designa como su equipamiento praxeológico.

6.4. Las dialécticas de la TAD

Una enseñanza por investigación consiste en gestionar las llamadas *dialécticas* fundamentales (Chevallard, 2007, 2009, 2013; Parra, Otero, Fanaro, 2012). Estas dialécticas son *saberes o saber-hacer*, considerados “*gestos del estudio y de la investigación*”. Según Otero y Parra (2018): “*El método dialéctico puede describirse de manera genérica como el arte del diálogo donde existen ideas contrastantes. Los orígenes de la práctica dialéctica se remontan a la antigua Grecia y no está claro quien fue su creador. Aristóteles consideraba que era Zenón, mientras otros Sócrates. Para Platón, la dialéctica es el camino excluyente para arribar al conocimiento verdadero, puesto que en virtud del método dialéctico de preguntas y respuestas se inicia el proceso de búsqueda de la verdad. En el mito de la caverna, Platón se refiere a la existencia de dos mundos: el mundo sensible y el mundo inteligible, o de las ideas. A este último se accede solo a través de la dialéctica, de los conceptos y de la investigación*”.

Estas dialécticas son:

6.4.1. Dialéctica del estudio y de la investigación (o de las preguntas y de las respuestas)

La ejecución de una AEI requiere una búsqueda de respuestas $R_i^\diamond$ a preguntas Q_j mediante el estudio de obras O_k . Es una mezcla de estudio ($R_i^\diamond$ respuestas, preguntas Q_j y obras O_k) e investigación (para llegar a la respuesta $R^\heartsuit$). Esta dialéctica es el corazón de una enseñanza por AEI. Por ejemplo, al buscar respuestas para la pregunta *¿Cómo producir partes intercambiables de automóviles en una fábrica?* es necesario investigar y estudiar obras, que devendrán en nuevas preguntas que requieren ser respondidas para avanzar en el proceso de estudio.

6.4.2. Dialéctica de lo individual y de lo colectivo:

Está presente cuando hay un estudio colectivo, dentro de un grupo, para una pregunta o cuestión surgida en el desarrollo de la AEI. Esto implica un reparto de las responsabilidades y de asignación de las tareas, para dar luego una respuesta común. El estudio en conjunto de las preguntas permite defender las respuestas producidas por la comunidad en lugar de aceptar sólo las respuestas admitidas por la institución.

6.4.3. Dialéctica del análisis y de la síntesis, praxeológica y didáctica:

Todo *análisis didáctico* supone un *análisis praxeológico* y recíprocamente. Para comprender una realidad praxeológica de la AEI es necesario realizar un análisis didáctico. Ya, previamente a la implementación de la AEI se pone de manifiesto esta dialéctica cuando se realiza el análisis praxeológico de referencia. Con su diseño, se debe hacer un análisis de las posibles derivaciones a partir de la pregunta generatriz, de los saberes que permitiría estudiar esta AEI y de qué modo. Este análisis tiene un componente epistemológico, que se pregunta por la *génesis* de las praxeologías en juego, lo cual es, otra cara de la transposición, que produce modificaciones del saber, solo por el hecho inevitable de su difusión.

También, en el proceso de estudio esta dialéctica comprende todo el análisis que involucre las respuestas a: ¿Qué técnica se utiliza? y ¿Cuál es la tecnología involucrada?, ¿Qué media utilizar? ¿Cómo sintetizar los saberes para la construcción de la respuesta buscada?

6.4.4. Dialéctica de entrar y salir de tema:

En el desarrollo de un REI, o AEI, muchas veces, se buscan respuestas en el sentido amplio a una pregunta y se manifiesta la posibilidad de salirse del tema al que inicialmente pertenece dicha pregunta, incluso hasta la posibilidad de salirse de la disciplina de referencia, para retomar posteriormente. Las preguntas generatrices pueden dar lugar a recorridos amplios de estudio e investigación pocas veces pueden circunscribirse en el ámbito limitado de un único sector o incluso una única disciplina.

6.4.5. Dialéctica del paracaidista y del buscador de trufas:

Estos dos términos se deben al historiador francés Emmanuel Leroy-Ladurie, quien clasificó a los historiadores en paracaidistas y buscadores de trufas. Por un lado, los paracaidistas realizan una exploración en extensas áreas de territorio – como los soldados franceses en Argelia en 1960 –; mientras los buscadores de trufas sacan a la luz tesoros enterrados. Esta dialéctica se refiere al hecho que durante el desarrollo de un REI o AEI los actores del sistema didáctico podrían asumir la condición de exploradores, realizando una investigación en un área de gran alcance, para luego focalizarse en determinados temas específicos. Una inspección de gran alcance difícilmente encuentra de inmediato lo que se busca, y requiere de gestos de acercamiento y enfoque sobre el terreno, para analizar la utilidad de lo encontrado, que pueden resultar “pepitas”, a menudo invisibles, que hará avanzar la investigación. Esta dialéctica es totalmente contraria a la idea habitual de inmediatez y a la trivialización de las soluciones, donde las respuestas se presentan como inmediatas, pre-digeridas y “viven” a lo sumo, una clase.

6.4.6. Dialéctica de las cajas negras y cajas claras:

Se refiere al proceso según el cual se establece qué conocimiento es pertinente y merece ser aclarado, analizado, etc., mientras se dejan, si es necesario, ciertos saberes a enseñar en un “nivel de gris”. Así, quedan en gris, ciertos saberes que no son necesarios para responder la pregunta generatriz o sus preguntas derivadas. Esta dialéctica se opone al hábito escolar que, en general, aspira a una claridad completa sin cuestionar su utilidad, muchas veces bajo la falsa idea de que se enseña todo.

6.4.7. Dialéctica de la conjetura y de la prueba (*media*¹ –*medio*):

Se refiere al saber construido en un curso de estudio e investigación, al que se considera como producto de una hipótesis y que, como tal, debe ponerse a prueba. Esta dialéctica se designó originalmente con el nombre de dialéctica de la conjetura y de la prueba, para luego designarse como la dialéctica *medio-media* (entendiendo por

¹ Los conceptos de “médias” (*media*) y de “milieux” (*medio*) hacen referencia a lo siguiente. *Media*: todo sistema de distribución y de comunicación del mundo natural o social, regional, nacional o internacional. Por ejemplo, un libro, la clase de matemática del profesor, un sitio web, un programa de televisión, un diario, un programa de radio, etc. *Medio*: ambiente, o entorno. Noción utilizada inicialmente en la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 1986), para referirse a cualquier sistema desprovisto de intención didáctica y que, por lo tanto, en relación a un proceso de estudio determinado se comporta como un “fragmento de naturaleza” (Chevallard, 2007a).

“*media*” a todo sistema que emite mensajes a ciertos públicos, como por ejemplo: un diario, un programa de televisión, el curso del profesor, un libro, etc.) y *medio* a la noción originada en la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau (Brousseau, 1986), en donde el medio de estudio no está definido de antemano, sino que se construye y sus componentes son puestos a prueba junto a la construcción de respuestas.

Esta dialéctica hace referencia, a la necesidad de disponer, para la elaboración de las sucesivas respuestas provisionales $R_i^\diamond$, de algunas respuestas que ya están preestablecidas y son accesibles a través de los *media*. Estas construcciones elaboradas para dar respuesta a preguntas ya elaboradas, tal vez sean diferentes a las que se plantean en el proceso de estudio y, por lo tanto, deben ser, adaptadas o reconstruidas en función de las propias necesidades. Para y por ello se van a necesitar otro tipo de *medios*, instrumento indispensable para poner a prueba la validez de estas respuestas.

6.4.8. Dialéctica de la lectura y de la escritura:

Se refiere al proceso de evitar la transcripción formal de respuestas parciales ya existentes $R^\diamond$, consideradas pertinentes, que pueden conducir a la construcción de la respuesta a la pregunta planteada, mientras se cuestiona el texto donde se ha encontrado inscriptas a las posibles respuestas, se trata entonces de tomar de ellas la parte útil y volver a escribirlas en notas de síntesis, glosarios, etc. Esta dialéctica está relacionada con la dialéctica de las cajas negras y cajas claras, porque es necesario establecer un nivel de “gris”, o de profundidad con el cuál transcribir las respuestas parciales ya construidas.

6.4.9. Dialéctica de la difusión y de la recepción:

Es el proceso que conduce a *difundir y defender* la respuesta desarrollada por la comunidad de estudio. Los saberes no son importantes *per se* – monumentalismo –, sino por el tipo de respuestas que permiten aportar, se trata de un saber que es el producto de la actividad matemática de la comunidad de estudio.

7. MARCO CONCEPTUAL

7.1. La Distribución Normal

Los conceptos matemáticos que se estudian con la aplicación de la AEI son los que se ubican en la rama de la matemática dentro del área de probabilidades y estadística. En particular las organizaciones matemáticas relativas a la Distribución Normal y sus aplicaciones.

Uno de estos modelos de gran relevancia en estadística y en probabilidades es la Distribución Normal, debido a que: muchas poblaciones numéricas pueden ser representadas con una Distribución Normal. Permite describir muchos fenómenos físicos, biológicos, sociológicos, etc. Se usa para aproximar la suma o el promedio de una cantidad grande de variables aleatorias bajo condiciones adecuadas (aun cuando las variables individuales no estén Distribuidas Normalmente). Se utiliza para aproximar probabilidades para variables aleatorias discretas y evitar cálculos engorrosos. Es la base para la inferencia estadística. Es el sustento del Control Estadístico de procesos industriales.

Si hablamos de aplicaciones de la Distribución Normal los nombres de Pierre Simon de Laplace (1749-1827) y Carl Friedrich Gauss (1777- 1855), son inevitables, este último propuso usarla para la distribución de errores de medición. Pero en realidad el hallazgo de la distribución Normal se debe a Abraham De Moivre (1667-1754).

La Distribución Normal está definida por su función de densidad, que depende de dos parámetros μ y σ , que son su media y su desviación típica y tiene la siguiente expresión, donde x varía desde $-\infty$ a ∞ :

$$f(x) = 1/\sqrt{2\pi}\sigma e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Se adopta la notación $x \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Esta función es simétrica alrededor de su media. Si se grafica en el plano cartesiano, el eje X es la asíntota horizontal. Además, en el intervalo $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$ es cóncava hacia abajo y fuera de él es cóncava hacia arriba.

Se puede probar que como $f(x)$ es una función de densidad, verifica que:

1- $f(x) \geq 0$

$$2- \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

$$\text{A su vez } \mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \text{ y } \sigma^2 = V(X) = E(X - E(X))^2$$

Su gráfica en coordenadas cartesianas tiene una forma acampanada. El 68,27% de la población está contenido en un entorno $\pm 1\sigma$ alrededor de μ , el 95,45% de la población está contenido en un entorno $\pm 2\sigma$ alrededor de μ y que el 99,73% está comprendido en $\pm 3\sigma$ alrededor de μ . (Ver Figura 2).

Figura 2. Gráfica de la Distribución Normal.

Si $\mu = 0$ y $\sigma = 1$ entonces se dice que X tiene Distribución Normal estándar y se anota $x \sim N(0,1)$. En este caso su función de densidad se simboliza con $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = (1/\sqrt{2\pi})e^{-x^2} \quad -\infty < x < \infty$$

En este caso la gráfica es simétrica respecto del cero que resulta ser su media.

La función de distribución de esta variable aleatoria se anota como $\Phi(x)$ y se calcula como:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x (1/\sqrt{2\pi})e^{-x^2} dx$$

Esta integral no puede expresarse en término de funciones elementales, por lo tanto $\Phi(x)$ se calcula en forma aproximada por métodos numéricos. Existen tablas de la función de Distribución Normal estándar para valores específicos de x que oscilan en general entre -4 y 4, debido a que para valores de x menores que -4 se tiene que $\Phi(x) \approx 0$ y para valores de x mayores que 4 se tiene que $\Phi(x) \approx 1$.

Para el entendimiento del Control Estadístico de Procesos, no hace falta ser un experto en estadística, pero si hay que estudiar la Distribución Normal, el Teorema Central del Límite y sus aplicaciones: el Teorema de De Moivre Laplace y la aproximación Normal a la Distribución de Poisson.

El Teorema Central del Limite (T.C.L), dice que si $X_1, X_2, \dots, X_n$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con $E(X_i)=\mu$ y $V(X_i)=\sigma^2$ con $\sigma^2 \neq 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$ con $\sigma^2 \neq 0$. Y Si $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq a \right) = \Phi(a) \text{ y } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq a \right) = \Phi(a).$$

Empíricamente, como consecuencia del TCL se puede demostrar que si $n \geq 30$ la variable aleatoria $\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ tiene aproximadamente Distribución Normal Estándar o que $\bar{X}$ tiene distribución aproximadamente Normal con media μ y varianza $\frac{\sigma^2}{n}$, también que $\sum_{i=1}^n X_i$ tiene aproximadamente Distribución Normal con media $n\mu$, y varianza $n\sigma^2$.

Entre las aplicaciones del Teorema Central del Límite se encuentra la aproximación normal a la distribución Binomial. Una variable aleatoria X es Binomial si representa el número de éxitos en n ensayos independientes con sólo dos posibilidades en cada uno de ellos éxitos/fallas. El Teorema Central del Límite permite aproximar (para n suficientemente grande) la distribución de la variable aleatoria X y de la variable aleatoria X/n a la Distribución Normal. El tamaño de la muestra necesario depende del valor de p . En general se recomienda usar la aproximación sólo si $np \geq 10$ y $n(1 - p) \geq 10$, siendo p la probabilidad de éxito en cada ensayo. Luego si se dan las condiciones enunciadas la variable aleatoria X se comporta como si tuviera distribución aproximadamente Normal con media np y varianza $np(1 - p)$.

El Teorema Central del Límite también sirve para aproximar con la Distribución Normal una variable aleatoria X con distribución Poisson con media λ , siempre que λ sea mayor que 5. Es decir, en este caso, X tiene aproximadamente Distribución Normal con media λ y varianza λ .

7.2. Control estadístico de calidad

El desarrollo de procedimientos adecuados para el monitoreo de procesos productivos (o servicios) es fundamental para mantener la calidad de los mismos. Existen diferentes maneras de definir la palabra calidad, pero podemos decir que el concepto de calidad se relaciona con una o más características deseables que debería poseer un producto o servicio. La calidad se ha convertido en uno de los factores más importantes de los consumidores para elegir entre productos y servicios. La Estadística

juega un papel importante en todas las actividades relacionadas con el monitoreo de la calidad de un producto o servicio, ya que está proporciona una gran cantidad de técnicas que se pueden aplicar. El control de calidad se sustenta en la idea de ajustar la producción a un modelo estándar. Para ello es importante verificar que una característica de un producto cumple con “ciertas especificaciones”, es decir, que tome el valor que se esperaba obtener cuando se diseñó el proceso.

Generalmente la característica de calidad de interés que se quiere evaluar sobre un producto es medible o se puede cuantificar de algún modo. Esta característica suele tener variaciones inevitables de carácter aleatorio que no invalidan la aceptabilidad de la misma, pero hay otras variaciones más graves debidas a otras causas especiales que conducen a variaciones que pueden ser evitadas si son detectadas a tiempo.

Es importante diferenciar entre causas comunes y causas especiales de variación. Las causas comunes pueden ser producidas por numerosos factores que, si bien afectan la distribución de la característica medida, no impiden que el sistema sea predecible. Las fuentes especiales de variación generan una variación no controlada, inestable y no predecible. Las herramientas estadísticas para el control de calidad pretenden reducir la variabilidad de los parámetros de calidad a través del análisis de procesos y la comparación con estándares preestablecidos para proveer información útil en el diseño de acciones tendientes a corregir problemas ocasionados por fuentes de variación especiales.

Uno de los objetivos principales del control estadístico de procesos es detectar con rapidez la ocurrencia de esas causas especiales. Cuando se consigue que en un proceso solo actúen variaciones inherentes se dice que está bajo control estadístico. Es en esta tarea donde los gráficos de control constituyen una excelente herramienta, ya que son estos los que mediante diagramas nos muestran si un proceso se encuentra en una condición estable o no.

Un diagrama o gráfico de control o carta de control (ver Figura 3) es una gráfica donde los valores de la característica de calidad estudiada se disponen en distintos momentos de tiempo que se identifican sobre el eje de las abscisas. Tres líneas acompañan la serie graficada: la línea central (trazada a nivel de la media de los valores de la serie para un estado bajo control) y las líneas correspondientes a los límites inferior y superior de control (límites entre los que se espera queden comprendidas casi

la totalidad de las observaciones de un proceso bajo control). Puntos fuera de la región determinada por ambos límites sugieren que el proceso no está bajo control. El límite inferior de la carta de control corresponde a la media de los valores de la característica menos tres desviaciones estándar y el límite superior a la media más tres desviaciones estándar.

Figura 3: Diagrama o Carta de Control.

Puntos fuera de la región determinada por ambos límites sugiere que el proceso no está bajo control. Pero, aún si los valores de la serie observada se encuentran entre los límites, el proceso puede cuestionarse por no poseer un patrón de distribución aleatoria de los puntos alrededor de su línea media. Valores sistemáticamente mayores o menores a lo esperado sugieren un proceso fuera de control.

Los límites son obtenidos a partir de la expresión $\text{Límite} = \text{media} \pm k \cdot \text{estándar}$, donde k es un entero. Cuando $k=3$ los intervalos son conocidos como intervalos tres sigmas ya que usualmente se representa con la letra griega sigma a la desviación estándar de las medias de la característica o error estándar. La amplitud entre los límites de control depende de la variabilidad de la característica de calidad, del tamaño de muestra utilizado para construir los límites y de la confiabilidad requerida (3 sigmas, 6 sigmas, etc.).

Diagramas así contruidos se llaman usualmente Diagramas o Cartas de Control Shewart, en estos, la franja comprendida entre dos y tres sigmas respecto a la línea central se denomina zona A (a veces se la puede identificar con color amarillo en el gráfico), la comprendida entre 1 y 2 sigmas se llama zona B, y la franja situada a menos

de 1 sigma se denomina zona C (en general se la pinta de color verde). En la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** se han representado las zonas como así también las probabilidades de que la característica se encuentre en ellas suponiendo que se distribuye Normalmente. La zona más allá de A (muchas veces se la identifica con color rojo).

Figura 4: Zonas y Probabilidad Normal.

En otras oportunidades la línea central y los límites de control son externamente determinados. Por ejemplo, escogidos por el administrador del proceso de acuerdo a estándares preestablecidos o calculados a partir de muestras preliminares registradas no para controlar el proceso sino para establecer dichos límites.

Dos tipos de errores se pueden cometer al tomar una decisión sobre el estado del proceso a partir de un diagrama de control:

1) Error tipo I, cuando se rechaza que el proceso está bajo control, pero en realidad se encuentra en dicho estado,

2) Error tipo II, cuando se acepta que el proceso está bajo control, pero en realidad está fuera de control. La probabilidad de cometer error tipo I es fijada por el usuario al construir el diagrama si usa límites probabilísticos.

Con límites del tipo k-sigmas esta probabilidad puede ser aproximada si se conoce la distribución subyacente de estadístico utilizado para construir los límites de control. Para una Distribución Normal de las componentes aleatorias, un intervalo 3-sigmas para la calidad media del proceso, producirá un riesgo de error tipo I de 0.0027.

La probabilidad de cometer error tipo II sólo puede ser calculada si se conoce la distribución del proceso cuando no está bajo control. Podemos distinguir dos grandes clases de gráficos de control: los gráficos de control por variables hacen uso de estadísticos obtenidos a partir de datos tales como la longitud o grosor de un elemento, mientras que los gráficos de control por atributos se basan en frecuencias tales como el número de unidades defectuosas. Las cartas de control por atributos se usan cuando la característica de calidad del producto que se quiere controlar es de tipo cualitativo, no posee unidades de medida. Ejemplos: grietas, golpes, pasa o no pasa el perno por un taladro, etc.

En los gráficos de control por variables es posible medir la característica de calidad a estudiar. En estos casos conviene describir la característica de calidad mediante una medida de tendencia central (usualmente la media muestral) y una medida de su variabilidad (usualmente el rango o la desviación estándar). Los gráficos de control por variables se usan para características continuas del producto o del proceso tales como: contenido en cm^3 de un líquido, temperatura de un horno, etc., las cuales, cuando el proceso está en estado de control se distribuyen según una ley Normal.

En control de calidad, el proceso bajo estudio puede ser considerado como el proceso generatriz de una población de valores de una o más variables aleatorias sobre la que se desea inferir en base a la información contenida en una muestra extraída desde esa población. Por ello, las herramientas de la Estadística Descriptiva proveen medidas resumen y tablas de frecuencia que pueden ser usadas para caracterizar a la muestra de un proceso o modelos proponentes de distribución de probabilidades para la descripción del proceso en estudio.

Cuando se trata de analizar la dispersión que presentan unos datos, la representación gráfica más adecuada es el histograma. Para realizar un histograma se marcan una serie de intervalos en el eje horizontal y sobre cada intervalo se coloca un rectángulo de altura proporcional al número de observaciones (frecuencia absoluta) que caen en dicho intervalo.

En general, el control del proceso a analizar debe realizarse continuamente en un proceso de seguimiento. Primero, se reúnen los datos; después se grafican para determinar si el proceso está en control y, por último, una vez que el proceso está en control, se estima la capacidad. Un proceso que en un determinado momento está en

control puede pasar a estar fuera de control posteriormente, conforme se vuelvan a presentar las causas especiales. Por esta razón debe darse seguimiento a los procesos continuamente.

7.3. Tipos de Diagramas o Cartas de Control Shewart

Existen diversos tipos de Diagramas de Control, el uso de determinado diagrama dependerá de si la característica de calidad que se midió es una variable continua, binaria o discreta. A los Diagramas de Control utilizados para variables continuas se les denomina Diagramas de Control variables. Entre los ejemplos están el diagrama $\bar{X}$ y el diagrama R y el diagrama S. A los Diagramas de Control utilizados para variables binarias o discretas se les llama Diagramas de Control de atributos. Los diagramas p o np son los diagramas más utilizados para variables binarias, mientras que los diagrama C o U se utiliza para variables discretas.

A continuación, se muestran los diferentes tipos de cartas de control:

- 1) Diagramas de control para atributos: Proporción de defectos (Cartas p), Cantidad de defectos (Cartas np), Número de casos por unidad (Cartas C o cartas U);
- 2) Diagramas de control de variables: Para la media y rango (X-barra, R), Para la media y desvío estándar (X-barra, S).

7.3.1. Cartas de control para atributos

Permite obtener diagramas de control para características de calidad que no son medidas en una escala cuantitativa. Estos diagramas son útiles para situaciones donde cada producto inspeccionado es clasificado como *conforme* (no defectuoso) o *disconforme* (defectuoso) con las especificaciones de calidad. Cuando las características de calidad son discretas, como en este caso, se denominan *atributos*.

7.3.1.1. Cartas de proporción de defectos (p)

La proporción de disconformes, denotada por p , es el cociente entre el número de productos defectuosos y el total de elementos producidos. Un artículo disconforme es aquel que no cumple con al menos una de las características de calidad que se evalúan simultáneamente.

El diagrama se sustenta en la distribución de la proporción de defectuosos (distribución Binomial). Para un proceso bajo control, se supone que p es la probabilidad de que un artículo sea disconforme. Se supone también que existe independencia entre los artículos producidos. Si la variable aleatoria X representa el número de defectuosos en una muestra de tamaño n , X se distribuye como una Binomial con parámetros n y p .

El valor esperado (media) para el número de defectuosos es np y su varianza $np(1-p)$ además si $np \geq 10$ y $np(1-p) \geq 10$ X tiene aproximadamente *Distribución Normal* (Devore, 2001: 217). El estimador muestral de p es $\hat{P} = \frac{X}{n}$, cuya media es p y su varianza $p(1-p)/n$. Las líneas de referencia para el diagrama basado en la proporción p teórica (proporción de referencia) son los *límites superiores e inferiores de confianza* (LSC y LIC respectivamente) y se construyen de la siguiente manera:

$$LSC = p + k \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

$$\text{Línea Central} = p$$

$$LIC = p - k \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

En general se considerará $k=3$, que corresponde a un intervalo 3-sigmas para la calidad media.

En el caso de desconocer el valor de la proporción de disconformes p , de un proceso bajo control, se deberán obtener los estimadores muestrales de p obtenidos a partir de muestras de n unidades y se construyen las líneas de referencia a partir de los valores observados (estimadores). Usualmente la fracción de disconformes del proceso bajo control es desconocida. Los límites en el diagrama de control son calculados a partir de las observaciones de la siguiente manera:

$$LSC = \hat{p} + k \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

$$\text{Línea Central} = \hat{p}$$

$$LIC = \hat{p} - k \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

Donde $\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^m \hat{p}_i}{m}$ es el promedio de las proporciones de defectuosos obtenidas de m muestras de tamaño n, cada una con proporción de defectuosos denotada por $\hat{p}_i$, en general se toma $k=3$.

Si alguna muestra se encuentra fuera de los límites de control de prueba, usualmente, después de considerar las posibles causas de este evento, se descarta dicha muestra y se calculan nuevamente los límites de prueba. Este proceso se repite hasta que todos los puntos se encuentren entre los límites, y en tal momento se aceptan los límites de control de prueba para el uso.

7.3.1.2. Cartas de control (np) o diagrama de cantidad de defectos (np)

Se construye de manera análoga a la carta anterior, pero en vez de graficar la fracción de disconformes se grafica directamente el número de disconformes. Las líneas de referencia de la carta son obtenidas de la siguiente manera:

$$LSC = n\hat{p} + k\sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})}$$

$$\text{Línea Central} = n\hat{p}$$

$$LIC = n\hat{p} - k\sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})}$$

En general se considerará $k=3$.

7.3.1.3. Cartas de control C

Este es útil para situaciones donde se tiene una muestra tomada en m intervalos de tiempo regulares, la misma incluye varias unidades de inspección y sobre cada una de esas unidades se cuantifica la variable Y_i = el número de disconformidades en la unidad tomada en el momento i, donde cada unidad debe tener las mismas dimensiones. Las variables aleatorias Y_i tienen distribución Poisson con media θ , suponiendo dicho parámetro conocido. Los límites serán calculados a partir de la distribución Poisson de la siguiente manera:

$$LSC = \theta + k\sqrt{\theta}$$

$$\text{Línea Central} = \theta$$

$$LIC = \theta - k\sqrt{\theta}$$

En general se considerará $k=3$

(θ Representa el valor medio de defectos por unidad y si $\theta \geq 10$ la variable aleatoria Y tiene aproximadamente distribución Normal). En el caso de no conocer el parámetro θ se lo estima promediando el número de defectos de las unidades inspeccionadas. Con $\hat{C}$ podría representarse dicho promedio. Y los límites de la carta de control, serían:

$$LSC = \hat{C} + k\sqrt{\hat{C}}$$

$$\text{Línea Central} = \hat{C}$$

$$LIC = \hat{C} - k\sqrt{\hat{C}}$$

En general se considerará $k=3$

7.3.1.4. Cartas de control U

Se aplica para situaciones donde se tiene una muestra tomada en m intervalos de tiempo regulares, y sobre cada una de esas unidades se cuantifica la variable Y_i = el número de disconformidades en la unidad tomada en el momento i .

La distribución de referencia en la cual está basado el gráfico U puede ser calculado a través de la ley Poisson. En este caso la cantidad de unidades de inspección tomadas en el momento i pueden ser diferentes, pero de la misma índole. En efecto, si:

c_i = número de defectos en la muestra i .

n_i = número de unidades inspeccionadas en la muestra i .

$u_i = c_i/n_i$ será el número de defectos por unidad en la muestra i ,

los valores u_i seguirán una distribución de Poisson de media:

$$\bar{u} = \frac{\sum_{i=1}^m c_i}{\sum_{i=1}^m n_i}$$

Cuando en lugar de tomar una unidad tomamos n_i unidades, la variabilidad muestral de u_i es,

$$\hat{V}(u_i) = \frac{\hat{V}(C_i)}{n_i^2} = \frac{n_i \bar{u}}{n_i^2} = \frac{\bar{u}}{n_i}$$

Y los límites de la carta de control, serían:

$$LSC = \bar{u} + k \sqrt{\frac{\bar{u}}{n_i}}$$

$$\text{Línea Central} = \bar{u}$$

$$LIC = \bar{u} - k \sqrt{\frac{\bar{u}}{n_i}}$$

En general se considerará $k=3$

Los pasos a seguir en la implementación del gráfico u son los mismos que para construir una carta c con la diferencia que:

- Los valores llevados a la carta u son los u_i , número medio de defectos por unidad.
- Los límites de control no son fijos.

7.3.2. Gráfico de control para variables continuas

Se denominan así los gráficos de control para características continuas del producto o del proceso, las cuales, cuando el proceso está en estado de control se distribuyen según una ley Normal o aproximadamente Normal.

En este caso cada muestra dada estará representada por su media muestral $\bar{X}$, su desviación estándar muestral S y su rango muestral R (diferencia entre el mayor y el menor). Entre todas las muestras se definirá la media de las muestras $\bar{\bar{X}}$, la media de los rangos muestrales $\bar{R}$ y la media de las desviaciones estándar muestrales $\bar{S}$.

Un proceso del cual se está controlando una característica continua puede abandonar su estado de control por verse afectada su media, su variabilidad o ambas. Por consiguiente, hay gráficos para controlar ambos parámetros por separado no sólo la media. El control de la media del proceso se realizará, siempre que se pueda, a través de las medias de muestras de tamaño n. Si de las mismas muestras se calcula la desviación típica muestral S, se puede construir un gráfico de control para σ utilizando la distribución teórica de S. Además, si de las mismas muestras se calcula el rango

muestral R , se puede construir un gráfico de control para σ utilizando la distribución teórica de R .

Cuando se realiza una medición de calidad en una variable continua, es conveniente, primero se utiliza un diagrama R o un diagrama S con el fin de controlar la variabilidad del proceso, y después se utiliza un diagrama $\bar{X}$ para controlar la media del proceso.

Cuando hay incertidumbre acerca del valor de una característica medible para cualquier pieza o espécimen particular, se suele nombrar con X a esa variable aleatoria. Suponga que, en un proceso bajo control, X tiene una *Distribución Normal* valor medio μ y desviación estándar σ . Luego, si se toman k muestras independientes, cada una formada por n observaciones de una variable Distribuida Normalmente y si $\bar{X}$ indica la media muestral para esa muestra aleatoria de tamaño n seleccionada en un punto de tiempo particular, sabemos que $E(\bar{X}) = \mu$, $\sigma_{\bar{X}} = \sigma/\sqrt{n}$ y $\bar{X}$ tiene una Distribución Normal. En estas condiciones es muy probable que, para un proceso bajo control, la media muestral caerá dentro de 3 desviaciones estándar para $(3\sigma_{\bar{X}})$ de la media μ del proceso.

Consideremos el caso en el que se conocen μ y σ . Supongamos que en cada instante de tiempo existe una muestra aleatoria de tamaño n . Consideremos a $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots$ los valores calculados de las medias muestrales correspondientes a cada instante.

La Carta de control $\bar{X}$ resulta de graficar los valores $\bar{X}_i$ en el tiempo sucesivamente, y trazar rectas horizontales que se corresponderán con los límites de control. Estas serán: límite de control superior $\mu + 3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y límite de control inferior $\mu - 3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Este trazado se denomina de frecuencia gráfica de 3 sigmas. Cualquier punto ubicado fuera de los límites de control (rectas horizontales) indica que el proceso puede haber estado fuera de control en ese momento, por lo que se debe investigar si existen causas asignables.

Sin embargo, con frecuencia no se conocen los valores de μ y $\sigma_{\bar{X}}$ y se debe estimar a partir de los datos. Se estima μ con $\bar{\bar{X}}$, el promedio de las medias muestrales. Por consiguiente, la recta central se ubica en $\bar{\bar{X}}$. La cantidad $\sigma_{\bar{X}}$ se puede estimar ya sea

mediante el rango promedio R o usando las desviaciones estándar muestral. Para estos casos se usan las Cartas de Control $\bar{X}$, S y las Cartas de Control $\bar{X}$, S .

7.3.2.1. Cartas de control X -barra, S y Cartas de control X -barra, R

En aquellos casos en que no se tenga una estimación de los parámetros μ y σ del proceso y en el momento de implementar los gráficos de control, deben estimarse a partir de datos muestrales antes de determinar los límites de control. Ahora, supongamos que tenemos k muestras tomadas a intervalos regulares con n observaciones en cada muestra. Siendo los valores más usados de n : 3, 4, 5 o 6 y k no menor a 20. Siendo $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_k$ las k medias muestrales calculadas, la estimación de μ será el promedio de ellas:

$$\bar{\bar{X}} = \frac{\sum_{i=1}^k \bar{X}_i}{k}$$

Se pueden plantear dos formas diferentes para estimar σ , uno con las k desviaciones muestrales estándar y el otro con los k rangos muestrales (el rango muestral es la diferencia entre las observaciones muestrales más grandes y las más pequeñas).

La desviación estándar muestral se calcula de la siguiente manera:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

Se conoce que, en el caso de una Distribución Normal de población, se sabe que el estimador de σ basado en S tiene una varianza más pequeña que el basado en el rango muestral.

Cuando $X_1, \dots, X_n$ es una muestra aleatoria de una Distribución Normal, se puede demostrar que la esperanza de S es: $E(S) = a_n \sigma$

$$\text{Siendo } a_n = \frac{\sqrt{2}\Gamma(n/2)}{\sqrt{n-1}\Gamma[(n-1)/2]}$$

$$\text{Con } \Gamma \text{ la función } \Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

Siendo $S_1, \dots, S_k$ las desviaciones muestrales para la k muestras, sea $\bar{S} = \frac{\sum_{i=1}^k S_i}{k}$ el promedio de las desviaciones muestrales. Entonces tendremos que el valor esperado de $\bar{S}$, es $a_n \sigma$, es decir: $E(\bar{S}) = a_n \sigma$.

El valor de a_n se puede encontrar tabulado en muchos libros de estadística como Navidi (2006). En este caso se dice que $\frac{\bar{S}}{a_n}$ es un estimador insesgado² para σ por lo tanto, los límites de las cartas de control serán:

$$LSC = \bar{\bar{x}} + k \frac{\bar{S}}{a_n \sqrt{n}}$$

$$\text{Línea Central} = \bar{u}$$

$$LIC = \bar{\bar{x}} - k \frac{\bar{S}}{a_n \sqrt{n}}$$

En un diagrama $\bar{X}$ cuando se utiliza $\bar{R}$ para estimar σ (dónde $\bar{R}$ es el promedio de los rangos muestrales de cada una de las k muestras) se obtiene una Carta de Control $(\bar{X}, R)$, dónde la línea central y los límites de control 3σ superior e inferior están dados por los valores $UCL = \bar{\bar{X}} + A_2 \bar{R}$ y $LCL = \bar{\bar{X}} - A_2 \bar{R}$. El valor A_2 depende del tamaño de la muestra y se puede encontrar tabulado en Navidi (2006) o en muchos libros de control estadístico de calidad. En muestras pequeñas, el rango y la desviación estándar tienen un comportamiento similar. En muestras grandes, sin embargo, la ocurrencia de un valor extremo produce un rango grande, pero tiene un efecto menor sobre la desviación estándar.

7.3.2.2 Cartas para monitorear la variabilidad del proceso

Para monitorear que la cantidad de la variación dentro de cada muestra ya sea medida por el rango muestral o desviación estándar muestral, no varía demasiado de una muestra a otra; se utiliza la carta S o R .

7.3.2.3. Cartas de control R

² Se dice que un estimador puntual $\hat{\theta}$ es un estimador insesgado de θ si la esperanza de $\hat{\theta}$ es θ . Es decir, es insesgado si su distribución de probabilidad siempre está centrada en el parámetro θ .

Se supone que se dispone de K muestras seleccionadas de manera independiente tomadas en k instantes de tiempo, cada una formada por n observaciones: $x_1, x_2, \dots, x_n$ de una variable aleatoria *Distribuida Normalmente*.

La Carta de control R resulta de graficar los rangos muestrales $R_i = \max(x_1, x_2, \dots, x_n) - \min(x_1, x_2, \dots, x_n)$ en el tiempo $i \forall i \in \{1, \dots, k\}$, y trazar rectas horizontales que se corresponderán con los límites de control. Estas serán: límite de control superior $\bar{R} + 3C_n \bar{R}/b_n$ y límite de control inferior $\bar{R} - 3C_n \bar{R}/b_n$.

Con $\bar{R} = \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{n}$. Es decir:

$$LIC = \bar{R} + 3C_n \bar{R}/b_n$$

$$\text{Línea Central} = \bar{R}$$

$$LIC = \bar{R} - 3C_n \bar{R}/b_n$$

Los valores C_n dependen del tamaño de la muestra y se puede encontrar tabulado en Montgomery y Runger (2006). En general se considerará un intervalo 3-sigma. Una vez que se han establecido los límites de control y se han graficado los rangos R_i en el tiempo i para cada una de las k muestras, puede utilizarse el diagrama R para ver si el proceso está en control con respecto a la variación. Cuando una muestra excede el límite superior evidencia que está operando una causa especial y que la variación del proceso no está en control. Luego de determinar la causa especial se debería eliminar el rango que cayó fuera de los límites y rehacer los límites de control.

7.3.2.4. Cartas de control S

Mientras que el diagrama R evalúa la variabilidad con el rango muestral, la carta de control S utiliza la desviación estándar muestral. Se supone que se dispone de K muestras seleccionadas de manera independiente, cada una formada por n observaciones: $x_1, x_2, \dots, x_n$ de una variable aleatoria *Distribuida Normalmente*.

En un diagrama S los límites de control 3σ superior e inferior están dados por los valores: $LSC = \hat{\mu}_S + 3\hat{\sigma}_S$ y $LIC = \hat{\mu}_S - 3\hat{\sigma}_S$. Dónde $\hat{\mu}_S$ se estima a partir del promedio muestral $\bar{S} = \frac{\sum_{i=1}^k S_i}{k}$, cada S_i es la desviación estándar de la muestra i -ésima:

$$S_i = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

Y $\hat{\sigma}_S = \bar{S} \sqrt{\frac{1-a_n^2}{a_n}}$ donde a_n se encuentra tabulado para distintos valores de n . en Montgomery y Runger (2006).

7.3.2.5. Cartas de control para mediciones individuales

Supongamos que se dispone de n observaciones: $x_1, x_2, \dots, x_n$ de una variable aleatoria *Distribuida Normalmente*, cada una de las cuales fue tomada a intervalos de tiempo regulares. En estas situaciones se emplea el rango móvil para estimar la variabilidad del proceso. El rango móvil se calcula como: $MR_i = |x_i - x_{i-1}|$ y una estimación de la desviación estándar del proceso $\hat{\sigma}$ está dada por:

$$\hat{\sigma} = \frac{\overline{MR}}{d_2}$$

Dónde $d_2 = 1,128$ cuando se usan observaciones consecutivas. La media del proceso se estima con la media muestral de las observaciones $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$. Y los límites de la carta de control $3\hat{\sigma}$, están dados por (Ver en Montgomery y Runger (2006)).

$$LIC = \bar{X} + 3 \frac{\overline{MR}}{d_2}$$

$$\text{Línea Central} = \bar{R}$$

$$LSC = \bar{X} - 3 \frac{\overline{MR}}{d_2}$$

8. METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

La investigación tiene por objetivo describir las modificaciones que se producen en el proceso de estudio al introducir la pedagogía de la investigación y del descubrimiento del mundo, mediante la implementación de una AEI en un aula de la universidad para el estudio de conceptos de Probabilidades y Estadística. El marco teórico adoptado, la TAD, orienta las etapas de este trabajo tanto la construcción del Modelo Praxeológico de Referencia (MPR) como el diseño de la Actividad de Estudio e Investigación (AEI). Para ello se adopta una metodología de investigación es de corte exploratoria, descriptiva y cualitativa. Se describen: la implementación de una AEI en términos de la TAD, las organizaciones matemáticas que se abordadas al implementarse la actividad y las praxeologías cuyas cuestiones generatrices provienen del área del control estadístico de procesos de producción. En esta investigación se explora la gestión del proceso de enseñanza durante el desarrollo de la AEI.

La propuesta se lleva a cabo en un curso extracurricular en la Facultad de Ingeniería de la UNLP durante el primer semestre del año 2018, abierto a participar alumnos o graduados con conocimientos básicos de probabilidades y estadística.

La puesta en práctica de la AEI es ejecutada por tres profesores docentes de la facultad en los que desarrolla la investigación. Uno de ellos es el propio investigador que asume durante la AEI un rol de observador participante junto con el segundo profesor. El tercer profesor ocupa un rol de observador no participante tomando registro de las clases. Es implementada como una prueba piloto destinada a la enseñanza de temáticas relacionadas con el control estadístico de procesos (CEP). La AEI permitiría el estudio de un modo funcional de las OM relativas a la *Distribución Normal* y sus aplicaciones un curso de la Facultad de Ingeniería de la UNLP (FI-UNLP). En FI se dictan 12 especialidades: Aeronáutica, Agrimensor, Civil, Computación, Mecánica, Electricista, Electromecánica, Electrónica, Industrial, Química, Hidráulica y Materiales.

La investigación es cualitativa de tipo etnográfico cuyo objetivo es describir y analizar el desarrollo del proceso de estudio de un grupo de alumnos de un curso extracurricular de una universidad en la República Argentina, a partir de la implementación de una enseñanza basada en una AEI.

En este caso el etnógrafo no solo observa y describe aquello que observa, sino que se involucra activamente. Se analiza en este caso la situación en el aula, pero a su vez el investigador puede influir con su accionar en la investigación, ya que participa, y puede tomar decisiones que implican una interferencia en esa situación. Durante todo el desarrollo de la AEI se tomaron notas de campo y se recolectaron las producciones de los alumnos. Durante algunas clases se registra la actividad en fotografías y videos, en particular, las puestas en común.

En esta investigación se adopta como referencial teórico la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) propuesta por Yves Chevallard (2004, 2007, 2012) que ha definido con precisión los fenómenos denominados: monumentalización del saber y pérdida de sentido de las cuestiones que se estudian en la escuela media y en la universidad. El fundamento de estas definiciones y constructos se encuentran en lo que Chevallard ha denominado Pedagogía de la Investigación y del Cuestionamiento del Mundo (PICM) (Otero, et al., 2013). La respuesta de la TAD al problema de la desarticulación, del monumentalismo de los saberes y de la falta de sentido de la enseñanza de la matemática, se materializa mediante un dispositivo didáctico que denomina Actividad de Estudio e Investigación (AEI). Para ello, las AEI se organizan en torno a una pregunta Q, seleccionada por el profesor, que tenga el potencial de generar el estudio por parte de los alumnos de ciertos contenidos matemáticos. La búsqueda de respuesta a la pregunta también generará más preguntas derivadas cuyas respuestas llevarán a la reconstrucción de determinadas organizaciones matemáticas (OM). Las respuestas a las preguntas junto con una actividad específica llevarán al estudio de técnicas y de elementos tecnológicos-teóricos específicos para resolver la actividad y serán una excusa para el estudio de las OM que se quieran cubrir del programa de estudio. La introducción de la noción de las AEI en los sistemas de enseñanza conduce, a plantear la necesidad de (re)definir los programas de estudio en términos de un conjunto de actividades cruciales. La gestión de las AEI dentro del proceso de enseñanza exige a la comunidad de estudio integrada por los docentes y los alumnos, una transformación de su relación con el saber, pues deja de ser algo que se conoce de antemano para volverse una construcción (o reconstrucción) de común acuerdo en el transcurso de la clase.

En la práctica para cada saber matemático que se ha de enseñar, conviene diseñar una o varias actividades de estudio e investigación (AEI) que “fuercen” ese saber, de

modo que el abordaje del problema generador de la AEI conduzca a la clase a encontrar, los elementos del saber deseado. La actividad propuesta debe ser de interés para el grupo de alumnos a los que va dirigido y además lo suficientemente abierta de modo que actúe como eje articulador del proceso de estudio.

El curso se integra por 24 alumnos de grado y 14 graduados de carreras de ingeniería. Los inscriptos en el curso fueron todos ingenieros o estudiantes de ingeniería de distintas especialidades: 7 de Ingeniería Industrial, 4 de Aeronáutica, 4 de electrónica, 3 de Mecánica, 3 de Química, 2 de Agrimensura, 1 de computación, es decir que los intereses del grupo son diversos de acuerdo a sus especialidades (Ver Tabla 1).

Total de asistentes	Alumnos	Graduados
24	10	14
Carreras		
Industrial	5	2
Aeronáutica	2	2
Electrónica	1	3
Mecánica	2	1
Química	0	3
Agrimensur	0	2
Computación	0	1

Tabla 1. Matrícula del curso

Está destinado a estudiantes avanzados de carreras de ciencias e ingeniería, docentes y graduados, interesados en acercarse al conocimiento relacionado con la rama de la estadística que estudia el control estadístico de procesos estocásticos.

El desarrollo de la AEI tiene una duración de seis encuentros presenciales arreglados de cuatro horas cada uno con una periodicidad semanal. Entre cada encuentro pueden consultar el material didáctico disponible en un entorno virtual, como así también realizar consultas.

Se establecen ciertos criterios didácticos para llevar a cabo el desarrollo de la AEI:

- Los estudiantes y el profesor trabajan conjuntamente.
- Se requiere un compromiso mayor que el del contrato tradicional habitual.
- Los alumnos trabajan en grupos o en forma individual, cada clase los integrantes de los grupos pueden variar.

- Las preguntas planteadas durante la AEI pueden emerger del debate en el aula entre los alumnos, o a partir de *situaciones* llevadas al *medio* M por el profesor en ciertos momentos del recorrido que él considere oportuno.
- Se necesita que los alumnos trabajen en forma colaborativa y que sean responsables de su aprendizaje.
- Los profesores regulan los tiempos didácticos, registran las respuestas de los estudiantes o grupos de estudiantes y los nuevos interrogantes que surgen para motivar el trabajo con la (OM) Distribución Normal y su relación con el Control Estadístico de Procesos.
- Los profesores acompañan a los estudiantes en las actividades, en la toma de decisiones en situaciones particulares y coordinaron las intervenciones de los alumnos.

8.1. Recursos Disponibles

Los *media*, es decir las fuentes de información, libros de texto, artículos de investigación, páginas web, los profesores y guías de clase, que utilizan los alumnos para el estudio de los contenidos durante las clases son:

Elementos disponibles en las computadoras personales en el aula: softwares matemáticos, entre ellos: InfoStat³ (versión de uso libre estudiantil), Lenguaje R⁴ (de uso libre) y Statgraphics5 software comercial.

Plataforma educativa virtual en el campus virtual que dispone la FI UNLP. Medio que tiene la función de ser un ambiente de encuentro en línea con material

³InfoStat es un programa estadístico desarrollado en el ambiente Windows que ofrece una interfaz avanzada para el manejo de datos basada en el difundido concepto de planilla electrónica. Desarrollado por un equipo de trabajo conformado por docentes-investigadores de Estadística y Biometría y de Diseño de Experimentos de la Universidad Nacional de Córdoba (FCA-UNC), en 1998. Posee una versión estudiantil. <https://www.infostat.com.ar/>

⁴R es un entorno y lenguaje de programación con un enfoque al análisis estadístico. R nació como una reimplementación de software libre del lenguaje S, y es parte del sistema GNU y se distribuye bajo la licencia GNU GPL. Está disponible para los sistemas operativos Windows, Macintosh, Unix y GNU/Linux. Fue desarrollado inicialmente por Robert Gentleman y Ross Ihaka del Departamento de Estadística de la Universidad de Auckland en 1993. <https://www.r-project.org/>

⁵Statgraphics es un paquete de herramientas de funciones estadísticas básicas y avanzadas. El software fue creado en 1980 por el Dr. Neil Polhemus mientras trabajaba como profesor de estadística en la universidad de Princeton. Posee una versión de demostración completamente utilizable (distribuido por Statpoint Technologies, Inc). <https://statgraphics.net/>

didáctico confeccionado por los profesores del curso, las actividades propuestas y un sitio de consultas fuera del horario de clase. El sitio está soportado mediante la aplicación web Moodle. Es administrado por los profesores del curso.

<https://www.cursos.ing.unlp.edu.ar/moodle26/>

Libros disponibles en la Biblioteca de la institución: Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas (Meyer, 1992), Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias (Devore, 2008), *Introduction to Probability and Statistics for Engineers and Scientists* (Ross, 2014), Probabilidad y estadística aplicadas a la ingeniería (Montgomery y Runger, 2006) y Control Estadístico de Calidad (Montgomery, 1991).

También se permite el uso de *dispositivos móviles* de uso personal con acceso a *internet*.

8.2. Registro de datos y presentación de resultados

Durante los encuentros se registran las producciones de todos los participantes del curso, además de las interacciones entre ellos, y entre ellos y el profesor. Todos estos datos forman parte del estudio. También el profesor que tiene un rol de observador no participante registra notas de campos: respecto a las conversaciones oídas, las interacciones que suceden, las acciones de los distintos actores (quiénes las ejecutan y cómo), los medios que utilizan durante el desarrollo de las actividades. Los registros sirven de base para la descripción, por encuentro, de la AEI desarrollada. Se observa en el material obtenido cada clase, se identifican las preguntas derivadas, las OM a las que dio lugar estudiar y los medios que lo permitieron. Estos datos se resumen luego en una Tabla de la forma siguiente (Ver Tabla 2) que además luego es comparada con el MPR que se presenta en la sección siguiente. Esta comparación permite comprender la AEI efectivamente desarrollada en relación a la propuesta.

Preguntas Derivadas	OM	Media

Tabla 2: Modelo para la presentación de lo realizado en cada Encuentro.

El papel que cumplen los profesores participantes es el de gestionar las respuestas y monitorear los puntos de discusión que se dan en clases, como así también las puestas

en común. Para construir el medio los estudiantes recurren a su almacenamiento praxeológico como así también a los media disponibles en el curso.

Los profesores participantes guían las actividades, pero los estudiantes son responsables del desarrollo de ellas. El papel que cumplen los profesores participantes es el de gestionar las respuestas, algunas preguntas y monitorear los puntos de discusión, como así también las puestas en común.

Además, para cada encuentro, se detalla brevemente la manifestación de las dialécticas en caso de que se hubiesen observado (una o varias de ellas).

9. ESTUDIO PRELIMINAR

En lo que sigue se describen las posibles organizaciones matemáticas que se podrían reconstruir a partir de buscar respuesta a la pregunta generatriz y las preguntas derivadas de ella.

Tal como se mencionó en el marco teórico, es fundamental, tanto para el investigador como para el director del proceso de estudio, la construcción de un Modelo Praxeológico de Referencia (MPR). Este modelo consiste en la identificación, análisis y descripción de las obras (matemáticas y extra matemáticas) que podrían estudiarse, investigarse, construirse y/o reconstruirse al abordar la búsqueda de respuestas a la pregunta generatriz y a sus derivadas.

La AEI permitiría el estudio de un modo funcional de las OM relativas a la Distribución Normal, aproximación Normal a la Distribución Binomial y a la Distribución de Poisson y el Control Estadístico de Procesos. Esta propuesta abriría las puertas para pensar en nuevas AEI para el estudio de otros temas de probabilidades y además evaluar las posibles restricciones de la enseñanza actual de la noción de Distribución Normal en el ámbito de la Facultad de Ingeniería de la UNLP.

Se propone una investigación y debate, centrado en torno a la pregunta generatriz:

Q₀: ¿Cómo producir partes intercambiables para automóviles?

La respuesta a esta pregunta puede originar una AEI que introduce las razones de ser de la enseñanza de la Distribución Normal. Esta pregunta generatriz Q₀ actuaría como eje articulador para la reconstrucción de la OM de los temas relativos a la Distribución Normal. A su vez esta pregunta Q₀ podría derivar en otras preguntas Q_{1,1}, Q_{1,2} y Q_{1,3}. (Ver Figura 5).

Figura 5. Esquema de preguntas.

El concepto de piezas intercambiables consiste en crear piezas idénticas o casi idénticas. Prácticamente todos los productos que se utilizan hoy en día están hechos de partes intercambiables. Estas piezas están hechas con máquinas de precisión porque así cada parte pueda montarse en cualquier producto que la utilice. Es la base de la producción en cadena. Henry Ford fue uno de los primeros en utilizar piezas intercambiables en una línea de montaje para la construcción de vehículos en serie. La propuesta es motivada a partir del debate sobre la fabricación de piezas de automóviles en serie. Si se trata, por ejemplo, de la manufactura de una gran cantidad de ejes en serie, los bujes respectivos producidos deben cumplir ciertos criterios de calidad de modo de ajustar uno con otro exactamente. Por lo tanto, en una producción en serie **¿Cómo hacer para que las autopartes producidas sean intercambiables?**

La respuesta a estas preguntas daría origen a una AEI que introduce las razones de ser de la enseñanza de la Distribución Normal. Estas preguntas actuarían como eje articulador para la reconstrucción de las organizaciones matemáticas (OM) relativa a la Distribución Normal y sus aplicaciones (ver Figura 6), pero también requerirá el estudio de algunos elementos teóricos, técnicos y tecnológicos relativos al Control de Calidad: Control Estadístico de Procesos y Cartas de Control, de importancia profesional para estudiantes de carreras de ingeniería (Ver Figura 7).

Figura 6. Esquema de las Organizaciones Matemáticas.

El control estadístico de procesos está basado en la idea de ajustar la producción a un modelo estándar. Cuando los artículos comerciales sucesivos tienen sus características más cercanas al resto de sus compañeros y más próximas a la intención del diseñador, se puede decir que cumple con las especificaciones de calidad. Un proceso de producción está sometido a una serie de factores de carácter aleatorio que hacen imposible fabricar dos productos exactamente iguales. ¿Qué es la normalización y estandarización estadística en un proceso de producción? La estandarización de un proceso de producción es cuando el mismo se realiza de una forma estándar o previamente establecida. La normalización consiste en la regulación de las actividades realizadas por los distintos sectores a través de la terminología, la clasificación, las especificaciones, los métodos de prueba y las prescripciones. El Control Estadístico de Procesos es una herramienta útil ya que su aplicación en el momento de la fabricación

contribuye a la mejora de la calidad de la misma, en cuanto al control de la estandarización del proceso.

Figura 7: Esquema de pregunta generatriz y Organizaciones Matemáticas.

Lo anterior se resume en la Tabla 3: Modelo Praxeológico de Referencia., donde se muestran las preguntas derivadas y posibles organizaciones matemáticas.

Actividad	Preguntas	Organizaciones matemáticas
	0. ¿Cómo producir partes intercambiables en un proceso de producción en serie?	0. Control de calidad
<p>Actividad 0</p> <p>Trabajo entorno al video: <i>Historia de la Calidad de Carmelo Perera</i></p>	<p>1. ¿Qué significa producir partes intercambiables?</p> <p>2. ¿Qué partes de automóviles se pueden analizar?</p> <p>3. ¿Qué características analizaría y como las clasificaría?</p> <p>4. ¿Qué es la estandarización en una producción en serie?</p>	<p>1. Calidad: Incertidumbre: variabilidad.</p> <p>2. Modelización</p> <p>3. Clasificación de variables.</p> <p>4. Control de calidad.</p>
<p>Actividad 1</p> <p>En el departamento de ensamble de motores de una planta automotriz, se tiene que una de las partes del motor, el árbol de levas debe tener una longitud de 600 mm (+/-) 2mm para cumplir con las especificaciones de ingeniería. Un árbol de levas es un mecanismo formado por un eje en el que se colocan distintas levas, que pueden tener distintas formas y tamaños y estar orientados de diferentes maneras, para activar diferentes mecanismos a intervalos repetitivos, como por ejemplo unas válvulas, es decir constituye un temporizador mecánico cíclico. El departamento de ensamble desea verificar que se están produciendo piezas intercambiables y para ello quiere verificar: si el proceso de fabricación de la planta automotriz es apto: Q1: ¿Cómo evaluaría el desempeño del</p>	<p>5. ¿Cómo caracterizaría el desempeño del proceso?</p> <p>6. ¿Qué medidas de la muestra calcularía?</p> <p>7. ¿Qué características de la producción es importante estimar?</p> <p>8. ¿Cómo representaría gráficamente la variabilidad real del proceso de producción y la exigida?</p> <p>9. ¿Cómo encontrar un modelo de distribución para la producción y cómo representarlo?</p> <p>10. ¿Cómo caracterizar cuantitativamente la aptitud del proceso?</p>	<p>5. Distribución Normal</p> <p>6. Aptitud de procesos con distribución Normal.</p> <p>7. Medidas descriptivas</p> <p>8. Parámetros</p> <p>9. Gráfico de Aptitud.</p> <p>10. Histograma. Gráfico de probabilidad Normal. Test de bondad de ajuste</p> <p>11. Índices de Aptitud</p>

siguiente proceso de producción de árboles de levas de una planta automotriz en base a la muestra seleccionada?		
<p>Actividad 2</p> <p>Los datos entregados en la tabla 8 corresponden a 5 medidas de longitudes de los árboles de levas en milímetros tomadas durante 20 días a lo largo de un mes de producción, si las especificaciones siguen siendo las mismas. Q2: ¿Cómo evaluaría en este caso el desempeño del proceso en el tiempo?</p>	<p>11. ¿Cuál es la variación del proceso a lo largo del tiempo?</p> <p>12. ¿Cuáles son los límites de variación naturales del proceso para este caso?</p> <p>13. ¿Los datos son de tipo variable o de tipo atributo?</p> <p>14. ¿Cómo caracterizaría la capacidad del proceso para cumplir con las especificaciones en este caso?</p>	<p>12. Estabilidad de un proceso y aptitud de un proceso. Carta de tolerancia. Diagrama de cajas múltiples.</p> <p>13. Distribución del promedio de variables aleatorias independientes.</p> <p>14. Cartas de Control</p> <p>15. Variables aleatorias Discretas o Continuas</p> <p>16. Índices de Capacidad</p>
<p>Actividad 3</p> <p>La característica a analizar es un atributo del producto (el producto es defectuoso o no, una pieza encaja o no en otra, un mecanismo funciona o no, etc.). En este caso se trata de monitorear una línea de producción de árboles de leva para autos en la que se toman 54 muestras de tamaño 50 cada una y se registra el número de defectuosos por muestra. Las primeras 30 muestras se produjeron antes de un ajuste a la máquina.</p>	<p>15. ¿Cómo describiría el comportamiento de los árboles de leva defectuoso de la fábrica antes del ajuste de la máquina y después de él?</p> <p>16. ¿Cuál la variación del proceso a lo largo del tiempo, antes del ajuste de la máquina y después del mismo?</p> <p>17. ¿Los datos son de tipo variable o de tipo atributo?</p> <p>18. ¿Se produce algún cambio luego del ajuste de la máquina?</p> <p>19. ¿El ajuste de la máquina fue favorable o desfavorable?</p>	<p>17. Aproximación Normal a la distribución Binomial</p> <p>18. Aproximación Normal a la distribución de Poisson</p> <p>19. Cartas de Control de control por atributos.</p> <p>20. Cartas p y np.</p> <p>21. Sesgo y Precisión</p>

Tabla 3: Modelo Praxeológico de Referencia.

10. DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DE LA IMPLEMENTACIÓN DE LA AEI

En esta parte describimos y analizamos la AEI implementada, en términos de las preguntas derivadas, las organizaciones matemáticas estudiadas para dar respuestas a tales cuestiones, los media con que fueron construidas y las dialécticas que se hubiesen manifestado.

10.1. Encuentro 1

El curso comenzó a partir de la pregunta generatriz:

Q₀: ¿Cómo producir partes intercambiables de automóviles en una fábrica?

Como *media* para trabajar sobre Q₀ se proyectó en clase el video: <https://www.youtube.com/watch?v=kcYlqIw1V8A&feature=youtu.be> .

“El video de Carmelo Perera relata la Historia de la Calidad, en el que se puede observar como a lo largo de la historia se ha buscado la Calidad y la Perfección, en la industria y fabricación de materiales. Los fenicios, por ejemplo, tenían inspectores que cortaban la mano de quien elaboraba un producto defectuoso, los egipcios se ingeniaron medir los bloques de sus construcciones con un cordel, las sanciones por productos o servicios que no cumplieran las especificaciones iban desde amputaciones hasta la muerte. Luego, en el siglo XIII ya se comenzaron a definir estructuras que permitían elaborar productos de calidad, los gobiernos definían las normas y un individuo examinaba todos los productos para determinar la calidad de estos. El inconveniente que presentó este proceso fue que solo podía ser aplicado a un mundo pequeño o local. Luego, debido al crecimiento poblacional a nivel mundial se comenzó a necesitar más cantidad de productos, y por la revolución industrial, para una distribución de productos a mayor escala que permitiera una distribución del trabajo, se requirieron partes intercambiables. No todos los productores estuvieron conformes con este proceso ya que no se creaban productos a la medida sino en masa. Para finales del siglo XVIII en los Estados Unidos, Frederick Taylor fue el pionero con la administración científica. Transformó la metodología de trabajo y la asignación de responsabilidades. En el siglo XX la compañía Ford introdujo a la industria una línea de ensamblaje en movimiento, esto permitió dividir operaciones complejas en procedimientos sencillos que no requerían de gran conocimiento para realizarlos ya que podían realizar por obreros poco

especializados. Hasta este momento el interés de la producción era solo cumplir con la demanda, la Calidad no era muy valorada. Para 1920 a 1940 empresas como Bell System y Western Electronic se posicionaron en el primer lugar por su control de calidad, ya que crearon un departamento que se encargara de los problemas creados por los defectos de sus productos a este departamento lo llamaron “Departamento de Ingeniería de Inspección”, de igual forma debía ocuparse de la falta de comunicación entre sus departamentos. Es así como comienzan a definirse las bases de lo que hoy en día definimos como Calidad”.

Luego, para comenzar a dar alguna respuesta a Q₀ los alumnos trabajaron junto con los profesores, con la información del video, el material disponible en el Moodle y en internet.

En el video se mencionaron los siguientes aspectos destacados: *“Control de la calidad de las autopartes, producción en masa, líneas de ensamblaje, partes intercambiables”.*

Entonces un profesor planteó a los estudiantes la siguiente pregunta:

Q_{0,1} ¿Qué significa producir partes intercambiables?

Luego de aproximadamente 15 minutos se realizó una puesta en común, donde cada alumno presentó su respuesta oralmente y en forma escrita, basada fundamentalmente en su opinión personal o en la búsqueda en internet. Se muestra el registro de algunas respuestas de los alumnos (Ver Protocolos: 1, 2, 3, 4 y 5).

Protocolo 1- *“para el caso de una producción en serie de autopartes, las partes intercambiables se producirían teniendo en cuenta aquellas que mayormente acarrearán mayores defectos y/o problemáticas y se puede proceder a su cambio o reemplazo sin acarrear el cambio de todos los demás elementos.”* (Ver Figura 8)

En este caso, el alumno no responde en realidad a la pregunta hecha sino a la pregunta: ¿Qué partes convendría que fuesen intercambiables?

Figura 8. Protocolo 1.

Protocolo 2- “que se producen múltiples productos “iguales” en el sentido de que todos se adaptan a las exigencias de calidad (a los estándares establecidos). En contraste con un proceso artesanal o a medida”. (Ver Figura 9)

En este caso la respuesta fue concisa pero sí respondió la pregunta planteada.

Figura 9. Protocolo 2.

Protocolo 3- “significa seguir los pasos predeterminados en la estandarización del proceso para lograr finalmente una alta calidad en el producto asegurándose su utilidad y funcionalidad.”

Protocolo 4- “sería facilitar el armado y/o reparación del producto final, reducir costos al producir partes iguales o similares y aumentar la calidad, ya que cada parte que conforma el producto final, no pertenece a uno sólo en particular”. (Ver Figura 10)

QUÉ SIGNIFICA PRODUCIR PARTES INTERCAMBIABLES EN UN PROCESO DE PRODUCCIÓN ?

Sería facilitar el armado y o reparación del producto final, reducir costos al producir piezas iguales o similares y aumentar la calidad; ya que cada elemento que conforma el producto final, no pertenece a uno solo en particular.

Figura 10. Protocolo 4.

Protocolo 5- “Crear piezas idénticas o casi idénticas para utilizarlas en una producción en cadena. Estas piezas se pueden montar haciendo un conjunto para formar un producto final”.

¿Qué significa producir partes intercambiables en un proceso de producción en serie por ejemplo de autoparte?
Crear piezas idénticas o casi idénticas para utilizarlos en una producción en cadena. Estas piezas se pueden montar haciendo un conjunto para formar un producto final

Figura 11. Protocolo 5.

Luego de escuchar, compartir y registrar las respuestas de los estudiantes la profesora intervino de modo de construir con los alumnos una respuesta que englobara lo más significativo. Según el segundo protocolo: *producir partes intercambiables significa que se producen múltiples productos iguales*, otro alumno (protocolo 4) mencionó que se deberían producir partes *iguales o similares*.

Luego acordamos que un proceso industrial está sometido a una serie de factores de carácter aleatorio o no, que hacen imposible fabricar dos productos exactamente iguales ya que las características del producto o las partes de un objeto fabricado no son uniformes y presentan cierta variabilidad. El objetivo ha de ser reducir la variabilidad de las partes que componen el producto fabricado lo más posible o al menos mantenerla

dentro de ciertos límites de modo de poder reemplazarlas, en caso necesario y que luego ensamblen perfectamente con las demás piezas del artículo y/o producto.

La dinámica de la clase posteriormente se generó con las exposiciones individuales en clase por parte de los alumnos sobre las interrogantes derivadas de la generatriz, espacios que permitieron compartir las opiniones. El cierre de este encuentro fue la entrega del trabajo con las repuestas que obtuvieron en grupo o individualmente y una exposición para la socialización para todo el grupo de alumnos.

Las preguntas derivadas que se plantearon fueron las siguientes:

Q_{0,2} ¿Qué partes de automóviles se pueden seleccionar para analizar?

Algunos mencionaron pistones, aros de pistón, biela, discos de freno, tapa de cilindro, piezas de la carrocería, bocina, ópticas, puertas, etc.

Q_{0,3} ¿Qué características asociadas a la misma quisiera monitorear?

Se comentaron algunas características, por ejemplo: el diámetro de los aros de pistón, nivel de sonido de la bocina, cantidad de fallas en el disco de freno, podríamos monitorear si las ópticas funcionan o no, la longitud de la biela, etc.

Q_{0,4} ¿Qué unidades de medida usaría?

En cuanto al diámetro de los aros de pistón la unidad de medida podría ser milímetros, para medir el nivel de sonido de una bocina usarían los decibeles, para la longitud de la biela milímetros. La cantidad de fallas en el disco de freno o para ver si las ópticas funcionan o no, no se utilizarían unidades de medida.

Q_{0,5} ¿Cómo clasificaría estadísticamente esas características?

Acordamos que el diámetro de los aros de pistón, el nivel de sonido de una bocina y la longitud de la biela, serían clasificadas como variables continuas. La cantidad de fallas en el disco de freno o para el registro del funcionamiento o no de las ópticas, serían clasificadas como variables discretas o de tipo atributo.

El surgimiento de estas preguntas derivadas sirvió para introducirlos en el trabajo con algunas OM: Modelización estadística y variables aleatorias. Descripción de una magnitud (longitud de una pieza, tamaño, espesor, número de defectos por

pieza), identificar las unidades de medida, clasificación estadística de una magnitud (discretas o continuas).

Una de las preguntas derivadas luego del debate fue:

Q_{0,6} ¿Qué es la estandarización en una producción en serie?, ya que algunos alumnos como, por ejemplo en el protocolo 3 habían mencionado que producir partes intercambiables *significa seguir los pasos predeterminados en la estandarización del proceso.*

En respuesta a esta pregunta, se obtuvieron las siguientes respuestas:

Protocolo 6:

Figura 12. Protocolo 6.

En la Figura 12, se puede ver la asociación entre la estandarización de la producción con la determinación de criterios de producción.

Protocolo 7:

Figura 13. Protocolo 7.

En la Figura 13, se observa que los alumnos relacionan la estandarización en la producción en serie con el Control Estadístico de Procesos (CEP)

Protocolo 8:

¿Estandarización estadística de un proceso de producción?

Consideramos Estandarización de un proceso a la minimización de pesos de un procedimiento para el logro de un producto. Estandarización estadística de un proceso de producción es fijar los ~~valores~~ valores de las variables estadísticas que se utilizaron para el ~~estudio~~ análisis de calidad del proceso.

uso → parámetros

Figura 14. Protocolo 8.

Según la respuesta de estos alumnos (Ver Figura 14), la estandarización estadística de un proceso de proceso de producción es fijar los valores de los parámetros estadísticos que se utilizarán para el análisis de la calidad del proceso

Protocolo 9:

Mediante las herramientas de la estadística, en conjunto con muestras de la producción del elemento en estudio, se desea lograr la similitud de su funcionamiento y la aproximación a los requerimientos del fabricante.

Previo a la realización de un promedio de calidad de producción, la estandarización consiste en ajustar los valores medidos en diferentes escalas respecto a una escala común, con el fin de prever cualquier tipo de error en la producción.

Figura 15. Protocolo 9.

Según lo expuesto por estos estudiantes (Ver Figura 15) la estandarización se asocia con lograr similitud en el funcionamiento de un elemento dentro de una muestra y la aproximación de la misma a los requerimientos del fabricante.

Protocolo 10:

Es el proceso de elaborar, aplicar y mejorar las normas que se aplican a distintas actividades científicas, industriales y económicas haciendo uso de la estadística, con el fin de ordenarlas y mejorarlas.

Figura 16. Protocolo 10.

Este grupo de alumnos considera que la estandarización de la producción está ligada a la elaboración y aplicación de normas para lograr mejoras. (Ver Figura 16)

Luego de discutir en el curso las distintas respuestas, acordamos que la estandarización de un proceso de producción es cuando el mismo se realiza de una forma estándar previamente establecida de manera de producir artículos que se ajusten a las especificaciones.

10.1.1. Resumen del Encuentro 1

En este primer encuentro se produjo el momento de explorar la pregunta generatriz, llevada al aula por el profesor, que originó un amplio debate acerca de la *calidad*, del *control de la calidad*, de los *procesos de producción* y de la *estandarización*, entre otros.

El trabajo se realizó en forma grupal por propia iniciativa de los estudiantes. La forma de trabajo, en este encuentro, consistió en la revisión grupal de la información disponible en internet y en el video presentado al inicio como también en el intercambio de opiniones personales, aunque cada uno escribió una respuesta en forma individual. En este caso la dialéctica de lo individual y lo colectivo estuvo poco desarrollada ya que no hubo mucha interacción entre los participantes ya que los grupos eran reducidos.

Se realizó al final del encuentro una puesta en común en la que los alumnos expusieron sus respuestas. Algunas respuestas fueron más debatidas o merecieron mayor aclaración en el momento de la puesta en común ya que no resultaron muy claras para el curso. Esto sucedió por ejemplo en el protocolo 9: *“La estandarización consiste en ajustar los valores medidos en diferentes escalas respecto a una escala común, con el fin de prevenir cualquier tipo de error en la producción.”* Entonces surgió la pregunta ¿En qué forma

podría ayudar ajustar a una escala común para prever cualquier tipo de error?, esto se podrá considerar como un indicio de la dialéctica de la difusión y de la recepción.

Las preguntas derivadas de la pregunta generatriz surgieron como consecuencia de la puesta en común de las respuestas de Q_{0,1} **¿Qué significa producir partes intercambiables?** En general fueron formuladas por los profesores del curso, es decir que la dialéctica de las preguntas y las respuestas estuvo desarrollada parcialmente por parte de los estudiantes en este encuentro. En la Tabla 4, se muestra un resumen del Encuentro 1.

Preguntas derivadas	OM	Media
Q ₀ : ¿Cómo producir partes intercambiables de automóviles en una fábrica?	Modelización estadística y variables aleatorias.	Video provisto por el profesor
Q _{0,1} ¿Qué significa producir partes intercambiables?	Descripción de una variable (longitud de una pieza, tamaño, espesor, número de defectos por pieza)	https://www.youtube.com/watch?v=kcYlqIw1V8A&feature=youtu.be
Q _{0,2} ¿Qué partes de automóviles se pueden seleccionar para analizar?	Identificar unidades de medida. Clasificación estadística de una magnitud (discreta o continua)	Material disponible en el aula virtual y en internet. Profesores.
Q _{0,3} ¿Qué características asociadas a la misma quisiera monitorear?	Control de calidad.	Internet disponible en el aula y en las computadoras de los alumnos.
Q _{0,4} ¿Qué unidades de medida usaría?		
Q _{0,5} ¿Cómo clasificaría estadísticamente esas características?		
Q _{0,6} ¿Qué es la estandarización en una producción en serie?		

Tabla 4: Resumen del Encuentro 1.

10.2. Encuentro 2

Para seguir trabajando sobre la pregunta generatriz: **¿Cómo producir partes intercambiables?** Se propuso a los alumnos la siguiente pregunta:

Q1: ¿Cómo evaluaría el desempeño del siguiente proceso de producción de árboles de levas de una planta automotriz en base a la muestra seleccionada?

Para trabajar en ello se propone la siguiente Actividad.

Actividad 1

En el departamento de ensamble de motores de una planta automotriz, se tiene que una de las partes del motor, el árbol de levas, debe tener una longitud de 600 mm (+/-) 2mm para cumplir con las especificaciones de ingeniería. Un árbol de levas es un mecanismo formado por un eje en el que se colocan distintas levas, que pueden tener distintas formas y tamaños y estar orientados de diferentes maneras, para activar diferentes mecanismos a intervalos repetitivos, como por ejemplo unas válvulas, es decir constituye un temporizador mecánico cíclico. El departamento de ensamble desea verificar que se están produciendo piezas intercambiables y para ello quiere verificar: si el proceso de fabricación de la planta automotriz es apto: Q1: ¿Cómo evaluaría el desempeño del siguiente proceso de producción de árboles de levas de una planta automotriz en base a la muestra seleccionada?

Además, se les entregó a los alumnos una Tabla 5 con los datos correspondientes al problema presentado (Minitab, LLC (2020), que se muestra a continuación:

Longitud del árbol de levas [mm]				
601,6	600,4	598,4	600,0	596,8
602,8	600,8	603,6	604,2	602,4
598,4	599,6	603,4	600,6	598,4
598,2	602,0	599,4	599,4	600,8

600,8	598,6	600,0	600,4	600,8
600,8	597,2	600,4	599,8	596,4
600,4	598,2	598,6	599,6	599,0
598,2	599,4	599,4	600,2	599,0
599,4	598,0	597,6	598,0	597,6
601,2	599,0	600,4	600,6	599,0
602,2	599,8	599,8	601,0	601,6
601,6	600,2	601,8	601,2	597,6
599,8	602,8	600,0	599,6	602,2
603,8	603,6	601,8	602,0	603,6
600,8	600,2	600,4	600,2	602,2
598,0	598,4	600,8	602,8	597,6
601,6	603,4	597,0	599,8	597,8
602,4	602,2	600,6	596,2	602,4
601,4	599,2	601,6	600,4	598,0
601,2	604,2	600,2	600,0	596,8

Tabla 5: Datos de longitudes de árboles de leva.

Los datos entregados en la tabla precedente corresponden a 100 medidas de longitudes de los árboles de levas en milímetros tomadas de una producción. La forma de trabajo podía ser en grupo en el aula de clase.

La búsqueda de la respuesta a la pregunta planteada en AEI los debería llevar a construir o reconstruir praxeologías que les permitieran identificar:

a) La variabilidad del proceso de producción.

b) Ajustar un modelo distribución de probabilidad para la producción para cuantificar en forma estimativa la proporción de árboles de levas que no cumplirían con las especificaciones.

c) Establecer un criterio cuantitativo de aptitud del proceso de producción usando la *Distribución Normal*.

La búsqueda de respuestas de la AEI se espera que lleven a preguntas derivadas tales como: **¿Cómo caracterizaría el desempeño del proceso?** **¿Qué medidas de la muestra calcularía?** **¿Qué características de la producción es importante estimar?** **¿Cómo representaría gráficamente la variabilidad real del proceso de producción y la exigida?** **¿Cómo encontrar un modelo de distribución para la producción y cómo representarlo?**

En la Figura 17 se puede ver un diagrama del modelo praxeológico de la actividad 1.

Figura 17. Esquema análisis praxeológico de la actividad 1.

Para ejemplificar el problema se les presentó en clase como material didáctico, una pieza real correspondiente al árbol de levas de un motor de automóvil, en la Figura 18 se muestra la imagen de lo que se presentó en la clase.

Figura 18. Muestra real de un árbol de levas.

Todas las respuestas que los alumnos encontraron fueron incorporadas a la clase y se tomaron en la medida en que eran funcionales al medio, y pasaron a formar parte del mismo. En el grupo de alumnos que pertenecen a la carrera de Ingeniería Industrial esta actividad podría implicar algún reencuentro con su propio equipamiento praxeológico con utilización de fórmulas ya conocidas en algunos casos, pero en este caso desde la argumentación del rol de la Distribución Normal.

Las respuestas fueron entregadas por escrito a los docentes y discutidas oralmente en el aula, los alumnos trabajaron individualmente o en grupos de dos personas. Se seleccionaron algunas de las respuestas:

Protocolo 11. *“Para ver si son intercambiables miraríamos si las mediciones están todas entre 598 mm y 602 mm, es decir si cumplen las especificaciones.”*

En este caso, Protocolo 11, los estudiantes sólo realizaron una descripción de cuantos datos del total se encontraban entre los márgenes de tolerancia, pero no analizaron si el centro de la distribución de la muestra estaba en 600 mm o no, tampoco si la cantidad de datos fuera de los límites de tolerancia podría ser razonable para el proceso de producción.

Las clasificaría en tres conjuntos:

- ❖ A = {596,8; 597,6; 597,2; 596,4; 597,6; 597,0; 597,8; 596,2; 597,6; 597,6; 596,8}
- ❖ B = {601,6; 600,4; 598,4; 600,0; 599,8; 599,8; 601,0; 601,6; 600,8; 601,6; 600,2; 601,8; 601,2; 598,4; 599,6; 600,6; 598,4; 599,8; 600,0; 599,6; 598,2; 602,0; 599,4; 599,4; 600,8; 601,8; 602,0; 600,8; 598,6; 600,0; 600,4; 600,8; 600,8; 600,2; 600,4; 600,2; 600,8; 600,4; 599,8; 598,0; 598,4; 600,8; 600,4; 598,2; 598,6; 599,6; 599,0; 601,6; 599,8; 598,2; 599,4; 599,4; 600,2; 599,0; 600,6; 599,4; 598,0; 598,0; 601,4; 599,2; 601,6; 600,4; 598,0; 601,2; 599,0; 600,4; 600,6; 599,0; 601,2; 600,2; 600,0}
- ❖ C = {602,2; 602,8; 603,6; 604,2; 602,4; 603,4; 602,8; 602,2; 603,8; 603,6; 603,6; 602,2; 602,8; 603,4; 602,4; 602,2; 602,4; 604,2}
- ❖ Conjunto A: Elementos ubicados por debajo del límite inferior de tolerancia (598 mm). Total: 11 elementos.
- ❖ Conjunto B: Elementos ubicados entre los límites inferior y superior de tolerancia (598 y 602 mm respectivamente). Total: 71 elementos.
- ❖ Conjunto C: Elementos ubicados por encima del límite superior de tolerancia (602 mm). Total: 18 elementos.
- ❖ Cantidad total de elementos: 100.

Figura 19. Protocolo 11.

Protocolo 12. En este caso un grupo de alumnos manifestó: “Para verificar que se cumplen las especificaciones construiríamos un histograma y verificaríamos que se encuentre entre los límites tolerancia.”

Figura 20. Protocolo 12.

En este caso de Figura 20. Protocolo 12. , el grupo decide resolver la situación de forma gráfica. El histograma construido sobrepasa los límites de tolerancia permitidos para las longitudes del árbol de levas, con lo cual concluye que el proceso es incapaz. Los integrantes no se plantean otros interrogantes, como por ejemplo: ¿Cuál es la proporción del histograma que debería extenderse más allá de las especificaciones para concluir que el proceso es incapaz?

Protocolo 13. Este alumno hizo una selección del material bibliográfico que consideró adecuado y comentó que sería lo mejor construir un histograma y ver si el mismo cae entre los límites de tolerancia, y también para ver si el mismo está centrado en 600 mm, pero no realizó los cálculos. Tuvo que reconstruir los conocimientos acerca de la construcción de un histograma dado que se había olvidado. La praxis en torno a métodos pictóricos de representación estadística de un conjunto de datos se encontraba disponible en el grupo de alumnos, pero algunos debieron hacer un reencuentro con esas praxeologías. Esto se observa en las Figura 21 y Figura 22.

En la práctica no se puede contar con toda la población para realizar un análisis, sin embargo, se considera una muestra de la misma, por ejemplo de tamaño n .

De esta manera, podemos dividir el conjunto total de valores de la muestra de la característica X en un conjunto de K intervalos de ancho Δx_i con $i = 1, 2, \dots, k$. Luego contamos la frecuencia relativa de la característica X de los n individuos de la muestra en cada uno de los intervalos Δx_i , esto es n_i/n , donde n_i es el número de individuos de la muestra que caen en el intervalo de ancho Δx_i , es evidente que $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$.

Supongamos que los anchos de los intervalos son todos iguales, luego dibujamos así para cada Δx_i una barra de ancho Δx_i y altura n_i/n llamado Histograma.

Histograma para las frecuencias relativas

Debido a diversas razones, como, por ejemplo, las exigencias de los clientes, las necesidades determinadas por el uso para el que fueron diseñados, las estipulaciones de las normas, etc., la variable aleatoria asociada con determinada característica de los individuos o entes de una población está, generalmente, restringida a tomar valores entre ciertos límites de tolerancia o especificación.

En ese caso es conveniente dibujar las líneas de especificación de manera de apreciar la posición del histograma en relación a esos límites.

Figura 21. Protocolo 13. Recopilación bibliográfica de un grupo de alumnos: Histograma.

Por ejemplo, el siguiente histograma satisface ampliamente la especificación. Todo lo que hay que hacer es mantener el estado presente (L_s y L_i indican los límites de especificación superior e inferior, respectivamente):

Figura 22. Recopilación bibliográfica de un grupo de alumnos.

Los grupos difundieron y defendieron las respuestas. Uno o más integrantes de cada grupo expusieron sus resultados en forma oral. Los estudiantes escucharon y opinaron sobre las contribuciones de los demás grupos. Construyeron una respuesta $R^\diamond$

para monitorear si la muestra de los 100 datos satisface las especificaciones. Dicha respuesta consistió en graficar un histograma con los límites de especificaciones y el centro de la muestra (para algunos), o simplemente contar la cantidad de datos entre los límites de tolerancia. Los grupos realizaron una síntesis de las técnicas, tecnologías y teorías de las diferentes respuestas $R^\diamond$ que fue compartida en forma oral en el aula. Aquí se puede ver un indicador de la dialéctica de la difusión y de la recepción.

Luego los profesores participantes realizaron un análisis praxeológico y didáctico de las respuestas con el objeto de sintetizar qué temas se quiere enseñar y como. Se realizó una exposición oral que se formalizó de la siguiente manera:

En la Figura 23, L_s y L_i indican los límites de especificación inferior y superior, respectivamente y se muestran algunas de las situaciones que se podrían haber presentado.

Figura 23. Gráficos posibles de histogramas.

El caso a, se observa en el gráfico que satisface ampliamente las especificaciones y b satisface exactamente las especificaciones ya que el histograma se encuentra dentro de los límites, pero el centro del histograma se encuentra desplazado hacia la izquierda. En el caso c se observa que el proceso está descentrado con respecto a las especificaciones del fabricante y una proporción de datos se encuentra fuera del límite inferior. En el caso d, el proceso está centrado en el lugar correcto y existe una proporción que podría ser pequeña de datos que no cumplen los límites requeridos. Por último, en el caso e, se observa que el histograma está descentrado con respecto a las especificaciones y una proporción más alta de datos que no cumplen lo especificado. Esta praxeología permitió responder las preguntas: **¿Qué proporción de la muestra de árboles de levas no satisface las especificaciones?** **¿Cómo relacionar gráficamente**

la variabilidad de la muestra con respecto a las especificaciones? Pero no se logró establecer un criterio razonable que permitiera cuantificar la aptitud del proceso de producción.

Se comentó que no siempre es posible lograr que todas las mediciones se encuentren entre las especificaciones por causa de la variación propia de los procesos industriales que hacen que una pieza no pueda ser idéntica a la otra, en esta instancia los profesores decidieron llevar al medio las siguientes preguntas que se presentan en el Encuentro 3.

10.2.1. Resumen del Encuentro 2

Al introducirse la actividad, los estudiantes comenzaron a buscar posibles respuestas y esto dio paso a que surjan otras preguntas a investigar. Las respuestas y preguntas derivadas se socializaron con todo el curso. Durante el desarrollo de la actividad se pusieron en juego equipamientos praxeológicos (histogramas) en este caso con un sentido funcional ya que se estudió un problema con datos reales. Los estudiantes se plantearon ciertas preguntas para resolver la actividad: *¿Cuál es la variabilidad de la muestra? ¿Cuál es la proporción de datos no satisface las especificaciones? ¿Cómo describir gráficamente el desempeño de la muestra en función de las especificaciones?* buscaron posibles respuestas como se puede observar en el protocolo 11 y en protocolo 12. Se puso de manifiesto el funcionamiento de la dialéctica de las preguntas y las respuestas. Esto dio paso a que surjan otras preguntas a investigar, sugerida por los profesores. Una de esas nuevas preguntas fue **¿Cómo cuantificar la proporción de piezas del total producidas que podrían no cumplir las especificaciones en un proceso con un buen desempeño?** Esto puso en funcionamiento en el siguiente encuentro, la dialéctica del estudio y de la investigación.

También se pudo observar, en este encuentro, estudiantes que salieron de las preguntas planteadas para estudiar algunas praxeologías relativas a estadística. Como se puede observar, en el protocolo 13, se estudia la técnica utilizada para la construcción de un histograma, pero no usan ese saber para la formulación de las respuestas en términos del problema propuesto, se puede considerar que en este caso no se manifiesta la dialéctica de la lectura y la escritura.

En la Tabla 6 se resumen las preguntas derivadas a las que se logró responder, las OM estudiadas para ello, que incluyen la teoría, las técnicas y las tareas, y los medios que lo permitieron.

Pregunta generatriz de la actividad y preguntas derivadas	OM	Media
<p>Q1: ¿Cómo evaluaría el desempeño del siguiente proceso de producción de árboles de levas de una planta automotriz en base a la muestra seleccionada?</p> <p>Q1,1 ¿Cuál es la variabilidad de la muestra?</p> <p>Q1,2 ¿Cuál es la proporción de datos no satisface las especificaciones?</p> <p>Q1,3 ¿Cómo describir gráficamente el desempeño de la muestra en función de las especificaciones?</p>	<p>Histograma. Tablas de Distribución de frecuencias. Gráficos de Aptitud.</p>	<p>Material didáctico disponible en el aula virtual</p> <p>Profesor</p> <p>Software estadístico.</p> <p>Libros de probabilidades y estadística.</p> <p>Internet.</p>

Tabla 6: Resumen del Encuentro 2.

10.3. Encuentro 3

Durante este encuentro el grupo trabajó con las siguientes preguntas derivadas.

Q1,4 ¿Qué medidas de la muestra calcularía?

Q1,5 ¿Qué características de la producción es importante estimar?

Q1,6 ¿Qué distribución de probabilidad asociaría con las mediciones y por qué?

Q1,7 ¿Cómo establecer un criterio razonable que me permita cuantificar la proporción de piezas del total producidas que podrían no cumplir las especificaciones en un proceso con un buen desempeño?

Se combinó el estudio de respuestas disponibles en el grupo de alumnos (tales como: distribución Normal, media, varianza, gráfico de probabilidad, test de bondad de ajuste) con el estudio y la investigación realizada a través de Internet, en libros de probabilidades, de estadística y en libros de control estadístico de calidad, es decir, fue necesario combinar el estudio y la investigación.

En este encuentro los estudiantes abordan los siguientes conceptos correspondientes a la *Distribución Normal*: la misma depende de dos parámetros μ y σ , que son la media y la desviación típica respectivamente. Su gráfica en coordenadas cartesianas tiene una forma acampanada y es simétrica respecto a μ . El 68,27% de la población está contenido en un entorno $\pm 1\sigma$ alrededor de μ , el 95,45% de la población está contenido en un entorno $\pm 2\sigma$ alrededor de μ y que el 99,73% está comprendido en $\pm 3\sigma$ alrededor de μ (Figura 24).

Figura 24. Distribución Normal.

Los grupos de trabajo tuvieron que recurrir a su almacenamiento praxeológico (Media, Desviación Estándar, Distribución Normal, Gráficas de Probabilidad) o recurrir a los media disponibles.

Se registraron las siguientes respuestas:

Protocolo 14: Un grupo de tres alumnos realizó los siguientes cálculos: (Ver Figura 25 y Figura 26)

Figura 25. Producción protocolo 14 de alumnos (Histograma).

..... contaría cuantas mediciones caen por debajo del límite inferior de tolerancia (598 mm) que en este caso son 11 mediciones y cuantas caen por encima del límite superior de tolerancia (602 mm) que en este caso son: 18. Es decir que 71 datos caen entre los límites de tolerancia de un total de 100 lo que significaría un 59,15% del total. Por las características propias de los procesos industriales y analíticos, la mayoría de ellos responden a una curva de Gauss. Si un cliente exige que el 99,7% de la distribución de una determinada característica se ubique dentro de los límites de tolerancia en este caso no se estaría cumpliendo. Si indicamos con X a la variable aleatoria asociada con la característica que estamos midiendo y si suponemos que $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ entonces debe verificarse que:

$$598 \leq \mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma \leq 602$$

Ya que:

$$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = 0,997$$

Donde μ indica la media de la distribución y σ el desvío estándar de la distribución. En este caso diríamos que el cliente tiene una tolerancia 3-sigma. En general podría exigir una tolerancia k-sigma con $k=1,2,3, \dots$

Calcularía el índice de capacidad del proceso también

$$P_p = \frac{L_s - L_i}{6S} = \frac{602 - 598}{6S} = 0,34$$

Como es menor que uno el proceso es incapaz.

$$P_{pk_s} = \frac{L_s - \bar{X}}{3S} = 0,29 \quad \text{Es distinto que } P_p \text{ lo que implica que el proceso no está centrado dónde debe}$$

Figura 26. Producción protocolo 14 Índice de Capacidad.

Este grupo de estudiantes se pudieron ver indicadores de la Dialéctica del estudio y de la investigación. Búsquedas en internet y en el material del curso de índices que permiten establecer la relación entre los límites de tolerancia de las especificaciones y la variación natural de un proceso con *Distribución Normal*. Primero realizan un histograma que sugiere que la *Distribución Normal* podría ser adecuada para la población. Se pone de manifiesto con el objeto de responder la pregunta: **Q1,8 ¿Cómo establecer un criterio razonable que me permita establecer la proporción de piezas del total producidas que pueden no cumplir las especificaciones en un proceso con un buen desempeño?** Estimaron el índice de capacidad global P_p (para la Distribución Normal) que se obtiene del siguiente modo:

$$P_p = \frac{L_S - L_I}{6\sigma}$$

Dónde σ es la desviación estándar global del proceso y L_S es el límite superior de especificaciones y L_I es el límite inferior de especificaciones. El índice P_p permite evaluar el proceso de la siguiente manera: Si $1,33 \leq P_p$ entonces el proceso es bien satisfactorio, si $1,00 \leq P_p \leq 1,33$ entonces el proceso es adecuado y si $P_p \leq 1,00$ entonces el proceso es inadecuado.

En relación con el índice P_p se pueden definir otros dos indicadores de la aptitud del proceso que tienen que ver no solamente con la capacidad absoluta, sino también con la simetría de la distribución.

$$P_{Kp} = \min \left\{ \frac{L_S - \mu}{3\sigma}, \frac{\mu - L_I}{3\sigma} \right\}$$

Dónde σ y μ son respectivamente la desviación estándar y la media del proceso, pero dado que se desconocen μ y σ se estiman utilizando el promedio de los datos $\bar{X}$ y la desviación estándar de los datos $S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$. Si el proceso estuviera centrado en el valor nominal es decir en 600 mm se debería verificar que $P_p = P_{Kp}$.

La praxeología relativa a índices de capacidad no se encontraba disponible entre los alumnos que realizaron el curso.

Protocolo 15. En la construcción del medio un grupo de estudiantes hizo una transcripción del material seleccionado, encontrados en los textos. (Ver Figura 27 y Figura 28)

Por las características propias de los procesos industriales y analíticos, la mayoría de ellos responden a la curva de Gauss.

Por ejemplo, suponga que un cliente, exige que el 99,7% de la distribución de una determinada característica o propiedad de un producto se ubique dentro de determinado intervalo de tolerancia [LIT, LST]. Esto significa, de acuerdo a la regla k-sigma, que si indicamos con X a la variable aleatoria asociada con la característica o propiedad en cuestión y suponemos además que $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ entonces debe verificarse:

$LST \leq \sigma + 3\mu \leq X \leq \sigma - 3\mu \leq LIT$ puesto que, según vimos, es $P(\sigma + 3\mu \leq X \leq \sigma - 3\mu) = 0,997$

Donde μ es un parámetro que me indica el centro de simetría de la distribución y σ es otro parámetro que me mide la abertura de la campana.

Decimos que el cliente exige tolerancia a 3-sigma. En general podría exigir tolerancia a k-sigma con $k = 1, 2, \dots$

Figura 27. Transcripción de un grupo de alumnos.

El hecho de que las características o propiedades de interés estén distribuidas de forma aleatoria, o sea no determinística, se vuelve de primordial importancia cuando se trata de decidir si las mismas son aceptables o no dentro de determinados estándares. Más que hablar de un único valor como el correcto para una característica dada hay que hablar de una distribución adecuada.

Observamos que si el proceso no tuviera componentes aleatorias, el problema de determinar si el proceso, que da lugar a la misma, es adecuado o no sería sencillo: si la característica de interés tomara exactamente un único valor que se estableciera como el adecuado, el proceso sería aceptable, en caso contrario no.

En cambio, en este tipo de procesos, aún cuando el proceso sea estable, es decir esté controlado, si la dispersión de las distribuciones es demasiado grande, puede ocurrir que una parte importante de las curvas caiga fuera de los límites de tolerancia o especificación que exigimos. Es posible encauzar a las distribuciones dentro de estos límites, reduciendo las causas comunes de variabilidad y con ello la dispersión.

Figura 28. Transcripción de un grupo de alumnos.

Protocolo 16: Se muestra la producción de un grupo que decidió usar el software Statgraphics para realizar la actividad. Hicieron una selección de la salida del programa. Se puede ver que utilizaron un gráfico de probabilidad *Normal* para analizar si los datos provienen de una *Distribución Normal* (Figura 29).

Figura 29. Transcripción de un grupo de alumnos

Figura 30. Análisis estadístico protocolo 16.

En este caso, luego de estimar la media y la varianza del proceso, como así también los la distribución subyacente con el gráfico de probabilidad *Normal* (Figura 29) estimaron la probabilidad de que el proceso se encuentre entre las especificaciones y también más allá de ellos usando el software Statgraphics (Figura 30). También validaron la *Distribución Normal* de la muestra usando test de hipótesis.

Protocolo 17: En este caso un grupo de alumnos decidió realizar los cálculos sin utilizar un software

¿Que modelo probabilístico asociaría para sus mediciones?
 Asociaría para mis mediciones una distribución normal de la forma $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ donde:

- X = longitud de árbol de levas
- μ = promedio de las longitudes medidas
- σ = dispersión de las longitudes medidas respecto de μ

$$\mu = \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{100} * \sum_{i=1}^{100} x_i = \frac{1}{100} * 60023 = 600,23$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^n x_i^2 - \mu^2 = \frac{1}{100} * \sum_{i=1}^{100} x_i^2 - \mu^2$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{100} * 36027952,92 - (600,23)^2 = 3,4763$$

Figura 31. Análisis estadístico estimación de parámetros, protocolo 17.

Además

$$P(598 \leq X \leq 602) = P\left(\frac{598-\mu}{\sigma} \leq X \leq \frac{602-\mu}{\sigma}\right) = 0,6687 \text{ pero debería ser } 0,9975 \text{ o más para}$$

que la planta automotriz esté operando adecuadamente.

En este caso se observa que $P(X < 598) = P\left(X < \frac{598-\mu}{\sigma}\right) = 0,1430$

$$P(X > 602) = 1 - P\left(X < \frac{602-\mu}{\sigma}\right) = 0,1883$$

Por lo tanto el proceso está descentrado dado que estas respuestas tendrían que haber dado lo mismo.

Figura 32. Análisis estadístico cálculo de probabilidades, protocolo 17.

Se observó que estos estudiantes (Figura 31 y Figura 32) estimaron la probabilidad de que la variable aleatoria $X = \text{“longitud del árbol de levas”}$, estuviera entre los límites de especificaciones $P(598 \leq X \leq 602)$ para ver si al menos el 99,7% de la población se entraba entre los límites de tolerancia. Como así también $P(X < 598)$ y $P(602 < X)$ para ver si el proceso estaba descentrado en el caso que dichas probabilidades fueran diferentes. En este caso se puede ver la dialéctica de la lectura y de la escritura ya que los saberes son elaborados y no una copia textual. También fue necesario decidir en qué medios de información realizar las búsquedas y luego determinar cuáles medias serían incorporados al medio, este grupo de alumnos decidió no utilizar ningún software para realizar los cálculos para validar los resultados ellos mismos utilizando la *Distribución Normal* (dialéctica medias- medio)

Todas las respuestas que los alumnos encontraron fueron incorporadas al medio didáctico y se tomaron en la medida en que eran funcionales, y pasaron a formar parte del mismo y se concluyó que para que el proceso fuera capaz el 99,77 % de la población o más deberían caer entre los límites de tolerancia en el caso de que la muestra provenga de una población con *Distribución Normal*.

10.3.1. Resumen del Encuentro 3

Durante este encuentro se observó sobre todo la búsqueda y trabajo con diversas praxis estadísticas que incluyeron la realización de gráficos utilizando software, de modo de buscar respuesta a las preguntas: ¿Qué distribución de probabilidad asociaría con las mediciones y por qué? ¿Cómo establecer un criterio razonable que permita establecer la proporción de piezas del total producidas que pueden no cumplir las especificaciones en un proceso con un buen desempeño? Realizaron una lectura de los distintos índices de capacidad (para los distintos tipos de distribuciones y presentación de la muestra) y una capacitación sobre el potencial del software disponible para realizar los cálculos. Luego utilizaron sólo los saberes relevantes y útiles para responder la pregunta, sólo profundizaron en aquellos que eran funcionales al medio. Esto se puede considerar como evidencia de la dialéctica de las cajas negras y de las cajas claras. Algunos alumnos realizaron una transcripción textual de respuestas generales encontradas en los media que podrían ser funcionales al medio, como se puede ver en el protocolo 15. Esto requirió de intervenciones de los profesores, formulación de

preguntas que condujeran a la elaboración de una síntesis por parte de los alumnos. Estos pueden ser indicadores de la ausencia dialéctica de la lectura y la escritura en algunos casos.

Los profesores respondieron consultas de los estudiantes con respecto al uso del software disponible o les facilitaron los tutoriales correspondientes. Esto fue necesario, para algunos alumnos, cuando decidieron hacer un histograma, un gráfico de probabilidad *Normal* o calcular índices de capacidad. El uso del software permitió agilizar la tarea de la representación y la realización de algunos cálculos, pero hizo que debieran investigar cómo utilizarlo. Se puso de manifiesto la dialéctica: entrar y salir de tema.

Durante este encuentro, todos los estudiantes consideraron como adecuada la *Distribución Normal*, como distribución de probabilidad para el análisis de los datos de las longitudes de los árboles de levas. Algunos argumentaron que dicha distribución es apropiada dado que es propia de los procesos industriales, otros utilizaron representaciones gráficas como lo es el diagrama de probabilidad *Normal*, o la realización de un histograma. Estimaron la media y la desviación, como también estimaron utilizando la *Distribución Normal* la proporción de la población fuera de las especificaciones y finalmente también utilizaron un test de *Normalidad* (Shapiro-Wilk) que no pudo rechazar la Normalidad de la población.

Se estudiaron OM relativas a Distribución Normal, histogramas, media, desviación estándar, Test de *Normalidad* (Shapiro-Wilk), cálculo de probabilidades usando la *Distribución Normal* y cálculo de índices de capacidad global. Esto se resume en la Tabla 7: Resumen del Encuentro 3.

Para evaluar que índice de capacidad apropiado para este caso, tuvieron que estudiar varias formas de cálculo dependiendo de la distribución subyacente de la población. La búsqueda de respuestas requirió determinar qué saberes eran pertinentes y utilizar lo estrictamente necesario para luego usarlo para esta actividad. Se puso en funcionamiento la dialéctica de la lectura y de la escritura.

Preguntas Derivadas	OM	Media
Q _{1,5} ¿Qué características de la muestra calcularía?	Medidas descriptivas.	Aula provista de computadoras con acceso a internet
Q _{1,6} ¿Qué características de la producción es importante estimar?	Media muestral, varianza muestral, rango.	Material docente de la asignatura disponible en el aula virtual.
Q _{1,7} ¿Qué distribución de probabilidad asociaría con las mediciones y por qué?	Parámetros: Media poblacional, varianza poblacional, desviación estándar.	Profesores.
Q _{1,8} ¿Cómo establecer un criterio razonable que me permita establecer la proporción de piezas del total producidas que pueden no cumplir las especificaciones en un proceso con un buen desempeño?	Distribución Normal. Histogramas. Test de <i>Normalidad</i> (Shapiro-Wilk), Índices de capacidad Global. Estimación puntual. Gráficos de probabilidad.	Libros de probabilidades y estadística.

Tabla 7: Resumen del Encuentro 3.

10.4. Encuentro 4

Para seguir trabajando sobre la pregunta generatriz: **¿Cómo producir partes intercambiables?** Se propuso a los estudiantes evaluar el comportamiento de las longitudes de los árboles de levas a largo plazo, para la misma planta automotriz con los mismos estándares de calidad. En esta etapa ese mismo grupo de estudiantes deberá evaluar el comportamiento de las longitudes medias $\bar{X}$ para una muestra de árboles de levas producidos por día. Es decir, si $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_{20}$ representan las longitudes medias de los árboles de levas seleccionados durante 20 días.

Para ello se les dio muestras aleatorias de tamaño 5 de árboles de levas producidos durante 20 días consecutivos, y se propuso trabajar sobre la pregunta: **¿Cómo evaluaría en este caso el desempeño del proceso en el tiempo?**

La característica de calidad a monitorear, en este caso tiene *Distribución Normal o aproximadamente Normal*. Se propone la siguiente Actividad para realizar con los datos de la Tabla 8.

Actividad 2

Los datos entregados en la tabla 8 corresponden a 5 medidas de longitudes de los árboles de levas en milímetros tomadas durante 20 días a lo largo de un mes de producción, si las especificaciones siguen siendo las mismas. **Q2** ¿Cómo evaluaría en este caso el desempeño del proceso en el tiempo?

Período	Longitud del árbol de levas [mm]					Período	Longitud del árbol de levas [mm]				
1	601,6	600,4	598,4	600,0	596,8	11	602,2	599,8	599,8	601,0	601,6
2	602,8	600,8	603,6	604,2	602,4	12	601,6	600,2	601,8	601,2	597,6
3	598,4	599,6	603,4	600,6	598,4	13	599,8	602,8	600,0	599,6	602,2
4	598,2	602,0	599,4	599,4	600,8	14	603,8	603,6	601,8	602,0	603,6
5	600,8	598,6	600,0	600,4	600,8	15	600,8	600,2	600,4	600,2	602,2
6	600,8	597,2	600,4	599,8	596,4	16	598,0	598,4	600,8	602,8	597,6
7	600,4	598,2	598,6	599,6	599,0	17	601,6	603,4	597,0	599,8	597,8
8	598,2	599,4	599,4	600,2	599,0	18	602,4	602,2	600,6	596,2	602,4
9	599,4	598,0	597,6	598,0	597,6	19	601,4	599,2	601,6	600,4	598,0
10	601,2	599,0	600,4	600,6	599,0	20	601,2	604,2	600,2	600,0	596,8

Tabla 8: Datos de la longitud de árbol de leva durante 20 días.

Se espera que en el desarrollo de la AEI los estudiantes construyan una carta de control para la media y logren el estudio de las siguientes OM:

- Evaluar la variabilidad natural de un proceso bajo control a lo largo del tiempo ya que deberán analizar el comportamiento de la producción media correspondiente a distintos días.
- Aplicar gráficos de control para medidas de un conjunto de datos con distribución Normal.

Para cumplir estos objetivos es necesario que el estudiante utilice la siguiente praxeología:

Si X es una variable aleatoria Normal con media μ , y varianza σ^2 de la que se extraen muestras de tamaño n , entonces las medias muestrales $\bar{X}$ se distribuyen según otra ley Normal con media μ y varianza σ^2/n .

La búsqueda de respuestas de la AEI se espera que lleven a preguntas derivadas tales como: **¿Cuál la variación del proceso a lo largo del tiempo? ¿Cuáles son los límites de variación naturales del proceso para este caso? ¿Cómo construir una carta de control? ¿Los datos son de tipo variable o de tipo atributo? ¿Qué tipo de carta de control se podría realizar? ¿Cómo caracterizaría la capacidad del proceso para cumplir con las especificaciones en este caso?** En la Figura 33 se puede ver un diagrama del modelo praxeológico de referencia de la actividad.

Figura 33. Esquema análisis praxeológico de la actividad 2.

En lo que sigue se muestra el desarrollo del proceso de los alumnos, para ello se muestran algunos protocolos y el análisis correspondiente. En un principio los alumnos, sin intervención de los docentes, se plantearon la pregunta: ¿Qué herramienta estadística permitiría monitorear si en cada día se cumplen las especificaciones?, se registraron las siguientes respuestas:

Protocolo 18: “Para evaluar el desempeño del proceso miráramos si diariamente las mediciones están todas entre 598 mm y 602 mm, es decir si cumplen las especificaciones.”

PERÍODO	LONGITUD FUERA DE [598,602]	PERÍODO	LONGITUD FUERA DE [598,602]
1	596,8	11	602,2
2	602,8 - 603,6 - 604,2 - 602,4	12	597,6
3	603,4	13	602,2 - 602,8
4	-	14	603,8 - 603,8 - 603,6
5	-	15	606,2
6	596,4 - 597,2	16	604,8 - 597,6
7	-	17	603,4 - 597,8 - 597
8	-	18	602,4 - 602 - 598,4
9	597,6 - 597,6	19	-
10	-	20	604,2 - 596,8

29 datos caen Fuera de [598,602]

Figura 34. Protocolo 18 de un grupo de alumnos (tabla).

En este caso Figura 34 se observa que el recurso usado fue una tabla en la que constan para cada período las observaciones que no cumplen lo especificado.

Protocolo 19: “Realizamos una carta de tolerancia con el software Statgraphics en el cual se observa que el período 2 y 14 se encuentran muy por arriba de las especificaciones que corresponden a las líneas horizontales que pasan por 602 y por 598 respectivamente. También se puede observar de la carta que hay mucha variabilidad en los períodos.”

Figura 35. Protocolo 19 de un grupo de alumnos (gráfico de tolerancia).

En este caso de la Figura 35 los estudiantes realizan una carta de tolerancia que permite, gráficamente, ver para cada período que datos se salen fuera de los límites

especificados ubicados más allá de las líneas horizontales ubicadas a la altura 598 y 602 del gráfico respectivamente. También permite ver la dispersión de los datos por período y su ubicación con respecto al valor nominal correspondiente a 600 mm.

Protocolo 20: “Calculamos las medias de las longitudes para cada uno de los días y los rangos de los datos para cada uno de los días para ver si diariamente se cumple con las especificaciones. Hay algunas medias calculadas que no se encuentran dentro de las especificaciones que corresponden a los días 2 y 14 que se encuentran más arriba de las especificaciones. En cuanto a los rangos hay varios de ellos que superan los 4mm que corresponden a los periodos 1, 3, 6, 12, 16, 17, 18 y 20. A su vez el promedio de las medias y el promedio de los rangos dan 600,23 y 3,72 respectivamente. La media de las medias es apenas un poco superior a 600 mm y el promedio de los rangos es cercano al máximo exigido que es de 4 mm.”

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\bar{x}$ 597,44	$\bar{x}$ 602,76	$\bar{x}$ 602,08	$\bar{x}$ 599,96	$\bar{x}$ 600,12	$\bar{x}$ 598,92	$\bar{x}$ 599,16	$\bar{x}$ 599,24	$\bar{x}$ 598,12	$\bar{x}$ 600,04
r 4,8	r 3,4	r 5	r 3,8	r 2,2	r 4,4	r 2,2	r 2	r 1,8	r 2,2
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\bar{x}$ 600,88	$\bar{x}$ 600,98	$\bar{x}$ 600,88	$\bar{x}$ 602,96	$\bar{x}$ 600,76	$\bar{x}$ 599,52	$\bar{x}$ 599,92	$\bar{x}$ 600,76	$\bar{x}$ 600,12	$\bar{x}$ 600,48
r 2,4	r 4,2	r 3,2	r 2	r 2	r 5,2	r 6,4	r 6,2	r 3,6	r 7,4

$$\bar{\bar{x}} = \frac{1}{20} \sum_{j=1}^{20} \bar{x}_j = 600,23 \quad ; \quad \bar{r} = \frac{1}{20} \sum_{j=1}^{20} r_j = 3,72$$

Figura 36. Protocolo 20 de alumnos (medidas descriptivas por período).

Se puede observar (Ver Figura 36) que este grupo confecciona una tabla con algunas medidas estadísticas descriptivas por período, dichas medidas son: media muestral y rango. Calculan también la media global y el rango global.

Protocolo 21: “Se realizó un diagrama de cajas múltiples para monitorear el comportamiento en cada período observando una gran variabilidad en cada uno debido a las longitudes de las cajas que varían mucho. También se realizó una tabla resumen de las medidas características de cada período. Se usó el software estadístico Statgraphics. Se observa una gran variabilidad en el comportamiento de los periodos y muchos períodos con el máximo o el mínimo fuera de las especificaciones.”

Figura 37. Protocolo 21 de alumnos (diagrama de cajas múltiples).

<i>periodo</i>	<i>media</i>	<i>Mediana</i>	<i>desviacion estandar</i>	<i>Minimo</i>	<i>Maximo</i>	<i>Rango</i>
1	599,44	600,0	1,86762	596,8	601,6	4,8
2	602,76	602,8	1,29923	600,8	604,2	3,4
3	600,08	599,6	2,07171	598,4	603,4	5,0
4	599,96	599,4	1,46561	598,2	602,0	3,8
5	600,12	600,4	0,91214	598,6	600,8	2,2
6	598,92	599,8	1,98796	596,4	600,8	4,4
7	599,16	599,0	0,86487	598,2	600,4	2,2
8	599,24	599,4	0,726636	598,2	600,2	2,0
9	598,12	598,0	0,742967	597,6	599,4	1,8
10	600,04	600,4	0,993982	599,0	601,2	2,2
11	600,88	601,0	1,07331	599,8	602,2	2,4
12	600,48	601,2	1,72395	597,6	601,8	4,2
13	600,88	600,0	1,50067	599,6	602,8	3,2
14	602,96	603,6	0,973653	601,8	603,8	2,0
15	601,56	600,4	2,60538	600,2	606,2	6,0
16	599,52	598,4	2,2163	597,6	602,8	5,2
17	599,92	599,8	2,64424	597,0	603,4	6,4
18	600,76	602,2	2,65857	596,2	602,4	6,2
19	600,12	600,4	1,52053	598,0	601,6	3,6
20	600,48	600,2	2,65556	596,8	604,2	7,4

Medidas descriptivas de los períodos

Figura 38. Tabla protocolo 21 de alumnos (medidas descriptivas).

En este caso en la Figura 37 se puede observar una representación gráfica correspondiente a un diagrama de cajas múltiples que permite apreciar la variación del comportamiento de la muestra para los distintos períodos. A su vez una tabla en la Figura 38 con distintas medidas descriptivas de dispersión para cada período: desviación estándar, y rango, medidas de centralización: media y mediana. También figuran los valores máximos y mínimos de cada muestra, resaltando los que no cumplen con las especificaciones.

Protocolo 22: “En este diagrama de cajas múltiple se puede observar que la segunda caja y la caja número 14 se salen mucho de las especificaciones ya que están en su

mayoría por encima del límite de especificaciones superior. También la línea central de los diagramas de caja para esos dos periodos está muy por encima del valor central de las especificaciones.”

Figura 39. Diagrama de cajas múltiple protocolo 22

Este grupo observa una diferencia considerable en cada período, tanto en su exactitud como en su precisión. (Ver Figura 39)

Luego del análisis realizado en clase por los alumnos, ellos construyeron una respuesta R^0 para monitorear si la muestra satisface las especificaciones. Dicha respuesta consistió en monitorear si los datos se escapaban de lo especificado para cada período, pero además monitorearon la variabilidad de las muestras por período: mediante un gráfico de tolerancia o con diagrama de cajas múltiple y calcularon medidas descriptivas por período. No se logró obtener una respuesta global cuantitativa que permita valorar la aptitud del proceso. No lograron hacer inferencia para la población de árboles de levas de la producción a partir de las medidas de centralización y variabilidad de una muestra.

Todos los alumnos lograron producir textos descriptivos, de manera concisa y manejar las herramientas informáticas, concluyendo, a partir del análisis (*con tablas, diagramas de cajas y cartas de tolerancia*) que la muestra presenta una gran variabilidad entre los períodos. También que había períodos en los que superaban las especificaciones o que tenían un rango mayor al deseado.

10.4.1. Resumen del Encuentro 4

Con esta actividad los estudiantes realizaron un análisis exploratorio para cada período de los datos a partir de la descripción de las características de la muestra a

través de sus partes relevantes (Medidas descriptivas de posición de una muestra: media, mediana, moda; medidas descriptivas de variación de una muestra: rango, desviación Estándar), sintetizar la información en tablas o cuadros, para su mejor comprensión y posterior procesamiento y construir gráficos para mostrar el comportamiento de los datos (Cartas de Tolerancia y Diagramas de Cajas Múltiples). Y luego de una puesta en común de sus producciones, de contrastar sus gráficos, tablas y sus medidas resumen se estableció que pudieron responder las siguientes preguntas: ¿Diariamente se cumplen las especificaciones? ¿Cuál la variación de la muestra a lo largo del tiempo? ¿Qué medidas descriptivas me permiten monitorear la adecuación a las especificaciones en cada período?. Este análisis puso en juego la dialéctica medio-media.

Todos los alumnos concluyeron a partir del análisis que habían hecho anteriormente (con *tablas*, *diagramas de cajas* y la *carta de tolerancia*) que el comportamiento de la muestra presenta una gran variabilidad entre los períodos. También pudieron verificar la existencia de períodos en los que se superan las especificaciones o que tienen un rango mayor al deseado. Se pudo observar como los grupos usaron distintas herramientas o recursos de manera funcional para establecer la variación del proceso en función del tiempo.

Utilizaron la calculadora y software estadístico como herramientas para la obtención de resultados. Requirieron investigar en tutoriales sus dudas sobre el uso del software o usar como media a los docentes del curso, lo que puso en funcionamiento la dialéctica de entrar y salir de tema. El Software es incorporado al medio para lograr la identificar gráficamente la variación del proceso con respecto a las especificaciones: Figura 35 Figura 37 Figura 39

Los grupos realizaron una síntesis de las diferentes respuestas obtenidas R⁰. Se puso en juego la dialéctica la dialéctica de la difusión y de la recepción, con un debate, en el que cada grupo expuso sus respuestas. A partir del mismo se concluyó que esto no era suficiente para establecer una respuesta completa para la actividad propuesta. Se requeriría hacer inferencia estadística, comparar la variación natural del proceso con las especificaciones de manera de cuantificar la adecuación o no a las especificaciones requeridas. Surgió, entonces, la pregunta: ¿Cuáles son los límites de variación naturales del proceso en su conjunto?

Los docentes ayudaron a los alumnos a buscar en la bibliografía sobre estabilidad estadística de un proceso de manufactura. Luego de consultar en los media disponibles en el curso (Control de Calidad del autor Montgomery y en internet) concluyeron que es imposible producir dos objetos exactamente iguales y que un proceso estable es aquel en que la producción varía alrededor de una medida fija de una manera predecible, en este caso se dice también que el proceso está controlado. En un proceso estable están presentes sólo las causas *inevitables o fortuitas* de variabilidad de la característica medida que conducen a pequeñas variaciones que no invalidan la aceptabilidad de la característica analizada. Estas causas son imposibles de eliminar, pero son de magnitudes pequeñas y tolerables. Pero hay otras causas más graves que hacen que el proceso sea inestable que se llaman *causas especiales o asignables* que debemos detectarlas y eliminarlas. También relacionaron el concepto de estabilidad con el video visto el primer encuentro en el que George Edwards menciona: “Existe el control de la calidad cuando artículos comerciales sucesivos tienen sus características más cercanas al resto de sus compañeros...”. También se investigó que para monitorear si todo el proceso es estable o está bajo control estadístico debería realizarse una *carta de control*.

Luego de este encuentro, los docentes realizaron un análisis praxeológico de la actividad que se resume en la Tabla 9.

Preguntas Derivadas	OM	Media
Q _{2,2} ¿Diariamente se cumplen las especificaciones?	Carta de tolerancia, Diagrama de cajas múltiples.	Material docente de la asignatura disponible en el aula virtual.
Q _{2,3} ¿Cuál la variación de la muestra a lo largo del tiempo?	Medidas descriptivas de posición de una muestra: media, mediana, moda	Libros de probabilidades y estadística.
Q _{2,4} ¿Qué medidas descriptivas me permiten monitorear la adecuación a las especificaciones en cada período?	Medidas descriptivas de variación de una muestra: rango, desviación estándar	Profesores. Internet disponible en las computadoras del aula

Q _{2,5} ¿Cómo describir gráficamente el desempeño de la muestra en función de las especificaciones en función del tiempo?		
--	--	--

Tabla 9: Resumen del Encuentro 4.

10.5. Encuentro 5

El desarrollo de la AEI, en este encuentro, requirió que los alumnos construyeran una carta de control para la media y la varianza de la producción diaria para poder estimar los parámetros del proceso en control para luego evaluar la aptitud del proceso, es decir la adecuación a los estándares de calidad. Para abordar la respuesta para la pregunta Q_{2,3} ¿Cuáles son los límites de tolerancia naturales del proceso para este caso? los profesores realizaron una introducción a las técnicas estadísticas para abordar el tema mediante una presentación de diapositivas en la que definió la OM relativa a una **carta de control** y cuál es su utilidad: un diagrama de control o carta de control es una gráfica donde los valores de la característica de calidad estudiada se disponen en distintos momentos de tiempo que se identifican sobre el eje de las abscisas. Tres líneas acompañan la serie graficada: la línea media (trazada a nivel de la media μ de los valores de la serie para un estado bajo control) y las líneas correspondientes a los límites inferior y superior de control (límites entre los que se espera queden comprendidas casi la totalidad de las observaciones de un proceso bajo control $\mu \pm 3\sigma$). Esta característica de calidad en este caso debe tener distribución Normal o aproximadamente Normal. Puntos fuera de la región determinada por ambos límites sugieren que el proceso no está bajo control. Aún si los valores de la serie observada se encuentran entre estos límites, el proceso puede cuestionarse por no poseer un patrón de distribución aleatoria con distribución Normal en torno a la línea media. Valores sistemáticamente mayores o menores al esperado sugieren un proceso fuera de control. Para identificar patrones no aleatorios se pueden graficar cuatro líneas horizontales más a la altura $\mu \pm 2\sigma$ y $\mu \pm \sigma$ respectivamente.

Luego de esta presentación debieron elegir una carta de control u otro método,

para la solución de un problema específico, argumentando su pertinencia.

Algunos alumnos utilizaron una Carta de Control $\bar{X}$, R (ya que cada muestra era de sólo 5 datos) para ello fue necesario suponer que la longitud promedio diaria proviene de una Distribución Normal con media igual a 600,23 y desviación estándar 1,59986 (Figura 40). Estos parámetros fueron estimados con los datos, a partir de las fórmulas de la carta de control seleccionada. Para cumplir estos objetivos fue necesario que el estudiante utilice el siguiente conocimiento: Si X es una variable aleatoria con Distribución Normal con media μ y varianza σ^2 de la que se extrae una muestra aleatoria de tamaño n, entonces la media muestral $\bar{X}$ se distribuyen según otra ley Normal con media μ y varianza σ^2/n . En todo el desarrollo de la actividad se buscó que los alumnos argumentaran en términos de la utilización de la Distribución Normal.

Figura 40. Protocolo de Carta de Control por período.

Los alumnos encontraron una respuesta $R^\diamond$ estableciendo que la media muestral $\bar{X}$ correspondiente al período 2 y 14, se encontraban fuera de control, además de identificar indicios de falta de aleatoriedad (Figura 40). Por lo tanto, se requirió seguir investigando para establecer los parámetros en control del proceso para lo cual se debieron estimar nuevamente los parámetros del proceso en control omitiendo los períodos 2 y 14. Luego pudieron establecer los índices de capacidad para así poder establecer la adecuación o no a las especificaciones como se ve en la Figura 41.

Suponiendo ahora que se corrigen las causas asignables que provocaron que los puntos 2 y 4 estén por encima de LCS, se recalculan los parámetros anteriores excluyendo estos dos puntos para ver si el proceso llega al control estadístico (condición necesaria para determinar su capacidad).

$$\bar{X} = 599,9378 ; \quad \bar{Y} = 3,8526 ; \quad \hat{\sigma} = 1,6969 ; \quad \begin{cases} LCS = 602,1602 \\ LC = 599,9378 \\ LCI = 597,7148 \end{cases} ; \quad \begin{cases} la1 = 601,4198 \\ la2 = 600,6988 \\ la3 = 599,1968 \\ la4 = 598,4558 \end{cases}$$

Se observa que el proceso está ahora bajo control estadístico. Puede estimarse ahora su capacidad: $ICP = \frac{LSE - LIE}{6\hat{\sigma}} = 0,4024$

$$\hat{ICP}_k = \min \left(\frac{LSE - \bar{X}}{3\hat{\sigma}} , \frac{\bar{X} - LIE}{3\hat{\sigma}} \right) = 0,3898$$

Como $\hat{ICP}_k$ es muy cercano a ICP , se puede concluir que el proceso está centrado. Luego, se puede decidir acerca de su capacidad con ICP .

Como $ICP < 1$, el proceso genera una elevada proporción de artículos fuera de especificaciones.

∴ El proceso es incapaz.

Figura 41. Protocolo del cálculo de Índices de Capacidad.

10.5.1. Resumen del Encuentro 5

Para abordar la respuesta para la pregunta Q_{2,3} ¿Cuáles son los límites de tolerancia naturales del proceso para este caso? Los grupos realizan una síntesis de las técnicas y tecnologías para construir las diferentes respuestas, para ello, estudiaron la organización matemática relativas a **Gráfico de control para variables continuas** y analizaron la factibilidad de las Cartas de control $(\bar{X}, S)$ y $(\bar{X}, R)$ y luego extrajeron conclusiones que permitieron responder las preguntas de la tabla 9 (Q_{2,3} y Q_{2,4}) para ello se puso en juego la dialéctica de la lectura y de la escritura.

Con el objeto de resolver la AEI, debieron plantearse ¿Cuál modelo de Carta de Control es la más adecuada y por qué? ¿Cómo implementarla?, para ello, incorporaron al medio los saberes obtenidos de los sistemas de información disponibles (media) para ser analizados y estudiados.

Durante este encuentro surgió la dialéctica de cajas negras y cajas blancas debido a que en la clase se produjo un estudio parcial de las obras. Investigaron como construir una Carta de Control en especial, la que necesitaban para resolver la actividad propuesta, las otras obras las dejaron en un “nivel de gris”. Pudieron construir una respuesta a las preguntas: ¿Cuáles son los límites de tolerancia naturales del proceso?, Para ello debieron determinar qué y cuánto estudiar de un saber, se focalizaron en estudiar cómo construir los límites de variación natural para este proceso en particular, ya que era necesario para establecer la respuesta a la pregunta: ¿Cómo medir la aptitud del proceso para cumplir con las especificaciones?

El tipo de tareas ejecutadas fueron: representar con un gráfico (Gráfico de control) el comportamiento de los datos atendiendo al tipo de variable relevada, describir e

interpretar a partir de esa representación su comportamiento y la reducción de la información mediante números (índices de capacidad) que precisen lo esencial para extraer conclusiones. Esto permitió establecer que, en este caso, los árboles de levas producidos diariamente no serían intercambiables (Figura 29). En la Tabla 10 se muestran las preguntas derivadas que se lograron trabajar en este encuentro, las organizaciones matemáticas estudiadas y los media utilizados.

Preguntas Derivadas	OM	Media
Q _{2,3} ¿Cuáles son los límites de tolerancia naturales del proceso para este caso?	Gráficos temporales. Carta de Control para variables aleatorias continuas.	Material docente de la asignatura disponible en el aula virtual.
Q _{2,4} ¿Cómo medir la aptitud del proceso para cumplir con las especificaciones en este caso?	Distribución del promedio de variables aleatorias con Distribución Normal Índices de Capacidad para un proceso con Distribución Normal	Libros de probabilidades y estadística. Profesores. Internet disponible en las computadoras del aula.

Tabla 10: Resumen del Encuentro 5.

10.6. Encuentro 6

Se presentó la siguiente actividad.

Actividad 3

En este caso se trata de monitorear los árboles de leva defectuosos que produce una fábrica automotriz. Se tomaron 54 muestras secuenciales de tamaño 50 cada una y se registró el número de defectuosos por muestra. Las primeras 30 muestras se produjeron antes de un ajuste de una máquina ocupada de la producción. Se plantea la siguiente pregunta a los estudiantes: **¿Cómo describiría el comportamiento de los árboles de leva defectuoso de la fábrica antes del ajuste de la máquina y después de él?**

La búsqueda de respuestas de la AEI se espera que lleven a preguntas derivadas tales como: **¿Cuál la variación del proceso a lo largo del tiempo, antes del ajuste de la máquina y después del mismo? ¿Los datos son de tipo variable o de tipo atributo? ¿Se produce algún cambio luego del ajuste de la máquina? ¿El ajuste de la máquina fue favorable o desfavorable?**

La característica a analizar en esta AEI es un atributo del producto (el producto es defectuoso o no.). En una primera fase se analizan sólo las primeras 30 muestras fabricadas antes del ajuste de la máquina. El objetivo de esta propuesta es que construyan una carta de control por atributos para controlar la proporción de árboles de leva defectuosos (carta p) o la cantidad de árboles de leva defectuosos (carta np). Con el desarrollo de la AEI, se espera estudiar la OM relativa a la aproximación Normal a la Distribución Binomial.

Entre las aplicaciones del Teorema Central del Límite se encuentra la aproximación Normal a la Distribución Binomial. Una variable aleatoria X es Binomial si representa el número de éxitos en n ensayos independientes con sólo dos posibilidades en cada uno de ellos éxitos/defectuosos. El Teorema Central del Límite permite aproximar (para n suficientemente grande) la distribución de la variable aleatoria X y de la variable aleatoria X/n (proporción éxitos/defectuosos) a la *Distribución Normal*. El tamaño de la muestra necesario para una buena aproximación depende del valor de p , si llamamos p a la proporción de fallas.

Como parte del análisis, algunos alumnos optaron por hacer una carta de control p para monitorear la proporción de árboles de leva defectuosos en las primeras 30 muestras. Para cada muestra i definieron la variable:

X_i =cantidad de árboles de leva defectuosos entre los 50 de la muestra i -ésima. Cada variable aleatoria X_i tienen distribución Binomial con media p y varianza $p(1-p)$, siendo p la proporción verdadera de árboles de leva defectuosos de la fábrica.

En lo que sigue se muestra un extracto de la actividad realizada por un grupo de alumnos (Figura 42. Carta P actividad resuelta por un grupo de alumnos.). En el mismo se muestra un reporte de la salida del software Statgraphics correspondiente a una carta

de control de la proporción de árboles de leva defectuosos producidos para las primeras 30 muestras secuenciales. En el mismo constan las estimaciones de los parámetros de la carta de control. Además, reportan que el proceso se encuentra fuera de control, debido a que hay dos datos que están más allá de tres desviaciones estándar de la media.

Figura 42. Carta *P* actividad resuelta por un grupo de alumnos.

Otros alumnos optaron por hacer una carta de control para monitorear la cantidad de árboles de leva defectuosos mediante una carta de control np (Figura 43). El Teorema Central del Límite (al ser cada muestra de 50 árboles de leva) permite aproximar la distribución de X_i a una *Distribución Normal* con media $50p$ y varianza $50p(1-p)$, lo que permite armar la carta de control estimando p mediante el promedio de las proporciones de leva defectuosos observadas de las 30 muestras.

Figura 43. Carta de control np de un grupo de alumnos.

En este caso también observaron dos puntos por encima de la línea superior que está a 3 desviaciones estándar de la media, correspondientes a la muestra 15 y 23 (señales de alarma). Una vez construida la carta de control elegida, los alumnos vieron que el programa Statgraphics también destacaba otros puntos que no se escapaban de las líneas de advertencia del gráfico, por lo tanto, trabajaron en las siguientes preguntas llevadas al medio por el profesor:

¿Se puede evidenciar algún patrón de no aleatoriedad en el comportamiento de este proceso?

Los alumnos marcaron 4 zonas de advertencia alrededor de la línea central, por encima y por debajo de esta con un ancho de una desviación estándar cada una de ellas como se ve en la Figura 44. Luego, aplicaron las reglas de Western Electric⁶ y

⁶ El Western Electric Handbook (1956) establece reglas para detectar patrones no aleatorios. Algunas de ellas se enuncian a continuación y sugieren llegar a la conclusión de que el proceso está fuera de control si

se presenta cualquiera de las siguientes situaciones.

Regla 1: Un punto fuera de las líneas de control de 3 - sigma

Regla 2: 2 puntos consecutivos ó 2 puntos de 3 puntos consecutivos más allá de los límites de advertencia 2 -sigma.

Regla 3: 4 de 5 puntos consecutivos se encuentran a una distancia de un sigma o más de la línea central.

Regla 4: 8 puntos consecutivos se hallan al mismo lado de la línea central.

observaron que las muestras 22, 23 y 24 presentan patrones de no aleatoriedad. Esto es debido a que las observaciones 22 y 23 corresponden a un conjunto de 3 muestras con al menos 2 más allá de 2 desviaciones estándar y la observación 24 corresponde a un conjunto de 5 muestras con al menos 4 más allá de una desviación estándar, ambos patrones fueron remarcados en un círculo gris y otro negro respectivamente en la Figura 44.

Figura 44. Producción de un grupo de alumnos

En una segunda etapa de esta actividad los profesores plantean a los alumnos la siguiente situación: Luego de la muestra 30 en la producción se realiza un ajuste de la máquina, por lo tanto, se propuso la siguiente pregunta: **¿Qué es lo que se observa después del ajuste?**

En la Figura 45 se puede observar la producción de un grupo de alumnos que detectan una disminución, a partir de la muestra número 31, en la media del proceso. Esto sería beneficioso por tratarse de árboles de levas defectuosos.

Figura 45. Protocolo de un grupo de estudiantes.

Luego los estudiantes decidieron trabajar sobre la siguiente pregunta: **¿Cuáles serían los parámetros en control desde la muestra 31 a la muestra 54?** Esto requiere calcular otros límites de control desde la muestra 31 a la 54 a lo que arrojó los siguientes resultados que se observan en la Figura 46:

Figura 46. Carta de control p.

La estimación de la proporción de árboles de leva defectuosos pasó de ser 0,23 a ser 0,11 (lo cual implicó un sesgo o corrimiento en la media y una disminución de la variación del proceso), además a partir de la muestra 31 no se observaron señales de alarma. Lo mismo se puede ver en la Carta np (Figura 47). El ajuste de la máquina

permitió reducir la proporción media de árboles de levas defectuosos, así como también la variabilidad.

Figura 47. Carta de control np .

Se realizó un análisis de la muestra completa antes y después del ajuste de la máquina, se puede observar que la media de árboles de leva defectuosos por muestra pasó de ser 12 a ser 5,54 piezas, además se observa menos variación a partir de la muestra número 31 (Ver Figura 47).

10.6.1. Resumen del Encuentro 6

Los grupos realizan un análisis de los elementos teóricos, relacionada con el control estadístico de calidad, que les permitió analizar una serie temporal para una característica cualitativa de calidad de una muestra de árbol de levas. Calculan los parámetros de una carta de control de una variable cualitativa o atributo para dos situaciones a partir del conocimiento de los diferentes ajustes de la máquina. Lograron interpretar y analizar, a través de la misma, el comportamiento de la producción. Utilizaron software estadístico como herramientas de exploración de la muestra. Realizaron la carta de control que consideraron pertinente, explicaron el procedimiento seguido con el soporte del software utilizado e interpretan los resultados obtenidos acorde a la propuesta, se puso de manifiesto la dialéctica de la lectura y de la escritura.

Debieron explorar distintas formas de representación de los datos para buscar la más adecuada en cada instancia. Para la ejecución de esta actividad, se plantearon: ¿Qué técnica utilizar? y ¿Cuál es la tecnología involucrada?, para realizar este análisis praxeológico investigaron los elementos tecnológicos-teóricos relativos a cartas de control para muestras temporales de tipo atributo (Cartas U, Cartas C, Cartas p , Cartas np) y dentro de ellas se centran sólo en las cartas p y cartas np , dejando en nivel de *gris* los elementos tecnológicos-teóricos, relativos a la construcción de otras cartas de control para variables cualitativas o atributo.

Cada respuesta construida por los grupos de estudiantes, en base a los media disponibles, fue compartida con el resto de la clase con el objeto de validar el resultado de su análisis. El Aporte de puntos de vista personales y el debate con otros, puso de manifiesto la dialéctica de la difusión y de la recepción.

Como parte del análisis, algunos alumnos optaron por hacer una carta de control p para monitorear la proporción de árboles de leva defectuosos. Otros optaron por hacer una carta de control para monitorear la cantidad de árboles de leva defectuosos mediante una carta de control np . Esta traducción de un gráfico a otro requiere un cambio en la forma de comunicar la información, e interpretar el gráfico a nivel descriptivo.

En esta actividad lograron ejecutar las siguientes tareas: detallar las características de la muestra, a través de sus partes relevantes, construir un gráfico para mostrar el comportamiento de los datos atendiendo al tipo de variable considerada (Carta p o np), reducir la información mediante números que reflejen lo esencial de su distribución, reescribir la información obtenida a partir del uso del software, comparar para establecer relaciones de semejanza o diferencia entre dos representaciones de un conjuntos de datos (cartas p o np), contrastando sus gráficos y sus medidas resumen (media, desviación estándar y límites de control) y finalmente interpretar los resultados. Esta AEI produjo la emergencia de una técnica que permitió llegar a una R♥.

En la Tabla 11 se muestran las preguntas derivadas que se lograron trabajar en este encuentro, las organizaciones matemáticas estudiadas y los media utilizados.

Preguntas Derivadas	OM	Media
<p>Q_{3,0}¿Cómo describiría el comportamiento de los árboles de leva defectuoso de la fábrica antes del ajuste de la máquina y después de él?</p> <p>Q_{3,1}¿Cuál sería la característica de calidad deberían monitorear y como lo harían?</p> <p>Q_{3,2} ¿Existen señales de alarma?</p> <p>Q_{3,3} ¿Existe algún patrón de no aleatoriedad en el proceso?</p> <p>Q_{3,4}¿Qué es lo que se observa después del ajuste de la máquina?</p> <p>Q_{3,5}¿Cuáles serían los parámetros en control desde la muestra 31 a la muestra 54?</p>	<p>Aproximación Normal a la distribución Binomial</p> <p>Aproximación Normal a la distribución de Poisson</p> <p>Cartas de Control de control por atributos.</p> <p>Cartas p y np.</p> <p>Reglas de Western Electric</p> <p>Sesgo y Precisión (Cambio en la media y en la varianza)</p>	<p>Material docente de la asignatura disponible en el aula virtual.</p> <p>Profesores.</p> <p>Internet disponible en las computadoras del aula.</p> <p>Libros de probabilidades y estadística.</p>

Tabla 11: Resumen del Encuentro 6.

11. ENCUESTA A LOS ESTUDIANTES

Al finalizar los encuentros se les solicitó a los alumnos una breve encuesta que fue entregada en la plataforma Moodle mediante un link al módulo de formularios de Google. La misma fue anónima y estuvo compuesta por diez ítems, se realizó una selección de los mismos.

La encuesta fue la siguiente:

- 1) Considera que el curso y su contenido le brindó una:
 - nueva visión sobre las temáticas involucradas.
 - nueva información que no conocía.
 - mejor comprensión en los contenidos ya conocidos.
- 2) Logró darle una utilidad al concepto de la *Distribución Normal*, mayor respecto a lo visto durante su carrera de grado.
- 3) Logró otorgarle un significado a la *Distribución Normal* para el estudio de procesos.
- 4) Consiguió interpretar el concepto de intercambiabilidad de una pieza, su importancia en la temática de calidad, y el rol que juega la estadística en ello.
- 5) El curso le dio una utilidad a las herramientas estadísticas en temas de su interés.
- 6) ¿Le parece que los temas estudiados tendrían una utilidad importante para su profesión?
- 7) Considera que un mejor conocimiento de las herramientas estadísticas es fundamental para lograr una mejor interpretación del concepto de control de un proceso.

Las respuestas a las preguntas 2), 3), 4), 5) 6) y 7) (Ver Figura 48, Figura 49, Figura 50, Figura 51, Figura 52, Figura 53 y Figura 54) tienen categorías van de 1 a 5, siendo la más baja En desacuerdo y la más alta Muy en acuerdo.

Figura 48: Respuesta al cuestionario, pregunta 1.

Figura 49: Respuesta a la pregunta 2 del cuestionario.

Figura 50: Respuestas a la pregunta 3 del cuestionario.

Figura 51: Respuestas a la pregunta 4 del cuestionario.

Figura 52: Respuestas a la pregunta 5 del cuestionario.

La respuesta a la pregunta 6), tiene categorías de 1 a 5, siendo la más baja Nada y la más alta Mucho (Ver Figura 53).

Figura 53: Respuestas a la pregunta 6 del cuestionario.

Figura 54: Resultados a la pregunta 7 del cuestionario.

De los gráficos se desprende que el 44% de los alumnos opina que el curso les brindó una nueva visión sobre las temáticas involucradas, el 56% logró otorgarle a la *Distribución Normal* un significado para el estudio de control de procesos, más del 66% logró darle mayor utilidad al concepto de la *Distribución Normal* que el estudiado con anterioridad y el 100% de los alumnos opinan que los temas estudiados tendrían importancia para su profesión.

Otra pregunta interesante fue referida a los programas utilizados a lo largo del curso, el mismo refleja que les gustó el uso del código R por ser de uso libre y por ser muy aplicado y el Statgraphics por poseer un entorno visual relativamente “amigable”. (Ver Figura 55)

9) ¿Cuál de los programas utilizados en el curso le pareció más interesante y por qué?
<i>el R . es libre y lo usan todos.</i>
<i>"R"; por su flexibilidad y libertad de acceso al programa.</i>
<i>el programa que mas interesante me pareció es R, porque es una herramienta poderosa que tiene muchas interacciones con otros programas. adicional el Statgraphics me pareció didáctico y con una interfaz muy amigable</i>
<i>Statgraphics, porque no necesita una codificación para el trabajo, es más fácil de manejar el programa y los resultados son más fáciles de interpretar porque da todo muy completo</i>
<i>EL R, porque permite usar el método de punto de cambio.</i>
<i>punto de cambio, porque es aplicable a otros conceptos ademas de los procesos industriales</i>
<i>Todos los programas utilizados son de utilidad, pero el lenguaje R me parecio mas interesante.</i>
<i>La herramienta StatGraphics Centurión la considero muy útil y relevante en el ámbito estadístico, tanto en el sentido de su funcionalidad como así también en relación a su practicidad y su "facilidad" de uso, con datos y aclaraciones pertinentes. Fue grato tener conocimiento de la existencia de esta herramienta.</i>
<i>El lenguaje R fue el más interesante ya que es de código abierto.</i>

Figura 55: Resultados a la pregunta 9 del cuestionario.

12. CONCLUSIONES Y TRABAJOS A FUTURO

12.1. Conclusiones

En este trabajo de investigación se expusieron los resultados de una propuesta en el marco de la TAD, diferente a las existentes, que pretende el estudio con sentido en este caso de la organización matemática Distribución Normal, a partir de la búsqueda de respuestas a un problema de control de calidad.

A continuación, exponemos para cada pregunta de investigación presentada los resultados obtenidos.

➤ ***¿Cómo diseñar una AEI para el estudio de temas del área de probabilidades y estadística para ser implementado en una Facultad de Ingeniería?***

Se logró diseñar una AEI que le diera sentido al estudio de la OM Distribución Normal, a partir de buscar respuesta a una pregunta generatriz de interés y utilidad en múltiples disciplinas de la ingeniería como es el *control de calidad, estandarización de procesos* y la *fabricación de piezas intercambiables*, de importancia en un mundo globalizado en el que se busca la calidad y la perfección en los procesos industriales.

Se diseñó un MPR que muestra las OM (de estadística y probabilidades) a que daría lugar el estudio de la pregunta generatriz: **Q₀: ¿Cómo producir partes intercambiables para automóviles?**

Estas OM son: Distribución Normal, Teorema Central del Límite, aproximación Normal a la Distribución Binomial y a la Distribución de Poisson y el Control Estadístico de Procesos y Control de Calidad y Cartas de Control. Todos elementos teóricos de importancia profesional para estudiantes de carreras de ingeniería.

➤ ***¿Cuáles organizaciones matemáticas se construyen al implementarse una Actividad de Estudio de Investigación diseñada para el estudio de la Distribución Normal?***

La Pregunta generatriz dio inicio a la AEI y permitió el estudio (o reencuentro en algunos de los participantes) con sentido de las siguientes OM:

- Distribución Normal
- Media
- Desviación

- Sesgo y Precisión
- Histograma
- Cartas de tolerancia
- Cartas de Control
- Test de Normalidad
- Distribución del promedio de variables aleatorias
- Índices de Capacidad para un proceso con Distribución Normal
- Aproximación Normal a la distribución Binomial
- Aproximación Normal a la Distribución de Poisson

Además, se estudiaron diversas técnicas para la construcción y análisis de las cartas de control, según sean los datos:

Gráfico de control para variables:

- Cartas de control R o S.
- Cartas de control de sumas acumuladas.

Gráficos de control por atributos:

- Cartas de control p (para la proporción de artículos defectuosos)
- Cartas de control np (para la cantidad de artículos defectuosos).
- Cartas U y cartas C para el número de defectos por unidad.

También se pudieron realizar actividades que abordaran todas sus aplicaciones como el Teorema Central del Límite, la aproximación Normal a la distribución Binomial y la aproximación Normal a la distribución de Poisson.

Se puso en juego una actividad de estudio e investigación (AEI) que requirió determinar qué saberes eran pertinentes y funcionales para la construcción de las respuestas. En el grupo de alumnos de la carrera de Ingeniería Industrial algunas actividades pudieron implicar algún reencuentro con algunos conceptos, con utilización de fórmulas ya conocidas en algunos casos, pero desde la argumentación del rol de la Distribución Normal.

En general, se observó, que los métodos gráficos de representación estadística de datos se encontraban disponibles en los saberes previos del grupo de alumnos, pero muchos debieron hacer un reencuentro con esos recursos. Por ello es que todos los estudiantes del curso prefirieron un paquete estadístico. De todos modos los cálculos podrían haberse calculado utilizando solamente planillas de cálculo. Hay que destacar que como el curso estaba destinado a estudiantes avanzados de ingeniería y alumnos graduados, la utilización de un software no fue un obstáculo. (Ver Figura 55)

Además, la pregunta generatriz dio lugar no solo al estudio de las OM relacionadas a la Distribución Normal, si no que se le dio sentido ya que viene a resolver problemas del tipo de “*Control de la calidad de las autopartes, producción en masa, líneas de ensamblaje, partes intercambiables*”, tan importantes para un ingeniero, que en cursos habituales no son tratados.

También se trabajó con unidades y medidas de datos reales que no siempre es habitual en los cursos de probabilidades y estadísticas donde se realizan los cálculos y las tareas a partir de datos de “libro” sin ningún significado para el alumno, que no permiten luego un análisis de los mismos. Esta observación es fundamental, ya que para un ingeniero la obtención, búsqueda y análisis de datos será de suma importancia pen su actividad profesional.

➤ ***¿Cómo se caracteriza, en el marco de la TAD, el proceso de estudio llevado a cabo a partir de la implementación de una AEI en una Facultad de Ingeniería?***

Para caracterizar y comprender el desarrollo de una AEI en el marco de la TAD, es viable hacerlo mediante las dialécticas. En un proceso de estudio e investigación se deben manifestar por lo menos algunas de ellas en los estudiantes. En este caso, durante la implantación de la AEI se pusieron de manifestó algunas de las dialécticas mencionadas en el marco teórico, no todas, ya que en un dispositivo didáctico de este tipo, con encuentro arreglados, el encuentro con las praxeologías a estudiar, no vehiculiza siempre la manifestación de todas las dialécticas.

La dialéctica de “las preguntas y de las respuestas”, estuvo presente durante todos los encuentros. En el primer encuentro, el momento de conocer la pregunta que guiaría

el proceso de estudio, generó un amplio debate, dialogo, interés y aportes de los participantes que fueron desglosando el significado de cada palabra de la pregunta.

Además, se observó en menor medida la manifestación de la dialéctica de “lo individual y de lo colectivo” (o de la autonomía y de la sinonimia), ya que no hubo mucha interacción entre los participantes, los grupos eran reducidos y los aportes en algunos de los momentos eran muy personales.

La búsqueda de respuestas en Libros y en internet, pusieron en juego la dialéctica del “estudio y de la investigación” y la de “las cajas negras o claras”. Quedó a decisión de los estudiantes el decidir el nivel de “gris” de las distintas $R^\diamond$ obtenidas. A su vez, esta búsqueda en diferentes fuentes de información requiere determinar qué saberes son pertinentes y funcionales para con la construcción de la respuesta $R^\heartsuit$.

También estuvo presente la dialéctica de la “difusión y de la recepción”, en los momentos de acordar, difundir lo obtenido por cada uno de los participantes y/o de los grupos.

La dialéctica del análisis y de la síntesis, praxeológica y didáctica, se vio manifiesta por parte de los docentes del curso, toda vez que se analizaron las preguntas propuestas por los alumnos y se debía decidir qué estudiar y hasta donde de las diferentes obras para dar una respuesta a la AEI. Como así también el análisis a priori de la puesta en práctica.

La dialéctica de “entrar y salir de tema” estuvo presente cuando requirieron buscar en tutoriales temas sobre el uso del software.

Finalmente mencionar que la AEI aquí presentada fue viable de realizar en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata, el proceso de estudio se organizó en torno a una pregunta, hubo gestos de investigación en los alumnos, propios de una pedagogía de la investigación y del cuestionamiento del mundo, con lo que consideramos que se lograron los objetivos propuestos.

Por otro lado, si bien es cierto que la AEI se implementó en un espacio arreglado, con un grupo reducido de estudiantes de grado y de posgrado, este estudio serviría de base para investigaciones futuras que pretendan implementar esta u otra AEI en cursos habituales de matemática en esta facultad u en otras instituciones educativas, en relación

a cuáles cambios metodológicos, pedagógicos e institucionales se requerirían para poder ser implementadas. Esto último requería un análisis más profundo que en el marco de la TAD es posible realizarlo utilizando el concepto de los Niveles de Codeterminación Didáctica.

12.2. Trabajos a futuro

Esta propuesta abriría las puertas para pensar en otras AEI para el estudio de esto u otros temas de probabilidades y estadística, y además evaluar las posibles restricciones de la enseñanza actual de la noción de Distribución Normal en el ámbito en particular de la Facultad de Ingeniería de la UNLP.

Las OM estudiadas surgieron a partir de una pregunta que se relaciona con el *Control estadístico de procesos* y con las *Cartas de Control*, y de buscar dada una cantidad de datos relativos a un proceso, su variabilidad. En la mayor parte de los centros de producción de importancia se aplican estas técnicas estadísticas, con el objeto de realizar un monitoreo de la producción, mantener un nivel adecuado de calidad de los productos fabricados, controlar la estabilidad y la capacidad de la misma. Además, las Cartas de Control permiten realizar el monitoreo de variables de importancia en el desarrollo de un proceso en el tiempo y detección temprana de la desviación de los valores de la variable monitoreada respecto a un valor y límites determinados a priori, y de esta manera detectar cambios e identificar posibles causales asignables a los mismos. Cuando hablamos de procesos, no sólo pensamos en procesos de fabricación, de producción industrial de materiales, sino que también es posible analizar con estas herramientas estadísticas los *procesos educativos*, para conseguir la estabilidad o mejora de la calidad educativa mediante el seguimiento en el tiempo de algunas variables o atributos como pueden ser el rendimiento académico, el tránsito de los estudiantes en las instituciones, que se ven afectado por múltiples factores, externos e internos a la institución.

Esto implica que múltiples preguntas derivadas podrían proponerse para dar lugar al estudio de la OM relativa a la Distribución Normal, de una pregunta generatriz más amplia como podría ser: **¿Cómo analizar un proceso en el tiempo? ¿Cómo estabilizar un proceso? ¿Es estándar el proceso?** Las preguntas derivadas de éstas podrían tener que ver con el estudio de procesos en diversos ámbitos de la ciencia, que a partir de la búsqueda de datos de un proceso en el tiempo (educativo, tecnológico,

industria, otros), le darían al profesor una variedad de situaciones para implementar una AEI en cursos de probabilidades y/o estadística. Además, la tecnología a utilizar para el cálculo de las cartas de control, puede sin problema ser adaptada al curso en que se implemente la experiencia, de acuerdo a los conocimientos y dispositivos y software disponibles. Las cartas de control, sus gráficas y análisis pueden ser realizadas también no sólo con paquetes estadísticos, sino también con Planillas de Cálculo, y con software libre y educativo como es GeoGebra.

Además, la pregunta generatriz que dio inicio a la AEI presentada en esta tesis, podría continuar y dar lugar a más preguntas derivadas que permitirían el estudio por ejemplo del *Análisis estadístico de Punto de Cambio*. Este tipo de análisis matemático avanzado es de importancia para detectar cambios en un proceso (Marañón Di Leo, Calandra, Delnero, 2013). El Análisis de Punto de Cambio es una parte del Control Estadístico de Calidad que aparece por primera vez alrededor de 1954 y en las últimas tres décadas ha sido ampliamente estudiado por investigadores e ingenieros de diferentes áreas del conocimiento y podría ser propuesta su enseñanza en curso de posgrado para ingenieros y profesionales en diversas ciencias, con una modalidad como la que se presentó para la AEI que se expone en esta tesis. Además, el concepto de proceso es aplicable en diversas ciencias, en las que puede ser de interés estudiar cambios en el tiempo, por ejemplo, procesos educativos donde el tiempo aquí pueden ser años; procesos industriales, donde el tiempo puede ser días, procesos sociales y tecnológicos, entre otros.

Este trabajo podría contribuir al desarrollo de nuevas secuencias didácticas en el área de la estadística o en otras áreas promoviendo la adquisición del aprendizaje a través de situaciones contextualizadas, con la finalidad de mejorar los aprendizajes, y técnicas de estudio de los alumnos.

13. BIBLIOGRAFÍA

- Ángel, M.E., Fernández, G. y Polola, L. (2007). Génesis y evolución histórica de los conceptos de probabilidad y estadística como herramienta metodológica. Un caso particular en la Enseñanza Universitaria. *Revista de educación matemática. Número especial: Trabajos de Investigación y Propuestas de Enseñanza – 2007*.
- Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J.M. y Roa, F. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, Volumen* (83), 7-18.
http://www.sineuon.org/numeros/numeros/83/Monografico_01.pdf
- Bosch, M. y Gascón, J. (2010). Fundamentación antropológica de las organizaciones didácticas: de los “talleres de prácticas matemáticas” a los “recorridos de estudio e investigación”. En A. Bronner, M. Languier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade & C. Ladage (Eds.) *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (49-85), Montpellier, Francia: IUFM de l'Académie de Montpellier.
<http://www.atd-tad.org/wp-content/uploads/2012/05/mariannaJosep-CITAD-II-2010.pdf>
- Brousseau, G. (1986). "Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques". *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 33-115.
- Calandra, M.V. y Costa, V.A. (2015). La problemática de la enseñanza y aprendizaje del concepto de variable aleatoria continua y de función de densidad de probabilidad. *IV Jornadas de Enseñanza e Investigación Educativa en el Campo de las Ciencias Exactas y Naturales.*: Departamento de Ciencias Exactas y Naturales Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación (UNLP), La Plata, Argentina.
- Calandra M.V. y Costa, V.A. (2016). Exploración bibliográfica sobre la enseñanza a nivel universitario de los conceptos de variable aleatoria y función de probabilidad. Segundo Congreso Internacional de Enseñanza De Las Ciencias y La Matemática (2 CIECYM) Tercer Encuentro Nacional de

- Enseñanza de la Matemática (3ENEM). Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Tandil, Argentina
- Calvo, B. (1992). Etnografía de la educación. *Nueva Antropología*. 12(42), 9-26. México, No citado.
- Camacho Ríos, A. (2010). Utilización de un Modelo Praxeológico para el Desarrollo de Organizaciones Didácticas. *Revista digital Matemática, Educación e Internet*, 10(2), Recuperado de:
https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/ARTICULOS_V10_N2_2010/A_Camacho_Utilizacion_de_un_modelo_praxeologico_V10_N2_2010/1.html
- Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266.
- Chevallard, Y. (2004). Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire. Sitio web de Yves Chevallard - Textes et publications [en línea] Recuperado de: <http://yves.chevallard.free.fr/>
- Chevallard, Y. (2005). La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire: transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire. Sitio web de Yves Chevallard - Textes et publications [en línea] Recuperado de: <http://yves.chevallard.free.fr/>
- Chevallard, Y. (2006). Les mathématiques à l'école et la révolution épistémologique à venir. Sitio web de Yves Chevallard - Textes et publications [en línea] Recuperado de: <http://yves.chevallard.free.fr/>
- Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. En Ruiz Higuera, L., Estepa Castro, A. y García García, F. J. (eds), Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, Universidad de Jaén, 705-746.
- Chevallard, Y. (2009). La notion de PER: problèmes et avancées. Sitio web de Yves Chevallard - Textes et publications [en línea] Recuperado de <http://yves.chevallard.free.fr/>
- Chevallard, Y. (2012). Teaching mathematics in tomorrow's society: A case for an oncoming counterparadigm. Texte préparatoire à la regular lecture qui sera donnée dans le cadre du congrès ICME-12 (Séoul, 8-15 juillet 2012).

- Chevallard, Y. (2013). Des Questions? Journal Du Séminaire TAD/IDD. Section 4. 12-04-2013. Recuperado el 03 de junio de 2013, de: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/journal-tad-idd-2012-2013-4.pdf>
- Clifford, J. (1995). Sobre la autoridad etnográfica. En: *Dilemas de la Cultura*. Barcelona. Ed. Gedisa.
- Devore, J.L. (2008). *Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias*. Séptima edición. México: Cengage Learning.
- Gutiérrez, R.B. y Grima Cintas, P. (2013). El histograma como un instrumento para la comprensión de las funciones de densidad de probabilidad. Probabilidad Condicionada. *Revista de didáctica de la Estadística*, (2), 229-235.
- Hawkins, A., Joliffe, F. y Glickman, L. (1992). *Teaching statistical concepts*, Essex: Longman.
- Huck, S., Cross, T.L. y Clark, S.B. (1986). Overcoming misconceptions about z-scores, *Teaching Statistics*, 8(2), 38-40.
- León, J. (2007). Enseñando estadística a futuros ingenieros. *Scientia et Technica*, Año XIII, No 34. Universidad Tecnológica de Pereira, Colombia.
- Maltz, A.L. (2015). Un enfoque en la enseñanza de la distribución Normal. *Revista de Educación Matemática* 30(1), 34-37.
- Marañón Di Leo, J., Calandra, M.V. y Delnero, J.S. (2013). Detección de eventos turbulentos mediante la aplicación de algoritmos de punto de cambio, *Mecánica Computacional*, Vol XXXII, 1297-1308.
- Mac Gillivray, H.L. (2002b). Lessons from engineering student projects in statistics, *Proceedings of the Australasian Engineering Education Conference*, 225-230. Australia: The Institute of Engineers.
- Meyer, P.L. (1992). *Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas*, Wilmington: Addison-Wesley Iberoamericana.
- Minitab, LLC (2020). Getting Started with Minitab 19, “Datos sobre longitud de los árboles de levas”. Recuperado de: <https://support.minitab.com/es-mx/datasets/control-charts-data-sets/camshaft-length-data/>
- Montgomery, D.C. y Runger, G.C. (2006). *Probabilidad y estadística aplicadas a la ingeniería*. México: Limusa Wiley.

- Montgomery, D.C. (1991). *Control Estadístico de Calidad*. Grupo Editorial Iberoamérica.
- Nardecchia, G. y Hevia, H. (2003). Dificultades en la enseñanza del concepto de variable aleatoria. *V Simposio de Educación Matemática*, Chivilcoy, Argentina.
- Navidi, W. (2006). *Estadística para ingenieros y científicos*. México: McGraw Hill.
- Parra, V. y Otero, M.R. (2018) Antecedentes de los Recorridos de Estudio e Investigación (RED): características y génesis, *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*. 13(2), 1-18.
<https://ppct.caicyt.gov.ar/index.php/reiec/article/view/14425>
- Otero, M.R., Fanaro, M.R. y Llanos, V.C. (2013). La Pedagogía de la Investigación y del Cuestionamiento del Mundo y el Inquiry: un análisis desde la enseñanza de la Matemática y la Física, *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, 8(1), 77-89.
<https://www.redalyc.org/pdf/2733/273327598007.pdf>
- Ruiz, B.R. (2006). *Un Acercamiento Cognitivo y Epistemológico a la Didáctica del Concepto de Variable Aleatoria*. Tesis de Maestra en Ciencias en Matemática Educativa, Instituto Politécnico Nacional, CICATA, Unidad Legaria, México.
<https://tesis.ipn.mx/handle/123456789/1745>
- Ruiz, B.R. y Albert, J.A. (2005). El Caso de la Variable Aleatoria. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 18, 185-191.
<https://www.clame.org.mx/documentos/alme%2018.pdf>
- Ross, S.M. (2014). *Introduction to Probability and Statistics for Engineers and Scientists*, Academic Press.
- Wilensky, U. (1995). Learning probability through building computational models”, en Carraher, D y Meira, L. (Eds.), *Proceedings of the 19th PME Conference, Recife, Brazil: PME*, 3, 152-159.
- Vardeman, S.R. (2002). Providing "real" context in statistical quality control courses for engineers. En Phillips, B. (Ed), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics*. CD-ROM, Ciudad del Cabo: IASE.

14. ANEXO.

Encuesta realizada a los estudiantes

Preguntas

*Obligatorio

Considera que el curso y su contenido le brindó una: *

☐ mejor comprensión en los contenidos ya conocidos

☐ nueva visión sobre las temáticas involucradas

☐ nueva información que no conocía

El curso le dio una utilidad a las herramientas estadísticas en temas de su interés. *

1 2 3 4 5

En desacuerdo ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ Muy en acuerdo

El curso le permitió otorgarle a la estadística una utilidad práctica como herramienta en el control de la calidad en procesos.

1 2 3 4 5

En desacuerdo ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ Muy de acuerdo

Consiguió interpretar el concepto de intercambiabilidad de una pieza, su importancia en la temática de calidad, y el rol que juega la estadística en ello. *

1 2 3 4 5

En desacuerdo ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ Muy en acuerdo

Considera que un mejor conocimiento de las herramientas estadísticas es fundamental para lograr una mejor interpretación del concepto de control de un proceso. *

	1	2	3	4	5	
En desacuerdo	☐	☐	☐	☐	☐	Muy enacuerdo

Consiguió darle una utilidad práctica a los conceptos de variable aleatoria continua y discreta. *

	1	2	3	4	5	
Desacuerdo	☐	☐	☐	☐	☐	Acuerdo

Logró otorgarle un significado a la distribución Normal para el estudio de procesos. *

	1	2	3	4	5	
Desacuerdo	☐	☐	☐	☐	☐	Acuerdo

Logró darle una utilidad al concepto de la distribución Normal, mayor respecto a lo visto durante su carrera de grado. *

	1	2	3	4	5	
Desacuerdo	☐	☐	☐	☐	☐	Acuerdo

I

¿Cuál de los programas utilizados en el curso le pareció más interesante y por qué? *

Tu respuesta

¿Le parece que los temas estudiados tendrían una utilidad importante para su profesión? *

	1	2	3	4	5	
Nada	☐	☐	☐	☐	☐	Mucho

[Enviar](#)