

PUBLICACIONES DEL OBSERVATORIO ASTRONÓMICO DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

DIRECTOR : ING° VIRGINIO MANGANIELLO

SERIE ASTRONÓMICA. — Tomo XXI, N° 1

ESTADÍSTICA DE LAS VELOCIDADES ABSOLUTAS ESTELARES

EN SU RELACIÓN CON LAS MAGNITUDES ABSOLUTAS Y LOS TIPOS ESPECTRALES

POR

ALEXANDER WILKENS



LA PLATA

OBSERVATORIO ASTRONÓMICO

—
1945

Imprenta y Casa editora CONI. Perú, 684. Buenos Aires

AUTORIDADES DE LA UNIVERSIDAD

(1945)

PRESIDENTE

DOCTOR ALFREDO D. CALCAGNO

VICEPRESIDENTE

INGENIERO AQUILES D. MARTINEZ CIVELLI

SECRETARIO GENERAL

DOCTOR BERNARDO ROCHA

Consejeros titulares : INGENIERO CARLOS S. BIANCHI, DOCTOR ANGEL CABRERA, DOCTOR MANUEL CIEZA RODRÍGUEZ, PROFESOR ERNESTO L. FIGUEROA, DOCTOR JOAQUÍN FRENGUELLI, DOCTOR EDUARDO F. GIUFFRÀ, INGENIERO AGRÓNOMO SALOMÓN HOROVITZ, INGENIERO VIRGINIO MANGANIELLO, INGENIERO AGRÓNOMO ANTONIO E. MARINO, DOCTOR FERNANDO MÁRQUEZ MIRANDA, DOCTOR JOSÉ PECO, DOCTOR ANTONIO G. PEPE Y DOCTOR VICENTE RUIZ.

Guarda Sellos : DOCTOR ALFREDO D. CALCAGNO.

Delegado Interventor de la Facultad de Medicina Veterinaria : DOCTOR CORADINO SBARIGGI.

Representantes de los alumnos : SEÑOR JUAN CARLOS FRANCO Y SEÑOR JULIO MARIO MARTÍN.

INSTITUTO DEL OBSERVATORIO ASTRONÓMICO

Y

ESCUELA SUPERIOR DE CIENCIAS ASTRONÓMICAS Y CONEXAS

DIRECTOR

INGENIERO VIRGINIO MANGANIELLO

SECRETARIO

AGRIMENSOR CARLOS ALBARRACÍN SARMIENTO

PERSONAL DOCENTE, CIENTÍFICO Y TÉCNICO

Jefes de Departamento y Profesores : DOCTOR BERNHARD H. DAWSON, INGENIERO SIMÓN GERSHÁNIK, SEÑOR JUAN JOSÉ NISSEN, INGENIERO NUMA TAPIA y DOCTOR ALEXANDER WILKENS.

Astrónomo de Primera : Agrimensor HUGO ARTURO MARTÍNEZ.

Geofísico : INGENIERO JOSÉ MATEO.

Geofísicos de Segunda : DOCTOR REYNALDO P. CESCO e INGENIERO ENRIQUE LEVÍN.

Astrónomo de Segunda : INGENIERO MIGUEL A. AGABIOS.

Astrónomo de Tercera : SEÑOR SILVIO MANGARIELLO.

Astrónomos de Quinta : AGRIMENSOR ÁNGEL A. BALDINI, DOCTOR CARLOS U. CESCO, AGRIMENSOR MIGUEL ITZIGSOHN, DOCTORES JORGE SAHADE y HERBERT WILKENS.

Ayudantes Astrónomos de Primera : SEÑORES RICARDO LUIS LASSALLE y RODOLFO LÓPEZ.

Ayudantes Geofísicos de primera : SEÑORES JULIO LENZI y JUAN C. NATALE.

Calculista : SEÑOR JORGE A. GARBARINO.

Ayudantes Astrónomos de Segunda : SEÑORES DOMINGO SANTIAGO SARMIENTO y PASTOR J. SIERRA.

Meteorólogo : SEÑOR GUILLERMO H. BOREL.

Calculistas Ayudantes : SEÑORITAS ANA GRIGORIEFF y HULDA ALICIA HARTMANN, SEÑOR FEDERICO A. THOMAS.

Auxiliar Geofísico : SEÑORITA SUZANA MARTÍNEZ SALAS.

Mecánico Especialista : SEÑOR GREGORIO PLOTNIKOFF.

PERSONAL ADMINISTRATIVO

Bibliotecario : SEÑOR ANDRÉS GUILLÉN.

Auxiliar : SEÑOR JOSÉ BLASETTI.

PERSONAL OBRERO, DE MAESTRANZA Y DE SERVICIO

1 Ebanista, 1 Albañil, 1 Jardinero, 3 Ordenanzas, 4 Peones jardineros, 1 Ayudante Mecánico, 1 Aprendiz Mecánico y 1 Cadete.

ESTADÍSTICA DE LAS VELOCIDADES ABSOLUTAS ESTELARES

EN SU RELACIÓN CON LAS MAGNITUDES ABSOLUTAS Y LOS TIPOS ESPECTRALES

En una memoria anterior relativa a la dinámica del sistema estelar : *La constitución dinámica de las estrellas de paralaje conocida estudiada especialmente en base a los movimientos lineales tangenciales* (Publicaciones del Observatorio Astronómico de la Universidad Nacional de La Plata, Serie astronómica, tomo XIV, 1939) he investigado los movimientos estelares con preferencia en base a los movimientos laterales, utilizando como material todas las estrellas del catálogo del Yale Observatory : *General Catalogue of Stellar Parallaxes* (1935) y las del *Catalogue of Bright Stars* (1930). Los resultados de la memoria citada se basan en los datos de 4500 estrellas con paralajes conocidas hasta 1935.

La presente publicación constituye una ampliación de la anterior, y expone una serie de consecuencias de carácter estadístico no investigadas en aquélla. Nos parece, por lo tanto, necesario y de interés investigar la influencia de los resultados de la citada memoria, especialmente respecto del nuevo valor de la velocidad solar, en cuestiones estadísticas fijadas por el título de este trabajo, asunto que ya otros autores han tratado también. Pero en el interés de la seguridad de los resultados hay que someter el material empleado hasta ahora, a otra suposición más, es decir, tomaremos en cuenta sólo las estrellas que, además del movimiento propio y paralaje, poseen también una velocidad radial conocida; de manera que nos quedan por deducir las velocidades espaciales, como base y argumento de las relaciones destacadas en el título de esta memoria. Pero mientras que en la anterior hemos utilizado 4500 estrellas basándonos en los catálogos del Yale Observatory, ahora, por la nueva condición, el número de las estrellas empleables, se reduce a sólo 1200, es decir a sólo 1/4 del material anterior. En el año 1921 W. Adams, G. Stroemberg y A. Yoy han ejecutado una investigación análoga titulada : *Relationship of absolute magnitude to space velocity* (*Astrophysical Journal*, tomo 54, julio-diciembre, 1921, también en *Contribution from the Mt. Wilson Observatory*, n° 210), con el material entonces existente, de modo que tengo que volver a una comparación de los resultados.

Al señor A. Guillén deseo expresar mi más vivo agradecimiento por la redacción del texto castellano. En los cálculos me ha ayudado muy efectivamente mi hija Gerda por lo cual me place agradecerle efusivamente.

§ 1. LA DEDUCCIÓN DE LAS VELOCIDADES ESPACIALES

Significando r' la velocidad radial y l' la velocidad lateral por 1 segundo, deducido según la fórmula :

$$l' = 4.74 \frac{\mu''}{\pi''}, \text{ resultan, siendo}$$

$$v = \sqrt{r'^2 + l'^2} \quad (1)$$

la velocidad espacial relativa de una estrella respecto del sol, las relaciones :

$$r' = v \cos \varphi \quad \text{y} \quad l' = v \sin \varphi \quad (2)$$

fijando φ el ángulo entre la dirección de v y la visual. Identificando entonces, sobre una esfera con el sol en el centro, como eje x la dirección al punto vernal, como eje y una dirección en la distancia de 90° en el ecuador, y como eje z la dirección al polo norte, las componentes correspondientes de v se ponen :

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v \cos (v, x) \\ v_y &= v \cos (v, y) \\ v_z &= v \cos (v, z) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Por eso, siendo ξ' , η' y ζ' las componentes de velocidad del sol relativas al centroide de las estrellas investigadas, las componentes de velocidad de la estrella relativas al centroide son :

$$\left. \begin{aligned} X' &= \xi' + v_x \\ Y' &= \eta' + v_y \\ Z' &= \zeta' + v_z \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

donde

$$\left. \begin{aligned} \xi' &= v_0 \cos D \cos A \\ \eta' &= v_0 \cos D \sin A \\ \zeta' &= v_0 \sin A \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

siendo ahora, en base a los resultados de mi investigación mencionada $v_0 = 9$ km por 1 segundo, y además $A = 270^\circ$ y $D = +33^\circ$. Resta, pues, la deducción de los cosenos dirección (v, x) , (v, y) y (v, z) .

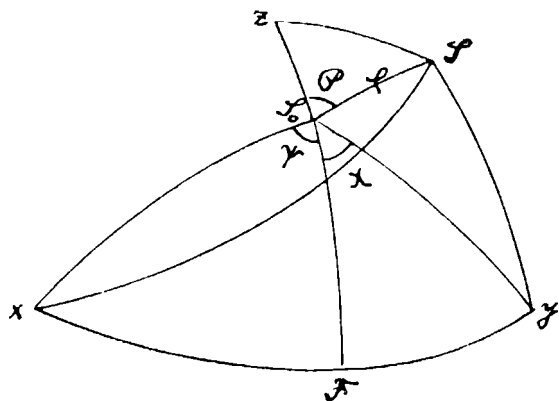


Figura 1

Por eso, designemos cualquier estrella sobre la esfera mencionada con S_0 (fig. 1) y ubiquemos la dirección del movimiento propio sobre el gran círculo S_0S , siendo S_0S el ángulo entre la visual y la dirección de la velocidad v , es decir, al ángulo φ , ya mencionado. Por medio del triángulo xS_0S resulta :

$$\cos (v, x) = \cos (S, x) = \cos (xS_0) \cos \varphi + \sin (xS_0) \sin \varphi \cos (xS_0S) \quad (6)$$

Siendo α y δ las coordenadas ecuatoriales de la estrella S_0 , además zS_0F perpendicular al ecuador xy , y el ángulo $xS_0F = \psi$, resulta la relación : $xS_0S = \psi + 180 - P$, siendo P el ángulo de posición del movimiento propio. Los ángulos xS_0 y ψ se deducen por las relaciones siguientes en el triángulo xS_0F :

$$\left. \begin{aligned} \cos (xS_0) &= \cos \alpha \cos \delta \\ \sin (xS_0) \sin \psi &= \sin \alpha \\ \sin (xS_0) \cos \psi &= \cos \alpha \sin \delta \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Análogamente resulta el ángulo $(v, y) = (Sy)$ por medio del triángulo yS_0S en base a la fórmula :

$$\cos (v, y) = \cos (S, y) = \cos (yS_0) \cos \varphi + \sin (yS_0) \sin \varphi \cos (yS_0S) \quad (8)$$

donde el ángulo $(yS_0S) = 180 - P - \chi$, mientras que (yS_0) y χ se deducen por medio del triángulo yS_0F , de modo que :

$$\left. \begin{aligned} \cos (y S_0) &= \operatorname{sen} \alpha \cos \delta \\ \operatorname{sen} (y S_0) \operatorname{sen} \chi &= \cos \alpha \\ \operatorname{sen} (y S_0) \cos \chi &= \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \delta \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Finalmente, resulta $(vz) = (Sz)$ por el triángulo zSS_0 :

$$\cos (vz) = \cos (Sz) = \operatorname{sen} \delta \cos \varphi + \cos \delta \operatorname{sen} \varphi \cos P \quad (10)$$

Por consiguiente, conocemos ahora, según (4) las componentes X' , Y' y Z' de las velocidades espaciales absolutas v_a , de modo que las coordenadas de dirección correspondientes de v_a , es decir α' y δ' resultan por las relaciones :

$$\left. \begin{aligned} X' &= v_a \cos \delta' \cos \alpha' \\ Y' &= v_a \cos \delta' \operatorname{sen} \alpha' \\ Z' &= v_a \operatorname{sen} \delta' \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Después de haber calculado estas coordenadas esféricas para 1123 estrellas, se ha hecho el paso directo a las coordenadas galácticas por medio de las tablas del Lund Observatory (*Tables for the conversion of equatorial coordinates into galactic coordinates*, by J. Ohlsson, *Annals of the Observatory of Lund*, n° 3, 1932), al mismo tiempo respecto de las coordenadas de las estrellas y sus direcciones espaciales de velocidad. La magnitud absoluta M , atribuída a cada magnitud aparente m se dedujo según la fórmula conocida : $M = m + 5 + 5 \log \pi''$. Los espectros correspondientes se tomaron del catálogo Yale mencionado.

La siguiente tabla se compone de todas las estrellas a considerar, 1123, como ya se dijo. La primera columna contiene el número corriente; la segunda el correspondiente del Catálogo Yale (paralajes); la tercera las coordenadas galácticas l y b de la estrella, la cuarta las coordenadas galácticas l y b de las velocidades absolutas; la quinta la magnitud absoluta M ; la sexta el espectro Sp , y la séptima la velocidad absoluta espacial v_a . Publicamos el material aplicado en esta forma, porque servirá todavía más tarde como fundamento de otras investigaciones.

CATÁLOGO

Nr.	Yale	λ	β	l	b	M	Sp	v_a	Nr.	Yale	λ	β	l	b	M	Sp	v_a
1	5101	0°	+28°	32°	-46°	+1.2	A3	17.3	51	5888	15°	-2°	76	+30°	+0.4	Fo	12.7
2	6714	0	-47	90	+8	-1.1	B5p	3.5	52	5657	16	+8	74	+6	+2.2	A3	21.1
3	4887	2	+40	170	0	+0.5	Fo	12.1	53	5670	16	+7	307	+20	+8.1	Mo	44.9
4	4467	2	+60	326	+29	+1.4	K5	19.2	54	7312	16	-70	325	+21	+1.4	Ko	31.0
5	6433	2	-33	343	-80	+1.0	Ko	76.2	55	4608	16	+54	138	-13	+1.4	A2	22.9
6	4504	3	+58	86	+60	-0.2	Ko	14.3	56	5200	17	+28	105	+19	+1.4	A5	20.4
7	5132	3	+26	64	+37	var.	Mb	23.4	57	5739	17	+5	231	-17	var.	F5	14.1
8	5892	3	-8	139	+15	-0.4	B9	5.5	58	5857	17	0	250	-51	-0.4	G5	17.0
9	6554	3	-37	148	-9	+5.9	Ko	18.6	59	5334	18	+22	209	+54	+4.3	Ko	20.1
10	5249	3	+21	46	+12	+1.0	A5	30.4	60	5825	18	+3	296	-5	+4.6	F5	9.7
11	5881	4	-7	226	-52	+2.1	Fo	11.1	61	4949	18	+40	258	+43	+1.2	Fo	20.5
12	7226	4	-67	107	-31	+1.3	G5	53.5	62	5407	18	+19	310	-25	+2.8	Fo	14.7
13	6082	5	-16	154	+8	+0.1	cmp	21.6	63	6498	18	-29	123	-36	+7.4	Ko	43.4
14	5187	5	+25	138	+68	+0.5	B9	38.9	64	6031	19	-7	273	+49	+0.3	B8	28.8
15	4931	6	+39	232	+48	-0.7	Ko	20.8	65	4332	16	+66	22	-21	+3.7	F2	18.8
16	6895	6	-53	219	+46	-1.9	B3	60.0	66	5493	19	+16	29	-16	-0.6	K5	27.4
17	7044	6	-59	193	-50	+3.2	F5	25.2	67	5593	20	+13	29	-2	+0.0	Ko	56.5
18	7188	6	-66	158	+5	+8.4	Ma	23.7	68	5044	21	+36	220	+5	+2.2	Fo	24.4
19	4382	6	+64	47	+4	-1.0	—	7.0	69	5997	21	-4	103	-10	-0.1	Ko	14.6
20	5285	7	+21	51	+30	+3.1	F5	26.9	70	4178	21	+74	168	+8	+2.8	F2	30.1
21	5715	7	0	65	+14	+0.5	G5	46.8	71	6468	21	-26	54	-42	+2.2	Go	27.9
22	4828	7	+43	278	+36	-0.5	Mb	21.9	72	7145	21	-61	194	+14	+11.3	—	14.4
23	4548	7	+56	39	+26	+3.2	F8	52.4	73	5928	22	+1	337	-8	+1.3	Ao	16.3
24	6448	7	-32	4	+47	+1.2	A3	22.5	74	6664	22	-34	234	-13	+4.2	F5	21.7
25	4503	7	+58	337	+43	-0.1	Ko	47.4	75	6013	22	-3	98	+5	-0.6	Go	15.6
26	4166	8	+75	170	+10	+2.4	A5	26.6	76	6020	22	-4	270	-22	0.0	Ko	12.2
27	5824	8	-2	196	+18	+2.8	F2	16.7	77	4894	22	+43	310	-15	-0.7	Ma	39.3
28	4630	9	+52	359	-3	+1.0	Ao	21.5	78	6807	22	-43	157	+43	+0.9	G5	26.3
29	5969	10	-9	141	-15	+9.5	K5	43.7	79	5009	22	+39	128	+8	+8.8	K5	15.9
30	5425	10	+15	307	+4	+8.3	—	14.4	80	6842	22	-44	263	+3	+4.0	Ko	34.6
31	6219	10	-20	194	-6	+0.1	K2	40.3	81	6949	22	-50	168	-18	+0.5	Ko	25.7
32	6308	10	-24	200	-25	+0.4	Ko	37.3	82	6325	23	-18	335	-51	-2.3	B5	26.9
33	6633	10	-39	302	-64	+0.4	K2	56.5	83	5367	23	+22	93	-22	+0.4	G4	38.5
34	6644	10	-39	331	0	+0.1	K5	50.8	84	5741	23	+8	221	-34	+5.3	Go	45.8
35	7243	11	-67	86	-45	-0.6	Ko	30.2	85	5879	24	+4	208	+27	-2.2	Bo	35.8
36	5080	11	+33	253	-17	-0.8	Ko	27.4	86	7476	24	-78	112	+38	-0.2	Ma	99.1
37	6299	11	-24	212	+35	—	F8	52.4	87	6056	24	-5	48	-1	+0.6	A2	29.7
38	7101	11	-61	293	-30	-0.2	K5	13.8	88	5654	24	+12	186	-9	+1.2	Ko	27.5
39	4334	12	+66	115	+15	+3.4	Fo	23.9	89	5429	24	+21	186	+40	+3.8	F8	11.0
40	6770	12	-45	167	-47	+0.6	Ao	30.9	90	5511	25	+18	120	+14	+2.3	A2	12.4
41	6526	12	-34	178	+19	+0.1	—	23.3	91	6220	25	-11	48	-35	+3.5	F8	16.5
42	5745	13	+3	290	-23	+3.0	F5	14.2	92	6743	25	-38	320	-22	-0.7	K5	14.5
43	6349	13	-25	142	+31	-0.4	Ko	19.4	93	6603	25	-30	330	-5	+1.1	cmp	26.4
44	5742	14	+3	254	-18	+1.5	A3	19.8	94	5543	25	+17	356	-13	+1.3	A2	18.6
45	5137	14	+30	77	+34	+1.0	A2	29.5	95	5462	26	+20	161	+16	-0.4	Ma	11.0
46	5594	14	+10	226	+1	+2.6	Go	38.0	96	6346	27	-17	176	-41	+1.6	F5	11.0
47	7819	14	-71	305	+54	+3.2	F5	35.4	97	5835	27	+7	359	-7	+3.4	F5	21.1
48	7331	14	-71	157	-20	+0.1	Ko	30.1	98	4587	27	+55	146	+41	+2.2	Fo	20.0
49	4656	15	+52	55°	+55	+3.0	F8	37.0	99	4745	27	+49	54	+20	+2.6	F2	31.1
50	5384	15	+19	126	-15	-0.2	A3	21.5	100	6628	27	-30	176	-44	-0.5	K5	38.5

Nr.	Yale	λ	β	l	b	M	Sp	v_a	Nr.	Yale	λ	β	l	b	M	Sp	v_a
101	6779	28°	-38°	196°	+30°	-0.3	Ao	23.0	151	5346	39°	+28°	96°	-52°	+3.8	G5	17.8
102	6199	28	-8	155	+10	+3.5	F2	31.4	152	6762	40	-27	248	-62	-1.4	G5	17.7
103	5746	28	+11	152	+7	+4.7	Go	17.5	153	6445	40	-11	276	-55	var.	F8	11.1
104	6200	28	-8	160	+36	+0.5	K2	48.1	154	5383	40	+27	122	+29	+1.6	K2	4.8
105	7311	29	-67	138	-29	+1.7	A3	24.5	155	6140	41	+4	236	-17	-0.2	B5	25.2
106	5067	29	+13	224	+21	-1.2	B3	22.5	156	4475	41	+58	171	+62	+3.3	F5	17.7
107	6724	29	-34	179	+11	+2.5	Fo	23.5	157	5638	41	+19	14	+25	+2.5	Go	34.2
108	5798	29	+9	163	-16	-0.4	K5	24.5	158	7318	41	-63	249	+5	+0.3	Ko	7.3
109	7358	29	-70	214	+21	+7.8	K5	20.6	159	4086	41	+76	137	+65	+2.0	Fo	25.7
110	6746	30	-35	57	-44	-0.2	Ma	29.2	160	6728	42	-24	157	-30	+2.0	Fo	28.1
111	6184	30	-6	143	-71	-1.0	B3	5.2	161	6832	42	-30	312	-43	+4.3	F8	7.4
112	5780	30	+10	56	+14	+1.2	A3	19.3	162	4424	43	+59	47	+64	+3.4	Go	19.1
113	4883	30	+44	245	+65	+2.7	F2	16.3	163	4593	43	+53	15	+60	+3.4	G5	38.2
114	4159	30	+74	347	+69	+1.3	Ma	18.3	164	6252	43	0	52	-12	-0.7	B5	29.0
115	7418	30	-73	173	+49	-0.2	B8	20.6	165	6116	43	+5	111	-29	-0.3	K2	23.1
116	4659	31	+52	79	-52	+1.7	G5	26.5	166	4466	43	+58	64	-9	+8.2	-	34.2
117	7139	31	-57	147	+63	-0.5	Ma	31.8	167	7192	43	-53	156	+14	+0.3	Ko	30.5
118	7061	32	-52	325	-22	+1.3	Ko	50.4	168	4352	44	+62	224	+25	+1.1	Ao	19.9
119	4457	32	+60	63	+55	+2.0	F2	26.2	169	6459	44	-8	148	+57	-0.1	K2	31.2
120	5721	32	+13	75	+64	0.0	Go	9.4	170	5777	44	+17	36	+11	+2.2	A5	56.7
121	6250	32	-7	353	-65	+0.4	Ko	11.1	171	6592	44	-13	253	-1	-0.3	Ko	21.6
122	6378	32	-14	104	+20	+5.0	G5	33.0	172	6305	45	-1	179	-52	+1.8	Ao	12.2
123	6675	32	-29	42	-29	+7.4	Ko	51.3	173	4408	45	+59	352	+45	+3.1	F5	31.5
124	5120	32	+35	235	+47	+1.0	Ko	13.9	174	6255	45	+2	27	-4	-1.0	K5	37.5
125	5948	33	+6	327	-19	+5.4	G5	43.3	175	6039	46	+9	200	-24	+0.2	Ao	18.3
126	6152	33	-2	82	-21	+1.7	A5	21.1	176	6891	46	-30	108	-24	+2.3	Fo	32.8
127	6215	33	-5	281	-10	+0.1	B8	11.5	177	4486	47	+56	173	+8	+1.0	Ao	20.5
128	6355	33	-13	111	-46	+0.8	Ao	14.5	178	6775	47	-22	114	-30	-0.5	K2	14.2
129	5332	33	+27	153	+12	+0.8	Ko	26.7	179	5514	47	+25	286	-2	+2.7	K2	19.8
130	5336	33	+27	99	+46	+0.3	Ko	25.0	180	6072	47	+9	283	+9	+0.7	Ko	40.7
131	4928	33	+43	208	+14	var.	Mb	28.1	181	7279	47	-57	194	-6	+5.5	G5	36.7
132	4746	34	+49	339	-24	+0.1	B8	9.6	182	7525	47	-76	251	-4	+0.3	Ko	26.6
133	4743	35	+49	94	+48	+1.8	Ma	25.5	183	5870	48	+16	248	-28	+1.1	G5	19.9
134	6229	35	-4	358	-32	-0.6	A3	24.1	184	6091	48	+9	265	-46	-1.8	Bo	32.5
135	5608	35	+18	93	-2	+0.8	Ao	11.9	185	6094	49	+10	13	+63	-1.9	B2	17.8
136	6168	35	-1	125	-22	-0.8	K2	29.6	186	6083	49	+10	94	-75	+2.8	Fo	5.9
137	5298	36	+29	269	-25	+9.9	M3	32.7	187	4785	49	+46	9	+46	+0.1	K2	37.0
138	5646	36	+17	94	+20	+1.1	A3	20.3	188	6268	50	+5	275	-14	-1.3	B1	24.1
139	7050	36	-49	205	+3	+0.7	B8	22.1	189	6467	50	-3	72	-23	-0.5	B8	+2.1
140	7289	37	-63	135	-36	+0.6	Ao	16.0	190	5248	50	+32	63	-28	+2.2	A5	32.5
141	4150	38	+74	112	+60	+1.6	A3	35.3	191	6811	50	-20	343	+12	+3.1	F5	19.9
142	6057	38	+4	149	-10	+2.5	F5	34.7	192	6511	50	-4	124	-1	+3.5	F8	58.7
143	5826	38	+13	199	-22	-0.9	Mo	24.5	193	5963	50	+14	222	+61	+0.2	Ko	21.6
144	6999	38	-44	167	+5	+3.8	Go	34.8	194	6285	50	+4	38	+4	+0.4	Ko	37.9
145	4543	38	+55	315	-31	+4.5	Ko	17.4	195	5023	50	+39	30	-43	+0.5	K2	28.9
146	5452	38	+25	161	+18	+0.5	Ko	32.1	196	6536	50	-6	243	-16	+0.7	Ko	14.2
147	4255	39	+67	171	+53	+3.4	F2	19.3	197	39	50	-78	213	-6	+0.5	K2	12.2
148	5528	39	+22	25	+64	+0.6	G5	23.4	198	6571	50	-7	325	-67	+0.2	K2	28.9
149	6119	39	+2	122	+49	+0.3	Ko	43.3	199	5989	51	+14	5	-15	+3.4	F5	35.4
150	6284	39	-4	320	+16	+0.4	K2	27.3	200	5358	51	+29	114	-12	+1.8	Fo	46.5

Nr.	Yale	λ	β	l	b	M	Sp	v_a	Nr.	Yale	λ	β	l	b	M	Sp	v_a
201	4979	51°	+40°	147°	-12°	+0.8	G5	30.4	251	6279	64°	+14°	207°	+6°	+1.4	B9	18.4
202	5450	52	+28	145	-41	+3.4	K0	32.6	252	4586	64	+47	26	+30	0.0	B9	45.9
203	6337	52	+3	98	-17	-0.2	B9	31.2	253	5894	64	+22	168	+5	+6.1	K0	20.8
204	6402	52	0	134	-23	+9.4	M3	18.0	254	6176	65	+17	106	-39	+1.1	G5	27.3
205	4024	52	+77	24	-21	+1.2	Ma	45.9	255	7313	65	-38	200	+14	+5.0	Go	33.8
206	6418	53	+1	278	+10	+1.3	A2	29.7	256	5254	65	+32	174	-7	+0.6	K0	32.8
207	5829	53	+19	219	+53	+2.5	A3	44.7	257	7075	65	-17	268	-5	-2.1	Oe5	21.0
208	6968	53	-27	312	+20	+0.7	K0	21.2	258	6088	65	+19	172	+10	+6.5	F8	22.4
209	6424	53	+1	284	-30	+0.2	K5	36.7	259	4870	66	+40	43	+52	-0.3	K0	66.8
210	4733	53	+46	211	-1	+0.7	K0	22.6	260	6630	66	+6	55	-22	-1.2	cmp	36.8
211	6147	53	+11	209	-41	-0.5	B5	32.0	261	3951	66	+78	92	+76	-0.8	B9	62.3
212	6081	54	+13	327	-14	+0.7	K2	30.5	262	4891	66	+39	28	+32	+6.1	G5	34.7
213	6226	54	+9	292	-9	+0.6	K2	47.2	263	3974	67	+76	184	-30	-0.5	K0	21.2
214	4182	54	+68	44	+64	+3.9	Go	48.9	264	6326	67	+15	222	-24	+12.5	—	24.2
215	6017	55	+15	89	+22	+3.4	F5	41.9	265	5150	67	+34	358	0	+5.4	K0	28.5
216	7146	55	-38	252	+6	+0.2	K0	14.3	266	30	68	-66	182	-69	+0.8	G5	18.2
217	35	55	-76	56	+42	+3.8	F5	31.2	267	4585	68	+45	136	+12	+7.0	—	19.2
218	7300	55	-51	219	-3	+0.7	K0	37.3	268	6070	68	+20	326	-18	+0.9	F0	17.4
219	5568	56	+25	81	-8	+1.7	K0	37.5	269	7265	68	-30	246	-7	0.0	G5	43.5
220	7172	56	-39	1	+3	+9.6	Ma	42.8	270	3961	69	+76	210	+23	+0.8	K0	19.5
221	4202	56	+66	9	-10	+8.6	M4	35.5	271	5794	69	+25	187	-8	+11.8	—	36.9
222	5733	57	+22	285	+22	-0.7	B5	27.9	272	7362	69	-37	274	+4	-1.0	Mb	51.1
223	7217	57	-41	56	-46	+0.2	A0	54.6	273	4174	69	+61	93	+18	+1.0	A0	50.1
224	6801	57	-12	14	+26	-0.3	B9	18.8	274	6055	69	+21	217	-37	+1.1	A0	35.4
225	4757	57	+45	117	+2	+0.1	B9	14.4	275	7122	69	-13	69	+54	+12.0	M5e	30.6
226	6725	58	-6	324	-22	+2.1	A3	13.0	276	5530	69	+28	225	+43	+3.4	F5	28.0
227	6486	58	+3	199	0	-0.1	B8	38.3	277	7310	70	-28	61	-60	-1.1	B8	34.4
228	7340	58	-51	344	+7	+0.2	G5	23.8	278	5089	70	+34	196	+50	+5.2	G5	33.6
229	6707	59	-5	300	-20	+0.2	K0	35.9	279	1797	70	+6	308	-38	+0.3	Ma	18.5
230	6132	59	+15	313	-16	-0.7	K2	21.9	280	6314	70	+17	109	-16	+1.1	G5	21.6
231	6330	60	+10	303	+20	-0.2	K5	24.3	281	4090	70	+64	199	+55	+1.9	K5	29.9
232	7029	60	-22	272	-46	+1.2	A0	31.5	282	7496	70	-54	190	-54	+1.2	F5	26.5
233	7424	60	-59	346	-72	+3.2	F8	25.1	283	7001	70	-3	197	-6	+0.4	K2	13.9
234	4258	60	+60	22	-49	+2.0	A5	28.3	284	26	70	-64	215	-58	-0.4	K2	22.0
235	6585	61	+3	155	-56	-1.3	B9	25.3	285	4878	71	+38	339	+26	+5.9	G5	39.7
236	6960	61	-16	118	-50	+2.8	F0	34.5	286	6971	71	-1	109	+56	0.0	B8	20.8
237	6123	61	+16	350	-3	-0.3	K5	22.8	287	6897	71	+2	27	+7	+1.3	G5	22.8
238	6492	62	+7	78	-5	-1.5	B3	44.4	288	4458	71	+46	194	-7	-0.1	Mb	36.5
239	4522	62	+50	136	+7	0.0	K5	11.5	289	7349	72	-29	196	-14	+2.3	F5	20.8
240	4241	62	+61	356	-29	+0.8	A5	26.5	290	4781	72	+39	163	-25	+5.3	G5	29.4
241	5596	62	+26	229	-27	+3.2	F0	35.1	291	6685	72	+12	45	+8	-0.4	B5	39.4
242	7390	62	-53	224	+7	+3.4	F8	33.7	292	6879	72	+5	181	-10	+1.4	A2	14.7
243	6637	62	+2	171	+61	+2.5	G5	23.5	293	6491	72	+16	0	+72	+0.8	K0	34.6
244	5445	62	+29	187	+34	+4.4	K0	19.1	294	4327	72	+50	171	+51	+3.7	F5	21.6
245	7514	62	-66	73	-56	+1.9	Mb	40.3	295	6883	73	+6	232	+22	+0.2	K5	55.6
246	3926	63	+81	109	+47	-0.1	B9	16.8	296	7046	72	-1	192	-11	+0.8	K0	33.1
247	4763	63	+43	104	+5	+7.8	G5	36.9	297	7236	73	-13	36	+13	-0.2	K5	30.6
248	4946	63	+39	156	+34	+5.2	Go	41.1	298	6875	73	+6	82	+39	-0.3	Ma	30.9
249	7444	63	-57	225	-4	+9.5	M2	27.6	299	7074	73	-2	115	-45	-0.6	Mb	46.8
250	7343	63	-46	102	-44	+0.6	K0	25.0	300	6815	74	+10	94	-35	+3.5	F5	20.8

Nr.	Yale	λ	β	l	b	M	Sp	v_a	Nr.	Yale	λ	β	l	b	M	Sp	v_a
301	4414	74°	+45°	109°	-1°	+5.8	Ko	21.5	351	126	89°	+4°	146°	-7°	-0.4	B5	27.2
302	7283	76	-11	135	+48	+0.2	Ma	36.1	352	180	89	-12	119	-19	-1.3	B3	21.6
303	27	76	-50	170	+19	+0.5	B8	11.7	353	3865	89	+57	58	+3	-3.5	F5	41.0
304	6791	76	+13	320	-27	+1.2	Ao	34.1	354	164	89	-13	249	-43	-0.1	K2	10.1
305	7193	76	-3	160	+60	-3.0	Go	41.0	355	3871	89	+46	162	+69	+7.5	—	39.1
306	7295	76	-12	283	+78	+0.6	Ko	29.1	356	196	90	-15	23	+15	-0.9	B3	31.8
307	60	76	-60	160	+73	-0.3	Ma	33.7	357	188	90	-16	124	-27	+1.3	A5	21.0
308	7381	77	-16	214	-3	+0.1	B9	22.5	358	220	90	-5	138	-21	+4.7	F8	35.7
309	4246	78	+48	18	-8	+5.9	Ko	29.5	359	236	91	+2	255	+27	+1.6	cmp	6.2
310	7495	78	-34	214	+18	-0.2	K2	23.7	360	270	91	-3	23	-9	+2.4	Ko	22.1
311	7407	78	-16	289	-1	+0.2	K5	44.9	361	227	91	-46	71	+10	+3.4	F5	27.9
312	7009	78	+11	20	+37	+0.4	Ko	45.0	362	267	91	+6	208	-18	+1.8	Fo	44.1
313	3898	79	+79	44	+82	+0.3	Ao	33.3	363	216	91	-56	126	-65	+0.4	G5	14.0
314	7400	79	-12	70	-26	+1.9	A3	22.5	364	250	91	-1	103	+59	+3.9	F8	16.5
315	7499	79	-28	282	+10	+3.0	F8	28.7	365	3808	91	+47	127	+50	+0.2	Ko	20.7
316	7129	80	+8	156	+14	+2.4	F5	33.5	366	344	92	+6	251	-8	+1.3	Ao	17.4
317	109	80	-62	146	-38	+1.2	G5	45.0	367	284	92	-2	24	+38	+0.2	G5	40.6
318	4050	80	+57	21	+29	+1.7	Ao	35.4	368	265	93	-38	247	+42	-0.6	M6	49.6
319	7221	80	+6	174	-44	+7.1	—	55.0	369	355	93	+3	102	-2	+0.3	B8	25.5
320	4163	81	+48	144	+41	+3.3	Ko	41.4	370	238	94	-73	334	-8	+4.2	F5	28.5
321	7508	81	-22	314	-27	+5.3	G5	17.9	371	399	94	+2	199	-2	+1.1	Ao	25.6
322	77	81	-46	72	-21	+0.7	Ko	24.5	372	3779	94	+59	105	+13	+1.8	A5	33.2
323	7517	81	-22	343	+17	+4.4	—	93.3	373	439	94	+8	170	-10	+3.8	F5	12.7
324	34	81	-32	159	-18	+6.2	G5	25.7	374	458	94	+10	7	-34	+0.8	G5	34.1
325	7488	82	-11	303	+70	+4.6	G5	41.6	375	346	95	-27	239	+5	+0.5	Ma	25.0
326	3975	82	+60	7	+16	+5.0	Go	19.9	376	417	95	-2	150	+9	var	A5	29.5
327	4092	82	+49	38	+44	+4.3	G5	42.4	377	493	95	+6	248	+6	+0.7	Ao	35.1
328	7293	82	+7	248	-5	+1.4	G5	36.0	378	351	95	-20	331	-19	+3.2	Go	33.1
329	7430	82	-4	101	+33	-0.4	Ko	38.8	379	3786	95	+64	71	+7	+3.9	F8	32.4
330	144	83	-67	156	-4	+3.3	Go	15.6	380	3764	95	+62	356	+58	-0.3	Ma	37.1
331	117	83	-52	113	+8	+3.2	F2	44.5	381	319	96	-41	182	-25	+1.0	A2	16.1
332	7446	83	-3	240	-14	+2.8	F2	15.4	382	578	96	+9	350	-1	+1.6	A3	29.6
333	7429	84	+5	212	-11	-1.7	B3	30.8	383	591	96	+10	89	-30	+2.8	Fo	17.9
334	74	84	-25	357	-16	+0.5	A2	28.1	384	262	97	-71	272	+35	+2.6	Go	15.4
335	5	85	-4	220	-12	+3.5	G5	36.2	385	305	97	-54	32	-4	+1.3	Ko	25.9
336	112	85	-43	32	-47	+0.1	Ko	23.8	386	500	97	-1	277	-6	-0.2	K2	32.6
337	4054	85	+47	138	+65	+1.0	Ko	48.2	387	3577	97	+48	145	+62	+3.1	A2	43.1
338	7462	85	+7	128	+1	+6.6	—	43.4	388	587	98	+3	97	+45	-0.9	B5	13.1
339	3998	85	+49	349	-68	0.0	B9	14.7	389	569	98	+3	145	+37	+1.2	Ao	10.4
340	3918	85	+61	6	+15	2.1	Fo	25.4	390	327	98	-49	96	+17	+1.0	G5	25.7
341	100	87	-9	117	+14	-0.4	B9	36.3	391	373	98	-38	273	+15	+0.5	Ko	21.7
342	114	87	-18	198	-2	+1.2	A2	24.3	392	412	98	-24	234	+24	+1.2	Ao	28.9
343	127	87	-19	66	-47	+0.8	B8	17.7	393	322	99	-57	278	-31	+3.4	F2	21.2
344	153	88	-29	204	+30	+1.8	A3	7.2	394	313	99	-57	227	+42	+0.7	K2	14.3
345	168	88	-41	339	-12	+6.1	Ko	31.9	395	352	99	-46	28	-39	-0.6	K5	37.3
346	130	88	-8	113	-16	+0.1	B8	37.6	396	478	99	-13	166	-59	+0.3	Ko	24.9
347	194	88	-80	161	+29	+0.8	Ko	16.1	397	3499	99	+47	134	+53	+0.3	Ma	10.0
348	136	89	0	140	+4	-3.4	Bo	14.5	398	3545	99	+50	106	+24	0.0	Ko	71.2
349	147	89	-8	110	+19	-0.1	B5	13.7	399	472	100	-20	84	-64	+3.5	Go	33.0
350	152	89	-9	232	+58	-2.1	B3	31.6	400	492	101	-21	260	-23	-0.6	B8	13.8

Nr.	Yale	λ	β	l	b	M	Sp	v_a	Nr.	Yale	λ	β	l	b	M	Sp	v_a
401	545	101°	-10°	197°	-43°	+0.1	B9	15.0	451	2970	113°	+41°	168°	-9°	+5.3	—	38.3
402	588	101	-6	125	+13	-0.2	B8	33.6	452	1112	114	+2	228	+40	+0.5	B9	32.3
403	799	101	+8	120	-6	+1.4	A2	9.5	453	934	114	-7	145	-9	+1.0	G5	19.7
404	830	101	+9	114	+19	var.	F5	20.5	454	521	114	-50	122	-16	+0.7	K0	40.7
405	3508	101	+51	220	+61	+4.4	F8	37.8	455	764	114	-23	187	-43	+0.4	M6	28.2
406	459	102	-31	110	-26	+1.6	A3	24.2	456	654	115	-33	312	+16	+3.4	F5	45.2
407	675	102	-3	164	+69	+0.4	A0	31.4	457	2639	115	+35	111	+48	+0.8	G5	26.9
408	3759	103	+76	143	+40	+3.1	F3	18.1	458	999	115	-5	185	+11	-0.6	B5	26.1
409	662	103	-4	350	+2	+2.0	G5	25.1	459	989	115	-6	188	+4	-0.5	B3	18.2
410	663	103	-4	241	-2	+6.7	K0	56.6	460	1005	115	-5	152	+2	-0.6	B5	18.6
411	683	103	-3	179	+28	var.	K5	42.5	461	3381	115	+56	185	+3	+0.7	A0	18.9
412	699	103	-4	183	+24	-4.8	A2	20.7	462	735	115	-28	23	+5	+1.3	F0	3.4
413	1100	104	+14	138	+3	+0.8	A0	29.3	463	855	116	-18	206	-30	+1.4	F0	20.7
414	437	104	-44	113	-54	+3.2	F5	23.9	464	2819	116	+38	191	+57	+0.4	G5	41.5
415	557	105	-23	80	-15	-0.4	K2	64.4	465	3095	116	+45	197	+19	+8.6	M1	36.0
416	390	105	-58	287	+33	+1.0	A2	28.0	466	954	117	-10	179	-12	-0.4	B5	21.0
417	828	106	-1	121	+14	-0.5	F5	52.1	467	416	117	-69	306	-7	+1.1	K0	37.7
418	3587	106	+62	19	-2	+0.2	A0	23.1	468	2331	117	+29	137	+28	+0.5	B9	38.1
419	987	106	+7	353	+61	+0.1	K2	16.4	469	2672	117	+36	140	+18	+1.6	A0	30.2
420	324	106	-72	339	-25	+0.9	G5	35.0	470	3441	117	+60	355	-12	+3.8	F2	38.7
421	1338	107	+15	35	+50	+6.0	—	68.1	471	1069	118	-5	61	+59	-1.6	B5	46.7
422	3727	107	+74	305	+43	+8.5	K0	41.1	472	743	118	-32	242	-7	+3.3	F5	9.8
423	485	108	-44	285	+11	+0.8	G5	25.0	473	1208	118	-1	166	-9	+2.7	F5	23.9
424	940	108	+3	75	-14	+1.3	K0	55.1	474	685	118	-38	302	+1	+4.4	F8	21.6
425	336	108	-71	157	-5	+3.1	F2	20.8	475	2696	118	+37	341	-57	+0.7	K0	30.4
426	3282	108	+47	145	+24	+1.6	K0	52.3	476	935	119	-15	192	+10	+3.2	F0	26.4
427	1135	109	+8	278	-50	+2.0	A3	14.4	477	1195	119	-3	172	+47	+1.2	K0	18.8
428	440	109	-54	325	-1	+2.9	F2	20.3	478	3340	119	+56	162	+22	+0.4	K0	35.5
429	3743	109	+78	142	+62	+3.8	G0	43.9	479	1249	119	0	113	-14	+0.6	A0	18.2
430	1077	109	+8	101	+8	0.0	cmp	25.5	480	873	120	-23	210	-60	+0.2	A0	12.5
431	1063	110	+5	13	+35	-0.5	K0	15.5	481	1676	121	+13	143	+13	+1.2	A0	33.3
432	2655	110	+34	179	+16	+7.0	—	49.6	482	3237	122	+53	120	+44	+4.1	F5	37.9
433	1204	110	+8	79	+32	-0.1	B9	10.1	483	1844	122	+17	153	-1	0.0	B9	37.0
434	3170	111	+46	132	+17	+1.3	A3	46.8	484	1283	122	-1	136	-5	-0.8	G0	25.1
435	1658	111	+19	165	-16	+9.5	—	49.7	485	3334	122	+57	173	+66	+0.6	K0	24.9
436	599	111	-34	177	+42	+2.9	F5	19.2	486	2937	122	+43	301	+76	+1.0	K0	54.3
437	652	111	-25	71	-49	+0.9	A0	20.8	487	1781	123	+14	183	+53	+2.8	F5	47.1
438	666	111	-25	132	-40	+1.5	A0	18.2	488	3117	123	+49	175	+30	+0.5	K5	28.9
439	531	111	-43	309	-13	+2.9	G0	29.6	489	413	123	-73	169	+6	+6.7	K0	31.7
440	808	111	-13	291	-1	-2.9	G5	32.8	490	3055	124	+47	64	+24	-0.9	Ma	42.0
441	3476	111	+58	116	+9	+0.6	G5	46.8	491	581	124	-55	260	+31	+3.9	G0	50.2
442	1015	112	0	64	-17	+1.3	A2	11.9	492	898	124	-27	184	-11	+4.8	G0	30.9
443	3685	112	+76	309	+11	+0.3	K5	31.2	493	947	124	-22	40	-25	+1.1	A0	19.8
444	882	112	-9	294	+36	+0.6	G5	40.3	494	3187	124	+53	135	+46	+0.1	K0	32.9
445	609	112	-33	144	-18	+0.2	B8	10.2	495	996	124	-18	154	-6	+1.0	A0	19.8
446	3799	112	+84	325	+59	+0.6	K0	31.4	496	1012	125	-18	168	-20	+0.8	A0	5.1
447	691	113	-28	88	-40	+4.4	F5	36.9	497	1000	125	-19	135	-38	-0.1	K0	25.1
448	565	113	-41	166	-42	-0.6	G5	32.2	498	2590	125	+35	182	+48	-0.9	K0	54.3
449	2414	113	+31	162	+23	+2.2	K0	49.2	499	992	126	-21	157	+15	+1.3	A2	37.3
450	2504	113	+32	183	+24	+5.0	—	47.3	500	2425	126	+31	145	+13	+1.3	A2	19.5

Nr.	Yale	λ	β	l	b	M	Sp	v_a	Nr.	Yale	λ	β	l	b	M	Sp	v_a
501	921	126°	-26°	121°	-58°	+4.6	F2	29.7	551	2106	140°	+17°	144°	-9°	-0.7	G5	42.7
502	1085	126	-13	176	+4	+1.3	A2	14.6	552	669	140	-60	191	+19	+0.7	G5	38.6
503	3045	126	+47	15	+66	var.	Go	23.5	553	1472	141	-11	174	-25	+6.3	Ko	41.5
504	2919	126	+43	175	+45	+0.5	K5	14.9	554	899	141	-44	138	0	-0.5	B5	16.1
505	1791	126	+13	180	-16	+5.9	Ko	41.0	555	1199	141	-26	186	+22	+2.5	Fo	34.0
506	1070	127	-16	190	-6	-2.6	B2	20.9	556	1379	142	-16	307	+11	-0.7	B5	38.5
507	878	127	-32	159	-4	+3.5	Fo	35.2	557	1230	142	-24	184	-13	+2.3	Fo	14.8
508	3547	127	+71	322	+63	+0.3	G5	36.9	558	1001	142	-37	350	-80	-0.6	G5	41.4
509	1086	128	-17	157	-27	-0.7	B1	33.3	559	2643	142	+37	212	+33	+4.8	Go	27.8
510	3079	128	+49	95	+49	+0.8	A2	31.6	560	2722	142	+39	46	+27	+2.9	Ko	22.8
511	2415	128	+30	131	+28	+0.4	Ko	42.3	561	1370	143	-18	254	+54	+3.4	F8	44.9
512	2571	128	+35	177	+48	+0.1	Ko	35.0	562	2791	143	+41	170	+33	+2.8	Go	33.9
513	1214	128	-13	79	-53	-1.5	B3	27.8	563	1381	143	-17	226	+37	+1.7	A5	29.9
514	870	129	-34	189	-18	+3.4	F5	45.0	564	1466	144	-14	159	-19	-0.9	B5	17.1
515	2395	129	+30	155	+17	+1.0	Ko	25.4	565	1280	144	-23	309	+24	+0.8	G5	41.7
516	1201	130	-16	140	-13	-2.6	B1	28.5	566	1702	144	-1	164	-12	-0.8	B9	25.9
517	1637	130	+6	47	-24	-0.3	Go	18.0	567	2619	145	+36	204	+18	+0.3	K5	31.2
518	925	130	-32	93	-21	+2.6	K5	18.5	568	1264	145	-25	242	+66	+2.8	Fo	36.6
519	1057	132	-22	226	-38	+2.9	Go	25.6	569	1329	145	-20	200	+18	+2.5	Fo	27.5
520	982	132	-28	221	-5	-0.6	B3	22.1	570	1395	145	-18	172	-5	+3.5	F5	46.1
521	617	132	-58	353	+3	+3.3	F8	40.5	571	3394	146	+66	98	+14	+2.3	A2	20.6
522	1320	132	-10	63	-10	+0.7	G5	26.7	572	1722	146	-1	338	+22	+2.7	F5	42.5
523	2816	132	+41	242	+6	+0.4	B9	29.1	573	1740	146	-1	347	-66	+2.6	F5	24.7
524	1457	132	-4	155	+14	+3.6	F5	58.5	574	3396	146	+66	182	+17	+3.3	F2	25.8
525	1588	133	+2	234	-10	-1.1	B3	21.8	575	972	146	-42	139	+10	+5.0	Go	15.4
526	3498	133	+69	325	+65	+3.9	F5	41.7	576	1549	146	-10	159	-16	+0.5	Ko	33.2
527	1573	133	+1	267	-9	-1.8	cmp	19.1	577	1601	147	-8	188	-9	-1.5	B3	12.1
528	3613	134	+77	207	+61	+2.3	Ko	32.7	578	2851	147	+43	165	-11	+3.4	F5	30.8
529	2550	134	+34	118	+6	+1.1	A2	24.3	579	1389	147	-20	178	+6	+3.8	Go	39.9
530	1257	134	-16	352	0	+2.8	Fo	27.8	580	3110	147	+53	148	+47	+3.4	F5	47.5
531	1048	134	-25	159	-39	+3.4	Go	52.0	581	1829	147	+2	307	-39	+3.9	F8	24.4
532	640	134	-57	170	-17	+4.3	F9	30.5	582	887	148	-50	205	-21	+1.2	Ao	25.4
533	1555	135	-2	302	+46	+0.4	Ao	13.8	583	1327	148	-23	274	+51	+1.9	Fo	36.3
534	2357	135	+28	63	+76	+4.2	F8	31.3	584	1346	148	+22	166	-1	+4.0	Go	37.7
535	2311	135	+27	165	0	+0.6	Fo	59.3	585	1367	148	-21	166	-51	+6.6	G5	31.8
536	1256	135	-17	217	-35	+0.5	Ao	18.9	586	1136	149	-34	318	+10	+0.6	Ko	15.1
537	1623	136	+1	293	-5	+1.8	A3	13.2	587	1537	149	-13	225	-16	+6.5	Ko	28.1
538	2338	136	+27	304	-18	+0.4	Ao	47.5	588	1579	149	-11	152	+46	+1.8	A5	15.0
539	2223	137	+23	76	+29	+0.3	B9	40.2	589	1849	149	+2	34	+46	+0.1	Ma	35.7
540	475	137	-73	121	-32	+0.5	Ko	18.5	590	1662	150	-7	290	-3	+0.8	Ko	37.2
541	1622	137	0	79	-10	+4.4	F8	33.1	591	3075	150	+52	105	+84	-0.2	K5	26.9
542	813	137	-48	330	+12	+1.6	A2	43.4	592	3427	151	+69	176	+54	+5.3	Go	38.2
543	1215	138	-22	212	-22	+2.6	Fo	20.9	593	1982	151	+7	297	-38	+2.1	A2	19.5
544	1452	138	-9	305	+32	+3.3	F5	33.0	594	1503	151	-17	175	-10	-0.2	G5	27.9
545	2123	139	+19	144	-24	+0.4	K5	24.8	595	2874	151	+44	162	+17	-1.1	G5	25.1
546	789	139	-51	158	-14	-3.0	B2	18.3	596	2180	151	+17	176	-33	+11.6	-	43.3
547	1251	139	-21	280	+35	+5.3	G5	12.9	597	1649	152	-9	127	-60	+2.8	F5	26.8
548	2478	139	+31	112	+5	+0.6	Ko	16.2	598	2411	152	+26	110	+68	+0.8	G5	40.7
549	1343	139	-15	306	+19	+1.1	B9	31.8	599	1302	152	-27	176	-13	-1.2	B3	38.7
550	2400	140	+28	188	+4	+0.3	K5	23.6	600	1663	152	-8	144	0	+1.6	Ko	45.1

Nr.	Yale	λ	β	l	b	M	Sp	v_a	Nr.	Yale	λ	β	l	b	M	Sp	v_a
601	1403	153°	-23°	160°	+6°	+3.4	F5	33.1	651	1709	168°	-16°	50°	+28°	-2.3	B2	25.4
602	3086	153	+53	172	-3	+1.7	Fo	21.9	652	1741	168	-15	340	+22	-1.5	B3	56.0
603	1995	153	+7	266	-17	+0.6	Ko	58.3	653	1993	168	-1	194	-10	+1.2	A2	27.4
604	2120	154	+12	218	+24	-1.1	Ko	26.4	654	2671	168	+32	347	-51	+2.2	Fo	63.9
605	1705	155	-8	183	+7	-0.8	B3	16.7	655	2245	168	+12	204	-19	+4.6	F8	42.9
606	1723	155	-7	174	-15	+1.4	A2	24.9	656	823	168	-61	188	+78	+3.4	F5	34.5
607	2256	155	+19	178	-15	-0.6	Ko	26.7	657	2523	172	+24	286	+25	0.0	Ko	5.2
608	790	155	-59	251	-11	+3.6	F5	19.4	658	2707	172	+34	192	+57	+2.3	F5	35.8
609	874	155	-54	279	+15	+0.8	Ko	48.7	659	2275	172	+12	156	-19	+0.6	Ko	38.4
610	1941	156	+3	359	-18	-0.9	B9	38.3	660	1696	172	-19	166	+2	-2.6	B1	19.7
611	1111	156	-40	163	-34	-0.1	B8	33.9	661	1783	173	-16	147	+6	-3.7	Bo	11.2
612	1999	156	+5	167	-3	-0.4	G5	34.8	662	1218	173	-43	179	-9	-0.9	K5	32.5
613	3015	156	+49	352	+51	+5.3	Ko	30.6	663	1808	174	-15	175	+2	-2.9	Bo	12.9
614	1707	157	-9	300	+34	+1.1	A2	20.2	664	2049	175	-3	47	-56	+0.3	G5	25.1
615	2922	157	+45	142	+57	+2.3	Go	38.4	665	2344	176	+13	155	-12	-1.0	G5	21.3
616	2022	157	+6	236	+10	-0.7	Ma	31.8	666	1451	176	-33	11	+10	+2.2	A2	21.3
617	2356	157	+22	183	+9	+1.9	A5	20.6	667	1611	177	-25	228	-31	-0.1	B8	9.5
618	312	157	-85	308	+31	+8.2	K2	49.0	668	1905	177	-11	204	-16	+1.2	Ko	36.8
619	1805	158	-6	202	-2	-1.6	B3	34.8	669	1570	177	-28	92	+31	+3.9	Ko	20.6
620	1407	158	-26	183	+13	+3.6	F2	18.0	670	2963	178	+44	185	+13	+3.7	G5	33.4
621	3270	158	+62	137	-10	+0.1	Ko	20.2	671	1693	178	-21	188	-36	-0.1	Ko	24.2
622	2703	158	+37	346	-44	-0.1	Ko	52.9	672	1448	179	-34	329	-18	+1.3	Ko	31.6
623	2366	158	+22	177	-4	-0.7	A2	26.9	673	2363	179	+13	332	-17	+1.0	A5	22.8
624	753	159	-62	326	-77	+3.0	F5	25.1	674	2802	179	+35	140	+24	+2.4	G5	23.5
625	1802	159	-7	11	+10	+1.7	Fo	29.6	675	3128	180	53	194	+30	-1.4	B3	43.3
626	951	159	-50	180	-26	+0.7	Ko	21.5	676	2939	180	+42	197	+10	+3.6	F5	44.4
627	2251	159	+17	199	-47	+4.4	Go	29.2	677	1629	180	-26	202	+3	-0.3	B8	21.9
628	3216	159	+60	140	-53	+2.5	Fo	9.0	678	881	180	-60	329	+73	+2.3	A5	46.0
629	1603	160	-17	280	+3	+1.4	Fo	17.5	679	1572	180	-29	339	+27	+1.5	Fo	63.1
630	2401	160	+23	225	-22	0.0	K5	31.4	680	2855	180	+37	202	+22	+7.5	K5	47.9
631	2443	160	+25	87	-59	+1.3	Ko	25.9	681	2168	181	+1	225	-14	+3.3	F2	31.0
632	3208	160	+59	302	-8	-0.3	Ko	18.8	682	1864	181	-15	220	+44	-1.7	B3	19.2
633	1061	160	-43	281	-48	+4.5	G5	16.8	683	905	181	-59	6	+6	+2.4	A3	26.2
634	1834	161	-6	244	+38	-1.8	B5	25.0	684	2967	182	+43	125	-72	+1.3	Ko	36.1
635	1865	161	-5	151	-27	-0.2	B9	20.5	685	1842	182	-19	195	+3	-3.9	Bo	12.9
636	1859	161	-5	18	+77	+1.0	G5	15.3	686	1516	182	-33	122	+48	+0.9	Ko	26.6
637	1437	163	-27	151	-70	-0.2	B5	13.6	687	2056	182	-6	152	+12	-1.1	B3	26.5
638	2615	163	+32	217	+12	+4.0	F5	30.9	688	1686	183	-25	50	+70	-0.5	B8	30.6
639	2228	163	+13	347	-12	var.	Go	12.1	689	1496	183	-33	26	+50	+4.5	Go	45.0
640	2095	164	+6	171	+17	+3.5	F5	23.8	690	994	183	-55	276	-62	+0.7	G5	24.0
641	2012	164	+1	177	-64	-0.1	K5	9.9	691	1543	183	-31	128	-1	+1.2	Ko	31.0
642	1527	164	-23	309	+35	-0.6	Ma	50.9	692	2326	184	+8	112	+33	-0.1	B8	38.9
643	1983	165	-1	15	-55	-0.4	B9	18.9	693	3188	185	+56	134	-21	+10.9	Ma	33.4
644	922	165	-54	294	-9	+4.8	Go	38.5	694	2011	185	-10	217	-8	+0.7	Ko	34.9
645	3304	165	+64	138	-58	-0.1	B9	31.0	695	2533	187	+18	217	-11	+0.6	Ko	41.5
646	1017	165	-48	266	+5	+0.3	Ko	44.1	696	2692	187	+28	340	-61	+4.0	F5	26.0
647	1990	166	-1	74	+10	+3.3	F5	28.6	697	1212	187	-48	224	+1	-1.7	B5	37.0
648	461	166	-79	299	+47	+6.1	Ko	19.3	698	1887	187	-17	153	-7	+2.5	Fo	25.1
649	2548	167	+28	225	-36	-0.8	Mb	24.2	699	1673	187	-27	210	+58	+4.9	Go	25.6
650	566	167	-73	213	+31	0.0	K5	35.9	700	2219	187	+1	202	+33	-0.4	K5	14.9

Nr.	Yale	λ	β	l	b	M	Sp	v_a	Nr.	Yale	λ	β	l	b	M	Sp	v_a
701	843	188°	-62°	154°	-12°	+1.6	Ao	14.4	751	3565	206°	+75°	138°	-14°	+2.3	F8	14.2
702	2706	188	+28	166	-11	+1.1	Ao	12.9	752	3614	206	+79	95	-43	+2.2	F8	26.4
703	763	188	-66	348	-21	+0.2	B9	15.1	753	2405	206	-1	156	-50	+2.1	F2	19.5
704	901	189	-60	251	-2	+4.3	G5	47.7	754	2480	206	+4	140	-36	+0.8	Ko	25.0
705	3347	189	+64	202	+60	+2.9	F5	27.8	755	2284	207	-6	174	+8	-1.8	B5	14.0
706	2828	190	+32	28	-27	+0.4	Ko	8.4	756	2786	207	+18	325	+32	-0.4	G5	18.1
707	1336	190	-42	165	-3	-0.1	K2	39.7	757	1106	207	-52	334	-35	+1.0	K2	31.0
708	1729	191	-26	219	-16	-0.7	Go	62.3	758	2930	208	+28	138	-32	-0.3	B9	20.1
709	1464	191	-38	46	-24	+0.6	Ko	36.5	759	2031	208	-19	93	+3	+0.3	G5	19.4
710	2998	192	+41	223	+34	-0.5	Ko	20.0	760	2753	209	+17	30	-4	+1.7	Ko	30.1
711	2244	192	0	212	-47	-2.3	B3	38.5	761	3456	209	+66	250	+37	+4.0	Go	32.2
712	2377	192	+6	107	+52	+3.4	F8	27.1	762	2427	210	-1	148	+3	-1.0	B8	18.2
713	1261	192	-46	160	+48	+3.6	A5	24.1	763	2902	210	+24	135	+62	+1.0	Ko	27.3
714	2877	193	+33	335	-50	-0.4	Ko	45.7	764	2002	210	-21	154	+21	+0.7	Ko	22.3
715	2152	193	-6	189	+38	-1.8	B8	31.2	765	2409	211	-3	182	-72	+0.2	B8	23.5
716	1780	194	-25	239	-56	+8.1	Ko	46.0	766	2096	212	-18	104	+22	+2.5	K2	18.1
717	3275	194	+59	295	+72	+3.1	F2	29.0	767	2385	212	-5	171	-44	+1.0	Go	39.2
718	2010	195	-15	154	+21	-1.7	B3	22.3	768	4433	213	+40	255	+46	+0.6	Ko	38.8
719	2142	195	-8	210	-23	+1.3	Ao	36.9	769	3360	214	+56	195	+10	-1.0	M6	20.1
720	2660	195	+21	179	-25	+1.9	Fo	15.2	770	2736	214	+12	153	+16	+4.3	G5	38.8
721	1011	195	-55	144	+30	+6.3	Go	29.8	771	3220	214	+46	174	+1	+0.7	Ko	40.1
722	3022	196	+40	175	+1	+0.3	Ko	30.2	772	804	215	-63	334	-35	+1.5	Ko	36.7
723	2198	196	-5	160	+27	-2.1	B5	19.5	773	3240	215	+47	204	-2	-0.2	B5	23.3
724	2013	196	-15	93	-24	-1.3	B5	9.0	774	1340	216	-44	246	-14	+0.8	Ko	36.2
725	2646	196	+20	178	-6	+0.7	Ao	16.9	775	2549	218	0	233	+24	+1.8	Ma	28.0
726	2822	197	+28	168	+41	+3.4	K2	51.9	776	3572	218	+73	294	-56	+1.4	A2	15.0
727	2399	198	+4	261	-18	-2.5	cmp	23.4	777	2487	218	-3	54	+4	+3.8	F2	36.6
728	3124	198	+47	206	-52	+0.3	Ma	7.5	778	2652	218	+6	311	-18	+6.3	G5	34.1
729	3537	199	+74	197	+46	+0.8	G5	49.4	779	3181	219	+40	188	+18	+2.4	Fo	41.5
730	2196	199	-7	193	+40	+1.8	F5	19.6	780	1044	219	-52	6	-22	+9.6	-	32.5
731	2429	200	+5	229	-51	-1.6	Ko	25.2	781	2834	220	+12	280	+12	+2.4	A2	24.5
732	2693	201	+20	132	+33	+0.8	A2	29.2	782	534	220	-74	23	+1	-0.6	Ko	30.6
733	3464	201	+69	204	-49	+5.3	G5	25.4	783	2453	220	-6	59	-22	+0.7	B8	14.9
734	2364	201	+1	198	+12	+2.1	Fo	13.9	784	2803	221	+10	182	-16	+0.2	G5	19.3
735	2483	201	+7	5	-14	-0.4	F2	32.3	785	2896	221	+15	353	+31	-0.4	K5	30.5
736	2812	202	+24	183	+13	+1.6	A2	23.3	786	2241	221	-15	133	+10	+4.2	Go	32.5
737	1369	202	-43	128	-16	-0.9	K5	37.4	787	3571	222	+72	191	+36	+1.8	A2	32.9
738	2572	202	+12	121	-36	+3.4	Go	41.7	788	2596	222	0	259	+25	-3.4	B3	46.1
739	3064	203	+40	66	-21	+2.1	F2	29.4	789	2618	222	0	187	-3	+2.4	A5	24.5
740	3145	203	+47	26	-42	+0.3	Ko	68.6	790	657	222	-67	356	+42	+0.1	Ko	61.8
741	2205	203	-9	160	-1	+2.1	F5	26.7	791	3461	223	+61	181	+13	+0.1	Ao	32.6
742	758	204	-66	292	-73	+0.1	Ko	59.8	792	2240	223	-22	148	+11	+1.8	A2	13.6
743	1191	204	-50	318	-51	+0.4	Ko	25.0	793	3485	224	+63	12	+23	+5.0	-	32.4
744	3438	204	+66	277	-68	+0.4	Ao	19.1	794	1315	226	-44	11	+15	+3.5	F5	24.0
745	2144	205	-12	167	+4	+5.3	F8	22.0	795	2498	230	-10	26	-6	-3.3	B1	39.9
746	3131	205	+45	274	-72	+2.8	F2	28.4	796	2764	230	0	207	-50	+6.8	Ko	34.7
747	2740	205	+19	96	-47	+1.7	K2	17.6	797	2929	231	+8	77	-52	+1.2	Ko	21.5
748	3035	205	+37	8	+72	+0.7	Ko	21.4	798	2762	232	-1	251	-21	-3.3	B5	40.8
749	850	205	-62	264	-51	+1.	Ko	29.9	799	3512	232	+60	190	-39	+3.4	F5	26.7
750	514	205	-77	345	-27	+0.9	Ko	29.9	800	740	232	-62	10	+76	-1.7	B5	37.9

Nr.	Yale	λ	β	l	b	M	Sp	v_a	Nr.	Yale	λ	β	l	b	M	Sp	v_a
801	2938	232°	+ 7°	262°	-39°	-0.1	Ko	36.2	851	3817	265°	+69°	204°	+64°	var.	Md	32.3
802	3330	233	+39	189	-20	+5.3	Go	47.0	852	3773	266	+32	303	-12	+7.6	K2	45.3
803	1614	233	-36	212	-52	+3.7	F8	18.2	853	3690	267	-6	156	-3	+2.3	M6	20.6
804	3212	234	+28	133	-23	+4.6	Go	47.4	854	3751	268	-1	92	-22	-2.2	B1	7.6
805	3487	234	+55	193	+22	+0.2	Ko	31.7	855	230	268	-71	28	-9	-0.3	Ko	39.8
806	2999	235	+ 8	68	-10	+2.6	F5	43.8	856	273	269	-48	334	+55	+0.1	Ko	26.9
807	3262	235	+30	328	+72	+2.9	F5	37.1	857	3825	269	+23	250	-4	+0.5	B8	23.1
808	3122	236	+16	68	-29	+2.2	Fo	36.7	858	3839	270	+6	204	-32	+0.7	B8	19.2
809	1746	236	-33	39	-64	+5.2	Go	35.1	859	3850	270	+77	346	-22	+3.0	—	29.9
810	3594	236	+68	101	-9	+1.0	Ko	10.4	860	3847	270	-6	112	-30	-1.5	B3	14.8
811	2756	238	-6	262	+17	-2.1	B3	30.7	861	3853	270	+6	100	-23	+0.6	B3	31.0
812	2776	238	-6	225	-35	+0.2	B5	17.3	862	3845	270	+34	246	-15	+0.2	K2	37.0
813	2773	238	-6	139	+6	+0.5	B9	19.9	863	3862	270	-9	61	+29	-0.5	Ko	44.2
814	3260	239	+25	148	-2	+7.1	Ko	43.9	864	3888	271	+3	262	-18	+0.4	B3	26.6
815	3683	240	+76	204	+42	+1.6	A2	14.7	865	3880	271	+14	190	-9	+0.3	K2	23.7
816	3091	240	+9	301	+3	+8.2	K5	44.9	866	134	272	-54	133	+68	+2.3	A2	20.6
817	3029	241	+3	198	-16	+1.2	A5	28.4	867	3870	273	+62	287	+4	+8.5	Ma	18.3
818	1313	241	-41	87	+42	-0.5	G5	47.0	868	82	273	-48	328	+9	-0.1	B9	16.0
819	1789	241	-32	275	+40	-0.8	G5	38.1	869	3922	276	+42	59	-30	+3.4	Go	52.6
820	2709	242	-10	97	-27	+0.6	B3	19.4	870	4158	276	-6	138	-30	-0.4	Ko	42.1
821	3169	242	+12	192	-6	+1.6	A2	24.8	871	7503	277	-51	128	+49	+0.4	B9	30.9
822	2927	243	-4	134	+34	0.0	Ko	47.9	872	3889	278	+75	342	+25	+2.2	A3	31.8
823	1877	244	-30	63	-18	+0.4	B5	12.7	873	4098	278	+7	145	-34	+0.6	B9	38.2
824	3475	244	+41	200	+33	+1.5	A5	16.5	874	7482	278	-52	234	-22	+2.7	A2	12.5
825	3521	244	+49	176	+20	+0.2	B9	18.9	875	4176	278	-2	204	-47	+0.3	Ko	14.9
826	3102	245	+3	290	-59	-1.6	B3	20.8	876	3923	279	+59	254	+41	+1.3	Fo	54.0
827	2959	249	-9	328	-61	+1.5	Ko	28.6	877	63	280	-64	7	+40	+6.1	Go	29.9
828	529	251	-62	139	+32	+1.4	Ao	37.5	878	3947	280	+52	293	+26	+0.1	K2	34.1
829	3202	251	+1	131	+49	-1.2	B5	32.3	879	3950	281	+56	268	+18	+0.4	Ao	34.3
830	2905	253	-15	73	+24	-1.2	B3	26.7	880	4257	281	-1	160	+16	+2.6	A3	24.4
831	3731	255	+67	226	+59	+3.5	F8	31.3	881	4037	282	+36	198	+16	+2.1	F5	30.2
832	589	255	-54	106	+55	+2.5	Fo	27.4	882	4134	282	+18	91	+56	-1.9	B2	27.9
833	3315	256	-1	216	-36	+1.3	Ao	32.2	883	4030	282	+37	140	-22	+7.2	Ko	39.2
834	3351	256	+1	255	+11	+1.9	Ko	41.3	884	4181	283	+16	204	-28	-0.2	B3	6.7
835	3712	257	+61	246	+61	+1.2	Ao	32.6	885	4264	283	+4	108	-5	-0.6	B5	45.9
836	3318	257	-5	70	+14	+0.4	B8	37.0	886	3991	283	+51	196	+42	+2.2	Fo	44.4
837	3462	258	+6	246	-8	-1.5	B5	56.0	887	3919	284	+73	202	+66	+0.8	Ko	60.5
838	3319	258	-5	26	-39	-1.0	B5	16.0	888	4180	284	+18	284	-68	-1.2	B3	19.8
839	3706	259	+53	227	+13	+0.5	Ko	33.2	889	4196	284	+15	279	-11	-0.6	F5	26.0
840	3408	259	-2	88	-7	+2.3	Ko	20.9	890	4460	284	-6	12	-16	+2.6	G5	25.9
841	3782	260	+66	270	+42	+0.9	Ko	33.3	891	4013	284	+49	33	+53	-0.5	K5	56.0
842	574	260	-49	146	-50	+1.8	Ko	15.0	892	4345	285	+2	53	-76	+5.8	G5	46.5
843	3682	260	+44	151	+14	-0.3	B8	24.0	893	4319	287	+9	258	+26	-1.2	B2	61.1
844	3641	264	+12	311	+17	-0.7	B5	33.8	894	4889	287	-15	30	-2	+4.6	Go	20.4
845	3645	264	+11	145	-30	-1.2	B3	5.2	895	4064	287	+46	212	+33	+0.1	Ko	35.5
846	3600	264	0	275	-19	-0.4	B5	31.6	896	4532	288	-3	208	+6	-2.1	Oe5	30.2
847	3643	264	+13	53	+40	+1.3	Ao	33.8	897	4377	288	+6	156	-53	+1.4	Ko	20.3
848	3765	264	+47	212	+10	+5.9	G5	41.1	898	24	289	-70	238	+6	+2.0	Ko	50.1
849	3791	264	+57	110	-9	+1.1	Ko	29.1	899	4278	290	+19	134	-34	-0.2	B5	25.4
850	340	265	-55	128	+40	+2.1	Ko	18.0	900	4184	290	+35	242	+8	+0.2	B8	25.7

Nr.	Yale	λ	β	l	b	M	Sp	v_a	Nr.	Yale	λ	β	l	b	M	Sp	v_a
901	4641	290°	-4°	241°	-26°	+3.3	F5	55.4	951	4672	306°	+15°	138°	-15°	0.0	B5	40.3
902	4140	291	+42	264	+42	+2.3	Ko	29.5	952	4773	307	+9	39	-46	+0.2	B5	28.1
903	4198	290	+32	187	+6	+0.5	Ko	14.3	953	4970	308	0	69	+50	+9.8	—	68.6
904	4336	289	+12	292	-3	+1.0	Ko	18.4	954	4108	308	+67	211	+33	+3.5	F5	26.8
905	5595	291	-26	211	-6	+1.4	Ko	16.9	955	5215	308	-10	155	+4	-1.1	B3	42.8
906	7321	290	-57	163	+29	+0.6	Ko	47.2	956	4404	309	+37	287	+40	+3.3	F5	41.1
907	4192	291	+34	230	+14	+2.7	Fo	44.1	957	5257	309	-11	26	-19	+2.8	F5	25.6
908	4208	292	+32	185	-58	+1.3	Ko	24.3	958	38	310	-80	129	-4	+3.2	F5	20.4
909	4933	291	-13	39	-73	+0.6	Ko	27.7	959	5887	310	-27	202	-14	+0.9	Ao	16.9
910	5141	292	-18	322	+65	-0.3	K2	22.0	960	4094	310	+69	217	+64	+1.3	F2	51.7
911	4897	292	-11	344	-17	+2.2	Fo	23.0	961	4530	310	+28	191	+76	+0.5	K2	43.3
912	4471	293	+9	211	-22	-1.0	B5	9.8	962	5196	311	-8	128	-19	+11.2	—	43.5
913	4401	293	+13	272	+10	+0.2	B5	20.5	963	4234	311	+55	338	+12	+2.5	F5	38.9
914	4014	293	+66	224	+27	+0.9	Ao	32.0	964	4510	311	+31	234	-11	-0.3	Ao	19.8
915	4075	295	+59	158	+4	+1.3	A2	32.7	965	4808	312	+12	137	-48	+1.0	B8	55.0
916	6086	293	-32	127	+17	+3.0	A3	40.5	966	4520	312	+32	254	+45	+3.2	F5	28.9
917	4537	294	+7	288	+4	+0.9	B8	37.5	967	7087	312	-59	219	+62	+4.2	Go	59.6
918	4123	294	+50	301	-44	+0.4	Ko	27.2	968	4521	313	+32	235	+17	-0.2	B9	35.8
919	4767	294	-5	170	+9	+1.1	Ao	39.9	969	6170	313	-34	49	+73	-0.3	Ma	21.5
920	4487	295	+10	234	+17	-0.8	B3	8.3	970	6426	314	-41	133	+43	-0.6	Ko	24.6
921	5323	295	-20	172	-12	+4.3	F8	57.6	971	4230	314	+57	158	-76	+0.5	Ao	14.5
922	4114	295	+52	178	+45	+0.6	Ko	43.1	972	5241	314	-8	278	+6	+11.6	—	30.6
923	4699	295	0	356	+18	+1.6	B8	31.2	973	4926	314	+8	256	-19	-1.5	B3	8.7
924	4081	296	+59	165	-1	+3.4	F8	53.8	974	4864	315	+12	56	-20	+2.5	F2	18.7
925	4295	296	+31	189	-55	+2.3	G5	21.5	975	6380	315	-39	135	+10	+2.2	Fo	32.5
926	4110	296	+55	243	-18	+0.5	K2	24.4	976	5335	315	-11	153	+52	+0.4	Ko	12.5
927	4567	297	+9	100	+31	-1.1	B3	11.4	977	4725	315	+20	272	+49	+0.4	B3	30.5
928	4953	297	-9	232	-7	+4.8	Go	34.2	978	4753	315	+19	158	-33	-1.6	B2	22.9
929	6162	297	-33	166	-22	+4.1	G5	53.4	979	5434	315	-14	168	+28	+0.3	Ko	13.4
930	4288	297	+33	213	+20	+1.1	Ko	20.0	980	4247	316	+57	232	+83	+5.7	F8	24.1
931	4243	298	+39	245	+36	+0.4	B9	24.4	981	6693	316	-48	189	+62	+10.2	Ma	24.2
932	4223	298	+42	333	-12	-1.0	Ma	27.0	982	4559	316	+33	55	-12	+1.7	F5	19.7
933	4106	298	+59	235	-60	+8.6	K2	34.4	983	5675	317	-21	152	-8	-1.0	Ma	37.9
934	5618	298	-25	148	+20	+2.3	A2	29.8	984	6882	317	-54	162	+47	0.0	B5	60.9
935	5201	299	-15	204	+21	+0.5	B8	14.7	985	4456	317	+41	225	+60	var.	Ao	17.2
936	4626	299	+8	227	+22	+1.1	K5	21.5	986	4618	318	+29	48	+49	+5.5	G5	28.3
937	5412	299	-20	27	+34	+3.9	Go	41.9	987	5960	318	-28	235	+40	-0.5	Ko	23.3
938	6985	299	-51	191	+47	+4.1	G5	34.9	988	5444	318	-13	152	+1	+7.7	Ma	61.0
939	7371	300	-66	212	+49	+6.8	G5	45.4	989	4792	318	+20	236	-20	+0.9	B8	16.6
940	4294	300	+37	152	+6	+2.7	Ao	13.1	990	4950	319	+12	184	-30	-2.3	Bo	16.1
941	4366	301	+30	139	-21	+0.3	B9	18.6	991	6869	319	-54	208	-34	+6.7	Ko	33.9
942	4583	301	+14	240	-7	-1.1	Ao	7.1	992	4876	319	-16	165	-28	-2.1	B1	20.4
943	5659	301	-25	152	+54	-3.2	B2	45.2	993	5070	320	+5	155	-15	+1.3	B8	28.8
944	4047	304	+70	226	+10	+0.6	Ko	29.4	994	7054	320	-60	193	+18	+4.5	F8	38.1
945	4231	303	+47	343	-9	+1.8	Fo	35.8	995	4442	320	+45	218	-38	+2.3	Fo	22.0
946	7121	304	-58	160	+42	+1.8	A2	14.4	996	5570	320	-16	328	-60	-0.8	G5	33.9
947	4193	303	+54	282	-48	+2.9	F5	10.8	997	4798	321	+21	330	-19	+0.6	Go	29.8
948	4390	304	+33	38	-59	0.0	K2	20.8	998	4794	321	+21	207	-51	-1.4	B2	13.1
949	4695	305	+12	265	+20	+5.1	Go	48.6	999	5901	321	-25	138	-15	+1.5	Fo	28.4
950	6005	305	-31	273	-59	+5.3	Go	71.7	1000	4831	321	+20	196	+60	+4.1	Go	20.9

Nr.	Yale	λ	β	l	b	M	Sp	v_a	Nr.	Yale	λ	β	l	b	M	Sp	v_a
1001	6412	321°	-41°	89°	-25°	-0.6	K5	25.0	1051	5091	338°	+16°	318°	-4°	+0.1	Ko	22.8
1002	5495	323	-13	180	+44	-0.7	Ko	36.6	1052	4888	339	+30	201	+80	+0.3	B9	12.4
1003	4219	323	+64	278	+37	+4.8	Go	44.1	1053	5744	339	-14	61	-58	+1.2	Ko	33.9
1004	5322	323	-5	175	+19	-1.6	B8	35.3	1054	5833	339	-17	206	+63	-1.1	Ko	27.0
1005	4851	323	+20	6	+59	+0.5	Ko	62.0	1055	5017	339	+32	317	-2	+0.8	G5	25.9
1006	4867	323	+20	73	-81	+0.9	Ko	13.6	1056	7285	339	-71	224	+70	+1.6	Ko	21.8
1007	5002	323	+11	62	-54	+0.8	Ko	8.2	1057	5603	340	-8	256	+29	+4.8	G5	8.6
1008	6318	323	-38	213	-10	-1.2	Ko	34.2	1058	5640	340	-10	37	-60	-0.3	K2	22.0
1009	4737	324	+28	305	-37	+2.9	F5	23.2	1059	5045	341	+21	252	+24	-0.1	Ko	21.5
1010	6406	324	-40	148	+19	+3.4	Fo	33.7	1060	4693	341	+42	351	-4	+0.6	Ao	24.1
1011	5402	324	-9	352	-15	+3.3	G5	32.4	1061	5563	342	-6	309	+9	+6.2	Ko	24.5
1012	4565	324	+40	231	+43	+0.6	K2	32.8	1062	5692	342	-12	238	-63	-1.2	Ko	13.9
1013	4893	324	+19	277	-9	+0.6	Ko	14.3	1063	4545	342	+50	237	+39	+3.2	F8	16.1
1014	5011	324	+12	144	-10	-0.1	K5	28.7	1064	5238	342	+10	176	+47	+0.4	B8	21.8
1015	5476	324	-11	315	+15	+0.6	Mb	33.1	1065	5564	342	-6	277	-17	+0.7	Ao	20.8
1016	5502	325	-12	154	-35	-0.1	B8	11.3	1066	5911	342	-19	343	-25	+2.5	A5	43.6
1017	4291	325	+60	267	+49	+4.8	K2	14.4	1067	4955	342	+27	3	-66	+5.5	Ko	31.2
1018	5064	325	+9	137	-34	+2.9	Fo	27.1	1068	6146	342	-28	51	-26	+0.8	Mb	13.5
1019	5127	326	+6	226	-1	+5.8	Ko	27.9	1069	5977	342	-22	358	-44	+4.0	B9	38.0
1020	5176	326	+3	311	-16	+0.2	K2	37.4	1070	5073	343	+21	188	-18	+1.5	Ko	44.7
1021	6060	327	-29	136	+5	+1.6	Ao	11.2	1071	4697	343	+43	339	+50	+4.3	Go	51.2
1022	5731	327	-19	202	+50	+2.0	F5	32.8	1072	5487	343	-2	310	-62	+0.2	K2	25.4
1023	5787	327	-20	198	+31	+5.3	G5	36.4	1073	5823	344	-15	171	-54	-0.8	F2	7.2
1024	4866	327	+23	13	-52	+0.4	Ko	35.8	1074	4358	344	+61	15	+31	-0.9	Ao	28.4
1025	6542	328	-44	178	+23	+0.4	Ko	25.3	1075	4439	344	+57	174	-57	+0.8	Ao	39.9
1026	4468	328	+48	185	+81	+0.8	Ko	11.3	1076	4932	345	+31	291	+28	+0.4	Ao	26.3
1027	4783	328	+28	162	+2	+4.7	Ko	18.5	1077	4191	345	+72	301	+11	+0.6	Ao	20.6
1028	4929	328	+20	225	+27	0.0	Ko	17.8	1078	5550	345	-3	33	+11	+1.4	A3	32.6
1029	5349	328	-5	296	-13	-1.2	K5	29.5	1079	4629	345	+47	164	+27	+0.5	Fo	11.5
1030	6581	330	-45	173	+1	+2.4	F5	43.9	1080	4638	345	+45	318	+2	+1.8	Ko	43.0
1031	7367	330	-73	170	+42	+5.7	-	42.7	1081	5255	345	+11	336	+3	-0.2	B8	13.6
1032	4162	332	+72	230	+71	+0.5	Ko	25.3	1082	5553	345	-3	126	+4	+1.2	Ao	24.4
1033	5184	332	+7	277	+14	+0.8	Ko	20.7	1083	5709	346	-10	193	-3	+2.9	F5	42.8
1034	4101	333	+75	143	-17	+1.3	A2	12.1	1084	4842	346	+36	305	-6	-0.1	G5	29.4
1035	6126	333	-30	255	-42	-1.1	B3	22.4	1085	4253	346	+68	243	+52	+3.6	F5	31.8
1036	6810	333	-53	210	+31	-0.3	B8	21.6	1086	5105	347	+21	309	-78	+2.2	A2	14.4
1037	4635	333	+40	316	+46	+2.5	F5	17.6	1087	5698	347	-9	238	+64	-1.1	B5	18.5
1038	4846	333	+28	310	-34	+4.6	Go	42.6	1088	5409	348	+5	100	-77	-0.3	B8	19.7
1039	5339	333	-1	24	-29	-1.7	K5	15.8	1089	6033	348	-22	281	+35	+1.3	Ko	45.1
1040	6196	333	-32	328	+16	+6.6	K5	40.3	1090	5569	349	-2	246	+1	-	-	23.0
1041	4674	335	+40	20	+25	+1.9	Ao	38.2	1091	5139	349	+19	326	-36	-0.2	Ko	32.6
1042	6131	335	-30	214	-20	+3.7	F5	40.7	1092	4807	349	+39	218	-11	+2.3	A3	13.5
1043	4738	335	+35	261	+37	+3.9	Go	15.2	1093	5138	350	+20	229	-10	var.	B8	32.0
1044	5540	335	-8	190	+3	+0.7	Ko	32.2	1094	6446	350	-38	185	-72	+2.6	G5	21.0
1045	5072	335	+16	278	-29	+5.6	Go	22.7	1095	6553	350	-41	13	-64	+0.3	Ma	34.9
1046	7389	335	-75	236	+46	+5.3	Ko	49.5	1096	5616	350	-3	227	+6	+8.7	-	35.8
1047	5635	336	-12	11	-33	-0.8	B8	25.9	1097	6930	350	-57	158	+5	0.0	B9	50.8
1048	4861	336	+29	42	-9	+0.8	Ko	19.2	1098	7194	350	-67	128	-56	+0.2	Ko	35.7
1049	6156	337	-30	106	-37	0.0	Ko	15.0	1099	5666	351	-6	89	-69	+0.3	Ko	10.4
1050	4683	338	+40	259	-14	+4.2	G5	10.3	1100	6009	351	-20	351	-36	+2.1	Ko	45.4

§ 2. LAS RELACIONES ENTRE LAS VELOCIDADES ESPACIALES, LAS MAGNITUDES ABSOLUTAS Y LOS ESPECTROS DE LAS ESTRELLAS

El material, ordenado según las coordenadas galácticas de las estrellas, ha sido primero dividido en 2 grupos en los cuales los valores absolutos de la latitud galáctica son: 1) $|\beta| < 30^\circ$ y 2) $|\beta| > 30^\circ$, para separar las estrellas más cercanas al plano de la vía láctea de las más distantes de dicho plano con el fin de poder investigar las diferencias eventuales de los dos grupos.

Primero partimos de la velocidad espacial v_a como argumento, de 5 a 5 km entre 0 y 70 km de la velocidad espacial; más allá de esta velocidad, hay tan pocas estrellas que la consideración de estos pocos corredores rápidos queda sin influencia en la estadística general de todas las otras estrellas. Las magnitudes absolutas M de cada grupo han sido simplemente promediadas, y los espectros, fijados brevemente por un número junto con una decimal. La decimal se refiere al índice decimal del tipo espectral, mientras que los tipos corresponden a los números siguientes: $B_0 = 0$, $A_0 = 1$, $F_0 = 2$, $G_0 = 3$, $K_0 = 4$ y $M = 5$. La siguiente tabla 1 contiene, entonces, el resultado de este procedimiento estadístico, agregando además las masas μ correspondientes a las M y calculadas según la ley masa-luminosidad de Eddington.

TABLA 1

v_a km/sek.	n	M	Sp	μ
5-10	23	+0.39	1.5	3.2
10-15	66	+0.56	1.9	3.0
15-20	81	+0.87	2.0	2.8
20-25	102	+1.03	2.3	2.7
25-30	94	+0.93	2.1	2.8
30-35	72	+1.27	2.5	2.5
35-40	55	+1.03	2.3	2.7
40-45	49	+2.00	2.9	2.9
45-50	19	+1.80	2.6	2.2
50-55	6	+2.15	3.6	1.9
55-60	14	+1.69	2.6	2.3

El argumento $v_{abs} = 0 - 5$ km sólo se dió en el caso de 2 estrellas, por lo cual ha sido suprimido. Lo mismo se hizo con el argumento 60-65 km para 6, el argumento 65-70 km para 2, 70-95 km para una estrella, respectivamente.

La tabla muestra, primero con respecto a la frecuencia de las velocidades absolutas, un y sólo un máximo entre 20 y 30 km, siendo n casi 100. El valor promedio corresponde, según cálculo exacto, a $v = 27.5$ km. A los 2 costados del máximo de la frecuencia tiene lugar, al comienzo, una bajada más lenta, pero, entonces, más rápida de la frecuencia. Es muy sorprendente que, en caso de $|\beta| < 30^\circ$ sea $N = \sum n = 583$, es decir, casi exactamente la mitad de todas las estrellas del cielo entero; por eso, fijando la superficie ubicada en torno a los 2 lados del ecuador hasta $|\beta| = 30^\circ$, exactamente la mitad de la esfera entera, todas nuestras estrellas, según su número, están repartidas uniformemente sobre toda la

esfera. Ante esta sorprendente equi-repartición de nuestros 2 grupos, despierta un mayor interés la cuestión por la frecuencia de las latitudes de las velocidades absolutas en ambos. En breve volveremos a este asunto.

Lo que se refiere, ahora, a las magnitudes absolutas M , la tabla 1 demuestra, generalmente, un crecimiento monótono de M con el aumento de la velocidad absoluta; sólo con $v = 35-40$ km y $v = 40-45$ km tiene lugar, primero, un salto hacia abajo, y luego otra vez hacia arriba, adaptándose el promedio de los 2 valores de M : $M = 1.50$ bien a la marcha de los M . Respecto de los argumentos finales $v = 50-55$ ($n = 6$) y $v = 55-60$ ($n = 14$) quizás habría sido más útil, por el pequeño número de los n , formar sólo el promedio $M = 1.9$, por adaptarse este valor directamente a la marcha general de la curva correspondiente. Este fenómeno del crecimiento de las magnitudes absolutas cuando ascienden las velocidades absolutas lo han hallado también los autores mencionados en la introducción, basándose en el material de estos tiempos. El material nuevo, y más completo, particularmente respecto de las paralajes y velocidades radiales, ha confirmado el resultado anterior, pero con una diferencia de principio. Los autores mencionados han hallado que corresponde a una variación de M por 1 magnitud, en promedio, respecto de todos los tipos espectrales, un aumento de v por 3 km/seg.; pero, según muestra tabla, este aumento es mucho mayor, pues a una variación total de M por + 1.5 magnitudes corresponde una alteración de + 50 km, es decir, que a una variación $M = 1$ corresponde una variación de v por 33 km, o sea el décuplo del valor constatado por los otros autores. En efecto, hay que considerar la circunstancia de que las estrellas de nuestro material se encuentran, en el promedio, dentro de una distancia de 100 parsec del sol (salvo algunos casos aislados), y que nuestro material, compuesto por estrellas de magnitudes aparentes entre 0-6, contiene esencialmente sólo estrellas gigantes. De ahí que, por otra parte, es tanto más sorprendente que el aumento de M y v_a simultáneamente, ya valga para la misma distancia, distancia ésta relativamente cerca del sol, pero con un gradiente $\frac{dv}{dM}$ mucho mayor que en mayores distancias, o en el promedio de mayores distancias del sol respectivamente.

Del mismo modo que M , el tipo espectral demuestra también un crecimiento acentuado con el aumento de v_a , desde Sp. 1.5 hasta 3.1, cuando formamos, también acá, el promedio Sp = 3.1 con respecto a los dos últimos argumentos $v = 50-55$ y $v = 55-60$ km. Este gradiente respecto del tipo espectral es mucho más pronunciado acá que en las investigaciones de los autores mencionados, siendo dicho gradiente 31 km por la unidad del tipo espectral.

Finalmente, la masa hecha dependiente de M , según Eddington, demuestra valores decrecientes de μ , cuando v aumenta, y eso a pesar del pequeño intervalo desde el máximo $\mu = 3.2$ hasta el mínimo $\mu = 2.2$ (promedio de los 2 últimos valores), de modo que resulta el gradiente correspondiente $\frac{dv}{d\mu} = -50$ km por 1 seg.

En suma, resulta, pues, respecto de las estrellas dentro de la latitud galáctica $\beta = \pm 30^\circ$ en un círculo de 100 parsec en torno al sol, lo siguiente: creciendo las velocidades absolutas crecen también las magnitudes absolutas, correspondiendo a un aumento medio de v por 33 km por seg. un aumento de la magnitud absoluta por una unidad de M ; en el mismo sentido crecen con v también las clases espectrales desde A_5 hasta G_0 , y finalmente, disminúyense las masas de las estrellas en el mismo intervalo de la velocidad de 50 km (absolutamente) por una unidad (masa del sol) cuando crece la velocidad.

Respecto de las latitudes galácticas con $|\beta| > 30^\circ$ hasta los 2 polos obtiéndose los resultados compuestos en la tabla 2 siguiente, ordenados según las zonas galácticas: $|\beta| = 30-50^\circ$, $|\beta| = 50-70^\circ$, y $|\beta| = 70-90^\circ$:

TABLA 2

v_a (km.)	$ \beta $			$30-50^\circ$			$50-70^\circ$			$70-90^\circ$		
	n	M	Sp	n	M	Sp	n	M	Sp	n	M	Sp
5-10	5	+1.4	3.5									
10-15	21	1.2	2.4	13	+2.4	2.7	4	1.4	2.4			
15-20	25	2.4	2.4	20	2.3	2.8	8	1.9	2.9			
20-25	42	1.1	1.8	26	1.6	2.4	8	2.1	2.8			
25-30	39	1.6	3.3	27	2.6	2.7	10	2.6	2.7			
30-35	30	2.2	2.4	37	2.6	2.9	18	2.1	3.1			
35-40	29	2.1	3.2	22	2.4	3.1						
40-45	20	2.4	3.7	11	2.3	3.0						
45-50	15	3.2	2.8	11	2.2	3.3	9	3.6	2.7			
50-65	11	1.4	3.9	12	1.1	2.4						

La tabla 2 demuestra, con respecto a la frecuencia n de los v , que, primero, en la zona de $|\beta| = 30-50^\circ$, el máximo se encuentra, como en la zona $|\beta| < 30$, entre 20-30 km, en tanto que en la zona $|\beta| = 50-70^\circ$ tiene lugar un desplazamiento del máximo hacia un v mayor, como asimismo en la zona $70-90^\circ$, aunque el número disminuído de las estrellas podría darnos una falsa imagen. Además, percíbese que también en las latitudes mayores galácticas tiene lugar un crecimiento de M cuando crece v , y eso se demuestra en la región $|\beta| = 30-50^\circ$ en un menor intervalo que respecto de $|\beta| < 30^\circ$ y oscilando más fuertemente por el número total menor de $n = 479$ frente a $n = 583$ en la zona galáctica ecuatorial, en tanto que las 2 areales, como ya he mencionado, son iguales. En las otras dos zonas $|\beta| = 50-70^\circ$ y $|\beta| = 70-90^\circ$ los valores de M permanecen, muy aproximadamente, constantes, en torno al valor promedio 2.4 en el primer caso y 2.5 en el segundo, prescindiendo de las 4 estrellas en el intervalo $v = 10-15$ km.

También los espectros varían sólo débilmente en las 3 zonas, hacia el rojo, es decir, en la 1ª región desde A_8-G_9 , en la 2ª desde F_4-G_3 y en la 3ª desde F_4-G_1 , mientras que los espectros de la zona galáctica ecuatorial se encuentran entre A_5-G_6 ; por eso, aproximándose al polo de la vía láctea tiene lugar un desplazamiento, aunque débil, del tipo espectral hacia el rojo. Las relaciones, acentuadas en la zona $|\beta| < 30^\circ$, entre la velocidad absoluta por una parte y las M, los espectros, y, por lo mismo también, respecto de la masa, por la otra parte, aparecen muy reducidas en las zonas $|\beta| > 30^\circ$, excepto todavía en la primera sub-zona $|\beta| = 30-50^\circ$.

§ 3. LA REPARTICIÓN ESPACIAL DE LAS VELOCIDADES ABSOLUTAS Y SUS DIRECCIONES

Para investigar la cuestión de una repartición sistemática de los vectores de las velocidades absolutas como así también de los espectros, el plano galáctico fué dividido, desde el sol como centro, en 6 regiones iguales, I-VI, cada una de una diferencia de longitud de 60° , siendo ubicada la región I en torno a $\pm 30^\circ$

a los costados del centro del universo supuesto en la longitud galáctica de $l = 325^\circ$. Entonces se obtiene la repartición siguiente del número y del promedio de las velocidades en los dos casos de $|\beta| < 30^\circ$ y $|\beta| > 30^\circ$:

PLANILLA

	λ	$ \beta < 30^\circ$		$ \beta > 30^\circ$	
		v	n	v	n
I.....	295-355	27.1	108	29.1	89
II.....	235-295	28.6	58	32.1	54
III.....	175-235	27.8	76	32.2	67
IV.....	115-175	28.3	123	31.1	81
V.....	55-115	27.6	132	31.9	112
VI.....	355- 55	26.3	104	27.1	93

Vale, pues, en la zona galáctica ecuatorial, en todas las direcciones, una velocidad muy casi igual; siendo insignificantes las desviaciones del promedio $\bar{v} = 27.6$ km. El motivo tendría por base, también acá, la distancia, diferente sólo de 200 parsec de las estrellas empleadas, al centro del universo. En la zona $|\beta| > 30^\circ$ el valor de v en todas las regiones resulta ser, en promedio 30,6 km, mayor que el de la región $|\beta| < 30^\circ$, y parece que ésta sea una diferencia sistemática. Una explicación da quizás la siguiente idea. Calculando en base de nuestras tablas anteriores las magnitudes absolutas medias que corresponden a la región galáctica como también a la extragaláctica, resulta la tablita siguiente:

$ \beta < 30^\circ$	$ \beta > 30^\circ$
$M_0 = 1.08$	$M_0 = 2.06$
$v = 27.6$	$v = 30.6$

de modo que la velocidad mayor en la zona extragaláctica sólo sigue a la ley estadística ya deducida entre la velocidad absoluta y la magnitud absoluta, siendo la M_0 extragaláctica correspondiente mayor que en la zona galáctica.

Con respecto a la repartición de b_v resulta la imagen siguiente, primero con respecto a frecuencia de las estrellas en las zonas de $|\beta| < 30^\circ$ y $|\beta| > 30^\circ$ (tabla 3):

TABLA 3
Repartición de las latitudes de los movimientos absolutos

$b_v > 0$	$ \beta < 30^\circ$ n	$ \beta > 30^\circ$ n	$b_v < 0$	$ \beta < 30^\circ$ n	$ \beta > 30^\circ$ n
+90°-85°	0	0	(-90°)-(-85°)	0	0
85-80	0	4	85-80	1	1
80-75	4	6	80-75	2	2
75-70	2	9	75-70	4	5
70-65	9	10	70-65	6	3
65-60	9	16	65-60	10	6
60-55	12	14	60-55	9	9
55-50	12	14	55-50	16	10
50-45	13	34	50-45	12	9
45-40	7	30	45-40	14	10
40-35	14	9	40-35	21	6
35-30	18	21	35-30	18	10
30-25	21	19	30-25	28	10
25-20	22	19	25-20	27	18
20-15	21	28	20-15	48	14
15-10	31	25	15-10	40	20
10-5	31	28	10-5	44	19
+5-0	32	30	-5-0	38	23

$b_v > 0 : S_1 = 258, S_1' = 316$
 $b_v < 0 : S_2 = 338, S_2' = 175$

Los números de las sumas S_1 y S_2 al final de las columnas demuestran, primero, que en la región de $|\beta| < 30^\circ$ el número de las estrellas con $b_v > 0$ con el número de $S_1 = 258$ es bastante menor de 80, que el para $b_v < 0$ con $S_2 = 338$, mientras que en la zona $|\beta| > 30^\circ$ (S_1' y S_2') tiene lugar lo inverso, 316 ó 175 respectivamente, de modo que en la zona $|\beta| < 30^\circ$ la dirección del vector-velocidad se encuentra preferentemente sobre el hemisferio austral, inversamente en la región de $|\beta| > 30^\circ$ sobre el boreal; pero en suma, es decir, independientemente de β , el número de las estrellas con $b_v > 0$, es decir, 574, es sólo un poquito mayor que en el caso de $b_v < 0$ con 513 estrellas. La frecuencia maximal de los b_v en la zona de $|\beta| < 30^\circ$ tiene lugar sobre el hemisferio austral con $b = -12^\circ,5$ y está agudamente pronunciada por una decaída rápida a los 2 lados del máximo y hasta $n = 0$. El promedio aritmético de todos los b_v en el caso de $|\beta| < 30^\circ$ tiene el valor de $b_v = -3^\circ,4$, casi 9° mayor que el máximo de las frecuencias, de manera que las velocidades absolutas de las estrellas en la zona de $|\beta| < 30^\circ$ siguen preferentemente a la vía láctea.

En la zona de $|\beta| > 30^\circ$ tiene lugar, correspondientemente a la mayoría de S_1' , un desplazamiento de la frecuencia maximal al hemisferio boreal, es decir con el valor de $b_v = +11^\circ$ como latitud de la frecuencia maximal. Una disminución de las altas frecuencias frente a las en el caso de $|\beta| < 30^\circ$ era de esperar en base de la disminución del número total de 596 en el caso de $|\beta| < 30^\circ$ a sólo 491 en el caso de $|\beta| > 30^\circ$, pero resulta sorprendente sin embargo que se produzca un achatamiento más fuerte, es decir una mayor uniformidad de las frecuencias que en la región de $|\beta| < 30^\circ$. Este achatamiento de la curva de frecuencia es idéntico a una repartición uniforme de la dirección de los vectores de velocidad que se

desarrolla desde el ecuador galáctico hasta los polos, aunque la tendencia de la repartición de los b_v respecto de la vía láctea se mantiene acentuadamente.

La próxima tabla 4 reproduce la repartición de los l_v de las velocidades absolutas.

TABLA 4
Repartición de las longitudes de los movimientos absolutos

l_v	$ \beta < 30^\circ$	$ \beta > 30^\circ$	l_v	$ \beta < 30^\circ$	$ \beta > 30^\circ$
0° - 10°	7	11	180° - 190°	27	20
10 - 20	9	10	190 - 200	26	28
20 - 30	16	13	200 - 210	26	19
30 - 40	11	9	210 - 220	18	23
40 - 50	11	6	220 - 230	23	13
50 - 60	11	8	230 - 240	17	16
60 - 70	16	6	240 - 250	12	14
70 - 80	16	5	250 - 260	14	10
80 - 90	10	7	260 - 270	10	8
90 - 100	16	9	270 - 280	17	13
100 - 110	17	10	280 - 290	15	6
110 - 120	15	14	290 - 300	12	7
120 - 130	17	15	300 - 310	12	18
130 - 140	26	23	310 - 320	9	11
140 - 150	23	20	320 - 330	12	17
150 - 160	36	16	330 - 340	9	16
160 - 170	24	27	340 - 350	6	14
170 - 180	32	29	350 - 0	14	13

En la zona $|\beta| < 30^\circ$ tiene lugar un máximo de frecuencia acentuado cerca de $l_v = 180^\circ$, a los dos costados tiene lugar, primero una disminución más lenta de la frecuencia y luego se torna más fuerte. También en la zona $|\beta| > 30^\circ$ hay un máximo de la frecuencia y asimismo cerca de $l_v = 180^\circ$, pero no tiene lugar una caída uniforme, sino se muestra a los dos lados todavía un mínimo adjunto, en $l_v = 60^\circ$ ó 300° respectivamente, seguido por otro máximo adjunto en $l_v = 330^\circ$ ó 10° respectivamente, a pesar del número relativamente pequeño de $n = 6$ estrellas en el mínimo; los máximos adjuntos contienen en el promedio $n = 15$ estrellas. El promedio de todos los l_v está ubicado, en la zona de $|\beta| < 30^\circ$, en la longitud $l_v' = 181^\circ.7$, y en la zona $|\beta| > 30^\circ$ en $l_v' = 187.8$, por eso, dentro de la inseguridad por el material todavía sencillo, en $l_v' = 185^\circ$ respecto de las dos zonas.

El significado del último número está fácilmente explicado. De mi análisis anterior de la constitución dinámica de las estrellas en base de los movimientos laterales lineales ha resultado como dirección del centro del universo o del blanco del vértex la longitud galáctica $l_v = 346^\circ$, usando 4500 estrellas, en tanto que por el material mucho menor de las estrellas con las paralajes y movimientos radiales conocidos simultáneamente (1200 estrellas), fué hallado como valor correspondiente $l_v = 261^\circ$. De ahí que, por la primera fecha más segura por su casi cuádruple material, las dos direcciones contrarias de preferencia $l_1 = 346^\circ$ y $l_2 = 166^\circ$ están en una coincidencia muy aproximada con las dos direcciones anteriormente deducidas l_v' de las estrellas investigadas acá, siendo seguro de antemano que estas direcciones de los movimientos absolutos deben coincidir con las anteriormente deducidas, es decir, con $l' = 182^\circ$ ó 362° respectivamente en el caso de $|\beta| < 30^\circ$, de modo que las desviaciones son sólo 16° ; está producida

sólo por lo que el valor $l_1 = 346^\circ$ ha sido deducido por el material total de 4500 estrellas. Lo análogo vale para la región de $|\beta| > 30^\circ$.

El hecho que en la región de $|\beta| > 30^\circ$ existen todavía 2 mínimos menores, distintos de 180° de longitud, formando por eso en realidad sólo una dirección y en la distancia de 90° de la dirección del máximo, aparece primero sorprendente, aunque ya sigue por la planilla que las posiciones de los mínimos y máximos adjuntos correspondientes aparecen también, aunque débilmente, en las mismas ubicaciones como en la región de $|\beta| < 30^\circ$. Estos mínimos y máximos adjuntos hallan, sin más, su explicación por la concepción unitaria de los movimientos estelares o en la teoría del vértex, teniendo lugar los movimientos de preferencia en dos direcciones contrarias, mientras que los movimientos perpendiculares laterales fijan el mínimo.

§ 4. FRECUENCIA DE LOS TIPOS ESPECTRALES

Finalmente resta todavía una investigación respecto de la repartición de los tipos espectrales en su dependencia de la latitud de las estrellas respecto de la vía láctea. La base forma la siguiente representación gráfica con el argumento de la latitud β de las estrellas.

TABLA 5
Frecuencia de los tipos espectrales

Tipo β	O—B _s	B _s —A _s	A _s —F _s	F _s —G _s	G _s —K _s	K _s —M	sin tipo
+90°-80°	0	1	0	1	2	0	0
80 -70	0	5	3	4	8	2	0
70 -60	2	5	7	12	10	4	1
60 -50	4	4	12	13	11	3	2
50 -40	7	12	15	11	31	4	2
40 -30	3	16	4	18	18	5	0
30 -20	11	14	9	10	32	4	3
20 -10	9	34	27	11	15	5	6
10 - 0	14	34	15	18	28	7	8
S+	50	125	92	98	155	34	22
0°-(-10°)	11	24	19	20	44	4	6
-10 -(-20)	15	28	23	24	35	3	2
20 -(-30)	10	26	14	11	23	5	4
30 -(-40)	6	13	7	12	17	2	3
40 -(-50)	6	12	6	8	13	3	1
50 -(-60)	4	7	9	9	19	2	0
60 -(-70)	2	4	2	7	11	1	0
70 -(-80)	1	5	3	2	4	0	0
80 -(-90)	0	0	0	1	1	0	0
S-	55	119	83	94	165	20	16
S+ + S-	105	244	175	192	320	54	38

Según la tabla de las frecuencias, todos los tipos espectrales demuestran sin diferencia, una concentración hacia la vía láctea, también todavía en los tipos K_s-M que contienen sólo pocas estrellas, y eso

con una decaída de la frecuencia que se pone acentuadamente más fuerte desde la latitud galáctica de 50° y a los dos costados del ecuador galáctico. La suma de las frecuencias hasta la latitud absoluta de 50° ha sido compuesta en la siguiente tabla, refiriéndose los números en paréntesis a la frecuencia entre $\beta = +50^\circ$ y -50° respectivamente y el polo perteneciente :

Tipo	$\beta > 0$	$\beta < 0$	Suma
O-B ₅	44 (6)	48 (7)	92
B ₆ -A ₅	110 (15)	103 (16)	213
A ₆ -F ₅	70 (22)	69 (14)	139
F ₆ -G ₅	68 (30)	75 (19)	143
G ₆ -K ₆	124 (31)	130 (35)	254
K ₆ -M.....	25 (9)	17 (3)	42

Es muy notable que en los dos grupos $\beta \geq 0$ no aparezca uno, sino 2 máximos de frecuencia, lo que ya es visible en la tabla anterior en base al número total de todos los representantes de cada tipo; el primer máximo de frecuencia se muestra en B₆ - A₅, es decir en el promedio en A₀; el segundo en G₆ - K₅, es decir en K₀ en el promedio. Todos los otros tipos permanecen esencialmente en la minoría. Sorprendente es la mayoría superior de las estrellas gigantes amarillas-rojas del tipo G₆ - K₅. Este fenómeno relativo de las estrellas brillantes, tratadas acá preferentemente, significa una ampliación de un resultado deducido hasta ahora sólo respecto de las estrellas más débiles que la vía láctea, la que no tiene un color blanco puro, sino más bien amarillento.

Además surge de la planilla que la frecuencia de cada tipo espectral es igual en las dos zonas $\beta > 0$ y $\beta < 0$, de modo que hay una simetría fuerte de los tipos con respecto a la vía láctea, y eso no solamente hasta la latitud absoluta de 50° ; pues, como demuestran los números de frecuencia en paréntesis, esta simetría vale también más allá de la latitud de 50° hasta los 2 polos, de manera que la vía láctea es un plano de simetría acentuado con respecto a todos los tipos espectrales.

PUBLICACIONES DEL OBSERVATORIO ASTRONOMICO DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

DIRECTOR : ING° VIRGINIO MANGANIELLO

SERIE ASTRONOMICA. — Tomo XXI, N° 2

ORBITA DEFINITIVA

DEL

COMETA WHIPPLE-BERNASCONI-KULIN, 1942_a

POR

GUALBERTO MARIO IANNINI



LA PLATA

OBSERVATORIO ASTRONOMICO

—
1945

Imprenta y Casa editora CONI. Perú, 684. Buenos Aires

AUTORIDADES DE LA UNIVERSIDAD

(1945)

PRESIDENTE

DOCTOR ALFREDO D. CALCAGNO

VICEPRESIDENTE

INGENIERO AQUILES D. MARTINEZ CIVELLI

SECRETARIO GENERAL

DOCTOR BERNARDO ROCHA

Consejeros titulares : INGENIERO CARLOS S. BIANCHI, DOCTOR ANGEL CABRERA, DOCTOR MANUEL CIEZA RODRÍGUEZ, PROFESOR ERNESTO L. FIGUEROA, DOCTOR JOAQUÍN FRENGUELLI, DOCTOR EDUARDO F. GIUFFRÀ, INGENIERO AGRÓNOMO SALOMÓN HOROVITZ, INGENIERO VIRGINIO MANGANIELLO, INGENIERO AGRÓNOMO ANTONIO E. MARINO, DOCTOR FERNANDO MÁRQUEZ MIRANDA, DOCTOR JOSÉ PECO, DOCTOR ANTONIO G. PEPE Y DOCTOR VICENTE RUIZ.

Guarda Sellos : DOCTOR ALFREDO D. CALCAGNO.

Delegado Interventor de la Facultad de Medicina Veterinaria : DOCTOR CORADINO SBARIGGI.

Representantes de los alumnos : SEÑOR JUAN CARLOS FRANCO Y SEÑOR JULIO MARIO MARTÍN.

INSTITUTO DEL OBSERVATORIO ASTRONÓMICO

Y

ESCUELA SUPERIOR DE CIENCIAS ASTRONÓMICAS Y CONEXAS

DIRECTOR

INGENIERO VIRGINIO MANGANIELLO

SECRETARIO

AGRIMENSOR CARLOS ALBARRACÍN SARMIENTO

PERSONAL DOCENTE, CIENTÍFICO Y TÉCNICO

Jefes de Departamento y Profesores : DOCTOR BERNHARD H. DAWSON, INGENIERO SIMÓN GERSHÁNIK, SEÑOR JUAN JOSÉ NISSEN, INGENIERO NUMA TAPIA y DOCTOR ALEXANDER WILKENS.

Astrónomo de Primera : AGRIMENSOR HUGO ARTURO MARTÍNEZ.

Geofísico : INGENIERO JOSÉ MATEO.

Geofísicos de Segunda : DOCTOR REYNALDO P. CESCO e INGENIERO ENRIQUE LEVÍN.

Astrónomo de Segunda : INGENIERO MIGUEL A. AGABIOS.

Astrónomo de Tercera : SEÑOR SILVIO MANGANIELLO.

Astrónomos de Quinta : AGRIMENSOR ÁNGEL A. BALDINI, DOCTOR CARLOS U. CESCO, AGRIMENSOR MIGUEL ITZIGSOHN, DOCTORES JORGE SAHADE y HERBERT WILKENS.

Ayudantes Astrónomos de Primera : SEÑORES RICARDO LUIS LASSALLE y RODOLFO LÓPEZ.

Ayudantes Geofísicos de primera : SEÑORES JULIO LENZI y JUAN C. NATALE.

Calculista : SEÑOR JORGE A. GARBARINO.

Ayudantes Astrónomos de Segunda : SEÑORES DOMINGO SANTIAGO SARMIENTO y PASTOR J. SIERRA.

Meteorólogo : SEÑOR GUILLERMO H. BOREL.

Calculistas Ayudantes : SEÑORITAS ANA GRIGORIEFF y HULDA ALICIA HARTMANN, SEÑOR FEDERICO A. THOMAS.

Auxiliar Geofísico : SEÑORITA SUZANA MARTÍNEZ SALAS.

Mecánico Especialista : SEÑOR GREGORIO PLOTNIKOFF.

PERSONAL ADMINISTRATIVO

Bibliotecario : SEÑOR ANDRÉS GUILLÉN.

Auxiliar : SEÑOR JOSÉ BLASETTI.

PERSONAL OBRERO, DE MAESTRANZA Y DE SERVICIO

1 Ebanista, 1 Albañil, 1 Jardínero, 3 Ordenanzas, 4 Peones jardineros, 1 Ayudante Mecánico, 1 Aprendiz Mecánico y 1 Cadete.

ORBITA DEFINITIVA DEL COMETA WHIPPLE-BERNASCONI-KULIN (1942)*

El primer cometa descubierto en el año 1942 fué hallado por el doctor Fred L. Whipple sobre una placa de patrullaje tomada en el Harvard College Observatory el 25 de enero. La imagen era de décima magnitud, mostrando núcleo y una cola de aproximadamente medio grado. Revisadas placas anteriores, también de patrullaje, pudo hallarse la imagen del cometa en dos de ellas de fecha 17 de enero de 1942 y 28 de diciembre de 1941.

Independientemente del anterior, fué descubierto por Bernasconi en Italia el 11 de febrero y por Kulin en Hungría el 13 del mismo mes.

Las observaciones se extienden poco más de un año, siendo abundantes al principio cuando el cometa recorría la zona ecuatorial, para reducirse a medida que se internaba en el cielo austral, en donde alcanzó a pasar a menos de $3^{\circ}.5$ del polo sur, volviendo a una declinación de -42° el 8 de enero de 1943, en que fué observado por última vez por el señor Jorge Bobone con el nuevo telescopio reflector de Bosque Alegre del Observatorio Nacional Argentino. Mientras tanto el cometa había recorrido un arco heliocéntrico de $172^{\circ}.7$ que va desde $-72^{\circ}.5$ hasta $+100^{\circ}.2$.

El brillo aumentó desde su descubrimiento hasta cerca de la sexta magnitud en el perigeo, sin que haya constancia de haber sido visto a ojo libre. Un estudio de la variación del brillo, según la expresión $B = \frac{K}{\Delta^2 r^n}$ da para las incógnitas K y n los valores : $K = 57.6$, $n = 5.7$ de manera que la expresión de la magnitud estelar sería :

$$\text{Magnitud} = 4,40 + 5 \log \Delta + 14.25 \log r$$

La gran mayoría de las observaciones usadas en esta determinación de brillo me fueron suministradas por el doctor B. H. Dawson, habiéndose efectuado con prismáticos binoculares en forma extrafocal, y en diversas posiciones relativas de los ojos. Otras fueron hechas por el que suscribe, en la misma manera, y otras 3, de diciembre 1942 y de enero 1943, fueron comunicadas desde Córdoba en base a sus observaciones fotográficas.

* Trabajo práctico final realizado de conformidad con una exigencia del plan de estudios de la Escuela Superior de Ciencias Astronómicas y Geográficas.

ÓRBITAS PRELIMINARES

Se tuvo conocimiento de ocho órbitas preliminares publicadas, y de entre ellas, se prefirió la calculada por el señor J. Bobone y publicada en H. A. C. 624 que se transcribe más abajo, la cual deja residuos pequeños aun en observaciones alejadas del intervalo utilizado en su determinación. Esto era ya un indicio de que sería adecuada como base para correcciones diferenciales.

Equinoccio 1942.0

$$T = 1942 \text{ Abril } 30.85622$$

$$\omega = 223^{\circ}43303$$

$$\Omega = 340^{\circ}12381$$

$$i = 79^{\circ}43204$$

$$q = 1.4450909$$

$$x = -1.0488306 \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{v}{2}\right) + 1.7377816 \operatorname{tg} \frac{v}{2}$$

$$y = +0.5587246 \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{v}{2}\right) - 0.1309458 \operatorname{tg} \frac{v}{2}$$

$$z = -0.8222339 \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{v}{2}\right) - 2.3056711 \operatorname{tg} \frac{v}{2}$$

EFEMÉRIDES

Las efemérides fueron calculadas a intervalos de tiempo convenientes para la interpolación, usando los elementos ya transcriptos. A las coordenadas rectangulares ecuatoriales del Sol que se tomaron del *American Ephemeris* se les aplicó la corrección que proviene de corregir en $+1''0$, a la longitud media usada en las tablas de Newcomb.

PERTURBACIONES

Las perturbaciones por los planetas: Venus, sistema Tierra-Luna, Júpiter y Saturno fueron calculadas de 20 en 20 días por el método de Encke e interpoladas luego para cada 10 días. Como fecha de osculación se tomó el 1 de mayo de 1942 a 0^h de T. U., por ser la fecha juliana divisible por 40, más cercana al paso del cometa por su perihelio. En el cálculo se usaron las tablas de *Planetary Co-ordinates* preparadas por el *Nautical Almanac Office*.

Los valores dados en las columnas 2^a, 3^a y 4^a de la tabla I son las perturbaciones de las coordenadas rectangulares ecuatoriales; en las dos últimas columnas de la misma van consignados los efectos sobre la ascensión recta y la declinación.

TABLA I

Fecha	Perturbación (8ª decimal)				
	ξ'	η'	ζ'	$\Delta\alpha \cos \delta$	$\Delta\delta$
1941. Dic. 22.0.....	+5502	- 1364	+ 96	+2"89	+2"35
1942. Ene. 1.0.....	+4650	- 1108	+ 278	+2.75	+2.34
11.0.....	+3848	- 884	+ 402	+2.59	+2.32
21.0.....	+3107	- 690	+ 473	+2.25	+2.32
31.0.....	+2434	- 525	+ 497	+1.90	+2.32
Feb. 10.0.....	+1841	- 385	+ 481	+1.23	+2.27
20.0.....	+1331	- 268	+ 432	+0.41	+2.03
Mar. 2.0.....	+ 912	- 172	+ 360	-0.44	+1.50
12.0.....	+ 586	- 99	+ 274	-0.86	+0.81
22.0.....	+ 346	- 51	+ 188	-0.69	+0.40
Abr. 1.0.....	+ 179	- 23	+ 112	-0.35	+0.19
11.0.....	+ 73	- 8	+ 52	-0.13	+0.07
21.0.....	+ 17	- 2	+ 13	-0.06	+0.01
May. 1.0.....	0	0	0	0.00	0.00
11.0.....	+ 14	- 2	+ 14	-0.02	+0.01
21.0.....	+ 50	- 9	+ 57	-0.05	+0.07
31.0.....	+ 100	- 25	+ 131	-0.11	+0.11
Jun. 10.0.....	+ 159	- 54	+ 255	-0.17	+0.17
20.0.....	+ 218	- 101	+ 372	-0.21	+0.24
30.0.....	+ 272	- 172	+ 540	-0.25	+0.29
Jul. 10.0.....	+ 317	- 273	+ 738	-0.26	+0.31
20.0.....	+ 349	- 409	+ 965	-0.25	+0.30
30.0.....	+ 366	- 585	+ 1218	-0.20	+0.18
Ago. 9.0.....	+ 366	- 805	+ 1494	-0.11	0.00
19.0.....	+ 350	- 1074	+ 1790	0.00	-0.32
29.0.....	+ 320	- 1393	+ 2103	+0.11	-0.75
Sep. 8.0.....	+ 277	- 1765	+ 2430	+0.02	-1.33
18.0.....	+ 224	- 2190	+ 2768	-0.61	-0.82
28.0.....	+ 162	- 2668	+ 3115	-1.63	+0.69
Oct. 8.0.....	+ 95	- 3199	+ 3468	-2.32	+2.09
18.0.....	+ 24	- 3781	+ 3827	-2.43	+2.74
28.0.....	- 50	- 4413	+ 4188	-2.69	+3.06
Nov. 7.0.....	- 126	- 5094	+ 4550	-2.97	+3.29
17.0.....	- 204	- 5823	+ 4913	-3.26	+3.51
27.0.....	- 284	- 6599	+ 5274	-3.56	+3.64
Dic. 7.0.....	- 368	- 7423	+ 5632	-3.85	+3.70
17.0.....	- 455	- 8295	+ 5985	-4.16	+3.74
27.0.....	- 547	- 9217	+ 6331	-4.47	+3.72
1943. Ene. 6.0.....	- 643	- 10191	+ 6669	-4.78	+3.70
16.0.....	- 743	- 11219	+ 6997	-5.11	+3.68

OBSERVACIONES

El material de observación que sirvió para el cálculo me fué comunicado en su mayor parte por carta y debo aquí agradecer por tal razón a los señores : J. Bobone, G. Van Biesbroeck, J. Jackson, así como también la cooperación prestada por el R. P. Juan Busolini, S. J., y el director del Observatorio del Ebro R. P. Antonio Romañá, S. J., que me facilitaron el conseguir las observaciones efectuadas en Europa ; pero por causas ajenas a sus voluntades, llegaron éstas con un atraso de muchos meses, es decir, cuando ya se había arribado al resultado final. Por tal causa quedaron excluidas del cálculo las observaciones de Madrid, pues las otras allí incluídas se las conocía por las circulares del « Bureau Central des Télégrammes Astronomiques ».

Como ya se ha dicho, las observaciones fueron abundantes cuando el cometa recorría regiones próximas al ecuador y más bien escasas cuando ganó altas declinaciones en el hemisferio austral ; pero esto pudo ser compensado por la calidad de las mismas.

A fin de adjudicar pesos, se dibujaron los residuos de las observaciones correspondientes a cada coordenada, mientras su número era suficiente como para trazar por ellas una curva que las representase, sin tomar en cuenta residuos que se apartaban mucho del conjunto. Con respecto a tal curva se determinó el error medio de los residuos, el cual resultó ser $\pm 1''.93$ y por esto se rechazaron unas pocas observaciones cuyos residuos fueron mayores que tres veces el error, es decir $\pm 5''.7$.

La adjudicación de pesos se hizo entonces, según la siguiente tabla :

Diferencias con las curvas de residuos	Peso adjudicado
$\Delta\alpha \cos \delta$	
0''0 a 1''4.....	4
1.5 » 2.8.....	2
2.9 » 5.7.....	1
Mayor de 5.7.....	0

Cuando no podía trazarse una curva fidedigna se optó por valorar las posiciones determinadas, teniendo como criterio el observador que los había efectuado y el instrumento empleado.

Desde julio en adelante los únicos que continuaron observando el cometa fueron el doctor B. H. Dawson y el señor J. Bobone, y dado que, en las comparaciones hechas en fechas anteriores a ésta correspondía peso 4 a más del 75 % de las observaciones de ambos, se decidió atribuir ese peso a toda observación posterior.

La observación de fecha 1941 diciembre 28, aunque sólo aproximada, se incluyó con peso mínimo, por ser anterior en mucho a toda medida efectuada con instrumentos mayores.

En la tabla II, que se da a continuación, están ordenadas las observaciones por orden cronológico y las distintas columnas dan : Número de orden, observador u observatorio, época de observación corregida por tiempo luz, paralaje para ambas coordenadas, la ascensión recta y la declinación, ambas reducidas, y finalmente los residuos seguidos de sus pesos respectivos.

TABLA II

Nº	Observador u observatorio	Fecha	(T. U.)	Paralaje		Posiciones aparentes		$\Delta\alpha \cos \delta$	$P\alpha$	$\Delta\delta$	$P\delta$
						α	δ				
1	Whipple.....	1941 Dic.	28 ^d 4090			13 ^h 12 ^m 43 ^s —	+27°55'0	0'0	1	0'0	1
2	Whipple.....	1942 Ene.	17.3973			13 7 36.—	+25.10.8	0'0		+ 0'3	
3	Whipple.....		25.4426			12 59 9.—	+23.52.4	0'0		+ 0'5	
4	Hellweg.....	Feb.	4.25219	-0 ^s 29	+2 ^m 9	12 40 43.43	+21 45 19 ^m 4	+ 2 ^m 0	2	- 0 ^m 8	4
5	Bobone.....		7.17932	-0.40	-5.9	12 32 57.21	+20 56 17.8	- 0.1	4	+ 0.4	4
6	Bobone.....		10.17253	-0.40	-6.3	12 23 42.19	+19 58 20.5	+ 0.1	4	+ 0.5	4
7	Fresa.....		11.87619	-0.46	+5.8	12 17 48.19	+19 21 10.2	+ 6.6	0	+ 1.3	4
8	Fresa.....		11.97544	-0.30	+5.7	12 17 26.28	+19 18 52.7	- 2.1	2	- 1.8	2
9	Bobone.....		12.15999	-0.42	-6.4	12 16 45.79	+19 14 36.3	- 0.3	4	- 1.1	2
10	Van Biesbroeck....		12.16794	-0.46	+5.2	12 16 44.07	+19 14 24.9	- 0.1	4	+ 1.4	4
11	Campa.....		12.97052	-0.31	+4.8	12 13 43.18	+18 55 33.3	-18.2	0	+ 7.0	0
12	Van Biesbroeck....		13.19697	-0.42	+4.9	12 12 52.54	+18 49 55.2	- 0.1	4	- 0.5	4
13	Van Biesbroeck....		14.23458	-0.33	+4.5	12 8 47.77	+18 23 47.8	+ 0.1	4	- 0.9	2
14	Campa.....		14.92545	-0.40	+5.5	12 5 58.40	+18 5 35.3	+ 0.9	4	- 0.6	4
15	Karpov.....		15.19579	+0.28	+4.4	12 4 51.38	+17 58 22.6	+10.8	0	+ 5.5	1
16	Polit Febrer.....		15.85615	-0.54	+6.2	12 2 2.44	+17 40 0.3	+ 8.4	0	+ 2.0	4
17	Fresa.....		15.88044	-0.47	+6.1	12 1 55.64	+17 39 18.6	+ 1.4	2	+ 1.5	4
18	Campa.....		15.91999	-0.40	+5.6	12 1 45.31	+17 38 13.0	+ 0.7	4	+ 3.1	2
19	Karpov.....		16.14790	-0.42	+5.2	12 0 46.87	+17 31 44.6	+16.3	0	+ 4.6	1
20	Cape of Good Hope.		16.93389	-0.36	-7.6	11 57 16.07	+17 8 37.5	- 3.3	1	- 1.4	2
21	Krumpbolz.....		17.91067	-0.35	+4.0	11 52 45.69	+16 38 38.4	+ 0.7	4	- 1.2	2
22	Möller.....		17.93441	-0.17	+6.9	11 52 39.83	+16 37 54.7	+12.9	0	- 0.2	4
23	Väisälä.....		17.98581	-0.18	+4.9	11 52 21.36	+16 36 14.3	- 1.9	2	- 2.6	1
24	Cape of Good Hope.		18.02084	-0.03	-8.2	11 52 14.44	+16 35 11.2	- 0.4	4	- 0.3	4
25	Cape of Good Hope.		18.02322	-0.02	-8.2	11 52 13.84	+16 35 6.1	+ 0.7	4	- 0.3	4
26	Cape of Good Hope.		18.05840	+0.11	-8.2	11 52 3.65	+16 33 58.0	- 2.0	2	- 1.3	2
27	Cape of Good Hope.		18.06088	+0.12	-8.2	11 52 3.02	+16 33 54.6	- 0.3	4	- 0.1	4
28	Van Biesbroeck....		18.10100	-0.54	+6.6	11 51 51.55	+16 32 39.7	- 2.2	2	+ 1.5	4
29	Fresa.....		18.92378	-0.39	+5.9	11 47 53.87	+16 5 56.1	+ 0.1	4	- 2.9	1
30	Bobone.....		19.10858	-0.51	-7.0	11 46 59.21	+15 59 41.4	- 2.6	2	- 1.4	4
31	Hoffmeister.....		19.12236	+0.2	+6.0	11 46 55.5	+15 59 15.	+ 0.3	4	0.0	4
32	Karpov.....		19.12990	-0.46	+5.6	11 46 51.43	+15 58 59.0	-23.8	0	- 0.7	4
33	Fresa.....		19.87507	-0.48	+6.5	11 43 9.65	+15 33 29.1	+ 4.5	1	- 0.1	4
34	Godard.....		19.91234	-0.46	+6.4	11 42 58.12	+15 32 10.0	+ 1.9	2	- 1.0	4
35	Godard.....		19.93035	-0.42	+5.9	11 42 52.55	+15 31 31.4	+ 0.9	4	- 1.8	2
36	Polit Febrer.....		19.96869	-0.32	+5.2	11 42 41.06	+15 30 19.0	+ 3.8	1	+ 7.4	0
37	Cape of Good Hope.		19.99094	-0.10	-8.4	11 42 34.19	+15 29 25.7	- 2.7	1	- 0.1	4
38	Cape of Good Hope.		19.99515	-0.09	-8.4	11 42 32.84	+15 29 17.2	- 2.1	2	+ 0.3	4
39	Van Biesbroeck....		20.14966	-0.49	+6.1	11 41 45.34	+15 23 50.3	+ 0.3	4	+ 0.2	4
40	Godard.....		20.93117	-0.41	+6.1	11 37 42.34	+14 55 39.7	+11.6	0	+ 2.3	2
41	Van Biesbroeck....		21.22275	-0.29	+5.5	11 36 8.90	+14 44 50.0	+ 0.7	4	+ 1.4	2
42	Väisälä.....		21.85127	-0.52	+6.2	11 32 45.80	+14 20 54.4	- 0.4	4	- 3.6	1
43	Van Biesbroeck....		22.47497	+0.53	+6.7	11 29 20.20	+13 56 34.2	+ 1.3	4	- 0.2	4
44	Stobbe.....		22.83428	-0.47	+8.5	11 27 19.99	+13 42 12.5	+ 0.1	4	+ 1.3	2
45	Cape of Good Hope.		22.97027	-0.12	-8.6	11 26 34.15	+13 36 41.3	+ 6.0	1	+ 0.6	2

TABLA II

(Continuación)

Nº	Observador u observatorio	Fecha	(T. U.)	Paralaje		Posiciones aparentes		$\Delta\alpha \cos \delta$	P α	$\Delta\delta$	P δ
						α	δ				
		1942									
46	Bobone.....	Feb.	23.07873	-0.55	- 7.3	11 25 57.00	+13 32 16.1	+ 0.3	4	+ 0.5	2
47	Bobone.....		23.08357	-0.54	- 7.4	11 25 55.36	+13 32 4.0	+ 0.4	4	+ 0.3	4
48	Van Biesbroeck....		23.41907	+0.42	+ 6.3	11 24 0.86	+13 18 15.9	+ 1.8	4	+ 1.0	2
49	Sharpless.....		24.16854	-0.33	+ 5.5	11 19 40.36	+12 46 36.0	- 2.5	1	- 1.1	4
50	Väisälä.....		24.82199	-0.57	+ 6.6	11 15 48.90	+12 18 8.4	- 1.0	2	- 1.6	4
51	Polit Febrer.....		26.89666	-0.43	+ 6.8	11 03 6.65	+10 42 25.8	+ 0.3	4	- 5.6	1
52	Cape of Good Hope.		26.96623	-0.02	- 8.7	11 2 40.49	+10 39 8.6	+ 1.3	4	- 2.2	2
53	Cape of Good Hope.		26.96779	-0.01	- 8.7	11 2 39.91	+10 39 2.7	+ 1.5	4	- 3.6	2
54	Jekhowsky.....	Mar.	2.97950	-0.04	+ 7.7	10 36 25.21	+ 7 12 37.3	+ 3.6	4	+ 4.1	1
55	Bobone.....		2.99592	-0.66	- 7.2	10 36 18.49	+ 7 11 40.1	+ 2.7	4	+ 0.5	4
56	Campa.....		3.00567	+0.15	+ 8.0	10 36 14.69	+ 7 11 12.1	+ 4.9	2	+ 4.4	1
57	Fresa.....		3.00935	+0.15	+ 7.6	10 36 13.27	+ 7 10 55.0	+ 6.0	1	- 0.6	4
58	Delporte.....		3.02132	+0.14	+ 9.0	10 36 8.15	+ 7 10 19.0	+ 1.9	4	+ 2.5	2
59	Möller.....		3.02535	+0.20	+ 9.8	10 36 6.67	+ 7 10 7.9	+ 4.2	4	+ 4.6	1
60	Bobone.....		3.03333	-0.57	- 7.6	10 36 3.24	+ 7 9 37.9	+ 1.3	4	+ 0.8	4
61	Väisälä.....		4.75773	-0.62	+ 7.7	10 24 18.02	+ 5 33 41.4	+ 9.9	0	- 1.0	2
62	Van Biesbroeck....		5.11711	-0.40	+ 8.1	10 21 49.26	+ 5 13 19.3	+ 4.2	4	- 0.1	4
63	Karpov.....		5.18905	+0.03	+ 7.8	10 21 20.05	+ 5 9 15.0	+12.0	0	+ 1.0	4
64	Cape of Good Hope.		6.85403	-0.27	- 8.0	10 9 48.13	+ 3 33 18.9	+ 6.4	2	+ 0.2	4
65	Cape of Good Hope.		6.85478	-0.26	- 8.0	10 9 47.84	+ 3 33 17.1	+ 6.7	2	+ 1.1	4
66	Cape of Good Hope.		6.85599	-0.26	- 8.0	10 9 47.31	+ 3 33 12.6	+ 7.0	1	+ 0.9	4
67	Väisälä.....		7.83229	-0.33	+ 7.9	10 3 0.70	+ 2 36 13.1	+ 6.4	2	- 0.8	2
68	Sharpless.....		8.08824	-0.39	+ 8.0	10 21 13.94	+ 2 21 16.0	+ 2.5	2	+ 0.9	4
69	Delporte.....		8.87919	-0.32	+ 10.1	9 55 45.11	+ 1 34 52.0	+ 3.4	4	+ 1.3	4
70	Bobone.....		9.03468	-0.41	- 7.2	9 54 40.63	+ 1 25 44.1	+ 3.6	4	+ 0.6	4
71	Dawson.....		10.06657	-0.15	- 7.7	9 47 33.86	+ 0 25 14.2	+ 3.9	4	+ 2.8	2
72	Van Biesbroeck....		10.27519	+0.35	+ 8.9	9 46 7.88	+ 0 12 58.2	+ 3.4	4	- 0.2	4
73	Godard.....		10.89597	-0.15	+ 9.2	9 41 53.24	- 0 23 16.7	+ 5.6	4	+ 1.1	4
74	Bobone.....		11.04018	-0.33	- 6.8	9 40 54.07	- 0 31 41.7	+ 2.0	2	+ 0.1	4
75	Karpov.....		11.08103	-0.23	+ 8.9	9 40 37.70	- 0 33 56.3	+ 6.6	2	+ 8.1	0
76	Bobone.....		12.02785	-0.35	- 6.6	9 34 12.97	- 1 28 56.7	+ 4.6	4	+ 0.6	4
77	Dawson.....		12.05415	-0.14	- 7.3	9 34 2.21	- 1 30 25.2	+ 2.4	2	+ 3.0	2
78	Van Biesbroeck....		12.31760	+0.52	+ 9.1	9 32 16.16	- 1 45 38.4	+ 4.5	4	- 0.2	2
79	Väisälä.....		12.80236	-0.30	+ 7.9	9 29 1.78	- 2 13 25.0	+ 4.2	4	- 0.3	2
80	Delporte.....		12.87445	-0.11	+ 10.6	9 28 33.04	- 2 17 27.2	+ 4.5	4	+ 4.2	1
81	Cape of Good Hope.		12.89198	+0.11	- 6.9	9 28 26.01	- 2 18 29.9	+ 4.2	4	+ 1.6	4
82	Cape of Good Hope.		12.89320	+0.12	- 6.9	9 28 25.53	- 2 18 34.7	+ 4.3	4	+ 1.0	4
83	Bobone.....		13.01000	-0.39	- 6.4	9 27 38.94	- 2 25 13.5	+ 3.2	2	+ 1.0	4
84	Delporte.....		13.80840	-0.30	+ 10.5	9 22 24.24	- 3 10 19.0	+20.2	0	+ 4.7	1
85	Polit Febrer.....		13.86992	-0.15	+ 9.2	9 21 59.32	- 3 13 49.4	+ 8.7	1	- 1.5	2
86	Väisälä.....		14.78851	-0.29	+ 8.4	9 16 1.91	- 4 4 55.4	+ 7.3	2	+ 0.5	4
87	Jekhowsky.....		14.96841	+0.26	+ 9.5	9 14 53.37	- 4 14 48.1	+19.3	0	+ 1.0	4
88	Dawson.....		15.02894	0.16	- 6.6	9 14 29.30	- 4 18 5.2	+ 6.7	2	+ 3.0	2
89	Dawson.....		15.07957	+0.07	- 6.6	9 14 9.57	- 4 20 54.9	+ 1.8	2	- 0.4	4

TABLE II
(Continuación)

Nº	Observador u observatorio	Fecha	(T. U.)	Paralaje		Posiciones aparentes		$\Delta x \cos \delta$	P α	$\Delta \delta$	P δ
						α	δ				
		1942									
90	Godard.....	Mar.	15.85979	-0.14	+ 9.8	9 9 13.11	- 5 3 12.5	+ 4.2	4	+ 3.0	2
91	Dawson.....		17.05102	0.00	- 6.1	9 1 50.44	- 6 6 20.2	+ 4.2	4	- 1.2	4
92	"		17.06906	+0.08	- 6.1	9 1 44.19	- 6 7 16.5	+ 9.5	1	- 1.2	4
93	Bobone.....		18.00852	-0.23	- 5.3	8 56 3.96	- 6 55 31.6	+ 2.2	2	0.0	4
94	Dawson.....		18.04718	+0.02	- 5.9	8 55 50.45	- 6 57 28.3	+ 6.5	2	+ 0.8	4
95	Dawson.....		19.04992	+0.06	- 5.7	8 49 57.45	- 7 47 27.8	+ 2.8	2	- 0.2	4
96	Van Biesbroeck....		19.08263	-0.15	+ 9.5	8 49 46.12	- 7 49 3.2	+ 3.0	4	+ 0.6	4
97	Godard.....		19.88822	+0.06	+ 9.9	8 45 10.42	- 8 28 0.3	+ 3.3	4	+ 0.3	4
98	Dawson.....		21.06653	+0.18	- 5.2	8 38 39.30	- 9 23 3.7	+ 2.8	4	+ 0.3	4
99	Karpov.....		21.10553	+0.15	+ 9.3	8 38 27.47	- 9 24 47.5	+15.5	0	+ 3.4	1
100	Cape of Good Hope.		21.78635	-0.08	- 4.9	8 34 47.53	- 9 55 33.7	+ 0.9	2	+ 0.3	4
101	Van Biesbroeck....		22.14281	+0.16	+ 9.5	8 32 55.08	-10 11 21.5	+ 3.7	4	- 0.8	4
102	Delporte.....		22.84981	+0.08	+10.4	8 29 15.62	-10 42 0.0	+ 1.9	4	+ 0.4	4
103	Van Biesbroeck....		24.14006	+0.19	+ 9.3	8 22 49.63	-11 35 48.1	+ 6.2	1	+ 2.2	2
104	Godard.....		24.87317	-0.12	+ 9.5	8 19 17.77	-12 5 10.6	- 0.1	2	+ 2.2	2
105	Karpov.....		26.02761	-0.03	+ 9.2	8 13 56.83	-12 49 47.2	+ 3.4	4	- 3.2	1
106	Bobone.....		31.01241	+0.12	- 2.8	7 53 29.56	-15 39 13.2	+ 0.3	4	0.0	4
107	Van Biesbroeck....	Abril	2.06240	+0.08	+ 8.6	7 46 15.86	-16 39 20.8	+ 0.3	4	+ 0.5	4
108	Dawson.....		3.04044	+0.31	- 3.4	7 43 2.36	-17 6 19.2	- 0.3	4	0.0	4
109	Van Biesbroeck....		4.05209	+0.08	+ 8.4	7 39 51.04	-17 33 8.4	+ 0.1	4	- 1.0	4
110	Polit Febrer.....		5.85682	+0.27	+ 7.8	7 34 30.84	-18 18 25.5	- 0.4	4	- 2.1	2
111	Dawson.....		6.02344	+0.29	- 3.0	7 34 2.71	-18 22 25.5	+ 1.1	4	- 0.5	4
112	"		7.98928	+0.21	- 2.7	7 28 45.59	-19 8 5.4	+ 4.3	1	- 1.4	4
113	"		8.99131	+0.23	- 2.6	7 26 14.81	-19 30 8.7	- 1.2	4	- 1.2	4
114	Bobone.....		9.00797	+0.23	- 2.1	7 26 12.27	-19 30 29.7	- 2.7	2	- 0.5	4
115	Dawson.....		9.01318	+0.29	- 2.8	7 26 11.67	-19 30 37.7	- 0.3	4	- 1.8	4
116	Dawson.....		9.93752	+0.07	- 2.3	7 23 59.00	-19 50 15.9	- 1.1	4	+ 0.1	4
117	Campa.....		10.80652	+0.21	+ 7.7	7 21 59.73	-20 8 11.4	+ 0.7	4	- 0.8	4
118	Fresa.....		10.83493	+0.27	+ 7.5	7 21 55.78	-20 8 45.8	- 1.1	4	+ 1.4	2
119	Dawson.....		10.95355	+0.14	- 2.3	7 21 39.81	-20 11 12.3	- 2.0	2	- 0.5	4
120	Iannini.....		10.96844	+0.18	- 2.4	7 21 37.95	-20 11 29.1	- 0.3	4	+ 0.8	4
121	Van Biesbroeck....		11.11912	+0.32	+ 7.1	7 21 17.92	-20 14 34.1	0.0	4	- 1.6	4
122	Cape of Good Hope.		12.71926	+0.09	- 1.9	7 17 53.91	-20 46 0.8	- 0.3	4	- 0.9	4
123	"		12.72405	+0.11	- 2.0	7 17 53.27	-20 46 5.0	- 1.1	4	+ 0.2	4
124	"		12.72717	+0.11	- 2.0	7 17 52.85	-20 46 8.2	- 1.8	4	+ 0.6	4
125	Van Biesbroeck....		13.07513	+0.24	+ 7.2	7 17 10.60	-20 52 48.2	- 1.1	4	- 1.0	4
126	Campa.....		13.81100	+0.24	+ 6.3	7 15 43.40	-21 6 35.3	+ 3.5	1	+ 0.9	4
127	Bobone.....		14.97181	+0.19	- 1.6	7 13 32.51	-21 27 49.8	- 1.8	4	- 0.6	4
128	Van Biesbroeck....		15.07568	+0.25	+ 7.0	7 13 21.18	-21 29 42.1	- 1.5	4	- 0.8	4
129	Dawson.....		15.94935	+0.16	- 2.0	7 11 47.83	-21 45 11.8	- 3.2	2	- 0.9	4
130	Dawson.....		15.96739	+0.22	- 2.1	7 11 46.11	-21 45 29.1	- 1.0	4	+ 0.7	4
131	Van Biesbroeck....		18.07412	+0.22	+ 6.6	7 8 17.56	-22 21 28.6	- 3.2	4	- 0.4	4
132	Cape of Good Hope.		18.74575	+0.22	- 1.8	7 7 15.82	-22 32 35.2	- 1.4	4	- 1.3	4
133	Cape of Good Hope.		18.74783	+0.23	- 1.8	7 7 15.57	-22 32 36.7	- 2.2	4	- 0.8	4

TABLA II

(Continuación)

Nº	Observador u observatorio	Fecha	(T. U.)	Paralaje		Posiciones aparentes		$\Delta\alpha \cos \delta$	P α	$\Delta\delta$	P δ
						α	δ				
		1942									
134	Cape of Good Hope.	Abril	18.75025	+0.24	- 1.8	7 7 15.31	-22 32 38.8	- 2.9	4	- 0.5	4
135	Van Biesbroeck....		19.07418	+0.27	+ 6.5	7 6 46.24	-22 37 55.9	- 2.5	4	+ 0.1	4
136	Dawson.....		20.94392	+0.20	- 1.8	7 4 7.52	-23 7 48.5	- 3.7	4	- 0.9	4
137	Dawson.....		20.96688	+0.26	- 2.0	7 4 5.74	-23 8 10.9	- 2.8	4	- 1.7	4
138	Dawson.....		23.96116		- 1.9		-23 53 49.5			- 0.2	4
139	"		23.96646	+0.27		7 0 21.87		- 4.0	4		
140	"		24.98699	+0.32	- 2.1	6 59 13.67	-24 9 0.8	- 2.9	4	- 2.7	4
141	Bobone.....		26.04462	+0.40	- 2.2	6 58 6.77	-24 24 21.9	- 3.6	4	- 1.0	4
142	Dawson.....		27.96656	+0.29	- 1.9	6 56 14.80	-24 51 47.3	- 4.8	4	- 1.3	4
143	Dawson.....		27.98742	+0.33	- 2.1	6 56 13.69	-24 52 6.1	- 4.2	4	- 2.4	4
144	Bobone.....		28.03327	+0.38	- 2.1	6 56 11.30	-24 52 44.2	- 2.4	4	- 1.7	4
145	Bobone.....	Mayo	3.95043	+0.26	- 1.1	6 51 36.97	-26 13 54.5	- 4.7	4	- 0.4	4
146	Dawson.....		4.98156	+0.33	- 2.0	6 50 58.69	-26 27 43.1	- 4.6	4	- 0.5	4
147	"		4.99821	+0.35	- 2.2	6 50 58.01	-26 27 55.8	- 5.6	4	+ 0.3	4
148	"		5.01352	+0.37	- 2.4	6 50 57.58	-26 28 7.1	- 4.2	4	+ 1.2	2
149	"		6.93532	+0.27	- 1.5	6 49 52.90	-26 53 45.0	- 6.4	4	- 2.1	4
150	Dawson.....		6.95674	+0.30	- 1.7	6 49 52.21	-26 54 1.3	- 6.6	4	- 1.3	4
151	Bobone.....		7.94020	+0.26	- 1.0	6 49 22.60	-27 7 1.5	- 4.9	4	+ 0.1	4
152	Dawson.....		8.03104	+0.38	- 2.7	6 49 19.88	-27 8 16.3	- 6.0	4	- 2.5	2
153	Bobone.....		12.01821	+0.37	- 2.1	6 47 40.68	-28 0 56.2	- 5.0	4	- 1.7	4
154	Cape of Good Hope.		12.70056	+0.25	- 1.2	6 47 26.74	-28 9 56.1	- 6.5	4	- 1.2	4
155	"		12.70385	+0.26	- 1.2	6 47 26.65	-28 9 58.1	- 6.7	4	- 0.6	4
156	"		12.70858	+0.26	- 1.3	6 47 26.58	-28 10 2.3	- 6.5	4	- 1.0	4
157	Dawson.....		13.95922	+0.32	- 1.8	6 47 3.51	-28 26 36.0	- 4.0	2	- 1.0	4
158	Dawson.....		15.91916	+0.27	- 1.3	6 46 32.24	-28 52 39.4	- 7.1	4	- 0.6	4
159	Dawson.....		15.93373	+0.29	- 1.5	6 46 32.05	-28 52 51.4	- 6.8	4	- 0.9	4
160	Bobone.....		16.02219	+0.37	- 2.2	6 46 30.72	-28 54 4.0	- 8.0	4	- 2.7	4
161	Dawson.....		18.94765	+0.31	- 1.7	6 45 56.15	-29 33 22.0	- 8.9	2	- 3.1	2
162	Dawson.....		18.96408	+0.33	- 1.9	6 45 56.22	-29 33 33.3	- 7.2	4	- 1.1	4
163	Bobone.....		19.94399	+0.30	- 1.2	6 45 47.59	-29 46 51.1	- 6.9	4	- 1.3	4
164	Dawson.....		20.95398	+0.32	- 1.8	6 45 40.12	-30 0 37.9	- 6.6	4	- 1.3	4
165	Dawson.....		21.92799	+0.30	- 1.5	6 45 34.05	-30 14 0.1	- 8.4	4	- 1.1	4
166	Dawson.....		23.92969	+0.30	- 1.5	6 45 25.96	-30 41 45.4	- 5.8	2	- 0.5	4
167	"		26.93949	+0.32	- 1.7	6 45 22.34	-31 24 21.4	- 9.5	4	- 3.4	2
168	"		26.96421	+0.34	- 2.0	6 45 22.44	-31 24 40.8	- 8.5	4	- 1.5	4
169	"	Junio	1.91517	+0.31	- 1.5	6 45 44.92	-32 52 11.1	- 8.4	4	- 0.1	4
170	Cape of Good Hope.		2.70800	+0.32	- 1.5	6 45 50.32	-33 4 15.0	- 11.4	2	- 0.3	4
171	Cape of Good Hope.		2.71112	+0.32	- 1.5	6 45 50.32	-33 4 18.5	- 11.7	2	- 1.9	4
172	Dawson.....		4.93224	+0.32	- 1.7	6 46 9.57	-33 38 34.5	- 7.2	2	- 0.6	4
173	Dawson.....		4.94579	+0.33	- 1.9	6 46 9.63	-33 38 46.8	- 8.1	4	- 0.2	4
174	Cape of Good Hope.		6.69208	+0.31	- 1.3	6 46 27.54	-34 6 20.4	- 8.3	4	- 0.8	4
175	Cape of Good Hope.		6.70043	+0.32	- 1.4	6 46 27.75	-34 6 27.6	- 7.7	4	- 0.8	4
176	Bobone.....		9.93337	+0.33	- 1.4	6 47 7.49	-34 58 55.9	- 8.1	4	+ 1.3	2
177	Bobone.....		11.93831	+0.34	- 1.5	6 47 36.29	-35 32 32.1	- 7.8	4	+ 0.5	4

TABLA II
(Continuación)

Nº	Observador u observatorio	Fecha	(T. U.)	Paralaje		Posiciones aparentes		$\Delta \alpha \cos \delta$	P α	$\Delta \delta$	P δ
						α	δ				
		1942									
178	Dawson.....	Junio	16.91658	+0.33	- 1.7	6 48 59.57	-36 59 42.6	- 8.7	4	- 0.9	4
179	Bobone.....		16.93849	+0.35	- 1.6	6 48 59.89	-37 0 5.6	- 9.7	4	0.0	4
180	Dawson.....	Julio	17.93171	+0.36	- 2.8	7 1 44.13	-48 33 47.7	-14.6	4	+ 5.1	4
181	Bobone.....		17.93363	+0.39	- 2.4	7 1 44.21	-48 33 46.4	-14.3	4	+ 9.5	4
182	Dawson.....		22.33506	-0.40	- 2.2	7 3 46.80	-50 37 20.1	-12.6	4	+ 7.0	4
183	Dawson.....		22.36006	-0.40	- 1.7	7 3 47.54	-50 37 58.9	-12.2	4	+13.5	4
184	Bobone.....	Agost.	4.94411	+0.40	- 3.2	7 9 30.47	-57 41 34.6	-16.8	4	+18.8	4
185	Dawson.....		11.35295	-0.51	- 0.4	7 11 28.56	-61 22 57.2	-17.7	4	+21.0	4
186	Dawson.....		12.36096	-0.51	- 0.2	7 11 42.68	-61 58 57.9	-16.3	4	+19.4	4
187	"		12.37962	-0.48	- 0.2	7 11 42.61	-61 59 36.8	-19.1	4	+19.8	4
188	"		19.32994	-0.60	- 0.2	7 12 25.64	-66 15 19.9	-17.0	4	+27.9	4
189	"		20.33553	-0.61	0.0	7 12 21.41	-66 53 18.7	-19.3	4	+28.5	4
190	Dawson.....		22.32429	-0.64	- 0.1	7 12 3.77	-68 9 7.1	-21.0	4	+28.8	4
191	"		23.32781	-0.65	+ 0.1	7 11 49.98	-68 47 39.6	-15.7	4	+29.8	4
192	"		23.34839	-0.62	+ 0.5	7 11 49.49	-68 48 25.2	-16.5	4	+31.7	4
193	"	Sept.	3.15771	-0.84	- 2.4	7 2 23.65	-75 51 49.2	-15.5	4	+47.7	4
194	Dawson.....		3.18446	-0.90	- 2.0	7 2 20.37	-75 52 55.9	-16.9	4	+44.5	4
195	"		5.14459	-0.91	- 2.4	6 58 19.24	-77 10 18.6	-13.1	4	+45.8	4
196	"		5.16863	-0.98	- 1.9	6 58 15.91	-77 11 14.9	-12.9	4	+46.3	4
197	"		6.14512	-1.00	- 2.2	6 55 46.62	-77 49 40.7	-13.7	4	+47.8	4
198	Dawson.....		6.17096	-1.05	- 1.8	6 55 41.55	-77 50 38.3	-16.0	4	+51.1	4
199	"		8.13264	-1.07	- 2.3	6 49 28.66	-79 7 28.7	-14.8	4	+51.1	4
200	"		8.15561	-1.15	- 1.9	6 49 25.24	-79 8 23.3	- 9.8	4	+49.9	4
201	"		12.18440	-1.62	- 0.6	6 28 52.62	-81 42 41.6	- 5.3	4	+56.4	4
202	Dawson.....		12.21128	-1.61	0.0	6 28 40.24	-81 43 43.3	- 7.7	4	+55.0	4
203	"		12.24235	-1.55	+ 0.7	6 28 29.03	-81 44 53.2	- 3.7	4	+54.8	4
204	"		14.17397	-1.88	- 0.4	6 12 22.24	-82 55 41.7	+ 3.1	4	+59.0	4
205	"		14.20924	-1.87	+ 0.2	6 12 5.08	-82 56 37.7	+ 0.4	4	+59.5	4
206	Dawson.....		14.22391	-1.81	+ 0.7	6 11 51.53	-82 57 31.4	+ 1.4	4	+58.3	4
207	"		16.16136	-2.22	- 0.1	5 48 31.11	-84 4 40.6	+ 9.0	4	+58.7	4
208	"		16.17889	-2.21	+ 0.2	5 48 15.46	-84 5 11.9	+ 8.1	4	+62.5	4
209	"		16.20022	-2.15	+ 0.7	5 47 57.03	-84 5 55.3	+ 8.4	4	+61.6	4
210	Dawson.....		28.95860	-1.83	+ 1.9	23 13 8.33	-84 53 1.1	+65.3	4	-32.5	4
211	"		28.98871	-1.49	+ 2.3	23 12 32.74	-84 52 10.5	+63.5	4	-24.3	4
212	"		29.01336	-1.18	+ 2.6	23 12 6.82	-84 51 38.5	+65.4	4	-35.3	4
213	Bobone.....	Oct.	2.01981	-0.64	+ 2.8	22 30 4.14	-83 16 57.4	+61.0	4	-42.5	4
214	Dawson.....		2.06875	+0.14	+ 2.9	22 29 34.97	-83 15 18.5	+62.6	4	-41.3	4
215	Dawson.....		3.03642	-0.12	+ 2.8	22 20 32.62	-82 42 50.9	+62.6	4	-43.8	4
216	Bobone.....		7.05339	+0.13	+ 2.8	21 55 41.03	-80 24 0.7	+54.2	4	-53.2	4
217	Dawson.....		9.98880	-0.10	+ 2.5	21 45 25.36	-78 41 15.3	+56.4	4	-58.3	4
218	Bobone.....		9.99097	-0.21	+ 2.7	21 45 24.00	-78 41 11.7	+53.4	4	-59.0	4
219	Dawson.....		14.04201	+0.29	+ 2.2	21 36 59.20	-76 20 26.4	+51.0	4	-64.9	4
220	"		15.09604	+0.52	+ 1.6	21 35 32.22	-75 44 12.0	+52.4	4	-64.5	4
221	"		15.12673	+0.62	+ 1.3	21 35 29.65	-75 43 11.0	+51.5	4	-66.8	4

TABLA II

(Conclusión)

Nº	Observador u observatorio	Fecha	(T. U.)	Paralaje		Posiciones aparentes		$\Delta\alpha \cos \delta$	$P\alpha$	$\Delta\delta$	$P\delta$
						α	δ				
		1942									
222	Dawson.....	Oct.	16.14093	+0.65	+ 1.0	21 34 17.63	-75 8 26.7	+47.0	4	-61.8	4
223	Dawson.....		16.17689	+0.72	+ 0.4	21 34 15.20	-75 7 18.2	+46.5	4	-66.8	4
224	Bobone.....		30.00921	+0.16	+ 1.8	21 30 22.49	-67 39 52.7	+47.5	4	-75.3	4
225	Bobone.....		30.01821	+0.19	+ 1.7	21 30 22.53	-67 39 36.2	+47.0	4	-75.3	4
		1942									
226	Bobone.....	Dic.	2.02612	+0.20	+ 0.2	21 50 48.63	-53 20 12.9	+45.6	4	-85.2	4
227	Bobone.....		15.02504	+0.19	+ 0.2	22 1 57.10	-48 53 21.3	+43.9	4	-83.3	4
		1943									
228	Bobone.....	Enero	8.02401	+0.16	- 0.7	22 23 33.70	-42 2 41.4	+42.5	4	-87.5	4

LUGARES NORMALES

Las observaciones disponibles se dividieron en 17 lugares normales de los cuales el primero y el último constan de una sola observación cada uno, mientras los otros se determinaron según la marcha de los residuos.

En el cuadro siguiente se da: el número del lugar normal, la fecha adoptada para él, las observaciones extremas incluidas, el número de observaciones que intervienen y el peso que le correspondió en cada coordenada.

Lugar normal	Fecha adoptada	Observaciones límites	Número que interviene	$P\alpha$	$P\delta$
I.....	1941. Dic. 28.4	1	1	1	1
II.....	1942. Feb. 12.0	4-20	17	39	49
III.....	Feb. 22.0	21-53	33	91	94
IV.....	Mar. 8.0	54-73	20	56	63
V.....	Mar. 19.0	74-105	32	87	100
VI.....	Abr. 10.0	107-113	24	84	92
VII.....	Abr. 22.0	131-144	14	52	52
VIII.....	May. 14.0	145-168	24	90	88
IX.....	Jun. 8.0	169-179	11	38	42
X.....	Jul. 31.0	180-187	8	32	32
XI.....	Ago. 31.0	188-200	13	52	52
XII.....	Sep. 14.0	201-209	9	36	36
XIII.....	Oct. 1.0	210-215	6	24	24
XIV.....	Oct. 13.0	216-223	8	32	32
XV.....	Oct. 30.0	224-225	2	8	8
XVI.....	Dic. 8.5	226-227	2	8	8
XVII.....	1943. Enc. 8.0	228	1	4	4

Se supuso que el andar de los residuos dentro de los límites de cada lugar normal estaba representado por una ecuación del tipo:

$$R = a + bt + ct^2$$

en donde a , b y c son coeficientes a determinar, mientras que t es el tiempo a partir de la fecha adoptada.

La determinación de b y c se hizo en base a tres puntos bastante distantes entre sí y el valor de a se obtuvo haciendo el promedio pesado de los residuos que deja la ecuación para cada observación individual, luego de haber sido sustituidos los valores de b y c en ella.

A continuación se da: número del lugar normal, fecha, residuo, perturbación, residuo menos perturbación y peso en ascensión recta y en declinación respectivamente.

Lugar normal	Fecha	Residuos		Perturbación		Res. — Perturb.		Pesos	
		$\Delta\alpha \cos \delta$	$\Delta\delta$	$\Delta\alpha \cos \delta$	$\Delta\delta$	$\Delta\alpha \cos \delta$	$\Delta\delta$	α	δ
I.....	1941. Dic. 28.4	0"0	0"0	+2"81	+2"34	-2"81	-2"34	1	1
II.....	1942. Feb. 12.0	+0.18	+0.60	+1.07	+2.24	-0.89	-1.64	39	49
III.....	Feb. 22.0	+0.37	-0.10	+0.23	+1.95	+0.14	-2.05	91	94
IV.....	Mar. 8.0	+4.23	+0.99	-0.75	+1.08	+4.98	-0.09	56	63
V.....	Mar. 19.0	+3.90	+0.16	-0.78	+0.49	+4.68	-0.33	87	100
VI.....	Abr. 10.0	-0.46	-0.43	-0.15	+0.08	-0.31	-0.51	84	92
VII.....	Abr. 22.0	-3.02	-1.07	-0.05	+0.01	-2.97	-1.08	52	52
VIII.....	May. 14.0	-6.50	-1.15	-0.03	+0.03	-6.47	-1.18	90	88
IX.....	Jun. 8.0	-8.93	-0.39	-0.16	+0.16	-8.77	-0.55	38	42
X.....	Jul. 31.0	-15.44	+14.39	-0.19	+0.16	-15.25	+14.23	32	32
XI.....	Ago. 31.0	-16.56	+41.81	+0.12	-0.89	-16.68	+42.70	52	52
XII.....	Sep. 14.0	+0.62	+57.91	-0.29	-1.14	+0.91	+59.05	36	36
XIII.....	Oct. 1.0	+62.85	-37.28	-1.94	+1.12	+64.79	-38.40	24	24
XIV.....	Oct. 13.0	+52.22	-62.19	-2.41	+2.48	+54.61	-64.67	32	32
XV.....	Oct. 30.0	+47.25	-75.30	-2.75	+3.11	+50.00	-78.41	8	8
XVI.....	1942. Dic. 8.5	+44.75	-84.25	-3.89	+3.71	+48.64	-87.96	8	8
XVII.....	1943. Ene. 8.0	+42.47	-87.50	-4.84	+3.70	+47.31	-91.20	4	4

Seguidamente, en un cuadro se dan: las coordenadas rectilíneas del Sol (1942.0) y las posiciones del cometa resultantes de sumar a las efemérides, los residuos menos perturbación correspondientes a cada lugar normal.

Lugar normal	Fecha	Coordenadas del Sol corregidas			Posiciones del cometa			
		X	Y	Z	$\alpha_c + \Delta\alpha$	P	$\delta_c + \Delta\delta$	P
I.....	1941. Dic. 28.4	+0.1071642	-0.8967229	-0.3889208	198°10'38"5		+27°55'3"6	
II.....	1942. Feb. 12.0	+0.7847935	-0.5494973	-0.2383192	184 20 11.5		+19 18 17.2	
III.....	Feb. 22.0	+0.8794373	-0.4156583	-0.1802776	177 59 17.6		+14 15 10.9	
IV.....	Mar. 8.0	+0.9663938	-0.2081107	-0.0902566	150 27 42.2		+2 26 24.9	
V.....	Mar. 19.0	+0.9949114	-0.0356890	-0.0154806	132 33 43.4		-7 45 0.9	
VI.....	Abr. 10.0	+0.9444961	+0.3067219	+0.1330293	110 57 34.6		-19 51 34.9	
VII.....	Abr. 22.0	+0.8595309	+0.4782689	+0.2074263	105 41 8.9		-23 24 12.1	
VIII.....	May. 14.0	+0.6143150	+0.7363414	+0.3193544	101 45 39.0		-28 27 8.6	
IX.....	Jun. 8.0	+0.2356694	+0.9057776	+0.3928413	101 40 39.1		-34 27 19.9	
X.....	Jul. 31.0	-0.6131207	+0.7421494	+0.3218751	106 53 49.0		-55 0 5.2	
XI.....	Ago. 31.0	-0.9288576	+0.3624674	+0.1572019	106 43 33.4		-73 47 7.8	
XII.....	Sep. 14.0	-0.9922401	+0.1515590	+0.0657348	93 30 42.5		-82 49 26.3	
XIII.....	Oct. 1.0	-0.9932798	-0.1147888	-0.0497881	340 25 16.4		-83 50 18.4	
XIV.....	Oct. 13.0	-0.9432395	-0.2983359	-0.1293878	324 40 29.1		-76 56 26.9	
XV.....	Oct. 30.0	-0.8040582	-0.5345696	-0.2318496	322 35 42.5		-67 40 12.6	
XVI.....	1942. Dic. 8.5	-0.2421791	-0.8759202	-0.3798909	329 4 6.4		-51 02 58.9	
XVII.....	1943. Ene. 8.0	+0.2846252	-0.8635578	-0.3745307	335 53 12.3		-42 3 7.0	

ECUACIONES DE CONDICIÓN

Los coeficientes de las ecuaciones de condición fueron calculados siguiendo las fórmulas dadas por Stracke en su obra *Bahnbestimmung der Planeten und Kometen*, págs. 327-328-330.

Ecuaciones para α

+0.79162 $d\Omega'$	+0.52271 di'	-0.55993 $d\omega'$	-0.11242 de	-0.48592 dy	+0.0013664 dT	= - 2".81
+1.74288	+0.53564	-0.58462	-0.05431	-0.63731	+0.0022784	= - 0.89
+2.17717	+0.46977	-0.54024	+0.00363	-0.52501	+0.0035323	= + 0.14
+2.42905	+0.17688	-0.45552	+0.10390	-0.06827	+0.0067631	= + 4.98
+1.98435	-0.10011	-0.44711	+0.12632	+0.30477	+0.0088113	= + 4.68
+0.99229	-0.31010	-0.54881	+0.05770	+0.48899	+0.0093165	= - 0.31
+0.72452	-0.33374	-0.60091	+0.02149	+0.47775	+0.0090486	= - 2.97
+0.47813	-0.36338	-0.67187	-0.02585	+0.46769	+0.0086127	= - 6.47
+0.33775	-0.41609	-0.72961	-0.06263	+0.49030	+0.0081845	= - 8.77
+0.10523	-0.59296	-0.79646	-0.11821	+0.54496	+0.0071899	= - 15.25
-0.03049	-0.62092	-0.81075	-0.14683	+0.56081	+0.0065812	= - 16.68
+0.02272	-0.40747	-0.92486	-0.15981	+0.64809	+0.0068954	= + 6.91
+0.50407	+0.97217	-0.10417	+0.07093	+0.08827	-0.0002986	= + 64.79
+0.47170	+0.88761	+0.14598	+0.11172	-0.09347	-0.0018565	= + 54.61
+0.49552	+0.80089	+0.14831	+0.11823	-0.10055	-0.0017595	= + 50.00
+0.56027	+0.65755	+0.01337	+0.10574	-0.01636	-0.0008167	= + 48.64
+0.59523	+0.57769	-0.07761	+0.09135	+0.04004	-0.0002743	= + 47.31

Ecuaciones para δ

-0.21031	-0.31164	-0.97714	+0.09893	-0.71254	+0.0067292	= - 2.34
-0.21650	-0.19284	-1.84856	+0.20216	-1.34008	+0.0163971	= - 1.64
-0.09827	-0.12171	-2.19381	+0.25144	-1.53283	+0.0210860	= - 2.05
+0.01906	-0.03523	-2.42899	+0.30210	-1.45198	+0.0269116	= - 0.09
-0.13578	+0.02980	-2.14649	+0.25352	-1.05183	+0.0260680	= - 0.33
-0.33907	+0.21233	-1.32958	+0.08829	-0.45706	+0.0176494	= - 0.51
-0.32197	+0.29206	-1.03767	+0.03086	-0.29538	+0.0142158	= - 1.08
-0.24109	+0.40410	-0.70891	-0.03488	-0.12331	+0.0102429	= - 1.18
-0.13592	+0.51563	-0.51191	-0.08301	-0.01306	+0.0077676	= - 0.55
+0.16012	+0.76380	-0.43264	-0.14651	+0.19792	+0.0056101	= + 14.23
+0.37964	+0.85957	-0.56826	-0.11532	+0.38715	+0.0047976	= + 42.70
+0.46790	+0.95791	-0.43768	-0.03800	+0.31837	+0.0027688	= + 59.05
-0.19500	+0.02487	+1.03896	+0.11192	-0.74042	-0.0063852	= - 38.40
-0.31640	-0.19633	+1.03023	+0.04072	-0.73470	-0.0053008	= - 64.67
-0.31026	-0.16838	+1.00132	-0.02973	-0.70146	-0.0042201	= - 78.41
-0.19275	-0.01359	+0.90747	-0.13670	-0.59462	-0.0026285	= - 87.96
-0.10824	+0.05946	+0.84124	-0.19055	-0.52071	-0.0019063	= - 91.20

Con la finalidad de hacer más homogéneas las ecuaciones anteriores se multiplicó a cada una por la raíz cuadrada de su peso respectivo y además se dividió o multiplicó cada columna por un número entero tal, que el mayor de los términos fuese un número próximo a la unidad, claro está que las incógnitas de este sistema serán otras, relacionadas a las anteriores por las expresiones algebraicas que a continuación se dan :

$$\begin{aligned} d\Omega' &= \frac{354 \cdot x}{22} & de &= \frac{354 \cdot u}{3} \\ di' &= \frac{354 \cdot y}{6} & dq &= \frac{354 \cdot v}{15} \\ d\omega' &= \frac{354 \cdot z}{23} & d\Gamma &= \frac{354 \cdot t}{0.25} \end{aligned}$$

Las ecuaciones resultantes son las siguientes :

+0.03598 x	+0.08712 y	-0.02434 z	-0.03747 u	-0.03239 v	+0.00547 t	=-0.00794
+0.49474	+0.55752	-0.15874	-0.11307	-0.26533	+0.05692	=-0.01571
+0.94404	+0.74688	-0.22407	+0.01153	-0.33389	+0.13478	=+0.00379
+1.01194	+0.27018	-0.18152	+0.31742	-0.04171	+0.24794	=+0.12894
+0.64414	-0.11915	-0.13883	+0.30070	+0.14510	+0.25170	=+0.09441
+0.41339	-0.47368	-0.21869	+0.17627	+0.29878	+0.34155	=-0.00802
+0.23748	-0.40110	-0.18840	+0.05167	+0.22967	+0.26100	=-0.06051
+0.20618	-0.57455	-0.27713	-0.08173	+0.29579	+0.32683	=-0.17339
+0.09464	-0.42750	-0.19555	-0.12870	+0.20149	+0.20181	=-0.15271
+0.02706	-0.55905	-0.19589	-0.22290	+0.20552	+0.16269	=-0.24370
-0.01000	-0.74625	-0.25419	-0.35293	+0.26961	+0.18983	=-0.33977
+0.00620	-0.40747	-0.24127	-0.31963	+0.25923	+0.16549	=+0.01542
+0.11225	+0.79377	-0.02219	+0.11583	+0.02883	-0.00585	=+0.89661
+0.12129	+0.83685	+0.03590	+0.21067	-0.03525	-0.04201	=+0.87265
+0.06370	+0.37755	+0.01824	+0.11147	-0.01896	-0.01991	=+0.39949
+0.07203	+0.30997	+0.00164	+0.09970	-0.00309	-0.00924	=+0.38862
+0.05411	+0.19257	-0.00675	+0.06090	+0.00534	-0.00220	=+0.26729
-0.00956	-0.05194	-0.04248	+0.03298	-0.04750	+0.02692	=-0.00661
-0.06818	-0.2267	-0.55683	+0.46687	-0.61895	+0.45441	=-0.03209
-0.04331	-0.19667	-0.92477	+0.81260	-0.99075	+0.81774	=-0.05616
+0.00822	-0.05570	-1.00189	+0.95533	-0.91831	+1.02122	=-0.00240
-0.05127	+0.04125	-0.77522	+0.70197	-0.58248	+0.86615	=-0.00774
-0.14783	+0.33943	-0.55447	+0.28228	-0.29227	+0.67715	=-0.01381
-0.10554	+0.35102	-0.32534	+0.07417	-0.14200	+0.41005	=-0.02201
-0.10280	+0.63180	-0.28914	-0.10907	-0.07712	+0.38435	=-0.03127
-0.04004	+0.55695	-0.14424	-0.17933	-0.00564	+0.20136	=-0.01006
+0.04117	+0.72012	-0.10641	-0.27627	+0.07464	+0.12694	=+0.22740
+0.12444	+1.03307	-0.17817	-0.27720	+0.18612	+0.13838	=+0.86980
+0.12761	+0.95792	-0.11418	-0.07600	+0.12735	+0.06645	=+1.00084
-0.04342	+0.02030	+0.22130	+0.18277	-0.24182	-0.12512	=-0.53141
-0.08135	-0.18510	+0.25339	+0.07677	-0.27707	-0.11994	=-1.03342
-0.03989	-0.07938	+0.12341	-0.02803	-0.13227	-0.04774	=-0.62650
-0.02478	-0.00640	+0.11160	-0.12887	-0.11212	-0.02974	=-0.70280
-0.00984	+0.01982	+0.07315	-0.12703	-0.06943	-0.01525	=-0.51525

Aplicando ahora el método de cuadrados mínimos, las ecuaciones normales resultan ser :

$$\begin{array}{rccccccc}
 +2.99407 x & +1.11282 & -0.59433 & +0.38542 & +0.12251 & +0.60930 & -0.80320 = 0 \\
 +1.11282 & +8.09148 y & -0.10750 & -0.04358 & -0.76826 & +0.04426 & -4.58434 = 0 \\
 -0.59433 & -0.10750 & +3.98170 z & -2.38344 & +2.35414 & -3.96320 & +0.55806 = 0 \\
 +0.38542 & -0.04358 & -2.38344 & +3.26855 u & -2.74361 & +2.50257 & -0.20553 = 0 \\
 +0.12251 & -0.76826 & +2.35414 & -2.74361 & +3.54808 v & -2.30960 & -0.77392 = 0 \\
 +0.60930 & +0.04426 & -3.96320 & +2.50257 & -2.30960 & +4.12783 t & -0.15624 = 0 \\
 & & & & & & [pll] = 6.523791
 \end{array}$$

Resuelto el sistema anterior se llega a un valor $[pll.6] = 0.003502$ y para las incógnitas auxiliares con sus respectivos errores medios, los que se dan a continuación :

$$\begin{aligned}
 x &= -0.34024 \pm 0.00720 \\
 y &= +0.76765 \pm 0.00430 \\
 z &= -3.65317 \pm 0.02843 \\
 u &= +1.56084 \pm 0.01273 \\
 v &= +1.85557 \pm 0.01179 \\
 t &= -3.33569 \pm 0.02807
 \end{aligned}$$

pasando a las incógnitas primitivas se tiene :

$$\begin{aligned}
 d\Omega' &= -5''.47 \pm 0''.12 & de &= +0.0008929 \pm 0.0000073 \\
 di' &= +45.29 \pm 0.25 & dq &= +0.0002123 \pm 0.0000013 \\
 d\omega' &= -56.23 \pm 0.44 & dt &= -0.02290 \pm 0.00019
 \end{aligned}$$

Con la finalidad de calcular las correcciones de los elementos, referidos a la eclíptica, se hizo uso de las siguientes fórmulas :

$$\begin{aligned}
 d\omega &= d\omega' - \frac{\cos i'}{\sin i} \sin(\omega - \omega') di' - \frac{\sin \varepsilon}{\sin i} \cos \Omega d\Omega' \\
 d\Omega &= \frac{\sin(\omega - \omega')}{\sin i} di' + \cos(\omega - \omega') \frac{\sin i'}{\sin i} d\Omega' \\
 di &= \cos(\omega - \omega') di' - \sin(\omega - \omega') \sin i' d\Omega'
 \end{aligned}$$

en donde reemplazando valores, llegamos a :

$$\begin{aligned}
 d\omega &= -55''.31 \pm 0.44 \\
 d\Omega &= +0.96 \pm 0.12 \\
 di &= +45.60 \pm 0.25
 \end{aligned}$$

Haciendo estas correcciones a los valores de partida, se encuentra que los elementos que mejor representan a las observaciones aquí usadas son :

Equinoccio 1942.0

$$T = 1942 \text{ Abr. } 30.83332 \pm 0.00019$$

$$\Omega = 340^{\circ} 7'26''66 \pm 0''12$$

$$\omega = 223 25 3.59 \pm 0.44$$

$$i = 79 26 40.80 \pm 0.25$$

$$q = 1.4453032 \pm 0.0000013$$

$$e = 1.0008929 \pm 0.0000073$$

$$x = 0.9424911 \cdot r \text{ sen } (309^{\circ}37'43''57 + v)$$

$$y = 0.3893999 \cdot r \text{ sen } (96 38 38.25 + v)$$

$$z = 0.9798358 \cdot r \text{ sen } (215 28 54.64 + v)$$

Los residuos en los lugares normales con respecto a los nuevos elementos son :

Nº	Fecha	$\Delta x \cos \delta$ Ecuación	$\Delta x \cos \delta$ Directo	$\Delta \delta$ Ecuación	$\Delta \delta$ Directo	Pesos	
						α	δ
I.....	1941. Dic. 28.4	-5".2	-5".4	+0".4	+0".1	1	1
II.....	1942. Feb. 12.0	+0.2	+0.2	+0.9	+0.8	59	49
III.....	Feb. 22.0	-0.6	-0.7	0.0	-0.2	91	94
IV.....	Mar. 8.0	+0.4	+0.5	+0.1	-0.2	56	63
V.....	Mar. 19.0	-0.1	-0.2	-0.6	-0.8	87	100
VI.....	Abr. 10.0	+0.3	+0.2	+0.4	+0.8	84	92
VII.....	Abr. 22.0	+0.2	+0.1	0.0	-0.1	52	52
VIII.....	May. 14.0	-0.2	-0.4	-0.5	-0.4	90	88
IX.....	Jun. 8.0	-0.4	-0.4	-0.9	-0.9	38	42
X.....	Jul. 31.0	-0.8	-0.9	+1.0	+0.3	32	32
XI.....	Ago. 31.0	-0.7	-0.9	+0.8	+1.0	52	52
XII.....	Sep. 14.0	+1.1	+1.1	-0.2	-0.2	36	35
XIII.....	Oct. 1.0	-0.7	-0.5	-0.5	-0.5	24	24
XIV.....	Oct. 13.0	0.0	0.0	0.0	0.0	32	32
XV.....	Oct. 30.0	-0.9	-0.8	+0.1	+0.2	8	8
XVI.....	1942. Dic. 8.5	+0.1	+0.1	+1.4	+0.5	8	8
XVII.....	1943. Ene. 8.0	+0.2	+0.2	+1.7	+1.8	4	4

FORMA DE LA ÓRBITA ORIGINAL.

El exceso de e sobre la unidad no es tan grande como han mostrado algunos cometas ; pero queda bien establecido, pues es más de 100 veces su error medio.

Habiendo resultado la órbita hiperbólica se creyó conveniente investigar el carácter de la órbita original. A tal fin se calcularon las perturbaciones producidas por Venus, sistema Tierra-Luna, Júpiter y Saturno en el intervalo Dic. 22.0 a Sep. 23.0 de 1941 que a continuación se dan :

1941	Dic. 22.0	+ 550	-- 136	+ 10
	12.0	+ 639	-- 165	-- 14
	2.0	+ 732	-- 197	-- 45
	Nov. 22.0	+ 828	-- 232	-- 82
	12.0	+ 924	-- 269	-- 125
	2.0	+ 1023	-- 309	-- 174
	Oct. 23.0	+ 1121	-- 351	-- 230
	13.0	+ 1222	-- 394	-- 292
1941	Oct. 3.0	+ 1320	-- 440	-- 360

De las coordenadas y velocidades correspondientes al 13 de octubre de 1941 a 0^h de T. U. se obtuvieron los siguientes elementos :

$$\begin{aligned}
 T &= 1942 \text{ Abr. } 30.960079 \\
 \Omega' &= 340^\circ 9' 55'' 45 \\
 \omega' &= 215 \ 31 \ 18.66 \\
 i' &= 101 \ 32 \ 29.10 \\
 e &= 1.0008080 \\
 p &= 2.8918551
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} \Omega' \\ \omega' \\ i' \end{aligned}} \right\} 1950.0$$

con estos nuevos valores se continuó el cálculo para los años anteriores a la fecha, considerando solamente las perturbaciones producidas por Júpiter y Saturno, las cuales se dan en la tabla siguiente.

Fecha	x'	y'	z'	Fecha	x'	y'	z'
1941. Nov. 22.0...	+ 20	-- 18	-- 40	Sep. 14.0...	-- 10450	-- 10519	-- 18895
Oct. 13.0...	00	00	00	Ago. 5.0...	-- 12307	-- 11417	-- 20754
Sep. 3.0...	+ 15	-- 21	-- 45	Jun. 26.0...	-- 14337	-- 12295	-- 22666
Jul. 25.0...	+ 49	-- 92	-- 186	May. 17.0...	-- 16541	-- 13144	-- 24624
Jun. 15.0...	+ 86	-- 222	-- 423	Abr. 7.0...	-- 18919	-- 13952	-- 26624
May. 6.0...	+ 108	-- 416	-- 790	Feb. 26.0...	-- 21470	-- 14712	-- 28659
Mar. 27.0...	+ 99	-- 679	-- 1262	1939. Ene. 17.0...	-- 24192	-- 15414	-- 30625
Feb. 15.0...	+ 45	-- 1015	-- 1849	1938. Dic. 8.0...	-- 27088	-- 16147	-- 32716
1941. Ene. 6.0...	-- 71	-- 1422	-- 2551	Oct. 29.0...	-- 30158	-- 16803	-- 34828
1940. Nov. 27.0...	-- 262	-- 1900	-- 3368	Sep. 19.0...	-- 33399	-- 17374	-- 36954
Oct. 18.0...	-- 542	-- 2448	-- 4396	Ago. 10.0...	-- 36807	-- 17850	-- 39092
Sep. 8.0...	-- 923	-- 3061	-- 5433	Jul. 1.0...	-- 40377	-- 18223	-- 41235
Jul. 30.0...	-- 1416	-- 3734	-- 6574	May. 22.0...	-- 44102	-- 18487	-- 43382
Jun. 20.0...	-- 2032	-- 4464	-- 7815	Abr. 12.0...	-- 47976	-- 18633	-- 45526
May. 11.0...	-- 2780	-- 5243	-- 9152	Mar. 3.0...	-- 51993	-- 18656	-- 47665
Abr. 1.0...	-- 3668	-- 6064	-- 10580	1938. Ene. 22.0...	-- 56144	-- 18549	-- 49795
Feb. 21.0...	-- 4705	-- 6920	-- 12093	1937. Dic. 13.0...	-- 60422	-- 18306	-- 51912
1940. Ene. 12.0...	-- 5896	-- 7803	-- 13687	Nov. 3.0...	-- 64819	-- 17922	-- 54015
1939. Dic. 3.0...	-- 7248	-- 8703	-- 15355	1937. Sep. 24.0...	-- 69326	-- 17392	-- 56101
Oct. 24.0...	-- 8765	-- 9611	-- 17093				

Siendo la distancia heliocéntrica r en 1937 Sep. 24 de más de 14 U. A., se eligió esta fecha para investigar el carácter de la órbita original.

Coordenadas (1950.0)

Referidas al Sol.....	+ 3.0491615	- 3.9986813	+ 13.3284134
Reducción.....	- 50499	+ 38009	+ 18069
Referidas al centro de gravedad.....	+ 3.0441116	- 3.9948804	+ 13.3302203

Velocidad para 10 días (1950.0)

Referidas al Sol.....	- 0.0318654	+ 0.0226486	- 0.0511986
Reducción.....	- 604	- 500	- 75
Referidas al centro de gravedad.....	- 0.0319258	- 0.0225986	- 0.0512061

Siendo :

$$1/a = \frac{2}{r} - \frac{G^2}{k^2(1+2m)}$$

donde :

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$G^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

resulta :

$$r = 14.245015$$

$$\frac{1}{a} = +0.0002613$$

referido al centro de gravedad del sistema ($\odot + \mathcal{Z} + \mathfrak{H}$).

El valor de $1/a$ indica claramente que para el 24 de septiembre de 1937 el cometa se movía sobre una órbita elíptica.

Deseo expresar mi agradecimiento al Dr. Bernhard H. Dawson que me propuso el tema y me guió en las distintas etapas del cálculo.

PUBLICACIONES DEL OBSERVATORIO ASTRONÓMICO DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

DIRECTOR : ING° VIRGINIO MANGANIELLO

SERIE ASTRONÓMICA. — Tomo XXI, N° 3

ACCELERACION SECULAR DE LOS SEMI-EJES MAYORES Y DE LAS LONGITUDES MEDIAS DE LOS PLANETAS, EN ESPECIAL DE LA TIERRA, Y SUS SATELITES

POR

ALEXANDER WILKENS



LA PLATA

OBSERVATORIO ASTRONÓMICO

—
1945

Imprenta y Casa editora CONI. Perú, 684. Buenos Aires

AUTORIDADES DE LA UNIVERSIDAD

(1945)

PRESIDENTE

DOCTOR ALFREDO D. CALCAGNO

VICEPRESIDENTE

INGENIERO AQUILES D. MARTINEZ CIVELLI

SECRETARIO GENERAL

DOCTOR BERNARDO ROCHA

Consejeros titulares : INGENIERO CARLOS S. BIANCHI, DOCTOR ANGEL CABRERA, DOCTOR MANUEL CIEZA RODRÍGUEZ, PROFESOR ERNESTO L. FIGUEROA, DOCTOR JOAQUÍN FRENGUELLI, DOCTOR EDUARDO F. GIUFFRÀ, INGENIERO AGRÓNOMO SALOMÓN HOROVITZ, INGENIERO VIRGINIO MANGANIELLO, INGENIERO AGRÓNOMO ANTONIO E. MARINO, DOCTOR FERNANDO MÁRQUEZ MIRANDA, DOCTOR JOSÉ PECO, DOCTOR ANTONIO G. PEPE Y DOCTOR VICENTE RUIZ.

Guarda Sellos : DOCTOR ALFREDO D. CALCAGNO.

Delegado Interventor de la Facultad de Medicina Veterinaria : DOCTOR CORADINO SBARIGGI.

Representantes de los alumnos : SEÑOR JUAN CARLOS FRANCO Y SEÑOR JULIO MARIO MARTÍN.

INSTITUTO DEL OBSERVATORIO ASTRONÓMICO

Y

ESCUELA SUPERIOR DE CIENCIAS ASTRONÓMICAS Y CONEXAS

DIRECTOR

INGENIERO VIRGINIO MANGANIELLO

SECRETARIO

AGRIMENSOR CARLOS ALBARRACÍN SARMIENTO

PERSONAL DOCENTE, CIENTÍFICO Y TÉCNICO

Jefes de Departamento y Profesores : DOCTOR BERNHARD H. DAWSON, INGENIERO SIMÓN GERSHÁNIK, SEÑOR JUAN JOSÉ NISSEN, INGENIERO NUMA TAPIA y DOCTOR ALEXANDER WILKENS.

Astrónomo de Primera : Agrimensor HUGO ARTURO MARTÍNEZ.

Geofísico : INGENIERO JOSÉ MATEO.

Geofísicos de Segunda : DOCTOR REYNALDO P. CESCO e INGENIERO ENRIQUE LEVÍN.

Astrónomo de Segunda : INGENIERO MIGUEL A. AGABIOS.

Astrónomo de Tercera : SEÑOR SILVIO MANGANIELLO.

Astrónomos de Quinta : AGRIMENSOR ÁNGEL A. BALDINI, DOCTOR CARLOS U. CESCO, AGRIMENSOR MIGUEL ITZIGSOHN, DOCTORES JORGE SAHADE y HERBERT WILKENS.

Ayudantes Astrónomos de Primera : SEÑORES RICARDO LUIS LASSALLE y RODOLFO LÓPEZ.

Ayudantes Geofísicos de primera : SEÑORES JULIO LENZI y JUAN C. NATALE.

Calculista : SEÑOR JORGE A. GARBARINO.

Ayudantes Astrónomos de Segunda : SEÑORES DOMINGO SANTIAGO SARMIENTO y PASTOR J. SIERRA.

Meteorólogo : SEÑOR GUILLERMO H. BOREL.

Calculistas Ayudantes : SEÑORITAS ANA GRIGORIEFF y HULDA ALICIA HARTMANN, SEÑOR FEDERICO A. THOMAS.

Auxiliar Geofísico : SEÑORITA SUZANA MARTÍNEZ SALAS.

Mecánico Especialista : SEÑOR GREGORIO PLOTNIKOFF.

ACELERACION SECULAR DE LOS SEMI-EJES MAYORES Y DE LAS LONGITUDES MEDIAS DE LOS PLANETAS, EN ESPECIAL DE LA TIERRA, Y SUS SATELITES

CAPITULO I

LA ACELERACION SECULAR DE LOS PLANETAS

§ I. LA FUNCIÓN PERTURBADORA

En esta memoria nos ocuparemos de la aplicación numérica, al caso de la órbita terrestre y los satélites de los grandes planetas, de las fórmulas y desarrollos cuya teoría hemos expuesto en nuestro trabajo anterior: *La aceleración secular de los semi-ejes mayores de las órbitas planetarias*, Publicaciones del Observatorio Astronómico de la Universidad Nacional de La Plata, tomo XVIII, 1942. Al mismo tiempo ampliaremos dicha teoría con el agregado de nuevas combinaciones esenciales para el estudio de la aceleración secular.

Ante todo deseo expresar mis profundos agradecimientos al señor profesor doctor R. Cesco, por sus grandes y amables esfuerzos en la redacción del texto castellano de esta memoria. Asimismo agradezco muy cordialmente a la señorita H. A. Hartmann su inagotable celo en los cálculos numéricos, y al señor Pastor J. Sierra por haber contribuido celosamente a la facilitación de la impresión de las extendidas fórmulas de la Memoria.

Para deducir las perturbaciones del movimiento de la Tierra es necesario efectuar los cálculos numéricos que corresponden a los siete grupos siguientes:

- (1) Perturbaciones directas del movimiento de la Tierra por los planetas Júpiter y Venus.
- (2) Combinación indirecta de las perturbaciones por Júpiter y Saturno.
- (3) » directa de las perturbaciones por Júpiter y Saturno.
- (4) » indirecta de las perturbaciones por Venus y Júpiter.
- (5) » directa de las perturbaciones por Venus y Júpiter.
- (6) » indirecta de las perturbaciones por Júpiter y Venus.
- (7) » directa de las perturbaciones por Júpiter y Venus.

La teoría y fórmulas correspondientes a los cinco primeros grupos, figuran en nuestra memoria citada, mientras que las de los grupos (6) y (7) serán desarrolladas en este trabajo. Además daremos un suplemento corrigiendo las correspondientes a los grupos (4) y (5). Por inconveniente del impresor hemos cambiado las siguientes designaciones de la 1ª memoria :

$$\begin{aligned} 1) \quad \dot{a} & \text{ con } \frac{da}{dt}, \quad \dot{e} & \text{ con } \frac{de}{dt}, \text{ etc.} \\ 2) \quad \bar{e}_1 & \text{ » } [e_1], \quad \bar{\omega}_1 & \text{ » } [\tilde{\omega}_1], \text{ etc.} \\ 3) \quad \bar{A}_i & \text{ » } (A_i), \quad \bar{A}_{ia} & \text{ » } (A_{ia}), \text{ etc.} \end{aligned}$$

Para la combinación indirecta (2) : Júpiter y Saturno (pág. 74 de la publicación mencionada), combinación de un planeta interior y otro exterior de la Tierra, los elementos a, e, \dots se refieren al planeta perturbador Venus; a', e', \dots al planeta perturbado Tierra y a'', e'', \dots al planeta perturbador Júpiter, valiendo las observaciones de la página 147. El primer término de la combinación Júpiter-Saturno de la pág. 74 cuya forma es

$$\frac{da_3}{dt} = \frac{2\sqrt{a}}{K} R_{\varepsilon a} \left(\begin{array}{c} \text{Tierra-Júpiter} \\ a, a' \end{array} \right) \cdot a_2 \left(\begin{array}{c} \text{Tierra-Saturno} \\ a, a'' \end{array} \right),$$

vale ahora

$$\frac{da_3'}{dt} = \frac{2\sqrt{a'}}{K'} R_{\varepsilon' a'} \left(\begin{array}{c} \text{Tierra-Venus} \\ a', a \end{array} \right) \cdot a_2' \left(\begin{array}{c} \text{Tierra-Júpiter} \\ a', a'' \end{array} \right) + \left(\text{Tierra-Venus} \right) + \left(\text{Tierra-Saturno} \right) + \dots$$

donde

$$\frac{da_2'}{dt} = \frac{2\sqrt{a'}}{K'} [a_2 e'^2 \cdot e_1' + a_2 \bar{\omega}'^2 \cdot \tilde{\omega}_1' + c_2 e^1 e_1 + a_2 \bar{\omega}^1 \tilde{\omega}_1 + a_2 e''^2 \cdot e_1'' + a_2 \bar{\omega}''^2 \cdot \tilde{\omega}_1'']$$

en cuyos primeros dos términos [(a) y (b)] los dos factores de cada término se refieren a Júpiter-Tierra. Los dos siguientes [(c) y (d)] a Venus-Tierra y los dos últimos [(e) y (f)] a Júpiter-Tierra. Únicamente la combinación de (c) y (d) con el primer factor de a_3' : $R_{\varepsilon' a'}$ (Tierra-Venus) produce en $\frac{da_3'}{dt}$ los términos dependientes de i que no aparecen en el grupo (1) : Las perturbaciones directas de la Tierra por Venus contienen los factores e_1' y $\tilde{\omega}_1'$, en tanto que los términos (e) y (d) contienen los factores e_1 y $\tilde{\omega}_1$.

Según las observaciones de la página 147 es preciso cambien en las fórmulas a por a' y recíprocamente, quedando inalterados los elementos que corresponden al planeta m'' . En los términos que dependen del índice i hay que cambiar como se ha explicado en la página 144 y 145, $i-k$ por $-l$, como consecuencia del cambio del planeta perturbado de elementos a, e, \dots por el planeta perturbado (ahora inferior) de elementos a', e', \dots . Este cambio de notación de los elementos altera los coeficientes y sus índices debiéndose observar que en las combinaciones independientes de i , cuando se pasa, por ejemplo, del término I = $R_{\varepsilon a e}(a, a') a_1(a, a'') e_1$ al término II = $R_{\varepsilon' a' e'}(a, a') a_1'(a', a'') e_1'$ los coeficientes $C_0(a, a'')$ y $D_0(a, a'')$ se convierten en $C_0(a', a'')$ y $D_0(a, a'')$ respectivamente, siendo la perturbación $a_1(a, a'')$, es decir la de la Tierra por el planeta exterior Saturno, enteramente análoga (analíticamente) a la perturbación de la Tierra por otro planeta exterior (en este caso Júpiter).

Además en el caso I que corresponde al planeta perturbado de elementos a, e, \dots , para lograr una parte

constante no deben aparecer en los dos primeros factores las longitudes l y l'' (el tercer factor e_1 da un término secular proporcional al tiempo t). En efecto, la longitud l que aparece necesariamente al derivar R respecto de ε sólo puede eliminarse, al efectuar el producto de los dos factores trigonométricos $R_{\varepsilon ae}$ y a_1 , mediante elección conveniente de múltiplos iguales de l . Análogamente en el caso ahora tratado II sólo pueden aparecer en los factores correspondientes términos con el argumento l' . Luego en el caso I aparecen en los términos de primer grado únicamente los argumentos $l - \tilde{\omega}$ y $l - \tilde{\omega}'$, afectados por los factores $C_0(aa')$ o $D_0(aa')$ respectivamente, mientras que en el caso II resultan por permutación de elementos los argumentos $l' - \tilde{\omega}$ y $l' - \tilde{\omega}'$ con los factores $D_1(aa')$ o $C_1(aa')$ respectivamente; por tanto al pasar de a_3 a a_3' se originan los cambios siguientes: $C_0(aa')$ por $D_1(aa')$ por $D_0(aa')$ por $C_1(aa')$. Análogamente, al permutar las derivaciones respecto de a y a' cambia $C_0(aa')$ en $D_{1a'}(aa')$ y $D_{0a}(aa')$ en $C_{1a'}(aa')$.

En los términos de segundo grado con los coeficientes E_i , G_i y H_i resultan análogamente, para los términos independientes de i , las siguientes alteraciones: $E_0(aa')$ debe reemplazarse por $H_2(ca')$; $H_0(aa')$ por $E_2(aa')$ y $G_0(aa')$ por $G_2(aa')$ y análogamente para las derivadas respecto de a y a' .

En el último caso, es decir, al cambiar G_0 por G_2 , observaremos que el término general de la función perturbadora: $G_i e e' \cos(i l' - (i-2)l - \tilde{\omega} - \tilde{\omega}')$ es simétrico en e , e' y $\tilde{\omega}$ y $\tilde{\omega}'$, de modo que los coeficientes G_i sólo cambian entre sí, siendo necesario cambiar solamente $G_0(aa')$ por $G_2(aa')$ cuando se elimina en I la longitud l' , es decir, cuando $i=0$, de donde $G_i=G_0$; o cuando en II se elimina l en cuyo caso es $i=2$ pues es $G_i=G_2$. En cuanto a los factores F_i y F_{-i} observaremos que éstos no aparecen ni para $i=0$ ni para $i > 0$, pues están vinculados al argumento $i(l'-l)$, es decir a la diferencia directa de l' y l . El término con el factor F_0 es independiente de ε y ε' y no viene al caso ni en I ni en II. Pero si i es distinto de cero aparece en I, en los dos factores, el argumento $i(l'-l)$ o $i(l''-l)$ respectivamente y en II el argumento $i(l'-l)$ o $i(l''-l')$, de modo que ni en el caso I ni en el II se eliminan en el producto las longitudes l' y l'' o l y l'' respectivamente, no pudiéndose por tanto originar términos constantes.

Teniendo en cuenta estas consideraciones se obtiene pues, partiendo de las fórmulas de la página 74 de nuestra memoria citada, el siguiente grupo de fórmulas para la combinación indirecta, con algunas correcciones de los términos de la página 147, y a continuación el correspondiente a la combinación directa de los de la página 131.

Grupo (4). Combinación indirecta

$$\begin{aligned}
 (1a) \quad s[p_1(a_3')] &= -\frac{1}{4} a' (C_0'') (C_{1a'}) \frac{[e_1'] e}{(1+m')^2} \operatorname{sen}(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) (n't)^2 \\
 (1b) \quad \text{''} &= -\frac{1}{4} a' (C_0'') [e' (D_{1a'}) + e \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) (C_{1a'})] \frac{[\tilde{\omega}_1']}{(1+m')^2} (n't)^2 \\
 (1c) \alpha &= +\frac{1}{4} a' (C_i) (D_{ia'}) \frac{i^2 n}{in' - (i-1)n} \frac{[e_1] e'}{(1+m')^2} \operatorname{sen}(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) (n't)^2 \\
 (1c) \beta &= -\frac{1}{4} a' [A_{ia'}] [(F_i) - (F_{-i})] \frac{in}{n' - n} \frac{[e_1] e'}{(1+m')^2} \operatorname{sen}(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) (n't)^2 \\
 (1d) \alpha &= -\frac{1}{4} a' (C_i) \frac{i^2 n}{in' - (i-1)n} \{ (D_{ia'}) e' \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) + e (C_{ia'}) \} \frac{[\tilde{\omega}_1]}{(1+m')^2} (n't)^2 \\
 (1d) \beta &= +\frac{1}{4} a' [A_{ia'}] [(F_i) - (F_{-i})] \frac{in}{n' - n} \frac{e' [\tilde{\omega}_1]}{(1+m')^2} \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) (n't)^2
 \end{aligned}$$

$$(1c) \quad \text{''} = + \frac{1}{4} a' \frac{n''}{n'} (D_0'') \{ (D_{1a}') e' \sin (\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') + (C_{1a}') e \sin (\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}) \} \frac{[e_1'']}{(1+m')^2} (n't)^2$$

$$(1f) \quad \text{''} = - \frac{1}{4} a' \frac{n''}{n'} (D_0'') \{ (D_{1a}') e' \cos (\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') + e'' (C_{1a}') \} \frac{[\tilde{\omega}_1'']}{(1+m')^2} (n't)^2$$

$$(2a) \alpha \quad s [p_2(a_3')] = + \frac{1}{16} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} (D_1) (D_0'') [e_1'] e'' \sin (\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') (n't)^2$$

$$(2a) \beta \quad \text{''} = + \frac{1}{16} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} (D_1) (L_0'') [e_1'] e'' \sin (\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') (n't)^2$$

$$(2a) \gamma \quad \text{''} = - \frac{1}{16} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} (G_2) (E_0'') [e_1'] e \sin (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) (n't)^2$$

$$(2b) \alpha \quad \text{''} = - \frac{1}{8} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} (D_1) (C_0'') \frac{[\tilde{\omega}_1']}{e'} (n't)^2$$

se elimina con el término análogo con polo (α) de $p_8(a_3')$

$$(2b) \beta \quad s [p_2(a_3')] = + \frac{1}{16} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} (D_1) (C_0'') [\tilde{\omega}_1'] e' (n't)^2$$

$$(2b) \gamma \quad \text{''} = - \frac{1}{8} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} (E_0'') \left\{ 2e' (H_2) + \frac{1}{2} e (G_2) \cos (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) [\tilde{\omega}_1'] (n't)^2 \right\}$$

$$(2b) \delta \quad \text{''} = - \frac{1}{32} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} (D_1) \{ e'^2 (J_0'') + e''^2 (N_0'') + 4e'e'' (L_0'') \cos (\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') \\ + e''^2 (M_0'') \cos (2\tilde{\omega}'' - 2\tilde{\omega}') \} \frac{[\tilde{\omega}_1']}{e'} (n't)^2$$

Los términos 2° y 4° se destruyen con el término (γ) de $p_8(a_3')$.

$$(2b) \varepsilon \quad s [p_2(a_3')] = - \frac{1}{32} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} \{ 2e' (H_2) \cos (\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') + e (G_2) \cos (\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}) \} (G_0'') \frac{e''}{e'} [\tilde{\omega}_1] (n't)^2$$

El 2° término con el polo $e'=0$ se elimina en el término (β) de $p_8(a_3')$.

$$(2b) \zeta \quad s [p_2(a_3')] = - \frac{1}{16} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} (C_0'') \left\{ \frac{3}{2} e'^2 (P_1) + [(N_1) + (M_1)] e'e \cos (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} e^2 (L_1) \cos (2\tilde{\omega}' - 2\tilde{\omega}) + \frac{1}{2} e^2 (K_1) \right\} \frac{[\tilde{\omega}_1']}{e'} (n't)^2$$

Los dos últimos términos se destruyen con los términos correspondientes (δ) de $p_8(a_3')$.

$$(2c) \alpha \quad s [p_2(a_3')] = - \frac{1}{16} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} \left\{ - \frac{n}{n'-n} (B_i) [(F_i) + (F_{-i})] e' \sin (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) + \right. \\ \left. + \frac{n}{n'-n} (F_i) (F_{-i}) e \sin (2\tilde{\omega}' - 2\tilde{\omega}) - \right. \\ \left. - \frac{in}{in' - (i-2)n} (G_i) (H_i) e' \sin (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) \right\} [e_1] (n't)^2$$

$$\begin{aligned}
 (2c) \beta \quad s [p_2(a_3')] &= -\frac{1}{16} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} (D_i) (C_i) \frac{i^2 n}{in'-(i-1)n} [e_1] e' \operatorname{sen}(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega}) (n't)^2 \\
 (2c) \gamma \quad \text{»} &= -\frac{1}{16} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} \frac{in}{in'-(i-1)n} (D_i) \{ e' (M_i) \operatorname{sen}(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega}) + \\
 &\quad + e (L_i) \operatorname{sen}(2\tilde{\omega}'-2\tilde{\omega}) \} [e_1] (n't)^2 \\
 (2d) \alpha \quad \text{»} &= -\frac{1}{32} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} \left\{ -e [(F_i)^2 + (F_{-i})^2 + 2(F_i)(F_{-i}) \cos(2\tilde{\omega}'-2\tilde{\omega})] \frac{n}{n'-n} - \right. \\
 &\quad - 2(F_i)(B_i) \frac{n}{n'-n} e' \cos(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega}) - 2(F_{-i})(B_i) \frac{n}{n'-n} e' \cos(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega}) + \\
 &\quad \left. + e [(G_i)^2 + (H_i)(G_i) \cos(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})] \frac{in}{in'-(i-2)n} \right\} [\tilde{\omega}_1] (n't)^2 \\
 (2d) \beta \quad \text{»} &= +\frac{1}{4} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} \frac{in}{in'-(i-1)n} (D_i) \{ e' (M_i) \cos(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega}) + \\
 &\quad + e (L_i) \cos(2\tilde{\omega}'-2\tilde{\omega}) \} [\tilde{\omega}_1] (n't)^2 \\
 (2d) \gamma \quad \text{»} &= +\frac{1}{16} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} \frac{in}{in'-(i-1)n} (D_i) (C_i) [\tilde{\omega}_1] e' \cos(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega}) (n't)^2 \\
 (2e) \alpha \quad \text{»} &= -\frac{1}{8} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} \frac{n''}{n'} (H_2) (G_0'') [e_1''] e' \operatorname{sen}(\tilde{\omega}''-\tilde{\omega}') (n't)^2 \\
 (2e) \beta \quad \text{»} &= +\frac{1}{16} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} \frac{n''}{n'} (D_1) (D_0'') [e_1''] e' \operatorname{sen}(\tilde{\omega}''-\tilde{\omega}') (n't)^2 \\
 (2e) \gamma \quad \text{»} &= +\frac{1}{16} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} \frac{n''}{n'} (D_1) \{ e' (L_0'') \operatorname{sen}(\tilde{\omega}''-\tilde{\omega}') + e'' (M_0'') \operatorname{sen}(2\tilde{\omega}''-2\tilde{\omega}') \} [e_1''] (n't)^2 \\
 (2f) \alpha \quad \text{»} &= -\frac{1}{32} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} \frac{n''}{n'} (G_0'') \{ 2e' (H_2) \cos(\tilde{\omega}''-\tilde{\omega}') + e (G_2) \cos(\tilde{\omega}_1''-\tilde{\omega}) \} [\tilde{\omega}''] (n't)^2 \\
 (2f) \beta \quad \text{»} &= +\frac{1}{16} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} \frac{n''}{n'} (D_1) (D_0'') [\tilde{\omega}_1''] e' \cos(\tilde{\omega}''-\tilde{\omega}') (n't)^2 \\
 (2f) \gamma \quad \text{»} &= +\frac{1}{16} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} \frac{n''}{n'} (D_1) \{ e' (L_0'') \cos(\tilde{\omega}''-\tilde{\omega}') + e'' (M_0'') \cos(2\tilde{\omega}''-2\tilde{\omega}') \} [\tilde{\omega}_1''] (n't)^2 \\
 (3a) \quad s [p_3(a_3')] &= -\frac{1}{4} a' \frac{(C_1)}{(1+m')^2} \left\{ (C_{0a''}) - \frac{1}{4} \sqrt{1-e'^2} (C_0'')' [e_1'] e \operatorname{sen}(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega}) (n't)^2 \right. \\
 (3b) \quad \text{»} &= -\frac{1}{4} a' \left[(C''_{0a'}) - \frac{1}{4} (C_0'') \right] [e' (D_1) + e (C_1) \cos(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})] \frac{[\tilde{\omega}_1']}{(1+m')^2} (n't)^2 \\
 (3c) \alpha \quad \text{»} &= +\frac{1}{4} a' \frac{i^2 n}{in'-(i-1)n} (D_i) (C_{ia'}) \frac{[e_1]}{(1+m')^2} e' \operatorname{sen}(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega}) (n't)^2
 \end{aligned}$$

$$(3c) \beta \quad s[p_3(a_3')] = + \frac{1}{4} a' \frac{in}{n'-n} (Ai) \left\{ [(F_{ia'}) - (F_{-ia'})] + \frac{1}{4} [(F_i) - (F_{-i})] \right\} \frac{[e_1]}{(1+m')^2} e' \operatorname{sen}(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) (n't)^2$$

$$(3d) \alpha \quad \text{''} = - \frac{1}{4} a' \frac{i^2 n}{in' - (i-1)n} (C_{ia'}) \{ e' (D_i) \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) + (C_i) e \} \frac{[\tilde{\omega}_1]}{(1+m')^2} (n't)^2$$

$$(3d) \beta \quad \text{''} = - \frac{1}{4} a' \frac{in}{n'-n} (Ai) \left\{ [(F_{ia'}) - (F_{-ia'})] - \frac{1}{4} [(F_i) - (F_{-i})] \right\} \frac{[\tilde{\omega}_1]}{(1+m')^2} e' \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) (n't)^2$$

$$(3e) \quad \text{''} = - \frac{1}{4} a' \frac{n''}{n'} (D''_{0a'}) \{ e' (D_1) \operatorname{sen}(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') + e (C_1) \operatorname{sen}(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}) \} \frac{[e_1'']}{(1+m')^2} (n't)^2$$

$$(3f) \quad \text{''} = - \frac{1}{4} a' \frac{n''}{n'} (D_{0a'}) \{ e' (D_1) \cos(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') + e (C_1) \cos(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}) \} \frac{[\tilde{\omega}_1'']}{(1+m')^2} (n't)^2$$

$$(3g) \alpha \quad \text{''} = - \frac{3}{8} a' (C_0'') (C_1) \frac{e_1'}{(1+m')^2} e \operatorname{sen}(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) (n't)^2$$

$$(3g) \beta \quad \text{''} = - \frac{3}{8} a' (C_0'') \{ e' (D_1) + e (C_1) \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) \} \frac{[\tilde{\omega}_1']}{(1+m')^2} (n't)^2$$

$$(3g) \gamma \quad \text{''} = + \frac{3}{8} a' \frac{i^3 n n'}{[in' - (i-1)n]^2} (D_i) (C_i) \frac{[e_1]}{(1+m')^2} e' \operatorname{sen}(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) (n't)^2$$

$$(3g) \delta \quad \text{''} = - \frac{3}{8} a' \frac{inn'}{(n'-n)^2} (Ai) [(F_i) - (F_{-i})] \frac{[e_1]}{(1+m')^2} e' \operatorname{sen}(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) (n't)^2$$

$$(3g) \varepsilon \quad \text{''} = + \frac{3}{8} a' \frac{i^3 n n'}{[in' - (i-1)n]^2} (C_i) \{ [e' (D_i) + e (C_i)] \} \frac{[\tilde{\omega}_1]}{(1+m')^2} \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) (n't)^2$$

$$(3g) \zeta \quad \text{''} = + \frac{3}{8} a' \frac{inn'}{(n'-n)^2} Ai [(F_i) - (F_{-i})] \frac{[\tilde{\omega}_1]}{(1+m')^2} e' \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) (n't)^2$$

$$(3g) \eta \quad \text{''} = + \frac{3}{8} a' \frac{n''}{n'} (D_0'') \{ (D_1) e' \operatorname{sen}(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') + (C_1) e \operatorname{sen}(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}) \} \frac{[e_1'']}{(1+m')^2} (n't)^2$$

$$(3g) \theta \quad \text{''} = + \frac{3}{8} a' \frac{n''}{n'} (D_0'') \{ (D_1) e' \cos(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') + (C_1) e \cos(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}) \} \frac{[\tilde{\omega}_1'']}{(1+m')^2} (n't)^2$$

$$(4a) \alpha \quad s[p_4(a_3')] = - \frac{1}{16} a' (C_0'') \left\{ (M_1) e \operatorname{sen}(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) + \frac{1}{2} \frac{e^2}{e'} (L_1) \operatorname{sen}(2\tilde{\omega}' - 2\tilde{\omega}) \right\} \frac{[e_1']}{(1+m')^2} (n't)^2$$

El término con el polo $e' = 0$ se elimina con el 2º término correspondiente de $p_{13}(a_3')$, caso (b').

$$(4a) \beta \quad s[p_4(a_3')] = + \frac{1}{32} a' (D_1) (M_0'') \frac{e''^2}{e'} \frac{[e_1']}{(1+m')^2} \operatorname{sen}(2\tilde{\omega}'' - 2\tilde{\omega}') \quad \cdot$$

Este término con el polo $e' = 0$ se elimina con el término correspondiente (a') de $p_{13}(a_3')$, es decir, con el último término del paréntesis.

$$(4a) \gamma \quad s [p_4(a_3')] = + \frac{1}{32} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} (G_2) (G_0'') \frac{ee''}{e'} [e_1'] \operatorname{sen}(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}) (n't)^2$$

Este término con el polo $e'=0$ se destruye con el término (e') de $p_{13}(a_3')$.

$$(4b) \alpha \quad s [p_4(a_3')] = - \frac{1}{8} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} (C_0'') (D_1) \frac{[\tilde{\omega}_1']}{e'} (n't)^2$$

Este término con polo se elimina con el 1^{er} término con polo (α) de $p_{13}(a_3')$.

$$(4b) \beta \quad s [p_4(a_3')] = - \frac{1}{16} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} (C_0'') \left\{ \frac{1}{2} e'^2 (P_1) + \frac{1}{2} e'^2 (K_1) + ee' (M_1) \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} e'^2 (L_1) \cos(2\tilde{\omega}' - 2\tilde{\omega}) \right\} \frac{[\tilde{\omega}_1']}{e'} (n't)^2$$

donde los términos 2^o y 4^o con el polo $e'=0$ se destruyen con los términos correspondientes (γ) de $p_{13}(a_3')$.

$$(4b) \gamma \quad s [p_4(a_3')] = - \frac{1}{16} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} \left\{ 4e'^2 (H_2) E_0'' + e'e'' (H_2) (G_0'') \cos(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') + \right. \\ \left. + 2ee' (E_0'') (G_2) \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) + \frac{1}{2} ee'' (G_2) (G_0'') \cos(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') \right\} \frac{[\tilde{\omega}_1']}{e'} (n't)^2$$

El último término con el polo $e'=0$ se elimina con el 2^o término de (ε) de $p_{13}(a_3')$.

$$(4b) \delta \quad s [p_4(a_3')] = - \frac{1}{8} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} (D_1) \left\{ \frac{3}{4} e'^2 (J_0'') + e'e'' (L_0'') \cos(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') - \right. \\ \left. - \frac{1}{4} e''^2 (M_0'') \cos(2\tilde{\omega}'' - 2\tilde{\omega}') + \frac{1}{4} e''^2 (N_0'') \right\} \frac{[\tilde{\omega}_1']}{e'} (n't)^2$$

Los términos 3^o y 4^o con el polo $e'=0$ se elimina con los términos 2^o y 4^o correspondientes de (β) de $p_{13}(a_3')$.

$$(4c) \alpha \quad s [p_4(a_3')] = + \frac{1}{16} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} \frac{n}{n'-n} (F_i) (F_{-i}) [e_1] e \operatorname{sen}(2\tilde{\omega}' - 2\tilde{\omega}) (n't)^2$$

$$(4c) \beta \quad \text{»} = + \frac{1}{16} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} \frac{in}{in' - (i-2)n} (H_i) (G_i) [e_1] e' \operatorname{sen}(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) (n't)^2 \\ = + \frac{1}{16} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} \frac{in}{in' - (i-1)n} (D_i) \{ (N_i) e' \operatorname{sen}(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) - (M_i) e' \operatorname{sen}(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) + \\ + e (L_i) \operatorname{sen}(2\tilde{\omega}' - 2\tilde{\omega}) \} [e_1] (n't)^2$$

$$(4d) \alpha \quad \text{»} = + \frac{1}{32} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} \frac{n}{n'-n} \{ [(F_i)^2 + (F_{-i})^2] - 2 (F_i) (F_{-i}) \cos(2\tilde{\omega}' - 2\tilde{\omega}) \} [\tilde{\omega}_1] e (n't)^2$$

$$\begin{aligned}
(4d) \beta \quad s[p_4(a_3')] &= -\frac{1}{32} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} \frac{in}{in'-(i-2)n} (G_i) \{2e' (H_i) \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) + e (G_i)\} [\tilde{\omega}_1] (n't)^2 \\
(4d) \gamma \quad &= -\frac{1}{16} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} \frac{in}{in'-(i-1)n} (D_i) \{[(N_i) - (M_i)] e' \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) + \\
&\quad + (L_i) e \cos(2\tilde{\omega}' - 2\tilde{\omega})\} [\tilde{\omega}_1] (n't)^2 \\
(4e) \alpha \quad &= -\frac{1}{16} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} \frac{n''}{n'} (H_2) (G_0'') [e_1''] e' \sin(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') (n't)^2 \\
(4e) \beta \quad &= -\frac{1}{16} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} \frac{n''}{n'} (D_1) \{[(K_0'') - (L_0'')] \sin(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') + \\
&\quad + (M_0'') e'' \sin(2\tilde{\omega}'' - 2\tilde{\omega}')\} [e'] (n't)^2 \\
(4f) \alpha \quad &= -\frac{1}{32} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} \frac{n''}{n'} (G_0'') \left\{ \frac{1}{2} e' (H_2) \cos(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') + e (G_2) \cos(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}) \right\} [\tilde{\omega}_1''] (n't)^2 \\
(4f) \beta \quad &= -\frac{1}{16} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} \frac{n''}{n'} (D_1) \{[(K_0'') - (L_0'')] e' \cos(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') + \\
&\quad + (M_0'') e'' \cos(2\tilde{\omega}'' - 2\tilde{\omega}')\} [\tilde{\omega}_1''] (n't)^2 \\
(6) \alpha \quad s[p_6(a_3')] &= -\frac{1}{16} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} (H_2) (G_0'') [e_1'] e'' \sin(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') (n't)^2 \\
(6) \beta \quad &= -\frac{1}{16} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} (C_0'') [(N_1) - (M_1)] [e_1'] e \sin(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) (n't)^2 \\
(8) \alpha \quad s[p_8(a_3')] &= +\frac{1}{8} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} (D_1) (C_0'') \frac{[\tilde{\omega}_1']}{e'} (n't)^2
\end{aligned}$$

Este término con el polo $e'=0$ se elimina con el término análogo $2(b)\alpha$ de $p_2(a_3')$.

$$\begin{aligned}
(8) \beta \quad s[p_8(a_3')] &= +\frac{1}{4} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} \left\{ e'^2 (H_2) (E_0'') + \frac{1}{2} e' e'' (H_2) (G_0'') \cos(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} e e' (G_2) (E_0'') \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) + \frac{1}{8} e e'' (G_2) (G_0'') \cos(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') \right\} \frac{[\tilde{\omega}_1']}{e'} (n't)^2
\end{aligned}$$

El término con polo (4° del paréntesis) se destruye con el término $(2b)\varepsilon$ de $p_2(a_3')$.

$$\begin{aligned}
(8) \gamma \quad s[p_8(a_3')] &= +\frac{1}{16} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} \left\{ \frac{3}{2} e'^2 (J_0'') + \frac{1}{2} e''^2 (N_0'') + [(K_0'') + (L_0'')] e' e'' \cos(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} (M_0'') e''^2 \cos(2\tilde{\omega}'' - 2\tilde{\omega}') \right\} \frac{[\tilde{\omega}_1']}{e'} (n't)^2
\end{aligned}$$

Los términos 2° y 4° con el polo $e'=0$, se eliminan con los términos correspondientes $(2b)\delta$ de $p_2(a_3')$.

$$(8) \delta \quad s [p_8(a_3')] = + \frac{1}{4} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} (C_0'') \left\{ + \frac{1}{8} e'^2 (P_1) + \frac{1}{8} e^2 (K_1) + \frac{1}{2} ee' (M_1) \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) \right. \\ \left. + \frac{1}{8} e^2 (L_1) \cos(2\tilde{\omega}' - 2\tilde{\omega}) \right\} \frac{[\tilde{\omega}_1']}{e'} (n't)^2$$

Los términos 2° y 4° con el polo $e'=0$, se destruyen con los términos correspondientes (2b) ζ de $p_2(a_3')$.

$$(9) \quad s [p_9(a_3')] = - \frac{1}{4} a' (D_0'') (D_{1a'}) \frac{[e_1']}{(1+m')^2} e'' \sin(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') (n't)^2$$

$$(11) \quad s [p_{11}(a_3')] = + \frac{1}{4} a' (D_{1a'}) \left\{ (C_0'') e' + (D_0'') e'' \cos(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') \right\} \frac{[\tilde{\omega}_1']}{(1+m')^2} (n't)^2$$

$$(12) \quad s [p_{12}(a_3')] = - \frac{1}{4} a' (D_1) \left\{ (D''_{0a'}) + \frac{3}{2} (D_0'') \right\} \frac{[e_1']}{(1+m')^2} e'' \sin(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') (n't)^2$$

$$(13) \alpha \quad s [p_{13}(a_3')] = + \frac{1}{8} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} (D_1) \left\{ (C_0'') - \frac{1}{2} e'^2 (C_0'') \right\} \frac{[\tilde{\omega}_1']}{e'} (n't)^2$$

El 1° término con el polo $e'=0$ se elimina con el término análogo de (4b) α de $p_4(a_3')$.

$$(13) \beta \quad s [p_{13}(a_3')] = + \frac{1}{32} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} (D_1) \left\{ e'^2 (J_0'') + e''^2 (N_0'') + 2e'e'' (L_0'') \cos(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') - \right. \\ \left. - e''^2 (M_0'') \cos(2\tilde{\omega}'' - 2\tilde{\omega}') \right\} \frac{[\tilde{\omega}_1']}{e'} (n't)^2$$

Los términos 2° y 4° con el polo $e'=0$, se destruyen con los términos de (4b) δ de $p_4(a_3')$.

$$(13) \gamma \quad s [p_{13}(a_3')] = + \frac{1}{8} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} (C_0'') \left\{ \frac{3}{4} e'^2 (P_1) + \frac{1}{4} e^2 (K_1) + ee' (M_1) \cos(\tilde{\omega}' + \tilde{\omega}) - \right. \\ \left. - \frac{1}{4} e^2 (L_1) \cos(2\tilde{\omega}' - 2\tilde{\omega}) \right\} \frac{[\tilde{\omega}_1']}{e'} (n't)^2$$

donde los términos 2° y 4 con el polo $e'=0$, se destruyen con los términos correspondientes de (4b) β .

$$(13) \delta \quad s [p_{13}(a_3')] = + \frac{1}{16} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} (D_2) \left\{ e' (E_0'') + \frac{1}{2} e'' (G_0'') \cos(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') \right\} \frac{[\tilde{\omega}_1']}{e'} (n't)^2$$

$$(13) \varepsilon \quad \text{»} \quad = + \frac{1}{16} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} (G_2) \left\{ (E_0'') e' \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) + \frac{1}{2} (G_0'') e'' \cos(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') \right\} \frac{e [\tilde{\omega}_1']}{e'} (n't)^2$$

El 2° término con polo $e'=0$ se elimina con el último término análogo de (4b) γ de $p_4(a_3')$.

$$(13) a' \quad s [p_{13}(a_3')] = + \frac{1}{16} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} (D_1) \left\{ [(L_0'') - (K_0'')] e'' \sin(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \frac{e''^2}{e'} (M_0'') \sin(2\tilde{\omega}'' - 2\tilde{\omega}') \right\} [e_1'] (n't)^2$$

El último término con el polo $e'=0$ se elimina con (4a) β .

$$(13) b' s [p_{13}(a_3')] = + \frac{1}{8} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} (C_0'') \left\{ e (M_1) \text{sen} (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) + \frac{1}{4} \frac{e^2}{e'} (L_1) \text{sen} (2\tilde{\omega}' - 2\tilde{\omega}) \right\} [e_1'] (n't)^2$$

El 2° término con el polo $e'=0$ se elimina con el 2° término de (4a) α .

$$(13) c' s [p_{13}(a_3')] = + \frac{1}{8} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} \left\{ - (H_2) (G_0'') e'' \text{sen} (\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') - \frac{1}{2} (E_0'') (G_0) e \text{sen} (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) - \right. \\ \left. - \frac{1}{4} (G_2) (G_0'') \frac{ee''}{e'} \text{sen} (\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}) \right\} [e_1'] (n't)^2$$

El último término con el polo $e'=0$ se elimina con el término correspondiente de (4a) γ de $p_4(a_3')$.

$$(14) s [p_{14}(a_3')] = + \frac{1}{4} a' (D_1) \left\{ e' [(C''_{0a}) - \frac{1}{4} \sqrt{1-e'^2} (C_a'') + \frac{3}{2} (C_0'')] + \right. \\ \left. + e'' \cos (\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') [(D''_{0a}) + \frac{3}{2} (D_0'')] \right\} \frac{[\tilde{\omega}_1']}{(1+m')^2} (n't)^2$$

$$(16) (1a)' s [p_{16}(a_3')] = - \frac{1}{8} a' (C_0'') (C_1) \frac{e_1'}{(1+m')^2} e \text{sen} (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) (n't)^2$$

$$(1b)' \quad \gg \quad = - \frac{1}{8} a' (C_0'') \left\{ e' (D_1) + (C_1) e \cos (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) \right\} \frac{[\tilde{\omega}_1']}{(1+m')^2} (n't)^2$$

$$(1c)' \alpha \quad \gg \quad = - \frac{1}{8} a' \frac{i^2 n}{in' - (i-1)n} (C_i) (D_i) \frac{[e_1]}{(1+m')^2} e' \text{sen} (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) (n't)^2$$

$$(1c)' \beta \quad \gg \quad = - \frac{1}{8} a' \frac{in}{n' - n} (A_i) [(F_i) - (F_{-i})] \frac{[e_1]}{(1+m')^2} e' \text{sen} (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) (n't)^2$$

$$(1d)' \alpha \quad \gg \quad = - \frac{1}{8} a' \frac{i^2 n}{in' - (i-1)n} (C_i) \left\{ e' (D_i) \cos (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) + e (C_i) \right\} \frac{[\tilde{\omega}_1]}{(1+m')^2} (n't)^2$$

$$(1d)' \beta \quad \gg \quad = + \frac{1}{8} a' \frac{in}{n' - n} (A_i) [(F_i) - (F_{-i})] \frac{[\tilde{\omega}_1]}{(1+m')^2} e' \cos (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) (n't)^2$$

$$(1e)' \quad \gg \quad = - \frac{1}{8} a' \frac{n''}{n'} (D_0'') \left\{ (D_1) e' \text{sen} (\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') + (C_1) e \text{sen} (\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}) \right\} \frac{[e_1'']}{(1+m')^2} (n't)^2$$

$$(1f)' \quad \gg \quad = - \frac{1}{8} a' \frac{n''}{n'} (D_0'') \left\{ e' (D_1) \cos (\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') + e (C_1) \cos (\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}) \right\} \frac{[\tilde{\omega}_1'']}{(1+m')^2} (n't)^2$$

$$(17) s [p_{17}(a_3')] = - \frac{1}{8} a' (D_0'') (D_1) \frac{[e_1']}{(1+m')^2} e'' \text{sen} (\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') (n't)^2$$

$$(19) s [p_{19}(a_3')] = + \frac{1}{8} a' (D_1) \left\{ e' (C_0'') + e'' (D_0'') \cos (\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') \right\} \frac{[\tilde{\omega}_1']}{(1+m')^2} (n't)^2$$

Grupo (5). Combinación directa

$$\begin{aligned}
(1)' \quad a_3' &= + \frac{1}{4} a' \left\{ - (D_i) (C_{ia'}) \frac{i^2 n}{in' - (i-1)n} e' \operatorname{sen}(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) - \right. \\
&\quad - (C_0'') (C_{1a'}) \frac{n}{n'} e' \operatorname{sen}(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) - (D_0'') (C_{1a'}) \frac{n}{n'} e'' \operatorname{sen}(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}) - \\
&\quad - (A_i) (F_{ia'}) \frac{in}{n' - n} e' \operatorname{sen}(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) + \\
&\quad \left. + (A_i) (F_{-ia'}) \frac{in}{n' - n} e' \operatorname{sen}(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) \right\} \frac{[e_1]}{(1+m')^2} (n't)^2 \\
(2)' \alpha \quad a_3' &= + \frac{1}{4} a' \left\{ \frac{i^2 n}{in' - (i-1)n} [(D_i) (C_{ia'}) e' \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) + (C_i) (C_{ia'}) e] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{n}{n'} [(C_0'') (D_{1a'}) e' \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) + (D_0'') (C_{1a'}) e'' \cos(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega})] \right\} \frac{[\tilde{\omega}_1]}{(1+m')^2} (n't)^2 \\
(2)' \beta \quad a_3' &= - \frac{1}{4} a' \frac{in}{n' - n} (A_i) \{ (F_{ia'}) - (F_{-ia'}) \} e' \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) \frac{[\tilde{\omega}_1]}{(1+m')^2} (n't)^2 \\
(3)' (a' + b' + c') a_3' &= + \frac{1}{16} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} \left\{ - (F_i) (F_{-i}) \frac{n}{n' - n} e \operatorname{sen}(2\tilde{\omega}' - 2\tilde{\omega}) - \right. \\
&\quad - (A_i) [(F_i) - (F_{-i})] \frac{n}{n' - n} e' \operatorname{sen}(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) - \\
&\quad - \frac{in}{in' - (i-2)n} (H_i) (G_i) e' \operatorname{sen}(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) + \\
&\quad + \frac{in}{in' - (i-1)n} (D_i) \left[- [(N_i) - (M_i)] e' \operatorname{sen}(2\tilde{\omega}' - 2\tilde{\omega}) - (L_i) e \operatorname{sen}(2\tilde{\omega}' - 2\tilde{\omega}) \right] - \\
&\quad - \frac{n}{n'} (E_0'') (G_2) e' \operatorname{sen}(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) + \frac{n}{n'} (C_0'') \left[- [(N_0) - (M_0)] e' \operatorname{sen}(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) - \right. \\
&\quad \left. - L_0 e \operatorname{sen}(2\tilde{\omega}' - 2\tilde{\omega}) \right] \left\} \frac{[\tilde{\omega}_1]}{(1+m')^2} (n't)^2 \\
(4)' (a' + b' + c') a_3' &= + \frac{1}{16} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} \left\{ + \frac{1}{2} (F_i) (F_{-i}) \frac{n}{n' - n} e \cos(2\tilde{\omega}' - 2\tilde{\omega}) + (F_i) (A_i) \frac{in}{n' - n} e' \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) \right. \\
&\quad - \frac{1}{2} (F_i)^2 \frac{n}{n' - n} e - \frac{1}{2} (F_{-i})^2 \frac{n}{n' - n} e + \frac{1}{2} (F_i) (F_{-i}) \frac{n}{n' - n} e \cos(2\tilde{\omega}' - 2\tilde{\omega}) - \\
&\quad - (F_{-i}) (A_i) \frac{in}{n' - n} e' \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) + (G_i) \left[\frac{1}{2} (G_i) \frac{in}{in' - (i-2)n} e + \right. \\
&\quad \left. + (H_i) \frac{in}{in' - (i-2)n} e' \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) \right] + (G_2) \frac{n}{n'} \left[\frac{1}{2} (G_0'') e'' \cos(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (\mathbf{H}_0'') \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) \Big] + \frac{in}{in' - (i-1)n} (\mathbf{D}_i) [(\mathbf{N}_i) e' \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) - \\
& - (\mathbf{M}_i) e' \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) + \\
& + (\mathbf{L}_i) e \cos(2\tilde{\omega}' - 2\tilde{\omega})] + (\mathbf{C}_0'') \frac{n}{n'} [(\mathbf{N}_0) e' \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) - (\mathbf{M}_0) e' \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) + \\
& + (\mathbf{L}_0) e \cos(2\tilde{\omega}' - 2\tilde{\omega})] \Big\} [\tilde{\omega}_1] (n't)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(5)' (a' + b' + c') a_3' = & + a' \Big\{ -e' \sin(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) \left[\frac{1}{4} (\mathbf{C}_i) (\mathbf{D}_{ia'}) \frac{i^2 n}{in' - (i-1)n} + \frac{1}{4} (\mathbf{A}_{ia'}) \frac{in}{n' - n} [(\mathbf{F}_i) - (\mathbf{F}_{-i})] \right. \\
& + \frac{1}{16} \sqrt{1 - e'^2} (\mathbf{D}_i) (\mathbf{C}_i) \frac{i^2 n}{in' - (i-1)n} + \frac{3}{8} \left((\mathbf{C}_i) (\mathbf{D}_i) \frac{i^3 n n'}{[in' - (i-1)n]^2} \right. \\
& \left. \left. - (\mathbf{A}_i) [(\mathbf{F}_i) - (\mathbf{F}_{-i})] \frac{inn'}{(n' - n)^2} \right) \right] - \frac{1}{4} (\mathbf{C}_1) \left[-e' \sin(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) \left(-3 \frac{n}{n'} (\mathbf{C}_0'') \right. \right. \\
& \left. \left. - 2 \frac{n}{n'} (\mathbf{C}''_{0a'}) + \frac{1}{2} \sqrt{1 - e'^2} \frac{n}{n'} (\mathbf{C}_0'') \right) + e'' \sin(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}) \left(3 \frac{n}{n'} (\mathbf{D}_0'') + \right. \right. \\
& \left. \left. + 2 \frac{n}{n'} (\mathbf{D}''_{0a'}) \right) \right] \Big\} \frac{|e_1|}{(1 + m')^2} (n't)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(6)' (a' + b' + c') a_3' = & + \frac{1}{2} a' \Big\{ i^2 (\mathbf{C}_i) \left[-\frac{1}{2} \left((\mathbf{D}_{ia'}) \frac{n}{in' - (i-1)n} e' \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) + (\mathbf{C}_{ia'}) \frac{n}{in' - (i-1)n} e \right) - \right. \\
& - \frac{1}{8} \sqrt{1 - e'^2} \frac{n}{in' - (i-1)n} (\mathbf{D}_i) e' \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) - \\
& - \frac{3}{4} \frac{inn'}{[in' - (i-1)n]^2} ((\mathbf{D}_i) e' \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) + \\
& \left. + (\mathbf{C}_i) e \right] - \frac{1}{2} (\mathbf{F}_i) (\mathbf{A}_{ia'}) \frac{in}{n' - n} e' \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) - \\
& - \frac{3}{8} (\mathbf{F}_i) (\mathbf{A}_i) \frac{inn'}{(n' - n)^2} e' \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) + \frac{1}{2} (\mathbf{F}_{-i}) (\mathbf{A}_{ia'}) \frac{in}{n' - n} e' \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) + \\
& + \frac{3}{8} (\mathbf{F}_{-i}) (\mathbf{A}_i) \frac{inn'}{(n' - n)^2} e' \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) - \frac{1}{4} (\mathbf{C}_1) \left[e' \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) \left(-2 \frac{n}{n'} (\mathbf{C}_{0a''}) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{2} \sqrt{1 - e'^2} \frac{n}{n'} (\mathbf{C}_0'') - 3 \frac{n}{n'} (\mathbf{C}_0'') \right) + e'' \cos(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}) \left(-2 \frac{n}{n'} (\mathbf{D}_{0a''}) - \right. \right. \\
& \left. \left. - 3 \frac{n}{n'} (\mathbf{D}_0'') \right) \right] \Big\} \frac{[\tilde{\omega}_1]}{(1 + m')^2} (n't)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(7)' (a' + b' + c') a_3' = & + \frac{1}{32} a' \frac{\sqrt{1 - e'^2}}{(1 + m')^2} \Big\{ -2 (\mathbf{G}_i) (\mathbf{H}_i) \frac{in}{in' - (i-2)n} e' \sin(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) - \\
& - 2 (\mathbf{F}_i) (\mathbf{F}_{-i}) \frac{n}{n' - n} e \sin(2\tilde{\omega}' - 2\tilde{\omega}) - 2 (\mathbf{B}_i) (\mathbf{F}_i) \frac{n}{n' - n} e' \sin(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 (B_i) (F_{-i}) \frac{n}{n' - n} e' \operatorname{sen} (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) - 2 (D_i) \frac{in}{in' - (i-1)n} [e' (M_i) \operatorname{sen} (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) + \\
& + e (L_i) \operatorname{sen} (2\tilde{\omega}' - 2\tilde{\omega})] - 2 (G_2) (E_0'') \frac{n}{n'} e' \operatorname{sen} (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) - \\
& - (G_2) (G_0'') \frac{n}{n'} e'' \operatorname{sen} (\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}) - 2 (C_0'') \frac{n}{n'} [e' (M_1) \operatorname{sen} (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) + \\
& + e (L_1) \operatorname{sen} (2\tilde{\omega}' - 2\tilde{\omega})] \left\{ [e_1] (n't)^2 \right. \\
(8)' (a' + b' + c') a_3' = & + \frac{1}{16} a' \frac{\sqrt{1 - e'^2}}{(1 + m')^2} \left\{ - e' (F_i) (B_i) \frac{n}{n' - n} \cos (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) - e (F_i) (F_{-i}) \frac{n}{n' - n} \cos (2\tilde{\omega}' - 2\tilde{\omega}) - \right. \\
& - \frac{1}{2} e (F_i)^2 \frac{n}{n' - n} + e' (F_{-i}) (B_i) \frac{n}{n' - n} \cos (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) - \frac{1}{2} e (F_{-i})^2 \frac{n}{n' - n} + \\
& + \frac{1}{2} e (G_i)^2 \frac{in}{in' - (i-2)n} + e' (H_i) (G_i) \frac{in}{in' - (i-2)n} \cos (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) - \\
& - (D_i) \frac{in}{in' - (i-1)n} [(M_i) e' \cos (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) + (L_i) e \cos (2\tilde{\omega}' - 2\tilde{\omega})] + \\
& + (E_0'') (G_0) \frac{n}{n'} e' \cos (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) + \frac{1}{2} (G_0'') (G_2) \frac{n}{n'} e'' \cos (\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}) - \\
& \left. - (C_0'') \frac{n}{n'} [(M_1) e' \cos (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) + (L_1) e \cos (2\tilde{\omega}' - 2\tilde{\omega})] \right\} [\tilde{\omega}_1] (n't)^2 \\
(9)' (a' + b' + c') a_3' = & + \frac{1}{8} a' \left\{ - \left[(D_i) (C_i) \frac{i^2 n}{in' - (i-1)n} - (A_i) [(F_i) - (F_{-i})] \frac{in}{n' - n} \right] e' \operatorname{sen} (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) - \right. \\
& \left. - (C_0'') (C_1) \frac{n}{n'} e' \operatorname{sen} (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) - (D_0'') (C_1) \frac{n}{n'} e'' \operatorname{sen} (\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}) \right\} \frac{e_1}{(1 + m')^2} (n't)^2 \\
(10) (a' + b' + c') a_3' = & + \frac{1}{8} a' \left\{ - [(F_i) - (F_{-i})] (A_i) \frac{in}{n' - n} e' \cos (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) + \right. \\
& + \frac{i^2 n}{in' - (i-1)n} [(D_i) (C_i) e' \cos (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) + e (C_i)^2] + \\
& \left. + (C_0'') (C_1) \frac{n}{n'} e' \cos (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) + (D_0'') (C_1) \frac{n}{n'} e'' \cos (\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}) \right\} \frac{[\tilde{\omega}_1]}{(1 + m')^2} (n't)^2
\end{aligned}$$

§ 2. LA NUEVA COMBINACIÓN JÚPITER-VENUS

La combinación indirecta de pág. 75 de nuestra memoria citada, es para uno de los términos, la siguiente: $\frac{da_3'}{dt} = R_{\varepsilon ae} (\text{Júp.}) \cdot a_1 (\text{Saturno}) \cdot e_1$, donde los elementos $a, e \dots$ pertenecen al planeta perturbado interior, $a', e' \dots$ al primer planeta exterior (Júp.) y $a'', e'' \dots$ al planeta exterior siguiente (Saturno); y donde e_1 es la perturbación secular, proporcional al tiempo, del planeta perturbado por todos los demás.

Sea la Tierra dicho planeta, y simbólicamente pongamos $I = \frac{da_3'}{dt} = \frac{2\sqrt{a}}{K} R_{\varepsilon ae}(a, a') \cdot a_1(a, a'') \cdot e_1$, de modo que permutando todos los elementos cíclicamente se origina la nueva combinación $II = \frac{da_3'}{dt} = R_{\varepsilon' a' e'}(a', a'') \cdot a_1'(a', a'') \cdot e_1'$, donde ahora los elementos $a', e' \dots$ corresponden a la Tierra (planeta perturbado) y por tanto $a, e \dots$ son los elementos del planeta interior Venus; finalmente $a'', e'' \dots$ son elementos del planeta perturbador Júpiter. El resultado de la permutación es pues una nueva combinación hasta ahora no tratada, de importancia para el movimiento por la proximidad de Venus a la Tierra; simbólicamente tenemos ahora la forma: $\frac{da_3'}{dt} = R_{\varepsilon' a' e'}(\text{Júp.}) \cdot a_1'(\text{Venus}) \cdot e_1'$; en vez de la anterior: $\frac{da_3'}{dt} = R_{\varepsilon' a' e'}(\text{Venus}) \cdot a_1'(\text{Júp.}) \cdot e_1'$.

Podemos ahora deducir, basándonos en las permutaciones mencionadas de los elementos, de la combinación indirecta de la pág. 75. Primero debemos cambiar en las correspondientes fórmulas a con a' , a' con a'' y a'' con a , y análogamente para todos los otros elementos. Ya que ahora a' corresponde al planeta perturbado, sólo puede aparecer como argumento de las funciones trigonométricas de los dos factores $R_{\varepsilon' a' e'}$ y a_1' la longitud l' , para que en el producto de dichos factores figuren las partes constantes necesarias. Es decir, los índices i , y en general $i-k$, ($k=0, 1, 2 \dots$) deben elegirse de tal modo que las longitudes l y l'' se eliminen de antemano. Por eso hay que hacer en $a_1'(a, a')$ en los términos del 1º grado de la función perturbadora $i=1$ y además en $R_{\varepsilon' a' e'}(a, a'')$ $i=0$; análogamente hay que hacer en los términos de 2º grado, en $a_1'(a, a')$, $i=2$, y en $R_{\varepsilon' a' e'}(a, a'')$ $i=0$. Ya que además, en la combinación II, el factor a_1' se origina por la integración, de la derivada respecto de ε' , mientras que a_1 en I por integración de una derivada respecto de ε , hay que permutar I, para lograr que a_1' sólo dependa de l' : $C_0(a, a'')$ con $D_1(a, a')$ y análogamente D_0 con C_1 . Considerando además que el primer factor de II: $R_{\varepsilon' a' e'}$ = serie de senos, y que el segundo factor a_1' = serie de cosenos, no pueden resultar partes constantes por el producto de factores de igual argumento, es decir $\frac{\text{sen}}{\text{cos}}(l' - \tilde{\omega}')$, pero sí por producto de los términos $\frac{\text{sen}(l' - \tilde{\omega}')}{\text{cos}(l' - \tilde{\omega})}$,

como en I resultaban de $\frac{\text{sen}(l - \tilde{\omega})}{\text{cos}(l - \tilde{\omega}'')}$. Ya que además, el 1º factor $R_{\varepsilon ae}(a, a')$ de I cambia en: $R_{\varepsilon' a' e'}(a', a'')$ de II, y al mismo tiempo el planeta perturbado a cambia en a' , siendo el planeta perturbado interior en los dos casos, los coeficientes deben permutarse de modo tal que $C_0(a, a')$ cambia en $C_0(a', a'')$ y análogamente $D_0(a, a')$ en $D_0(a', a'')$; valiendo estas permutaciones para las derivadas correspondientes respecto de a y a' , de modo que: $C_{0a}(a, a')$ cambia en $C_{0a'}(a', a'')$ y $D_{0a}(a, a')$ en $D_{0a'}(a', a'')$.

El 1º término de nuestra combinación tiene, frente al término general tratado, la forma especial:

$$\frac{da_3'}{dt} = \frac{2\sqrt{a'}}{K'} R_{\varepsilon' a' e'}(a', a'') \cdot a_2'(a, a'), \text{ teniendo } \frac{da_2'}{dt}, \text{ análogamente a la fórmula correspondiente de pág. 73}$$

de la 1ª publicación la forma siguiente:

$$p \left(\frac{da_2'}{dt} \right) = \frac{2\sqrt{a'}}{K'} \{ a_{2e} e_1' + a_{2\tilde{\omega}'} \tilde{\omega}_1' + a_{2e''} e_1'' + a_{2\tilde{\omega}''} \tilde{\omega}_1'' + a_{2e} e_1 + a_{2\tilde{\omega}} \tilde{\omega}_1 \}$$

El 1º, 2º, 5º y 6º término pertenecen a la combinación Venus-Tierra, mientras que el 3º y 4º pertenecen a la combinación Júpiter-Tierra, pero estos dos términos ya han sido tratados en la combinación

anterior $p \left(\frac{da_3}{dt} \right) = \frac{2\sqrt{a}}{K} R_{\epsilon a} a_2$ de pág. 73 etc. y caracterizados por la dependencia del índice i . Dichos términos 3° y 4° de $\frac{da_2'}{dt}$ y los análogos de $\frac{de_2'}{dt}$, $\frac{dl_2'}{dt}$ y $\frac{d\tilde{\omega}_2'}{dt}$, designados con los índices (c) y (d) aparecen únicamente en los términos (1c) y (1d) y análogamente en (2c), (2d) etc. hasta (4d), y luego una vez más en el término (16) de las págs. 125-126, donde aparece también el coeficiente a_2 . En la siguiente planilla de términos de nuestra combinación han sido omitidos dichos términos dependientes de i :

Términos indirectos

$$\begin{aligned}
 (1a) \quad s[p_1(a_3')] &= + \frac{1}{4} a' (D_1) (D''_{0a'}) \frac{e'' [e_1']}{(1+m')^2} \text{sen} (\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') (n't)^2 \\
 (1b) \quad \text{»} &= - \frac{1}{4} a' (D_1') [e' (C_{0a'}) + e'' (D_{0a'')}] \cos (\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') \frac{[\tilde{\omega}_1']}{(1+m')^2} (n't)^2 \\
 (1e) \quad \text{»} &= - \frac{1}{4} a' (C_1) \frac{n}{n'} [e' (C''_{0a'}) \text{sen} (\tilde{\omega} - \tilde{\omega}') + e'' (D''_{0a'}) \text{sen} (\tilde{\omega} - \tilde{\omega}'')] \frac{[e_1']}{(1+m')^2} (n't)^2 \\
 (1f) \quad \text{»} &= - \frac{1}{4} a' (C_1) \frac{n}{n'} [e' (C''_{0a'}) \cos (\tilde{\omega} - \tilde{\omega}') + e'' (D''_{0a'}) \cos (\tilde{\omega} - \tilde{\omega}'')] \frac{[\tilde{\omega}_1']}{(1+m')^2} (n't)^2 \\
 (2a) \alpha \quad s[p_2(a_3')] &= + \frac{1}{16} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} (C_0'') (C_1) [e_1'] e \text{sen} (\tilde{\omega} - \tilde{\omega}') (n't)^2 \\
 (2a) \beta \quad \text{»} &= + \frac{1}{16} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} (C_0'') (M_1) [e_1'] e \text{sen} (\tilde{\omega} - \tilde{\omega}') (n't)^2 \\
 (2a) \gamma \quad \text{»} &= + \frac{1}{16} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} (G_0'') (H_2) [e_1'] e'' \text{sen} (\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') (n't)^2 \\
 (2b) \beta \quad \text{»} &= + \frac{1}{16} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} (C_0'') (D_1) [\tilde{\omega}_1'] e' (n't)^2 \\
 (2b) \gamma \quad \text{»} &= - \frac{1}{8} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} \left\{ 2e' (E_0'') + \frac{1}{2} e'' (G_0'') \cos (\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') \right\} (H_2) [\tilde{\omega}_1'] (n't)^2 \\
 (2b) \delta \quad \text{»} &= - \frac{1}{32} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} (C_0'') \left\{ e' (P_1) + 4e (M_1) \cos (\tilde{\omega} - \tilde{\omega}') \right\} [\tilde{\omega}_1'] (n't)^2 \\
 (2b) \epsilon \quad \text{»} &= - \frac{1}{16} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} (E_0'') (G^2) \cos (\tilde{\omega} - \tilde{\omega}') e [\tilde{\omega}_1'] (n't)^2 \\
 (2b) \zeta \quad \text{»} &= - \frac{1}{16} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} (D_1) \left\{ \frac{3}{2} e' (J_0'') + [(K_0'') + (L_0'')] e'' \cos (\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') \right\} [\tilde{\omega}_1'] (n't)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2e) \alpha \quad s[p_2(a_3')] &= -\frac{1}{8} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} \frac{n}{n'} (E_0'') (G_2) e' [e_1] \text{sen} [\tilde{\omega} - \tilde{\omega}'] (n't)^2 \\
(2e) \beta \quad \text{»} &= +\frac{1}{16} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} (C_0'') (C_1) \frac{n}{n'} e' [e_1] \text{sen} (\tilde{\omega} - \tilde{\omega}') (n't)^2 \\
(2e) \gamma \quad \text{»} &= +\frac{1}{16} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} \frac{n}{n'} (C_0'') \{ e' (M_1) \text{sen} (\tilde{\omega} - \tilde{\omega}') + e (L_1) \text{sen} (2\tilde{\omega} - 2\tilde{\omega}') \} [e_1] (n't)^2 \\
(2f) \alpha \quad \text{»} &= -\frac{1}{32} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} \frac{n}{n'} (G^2) \{ 2e' (E_0'') \cos (\tilde{\omega} - \tilde{\omega}') + e'' (G_0'') \cos (\tilde{\omega} - \tilde{\omega}') \} [\tilde{\omega}_1] (n't)^2 \\
(2f) \beta \quad \text{»} &= +\frac{1}{16} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} \frac{n}{n'} (C_0'') (C_1) e' [\tilde{\omega}_1] \cos (\tilde{\omega} - \tilde{\omega}') (n't)^2 \\
(2f) \gamma \quad \text{»} &= +\frac{1}{16} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} \frac{n}{n'} (C_0'') \{ e' (M_1) \cos (\tilde{\omega} - \tilde{\omega}') + e (L_1) \cos (2\tilde{\omega} - 2\tilde{\omega}') \} [\tilde{\omega}_1] (n't)^2 \\
(3a) \quad s[p_3(a_3')] &= +\frac{1}{4} a' (D_0'') \left\{ (D_{1a'}) - \frac{1}{4} \sqrt{1-e'^2} (D_1) \right\} \frac{e''}{(1+m')^2} [e_1'] \text{sen} (\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') (n't)^2 \\
(3b) \quad \text{»} &= -\frac{1}{4} a' \left[(D_{1a'}) - \frac{1}{4} (D_1) \right] [e' (C_0'') + e'' (D_0'') \cos (\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}')] \frac{[\tilde{\omega}_1']}{(1+m')^2} (n't)^2 \\
(3e) \quad \text{»} &= +\frac{1}{4} a' \frac{n}{n'} (C_{1a'}) \{ (C_0'') e' \text{sen} (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) + (D_0'') e'' \text{sen} (\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}) \} \frac{[e_1]}{(1+m')^2} (n't)^2 \\
(3f) \quad \text{»} &= -\frac{1}{4} a' \frac{n}{n'} (C_{1a'}) \{ e' (C_0'') \cos (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) + e'' (D_0'') \} \frac{[\tilde{\omega}_1]}{(1+m')^2} (n't)^2 \\
(3g) \alpha \quad \text{»} &= +\frac{3}{8} a' (D_1) (D_0'') \frac{e'' [e_1']}{(1+m')^2} \text{sen} (\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') (n't)^2 \\
(3g) \beta \quad \text{»} &= -\frac{3}{8} a' (D_1) \{ e' (C_0'') + e'' (D_0'') \cos (\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') \} \frac{[\tilde{\omega}_1']}{(1+m')^2} (n't)^2 \\
(3g) \gamma \quad \text{»} &= +\frac{3}{8} a' \frac{n}{n'} (C_1) \{ (C_0'') e' \text{sen} (\tilde{\omega} - \tilde{\omega}') + (D_0'') e'' \text{sen} (\tilde{\omega} - \tilde{\omega}') \} \frac{[\tilde{\omega}_1]}{(1+m')^2} (n't)^2 \\
(3g) \theta \quad \text{»} &= +\frac{3}{8} a' \frac{n}{n'} (C_1) \{ e' (C_0'') \cos (\tilde{\omega} - \tilde{\omega}') + e'' (D_0'') \cos (\tilde{\omega} - \tilde{\omega}') \} \frac{[\tilde{\omega}_1]}{(1+m')^2} (n't)^2 \\
(4a) \alpha \quad s[p_4(a_3')] &= +\frac{1}{16} a' (D_1) (L_0'') \frac{e'' [e_1']}{(1+m')^2} \text{sen} (\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') (n't)^2 \\
(4b) \beta \quad \text{»} &= -\frac{1}{16} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} (D_1) \left\{ \frac{1}{2} e' (J_0'') + e'' (L_0'') \cos (\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') \right\} [\tilde{\omega}_1'] (n't)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4b) \gamma \quad s[p_4(a_3')] &= -\frac{1}{16} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} \{4e'(E_0'')(H_2) + e(E_0'')(G_2) \cos(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}') + \\
 &\quad + 2e''(H_2)(G_0'') \cos(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}')\} [\tilde{\omega}_1'] (n't)^2 \\
 (4b) \delta \quad &= -\frac{1}{8} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} (C_0'') \left\{ \frac{3}{4} e'(P_1) + e(M_1) \cos(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}') \right\} [\tilde{\omega}_1'] (n't)^2 \\
 (4e) \alpha \quad &= -\frac{1}{16} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} \frac{n}{n'} (E_0'')(G_2) e'[e_1] \operatorname{sen}(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}') (n't)^2 \\
 (4e) \beta \quad &= -\frac{1}{16} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} \frac{n}{n'} (C_0'') \{e'[(N_1) - (M_1)] \operatorname{sen}(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}') + \\
 &\quad + e(L_1) \operatorname{sen}(2\tilde{\omega} - 2\tilde{\omega}')\} [e_1] (n't)^2 \\
 (4f) \alpha \quad &= -\frac{1}{32} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} \frac{n}{n'} (G_2) \left\{ \frac{1}{2} e'(E_0'') \cos(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}') + e''(G_0'') \cos(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}') \right\} [\tilde{\omega}_1] (n't)^2 \\
 (4f) \beta \quad &= -\frac{1}{16} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} \frac{n}{n'} (C_0'') \{e'[(N_1) - (M_1)] \cos(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}') + \\
 &\quad + e(L_1) \cos(2\tilde{\omega} - 2\tilde{\omega}')\} [\tilde{\omega}_1] (n't)^2 \\
 (6\alpha) \quad s[p_6(a_3')] &= -\frac{1}{16} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} (E_0'')(G_2) e[e_1'] \operatorname{sen}(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}') (n't)^2 \\
 (6\beta) \quad &= +\frac{1}{16} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} (D_1) \{(K_0'') - (L_0'')\} e''[e_1'] \operatorname{sen}(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') (n't)^2 \\
 (8\beta) \quad &= +\frac{1}{4} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} \left\{ e'(E_0'')(H_2) + \frac{1}{2} e(E_0'')(G_2) \cos(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}') + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{4} e''(G_0'')(H_2) \cos(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') \right\} [\tilde{\omega}_1'] (n't)^2 \\
 (8\gamma) \quad &= +\frac{1}{16} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} (C_0'') \left\{ \frac{3}{2} e'(P_1) + e[(N_1) + (M_1)] \cos(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}') \right\} [\tilde{\omega}_1'] (n't)^2 \\
 (8\delta) \quad &= +\frac{1}{4} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} (D_1) \left\{ +\frac{1}{8} e'(J_0'') + \frac{1}{2} e''(L_0'') \cos(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') \right\} [\tilde{\omega}_1'] (n't)^2 \\
 (9) \quad s[p_9(a_3')] &= -\frac{1}{4} a' (C_1) (C''_{0a'}) \frac{[e_1'] e}{(1+m')^2} \operatorname{sen}(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}') (n't)^2 \\
 (11) \quad s[p_{11}(a_3')] &= +\frac{1}{4} a' (C''_{0a'}) \{e'(D_1) + e(C_1) \cos(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}')\} \frac{[\tilde{\omega}_1']}{(1+m')^2} (n't)^2 \\
 (12) \quad s[p_{12}(a_3')] &= -\frac{1}{4} a' (C_0'') \left\{ (C_{1a'}) + \frac{3}{2} (C_1) \right\} \frac{e[e_1']}{(1+m')^2} \operatorname{sen}(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}') (n't)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(13) \alpha \quad s [p_{13}(a_3')] &= -\frac{1}{16} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} (C_0'') (D_1) e' [\tilde{\omega}_1'] (n't)^2 \\
(13) \beta \quad &= +\frac{1}{32} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} (C_0'') \{ e' (P_1) + 2e (M_1) \cos(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}') \} [\tilde{\omega}_1'] (n't)^2 \\
(13) \gamma \quad &= +\frac{1}{8} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} (D_1) \left\{ +\frac{3}{4} e' (J_0'') + e'' (L_0'') \cos(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') \right\} [\tilde{\omega}_1'] (n't)^2 \\
(13) \delta \quad &= +\frac{1}{16} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} (E_0'') \left\{ e' (H_2) + \frac{1}{2} e (G_2) \cos(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}') \right\} [\tilde{\omega}_1'] (n't)^2 \\
(13) \varepsilon \quad &= +\frac{1}{16} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} (G_0'') \{ e'' (H_2) \cos(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') [\tilde{\omega}_1'] (n't)^2 \\
(13) a' \quad &= +\frac{1}{16} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} (C_0'') [(M_1) - (N_1)] \operatorname{sen}(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}') \frac{[e_1']}{(1+m')^2} (n't)^2 \\
(13) b' \quad &= -\frac{1}{8} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} (D_1) (L_0'') e'' [e_1'] \operatorname{sen}(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') (n't)^2 \\
(13) c' \quad &= +\frac{1}{8} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} \left\{ -(E_0'') (G_2) e \operatorname{sen}(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}') + \frac{1}{2} (G_0'') (H_2) e'' \operatorname{sen}(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') \right\} [e_1'] (n't)^2 \\
(14) \quad s [p_{14}(a_3')] &= +\frac{1}{4} a' (C_0'') \left\{ +e' \left[(D_{1a}') - \frac{1}{4} \sqrt{1-e'^2} (D_1) + \frac{3}{2} (D_1) \right] + \right. \\
&\quad \left. + e \left[(C_{1a}') + \frac{3}{2} (C_1) \right] \cos(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}') \right\} \frac{[\tilde{\omega}_1']}{(1+m')^2} (n't)^2 \\
(16) (1a)' \quad s [p_{16}(a_3')] &= +\frac{1}{8} a' (D_1) (D_0'') \frac{e'' [e_1']}{(1+m')^2} \operatorname{sen}(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') (n't)^2 \\
(16) (1b)' \quad &= -\frac{1}{8} a' (D_1) \{ e' (C_0'') + e'' (D_0'') \cos(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') \} \frac{[\tilde{\omega}_1']}{(1+m')^2} (n't)^2 \\
(16) (1e)' \quad &= -\frac{1}{8} a' \frac{n}{n'} (C_1) \{ (C_0'') e' \operatorname{sen}(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}') + (D_0'') e'' \operatorname{sen}(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}'') \} \frac{[e_1']}{(1+m')^2} (n't)^2 \\
(16) (1f)' \quad &= -\frac{1}{8} a' \frac{n}{n'} (C_1) \{ (C_0'') e' \cos(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}') + (D_0'') e'' \cos(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}'') \} \frac{[\tilde{\omega}_1']}{(1+m')^2} (n't)^2 \\
(17) \quad s [p_{17}(a_3')] &= -\frac{1}{8} a' (C_1) (C_0'') \frac{[e_1']}{(1+m')^2} e \operatorname{sen}(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}') (n't)^2 \\
(19) \quad s [p_{19}(a_3')] &= +\frac{1}{8} a' (C_0'') \{ e' (D_1) + (C_1) e \cos(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}') \} \frac{[\tilde{\omega}_1']}{(1+m')^2} (n't)^2
\end{aligned}$$

Los demás términos, es decir los directos de la combinación, han sido sometidos a los mismos cambios que los términos indirectos, de modo que no hay que agregar nada. Este paso corresponde a los términos de la combinación anterior, página 131, etc., de manera que obtenemos:

Términos directos

$$\begin{aligned}
 \text{(I)} \quad s(a_3') &= + \frac{1}{4} a' \frac{n''}{n'} \{ (D_1) (D''_{0a'}) e' \operatorname{sen} (\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') - (C_1) (D''_{0a'}) e \operatorname{sen} (\tilde{\omega} - \tilde{\omega}'') \} \frac{[e_1'']}{(1+m)^2} (n't)^2 \\
 \text{(II')} \quad \text{»} &= + \frac{1}{4} a' \frac{n''}{n'} \{ (D_1) (D''_{0a'}) e' \cos (\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') + (C_1) (D''_{0a'}) e \cos (\tilde{\omega} - \tilde{\omega}'') \} \frac{[\tilde{\omega}_1'']}{(1+m')^2} (n't)^2 \\
 \text{(III')} \quad \text{»} &= + \frac{1}{16} a' \frac{n''}{n'} \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} \{ (H_2) (G_2'') e' \operatorname{sen} (\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') + (D_1) [(K_0'') - (L_0'')] e' \operatorname{sen} (\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') + \\
 &\quad + (M_0'') e'' \operatorname{sen} (2\tilde{\omega}'' - 2\tilde{\omega}') \} [\tilde{\omega}_1''] (n't)^2 \\
 \text{(IV')} \quad \text{»} &= + \frac{1}{16} a' \frac{n''}{n'} \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} \left\{ (G_0'') \left[\frac{1}{2} (G_2) e \cos (\tilde{\omega} - \tilde{\omega}'') + (H_2) \cos (\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') \right] + \right. \\
 &\quad + (D_1) [(K_0'') e' \cos (\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') - (L_0'') e' \cos (\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}')] + \\
 &\quad \left. + (M_0'') e'' \cos (2\tilde{\omega}'' - 2\tilde{\omega}') \right\} [\tilde{\omega}_1''] (n't)^2 \\
 \text{(V')} \quad \text{»} &= - \frac{1}{4} a' \frac{n''}{n'} (D_0'') \left\{ e' \operatorname{sen} (\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') \left[-3 (D_1) - 2 (D_{1a'}) + \frac{1}{2} \sqrt{1-e'^2} (D_1) \right] - \right. \\
 &\quad \left. - e \operatorname{sen} (\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}) [3 (C_1) + 2 (C_{1a'})] \right\} \frac{[e_1'']}{(1+m')^2} (n't)^2 \\
 \text{(VI')} \quad \text{»} &= - \frac{1}{8} a' \frac{n''}{n'} (D_0'') \left\{ e' \cos (\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') \left[-2 (D_{1a'}) + \frac{1}{2} \sqrt{1-e'^2} (D_1) - 3 (D_1) \right] - \right. \\
 &\quad \left. - e \cos (\tilde{\omega} - \tilde{\omega}'') [3 (C_1) + 2 (C_{1a'})] \right\} \frac{[\tilde{\omega}_1'']}{(1+m')^2} (n't)^2 \\
 \text{(VII')} \quad \text{»} &= + \frac{1}{32} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} \frac{n''}{n'} \left\{ 2 (G_0'') (H_2) e' \operatorname{sen} (\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') + (G_0'') (G_2) e \operatorname{sen} (\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}) - \right. \\
 &\quad \left. - 2 (D_1) [(L_0'') e' \operatorname{sen} (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}'') + (M_0'') e'' \operatorname{sen} (2\tilde{\omega}' - 2\tilde{\omega}'')] \right\} [e_1''] (n't)^2 \\
 \text{(VIII')} \quad \text{»} &= + \frac{1}{32} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} \frac{n''}{n'} \left\{ 2 (G_0'') (H_2) e' \cos (\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') + (G_0'') (G_2) e \cos (\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}) - \right. \\
 &\quad \left. - 2 (D_1) [(L_0'') e' \cos (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}'') + (M_0'') e'' \cos (2\tilde{\omega}' - 2\tilde{\omega}'')] \right\} [\tilde{\omega}_1''] (n't)^2 \\
 \text{(IX')} \quad \text{»} &= + \frac{1}{8} a' \frac{n''}{n'} (D_0'') \left\{ D_1 e' \operatorname{sen} (\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') + (C_1) e \operatorname{sen} (\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}) \right\} \frac{[e_1'']}{(1+m')^2} (n't)^2 \\
 \text{(X')} \quad \text{»} &= + \frac{1}{8} a' \frac{n''}{n'} (D_0'') \left\{ (D_1) e' \cos (\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') + (C_1) e \cos (\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}) \right\} \frac{[\tilde{\omega}_1'']}{(1+m')^2} (n't)^2
 \end{aligned}$$

Para el cálculo numérico debemos considerar que los coeficientes $(C_i)(a, a')$ y $(D_i)(a, a')$ tienen ahora un significado distinto al caso en que el planeta a era el perturbado interior. Si a es el planeta perturbado, la perturbación secular $s(a_3)$ es proporcional a a y $(nt)^2$, mientras que, si el planeta perturbado es a' , dicha perturbación $s(a_3')$ es proporcional a a' y $(n't)^2$. Luego los coeficientes (C_i) , (D_i) son proporcionales a a en el primer caso y a a' en el segundo y por tanto en el primer caso es $(C_i) = aC_i(a, a')$ y en segundo caso se tendrá: $(C_i) = a'C_i(a, a')$. En este segundo caso hubiera sido más conveniente introducir la notación $[(C_i)]$ en vez de (C_i) ; pero habiendo prescindido de este cambio es preciso tener en cuenta que $(C_i) = a'C_i = \frac{a'}{a} a C_i(a, a') = \frac{1}{\alpha} (C_i)$, donde (C_i) es el valor primitivo.

Análogamente hay que transformar, en el segundo caso $(C_i'') = a' C_i(a', a'')$, directamente, a la forma anterior a $C_i(a, a') = (C_i)$ porque hemos introducido en lugar de a y a' (Tierra, Júpiter), a' y a'' (nuevamente Tierra, Júpiter) de modo que resulta ahora una identidad directa. Y lo mismo vale para todos los otros coeficientes.

CAPITULO II

LA ACELERACION SECULAR DE LOS SATELITES

La aceleración de la longitud de la luna sólo ha sido calculada hasta ahora en la parte proporcional al cuadrado del tiempo. En lo que sigue deduciremos la aceleración secular proporcional a la tercera potencia del tiempo, originada por los términos seculares en t^2 del semi-eje mayor de la órbita lunar. Ya en la introducción de nuestra memoria: La aceleración secular de los ejes mayores de las órbitas planetarias, hemos llamado la atención sobre la aplicación de la teoría mencionada al problema correspondiente de la Luna y los satélites, considerando especialmente la tarea útil de constatar, si los desacuerdos hasta hoy no explicados entre la teoría y la observación de la Luna podrían ser representados por la nueva aceleración secular. Simultáneamente se ofrece la oportunidad de investigar, si será posible decidir definitivamente sobre el coeficiente de la aceleración secular en t^2 considerado hasta ahora. El desarrollo de la teoría se basa ciertamente en la memoria mencionada; pero para tratar el problema especial de los satélites es preciso transformar convenientemente la función perturbadora, eligiendo los elementos de manera especial.

Observaremos que P. Puiseux en una memoria sobre la aceleración clásica secular en t^2 , de los *Annales Scientifiques de L'Ecole Normal Superieur* (1879, tomo 8, IIª serie, pág. 361-444), ha investigado una perturbación especial de la longitud de la Luna, del grado t^3 ; ésta se origina por la aceleración secular de la excentricidad de la órbita de la Tierra: $e' = e_0' + e_1't + e_2't^2$, es decir por el coeficiente e_2' , de modo que no hay ninguna relación entre este problema y el que tratamos en la presente memoria.

Observaremos por último que la teoría siguiente es aplicable no sólo a la Luna, sino también a los satélites de los demás planetas, especialmente los clásicos de Júpiter, sobre todo cuando se discute la cuestión de la estabilidad de la libración de los mismos, problema que ya investigó de Sitter por medio de las observaciones, aunque sin éxito.

§ I. LA FUNCIÓN PERTURBADORA

La función perturbadora que hemos aplicado para los planetas en I (memoria sobre la aceleración, etc.), página 13, es decir para la determinación de $\frac{da_3}{dt}$, página 16, en cuanto se trata sólo de las perturbaciones de 3^{er} orden, no es directamente aplicable a la teoría de los satélites, ni del satélite de la Tierra. Primeramente introduciremos en vez de la excentricidad e y la longitud del perihelio $\tilde{\omega}$ las variable-excentricidades: $\xi = e \sin \tilde{\omega}$ y $\eta = e \cos \tilde{\omega}$ para el satélite, y análogamente $\xi' = e' \sin \tilde{\omega}'$ y $\eta' = e' \cos \tilde{\omega}'$ para el sol, que es ahora el cuerpo perturbador, a fin de evitar de antemano que aparezcan en a_3 potencias negativas de e y e' , aunque todos estos términos deben desaparecer en definitiva, como se comprobó en I. Considerando que las excentricidades de los satélites son en general pequeñas, es útil poseer de antemano el desarrollo de la función perturbadora según potencias de las variables ξ , η , ξ' y η' . Además de esta razón formal para usar las nuevas variables en vez de e y $\tilde{\omega}$, existe todavía un motivo muy especial, que se reconoce cuando hay que deducir la perturbación secular a_3 . En analogía a los 4 primeros de $\frac{da_3}{dt}$, en la expresión de la página 16 de I, se obtiene la nueva forma:

$$\frac{da_3}{dt} = \frac{2\sqrt{a}}{K} \left[\left(R_{\varepsilon a} + \frac{1}{2a_0} R_{\varepsilon} \right) a_2 + R_{\varepsilon \varepsilon} \cdot l_2 + R_{\varepsilon \xi} \xi_2 + R_{\varepsilon \eta} \cdot \eta_2 \right] \quad (1)$$

donde a_2 , l_2 , ξ_2 y η_2 son las perturbaciones de 2^o orden de las fuerzas perturbadoras, mientras que $R_{\varepsilon a}$, etc., son de 1^{er} orden, de modo que

$$\frac{da_2}{dt} = \frac{2\sqrt{a}}{K} \left[\left(R_{\varepsilon a} + \frac{1}{2a_0} R_{\varepsilon} \right) a_1 + R_{\varepsilon \varepsilon} l_1 + R_{\varepsilon \xi} \cdot \xi_1 + R_{\varepsilon \eta} \cdot \eta_1 \right] \quad (2)$$

con ecuaciones análogas para las otras variables. Como sabemos ahora por I, lo importante para la deducción de la aceleración secular en t^2 de a_3 es buscar primero los términos de Poisson de las funciones a_2 , l_2 , ξ_2 y η_2 . Combinando entonces dichos términos con las funciones periódicas $R_{\varepsilon a}$, etc., se obtiene en $\frac{da_3}{dt}$ términos seculares puros en t^1 y por tanto términos seculares en t^2 en a_3 . Ahora bien, para el satélite de la Tierra, las perturbaciones de 1^{er} orden a_1 , l_1 , ξ_1 y η_1 carecen de términos seculares, pero contienen términos periódicos puros en t con períodos cortos o largos, como por ejemplo el de casi nueve años, del perihelio. Mientras que el perihelio tiene un movimiento secular muy grande, casi 40° por año, no puede considerarse $\tilde{\omega}_1$ como una pequeña perturbación de 1^{er} orden, las variable-excentricidades ξ y η experimentan sólo pequeñas variaciones del mismo orden que e , oscilando en torno de ± 0.05 , en total de 0.1. Es por esto que ha sido necesario pasar de las variables e y $\tilde{\omega}$ a las variable-excentricidades, y obtener los desarrollos en series según potencias de éstas. Por dicho cambio de variables los términos del segundo miembro de (2) carecen de términos de Poisson, siendo los coeficientes a_1 , l_1 , ξ_1 y η_1 y todos los factores $R_{\varepsilon a}$, $R_{\varepsilon \varepsilon}$, etc., que dependen de la longitud media ε o l , funciones periódicas puras, de modo que por ello ninguna de funciones de 2^o orden: a_2 , l_2 , ξ_2 y η_2 puede contener términos de Poisson. Por consiguiente también $\frac{da_3}{dt}$ según (1), y luego también a_3 contienen únicamente términos periódicos puros y asimismo

también todos los otros términos de $\frac{da_3}{dt}$ según (5), página 16 de I. Por tanto debe eliminarse toda la primera parte de las perturbaciones directas de la Luna por el Sol e investigar únicamente la influencia de las perturbaciones combinadas en a_3 . Por consiguiente hay que considerar ahora la variabilidad de los elementos de la órbita del cuerpo perturbador, es decir del Sol o de la Tierra respectivamente. Entonces la ecuación diferencial (2) debe reemplazarse por la siguiente, ya que ni a_1' ni l_1' contienen términos seculares:

$$\frac{da_2}{dt} = \frac{2\sqrt{a}}{K} [R_{\varepsilon\xi'} \cdot \xi_1' + R_{\varepsilon\eta'} \cdot \eta_1'] \quad (3)$$

donde los coeficientes ξ_1' η_1' son las perturbaciones seculares de 1º orden de la órbita de la Tierra, de modo que poniendo (3a) $\xi_1' = [\xi'] nt$ y $\eta_1' = [\eta'] n't$ (n' = movimiento medio diario de la Tierra), de manera que $2\pi[\xi']$ y $2\pi[\eta']$ son las perturbaciones seculares por cada revolución de la Tierra. Siendo $R_{\varepsilon\xi'}$ y $R_{\varepsilon\eta'}$, funciones periódicas puras, contiene $\frac{da_2}{dt}$, según (3), los términos necesarios de Poisson que, combinados con el factor $R_{\varepsilon a} + \frac{1}{2a} R_{\varepsilon}$ de la (1) producen términos seculares puros en $\frac{da_3}{dt}$, luego también en a_3 . Lo mismo vale entonces para el término siguiente en (1), con el factor l_2 , y también para todos los otros términos de (5) de la I. Pero antes hay que pasar a los nuevos elementos. Desarrollando entonces la función perturbadora en el caso de la Luna, se obtiene análogamente

$$\begin{aligned} \frac{da_3}{dt} = \frac{2\sqrt{a}}{K} \left\{ R_{\varepsilon a} \cdot a_2 + R_{\varepsilon\varepsilon} \cdot l_2 + R_{\varepsilon\xi} \xi_2 + R_{\varepsilon\eta} \eta_2 + R_{\varepsilon a \xi'} a_1 \xi_1' + R_{\varepsilon a \eta'} a_1 \cdot \eta_1' \right. \\ \left. + R_{\varepsilon\varepsilon\xi'} l_1 \xi_1' + R_{\varepsilon\varepsilon\eta'} l_1 \eta_1' + R_{\varepsilon\xi\xi'} \xi_1 \xi_1' + R_{\varepsilon\xi\eta'} \xi_1 \eta_1' + R_{\varepsilon\eta\xi'} \eta_1 \xi_1' \right. \\ \left. + R_{\varepsilon\eta\eta'} \eta_1 \eta_1' + \frac{1}{2a_0} R_{\varepsilon a_2} + \frac{1}{2a_0} R_{\varepsilon\xi'} a_1 \xi_1' + \frac{1}{2a_0} R_{\varepsilon\eta'} a_1 \eta_1' \right\} \quad (4) \end{aligned}$$

De donde resulta que los primeros dos términos del grupo mixto tienen la forma

$$p \left(\frac{da_3}{dt} \right) = \frac{2\sqrt{a}}{K} [R_{\varepsilon a \xi'} \xi_1' + R_{\varepsilon a \eta'} \eta_1']$$

Todos los demás términos contenidos en (5) de la I se eliminan en la teoría de la Luna, porque no pueden producir términos seculares de la forma t^1 en $\frac{da_3}{dt}$ o de la forma t^2 en a_3 .

A fin de considerar todos los términos principales que contribuyen a la formación de la aceleración secular, es necesario tomar en cuenta, por las diferenciaciones dobles respecto de ξ , η , ξ' y η' , al menos todos los términos de segundo grado, de R. Pero queriéndose obtener en el resultado, es decir en a_3 , todos los términos de grado mínimo (de 2º grado), hay que agregar todavía, como en la teoría de los planetas, algunos términos de 3º grado de las variable-excentricidades. Por ello la representación siguiente de la función perturbadora R contiene no sólo los términos de 2º grado en los semi-ejes mayores de las órbitas de los satélites como siempre, sino también el desarrollo según potencias de ξ , η , ξ' y η' hasta el 3º grado, imprescindibles para la representación exacta de la teoría. Los términos a considerar los tomaremos de la teoría de la Luna de Delaunay: *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*, tomo 28-29, o del

3^{er} tomo de la *Mécanique Céleste* de F. Tisserand, página 189, pero expresándolos previamente en las variable-excentricidades y en las longitudes medias del Sol y la Luna. El desarrollo limitado de Tisserand contiene los términos principales de 3^{er} grado, pero es necesario agregar todavía otro término de 3^{er} grado, cuyo coeficiente es también de 2^o grado en a . Se trata del siguiente término de 3^{er} grado en las variable-excentricidades con el argumento $2l' - l$, cuyo coeficiente de 1^{er} grado en dichas variables ya ha sido considerado. Según los *Annales de l'Observatoire de Paris*, tomo 10, página 44-45, el término es el siguiente:

$$+ \frac{1}{8} ec'^2 [0A^0 - 5A_1^0 - 8A_2^0 - 3A_3^0] \cos(2l' - l - 2\tilde{\omega}' + \tilde{\omega}).$$

Después de transformar este término en la forma indicada y desarrollar los coeficientes de Laplace A_i^0 según potencias de a como pequeño parámetro, hasta el 2^o grado inclusive, resulta el último término de la expresión de R en (5). Todos los demás términos del mismo grupo del desarrollo de Le Verrier se anulan por sus coeficientes de Laplace o son de una potencia mayor que 2 y por tanto prescindiremos de ellos. Se obtiene entonces la forma siguiente de la función perturbadora R relativa a los satélites:

$$\begin{aligned} R = n'^2 a^2 & \left[\frac{1}{4} + \frac{3}{8}(\xi'^2 + \eta'^2) + \frac{3}{8}(\xi^2 + \eta^2) - \left[\frac{1}{2} + \frac{3}{4}(\xi'^2 + \eta'^2) \right] (\eta \cos l + \xi \sin l) \right. & (5) \\ & + \frac{3}{4} \eta' \cos l' + \frac{3}{4} \xi' \sin l' - \frac{1}{8} [(\eta'^2 - \xi'^2) \cos 2l + 2\xi\eta \sin 2l] \\ & - \frac{3}{4} [(\eta\eta' - \xi\xi') \cos(l+l') + (\xi\eta' + \eta\xi') \sin(l+l')] - \frac{3}{4} [(\xi\xi' + \eta\eta') \cos(l-l') \\ & + (\xi\eta' - \eta\xi') \sin(l-l')] + \frac{9}{8} [(\eta'^2 - \xi'^2) \cos 2l' + 2\xi'\eta' \sin 2l'] \\ & + \left[\frac{3}{4} - \frac{15}{8}(\xi^2 + \eta^2) - \frac{15}{8}(\xi'^2 + \eta'^2) \right] \cos(2l - 2l') - \frac{3}{8} [\eta' \cos(2l - l') + \xi' \sin(2l - 2l')] \\ & + \frac{21}{8} [\eta' \cos(2l - 3l') - \xi' \sin(2l - 3l')] + \left[\frac{9}{4} - \frac{45}{8}(\xi'^2 + \eta'^2) \right] (\eta \cos(l - 2l') - \xi \sin(l - 2l')) \\ & + \left[\frac{3}{4} - \frac{15}{8}(\xi^2 + \eta^2) \right] (\eta \cos(3l - 2l') + \xi \sin(3l - 2l')) + \\ & \qquad \qquad \qquad + \frac{51}{8} [(\eta'^2 - \xi'^2) \cos(2l - 4l') - 2\xi'\eta' \sin(2l - 4l')] \\ & + \frac{9}{8} [(\xi\xi' + \eta\eta') \cos(l - l') + (\xi'\eta - \eta'\xi) \sin(l - l')] - \frac{63}{8} [(\eta\eta' - \xi\xi') \cos(l - 3l') - \\ & \qquad \qquad \qquad - (\xi\eta' + \eta\xi') \sin(l - 3l')] \\ & - \frac{3}{8} [(\eta\eta' - \xi\xi') \cos(3l - l') + (\xi\eta' + \xi'\eta) \sin(3l - l') + \frac{21}{8} [(\eta\eta' + \xi\xi') \cos(3l - 3l') + \\ & \qquad \qquad \qquad + (\xi\eta' - \eta\xi') \sin(3l - 3l')] \\ & + \frac{15}{8} [(\eta'^2 - \xi'^2) \cos 2l' + 2\xi'\eta' \sin 2l'] + \frac{3}{4} [(\eta'^2 - \xi'^2) \cos(4l - 2l') + 2\xi'\eta' \sin(4l - 2l')] \\ & - \frac{9}{8} [(\eta'^2 - \xi'^2) \eta + 2\xi\xi'\eta'] \cos(2l' - l) + (2\xi'\eta'\eta' - \xi(\eta'^2 - \xi'^2)) \sin(2l' - l) \end{aligned}$$

§ 2. LA INTEGRACIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE LA ACELERACIÓN SECULAR

Para deducir la aceleración secular hay que integrar ahora los términos aislados de la ecuación (4) del § 1. El 1^{er} término satisface, según (4), la ecuación diferencial:

$$I = p \left(\frac{da_3}{dt} \right) = \frac{2\sqrt{a}}{K} R_{\varepsilon a} \cdot a_2. \quad (6)$$

De la perturbación a_2 sólo la parte combinada siguiente puede originar los términos necesarios de Poisson:

$$p \left(\frac{da_2}{dt} \right) = \frac{2\sqrt{a}}{K} [R_{\varepsilon \xi'} \xi_1' + R_{\varepsilon \eta'} \eta_1']. \quad (7)$$

Para calcular las derivadas $R_{\varepsilon \xi'}$ y $R_{\varepsilon \eta'}$ de los términos de grado menor, es decir primero, en ξ' y η' , sólo vienen al caso los argumentos $2l - l'$ y $2l - 3l'$. Poniendo entonces antes de integrar $\xi' = [\xi'] n't$ y $\eta' = [\eta'] n't$, se obtiene por integración, considerando que las partes periódicas de las integrales de

$$\int t \frac{\cos}{\text{sen}} at dt = \pm \frac{t}{a} \frac{\text{sen}}{\cos} at$$

no interesan para deducir la aceleración secular, el siguiente término de Poisson:

$$p(a_2) = \int p \left(\frac{da_2}{dt} \right) dt = \frac{2\sqrt{a}}{K} n'^2 a^2 \left\{ \left[-\frac{3}{4} n't \frac{\text{sen}(2l-l')}{2n-n'} - \frac{21}{4} n't \frac{\text{sen}(2l-3l')}{2n-3n'} \right] [\xi'] \right. \\ \left. + \left[-\frac{3}{4} n't \frac{\cos(2l-l')}{2n-n'} + \frac{21}{4} n't \frac{\cos(2l-3l')}{2n-3n'} \right] [\eta'] \right\} \quad (8)$$

Por consiguiente, considerando los mismos términos de R que en $p(a_2)$, con los mismos argumentos, en l y l' , resulta para el coeficiente $R_{\varepsilon a}$ de (6), que sigue siendo de primer grado, la siguiente expresión

$$R_{\varepsilon a} = 2n'^2 a \left\{ -\frac{3}{4} [-\eta' \text{sen}(2l-l') + \xi' \cos(2l-l')] \right. \\ \left. + \frac{21}{4} [-\eta' \text{sen}(2l-3l') - \xi' \cos(2l-3l')] \right\} \quad (9)$$

Por combinación de las expresiones (9) y (8), reteniendo solamente los términos seculares puros e integrando, se obtiene, poniendo $K^2 = a^3 n^2$ y $\frac{n'}{n} = m$:

$$I = s_1(a_3) = \frac{1}{8} am^3 \left(\frac{9}{2-m} - \frac{441}{2-3m} \right) (\xi' [\eta'] - \eta' [\xi']) (n't)^2 \\ = \frac{1}{8} am^5 \left(\frac{9}{2-m} - \frac{441}{2-3m} \right) (\xi' [\eta'] - \eta' [\xi']) (nt)^2. \quad (10)$$

El coeficiente m es el factor bien conocido de la teoría de la Luna, y la segunda forma de $s_1(a_3)$ resulta de la primera sustituyendo $(n't)^2$ por $m^2 (nt)^2$, de modo que, poniendo $n't = 2\pi i'$ o $nt = 2\pi i$ ($i, i' = 1, 2 \dots$), se obtiene la aceleración secular correspondiente a i' revoluciones de la Tierra o i revoluciones de la Luna. Además hay que observar que en la representación (10) de la aceleración secular, el grado de $s_1(a_3)$ es igual al de $\xi' |\eta'|$ o $\eta' [\xi']$ respectivamente, siendo $[\xi']$ y $[\eta']$ factores a los que ξ' y η' son proporcionales. En la teoría de las perturbaciones seculares se comprueba que en la 1ª aproximación ξ' y η' son proporcionales a los valores iniciales ξ'_0 y η'_0 de ξ' y η' , como asimismo a los valores iniciales de las variable-excentricidades de todos los planetas perturbantes; y por tanto a las excentricidades correspondientes. Luego los $[\xi']$ y $[\eta']$ son en general de 1º grado en las excentricidades planetarias. Por consiguiente la expresión $s_1(a_3)$ de los satélites es de 2º grado en las excentricidades, exactamente como en el caso de la aceleración secular de los planetas según la I.

Para el cálculo numérico hacemos aun la siguiente observación: mientras que en la teoría de los grandes planetas la variable $\tilde{\omega}'$, que aparece en $\xi' = c' \sin \tilde{\omega}'$ y $\eta' = e' \cos \tilde{\omega}'$, es la longitud heliocéntrica, en el caso de los satélites $\tilde{\omega}'$ es la longitud geo- o planeto-céntrica del perihelio. Y por consiguiente, en el cálculo numérico hay que cambiar el elemento heliocéntrico $\tilde{\omega}'$ por $\tilde{\omega}' + 180^\circ$, luego ξ' por $-\xi'$ y η' por $-\eta'$; y lo mismo para los factores $[\xi']$ y $[\eta']$. Por tanto las perturbaciones de primer orden de ξ' y η' cambian de signo; pero las perturbaciones seculares $s(a_3)$ de segundo orden del satélite, a saber $\xi' [\xi']$, $\eta' [\eta']$, etc., quedan invariables.

Después de haber deducido R_ε por medio de los términos de 1º grado en las variable excentricidades, queda por investigar, si resultan términos útiles en $s_1(a_3)$ tomando de $R_{\varepsilon a}$ términos de grado 0 y combiniéndolos con los términos del mismo argumento angular de a_2 . El único término que viene al caso de grado 0 y de 2º grado en a de R es el siguiente:

$$\dot{p}(R) = n'a^2 \left\{ \frac{3}{4} - \frac{15}{8} (\xi'^2 + \eta'^2) \right\} \cos(2l - 2l').$$

Es entonces $R_{\varepsilon a}$ proporcional a $\sin(2l - 2l')$, mientras que la parte de $\frac{da_2}{dt}$ (ver 7) proporcional al factor $R_{\varepsilon \xi'}$ es también proporcional a $\sin(2l - 2l')$, de modo que a_2 es proporcional a $t \cos(2l - 2l')$ y por tanto no se originan términos seculares en t^2 en $s_1(a_3)$.

No habiendo otros términos que podrían interesar, pasemos ahora al término II:

$$\text{II} = p \left(\frac{da_3}{dt} \right) = \frac{2\sqrt{a}}{K} R_{\varepsilon \varepsilon} \cdot l_2. \quad (11)$$

Primero hay que deducir $\frac{dl_2}{dt}$ en base a $\frac{dl_1}{dt}$ definido por la ecuación:

$$\frac{dl}{dt} = n + \frac{d\varepsilon}{dt} = n - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{1}{2na^2} \left(\xi \frac{\partial R}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial R}{\partial \eta} \right),$$

sin considerar los términos referentes a la inclinación y desarrollando el segundo miembro solamente hasta los términos de 2º grado. Pasando de e y $\tilde{\omega}$ a ξ y η , resulta entonces primero:

$e \frac{\partial R}{\partial e} = \xi \frac{\partial R}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial R}{\partial \eta}$; poniendo ahora (12) $R = n'^2 a^2 R_1$, y considerando que R_1 es independiente de a por haber incluido en R sólo los términos hasta a^2 inclusivamente, la función $\frac{dl}{dt}$ pasa a:

$$\frac{dl}{dt} = n - 4 \frac{n'^2}{n} R_1 + \frac{1}{2} \frac{n'^2}{n} \left(\xi \frac{\partial R_1}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial R_1}{\partial \eta} \right) \quad (13)$$

Desarrollando ahora según las perturbaciones de los elementos, resulta, si el índice indica el orden de la fuerza perturbadora:

$$\begin{aligned} n &= n_0 + n_1 + n_2 \dots, & \xi &= \xi_0 + \xi_1 + \xi_2 + \dots, & \eta &= \eta_0 + \eta_1 + \eta_2 + \dots, & \xi' &= \xi_0' + \xi_1' + \xi_2' + \dots, \\ & & \eta' &= \eta_0' + \eta_1' + \eta_2' + \dots, & l &= l_0 + l_1 + l_2 + \dots, \end{aligned} \quad (14)$$

Luego la expresión de $\frac{dl_2}{dt}$ se reduce a la siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{dl_2}{dt} &= n_2 + 4 \frac{n_0'^2}{n_0^2} n_1 R_1 - 4 \frac{n_0'^2}{n_0} (R_{1\xi'} \xi_1' + R_{1\eta'} \eta_1') - \frac{1}{2} \frac{n_0'^2}{n_0^2} n_1 (\xi_0 R_{1\xi} + \eta_0 R_{1\eta}) \\ &+ \frac{1}{2} \frac{n_0'^2}{n_0} [\xi_1 R_{1\xi} + \eta_1 R_{1\eta} + \xi_0 (R_{1\xi\xi'} \xi_1' + R_{1\xi\eta'} \eta_1') + \eta_0 (R_{1\eta\xi'} \xi_1' + R_{1\eta\eta'} \eta_1')] \end{aligned} \quad (15)$$

Vamos a demostrar ahora que los términos 4° y 5° desaparecen. Los 2 términos deberían originar términos de Poisson para ser utilizables; pero ello no es posible, porque el 4° término, por contener el factor n_1 como perturbación de 1° orden del movimiento medio sólo términos periódicos puros o constantes y lo mismo el factor del paréntesis: $\xi_0 R_{1\xi} + \eta_0 R_{1\eta}$. Lo mismo vale también para la 1ª parte del 5° término: $\xi_1 R_{1\xi} + \eta_1 R_{1\eta}$. La 2ª y 3ª parte con los factores ξ_0 y η_0 necesitan, por la diferenciación doble en $R_{1\xi\xi'}$ y $R_{1\xi\eta'}$, etc., el uso de términos de 2° grado al menos, los cuales se reducen, por diferenciación, al grado 0, originando por multiplicación con los factores ξ_1' y η_1' , términos de Poisson en l_2 de 2° grado con los factores: $\xi_0 \xi'$, $\xi_0 \eta'$, $\eta_0 \xi'$ y $\eta_0 \eta'$. Pero para pasar a $p \left(\frac{da_3}{dt} \right)$ hay que combinar aun estos términos con $R_{\epsilon\epsilon}$. Siendo ahora necesario formar $R_{\epsilon\epsilon}$ con los términos del mismo argumento que l_2 a fin de obtener términos de Poisson, podría formarse $R_{\epsilon\epsilon}$, por medio de las propiedades generales de la función perturbadora, partiendo de los términos del grado 0 con el mismo argumento; pero en el caso de los satélites estos términos de $R_{\epsilon\epsilon}$ son, al menos de grado 2 en a y en las variable-excentricidades, como se ve en la expresión (5) de R , de modo que por tanto los términos de Poisson de $p \left(\frac{da_3}{dt} \right)$ pueden ser por lo menos de 4° grado y por consiguiente no interesan.

Observamos todavía que, en la expresión de R se han considerado no sólo los términos del primer grado con los argumentos $l - 2l'$ y $3l - 2l'$, sino también los de tercer grado. Aplicando estos términos resultan de primer grado todas las derivadas $R_{1\xi\xi'}$ y por consiguiente l_2 contiene un término de Poisson de tercer grado, y en definitiva se origina por el factor $R_{\epsilon\epsilon}$ un término de 4° que no nos interesa acá. Además, como es fácil comprobar, sólo resultan términos de Poisson en $s(a_3)$, pero no términos seculares en l^2 . De donde la expresión (15) de l_2 queda limitada, en este caso, a los tres primeros términos.

Para deducir l_2 hay que calcular primero la perturbación n_2 partiendo de $\frac{dl_2}{dt}$ según (15), pero sólo en cuanto al término de Poisson. Por la ecuación de definición de $n = \frac{K}{a^{3/2}}$ resulta, ordenando n y a según potencias de las fuerzas perturbadoras, se tiene: $n = n_0 + n_1 + \dots$ y $a = a_0 + a_1 + \dots$ de donde igualando los términos del mismo orden de los dos miembros:

$$n_2 = n_0 \left[-\frac{3}{2} \frac{a_2}{a_0} + \frac{15}{8} \left(\frac{a_1}{a_0} \right)^2 \right] \quad (16)$$

No pudiéndose originar términos de Poisson en $(a_1)^2$, por el teorema de Laplace, sólo queda el término siguiente:

$$n_2 = -\frac{3}{2} n_0 \frac{a_2}{a_0}, \quad (17)$$

donde los términos necesarios de Poisson de a siguen por definición de $\frac{da_2}{dt}$ según (7) y explícitamente por (8). Otra integración según t , para obtener la primera parte de l_2 nos da entonces:

$$p_1(l_2) = \int n_2 dt = -3 \left\{ \begin{aligned} & [\xi'] \left[\frac{3}{4} \left(\frac{n'}{2n-n'} \right)^2 \cos(2l-l') + \frac{21}{4} \left(\frac{n'}{2n-3n'} \right)^2 \cos(2l-3l') \right] \\ & - [\gamma'] \left[\frac{3}{4} \left(\frac{n'}{2n-n'} \right)^2 \sin(2l-l') - \frac{21}{4} \left(\frac{n'}{2n-3n'} \right)^2 \sin(2l-3l') \right] \end{aligned} \right\} n't \quad (18)$$

El empleo de términos de grado 0 y 2 en lugar de los anteriores de grado 1 en R , es decir términos con el argumento $A = 2l - 2l'$, produce en l_2 términos de Poisson de la forma $t \operatorname{sen} A$, pero el término $R_{\varepsilon\varepsilon}$ es un término coseno, de modo que por combinación no resulta ningún término secular en l^2 en $p_1(l_2)$.

La parte siguiente de $\frac{dl_2}{dt}$, fórmula (15): $4 \frac{n'^2}{n_0^2} n_1 R_1$ no viene al caso, ya que no da origen a términos de Poisson.

El 3^{er} término de $\frac{dl_2}{dt}$ es, según (15):

$$p_3 \left(\frac{dl_2}{dt} \right) = -4 \frac{n'^2}{n_0} (R_{1\xi'} \xi_1' + R_{1\gamma'} \gamma_1') \quad (19)$$

Este término es al menos de 1^{er} grado, si $R_{1\xi'}$ y $R_{1\gamma'}$ se deducen de los términos de 1^{er} grado de R , de modo que por combinación con los mismos términos de $R_{\varepsilon\varepsilon}$ se originan términos del 2^o grado en $p_3 \left(\frac{dl_2}{dt} \right)$, si ambos factores contienen las funciones \cos o sen , o ambas. Pues en efecto se halla:

$$p_3 \frac{dl_2}{dt} = -4 \frac{n'^2}{n} \left\{ -\frac{3}{8} \xi_1' \operatorname{sen}(2l-l') - \frac{21}{8} \xi_1' \operatorname{sen}(2l-3l') - \frac{3}{8} \gamma_1' \cos(2l-l') + \frac{21}{8} \gamma_1' \cos(2l-3l') \right\}$$

de modo que

$$p_3(l_2) = -4n'm^2t \left\{ +\frac{3}{8} \frac{[\xi']}{2-m} \cos(2l-l') + \frac{21}{8} \frac{[\xi']}{2-3m} \cos(2l-3l') - \frac{3}{8} \frac{[\gamma']}{2-m} \operatorname{sen}(2l-l') + \frac{21}{8} \frac{[\gamma']}{2-3m} \operatorname{sen}(2l-3l') \right\}$$

originándose de hecho términos de Poisson \cos y sen .

Conteniendo finalmente la función

$$R_{\varepsilon\varepsilon} = n'^2 a^2 \left\{ + \frac{3}{2} r_1' \cos(2l - l') + \frac{3}{2} \xi_1' \sin(2l - l') - \frac{21}{2} r_1' \cos(2l - 3l') + \frac{21}{2} \xi_1' \sin(2l - 3l') \right\}$$

también funciones cos y sen, resulta por la combinación de $R_{\varepsilon\varepsilon}$ con la suma de los términos $p_1(l_2) + p_3(l_2)$ y por la siguiente integración la aceleración secular:

$$s_2(a_3) = -\frac{1}{16} am^3 \left[3 \left(\frac{9}{(2-m)^2} - \frac{441}{(2-3m)^2} \right) + 2 \left(\frac{9}{2-m} - \frac{441}{2-3m} \right) \right] ([\xi_1'] r_1' - [r_1'] \xi_1') (n'l)^2, \quad (21)$$

Una aplicación de los términos de grados 0 y 2 con los argumentos $2l - 2l'$ en p_3 sólo da términos de Poisson en $s_2(a_3)$, que no interesan.

El 3º término de nuestro grupo es ahora según (4):

$$\text{III} = p \left(\frac{da_3}{dt} \right) = \frac{2\sqrt{a}}{K} R_{\varepsilon\xi} \cdot \xi_2, \quad (22)$$

donde ξ_2 resulta de la ecuación diferencial:

$$\frac{d\xi_2}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2} \left\{ R_{r_1} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} e^2 \right) \xi R_{\varepsilon} \right\}, \quad (23a)$$

obteniéndose:

$$\frac{d\xi_2}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2} (R_{r_1\xi_1'} + R_{r_1\xi_1'}) - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} e^2 \right) \xi (R_{\varepsilon\xi_1'} + R_{\varepsilon r_1'}) \quad (23b)$$

El 2º término del 2º miembro origina directamente términos de Poisson en ξ_2 , luego también en ξ_2 , pero por la correspondiente combinación con el factor $R_{\varepsilon\xi}$ de (22) se originan términos de 4º grado al menos y por tanto dicha 2ª parte carece de interés; pues los términos $R_{\varepsilon\xi_1'}$ y $R_{\varepsilon r_1'}$, sólo pueden combinarse con el factor $R_{\varepsilon\xi}$ de (22), con el mismo argumento, en el caso en que los términos resultan de los de 2º grado de R.

Para formar la primera parte del 2º miembro de (23b) es necesario por la derivación doble de R respecto de las variables-excentricidades, extraer de R los términos de 2º grado al menos. Lo mismo vale para el factor $R_{\varepsilon\xi}$ que debe combinarse con los mencionados, con términos del mismo argumento. Los argumentos a considerar son pues los 5 siguientes: $A = l - l'$, $3l - 3l'$, $l + l'$, $l - 3l'$ y $3l - l'$. Por integración de la ecuación de $\frac{d\xi_2}{dt}$ resultan entonces los términos:

$$\begin{aligned} \xi_2 = & \sqrt{1-e^2} \frac{n'^2}{n} [\xi_1'] t \left\{ \frac{3}{4} \frac{n'}{n+n'} \cos(l+l') - \frac{15}{8} \frac{n'}{n-n'} \cos(l-l') - \frac{63}{8} \frac{n'}{n-3n'} \cos(l-3l') + \right. \\ & \left. + \frac{3}{8} \frac{n'}{3n-n'} \cos(3l-l') + \frac{21}{8} \frac{n'}{3n-3n'} \cos(3l-3l') \right\} + \\ & + \sqrt{1-e^2} \frac{n'^2}{n} [r_1'] t \left\{ \frac{3}{4} \frac{n'}{n+n'} \sin(l+l') + \frac{3}{8} \frac{n'}{n-n'} \sin(l-l') - \right. \\ & \left. - \frac{63}{8} \frac{n'}{n-3n'} \sin(l-3l') - \frac{3}{8} \frac{n'}{3n-n'} \sin(3l-l') + \frac{21}{8} \frac{n'}{3n-3n'} \sin(3l-3l') \right\} \end{aligned} \quad (24)$$

La función $R_{\varepsilon\xi}$ que debe combinarse con ξ_2 es pues la siguiente :

$$\begin{aligned}
R_{\varepsilon\xi} = n'^2 a^2 \left\{ -\frac{3}{4} \xi' \operatorname{sen}(l+l') - \frac{3}{4} \eta' \operatorname{cos}(l+l') + \frac{3}{4} \xi' \operatorname{sen}(l-l') \right. \\
- \frac{3}{4} \eta' \operatorname{cos}(l-l') - \frac{9}{8} \xi' \operatorname{sen}(l-l') - \frac{9}{8} \eta' \operatorname{cos}(l-l') - \\
- \frac{63}{8} \xi' \operatorname{sen}(l-3l') + \frac{63}{8} \eta' \operatorname{cos}(l-3l') - \frac{9}{8} \xi' \operatorname{sen}(3l-l') - \\
\left. - \frac{9}{8} \eta' \operatorname{cos}(3l-l') - \frac{63}{8} \xi' \operatorname{sen}(3l-3l') + \frac{63}{8} \eta' \operatorname{cos}(3l-3l') \right\}
\end{aligned} \tag{25}$$

de manera que resulta por combinación e integración :

$$\begin{aligned}
s_3(a_3) = + \frac{1}{32} am^3 \left\{ \xi' [\eta'] \left[\frac{9}{1+m} - \frac{9}{4(1-m)} + \frac{3969}{4(1-3m)} + \frac{27}{4(3-m)} - \frac{1323}{4(3-3m)} \right] - \right. \\
\left. - \eta' [\xi'] \left[\frac{9}{1+m} - \frac{225}{4(1-m)} + \frac{3969}{4(1-3m)} + \frac{27}{4(3-m)} - \frac{1323}{4(3-3m)} \right] \right\} (n't)^2
\end{aligned} \tag{26}$$

Los términos del 3^{er} grado con el argumento $A=l-2l'$, del último término de R de la (4) también contribuyen con magnitudes de 2^o grado en la aceleración secular a_3 , si se calcula $R_{\varepsilon\xi}$, factor de combinación, de los términos de 1^{er} grado del mismo argumento. En base al término de 3^{er} grado de R se obtiene :

$$\xi_2 = - \frac{9}{4} \cdot \frac{n'^2}{n} \frac{n'}{n-2n'} ([\xi'] \eta' + [\eta'] \xi') t \operatorname{cos}(l-2l') \tag{27}$$

y en base al término del 1^{er} grado :

$$R_{\varepsilon\xi} = - \frac{9}{4} n'^2 a^2 \operatorname{cos}(l-2l') \tag{28}$$

de modo que, después de haber combinado e integrado, resulta :

$$s_3(a_3) = + \frac{81}{32} am^3 \frac{1}{1-2m} ([\xi'] \eta' + [\eta'] \xi') (n't)^2 \tag{29}$$

La aplicación análoga a los términos de 1^{er} y 3^{er} grado con el argumento $A=3l-2l'$ no produce ningún término secular en t^2 en a_3 , sino sólo términos de Poisson.

Finalmente tenemos que considerar el 4^o, es decir, el último término del 1^{er} sub-grupo :

$$IV = p_4 \left(\frac{da_3}{dt} \right) = \frac{2\sqrt{a}}{K} R_{\varepsilon\eta_1 \cdot \eta_2} \tag{30}$$

donde, según la ecuación diferencial correspondiente a la perturbación de 2^o orden tiene la forma :

$$\frac{d\tau_2}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2} [R_{\xi\epsilon}; \xi_1' + R_{\xi\tau, \tau_1'}] - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8}e^2\right) (R_{\xi\xi'}, \xi_1' + R_{\xi\tau'}; \tau_1') \quad (31)$$

El 2º término del segundo miembro se elimina por los mismos motivos que en el caso de $\frac{d\xi_2}{dt}$ (23b). El 1º término del segundo miembro se obtiene también ahora de los términos de 2º grado, al menos en las variables-excentricidades, y también el factor de combinación $R_{\xi\tau}$.

La expresión del factor de combinación que aplicaremos entonces es la siguiente :

$$\begin{aligned} R_{\xi\tau} = n'^2 a^2 \left\{ + \frac{3}{4} \tau_1' \operatorname{sen}(l+l') - \frac{3}{4} \xi_1' \operatorname{cos}(l+l') + \frac{3}{4} \tau_1' \operatorname{sen}(l-l') + \right. \\ \left. + \frac{3}{4} \xi_1' \operatorname{cos}(l-l') - \frac{9}{8} \tau_1' \operatorname{sen}(l-l') + \frac{9}{8} \xi_1' \operatorname{cos}(l-l') + \right. \\ \left. + \frac{63}{8} \tau_1' \operatorname{sen}(l-3l') + \frac{63}{8} \xi_1' \operatorname{cos}(l-3l') + \frac{9}{8} \tau_1' \operatorname{sen}(3l-l') - \right. \\ \left. - \frac{9}{8} \xi_1' \operatorname{cos}(3l-l') - \frac{63}{8} \tau_1' \operatorname{sen}(3l-3l') - \frac{63}{8} \xi_1' \operatorname{cos}(3l-3l') \right\} \end{aligned} \quad (32)$$

de modo que se origina por (30) el siguiente término secular :

$$\begin{aligned} s_4(a_3) = + \frac{1}{32} am^3 \left\{ [\xi_1'] \tau_1' \left[\frac{9}{1+m} - \frac{9}{4(1-m)} + \frac{3969}{4(1-3m)} + \frac{27}{4(3-m)} - \frac{1323}{4(3-3m)} \right] - \right. \\ \left. - [\tau_1'] \xi_1' \left[\frac{9}{1+m} - \frac{225}{4(1-m)} + \frac{3969}{4(1-3m)} + \frac{27}{4(3-m)} - \frac{1323}{4(3-3m)} \right] \right\} (n't)^2 \end{aligned} \quad (34)$$

o

$$\begin{aligned} s_4(a_3) = + \frac{1}{32} am^5 \left\{ [\xi_1'] \tau_1' \left[\frac{9}{1+m} - \frac{9}{4(1-m)} + \frac{3969}{4(1-3m)} + \frac{27}{4(3-m)} - \frac{1323}{4(3-3m)} \right] - \right. \\ \left. - [\tau_1'] \xi_1' \left[\frac{9}{1+m} - \frac{225}{4(1-m)} + \frac{3969}{4(1-3m)} + \frac{27}{4(3-m)} - \frac{1323}{4(3-3m)} \right] \right\} (nt)^2 \end{aligned}$$

También ahora se obtiene, en analogía con el caso III otra contribución por medio del término de 3º grado con el argumento $\Lambda = l - 2l'$, considerado al fin de la expresión (4) de R. Siendo necesario pues tomar $R_{\xi\tau}$ de los términos de 1º grado, para obtener términos de 2º grado en $s(a_3)$, resulta primero :

$$R_{\xi\tau} = -\frac{9}{4} n'^2 a^2 \operatorname{sen}(l-2l') \quad (35)$$

Por consiguiente la función $\frac{d\tau_2}{dt}$ tiene que contener sólo $\cos \Lambda$, a fin de que, en base de $\tau_2 = t \operatorname{sen} \Lambda$ pueda originarse un término secular en $s(a_3)$. Por eso el término de Poisson de τ_2 es el siguiente :

$$\tau_2 = + \frac{9}{4} \frac{n'^2}{n} \cdot \frac{n'}{n-2n'} ([\xi_1'] \tau_1' + [\tau_1'] \xi_1') t \operatorname{sen}(l-2l')$$

Por combinación con $R_{\epsilon\eta}$ resulta entonces el término siguiente en a_3 :

$$s_4(a_3) = -\frac{8\mathbf{I}}{3\mathbf{2}} am^3 \cdot \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{I} - 2m} ([\xi']\eta' + [\eta']\xi')(n't)^2 \quad (36)$$

Pasando ahora al 2º grupo de términos mixtos de R, debemos investigar primero el término siguiente:

$$V = p_3 \left(\frac{da_3}{dt} \right) = \frac{2\sqrt{a}}{\mathbf{K}} R_{\epsilon a \xi'} a_1 \xi_1' \quad (37)$$

Como el factor $R_{\epsilon a \xi'}$ depende de ϵ y ξ' , hay que extraerlo de los términos de 1º grado de modo que

$$R_{\epsilon a \xi'} = n'^2 a^2 \left\{ -\frac{3}{2} \cos(2l - l') - \frac{2\mathbf{I}}{2} \cos(2l - 3l') \right\} \quad (38)$$

donde aparece solamente la función coseno. Para obtener una parte constante, debe pues contener a_1 únicamente funciones cosenos. Luego resulta por medio de la ecuación $\frac{da_1}{dt} = \frac{2\sqrt{a}}{\mathbf{K}} R_{\epsilon}$:

$$a_1 = \frac{\sqrt{a}}{\mathbf{K}} n'^2 a^2 \left\{ -\frac{3}{2} \eta' \frac{\cos(2l - l')}{2n - n'} + \frac{2\mathbf{I}}{2} \eta' \frac{\cos(2l - 3l')}{2n - 3n'} \right\} \quad (39)$$

Por combinación con (38) e integración se tiene entonces el término secular

$$s_5(a_3) = \frac{\mathbf{I}}{8} am^3 \left(\frac{9}{2 - m} - \frac{44\mathbf{I}}{2 - 3m} \right) \eta' [\xi'] (n't)^2. \quad (40)$$

Los términos de argumento $A = 2l - 2l'$ contienen factores de grado 0 ó 2 en ξ' y η' , de manera que la combinación de los factores $R_{\epsilon a \xi'}$ y a_1 , originando este último por el término de grado 0, hace aparecer sólo un término de 2º grado en $s_5(a_3)$; pero siendo a_1 un término coseno, $R_{\epsilon a \xi'}$ es un seno, de modo que a_3 contiene solamente un término de Poisson que por tanto no interesa.

El término siguiente de nuestro grupo es ahora:

$$VI = p_6 \left(\frac{da_3}{dt} \right) = \frac{2\sqrt{a}}{\mathbf{K}} R_{\epsilon a \eta'} \cdot a_1 \eta_1'. \quad (41)$$

Para este caso análogo al V debe calcularse el factor $R_{\epsilon a \eta'}$ partiendo de los términos del 1º grado en η' . Se obtiene así un término seno:

$$R_{\epsilon a \eta'} = n'^2 a^2 \left\{ +\frac{3}{2} \sin(2l - l') - \frac{2\mathbf{I}}{2} \sin(2l - 3l') \right\}. \quad (42)$$

Luego se obtienen para a_1 los términos senos correspondientes necesarios:

$$a_1 = \frac{\sqrt{a}}{\mathbf{K}} n'^2 a^2 \left\{ -\frac{3}{2} \xi' \frac{\sin(2l - l')}{2n - n'} - \frac{2\mathbf{I}}{2} \xi' \frac{\sin(2l - 3l')}{2n - 3n'} \right\} \quad (43)$$

y por consiguiente :

$$s_6(a_3) = + \frac{1}{8} am^3 \left(-\frac{9}{2-m} + \frac{441}{2-3m} \right) \xi' [\eta'] (n't)^2, \quad (44)$$

o

$$s_6(a_3) = + \frac{1}{8} am^5 \left(-\frac{9}{2-m} + \frac{441}{2-3m} \right) \xi' [\eta'] (nt)^2.$$

El término $\cos(2l-2l')$ en R origina como en el caso anterior $V = p_6 \left(\frac{da_3}{dt} \right)$ sólo términos de Poisson en a_3 que no interesan.

Pasando al próximo término del grupo mixto debemos estudiar ahora :

$$VII = \frac{2\sqrt{a}}{K} R_{\xi\xi\xi'} l_1 \cdot \xi_1'. \quad (45)$$

El factor l_1 que resulta por medio de la ecuación :

$$\frac{dl_1}{dt} = n_1 - 4 \frac{n'^2}{n} R_1 + \frac{1}{2} \frac{n'^2}{n} (\xi R_{1\xi} + \eta R_{1\eta}) \quad (46)$$

en la que se consideran únicamente los términos principales en a , es decir los de 2º grado. Sobre el último término de $\frac{dl_1}{dt}$ observaremos que la parte correspondiente de R debe depender de ξ y η , mientras que por el factor general de VII, $R_{\xi\xi\xi'}$, la función correspondiente R debe depender, con el mismo argumento angular, de ξ' . Mas en la teoría de las perturbaciones de los satélites no existen términos lineales del mismo argumento con los factores ξ y ξ' o η y η' , de modo que los términos deben ser al menos de 2º grado, con los factores $\xi \cdot \xi'$ o $\eta\xi'$ respectivamente, como corresponde al argumento $A=l-l'$. Pero entonces VII resulta de 4º grado, de modo que este término no interesa. Además los coeficientes $R_{1\xi}$ y $R_{1\eta}$ pueden depender de los términos de 1º grado, pero $R_{\xi\xi\xi'}$ será de 3º grado, si el argumento es $A=l-2l'$; pero entonces la VII resulta de 4º grado y por tanto sin interés. Por consiguiente quedan en $\frac{dl_1}{dt}$ sólo los dos primeros términos, el primero es : $p_1 \left(\frac{dl_1}{dt} \right) = n_1$, de modo que por la expresión anterior de n_1 , se tiene :

$$p_1(l_1) = - \frac{3n_0}{2a_0} \int a_1 dt. \quad (47)$$

Pudiendo resultar ahora el factor $R_{\xi\xi\xi'}$ de VII del grado más bajo, es decir o, $p_1(l_1)$ y por tanto también a_1 deben originarse de los términos del mismo argumento. Siendo ahora

$$R_{\xi\xi\xi'} = n'^2 a^2 \left[\frac{3}{2} \sin(2l-l') + \frac{21}{2} \sin(2l-3l') \right] \quad (48)$$

únicamente debemos aplicar en l_1 los términos-seno, luego en $\frac{dl_1}{dt}$ como en n_1 y a_1 sólo términos coseno, de modo que, como en (39) la a_1 contiene solamente términos en η' . Por consiguiente resulta :

$$p_1(l_1) = \frac{9}{4} \eta' \frac{n'^2}{(2n-n')^2} \sin(2l-l') - \frac{63}{4} \eta' \frac{n'^2}{(2n-3n')^2} \sin(2l-3l')$$

La segunda parte de $\frac{dl_1}{dt}$ es :

$$p_2 \left(\frac{dl_1}{dt} \right) = -4 \frac{n'^2}{n} R_1 \quad (49)$$

de manera que se obtiene después de la integración como en el caso de $p_1 \left(\frac{dl_1}{dt} \right)$:

$$p_2(l_1) = + \frac{3}{2} r_1' \frac{n'}{n} \frac{n'}{2n-n'} \sin(2l-l') - \frac{21}{2} r_1' \frac{n'}{n} \frac{n'}{2n-3n'} \sin(2l-3l') \quad (50)$$

De la combinación de $R_{\varepsilon\varepsilon\xi'}$ y la suma $p_1(l_1) + p_2(l_1)$ e integración se obtiene pues

$$s_7(a_3) = \frac{1}{16} am^3 \left\{ \frac{27}{(2-m)^2} - \frac{1323}{(2-3m)^2} + \frac{18}{2-m} - \frac{882}{2-3m} \right\} r_1' \left[\frac{\xi'}{5} \right] (n'l)^2 \quad (51)$$

Deduciendo la función $R_{\varepsilon\varepsilon\xi'}$ y asimismo l_1 por medio de $\int n_1 dt$, de los términos de R afectados del argumento $A=2l-2l'$ de grado 0 y 2, de modo que :

$$R = n'^2 a^2 \left[\frac{3}{4} - \frac{15}{8} (\xi'^2 + r_1'^2) \right] \cos(2l-2l'),$$

se obtiene $R_{\varepsilon\varepsilon\xi'}$ de la forma $\xi' \cos(2l-2l')$ y simultáneamente l_1 de la forma : $\sin(2l-2l')$, de modo que en $s_7(a_3)$ sólo hay términos de Poisson.

El próximo término de nuestro sub-grupo mixto es :

$$\text{VIII} = p_8 \left(\frac{da_3}{dt} \right) = \frac{2\sqrt{a}}{K} R_{\varepsilon\varepsilon r_1'} l_1 r_1' \quad (52)$$

donde $\frac{dl_1}{dt}$ satisface la misma ecuación diferencial que en el caso VII. Pero ya que hay que formar $R_{\varepsilon\varepsilon r_1'}$ por medio de los términos lineales en r_1' de R, con el argumento $A=2l-l'$, se tiene

$$R_{\varepsilon\varepsilon r_1'} = n'^2 a^2 \left\{ \frac{3}{2} \cos(2l-l') - \frac{21}{2} \cos(2l-3l') \right\}$$

Debemos deducir ahora, correspondientemente, a_1 y l_1 de los términos lineales en ξ' con el argumento mencionado ; por consiguiente se obtiene :

$$p_1(l_1) = - \frac{9}{4} \xi' \frac{n'^2}{(2n-n')^2} \cos(2l-l') - \frac{63}{4} \xi' \frac{n'^2}{(2n-3n')^2} \cos(2l-3l') \quad (53)$$

Análogamente resulta entonces :

$$p_2(l_1) = - \frac{3}{2} \xi' \frac{n'}{n} \frac{n'}{2n-n'} \cos(2l-l') - \frac{21}{2} \xi' \frac{n'}{n} \frac{n'}{2n-3n'} \cos(2l-3l'). \quad (54)$$

Por eso se tiene por combinación de $R_{\varepsilon\varepsilon\xi'}$ y $l_1 = p_1(l_1) + p_2(l_1)$ e integración la aceleración secular :

$$s_8(a_3) = -\frac{1}{16} am^3 \left\{ \frac{27}{(2-m)^2} - \frac{1323}{(2-3m)^2} + \frac{18}{2-m} - \frac{882}{2-3m} \right\} \xi' [\eta'] (n't)^2. \quad (55)$$

Los términos de grado 0 y 2 de argumento $A = 2l - 2l'$ originan como en el caso VII únicamente un término de Poisson en a_3 que no viene al caso.

El término siguiente de $\frac{da_3}{dt}$ es ahora :

$$IX = p_9 \left(\frac{da_3}{dt} \right) = \frac{2\sqrt{a}}{K} R_{\varepsilon\xi\xi'} \xi_1 \cdot \xi_1' \quad (56)$$

donde $\frac{d\xi_1}{dt}$ ya está definido por (23a). El factor $R_{\varepsilon\xi\xi'}$ resulta de los términos de 2º grado al menos, es decir con los argumentos: $l-l'$, $3l-3l'$, $l+l'$, $l-3l'$, $3l-l'$, de modo que se obtiene :

$$R_{\varepsilon\xi\xi'} = n'^2 a^2 \left\{ -\frac{3}{4} \operatorname{sen}(l+l') - \frac{3}{8} \operatorname{sen}(l-l') - \frac{63}{8} \operatorname{sen}(l-3l') - \frac{9}{8} \operatorname{sen}(3l-l') - \frac{63}{8} \operatorname{sen}(3l-3l') \right\} \quad (57)$$

Ya que el factor $R_{\varepsilon\xi\xi'}$ puede originar únicamente términos-senos de los argumentos mencionados, como lo demuestra también la (57), hay que considerar en ξ_1 solamente los términos-senos, o sea en $\frac{d\xi_1}{dt}$ los del coseno. Por tanto resulta de los términos de 2º grado :

$$\xi_1 = \sqrt{1-e^{2i}} \frac{n'^2}{n} \eta' \left\{ -\frac{3}{4} \frac{\operatorname{sen}(l+l')}{n+n'} + \frac{3}{8} \frac{\operatorname{sen}(l-l')}{n-n'} - \frac{63}{8} \operatorname{sen} \frac{(l-3l')}{n-3n'} - \frac{3}{8} \frac{\operatorname{sen}(3l-l')}{3n-n'} + \frac{21}{8} \frac{\operatorname{sen}(3l-3l')}{3n-3n'} \right\} \quad (58)$$

Por combinación de (57) y (58) se obtiene entonces según la (56) y después de integración el siguiente término secular en t^2 :

$$s_9(a_3) = +\frac{1}{2} am^3 \left\{ \frac{9}{16(1+m)} - \frac{9}{64(1-m)} + \frac{63^2}{64(1-3m)} + \frac{27}{64(3-m)} - \frac{1323}{64(3-3m)} \right\} [\xi'] \eta' (n't)^2 \quad (59a)$$

Además en este caso puede llegarse a términos seculares útiles, si se calcula $R_{\varepsilon\xi\xi'}$ de los términos de 3º grado de R , y ξ_1 de los de 1º grado. Como $\frac{d\xi}{dt}$ es proporcional a R_η , y η es una función-coseno, $\frac{d\xi}{dt}$ debe corresponder a un coseno y por tanto ξ_1 es un seno. Por consiguiente hay que sacar $R_{\varepsilon\xi\xi'}$ únicamente de los términos cosenos obteniéndose por el último término de R con el argumento $l-2l'$ la expresión : $R_{\varepsilon\xi\xi'} = \frac{9}{4} n'^2 a'^2 n' \operatorname{seno}(l-2l')$, de donde sigue, por combinación con

$$\xi_1 = \frac{9}{4} \cdot \frac{n'^2 \operatorname{sen}(l-2l')}{n(n-2n')}.$$

la aceleración secular :

$$s_9(a_3) = \frac{81}{32} a \frac{m^3}{1-m} \eta' [\xi'] (n't)^2. \quad (59b)$$

El término siguiente de nuestro grupo es :

$$X = p_{10} \left(\frac{da_3}{dt} \right) = \frac{2\sqrt{a}}{K} \cdot R_{\varepsilon\xi\gamma'} \xi_1 \cdot r_{11}' \quad (60)$$

Aquí también consideraremos primero los términos de 2º grado con los mismos A que en el caso IX. Por ser $R_{\varepsilon\xi\gamma'}$ proporcional a $\cos A$, ξ_1 debe contener sólo los términos proporcionales a $\cos A$, de modo que únicamente hay que considerar en $\frac{d\xi_1}{dt}$ los términos en $\sin A$. Luego se tiene

$$\xi_1 = \frac{n'^2}{n} \xi' \left\{ \frac{3 \cos(l+l')}{4} \frac{1}{n+n'} - \frac{15 \cos(l-l')}{8} \frac{1}{n-n'} - \frac{63 \cos(l-3l')}{8} \frac{1}{n-3n'} + \frac{3 \cos(3l-l')}{8} \frac{1}{3n-n'} + \frac{21 \cos(3l-3l')}{8} \frac{1}{3n-3n'} \right\} \quad (61)$$

y además

$$R_{\varepsilon\xi\gamma'} = n'^2 a^2 \left\{ -\frac{3}{4} \cos(l+l') - \frac{15}{8} \cos(l-l') + \frac{63}{8} \cos(l-3l') - \frac{9}{8} \cos(3l-l') + \frac{63}{8} \cos(3l-3l') \right\} \quad (62)$$

de modo que por combinación e integración resulta el término secular :

$$s_{10}(a_3) = \frac{1}{2} a m^3 \left\{ -\frac{9}{16(1+m)} + \frac{225}{64(1-m)} - \frac{63^2}{64(1-3m)} - \frac{27}{64(3-m)} + \frac{1323}{64(3-3m)} \right\} \xi'[\gamma'] (n't)^2 \quad (63a)$$

Si se pasa ahora a los términos de 1º y 3º grado con el argumento $l-2l'$, como en el caso precedente IX, debemos calcular $R_{\varepsilon\xi\gamma'}$ del último término de R y elegir sólo la parte que origina un seno del argumento, porque ξ_1 tomado de los términos de 1º grado de R, sólo consta de un término proporcional al seno del argumento $l-2l'$. Se obtiene pues: $\xi_1 = \frac{9}{4} \frac{n'}{n} \cdot \frac{n'}{n-2n'} \sin(l-2l')$ de modo que el único término

útil de $R_{\varepsilon\xi\gamma'}$ es: $R_{\varepsilon\xi\gamma'} = \frac{9}{4} n'^2 a^2 \xi' \sin(l-2l')$.

Por tanto, resulta de la combinación del producto de los dos factores y por integración

$$s_{10}(a_3) = \frac{81}{32} a \frac{m^3}{1-2m} \xi'[\gamma'] \cdot (n't)^2 \quad (63b)$$

Además tenemos como penúltimo término de nuestro grupo :

$$XI = p_{11} \left(\frac{da_3}{dt} \right) = \frac{2\sqrt{a}}{K} R_{\varepsilon\gamma\xi'} \cdot r_{11} \xi_1' \quad (64)$$

donde ahora

$$\frac{dr_1}{dt} = -\frac{\sqrt{l-e^2}}{na^2} R_{\xi} \quad (65)$$

El segundo término del 2º miembro no interesa por el mismo motivo que en el caso de $\frac{d\xi}{dt}$. Para llegar a una combinación útil partiendo de los términos de 2º grado con los mismos argumentos A que en los casos IX y X, $R_{\varepsilon\gamma\xi'}$ debe ser proporcional a $\cos A$, y lo mismo por consiguiente r_{11} . Debe ser pues $\frac{dr_{11}}{dt}$ y

por tanto también R_{ξ} proporcional a un sen A. Luego resulta por una selección correspondiente de los términos en R

$$\gamma_{11} = -\frac{n'^2}{n} \eta' \left\{ \frac{3 \cos(l+l')}{4} \frac{1}{n+n'} + \frac{15 \cos(l-l')}{8} \frac{1}{n-n'} - \frac{63 \cos(l-3l')}{8} \frac{1}{n-3n'} + \frac{3 \cos(3l-l')}{8} \frac{1}{3n-n'} - \frac{21 \cos(3l-3l')}{8} \frac{1}{3n-3n'} \right\} \quad (66)$$

y correspondientemente

$$R_{\varepsilon\eta\xi'} = n'^2 a^2 \left\{ -\frac{3}{4} \cos(l+l') + \frac{15}{8} \cos(l-l') + \frac{63}{8} \cos(l-3l') - \frac{9}{8} \cos(3l-l') - \frac{63}{8} \cos(3l-3l') \right\} \quad (67)$$

De la combinación de los dos términos (66) y (67) se obtiene, integrando, la parte secular

$$s_{11}(a_3) = -\frac{1}{2} am^3 \left\{ -\frac{9}{16(1+m)} + \frac{225}{64(1-m)} - \frac{63^2}{64(1+3m)} - \frac{27}{64(3-m)} + \frac{1323}{64(3-3m)} \right\} \eta' [\xi'] (n't)^2 \quad (68a)$$

Por medio de los términos de 3^{er} grado, del último término de R, combinando con los términos de 1^{er} grado y del mismo argumento, se obtiene también una contribución para $s_{11}(a_3)$.

• Primero resulta:

$$\gamma_{11} = -\frac{9}{4} \frac{n'}{n} \cdot \frac{n'}{n-2n'} \cos(l-2l') \quad (69a)$$

de modo que el factor $R_{\varepsilon\eta\xi'}$, que hay que combinar con γ_{11} , debe contener también el factor cos A, de modo que por la elección correspondiente del término resulta:

$$R_{\varepsilon\eta\xi'} = \frac{9}{4} n'^2 a^2 \eta' \cos(l-2l') \quad (69b)$$

y por la combinación de (69a) y (69b):

$$s_{11}(a_3) = -\frac{81}{32} a \frac{m^3}{1-2m} \eta' [\xi'] (n't)^2. \quad (68b)$$

El último término del sub-grupo mixto es el siguiente:

$$XII = \frac{2\sqrt{a}}{K} R_{\varepsilon\eta\xi'} \gamma_{11} \cdot \eta' \quad (70)$$

Considerando, primero, los términos de 2^o grado de R, y observando que el término en $\eta\eta'$ de R está afectado por el factor cos A, la derivada $R_{\varepsilon\eta\xi'}$ debe ser proporcional a un sen A. Por tanto, hay que considerar en γ_{11} solamente términos en sen A, y en $\frac{d\gamma_{11}}{dt}$ sólo términos en cos A. Por consiguiente en la función R-coseno de todas las magnitudes angulares l, l', ω y ω' sólo deben considerarse términos de la forma $\xi \cdot \xi' \cos A$. Luego resulta:

$$\gamma_{11} = -\frac{n'^2}{n} \xi' \left\{ \frac{3 \operatorname{sen}(l+l')}{4} \frac{1}{n+n'} + \frac{3 \operatorname{sen}(l-l')}{8} \frac{1}{n-n'} + \frac{63 \operatorname{sen}(l-3l')}{8} \frac{1}{n-3n'} + \frac{3 \operatorname{sen}(3l-l')}{8} \frac{1}{3n-n'} + \frac{21 \operatorname{sen}(3l-2l')}{8} \frac{1}{3n-3n'} \right\} \quad (71)$$

Por tanto la derivada $R_{\varepsilon\tau\tau'}$ tiene la forma:

$$R_{\varepsilon\tau\tau'} = n^{2'} a^2 \left\{ \frac{3}{4} \sin(l+l') - \frac{8}{3} \sin(l-l') + \frac{63}{8} \sin(l-3l') + \frac{9}{8} \sin(3l-l') - \frac{63}{8} \sin(3l-3l') \right\} \quad (72)$$

Por combinación de las magnitudes (71) y (72) resulta entonces como parte secular de a_3 :

$$s_{12}(a_3) = -\frac{1}{2} a m^3 \left\{ \frac{9}{16(1+m)} - \frac{9}{64(1-m)} + \frac{63^2}{64(1-3m)} + \frac{27}{64(3-m)} - \frac{1323}{64(3-3m)} \right\} \xi'[\tau'] (n't)^2 \quad (73a)$$

Si se calcula $R_{\varepsilon\tau\tau'}$ del último término de R, es decir del 3^{er} grado, y se combina con el término de 1^{er} grado de τ_{11} (70) del mismo argumento $A=l-2l'$, se obtiene una contribución a la parte secular de a_3 , a saber:

$$\tau_{11} = -\frac{9}{4} \cdot \frac{n'}{n} \frac{n'}{n-2n'} \cos(l-2l'), \quad (74)$$

de modo que sólo hay que considerar en $R_{\varepsilon\tau\tau'}$ los términos con el factor $\cos A$:

$$R_{\varepsilon\tau\tau'} = +\frac{9}{4} n^{2'} a^2 \cdot \xi' \cos(l-2l'). \quad (75)$$

Por consiguiente resulta de la combinación de (74) con (75) e integración

$$s_{12}(a_3) = -\frac{81}{32} am^3 \frac{1}{1-2m} \xi'[\tau'] (n't)^2. \quad (73b)$$

Queda ahora por investigar un último sub-grupo de 3 términos de la expresión (4) de $\frac{da_3}{dt}$, cuya integración debe efectuarse en base a términos tratados ya anteriormente. Primero se tiene el término (76)

$$\text{XIII} = p \left(\frac{da_3}{dt} \right) = \frac{2\sqrt{a}}{K} R_{\varepsilon} a_2.$$

La parte secular correspondiente resulta fácilmente del primer término ya tratado

$$I = p \left(\frac{da_3}{dt} \right) = \frac{2\sqrt{a}}{K} R_{\varepsilon a} \cdot a_2.$$

Pero por ser R_{ε} proporcional a a^2 es $\frac{1}{2a} \cdot R_{\varepsilon} = \frac{1}{4} R_{\varepsilon a}$ y como $R_{\varepsilon a} = 2a \cdot n'^2 R_1$ se obtiene

$$e_{13}(a_3) = \frac{1}{32} am^3 \left\{ \frac{9}{2-m} - \frac{441}{2-3m} \right\} (\xi'[\tau'] - \tau'[\xi']) (n't)^2. \quad (77)$$

Además el penúltimo término de (4) es:

$$\text{XIV} = p_{14} \left(\frac{da_3}{dt} \right) = \frac{2\sqrt{a}}{K} \frac{1}{2a} R_{\varepsilon\xi'} \cdot \xi_1' \quad (78)$$

mientras que anteriormente hemos tratado el término análogo V, es decir:

$$V = p_5 \left(\frac{da_3}{dt} \right) = \frac{2\sqrt{a}}{K} R_{\varepsilon a \xi'} a_1 \xi'_1.$$

Por eso resulta, también aquí, el nuevo término por medio del análogo aplicando el factor $\frac{1}{4}$, de modo que

$$s_{14}(a_3) = \frac{1}{32} am^3 \left[\frac{9}{2-m} - \frac{441}{2-3m} \right] \gamma'_1 [\xi'_1] (n't)^2. \quad (79)$$

Finalmente el último término de (4) es

$$XV = p_{15} \left(\frac{da_3}{dt} \right) = \frac{2\sqrt{a}}{K} \frac{1}{2a} R_{\varepsilon \gamma'_1} a_1 \gamma'_1 \quad (80)$$

que por analogía con el término

$$VI = p_6 \left(\frac{da_3}{dt} \right) = \frac{2\sqrt{a}}{K} R_{\varepsilon a \gamma'_1} a_1 \cdot \gamma'_1$$

permite obtener XV de VI aplicando el factor $\frac{1}{4}$:

$$s_{15}(a_3) = + \frac{1}{32} am^3 \left[-\frac{9}{2-m} + \frac{441}{2-3m} \right] \xi'_1 [\gamma'_1] (n't)^2. \quad (81)$$

CAPITULO III

LA INFLUENCIA DE LA ACELERACION SECULAR a_3 , EN LA LONGITUD MEDIA

Para investigar la influencia de la aceleración secular a_3 en la longitud media, partiremos de la definición de longitud media, a saber (82) $l = \varepsilon + \int n \cdot dt$, siendo de importancia aquí solamente el segundo término.

Por ser $n = Ka^{-3/2}$, donde $K^2 = k^2 (m_0 + m_1)$, m_0 la masa central, m_1 la del satélite y k^2 la constante de Gauß, resulta primero: $l = K \int a^{-3/2} dt$; poniendo además $a = a_0 + \Delta a$, donde Δa es la perturbación de a , se obtiene desarrollando según potencias de Δa , y considerando únicamente la primera potencia de Δa :

$$l = n_0 t - \frac{3}{2} \frac{n_0}{a_0} \int \Delta a dt. \quad (83)$$

Sustituyendo ahora la perturbación Δa por la perturbación secular de 3^{er} orden a_3 en la forma $\Delta a = s(a_3) = a_0 f(n't)^2$, donde n' es el movimiento medio del cuerpo central entorno del sol, resulta por integración $\Delta l = l_3 = -\frac{1}{2} n_0 f n'^2 t^3$, o, siendo $\frac{n_0}{n'} = \frac{1}{m}$ según la denominación anterior: $\Delta l = l_3 = -\frac{1}{2} \frac{f}{m} (n't)^3$. O todavía, ya que por resultados anteriores es $f = m^3 g$, donde la función g depende, como se ha visto, solamente de m y de un factor proporcional al segundo grado de las 4 magnitudes ξ' , γ' , $[\xi']$, $[\gamma']$ que aparecen de a pares, la 1^a con la 2^a y la 3^a con la 4^a:

$$l_3 = -\frac{1}{2} gm^2 (n't)^3, \quad (84)$$

mientras que por otra parte $a_3 = a_0 gm^3 (n't)^2$. Luego a_3 es proporcional a m^3 y t^2 , la perturbación de la longitud l_3 a m^2 y t^3 .

Cuanta mayor es la distancia de un satélite al cuerpo central y por tanto mayor es a , menor es el movimiento medio n , y tanto mayor es m . De modo que a_3 en general crece con a , no sólo por el factor a_0 , sino también por el factor m^3 ; y la función g , que depende de m , como se ve por su definición, varía muy lentamente con m , porque tanto m como sus pequeños múltiplos no influyen en los binomios que forman con menores enteros, en la mayoría de los casos.

La perturbación l crece con la tercera potencia del tiempo más rápido que a_3 que sólo crece con la 2ª potencia del tiempo.

Hay que observar además que, mientras que a_3 debe considerarse directamente proporcional al semi-eje mayor a , la perturbación de la longitud l_3 aparece explícitamente independiente de a , pero implícitamente depende de a por el factor m^2 , siendo éste función de $\frac{a'}{a}$, ya que $m = \frac{n'}{n}$. Por eso siendo n grande, luego a pequeño, como asimismo m , prácticamente l depende sólo de m^2 , como a depende sólo de m^3 . Luego hay que calcular la función g en el caso de todos los satélites cercanos solamente para $m=0$.

CAPITULO IV

DEDUCCION DE LOS VALORES NUMERICOS DE LA ACELERACION SECULAR DEL SEMI-EJE MAYOR $a_3 (t^2)$ Y LA LONGITUD $l_3 (t^3)$ DE LA TIERRA, DE LA LUNA Y DE LOS SATELITES DE LOS PLANETAS JUPITER Y SATURNO.

§ I. LA ACELERACIÓN SECULAR DE LA TIERRA

Hemos deducido la aceleración considerando las perturbaciones de la Tierra por los grandes planetas Venus, Júpiter y Saturno y calculando no solamente las perturbaciones directas, sino también las indirectas de la Tierra, partiendo de las perturbaciones seculares de los grandes planetas mencionados debidas a los demás cuerpos del sistema solar. Las perturbaciones seculares de los grandes planetas y los coeficientes de las perturbaciones periódicas y de todas las demás cantidades necesarias para deducir la aceleración secular se han tomado de las memorias correspondientes de Le Verrier de los *Annales de l'Observatoire de Paris*, especialmente los coeficientes relativos a la Tierra, del tomo IV, adiciones I-IV. La comparación de las expresiones de los coeficientes de la función perturbadora y de sus derivadas dadas por Le Verrier con las de nuestra memoria I, página 13, (2), permite obtener de inmediato los valores numéricos de los coeficientes necesarios, es decir, (A_i) , (B_i) , etc., y también sus derivadas, de manera que es superfluo reproducir aquí todos los coeficientes. Por medio de las perturbaciones seculares de las excentricidades y longitudes de los perihelios, calculados por Le Verrier, se obtienen los siguientes valores de las cantidades $[e_1]$ y $[\tilde{\omega}_1]$ empleados por nosotros:

	[e_1]	[$\dot{\omega}_1$]
Venus.....	— 5.296.10 ⁻⁸	-- 0.22500.10 ⁻⁸
Tierra.....	— 6.905 »	+ 14.891 »
Júpiter.....	+ 246.26 »	+ 283.00 »
Saturno.....	- 1277.2 »	+ 2129.8

Por cálculo numérico se obtienen entonces las cantidades de la aceleración secular $s(a_3')$ de la Tierra por las contribuciones directas y las combinaciones de los grandes planetas:

(1) Perturbaciones directas por Venus.....	$s(a_3') = + 132.08.10^{-18} (n't)^2$
(2) » » Júpiter.....	» — 0.318 » »
(3) Combinación directa Júpiter-Saturno.....	» + 90.508 » »
(4) » indirecta »	» + 2.720 » »
(5) » directa Venus-Júpiter.....	» + 12.427 » »
(6) » indirecta »	» — 5.795 » »
(7) » directa Júpiter-Venus.....	» + 0.113 » »
(8) » indirecta »	» + 0.025 » »

donde $n't$ es siempre la longitud de la Tierra. Las perturbaciones directas $s(a_3')$ por Saturno han sido despreciadas por ser demasiado pequeñas respecto de las ya pequeñas producidas por Júpiter, siendo la masa de Saturno 3.5 veces menor que la de Júpiter y su distancia a la Tierra al menos el doble de la de Júpiter, de modo que no pueda originar ninguna influencia directa en el resultado total. La suma de las perturbaciones aisladas que hemos mencionado vale: $s(a_3') = + 231.76.10^{-18} (n't)^2$. Siendo ahora $n't = 2\pi$ por año, resulta para 100 años, es decir $n't = 200\pi$: $s(a_3') = + 0.414.10^{-10}$, es decir casi 1 unidad de la 10ª decimal. Por consiguiente vale para 1000 $s(a_3') = + 0.914.10^{-8}$, es decir, 1 unidad de la 8ª decimal. Se obtienen pues cantidades que no tienen influencia perceptible en las observaciones de los últimos 200 años, mientras que para intervalos mayores de tiempo, por ejemplo 10.000 años, resulta $s(a_3') = + 0.91.10^{-6}$, es decir ya 1 unidad de la 6ª decimal que hay que considerar necesariamente.

Muy notable es que la influencia de a_3' en la perturbación correspondiente de la longitud l_3' resulta ser, en cambio, esencialmente mayor, tanto para los planetas como para sus satélites, porque depende ahora de la 3ª potencia del tiempo. Como yo hemos demostrado antes, la influencia de la perturbación secular a_3' que origina el término $\int n'dt$ de la longitud, está expresada por la fórmula $l_3' = -\frac{1}{2} \frac{a_3'}{a_0'} n't$, donde a_3' contiene ya el factor $(n't)^2$, de modo que l_3' es proporcional a la 3ª potencia de $n't$, y por tanto l_3' debe crecer más rápidamente que a_3 . Aplicando la fórmula a la Tierra, resulta, después de transformar el valor obtenido en segundos de arco por medio del factor $(\text{sen } 1'')^{-1}$, la siguiente perturbación de longitud de la Tierra:

± 100 años	$l'' = \mp 0'',00581$
200 »	0.046
500 »	0.725
1000 »	5.81
10000 »	5810''(1°36'50'')

Luego, la influencia de l_3' en las observaciones del Sol dentro de los siglos últimos permanece todavía imperceptible, pero asciende luego rápidamente, de modo que dentro de un intervalo histórico de 10.000 años la aceleración de la longitud alcanza valores considerables. Estas últimas perturbaciones no pueden deducirse de las observaciones del Sol de aquellos tiempos, por ser insuficientes; pero quizás podrían deducirse de los eclipses del Sol y la Luna, si fuesen conocidos fecha y hora, o fuesen calculables aún, ya que la gran perturbación solar producida en 10.000 años ocasiona un desplazamiento del eclipse en más de un día, prescindiendo provisoriamente de la perturbación correspondiente de la Luna que hay que investigar ahora.

§ 2. LA ACELERACIÓN SECULAR DE LA LUNA DE LA TIERRA

Los datos siguientes forman la base del cálculo numérico: $m = \frac{n'}{n_0} = 0.07480$, $a' = 1$, $a = 0.002.5712$. Las variables-excentricidades y sus perturbaciones están definidas por los siguientes números:

$$\xi_0' = -0.016498, \quad \eta_0' = +0.0030162 \quad [\xi'] = +9.4706.10^{-8} \quad [\eta_1'] = +13.406.10^{-8}$$

De las fórmulas que sirven para el cálculo de las perturbaciones seculares $s_1(a_3)$ hasta $s_{15}(a_3)$ resulta finalmente: $s(a_3) = +3.6852.10^{-13}(n't)^2$, donde $(n't)$ es la longitud de la Tierra. Por tanto se tiene para un intervalo de 100 años, es decir, para $n't = 200\pi$: $a_3 = +1.48.10^{-7}$, o sea 1.5 unidades de la 7ª decimal, cantidad que parece pequeña para 100 años, pero que significa mucho cuando se calcula la longitud media por medio de la fórmula siguiente:

$\Delta l = l_3 = -\frac{1}{2a_0} a_3 (n_0 t) = -\frac{1}{2m} \cdot \frac{a_3}{a_0} (n't)$ de donde, multiplicando por $(\text{sen } 1'')^{-1}$, se obtiene: $l_3'' = -49.10^{+3}$, es decir cantidad demasiado grande para escapar a la observación. Para un año resulta solamente $l_3'' = -0''.049$, pero ya para 10 años: $\Delta l'' = -49''$, es decir, una cantidad que hubiera debido sorprender en la observación. La variación a_3 en 100 años significaría también, si fuese variación lineal, una alteración del movimiento medio $\Delta n = -\frac{3}{2} n_0 \frac{\Delta a}{a_0} = +4''.32$, originada en lo esencial, por el grand factor

$n_0 = 47435''$ de la fórmula mencionada, ya que el factor $\frac{\Delta a}{a}$ es independiente de a_0 , como hemos comprobado anteriormente. Para la aceleración secular $s(l_3)$ falla la teoría, en el caso del satélite de la Tierra, por el fuerte crecimiento del factor tiempo, que en a_3 es de la 2ª potencia, pero en l_3 de la 3ª. Si aplicamos la teoría a algunos siglos, se excede en mucho el límite de convergencia en el caso de la Luna, pero no, como vamos a ver, en el caso de los satélites de los demás planetas del sistema solar. Además, después de haber visto que la aceleración secular a_3 es proporcional a la 3ª potencia de m , resulta aún que el parámetro m según cuyas potencias está dada la serie de a_3 , es también demasiado grande en el caso de la Luna, a pesar de que m tiene el valor de sólo $\frac{1}{13}$. Es pues decisivo, como ya hemos mencionado, el

factor $m^2 = \left(\frac{n'}{n_0}\right)^2$ de l_3 , puesto que $\frac{a_3}{a_0}$ es independiente de a_0 . Luego l_3 es tanto mayor, para un n' fijo, es decir, en el caso del mismo planeta, cuanto menor es n_0 , o sea, cuanto mayor es la distancia del satélite al cuerpo central. Y también cuanto mayor es n' , o sea, cuanto menor es la distancia del planeta al sol.

Por tanto debe esperarse en el caso de los satélites de los planetas exteriores a la Tierra aceleraciones menores que en el caso de la Luna.

§ 3. LOS SATÉLITES DE JÚPITER

El 5° satélite de Júpiter, es decir, el satélite más próximo al planeta, ha sido excluido de la investigación, después de haber comprobado al comienzo de los cálculos que las aceleraciones seculares de a_3 y l_3 de los 4 satélites clásicos, más alejados que el 5°, son muy pequeñas. Los cálculos para los satélites se basan en los siguientes datos:

Satélite	a	m
1.....	0.0028	+0.0004083
2.....	44	8196
3.....	72	16513
4.....	126	38520
6.....	762	578000
7.....	782	598000
8.....	1570	-0.170
9.....	1670	-0.171

donde los semi-ejes mayores a_i están referidos a la unidad astronómica de distancia, y las cantidades m_8 y m_9 son negativas por moverse los satélites correspondientes en órbitas retrógradas. Las variables-excentricidades de Júpiter y sus perturbaciones seculares figuran en la siguiente tablilla:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_0' = 0.0099526, \quad [\xi_1'] = + 3.277 \cdot 10^{-6} \\ \eta_0' = +0.047201, \quad [\eta_1'] = + 18.258 \cdot 10^{-6} \end{array} \right.$$

La aplicación de estos valores a las fórmulas correspondientes a la aceleración secular a_3 y l_3 conducen entonces a estos resultados:

Satélite	a_3	a_3 (100 años)	l_3'' (100 años)
1.....	- 0.17002 $\cdot 10^{-18} (n't)^2$	- 4.79 $\cdot 10^{-16}$	+ 0''.002
2.....	- 2.1611 » »	- 6.08 $\cdot 10^{-15}$	+ 9
3.....	- 28.921 $\cdot 10^{-18} (n't)^2$	- 8.17 $\cdot 10^{-14}$	+ 0.038
4.....	- 642.46 » »	- 1.82 $\cdot 10^{-12}$	+ 0.200
6.....	- 0.17680 $\cdot 10^{-10}$ »	- 0.50 $\cdot 10^{-7}$	+ 62.1
7.....	- 0.20093 » »	- 0.57 $\cdot 10^{-7}$	+ 66.4
8.....	+ 3.4365 » »	+ 9.73 $\cdot 10^{-7}$	+ 199.4
9.....	+ 3.7202 » »	+ 10.5 $\cdot 10^{-7}$	+ 201.0

Hay que considerar que l_3 cambia de signo, cuando $(n't) < 0$, pues l_3 contiene el factor $(n't)^3$. De esta planilla sigue que las aceleraciones a_3 y l_3 son pequeñas en el caso de los 4 satélites clásicos, e imperceptibles en el intervalo de tiempo de observación de 2 siglos; asimismo permanece a_3 pequeño en los demás

satélites, mientras que las aceleraciones de l_3 son bastante apreciables, de manera que es necesaria una comparación con las observaciones.

§ 4. LOS SATÉLITES DE SATURNO

El cálculo numérico aplicado a los 9 satélites de Saturno nos da valores pequeños para las aceleraciones a_3 y l_3 de los 5 satélites interiores, es decir, sólo $0''.1$ por siglo, de modo que no vale la pena consignar dichos valores. Consideremos pues los 4 satélites exteriores:

Satélite	a	m
6=Titano.....	0.008165	+0.001482
7=Hypérion.....	9896	1978
8=Jápetus.....	23795	7373
9=Phoebe.....	86570	-0.051161

donde las cantidades a_i están referidas a la unidad de distancia astronómica, y donde m_9 es negativo por el movimiento retrógrado de Phoebe. Las variables-excentricidades de Saturno y sus variaciones seculares están dados por los valores numéricos siguientes:

$$\xi_0' = +0.056060, \quad \eta_0' = 0.000109, \quad [\xi_1'] = -1.2813 \cdot 10^{-5}, \quad [\eta_1'] = -2.1273 \cdot 10^{-5}.$$

Para las aceleraciones seculares a_3 y l_3 se obtienen entonces los valores siguientes:

Satélite	a	a (100 años, 7ª decimal)	l_3'' (100 años)
6.....	+ 1.6604 · 10 ⁻¹⁵ ($n't$) ²	+ 7.55 · 10 ⁻⁶	- 0''137
7.....	+ 4.7801 »	+ 2.17 · 10 ⁻⁵	- 0.243
8.....	+ 595.793 »	+ 2.71 · 10 ⁻³	- 3.40
9.....	- 617.299 »	- 2.80 · 10 ⁻⁰	- 111.00

donde hay que observar que l_3 cambia de signo, cuando $(n't) < 0$. Resulta ahora de la tabla que la aceleración secular de a_3 es perceptible sólo para el satélite Phoebe, por -3 unidades de la 7ª decimal por siglo; la aceleración l_3 es apreciable especialmente para Phoebe, y menos para Jápetus. Por eso hay que comparar la perturbación secular de l_3 , de Phoebe, con las observaciones, aunque Phoebe no ha sido observado sino desde hace 50 años. Ya que Japetus, descubierto por Cassini entre 1670 y 1685, ha sido observado casi 200 años, en cuyo lapso la aceleración correspondiente de l_3 ha crecido en casi $-27''$, resulta también en este caso la necesidad de una comparación con las observaciones. Para Titano la aceleración secular l_3 , después de su descubrimiento por Huyghens en 1655, ha crecido en $-4''$, y para Hypérion, después de su descubrimiento por Bond en 1848, en sólo $-0''2$, de modo que en este caso todavía no es necesaria una comparación con las observaciones.

INDICE

CAPITULO I

LA ACELERACIÓN SECULAR DE LOS PLANETAS

§ 1. La función perturbadora	5
§ 2. La nueva combinación Júpiter-Venus	17

CAPITULO II

LA ACELERACIÓN SECULAR DE LOS SATÉLITES

§ 1. La función perturbadora.....	25
§ 2. La integración de la ecuación diferencial de la aceleración secular.....	28

CAPITULO III

LA INFLUENCIA DE LA ACELERACIÓN SECULAR a_3 EN LA LONGITUD MEDIA

§ 1. La influencia de la aceleración secular a_3 en la longitud media.....	42
--	----

CAPITULO IV

DEDUCCIÓN DE LOS VALORES NUMÉRICOS DE LA ACELERACIÓN SECULAR DEL SEMI-EJE MAYOR DE LA TIERRA, DE LA LUNA Y DE LOS SATÉLITES DE LOS PLANETAS JÚPITER Y SATURNO

§ 1. La aceleración secular de la Tierra	43
§ 2. » » la Luna.....	45
§ 3. » » los satélites de Júpiter.....	46
§ 4. » » los satélites de Saturno.....	47

