ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA

ESPÍRITU Y MÉTODO. — Rama eminentemente positiva, especie de ciencia natural puesto que analiza la forma y dimensión de las cosas, es tan antigua como la idea de número. Las nociones de línea, superficie, perpendicularidad, paralelismo, igualdad de triángulos, propiedades elementales del círculo, diámetro, cuerdas y tangentes, superficies esféricas eran familiares á los egipcios 2000 años antes de nuestra era, sin empero, ir más allá del conocimiento objetivo. Esta circunstancia histórica misma la señala, ante todo, como una *ciencia de observación* y como tal debe considerarse en la enseñanza primaria, teniendo presente que la determinación de un área ó de un volumen en cifras, es más de carácter aritmético ó algebraico que geométrico, pues se parte, para operar, de hechos geométricos demostrados gráficamente; es por excelencia, la parte concreta y experimental de la matemática. Los antiguos notaron, desde luego, *la forma;* al usar las cosas, consideraron la extensión y, en consecuencia, la probabilidad de medirla, refiriéndola, por comparación, á unidades determinadas; se explica así, su relación con el cálculo no bien trata de establecer la magnitud. El sistema de pesos y medidas es, de este modo, la expresión más acabada de la matemática primaria porque se basa en conocimientos geométricos, algebraicos y aritméticos, aplicados al estudio de las dimensiones.

Se dice: medir la extensión; pero, esta medida no pudiéndose efectuar, en la casi totalidad de los casos, de una manera directa, exige el *conocimiento de las propiedades de las figuras,* las propiedades descriptivas que permiten descomponer las formas irregulares en regulares y por las condiciones de éstas determinar las de aquéllas. De suerte que la Geometría es, por sobre todo, la *ciencia de las figuras consideradas en su forma, su posición y su dimensión.* Pero las líneas explican las superficies, las superficies los volúmenes; solo la recta se mide y por ésta las curvas, las superficies y los volúmenes, merced á las relaciones establecidas por la Geometría Gráfica. Hay, entonces, para explicar la medida, necesidad de conocer el lenguaje geométrico (términos y definiciones) y descubrir las propiedades de la línea, del ángulo, del triángulo, de los cuadriláteros, de los polígonos en general, de los planos, de los sólidos, etc.

La instrucción primaria puede, en este terreno, ir lejos, circunscribiendo su tarea al cultivo de la observación, de la imaginación reproductora, de la versión gráfica y del lenguaje, sin llegar al ejercicio de la deducción sino en limitados casos, preparando el espíritu para el estudio demostrativo de los cursos secundarios.

PROCESO MENTAL. — Como asignatura concreta, la Geometría *observa, descompone* las formas irregulares en regulares según un corto número de tipos y simplifica, por un soberbio esfuerzo de *imaginación*, el trabajo de medir los cuerpos. De aquí su carácter gráfico, el uso de la escuadra, el compás y la regla para resolver sobre el papel, superficie plana, las cuestiones volumétricas y plantear otras, previo cálculo de la forma y de la posición, para llegar, con maravilloso acierto, á las más atrevidas aplicaciones.

La observación, auxiliada con la regla y el compás, llega á ser, ejercitada, una poderosa facultad de análisis y descubrimiento. Por otra parte, ninguna asignatura se presta tanto para cultivarla metódica y sistemáticamente, en cuanto que las observaciones, siempre limitadas, son de forma, posición y extensión. La necesidad de establecer analogías es la consecuencia natural de observar hechos que ofrecen cierto número de condiciones comunes. Ningún terreno más propicio y más desprovisto de complicaciones para que el niño descrimine, operación fundamental del criterio. La comparación permite descubrir la constancia de ciertas propiedades, *inducir, generalizar* verdades, sin el esfuerzo extraordinario que requieren otras ciencias y las dudas que siempre dejan. A esto, agrégase la necesidad de imaginar conforme á los enunciados y crear la solución gráfica; pero esta aptitud tan elevada y fácil al extravío cuando los elementos de combinación son muchos (en Ciencias Naturales, en Sociología), trabaja en un terreno de poca complicación; de aquí que solo la Geometría sea, en los comienzos de la cultura general del espíritu, la disciplina más eficaz de la imaginación para educarla con éxito, porque el error se advierte tan claramente como la verdad. Sobre estos conocimientos es donde el proceso mental más avanza y es el fruto, del punto de vista psíquico, más integral de la enseñanza, puesto que además de la observación y el juicio, las prácticas para cultivar con éxito la generalización y la imaginación lógica, le son casi exclusivas.

La actividad mental en Geometría, se rige, entre otros, por estos principios: 1º *La observación es tanto más exacta cuanto más perfecta es la figura y responda mejor al caso general.* 2º *Las observaciones son tanto más numerosas cuanto más medios de distinción ofrezca la figura* (líneas gruesas y finas según un propósito; líneas de diferentes colores, sombras, letras, etc.). 3º *Un enunciado se comprende cuando se tiene de él una representación gráfica exacta, cuando se la puede trazar.* 4º *Las analogías son más difíciles de ser discernidas que las diversidades.* 5º *El razonamiento para llegar á una conclusión, exige primeramente, un completo dominio de las proposiciones condicionales.* 6º *Todo razonamiento es una integración de juicios y parte de verdades que se dan como admitidas.* 7º *Una palabra ó una expresión se la comprende cuando se la* *puede representar.* 8º *La inteligencia superior es la que entra antes en el detalle de los hechos y se eleva á las más altas generalizaciones y vistas de conjunto, induce la ley y encuentra dentro de la ley una variada multiplicidad de hechos.* 9º *La imagen es el vehículo del razonamiento.* 10º *En toda enseñanza, primero conocer para aprender; luego repetir para fijar, luego generalizar para comprender.*

PROPÓSITOS Y PROGRAMA. — La Geometría debe enseñarse en todos los grados de la instrucción primaria de manera que cada uno recapitule los anteriores, agregue un grupo de conocimientos é incorpore una serie de nuevas ejercitaciones. Una parte será gráfica, otra numérica con un lenguaje propio. Siendo su fin último, *la medida de la extensión,* las cuestiones y problemas ó motivos de la aplicación surgirán de las cosas mismas y se considerará, en la mayor parte de los casos y cuando no sea imposible, al campo, pizarra de trabajo, como lo hacíamos en Mercedes medio día por semana, escogiendo lugares que por su extensión, sus edificios, sus parques, sus depósitos (un local de ferias), permita pensar en crecido número de cuestiones.

FORMACIÓN DEL LENGUAJE GEOMÉTRICO

I. *Cuerpo, superficie y línea.* — Nomenclatura — Líneas compuestas — Generalización gráfica por su posición, forma y extensión.
II. *Ángulos.* — Clasificación por sus lados, abertura y posición — Generalización y reconocimiento en las cosas.
III. *Triángulos.* — Según sus ángulos y lados — Cuadriláteros — Generalización gráfica y reconocimiento en las cosas.
IV. *Polígonos.* — Regulares é irregulares — Elementos — Areas — Comparación de las áreas — *Círculo* — Elementos del círculo — Area en función de R.
V. *Líneas proporcionales y figuras semejantes.* — Generalización y reconocimiento.
VI. *Líneas curvas.* — Generalización y reconocimiento.
VII. *Planos* en el espacio. — Angulos diedros, triedros y poliedros.
VIII. *Cuerpos geométricos.* — Caracteres distintivos del tetraedro. la pirámide, el prisma y el paralelepípedo — Area y volumen — Poliedros — Caracteres y área.
IX. *Cuerpos redondos.* — Caracteres del cilindro, cono y esfera — Medida de la superficie y del volumen.
X. *Cuerpos geométricos truncos.* — Caracteres — Area y volumen.
XI. *Instrumentos.* — Uso del compás, de la regla, de la escuadra, del transportador y de los demás elementos de construcción geométrica.
XII. *Ejercicios.* — Construcción de figuras en el papel y la pizarra — Planos de determinados lugares — Descomposición de cuerpos y sus superficies en figuras geométricas — Apreciación de distancias, ejercicios de comparación y medición — Uso de jalones, cadenas, brújula y otros elementos del agrimensor.
XIII. *Problemas gráficos.* — Aplicación de principios al levantamiento de perpendiculares, trazado de líneas, ángulos, polígonos y representación de cuerpos en un plano.

Versión gráfica de enunciados — Solución inductiva de problemas combinados. — La tiza de colores en las construcciones auxiliares y como elemento de diferenciación y reconocimiento.

XIV. *Problemas numéricos.* — Medida de líneas, ángulos, superficies y volúmenes en combinación con el sistema métrico y los principios de la densidad — Uso de las fórmulas — Medida de los cuerpos comunes, líneas, perímetros y áreas, directa ó indirectamente — Redacción de problemas y procedimiento para resolverlos — Operaciones por la vista ó el tacto, acerca de la extensión.

Dado los datos numéricos de una figura, construirla — De un terreno, representarlo.

Distribución del programa en lecciones. — En cada grado, conforme á los conocimientos geométricos que en él se transmitan, se harán sistemáticamente ejercicios de *observación,* ejercicios de *discriminación* (comparación), ejercicios de *generalización,* ejercicios de *imaginación* (visualización), ejercicios de *lenguaje* y ejercicios de *aplicación* (construcciones, mediciones, solución de problemas gráficos y numéricos).

1er **Grado.** — Noción geométrica generalizada de posición, forma y dimensión acerca de líneas, ángulos, figuras y formas observadas en las cosas y reproducidas en el pizarrón y el papel. Uso de la regla y medición de longitudes.

2° **Grado.** — (3 lecciones semanales). Libro de ejercicios. Marzo: *El punto y la línea recta.* Generalización en cuanto á posición y dimensión. La observación y medición en las cosas, en las figuras, como representación gráfica. Operaciones gráficas y numéricas de suma y resta. Versión gráfica de enunciados sobre la línea recta. Uso de las letras denominativas, regla y compás.

Abril: *La horizontal, la vertical, la oblicua, la paralela y la perpendicular.* Ejercicios indicados respecto á la recta.

Mayo: *Las curvas.* Las indicaciones hechas para la recta. Ejercicios de recapitulación.

Junio: *Combinación de líneas y recapitulación.* Ejercicios é indicaciones especificados en el mes de Marzo. Reproducción de líneas en cuanto á extensión.

Julio: *Angulos.* Noción de abertura y generalización del concepto de ángulo en cuanto á abertura, posición y forma. Observación del ángulo en las cosas, en las figuras y su representación. Letras denominativas. Ejercicios de recapitulación. Construcciones con la regla y el compás.

Agosto: *El ángulo por dos líneas y su abertura.* Ejercicios é indicaciones especificados en el mes anterior. Noción de grado.

Septiembre: Reproducción de la abertura de un ángulo. Operaciones de suma y resta numéricas y gráficas. Empleo de la regla, el compás y el transportador. Ejercicios recapitulatorios y sinopsis clasificativas.

Octubre: Propiedades del ángulo recto. Su observación en las cosas y figuras. Generalización de su posición. La construcción con la escuadra y con el transportador. Ejercicios de recapitulación, particularmente por la medición y las aplicaciones.

Noviembre: Angulos adyacentes, opuestos, correspondientes y alternos. Noción de línea transversal. Ejercicios de observación, de generalización y de construcción.

3er **Grado.** — (3 lecciones semanales y excursiones). MARZO: Ejercicios de evocación relativos al programa de 3er grado.

ABRIL: Reproducción gráfica de la posición de las líneas y ángulos rectilíneos.

MAYO: Trazado de líneas y ángulos en patios y terrenos. Trazado según dimensiones ó aberturas dadas. Operaciones de suma ó resta sobre el terreno ó en las cosas. Representación geométrica en el cuaderno de anotaciones.

JUNIO: *El triángulo.* Ejercicios é indicaciones especificadas para la línea y el ángulo. El triángulo para sus líneas y sus ángulos.

JULIO: Reproducción de triángulos. Su trazado en el terreno. Perímetros. Líneas del triángulo: generalización y ejercicios de reconocimiento.

AGOSTO: Inducir con el auxilio del compás, el transportador y la regla, las propiedades generales. Observando varios triángulos diferentes. Inducir las del equilátero y las del isósceles, á los que se tracen sus alturas, sus bisectrices y sus medianos.

SEPTIEMBRE: *El cuadrilátero.* Ejercicios é indicaciones especificadas para el triángulo. Clasificación por sus lados. Ejercicios de observación y de generalización. Líneas del cuadrilátero. Propiedades del paralelógramo y del cuadrado en particular.

OCTUBRE: Perimetros. Inducción del área del rectángulo: fórmula. La de cualquier paralelógramo del triángulo.

NOVIEMBRE: Ejercicios de recapitulación. Perímetros y áreas sobre el terreno ó las cosas. Construcción y reproducción gráfica de los cuadriláteros como forma, como extensión y como posición.

4° **Grado.** — (3 lecciones semanales y excursión). MARZO: Ejercicios de evocación sobre los programas anteriores. El área de los cuadriláteros.

ABRIL: Noción de polígono. Ejercicios de generalización. Polígonos regulares y su clasificación. Líneas y ángulos. Descomposición de los polígonos. Ejercicios de observación y generalización. Perímetros y áreas. Ejercicios sobre numerosas figuras. Sobre el terreno y las cosas (cartones recortados irregularmente, vidrios, etc.

MAYO: Reproducción de polígonos. Noción de figura semejante: generalización. Ejercicios recapitulatorios.

JUNIO: Círculo, sus líneas, letras denominativas. Observación de propiedades y generalización. Noción de segmento y de medida. Area. Recapitulaciones.

JULIO: Figuras inscriptas y circunscriptas. Observación de propiedades y generalización. Ejercicios de recapitulación y visualización respecto á términos. Expresiones, definiciones, lenguaje geométrico.

AGOSTO, SEPTIEMBRE, OCTUBRE y NOVIEMBRE. Ejercicios de evocación y recapitulatorios. Problemas numéricos sobre líneas, ángulos y superficies. Problemas gráficos en cuya figura de solución, el alumno observará é inducirá propiedades, demostrando aquellos accesibles á su proceso razonativo. Noción de líneas proporcionales, gráfica y numérica.

5° **Grado.** — MARZO: Repaso de los programas anteriores.

ABRIL: Noción de plano y ángulos diedro y triedro. Letras denominativas. La observación en las cosas, forma regular y figuras. Generalización. Ilustración estereoscópica. Planos perpendiculares, oblicuos, etc. Observación y generalización. Representación gráfica de las relaciones.

MAYO: Medida de los ángulos. Posición de las líneas con respecto al plano. Idea de proyección.

JUNIO: Descripción del tetraedro, pirámide, prisma y paralelepípedo. Representación gráfica. Lenguaje geométrico, líneas principales, etc. Fórmulas para el área y el volumen y su aplicación á las cosas.

JULIO: Recapitulación. Descripción del cilindro, del cono y de la esfera. Representación gráfica. Definición y generalización de sus elementos. Fórmulas y su aplicación.

AGOSTO: Cuerpos truncados. Descripción y representación gráfica. Fórmulas y aplicaciones. De descomposición de objetos en formas regulares y determinación de su área y volumen.

SEPTIEMBRE, OCTUBRE y NOVIEMBRE: Conocimiento, valorización y empleo del mayor número de fórmulas posibles respecto á triángulos, cuadriláteros, etc. Respecto á sólidos. Problemas seriados de ejercitación. Ejercicios evocativos. Aplicaciones en el terreno. Demostración del teorema de Pitágoras.

6° Grado. — Para este grado se tendrá un libro de *Problemas* y *Ejercicios* distribuídos en series cuya solución importe sintetizar y generalizar los conocimientos transmitidos en los grados anteriores y prepare al alumno para el estudio razonado de los teoremas y la solución razonada de problemas gráficos. De manera que en cada serie serán frecuentes los ejercicios de lenguaje, destinados á dejar una noción precisa de los términos y denominaciones; á preparar la lectura fácil de las figuras; á visualizar y verter á figuras los enunciados de la mayor parte de los teoremas y una gran parte de los problemas á observar detenidamente las propiedades de dichas figuras, á inducir, deducir, para llegar en los casos que lo permitan, á una demostración de la solución gráfica, particularmente en aquellos casos en que se da por hecho el problema y se procede á demostrar. Y se intercalarán además, cuestiones discriminativas como éstas, resueltas con frecuencia á principio de lección:

Serie I. — 1. — Construyanse seis líneas á un mismo lado de una recta que formen ángulos con dicha recta y que no sumen 2 *R*.

2. — Constrúyanse dos ángulos adyacentes que juntos no valgan 2 *R*.

3. — Constrúyanse dos ángulos alternos internos que no sean iguales. ¿ Cómo serán las rectas cortadas por la transversal ?

4. — Constrúyanse ángulos alrededor de un punto que no sean consecutivos.

5. — ¿ A qué es igual la mayor cuerda posible que puede construirse en una circunferencia ?

6. — Superponer dos triángulos iguales sin que coincidan sus lados. Condiciones posibles para que coincidan dos figuras.

7. — ¿ Un mismo ángulo cuántos suplementos puede tener; cuántos complementos ?

8. — ¿ Cuál es el polígono cuyos ángulos suman 90 rectos ?

9. — ¿ Cuál es el polígono regular cuyos ángulos valen 5 tercios del recto ?

10. — ¿ Cuál es el polígono regular cuyos ángulos del centro valen 5 grados ?

11. — Hallar el valor del ángulo al centro y del ángulo al vértice de un polígono regular de 100 lados.

12.— El ángulo del vértice de un isósceles vale 60° ; ¿cómo es el triángulo?

Serie II. — 1. — ¿ Es posible formar con dos líneas tres ángulos ?

2. — ¿ Se pueden construir con tres líneas : dos ángulos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once, doce, trece ?

3. — ¿ Es posible colocar dos triángulos equiláteros de modo que el lado de uno de ellos coincida con el lado del otro ?

4. — ¿ De qué manera se dividirá un triángulo equilátero en dos partes iguales y semejantes ?

5. — Se puede trazar una línea perpendicular á otra, desde el punto de esta última que no sea el céntrico ?

6. — Divídase un círculo en cuatro sectores iguales, y escríbase sobre cada uno su nombre.

7. — ¿ Es posible dividir un sector en dos partes iguales y semejantes ?

8. — Trácense tres círculos concéntricos.

9. — Trácense dos círculos excéntricos.

10. — Hágase ver que todos los cuadriláteros tienen dos diagonales, y dígase en qué clase de ellos pueden ser de igual longitud las diagonales, y en cuáles no pueden serlo.

11. — Trácese un círculo que tenga cuatro centímetros de diámetro, é inscríbase en él un cuadrado.

12. — ¿ Con cuántas líneas es lo menos con que puede construirse una figura que tenga un ángulo entrante ?

Serie III. — 1. — ¿ Cuál es el menor número de lados con que puede construirse una figura que tenga dos ángulos entrantes ?

2. — Indíquese cuántos triángulos equiláteros pueden situarse alrededor de un punto y que se toquen todos.

3. — ¿ Es posible dividir un círculo en seis sectores iguales ?

4. — ¿ Se puede inscribir un círculo á un semicírculo ?

5. — ¿ Es posible inscribir un exágono á un círculo ?

6. — Trácese una recta que tenga cuatro centímetros de longitud ; constrúyase sobre ella un cuadrado, y determínese el centro de esta figura.

7. — ¿ Existe modo de inscribir un círculo á un triángulo equilátero ?

8. — ¿ De qué manera se dividirá un triángulo equilátero en seis partes iguales y semejantes ?

Nota. — Se han proclamado más de una vez las excelencias del librito de Spencer mal titulado *Geometría inventiva*, pues que sus 446 preguntas, de la especie de estas series no son más que ejercicios de evocación y lenguaje geométrico. No obstante ser incompleto y elemental, es útil como guía para ejercicios, no problemas, de visualización y generalización de términos y definiciones. Spencer mismo dice: « destinada á familiarizar al discípulo con los conceptos geométricos y á ejercitar su facultad inventiva ». Se cometería un error grave si se creyera que respondiendo á dichas preguntas, el alumno adquiere el espíritu y el método de la Geometría.

Serie IV. — 1. — ¿ Cuál es el mayor número de ángulos que pueden formarse con cuatro líneas ?

2. — ¿ Es posible inscribir un triángulo equilátero en un círculo ?

3. — Divídase una línea en dos partes iguales.

4. — ¿ Se puede dividir una línea en cuatro partes iguales ?

5. — Trácese una recta, y sobre ella constrúyase, uno junto al otro, dos triángulos rectángulos que sean exactamente iguales y cuyos lados correspondientes miren á un mismo punto.

6. — Manifiéstese, por medio de una figura, cuántos triángulos equiláteros pueden colocarse alrededor de otro triángulo equilátero al cual toquen.

7. — ¿ De qué manera se divide un sector en cuatro sectores iguales, y un ángulo en cuatro ángulos iguales ?

8. — ¿ Hay modo de construir un dodecágono regular inscripto á un círculo ?

9. — ¿ Pueden construirse dos triángulos que no sean iguales, pero que sin embargo sean semejantes ?

10. — ¿ Podría ponerse de manifiesto que todos los triángulos que tienen una misma base y están entre unas mismas paralelas son iguales ?

Serie V. — 1. — ¿ Es factible colocar un círculo, cuyo diámetro sea tres centímetros, de tal modo que su circunferencia toque á dos puntos que disten entre sí ocho centímetros ?

2. — ¿ Colóquense cuatro triángulos isósceles en diferentes posiciones, é indíquese el vértice de cada uno.

3. — ¿ Se puede idear modo de dividir un círculo en cuatro partes iguales y semejantes cuyos contornos no comprendan precisamente radios ?

4. — ¿ Se puede trazar un triángulo equilátero, y construir un cuadrado sobre cada uno de sus lados ?

5. — ¿ Cómo se dividirá un exágono en cuatro partes iguales, sin usar más que de tres círculos ?

6. — ¿ Se puede dividir una línea en cuatro partes iguales, sin usar más que de tres círculos ?

7. — ¿ Es posible construir un triángulo cuyos lados midan respectivamente 4, 6 y 8 centímetros ?

8. — ¿ Es posible determinar geométricamente el centro de un círculo que no le tenga marcado ?

9. — ¿ Cómo se divide un triángulo equilátero en cuatro partes iguales y semejantes ?

10. — ¿ Es posible construir dos romboides que sean semejantes, pero no iguales ?

11. — ¿ Puede colocarse un octógono dentro de un cuadrado, en tal posición que cada lado alterno del octógono coincida con un lado del cuadrado ?

Serie VI. — 1. — Hágase de un pedazo de cartón un transportador tan exacto como sea posible.

2. — Por medio de un transportador, constrúyase un ángulo de 45°, y pruébese por el procedimiento geométrico la exactitud de la construcción ?

3. — ¿ Se puede construir un pentágono dentro de un círculo por medio del transportador ?

4. — ¿ Puede construirse con el transportador un pentágono, sin usar ningún círculo ?

5. — ¿ Puede construirse un triángulo isósceles que tenga por base 1 y por suma de los otros lados 3 ?

6. — ¿ Se puede determinar, por medio de la escala, la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuya base es 4 y cuyo lado perpendicular á ésta es 3 ?

7. — ¿ Puede demostrarse que los cuadrados construídos sobre los dos lados de un triángulo isósceles rectángulo dan en junto una medida igual á la del cuadrado construído sobre la hipotenusa ?

8. — ¿ Se puede construir un cuadrado que sea la suma de otros dos cuadrados ?

9. — ¿ Es posible construir un cuadrado que equivalga en extensión superficial á la suma de tres cuadrados ?

10. — ¿ Cuántos modos existen para tirar una paralela á otra línea, por un punto dado ?

11. — ¿ Puede trazarse un círculo cuyo tamaño sea la mitad del de otro círculo ?

12. — ¿ Se puede construir un triángulo equilátero de doble tamaño que otro triángulo equilátero ?

Serie VII. — 1. — ¿ Cómo se trazará un círculo cuyo tamaño sea tres veces el de otro círculo ?

2. — ¿ Se puede dividir un ángulo en dos partes iguales sin valerse de círculos ni de arcos ?

3. — ¿ Puede construirse un pentágono que tenga de lado 2 centímetros, sin valerse de un círculo y sin tener acceso al centro del pentágono ?

4. — ¿ De qué modo se hará pasar la circunferencia de un círculo por los vértices de un triángulo ?

5. — Dada solamente la distancia entre los lados paralelos de un exágono regular, constrúyase dicho exágono.

6. — ¿En que forma se demostrará con una figura, que 3 contiene I $\frac{1}{2}$ veces á 2?

7. — Por teorema de que los triángulos sobre una misma base y entre unas mismas paralelas contienen superficies iguales, ¿puede convertirse en triángulo un trapezoide?

8. — ¿De qué modo se dividiría una recta en cinco partes iguales?

9. — ¿Cómo se colocarían tres círculos de igual radio de modo que se toquen unos á otros?

10. — Extráigase geométricamente la raíz cuadrada de 5 y hágase la prueba aritmética.

11. — Determínese cuales son las dos rectas que llevadas desde los extremos de la cuerda de un segmento hasta juntarse en el arco del mismo, forman el mayor ángulo.

12. — Pedir á cada alumno el enunciado de 6 teoremas y su objetivación.

13. — Pedir á unos, tres teoremas tocante á paralelas; á otros, tres tocante á círculos; á otros, tres tocante á círculos, etc., y su objetivación.

Nota. — Estos ejercicios se harán con frecuencia á principio de lección.

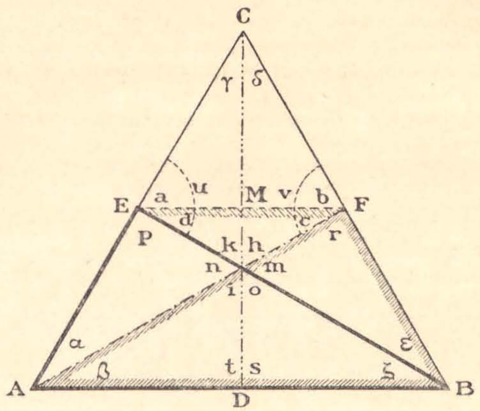
Las series 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 33, 34, 35, 36; las 1, 2, 3 y 4 de las aplicaciones numéricas que suman 260 ejercicios; parte de los problemas de las demás series (todas, desde luego, son construcciones que puede practicar el alumno, pero sin demostrarlas), las fórmulas que se exigen en este programa contenidos en nuestro libro *Ejercicios y Problemas de Geometría* constituyen la mejor base para las lecciones de 6º grado y para las de 4º (5º de las escuelas normales).

MÉTODO. — El método persigue dos fines: 1º formar aptitudes (de observación, discriminativas, imaginativas, razonativas); 2º fijar conocimientos y aplicarlos. La enseñanza primaria de la Geometría trata, principalmente, de formar aptitudes.

En Geometría hay muchos tipos de lección según el ejercicio que se trate de hacer, el conocimiento que se pretenda transmitir y la educación que se quiera realizar. El éxito depende, ante todo, del *libro de Ejercicios y problemas* (cuestionario) escrito con un profundo sentido didáctico para cada grado, guía didáctica del maestro y elemento de labor del alumno. Tendrá el alumno, además del libro, *un cuaderno* para resolver las cuestiones (series) en su casa y otro borrador; además, una caja de compases y regla.

Ejercicios de observación. — Pueden realizarse sobre cualquier figura ó grupo de figuras, cuerpos, etc. Unas ofrecerán más, otras menos, propiedades geométricas. Una línea es susceptible de observación; lo es un ángulo, un polígono, un sólido y de una observación copiosa cuando líneas ó figuras adicionales determinadas, multiplican las relaciones. Las dificultades que entorpecen la comprensibilidad del alumno, se deben, lo hemos constatado en nuestras lecciones, á la observación deficiente de la figura, *á no saberla ver.* Si se considera que las demostraciones se basan en esa anticipada anotación de las propiedades, nos explicaremos la derrota del alumno en sus análisis. Son ejercicios que deben realizarse en 3º, 4º, 5º y 6º grado.

Supongamos que se trata de un equilátero A B C (3^{er} grado ó 4°) al que el niño ha trazado á regla y compás, las alturas:



Inducir, observando las peculiaridades de la figura, una proposición ó verdad que pueda exigir demostración.

1ª observación. — Los lados *AC, CB* y *AB,* son iguales.

2ª — Las líneas *AE, EC, CF, FB, AD, DB,* son iguales.

3ª — Las líneas *CD, EB, AF* son iguales.

4ª — La línea *Eo, Fo* y *Do* son iguales.

5ª — Las líneas *Ao, Co, Bo* son iguales.

6ª — La línea *EF* es paralela á la *AB.*

7ª — Las alturas *CD, AF, BE,* son, á la vez, medianas y bisectrices.

8ª — Los ángulos *A, B, C, a, b* son iguales y valen 60°.

9ª — Los ángulos α, β, γ, δ, ε, ς, son iguales y valen 30°.

10. — Los angulos *p, r, s, t, u, v, M* son rectos.

11. — Los ángulos *k, h, i, o, m, n,* son iguales y valen 60°, por tanto iguales al *A, B, C, a, b.*

12. — Hay 16 triángulos rectángulos todos semejantes.

13. — Los triángulos *AoB, EoF, AoC, BoC* son isósceles y semejantes.

14. — Los triángulos *ACD, ADB, AEB, CEB, CFA, AFB,* son iguales.

15. — Los triángulos *AoB, AoC, BoC,* son iguales.

16. — » » *AoD, BoD, AEo, CEo, CFo* son rectángulos iguales.

17. — Los triángulos *ECF* y *ACB* son equiláteros y semejantes.

18. — Las líneas *oF, oD, oE* son la mitad de la *Ao.*

19. — Los cuadriláteros *ECFo, BDoF, AEoD* son iguales.

20. — Las medianas, las alturas ó las bisectrices del equilátero, se cortan en un mismo punto *o.*

21. — Cualquier ángulo vale 30° ó múltiplo de 30.

22. — El punto *o* es el centro de la circunferencia inscripta; la circunferencia pasa por el pie de las perpendiculares y por consiguiente su punto de contacto está en el punto medio de los lados. Es el centro de la circunferencia que pasa por los vértices, por consiguiente de la circunscripta.

23. — El triángulo *AoB*, es la tercera parte, en superficie, del equilátero.

24. — La superficie del triángulo rectángulo *oDB*, es la sexta parte de la del equilátero.

25. — El ángulo $o + m$ es suplemeto del *B*. Asimismo, el $k + h$ y el $n + i$.

26. - Los triángulos *AEF* y *EFB* son iguales é isósceles y semejantes á los *AoB*, *AoC* y *BoC*.

27. — Los lados *FM* y *MF* de los triangulos *EMo* y *MoF*, son homólogos del lado *MC* del triángulo *ECM* y del lado *EC* del triángulo *ECo*.

28. — El ángulo externo en *B* vale 120°.

29. — La suma de los lados *AB* y *BC* es mayor que *AC*: la suma de los ángulos *A* y *B* es mayor que *C*.

30. — El ángulo externo es cuatro veces el *m*.

Ejercicios de discriminación. — 1ª Si A F es bisectriz y el ángulo A mide 60°, los ángulos α y β miden 30° cada uno.

2ª Los ángulos *m* y *n* son iguales, porque son opuestos por el vértice.

2ª Si el triángulo A E *n* es rectángulo y el ángulo en A mide 30 grados, *n* medirá 60°.

3ª Si D R parte del vértice R, es altura del triángulo A *k* B.

4ª La suma A $n + n$ B menor que la suma A C + C B, porque es un camino más corto entre dos puntos.

5ª Siendo E C F equilátero, es semejante á A C B.

6ª Si los ángulos C E B y C F A son rectos, E *m* F + C es igual á 2 R., etc.

Estos ejercicios así como los de observación, que cultivan de una manera definida dos aptitudes diferentes de la mente, pueden realizarse sobre cualquier figura ó grupo de figuras. El libro de ejercicios, para cada grado, deberá contener por lo menos, un centenar de estas cuestiones en forma tal que las 600 que correspondan al ciclo primario, abarquen desde la línea hasta la esfera y realicen series ordenadas.

He aquí una pequeña serie de casos para ser observados y discriminados (4°, 5° ó 6°).

1. Trace Vd. con regla y compás, un equilátero, sus tres medianas ó sus tres alturas, ó sus tres bisectrices, ó todas á la vez (tiza ó tinta de colores) y haga el mayor número de observaciones (inducciones) posibles, midiendo con el compás y el transportador.

2. Trace á cinco triángulos escalenos, las tres bisectrices en tinta negra, las tres medianas en tinta roja y las tres alturas en tinta azul. Prolónguelas hasta encontrarse y haga las inducciones del caso.

3. Construya un isósceles, trace sus medianas y haga el mayor número de inducciones posibles.

4. Construya un escaleno, levante perpendiculares en el punto medio de sus lados y haga el mayor número de observaciones posibles.

5. Construya un triángulo rectángulo ; baje desde el vértice del ángulo recto una perpendicular á la hipotenusa y observe en los tres triángulos que resultan, cuáles son los ángulos correspondientes é iguales. Lo mismo en un rectángulo, uno de cuyos catetos sea la mitad de la hipotenusa.

6. Trace un cuadrado y sus diagonales y haga el mayor número de inducciones. Id., id. de un pentágono ; de un losange.

7. Trace dos paralelas cortadas por una transversal y haga el mayor número de inducciones posibles. Id. ángulos opuestos por el vértice.

8. Prolongue los lados de varios ángulos (lados paralelos ó perpendiculares) y haga el mayor número de inducciones.

Ejercicios de generalización. — Tomemos siempre el caso del triángulo equilátero. La construcción de dos más de extensión y de posición diferentes, observados y discriminados, como el primero, permitirán notar propiedades comunes y, por consiguiente, asegurar:

1º *En todos* los triángulos equiláteros, las bisectrices, las alturas y las medianas coinciden.

2º Se cortan en un mismo punto.

3º Se cortan en dos tercios de su longitud.

4º La recta que une los piés de dos alturas es paralela á un lado y es lado de un tríángulo equilátero, etc. Este caso, es la generalización de una verdad inducida, que conduce á la definición, al principio y al teorema y constituye la primera forma de verificación geométrica en la historia de la humanidad y en la historia del niño. En 1º grado y 2º es necesario generalizar la objetivación del término geométrico según la posición, la forma y la extensión. Si decimos á un niño no acostumbrado á generalizar, «trace Vd. una recta», trazará, en la pizarra, una horizontal de cuarenta centímetros. «Trace Vd. otra», trazará otra horizontal más ó menos de la misma longitud. Se acostumbra á una forma, á una posición y á una dimensión que, lejos del espíritu geométrico eminentemente generalizador, le impedirá luego ver la recta donde ésta sea diminuta; la ondulada en los bordes de una hoja; la perpendicular donde ésta caiga sobre una oblicua pequeña; el ángulo recto cuando forme parte de un triángulo rectángulo en que ningún lado ocupa la horizontal. Así, cuando el maestro se ocupe de hacer comprender lo que es recta, curva, oblicua, perpendicular, ángulo, escaleno, cuadrilátero, polígono, etc., etc., los hará notar en el mayor número posible de objetos, del aula primero, de la casa después, del pueblo, del campo y los representará y hará representar en el mayor número posible de posiciones, formas y dimensiones sobre la pizarra primero, luego sobre el papel. Conseguiremos esto : que el alumno no interprete con una visualización limitada, fundamentalmente contraria al espíritu matemático, las definiciones, principios y enunciados, que equivale á suprimir los mayores obstáculos de la comprensibilidad.

Ejemplificaremos el sentido exacto de esta enseñanza, dando algunas series para 2º, 3º y 4º grado.

Serie I (2^{o} grado).— I.— Objetivar y generalizar la definición de punto, línea, superficie, volumen.

2. — Objetivar y generalizar la idea de plano, intersección, convexo, superficie curva.

3. — Objetivar y generalizar con multitud de ejemplos, la definición de línea recta, curva, quebrada, mixta, ondulada, quebrada convexa, cóncava.

4. — Objetivar y generalizar la definición de línea vertical, horizontal, oblicua; líneas paralelas, convergentes, divergentes, perpendiculares; transversales, secantes, tangentes. Pie de una línea.

5. — Objetivar y generalizar la definición de figura rectilínea, curvilínea y mixtilínea.

Serie II (2^{o} grado). — I. — Construir cincuenta líneas diferentes en forma, extensión, posición y que recuerden cosas ó fenómenos de la naturaleza.

2. — Trazar ocho verticales y ocho horizontales diferentes en extensión Trazar veinte oblicuas diferentes por su extensión y posición.

3. — Trazar veinte curvas diferentes en forma, posición y extensión.

4. — Trazar veinte quebradas diferentes en posición, extensión y forma que recuerden alguna cosa ó fenómeno de la naturaleza.

5. — Dibujar veinte onduladas y veinte mixtas diferentes en forma, posición y extensión que recuerden cosas ó fenómenos de la naturaleza.

6. — Trazar veinte perpendiculares de diferente posición y forma.

7. — Trazar veinte ángulos, diferentes sólo por su posición; sólo por su forma, sólo por su extensión.

8. — Indicar las líneas que no pueden tener sino una posición, una forma. Indicar los ángulos que no pueden tener sino una dimensión constante. ¿Hay líneas que no pueden tener sino una dimensión constante?

Serie III (3er grado). — I. — Objetivar y generalizar la idea de ángulo agudo, recto, obtuso. De abertura y dimensión del ángulo. De bisectriz.

2. — Definir el compás, la regla, el transportador. Grado y minuto.

3. — Definir, objetivar y generalizar el triángulo por su forma, posición y extensión según sus líneas, sus ángulos y espacio.

4. — Objetivar y generalizar la idea de ángulos adyacentes, opuestos por el vértice, consecutivos, alternos, complementarios y suplementarios.

5. — Objetivar y generalizar la idea de base, altura, vértice, superficie, ángulo opuesto, ángulo exterior. De hipotenusa, mediana.

6. — Notación y lectura de líneas, ángulos, arcos y polígonos. Símbolos de cantidad, de representación, de operación y de relación de uso más frecuente. Significado de $2R$, $<$, $>$, $=$. Lectura de expresiones como $a + b > c$.

Serie IV (4^{o} grado). — I. — Objetivar y generalizar la idea de polígono regular é irregular; convexo y cóncavo; figuras semejantes, lados y ángulos correspondientes y homólogos. Perímetro.

2. — Objetivar y generalizar la idea de cuadrilátero tocante á forma, posición y extensión, por sus líneas y sus ángulos.

3. — Base, altura, diagonal, ángulos opuestos, exteriores, suplementarios, entrantes, salientes.

4. — Objetivar y generalizar la idea de circunferencia, centro, arco, diámetro, radio, cuerda, flecha, segmento, sector, inscripto, circunscripto, ángulo del centro; tangente, normal á la circunferencia, secante. Círculo, circunferencias concéntricas.

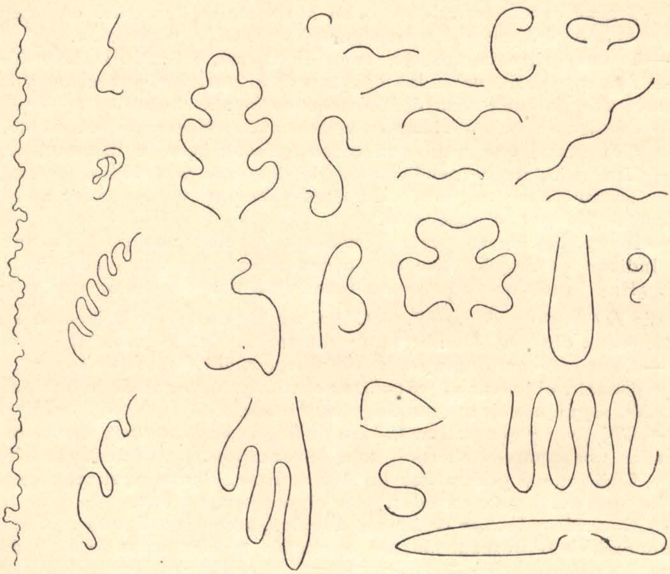
5. — Objetivar y generalizar la idea de lugar geométrico; notación escrita de la circunferencia y sus líneas; de las figuras semejantes. Significado simbólico de AB, R y r, C, ABC, O, A, B. H, π, $2p$, S, etc.

6. — Nomenclatura de los polígonos: definirlos, objetivarlos y generalizar. Apotema.

7. — Objetivar y generalizar la idea de puntos simétricos, eje de simetría, figuras simétricas.

8. — Objetivar y generalizar la idea de *segmento capaz de un ángulo dado, ver bajo un mismo ángulo.* La idea de *equivalente, equiángulos, relaciones de similitud, proyección de una recta,* etc.

Objetivar es expresar gráficamente lo que se ve de una definición ó, en otros términos, trazar sobre una superficie la figura cuya imagen ha formado nuestra mente. Tales ejercicios tienen por objeto corregir ya dijimos, defectos de comprensibilidad á fin de que los enunciados evoquen representaciones exactas.



Generalizar es dar á una definición, principio ó enunciado, todas las representaciones posibles á fin de que el alumno no interprete con una visualización limitada, fundamentalmente contraria al espíritu matemático. Así, si pidiéramos una línea ondulada en la mayoría de los casos se nos dibujaría que es la forma á veces única evocada por el sustantivo. Si pidiéramos otra, se nos dibujaría ; si pidiéramos otra, el interrogado hallaría embarazo para satisfacernos. El restringido campo de su visión interna se debe á falta de ejercicios generalizadores, particularmente de observación hecha sobre las cosas.

La ondulada, después que la notaran en objetos, flores, hojas, etc. se generalizaría como lo indica la lámina.

Ejercicios de imaginación. — La necesaria y objeto de una educación especial, en la enseñanza primaria de la Geometría, es la reproductora. El objeto inmediato de los ejercicios de imaginación reproductora, no es la formación de conocimientos nuevos; sino provocar el movimiento de las imágenes, hacer cada vez más fácil el trabajo de evocación; crear en el niño el hábito de traer á conciencia, cuando le convenga, y según le convenga, la masa de hechos que en toda ocasión es necesaria, como datos para resolver un problema. *En Geometría primaria, no será como en la Aritmética, la solución razonada de problemas el objetivo principal, por la calidad superior y compleja del proceso, sino la interpretación y visualización de los datos para llegar á él.*

La definición, el principio, el teorema, el enunciado, como en toda ciencia concreta, debe, primer paso de una solución, ser comprendido y la comprensión en este caso, es la evocación exacta y rápida de la figura que comprueba ó sobre qué debe demostrarse. Durante los muchos años que enseñamos geometría, hemos observado que la dificultad á veces más seria para un alumno, es *construir la figura,* es decir, que las palabras del enunciado evoquen una representación clara y no confusa ó incompleta. Ahora bien, este defecto de cerebración, esta incapacidad de convertir las expresiones verbales en imágenes, es la consecuencia de una educación no realizada oportunamente. Hay que preparar, entonces, la mente, para esta operación ineludible del análisis geométrico, antes del estudio sistemático de la ciencia, cuando no es posible distraer tiempo en preliminares, puesto que debe ejercitarse otro tipo de actividad.

La imagen, ha dicho MALEBRANCHE, es el vehículo del razonamiento. Hay verdades que *saltan á los ojos.* Basta construir tal figura para descubrir tales relaciones; quien haya resuelto problemas de Geometría y esté familiarizado con sus métodos, sabe qué cierto es lo que acabamos de declarar, de acuerdo, por otra parte, con lo que se tiene de largo tiempo sabido que, en las representaciones externas se ve más que en las internas. Quiero probar, dice un filósofo, que el cuadrado de la diagonal de un cuadrado, es doble de los de los lados. Abrid los ojos, mirad la figura que he trazado. Vuestros ojos, Aroste ¿no os dicen que todos estos triángulos que veis son iguales? ¿y que el cuadrado construído sobre la diagonal A B tiene cuatro de dichos triángulos y que los construídos sobre los catetos no tienen sino dos? Que luego, el cuadrado grande es doble de los otros?

La *versión gráfica* de enunciados, puede comenzarse en 4º grado; pero será un ejercicio peculiar de 5º y 6º. Los alumnos comenzarán por construir figuras correspondientes á definiciones, luego á los primeros teoremas, luego á los de enunciado más complicado, por fin á problemas. Los ejercicios se distribuirán de en las series de manera que resulten semanales y sucesivamente complicados. Sobre estas construcciones se ejercitará luego, la observación y la inducción que conducen al razonamiento y á la solución sin pretender este resultado sino en determinados casos de preparación del curso.

El maestro escogerá un enunciado (4º grado); lo leerá; dirá luego: vamos á construir la figura que el enunciado indica. El cuadrado construído sobre la suma de dos líneas rectas.... dos líneas rectas A B y C D (traza); su suma (traza) A D; el cuadrado, construído, etc., (construye); es equivalente á la suma de los cuadrados hechos sobre cada una de estas líneas (construye y escribe el signo + entre las dos figuras) aumentada del doble de su rectángulo (construye y aumenta). Después de otro ejemplo, envía á la pizarra seis alumnos y les dice: versión gráfica de: *Si se trazan en un círculo*, *radios oA, oB, oE*.... (construyen); *formando entre ellos ángulos de 120°* y *se toman sobre esas rectas,* etc. Otro. Versión gráfica de: *las bisectrices de los ángulos cuyos lados son paralelos*.... *Si dos paralelas se cortan por una transversal*.... *los ángulos alternos internos* (letras).... *son iguales* (igualdad). Pasa otro grupo.

Estos ejercicios, por otra parte, son de una importancia indiscutible en cuanto que el alumno se familiariza con los enunciados geométricos, los fija insensiblemente en su memoria, adquiere una extraordinaria habilidad en el manejo de la regla y el compás y en la construcción de figuras, gran parte de ellas, soluciones gráficas de problemas.

El ejercicio inverso de presentar la figura y redactar el enunciado observándola, manera de preparar el juego propio de la imaginación en la lectura, nos parece innecesario, por cuanto ya se le realiza en los ejercicios de observación; la versión gráfica no es complicada á tal punto de exigir tal práctica y el enunciado es la consecuencia de una solución que implica operaciones mentales diversas.

Ejercicios de construcción. — A éstos suele reducirse la enseñanza de la Geometría gráfica en nuestras escuelas, bien pobre por cierto y lejos de constituir una ejercitación eficaz de la observación, de la inducción, de la imaginación constructiva, por cuanto los textos indican cómo debe procederse con el compás y la regla. Por otra parte, estos ejercicios que suelen denominárselos *solución de problemas,* no forman sino una coleccioncita de 40 ó 50 casos, que no dan siquiera una idea acabada de lo que es construir una figura geométrica, no obstante la aparatosidad con que se resuelven casos como estos: *construir una perpendicular á una recta; construir un triángulo dados dos lados y el ángulo comprendido,* etc. La Geometría ofrece miles de construcciones como y más interesantes que éstas que se prestan, además á la observación. Conviene, por otra parte, dar enunciados teoremáticos, es decir, que contengan explícita la construcción; v. g.: *Determinar el valor del ángulo formado por las bisectrices de los ángulos de la base de un trapecio regular y determinar el ángulo de las bisectrices de los ángulos exteriores á la base del mismo trapecio; ó las bisectrices de los ángulos de un cuadrilátero forman otro cuadrilátero cuyos ángulos opuestos son suplementarios,* que se prestan á una rica y variada serie de construcciones, de descriminación del enunciado y, por último, á la *comprobación,* mediante el compás ó el transportador que es, en Geometría, siempre un paso necesario, en el proceso demostrativo.

Problemas. — Es la ejercitación del razonamiento por excelencia, en forma deductiva. Dijimos en otra parte, que las lecciones, en la enseñanza primaria de la Geometría, no toman este carácter. Se aplican fórmulas ó se hacen construcciones sin explicar, generalmente, el motivo del procedimiento, respondiendo á la necesidad común de resolver ciertas cuestiones que las actividades de la vida exigen. No obstante, una enseñanza realizada grado por grado con buenas prácticas, puede, en 6º abordar con éxito, el análisis de un gran número de cuestiones geométricas.

El problema, dice COLOZZA, no es sino una especie de autointerrogación más ó menos compleja que resulta de la combinación de elementos conocidos. Es condición del problema requerir la determinación de un *quid* desconocido, ignorado, mediante datos conocidos y ligados entre sí por relaciones de dependencia ó explicativas. Los datos pueden ser explícitos ó implícitos. En Geometría suelen ser, por lo común, implícitos y las relaciones, diferentemente de los casos aritméticos, múltiples, merced á la posible combinación y concurso de numerosos teoremas y principios. Por eso el problema geométrico es siempre un primor de ingenio y de complicaciones que la lógica adolescente desmadeja con dificultad.

La solución de un problema es la recapitulación de las operaciones que hemos indicado más atrás, que el alumno debe realizar ordenadamente para alcanzar el resultado. Las vacilaciones, dudas, contratiempos, que preceden al fracaso, surgen cuando el alumno, á menudo impaciente y obsesionado por la creencia de que la solución debe, como lo simple, nacer instantánea, y no de una serie sucesiva de operaciones, no se decide, víctima de una ilusión, á recorrer el camino dando el número de pasos que son necesarios para trasladarse de un punto á otro. El maestro debe, con tanta solicitud como empeño, enseñar el procedimiento en frecuentes ejemplificaciones hasta convencer al curso que no puede llegarse al éxito de otra manera.

Estos son los pasos del proceso razonativo y las precauciones que se aconsejan que si no alcanzan la solución serán parte de los que á ella conducen, realizándose desde luego, lo fundamental de esta enseñanza, la educación de la aptitud :

I — Versión gráfica del enunciado (á veces como único tema de lección). Háganse figuras grandes.

II — Construir, sin excepción, con compás, regla y escuadra, dentro de una rigurosa exactitud.

III — Observar la construcción y hacer todas las inducciones posibles.

IV — Descomponer el enunciado en otros, simples, que resuelvan cuestiones del análisis general.

V — Hacer construcciones auxiliares que resuelvan, combinando las hipótesis del problema, cuestiones que podrían ser de referencia para el análisis.

VI — Servirse constantemente de tinta ó tiza á varios colores, rayas gruesas ó delgadas, para poder observar sin esfuerzo, en la figura, los casos secundarios que ofrece el problema.

VII — Si es necesario, descompóngase la figura en otras secundarias, sáqueselas de la principal, y obsérvese forma, extensión, posición y letras.

VIII — Recúrrase á soluciones conocidas de problemas semejantes.

IX — Hacer entrar en el análisis todas las condiciones del problema teniendo en cuenta que el enunciado nunca da datos innecesarios.

X — Elegir siempre la construcción más general, nunca la particular. Si se dice: *las bisectrices de un triángulo forman*, etc., no se construirá un equilátero ó un isósceles; si se dice *cuadrilátero*, nunca un cuadrado, rombo, rectángulo, trapecio.

XI — En las construcciones comprobar antes por el tanteo lo que debe demostrarse, ó dar por hecha la construcción, observar luego y después demostrar.

XII — Colocar siempre letras y designar los elementos con el menor número de ellas; un ángulo con una letra y no con tres; un lado con una letra y no con dos.

XIII — Toda igualdad ó equivalencia que se descubra, escribirla inmediatamente en forma de ecuación.

XIV — En las construcciones donde haya triángulos, buscar en éstos, tres elementos conocidos.

XV — Enumerar las condiciones ó hipótesis del problema y separarlas de las conclusiones.

XVI — Cuéntese el número de condiciones y escríbanse condiciones y conclusiones en forma de igualdad; las condiciones ó hipótesis arriba, separadas de las conclusiones.

Háganse con frecuencia estos ejercicios, á veces como tema único de lección.

XVII — Considérese cada problema como el compuesto de otros, generalmente muchos, de cuya solución depende la principal. Cada problema de geometría suele ser la síntesis de una serie de problemas y teoremas acerca de perpendiculares, paralelas é igualdad de ángulos. Cada uno tiene su construcción y demostración que conviene efectuar aparte para no confundirse cuando la figura es de muchas líneas.

XVIII — En toda demostración gráfica se procederá según este orden:

a) Construcción.
b) Inducciones.
c) Análisis ó razonamiento.
d) Discusión.
e) Conclusión.

á lo que podría agregarse, mediante una descomposición del enunciado, y antes de la construcción: *Condiciones* ó *hipótesis*. El exceso de razonamiento es una crisis necesaria de quien principia á razonar con precisión.

XIX — El profesor precederá cada serie, de una explicación analizando algunos problemas; dará al alumno estas lecciones de prueba y tiempo suficiente para meditar con reposo estimulando todo paso que lleva á la solución aunque ésta no se alcanzara.

XX — Considérese que la mayor parte de los problemas de Geometría son recapitularios y exigen la evocación de una gran cantidad de teoremas, corolarios, axiomas y definiciones.

El problema de Geometría, más que otro alguno, exige una buena dosis de paciencia y empeño. Es en consecuencia, un magnífico instrumento para educar la voluntad.

Una serie de problemas gráficos para 2° grado. — I. — Construir una recta igual á la suma de las rectas *ab*, *cd*, *ef*, etc. Á la mitad, á la cuarta parte.

2. — Construir una recta igual á la diferencia de otras dos.

3. — Construir una recta igual á la diferencia de dos rectas, á una de las cuales se debe quitar la longitud *ab*.

4. — ¿En qué longitud excederá la suma de las rectas *ab*, *cd* y *ef* á la suma de las rectas *mn* y *op*?

5. — Construir una recta cuya longitud sea igual al perímetro de un polígono dado.

6. — Construir un ángulo igual á otro. Todos los procedimientos posibles. (Pueden realizarse en un terreno).

7. — Construir un ángulo igual á la suma de 2, 3, 4, 5 ángulos dados. ¿Qué constituye la medida de un ángulo? Condiciones de dos arcos iguales.

Para 3°—I. — I. — Construir un ángulo igual á la diferencia de otros dos.

2. — Construir un ángulo igual á la diferencia entre los ángulos *a*, *b* y *c* y los *m* y *n*.

3. — Construir un ángulo de 90 grados, de 45, de 30, sin transportador.

4. — Construir un ángulo de 37, de 122, etc., grados.

5. — Construir un ángulo suplemento de otro dado.

6. — Construir un ángulo complemento de otro. Opuesto á otro.

7. — Construir entre dos puntos un camino más largo que el indicado por una línea quebrada convexa ó por una curva. Más largo que la quebrada en una distancia *mn*.

II. — I. — Trazar las bisectrices de los ángulos de un triángulo.

2. — Trazar las alturas de un equilátero y observar lo que sucede.

3. — Construir un triángulo igual á otro.

4. — Construir un polígono igual á otro de cualquier número de lados, regular é irregular.

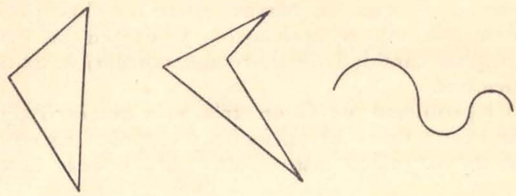
5. — Hallar todos los puntos que equidisten de los extremos de una recta.

6. — Hallar un punto equidistante de los extremos de una recta y cuya menor distancia á la misma sea igual á la misma recta.

7. — Dividir una recta en 2, 4, 8 partes iguales.

III. — I. — Dividir una recta en 3, 6, 9 partes iguales sin recurrir á los teoremas de las proporciones.

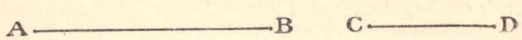
2. — Construir un triángulo equilátero, un isósceles, un escaleno, un rectángulo, un acutángulo, un obtusángulo, con regla y compás.
3. — Construir un triángulo isósceles y rectángulo á la vez.
4. — Todos los procedimientos posibles para trazar una línea recta igual á otra en extensión y posición; íd. íd. un ángulo igual á otro en abertura y posición.
5. — Construir figuras simétricas á



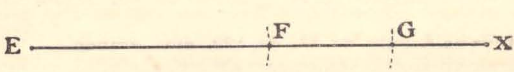
6. — Construir dos figuras semejantes. Señalar sus elementos iguales ó de homología.

El alumno hará uso de todos los medios posibles para resolver los problemas. La solución de cada problema comprende dos partes: *Construcción* y *análisis* ó razonamiento.

Ejemplo: encontrar la suma de las dos rectas.



Construcción: 1° Trazo una recta indefinida *Ex;* 2° Del punto *E* como centro, con un radio igual á *AB,* describo un arco que corte E x en *F.* 3° De la misma manera, del punto *F* como centro de un radio igual á *C D,* describo otro arco que corte á *Fx* en *G.* La recta *E G,* es la suma pedida.



Razonamiento: 1° Sumar es agregar sucesivamente varias cantidades de la misma especie para formar una sola. 2° Hemos agregado sucesivamente á la longitud *A B* la *C D.* 3° Hemos formado una sola, la *E G.* 4° Las cantidades sumadas son de la misma especie porque son líneas rectas. Luego, etc.

Para 4°, 5° y 6° — *I.* — 1. — ¿ Cuántos pares de oblicuas iguales pueden trazarse á los extremos de una recta ? ¿ Dónde se cortan estas oblicuas ?
2. — Un punto situado sobre la perpendicular levantada en el medio de una recta dista 20 metros del extremo. ¿ A qué distancia estará del otro extremo ?
3. — Trazar todos los elementos de una circunferencia y generalizados en posición, extensión y forma. Id., íd. de cualquier polígono.
4. — Dividir un ángulo en 2, 4, 6, 8 partes iguales.

5. — Trazar una figura cerrada por cuatro lados iguales y con ángulos rectos.

6. — Id., íd. de los cuales dos opuestos sean dobles de los otros dos y sus ángulos rectos.

7. — ¿ A qué es igual el ángulo formado por las bisectrices de dos ángulos cualesquiera de un triángulo ?

8. — Si desde los puntos de una recta *A B* perpendicular á otra *C D*, se trazan sucesivamente rectas que las unan á los extremos de la recta *C D*, ¿ cómo es la suma de cada par de éstas respecto á las otras ?

9. — Dos triángulos tienen dos lados respectivamente iguales y el ángulo comprendido de 46° en uno y de 81° en otro. ¿ Cómo serán los terceros lados ?

10. — Desde un punto de un lado del ángulo recto se trazan arbitrariamente oblicuas al otro lado. ¿ Cuándo crece la suma de los lados de los triángulos formados sucesivamente ? ¿ Cuándo disminuye ?

II. — 1. — En un triángulo isósceles se toman, á partir de la base, distancias iguales sobre los lados iguales y se une por rectas, cada punto con el vértice del ángulo opuesto: 1° ¿ Cómo son estas rectas ? 2° ¿ Cómo son entre sí los ángulos que ellas forman con la base del triángulo primitivo ? 3° ¿ Cómo son los tres triángulos que resultan formados por estas líneas y los lados del triángulo primitivo ?

2. — La base de un triángulo isósceles se ha dividido en tres partes iguales; trazando rectas desde el vértice opuesto á los puntos de división, comparar los nuevos triángulos.

3. — *S* es la suma de los lados de un triángulo equilátero y *s* de las medianas. ¿ *S* es mayor ó menor que *s* ?

4. — En el triángulo isósceles *A B C* cuyos puntos *A' B' C'* son medios de los lados respectivos, ¿ por cuántos caminos distintos se puede ir de *A* á *A'* ? ¿ Cuáles son más largos ó iguales ? ¿ Qué triángulo es *A' B' C'* ?

5. — En un triángulo isósceles *A B C*, se toma á partir de A y C, una serie de distancias iguales en los lados iguales y se unen á los vértices opuestos A. y C. ¿ Dónde se cortan dichos pares de rectas ?

6. — Todos los procedimientos posibles para bajar una perpendicular desde un punto á una recta.

7. — Todos los procedimientos posibles para levantar una perpendicular en el extremo de una recta.

8. — Todos los procedimientos posibles para levantar una perpendicular en un punto cualquiera de una recta.

9. — Todos los procedimientos para trazar una paralela á una recta por un punto dado.

10. — Para trazar una paralela que diste de una recta una distancia dada.

11. — Trazar una convergente que forme con una recta un ángulo dado.

III. — 1. — La longitud de tres líneas es *a*, *b* y *c* ms. ¿Cuál es su suma? ¿En cuánto excede una recta que mide *a* ms. á otra que mide *b* ? Hallar la diferencia entre dos grupos de líneas uno de tres y otro de dos; las líneas del 1° miden *a*, *b* y *c* ms.; las del 2° miden *d* y *e*.

2. — Dése á cada alumno un objeto y que efectúe la medición de sus líneas rectas y curvas, echando mano de los recursos que le permitan su ingenio.

3. — Trazar varios polígonos en el pizarrón, regulares é irregulares y mandar alumnos para que hallen el perímetro. La suma, en grados, de sus ángulos.

4. — Que cada alumno trace el plano de la casa en que vive y dé las medidas en metros y centímetros de las líneas.

5. — Trazar un polígono irregular con ángulos agudos y obtusos; medir éstos y hallar la diferencia de las sumas.

6. — Si un ángulo vale 23° ¿cuál es su complemento? Complemento de 78°, 50°, 27°, 44°, 63°15′, 32°3′, 1°1′1″, 48″.

7. — Suplemento de los siguientes ángulos: 105°, 47°, 29°, 160°8″; 100° 1′1″, 56′25″.

8. — A un ángulo recto se ha trazado la bisectriz. ¿Qué ángulos formará con los lados? Con los lados de un ángulo de 126° 12′; 46′22″; de *n* grados.

9. — Dos rectas qne se cortan forman cuatro ángulos; uno de ellos vale 37°; ¿cuánto vale cada uno de los otros tres?

10, — Se desea unir Mercedes á Navarro por una línea férrea sin curvas; ambos pueblos están situados en paralelos á 10 millas uno de otro; se desea saber el ángulo que debe formar la línea férrea con el paralelo de Mercedes si la distancia entre Mercedes y Navarro es de 20 millas.

IV. — 1. — Construir un cuadrilátero, tres de cuyos ángulos midan 105°, 75°, y 125°. Trazar las bisectrices y medir los ángulos del 2° cuadrilátero que forman dichas bisectrices al cortarse.

2. — Medir con el transportador los tres ángulos de varios triángulos y hacer las sumas.

3. — Medir el ángulo externo de varios triángulos y averiguar de qué dos ángulos es la suma.

4. — El ángulo de la base de un isósceles mide 39°. ¿Cuánto miden los demás?

5. — Medir la longitud del borde circular de una moneda de cobre.

6. — Dar al alumno cartoncitos recortados ú objetos para que halle su área total.

7. — Dos rectas forman un ángulo de 77°. ¿Qué ángulo forman las perpendiculares levantadas sobre sus lados?

8. — A un mismo lado de una recta *A B*, se han trazado otras dos. Una inclinada 48° hacia el extremo *A* y otras de 66° hacia el extremo *B*. ¿Cuál será el ángulo formado por las rectas?

8. — Por un punto cualquiera de un lado de un ángulo recto se traza una recta que forma con dicho lado un ángulo de 168° y por un punto del otro lado del ángulo recto otra recta que forma con el mismo lado un ángulo de 53°. 1° ¿Se encontrarán las rectas? 2° Si se encuentran ¿qué ángulo forman?

V. — 1. — El ángulo formado por dos espejos es de 112°. ¿Cuál será el ángulo de las normales?

2. — Un rayo luminoso se refleja sucesivamente sobre dos espejos formando con el 1° un ángulo de incidencia de 67° y con el 2° un ángulo de incidencia de 56°: 1° ¿Qué ángulo forman las normales? 2° ¿Qué ángulo forman los espejos?

3. — En un triángulo rectángulo, un ángulo agudo es de 30°; ¿cuánto miden los catetos si la hipotenusa es de 150 ms.?

4. — Dados los valores de dos ángulos de un triángulo determinar los ángulos que forman entre sí las perpendiculares trazadas á los lados. Uno de los ángulos del triángulo vale 73° y el otro 104.

5. — Una transversal al cortar los lados de un ángulo de 60° forma con el primer lado un ángulo de 97°. ¿Qué ángulo formará la misma con el 2° lado del ángulo?

6. — ¿Cuál es la suma de los ángulos formados por todas las prolongaciones posibles de los lados de un pentágono regular? Id íd de un exágono regular?

7. — Una transversal corta los lados consecutivos de un exágono regular, formando con el 1° un ángulo de 27°. ¿Qué ángulo formará con el 2° lado?

8. — Una transversal corta los lados no consecutivos de un exágono regular, formando con el 1° un ángulo de 85°. ¿Qué ángulo formará la misma con el otro lado?

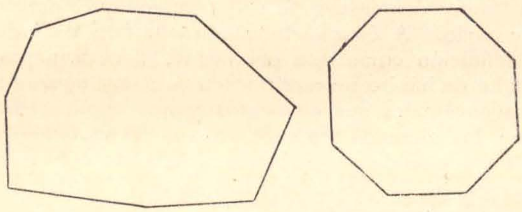
9. — En un polígono regular de 17 lados, encontrar el valor del ángulo formado por dos lados consecutivos y ¿hay dos lados paralelos?

10. — ¿Pueden los ángulos internos de un dodecágono convexo sumar 18 rectas?

— Construir un polígono cuyos ángulos internos suman 228°.

— Los ángulos intermos suman 14400°. ¿De qué polígono se trata?

— ¿Cuántos grados suman los ángulos internos de estos polígonos?



11. — ¿Puede haber un polígono convexo, regular é irregular, cuyos ángulos internos sumen 1185°?

— El perímetro de un exágono regular es de 8000 ms. ¿Cuánto mide el lado?

12. — ¿Cuántos lados tendrá un polígono convexo cuyos ángulos suman 80 rectas? ¿Cuál será la suma de los ángulos de un polígono irregular convexo de a lados?

VI. — 1. — Calcular la altura de un árbol, sabiendo que la distancia del pie del árbol al teodolito, es de 30 ms. y que el teodolito dirigido á la cima del árbol, forma un ángulo de 45°.

2. — ¿Cómo puede hallarse la altura de una pared, disponiendo de un palo más alto que ella?

3. — Quiere saberse la altura á que está la barra de que cuelga un trapecio, sostenida por postes verticales y oblicuos, sabiendo que del pie del poste vertical al pie del oblicuo de un mismo lado, hay 2.8 ms. de distancia; y que 2 ms. más arriba del poste vertical, hay 2 ms. al oblicuo.

4. — Hallar la altura de un árbol conociendo la sombra en un momento dado.

5. — Los lados del ángulo recto de un triángulo valen 16 y 24 ms. Calcular las proyecciones del ángulo recto sobre la hipotenusa y la distancia del vértice de este ángulo al lado opuesto, (aplicando fórmulas).

6. — Cada uno de los triángulos isósceles mide 15 ms. y la base 10. ¿Cuál será la altura del triángulo rectángulo, de igual base é igual área?

7. — Los dos lados del ángulo recto de un triángulo miden 5.7 y 8.3 m.; del vértice del ángulo recto se baja una perpendicular á la hipotenusa. Se pregunta la superficie de uno de los triángulos en que resulta dividido el rectángulo.

8. — Un lado de un triángulo, mide 1 m.; la superficie es de 4 m^2., y el perímetro de 4 ms. Hallar el valor de los otros lados del triángulo.

9. — La hipotenusa vale 30 ms.; la razón de catetos es de 3. Valor de cada cateto.

10. — La hipotenusa mide 55 ms.; la superficie es de 726 ms. cuadrados. Hallar el valor de los catetos.

11. — Superficie del equilátero sabiendo que el radio del círculo inscripto es de 142.25 ms.

12. — La mediana de un rectángulo cuya hipotenusa es doble del cateto, mide 8 ms. Area del triángulo.

Ejercicios de lenguaje oral y escrito. — El estudio de una materia se hace difícil, incomprensible á menudo, si no se conoce el significado de sus términos, en geometría, si no se es capaz de representarlos en figura. Así las palabras *adyacente, lugar geométrico, ver bajo un ángulo, constante geométrica,* por ejemplo, han sido el mayor tropiezo que para entender hayan encontrado los alumnos, en general poco dispuestos á ese trabajo que para disipar la duda es necesario. A ésto suele añadirse la falta de hábito de considerar la definición como una propiedad, necesaria para explicar otras y la falta de hábito de escribir letras á las figuras y designar con los convencionales sus elementos y nos explicaremos la facilidad con que los alumnos enmudecen ante el razonamiento de un teorema ó la solución de un problema, señalando con puntazos más ó menos insegurso lo que debe expresarse en castellano correcto y perfecta lógica geométrica.

El lenguaje geométrico comprende cierta cantidad de términos cuya definición exige ejercicios de generalización visualizados. Catalogados cuidadosamente esos términos, los distribuiremos en los programas de 2°, 3°, 4° y 5° grado; en cada uno reevocaremos los de los grados anteriores, los recapitularemos en 6° y procederemos á una conveniente ejercitación de cada uno de ellos, exigiendo su uso cuando la expresión geométrica lo exige. Téngase presente que la Geometría que se enseña en 1° y 2° grado no es sino el lenguaje de la asignatura, lo que, por otra parte, es el espíritu de todas las enseñanzas, excepto de la Aritmética, de esos dos grados.

El término ó la expresión se enseña, trazando la figura en la pizarra, haciendo observar, dando la definición y aplicándola á un número crecido de casos (generalización) como en el caso de la ondulada. Así, *ángulos adyacentes,* se dice *son estos* (figura en la pizarra en que debe cuidarse que no resulten complementarios) *que tienen un vértice común* y *un lado común* (señalando). Son estos que tienen un vértice común y un lado común, estos, estos, estos (generalizando en todas las posiciones, aberturas de ángulos y situación de líneas, en lòs últimos casos, incluyendo formas complementarias y suplementarias). Una ilustración restringida ó la sola definición verbal, será no solo estéril sino de consecuencias negativas para la enseñanza en cuanto supondremos sabido lo que se ignora.

Del punto de vista del lenguaje escrito y necesario, desde el 2° grado, no tolerar una figura sin letras y exigir siempre la lectura de ésta cuando sea necesario señalarla total ó parcialmente. Ejercicios de principio, escritos ó mentales, familiarizarán á los alumnos con las fórmulas, el significado de sus letras, su empleo en la solución de problemas y su valorización. En la escuela primaria no se deducen, se aprenden y se aplican.

Crear la necesidad de demostrar. —Llevar el niño, por un proceso inadvertido casi, á preguntarse el *por qué* de las cosas, á sentir la necesidad de explicarse un hecho ó un fenómeno mediante un método, es una de las más legítimas aspiraciones de la pedagogía científica y, en los sistemas de enseñanza que propiciamos, una de sus motivaciones. Pero sin un conductor hábil, la necesidad puede carecer de su principal engendrador, el interés. No obstante, en Geometría, el solo método puede conseguir crear en el espíritu del educando, el deseo mental porque sus formas son tan simples como sus prácticas. Entonces llegará á la instrucción secundaria ya no solo con enunciados y elementos de análisis, sino con un crecido número de cuestiones *descubiertas* ó *constatadas* por su observación que querrá dilucidar cuanto antes por el razonamiento. Ejemplifiquemos, volviendo al equilátero. Si su actividad ha sido bien dirigida, el niño habrá entre otras cosas, descubierto y constatado por el compás, hechos sensacionales como éstos que llamarán fuertemente su atención, si no se trata de un sujeto retardado: 1º *que las tres alturas del equilátero se cortan en un punto*; 2º *que se cortan en el tercio de su longitud.* La necesidad del *por qué*, desde este momento, no le dejará hasta no explicárselo por el razonamiento.

LA LECCIÓN. —El lenguaje geométrico se forma mostrando la figura ó el caso geométrico, profusamente generalizado por la observación y dando el nombre. *¿Qué son líneas paralelas?* Las trazaremos; daremos noción de distancia entre ellas (que se mide por la perpendicular y no por oblicuas); trazaremos varias perpendiculares; las mediremos con el compás y constataremos que son iguales sobre una línea de comprobación; induciremos la igualdad de esas distancias; que son iguales desde cualquier punto que tomemos; que líneas en estas condiciones son paralelas. Trazaremos, luego, con mucha rapidez, sobre la figura, treinta ó más paralelas diferentes en forma, posición y dimensiones, para generalizar; pediremos que se nos indiquen objetos ó fenómenos en la naturaleza que presenten estas líneas. Luego pasará un grupo de ocho ó más niños á la pizarra para generalizar la representación de paralelas y fijar el concepto de distancia, de punto y la forma correcta de la definición,

Los modos de actividad del profesor y del alumno, didácticamente, no varían de los de la enseñanza de la Aritmética. La transmisión del conocimiento es directa y rápida conforme á la ley de objetivación y la ejercitación fijadora, inmediata, precedido, el motivo, de una introducción (principio) en que, mediante interrogatorios variados, se evoquen, lo más posible, los aprendizajes hechos.

Para los ejercicios de observación, (3^er^ grado, v. g.) el maestro, en la clase que tuviese este objeto, comenzará por preguntas, mostrando cartones, objetos y señalando sobre figuras, acerca de difiniciones de términos y reconocimiento de elementos geométricos.

O bien mandando un grupo de ocho alumnos á la pizarra, para ejercitarlos en generalizar lo que hasta esa fecha hubiesen estudiado ó en resolver, rápidamente, pequeños problemas como éstos (contenidos en las series del libro): Tracen un ángulo *A*, uno *B*, uno *C*, á mano; construyan uno *D* que sume los tres. Tracen un triángulo *ABC*; den el ángulo que sume *A* y *B* (el exterior).

— Tracen una perpendicular y una oblicua del punto *m* de la perpendicular al *n* de la línea que pasa por su pie. Construyan un triángulo igual al *m* ó *n* trazando otra oblicua, etc. Después de esta ejercitación evocatriz, el maestro, limpia la pizarra, procede á enseñar cómo se observa una figura. Supongamos que hubiese elegido dos paralelas cortadas por una transversal; traza dos figuras que no sean iguales. Escribe letras. Luego, con preguntas á la clase, recuerda la nomenclatura, señalando en la pizarra, ángulos alternos, ángulos correspondientes, la transversal, línea de distancia, etc. Después de esto, dice: vamos á observar el ángulo *a* y el ángulo *b*, alternos internos (señalando); parecen iguales aquí y aquí. Vamos á comprobar, (comprueba con el compás, diciendo lo que hace en una y otra figura). Escribe las igualdades $\sphericalangle a = \sphericalangle b$, $\sphericalangle a' = \sphericalangle b'$ á medida que la comprobación se establezca y dice: estos ángulos alternos internos son iguales. Si lo son en estas dos figuras deben serlo en todas. Podemos, por tanto decir, etc. En la misma forma procede para constatar las otras igualdades de ángulos alternos y correspondientes. Comenzará un segundo orden de observaciones referente á suma de ángulos complementarios escribiendo las igualdades en la forma que corresponde. Terminada la explicación, la observación de las paralelas cortadas por una transversal, será tema de un deber para la lección próxima, después de recapitulada la actual mediante *preguntas acerca de la manera de ver*, de *comprobar* y *de inducir*.

Basta un mes de lecciones preparatorias, para que el alumno pueda desenvolverse por sí mismo en este trabajo, con una facilidad sorprendente; cada serie contendrá uno ó dos casos que se presten á los ejercicios que acabamos de explicar, por otra parte, abundantes y variados en el libro que indicamos antes, mientras no se dispusiera de uno apropiado.

El alumno prepara, así, insensiblemente la agudeza de la vista para descubrir instantáneamente las relaciones de las líneas entre sí y las propiedades que resultan de tales relaciones. Los casos, para estos análisis, deben estar entre sí coordinados, como lo están los teoremas, en sucesiva dependencia, de manera que las propiedades de uno allanen las dificultades para descubrir las del otro. Así, al caso de las paralelas, debe seguir el de los ángulos de lados paralelos, prolongados por líneas de puntos ó de colores hasta encontrarse.

En 6º grado, la observación de estos casos puede llegar fácilmente á la demostración y al enunciado del teorema. Así, *los ángulos internos situados á un mismo lado de la transversal, suman dos rectos*, resulta de una comprobación harto simple, que no exige al grado esfuerzo superior á la capacidad, pues *a* y *b* son alternos é iguales; *b* y *c* son complementarios; substituyendo *b* por *a*, se tendrá *a* y *c* complementarios.

El teorema de Pitágoras dará lugar, en la aplicación, á una rica variedad de problemas, trazados gráficos y soluciones que completarán la cultura matemática del ciclo primario.

Las lecciones de examen se darán á base del estudio de una serie resuelta por el alumno en su casa y sus cuadernos según las instrucciones recibidas del maestro.

No bien haya entrado el grado, se mandarán á la pizarra cinco ó seis niños con su libro de ejercicios; se asignará á cada cual uno, dándosele diez minutos de tiempo para que prepare su trabajo. Mientras tanto se hacen ejercicios mentales con el resto de la clase ó de reconocimiento y generalización sobre objetos ó figuras de cartón, ó de recordación de fórmulas, de definiciones, de propiedades, etc., etc. Transcurridos diez minutos se pedirá, á uno por vez, la explicación del trabajo hecho en la pizarra, que no deberá interrumpirse trabando con ellos diálogos, hasta que no hubiesen concluido de exponer, porque de otra manera no daremos nunca oportunidad al alumno de coordinar por sí mismo sus propios pensamientos, ó quebrantaremos en tal forma el proceso, que le colocaremos en condiciones de no poderlo retomar; entonces es cuando el maestro recita por él. Solo así se explica la común incapacidad de exponer que se nota en los alumnos de 1º, 2º, 3º y 4º año, afortunadamente corregida, en las escuelas normales, por la práctica de la enseñanza. Terminada cada exposición si ella ha sido buena, se aprobará evitando, en lo posible, el comentario. Si ha sido defectuosa, el profesor, generalmente y no los alumnos, hará notar concisamente los defectos, indicará la forma de corregirlos, y escuchará luego, la recitación siguiente.

Concluídas las explicaciones, el maestro explicará los asuntos de la lección próxima é instruirá á los alumnos sobre la manera de estudiar los asuntos y salvar las dificultades que se considerasen mayores. Esto, si la lección hubiere puesto de manifiesto deficiencias generales y de tal importancia que obligaran á una repetición, después de una nueva exposición del profesor en términos más explícitos y ejemplificados.

Ejercicios de aplicación.—La Geometría se estudia con un fin: el de *medir*. Se miden las dimensiones de las cosas, longitudes, superficies y volúmenes. De suerte que la Geometría de pizarrón es una forma preparatoria y no primordial de la enseñanza. Hay que ejercitar al alumno sobre el terreno y en los objetos. En Mercedes, destinábamos los jueves á la tarde á resolver en la feria, cuestiones geométricas, gráficas y numéricas, llevando jalones, cuerdas, cadenas y goniómetros para la ejercitación.

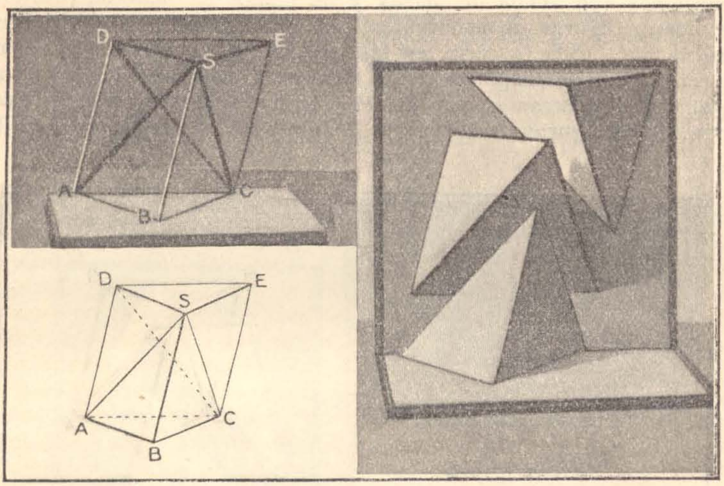
La feria contenía canteros de diversas formas, explanadas, edificios, árboles, depósitos de agua, estanques, elementos para variados problemas que los maestros preparaban con anticipación. Así: en la feria hay un depósito de la forma de un cono truncado; á él puede llegarse por una escalera. Mida Vd. la altura de dicho cono; mida Vd. la distancia de la base al suelo; mida los diámetros; ingenie el medio más rápido y determine con dichas medididas, la capacidad del depósito, el peso del agua y la longitud de la escalera, considerando que en el suelo puede Vd. tomar las dimensiones que le parezca.

Pero, para medir, para las aplicaciones geométricas, la excursión es necesaria solamente en determinados casos. En el aula pueden presentarse infinidad de objetos de los que directa ó indirectamente sea necesario determinar longitudes, áreas ó volúmenes: un tintero, una tiza, la pizarra, la pared, un balín, una patata, una naranja, un lápiz, un cartón recortado, etc. deben ser los motivos cuotidianos de las más interesantes cuestiones, que pongan además, á prueba el ingenio para descomponer ó convertir formas irregulares en formas geométricas y medibles. Si diéramos á nuestros alumnos secundarios, una pera para que determinaran su volumen seguramente se nos contestaría, en la mayor parte de los casos, que no saben hacerlo. La enseñanza de la Geometría no ha respondido á su fin. El maestro, en las series, debe intercalar estos ejercicios, con un pequeño interrogatorio ó cuestionario que conduzca á la solución. V. g.: Se pide á Vd. que determine el volumen de esta pera. Piense Vd. que si la sumerje en un recipiente de vidrio de forma cilíndrica ó cúbica que contenga agua, ésta subirá tanto como.....? ¿Cómo puede Vd. determinar este volumen?

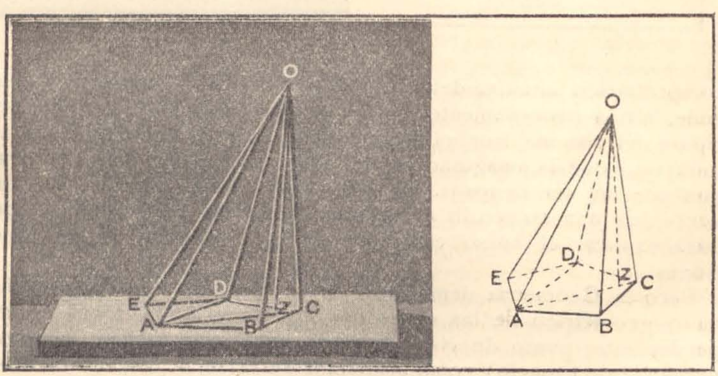
Las series deberán, comprender desde luego, todos aquellos casos que exigen un método indirecto diferente de determinación dentro de lo elemental, pues, son las prácticas que dificultan á menudo las soluciones, si el alumno no está habituado á ellas y es deficiente en las observaciones. Hemos dado, con frecuencia, vidrios recortados para determinar su área total y el niño olvidó, por pequeñas, las superficies de los cantos. Hemos tenido cursos, perplejos ante la determinación del espesor de una tapa ó el diámetro del círculo de la base de un lápiz. Una absoluta incapacidad para imaginar el medio. El maestro debe considerar tales casos y poner al grado en condiciones de salvarlos.

Estos ejercicios se realizan en esta forma: en una de las lecciones semanales, se distribuye, al principio, el material que cada alumno necesita para una labor independiente (en el caso del volumen de la pera, una pera, una bandeja, un medidor de cristal con agua, papel de anotaciones, lápiz y cuestionario; mejor es un laboratorio que el aula ó un salón con mesas); el cuestionario será lo suficientemente explícito para evitar cualquier pregunta. El alumno da comienzo y fin á su tarea sin la intervención del profesor; pocos momentos antes de concluir la hora escolar, el maestro recoge la hoja en que los niños trabajaron y representaron las figuras geométricas del objeto y proceden él y ellos, á volver los elementos al sitio que les corresponde. Por supuesto, que en las primeras lecciones del año, el maestro habría practicado él mismo tales ejercicios en presencia del grado con referencias explicativas respecto á la manera de proceder.

MATERIAL DE ENSEÑANZA. — El método que hemos explicado, que tan buenos frutos da en la escuela normal de Mercedes desde el día que lo implantamos, hace de esto doce años, está concebido para formar el espíritu de observación en un orden muy particular de conocimientos y avivar el de inventiva desde que la Geo-

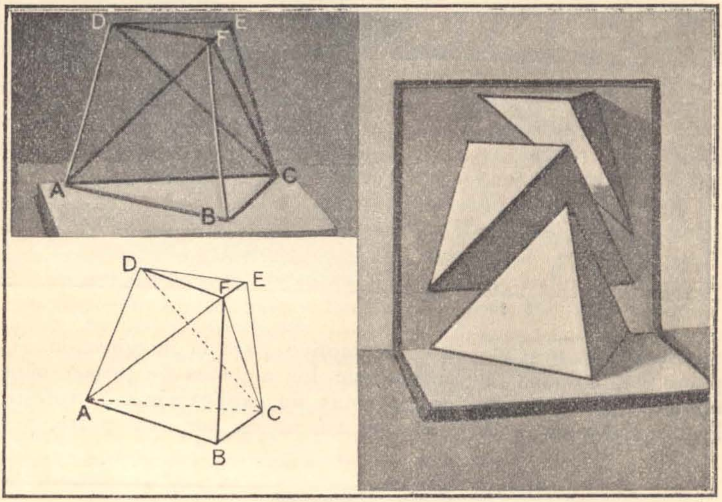


metría ofrece en cada caso, un motivo para la imaginación. A tal punto se disciplina el espíritu que los alumnos de primer año, lo notamos, demostraban los teoremas sin explicación del profesor ni lectura del texto, que estudiarlo así, no es por otra parte, perse-



guir el objeto educativo de esta enseñanza. He aquí cómo la matemática es materia de investigación y cultivo de la voluntad.

En la enseñanza de la Geometría del Espacio, los norteamericanos emplean formas de instrucción que han tendido á difundirse en las escuelas argentinas aunque con medios deficientes. Parten del principio que las construcciones de la Geometría en el espacio no pueden trazarse en relieve, ni con regla, ni á compás; ahora, como consideran esta instrucción indispensable, hacen las construcciones con ayuda de líneas y de planos de material (varillas de acero, figuras transparentes) en gran tamaño es decir, bien visible para toda la clase, en las que los alumnos observan é inducen la verdad, explicando los elementos, comprobando las relaciones y demostrando, por fin, el teorema ó el problema. El examen de las figuras, basta para comprender el mecanismo de la



comprobación intuitiva del teorema acerca del volumen de la pirámide. Estos procedimientos nacidos, como dice BUYSE, de los principios del sistema froebeliano, se justifican en la enseñanza primaria toda vez que la imaginación no está preparada para esfuerzos que podrían ser penosos. En este caso, cada escuela debe proveerse de una colección abundante de formas desmontables como para explicar el curso completo de la Geometría á tres dimensiones.

Pero la Geometría demuestra sobre las figuras; representa el valor geométrico de las cosas por figuras y la enseñanza no debe perder este punto de vista si bien, para comprender recurra á veces (la de espacio) como acabamos de verlo, á proyecciones estereoscópicas, á construcciones de cartón y arcilla, á combinaciones de hilos, etc.; todo esto no debe ser sino auxiliar para aquellas inteligencias de imaginación deficiente y no elementos necesarios ó fundamentales de la demostración.

Por otra parte, nunca lamentaremos lo bastante ese precioso tiempo malgastado en construir con una paciencia digna de mejor empleo, cubos, tetraedros, cilindros, conos de cartulina, cartón, madera, hojalata, etc. para la idea de forma, tan fácil de fijar con prácticas más expeditivas y á trueque de no sabérsela distinguir en un edificio, en una torre, en un frasco, en un vidrio, en un mueble, en un tubo para aplicar las fórmulas. En cambio, pocas veces se les incita á determinar las formas de las cosas, á descomponerlas en regulares ó medibles y á medirlas. De modo que el material es, desde luego, el que nos ofrece la naturaleza de valor geométrico, que el alumno podrá observar, representar y medir guiado por construcciones de su profesor sin que el grado excursione en grupo, propósito no siempre realizable. La pizarra, después la tiza de colores, la regla métrica y el compás para trazar la figura en las mejores condiciones de observación. El transportador y la escuadra para constatar ciertas medidas y obtenerlas. Por último, la cadena métrica, los jalones, el metro, el decímetro subdividido, una cuerda para medir y trazar figuras en el terreno.

Texto. — Para realizar con éxito la enseñanza de la Geometría, es indispensable, que cada alumno, desde el 2º grado, tenga su libro de *Ejercicios* y *Problemas,* texto único, que sea para cada grado, á la vez programa, guía y contenido de ejercitación clasificado en series graduadas y recapitulatorias de tal suerte que el maestro nada tenga que crear para realizar de una manera completa esta enseñanza, más sí explicar cuando una interpretación lo exija. El conocimiento se transmite verbalmente y luego se fija por los ejercicios y aplicaciones que indican las series.

El texto carecerá siempre de la amplitud suficiente que requiere la generalización y será, como fijador, instrumento pobrísimo comparado al ejercicio. Formará, por otra parte, un concepto estrecho y rudimentario de la asignatura como método y como contenido.

El programa de cada curso se distribuirá á lo sumo, en 50 series, cada una de diez ejercicios y problemas sobre lenguaje, observación, discriminación, versiones gráficas, problemas gráficos y numéricos. Cada problema será seguido de preguntas é indicaciones que faciliten el análisis cuando éste fuera complicado y pudiera comprometer el empeño del alumno.

La enseñanza de la Geometría tal como la hemos expuesto, prepara para abordar con éxito el estudio razonado de los teoremas en el ciclo secundario. Si bien no es este el lugar indicado, vamos á ocuparnos, por la trascendencia pedagógica que pueda tener, de explicar la estructura del *texto,* de acuerdo con los conceptos desarrollados en este artículo. El teorema no debe, como es de práctica, presentarse desarrollado sino á título de ejemplificación. Debe plantearse por este doble proceso: I Inductivo; II Deductivo. En el primer caso, el alumno *constata* y formula el enunciado; en el segundo, demuestra lo que constata. El camino se recorre en varios pasos; para eludir los esfuerzos inútiles ó contraproducentes del extravío, el alumno es conducido. Es decir, ni el maestro debe hacerlo todo porque entonces el alumno solo ejercitaría la memoria bruta de los conceptos, ni el alumno debe hacerlo todo porque entonces, el exceso de esfuerzo, á menudo penoso, malograría las buenas disposiciones en las que cifra su éxito el aprendizaje. ¿Cómo, pues, el autor presentaría cada cuestión (teorema)? Fácil es comprenderlo. Tomemos como caso, éste: *la suma de los tres ángulos de un triángulo suman dos rectas.* El libro diría:

CUESTIÓN N° 6

I. *Proceso inductivo: a)* Tome Vd. un cartón y recorte tres triángulos diferentes, muy diferentes (hecho).

b) Nomine Vd. los ángulos con letras (*a, b. c; a', b', c'; a'', b'', c''* anotará el alumno, si su lenguaje geométrico ha sido preparado durante su estadía en la escuela primaria).

c) Reproduzca Vd., la forma, en su cuaderno, con regla y compás y nomine los ángulos.

d) Mida Vd., los ángulos y sume los tres de cada triángulo. Anote en su cuaderno.

e) Observe Vd. las sumas. ¿Qué constata Vd.? Generalice, enuncie, escriba lo que enuncia y subraye: es el enunciado de un teorema.

Hasta aquí, el proceso geométrico es primario, porque es el ejercitado en 3er grado, 4o y 5o en multitud de cuestiones.

II. *Proceso deductivo: a)* ¿Cómo se explica Vd. el enunciado que acaba Vd. de comprobar? Va Vd. á demostrarlo.

b) En uno de los triángulos de su cuaderno, á la base, por el vértice opuesto, trace Vd. una paralela.

c) Ahora, anote Vd. todos los ángulos iguales, escribiendo las ecuaciones en la forma que es de práctica hacerlo, escribiendo el teorema en que se funda.

d) Anote, asimismo, la suma que da 2 *R*, escribiendo el teorema en que se funda.

e) ¿Por cambios equivalentes no puede Vd. substituir los ángulos del primer miembro de la última ecuación por los triángulos?

f) ¿Luego?

Entendemos que así es posible presentar un texto con todos los teoremas de la Geometría; esta es la forma que se desprende de los propósitos de esta educación y del espíritu y dictado que hemos expuesto de la materia desde hace muchos años.

BIBLIOGRAFÍA

V. MERCANTE. — Ejercicios y problemas de Geometría, págs. 141; Cabaut y Cía. ed., Buenos Aires.

O. BUYSE. — Méthodes américaines; págs. 759. París.

D. E. SMITH. — The Teaching of Elem. Mathematics; págs. 312; Macmillan N. York.

V. MERCANTE.