De lo ideal a lo real. Cuando los modelos se aproximan a la realidad

Gabriel Guillermo Attilio, IEC EMEIPACIBA ,UTN Regional La Plata,
gabriel_attilio@hotmail.com
Magdalena Pignataro, IEC EMEIPACIBA ,UTN Regional La Plata,
malenapignataro@yahoo.com.ar
Eugenio Devece, IEC EMEIPACIBA,UTN Regional La Plata, IMApEC Facultad de Ingeniería de la Plata. UNLP, eugdvc@gmail.com.

Resumen

El siguiente trabajo desarrolla la articulación horizontal y vertical de las asignaturas Física I, Análisis matemático I y Análisis matemático II correspondientes a la carreras de Ingeniería de la Universidad Tecnológica Nacional regional La Plata.

Estudiaremos la situación problemática de un fluido circulando por una tubería cilíndrica horizontal de sección circular bajo las condiciones de que dicho líquido fluya en régimen laminar y tenga viscosidad constante.

La idea es que los alumnos correlacionen distintos conceptos vistos en primer año en las materias Física I (fuerzas e hidrodinámica) y Análisis I (derivada e integración) y en segundo año en la materia Análisis II (derivadas parciales, ecuaciones diferenciales y campos vectoriales) para resolver el problema planteado.

En primera instancia, durante el desarrollo de Física I, se presentará como mostración áulica la experiencia con un tubo Venturi con fluido ideal (aire) y contrastarlo con otra mostración de un fluido real (agua).

En forma paralela, en Análisis I se le brindan las herramientas que sirven como base matemática para la formulación teórica.

La experiencia se retoma en Análisis II donde se profundizarán los temas de campos vectoriales y ecuaciones diferenciales.

En la experiencia desarrollada durante el 2015 se implemento solo la primera instancia.

Palabras clave— *articulación, modelos, experiencia de laboratorio, trabajo colaborativo*

1. Introducción

Se planteará la situación problemática de un fluido circulando por una tubería cilíndrica horizontal de sección circular bajo las condiciones de que dicho líquido fluya en régimen laminar y tenga viscosidad constante.

La idea es que los alumnos correlacionen distintos conceptos vistos en las materias Física I (fuerzas e hidrodinámica), Análisis I (derivada e integración) y Análisis II (derivadas parciales, ecuaciones diferenciales y campos vectoriales) para resolver el problema planteado.

Para ello, primero se presentará el planteo teórico de la situación hasta llegar al modelo matemático en forma de ecuación en derivadas parciales que se resolverá, bajo condiciones iniciales establecidas, y nos conduzca a la ley de tensión de corte y velocidad del fluido en función de coordenadas cilíndricas. Con estas dos leyes se podrá evaluar en forma teórica el caudal de fluido circulante. Conocida la matemática que representa el caudal circulante, se realizará una mostración del fenómeno que permitirá verificarla la ley resultante.

Desde el punto de vista didáctico la metodología a usar estaría enmarcada dentro de lo llamado Aprendizaje significativo, tema sobre el cual ha trabajado David Ausubel [1].Según este sicólogo y pedagogo, el aprendizaje depende de la llamada " estructura cognitiva " previa del alumno, entendiéndose por estructura cognitiva al conjunto de conceptos e ideas que el sujeto tiene de cierto campo del conocimiento y su organización. Según Ausubel

- " Un aprendizaje es significativo cuando los contenidos son relacionados de modo no arbitrario y sustancial (no al pie de la letra) con lo que el alumno ya sabe. Por relación sustancial y no arbitraria se debe entender que las ideas se relacionan con algún aspecto existente específicamente relevante de la estructura cognoscitiva del alumno, como una imagen, un símbolo ya significativo, un concepto o una proposición " [2].
- "El aprendizaje significativo ocurre cuando una nueva información "se conecta" con un concepto relevante ("subsunsor")[3] preexistente en la estructura cognitiva, esto implica que, las nuevas ideas, conceptos y proposiciones pueden ser aprendidos significativamente en la medida en que otras ideas, conceptos o proposiciones relevantes estén adecuadamente claras y disponibles en la estructura cognitiva del individuo y que funcionen como un punto de "anclaje" a las primeras".
- A manera de ejemplo en física, si los conceptos de sistema, trabajo, presión, temperatura y conservación de energía ya existen en la estructura cognitiva del alumno, estos servirán de subsunsores para nuevos conocimientos referidos a termodinámica, tales como máquinas térmicas, ya sea turbinas de vapor, reactores de fusión o simplemente la teoría básica de los refrigeradores; el proceso de interacción de la nueva información con la ya existente, produce una nueva modificación de los conceptos subsunsores (trabajo, conservación de energía, etc.), esto implica que los subsunsores pueden ser conceptos amplios, claros, estables o inestables. Todo ello depende de la manera y la frecuencia con que son expuestos a interacción con nuevas informaciones. En el ejemplo dado, la idea de conservación de energía y trabajo mecánico servirá de "anclaje" para nuevas informaciones referidas a máquinas térmicas, pero en la medida de que esos nuevos conceptos sean aprendidos significativamente, crecerán y se modificarían los subsunsores iniciales; es decir los conceptos de conservación de la energía y trabajo mecánico, evolucionarían para servir de subsunsores para conceptos como la segunda ley termodinámica y entropía.

  La característica más importante del aprendizaje significativo es que, produce una interacción entre los conocimientos más relevantes de la estructura cognitiva y las

[1] http://www.educainformatica.com.ar/docentes/tuarticulo/educacion/ ausubel/index.html

[2] Ausebel (1983 : 18)

[3] **SUBSUNSORES** :Dentro de una estructura cognitiva...subsunsores = conceptos amplios y claros. Son los conceptos que uno tiene asimilados y son la base para que otros conceptos de rango superior puedan ser comprendi

nuevas informaciones (no es una simple asociación), de tal modo que éstas adquieren un significado y son integradas a la estructura cognitiva de manera no arbitraria y sustancial, favoreciendo la diferenciación, evolución y estabilidad de los subsunsores preexistentes y consecuentemente de toda la estructura cognitiva".

En la Figura 1 se hace un resumen de esta teoria didáctica

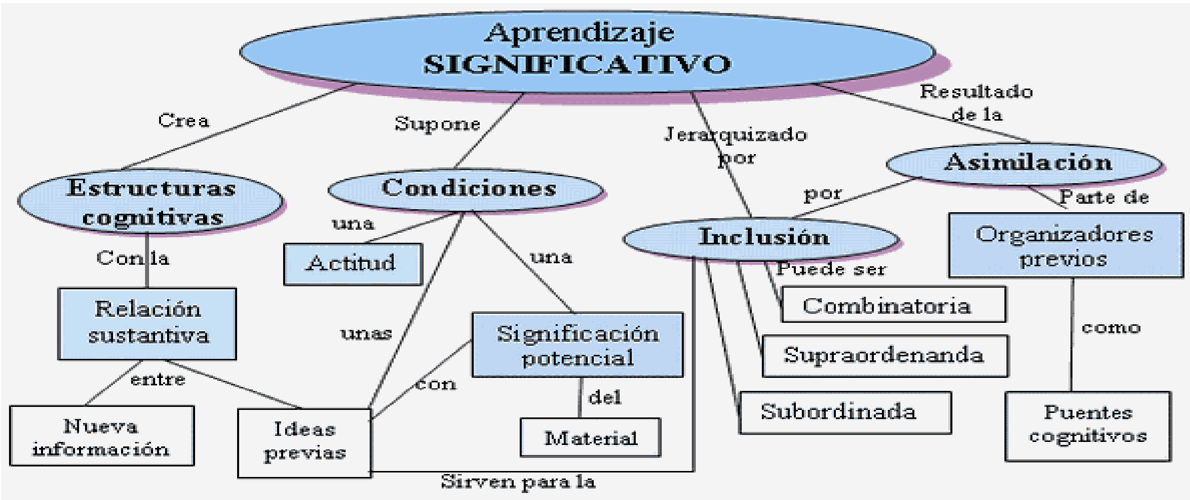

Figura 1. Red conceptual sobre Aprendizaje significativo.
Fuente : http://www.educainformatica.com.ar/docentes/tuarticulo/educacion/ausubel/index.html

Desde el punto de vista teórico, en nuestra regional en la materia Física I se trabaja con el concepto de fluido en **régimen laminar**, considerándose a dicho flujo aquel en el que las partículas de líquido, al desplazarse lo hacen siguiendo líneas que denominamos "líneas de corriente "que constituirán la trayectoria de las partículas de líquido, por lo que la velocidad de las mismas tendrá dirección tangencial a las líneas de corriente. Al ser un fluido laminar, las líneas de corriente no se cortarán. En la materia Análisis II, se trabaja el concepto de campo vectoriales ; las velocidades constituyen un campo vectorial punto a punto y al ser el fluido laminar implica que el rotor de ese campo de velocidades es nulo.

$$\text{rot}\,\vec{V} = \nabla \times \vec{V} = \vec{0}$$

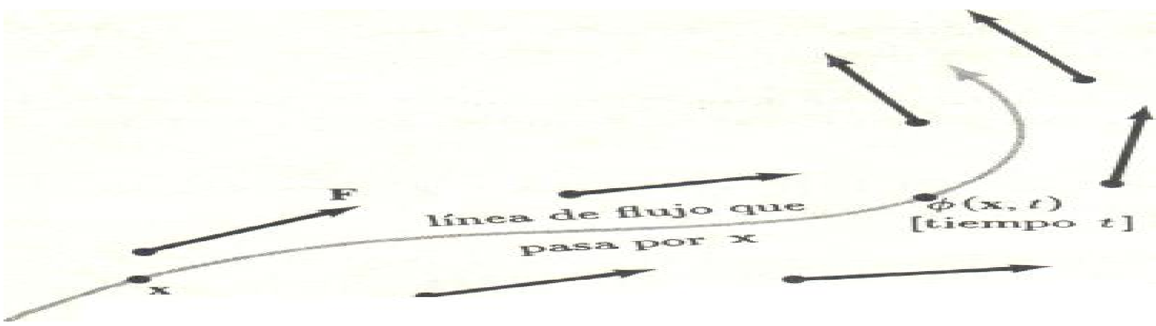

Figura 2. Diagrama de línea de corriente.

Fuente :.Marsden,Jerrold y Tromba,Anthony. Cálculo vectorial

Otra propiedad importante es que el fluido mantendrá sus características propias (densidad, velocidad, viscosidad), sobre cada punto de cada línea de corriente, independientes del tiempo dado que consideraremos un fluido estacionario.
Al tratar con un fluido viscoso, aparecen sobre cada elemento del líquido fuerzas de roce y al mismo tiempo, al trabajar con elementos deformables se considerarán más que las fuerzas los esfuerzos (fuerza por unidad de superficie) originados por las acciones internas entre elementos de fluido .Estos esfuerzos pueden ser de dos clases : tangenciales o normales.

-la fuerza viscosa es lo que da origen que denominaremos "esfuerzos tangenciales "o "tensiones de corte ". Dichas tensiones de corte siguen la llamada "ley de Newton "de los fluidos, que indica que ese esfuerzo es proporcional al gradiente de velocidades en la dirección normal al desplazamiento del fluido, de sentido opuesto y donde la constante de proporcionalidad es llama da "viscosidad del fluido ". Para aclarar este concepto, en la Figura 3 se muestra un par de placas paralelas largas cada una de área A separadas una distancia

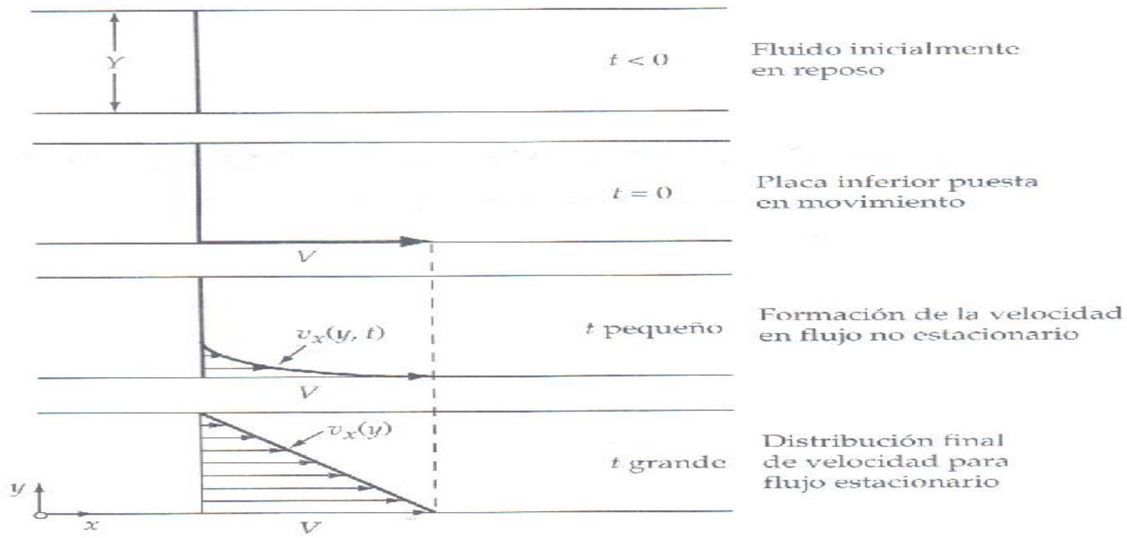

Figura 3.Formación del perfil de velocidades.
Fuente :.Bird,Byron. Fenómenos de Transporte

En el espacio entre ellas se encuentra un fluido, ya sea un gas o líquido. Este sistema esta inicialmente en reposo, pero en el tiempo t=0 la placa inferior se pone en movimiento en la dirección x (+) a una velocidad constante V. A medida que transcurre el tiempo, el fluido adquiere cantidad de movimiento y finalmente se establece el perfil de velocidad lineal en estado estacionario que se muestra en la Figura 3. Cuando se alcanza el estado final de movimiento en estado estacionario, para mantener el movimiento de la placa inferior se requiere una fuerza constante F, cuyo valor medio experimentalmente será

$$F_{media} = \mu A \frac{V}{Y}$$

donde μ se define como la "viscosidad del fluido ".

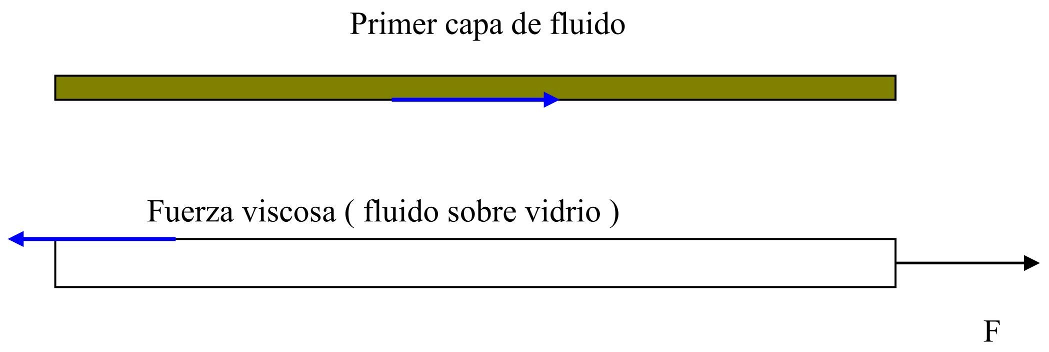

Figura 4.Diagrama de fuerzas sobre una capa de fluido.
Fuente :.elaboración propia

La fuerza que equilibra a la que uno ejerce sobre placa la realiza el fluido y es de tipo viscosa, por lo tanto es tangencial a las caras de cada elemento de fluido como se observa en la Figura 4. El efecto de dicha fuerza es generar un gradiente del campo de velocidades normal a la cara de la placa como el representado en la Figura 5 .

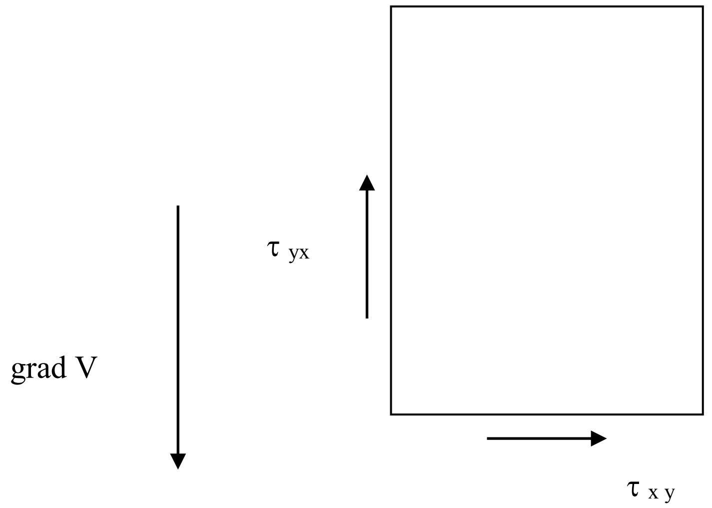

Figura 5.Elemento de fluido y esfuerzo de corte.
Fuente :.elaboración propia

El esfuerzo de corte (τ_{yx}) en la dirección normal a la placa será de sentido opuesto a dicho gradiente, entonces la " ley de viscosidad de Newton " que define dicho esfuerzo es de la forma :

$$\tau_{yx} = -\mu \frac{d v_x}{d y}$$

Esta última ecuación puede interpretarse de otra manera. En la vecindad de la superficie sólida en movimiento en y = 0 el fluido adquiere cierta cantidad de movimiento en la dirección x. Este fluido al mismo tiempo imparte cantidad de movimiento a la capa adyacente de líquido provocando que permanezca en movimiento en dirección x. Por lo tanto la cantidad de movimiento en la dirección x se transmite en dirección y positiva a través del fluido, originando un gradiente de velocidades. Por lo tanto el esfuerzo τ_{yx} se puede considerar como una densidad del flujo de cantidad de movimiento de dirección x en la dirección y.

- la fuerza normal entre elementos de fluidos da origen a la " presión hidrostática " o " esfuerzo normal" que cumple con el " Teorema general de la Hidrostática " que es tratado en Física I .

Situación problemática

1.1 Se estudiara el flujo de un líquido por una cañeria circular de área transversal circular A y radio R y largo del tubo L.

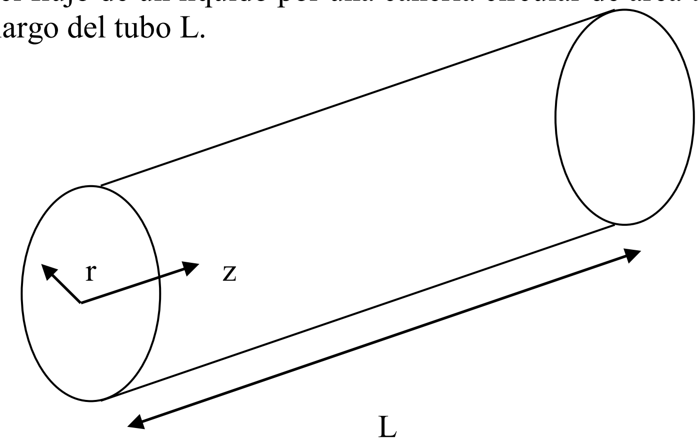

Figura 6.tramo de cañeria analizada
Fuente :.elaboración propia

Establecido el flujo laminar en la cañería, y trabajando con coordenadas cilíndricas, se establecerá un campo de velocidades tal que la velocidad es solo función de la coordenada radial r (v = v (r)). Entre ambas caras del tubo se estableció una diferencia de presiones

$$\Delta P = P_1 - P_2.$$

Para empezar el estudio dinámico ,en la Figura 7 se esquematiza un elemento de cilindro de radio r, ancho Δr y largo L.

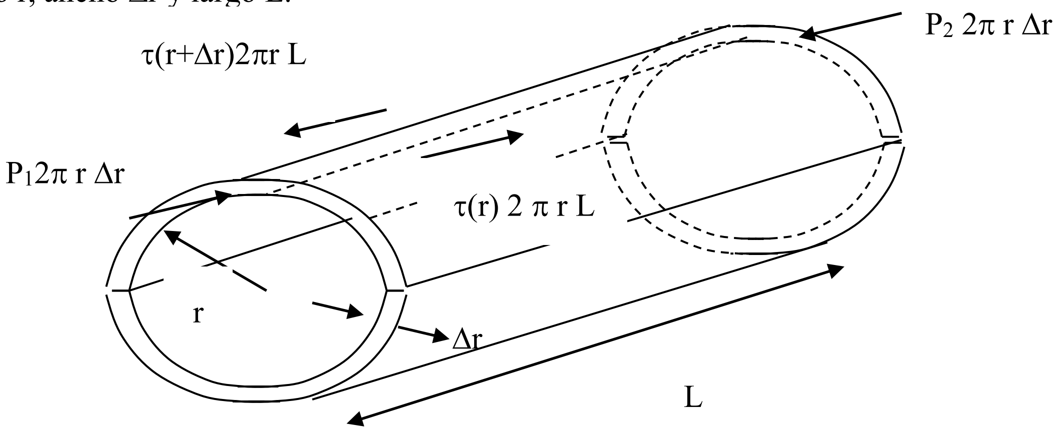

Figura 7.Elemento de cilindro.
Fuente :.elaboración propia

Consideremos que se comporta como una línea de corriente ya que la velocidad sobre ella no depende de la variable z (en el sentido del flujo) , aplicando la segunda ley de Newton en la dirección z tenemos que

$$\sum F_z = 0$$

$$P_1\ 2\pi\ r\ \Delta r - P_2\ 2\pi\ r\ \Delta r - 2\pi\ r\ L\ \tau_{zr}(r+\Delta r) + 2\pi\ r\ L\ \tau_{zr}(r) = 0$$

$$\frac{(P_1 - P_2)}{L} r = \frac{r\ \tau_{zr}(r+\Delta r) - r\ \ \tau_{zr}(r)}{\Delta r}$$

Si consideramos Δr pequeños, aplicando límite cuando Δ r→ 0, por conocimientos de Análisis I y II , la expresión se convierte en una derivada parcial, quedando

$$\lim_{\Delta r \to 0} \frac{(P_1 - P_2)}{L} r = \lim_{\Delta r \to 0} \left[\frac{r\ \tau_{zr}(r+\Delta r) - r\ \ \tau_{zr}(r)}{\Delta r} \right]$$

$$\frac{(P_1 - P_2)}{L} r = \frac{\partial\left[\ r\ \ \tau_{zr}(r)\ \right]}{\partial r}$$

Se obtiene una ecuación diferencial en derivadas parciales de primer orden, cuya solución se puede obtener por variables separables, y en este caso integrando directamente respecto la variable r de un lado y del otro, una primitiva buscada será

$$\frac{(P_1 - P_2)}{2L} r^2 + \mathrm{C} = r\ \ \tau_{zr}(r)$$

$$\frac{(P_1 - P_2)}{2L} r + \frac{\mathrm{C}}{r} = \tau_{zr}(r)$$

De todas las primitivas buscadas necesitamos aquella que en r = 0 de una solución finita, por ello tomamos C=0.Entonces, la función que da la dependencia del esfuerzo de corte con la variable r será

$$\boxed{\frac{(P_1 - P_2)}{2L} r = \tau_{zr}(r)}$$

Conocida la función τ_{zr} (r) , aplicando la ley de Newton de esfuerzos viscosos, obtenemos una nueva ecuación diferencial

$$\tau_{zr} = \tau_{rz} = -\ \mu \frac{\partial \mathrm{v_r}}{\partial \mathrm{r}}$$

$$\frac{(P_1 - P_2)}{2L} r = -\ \mu \frac{\partial\ v(r)}{\partial \mathrm{r}}$$

Se llega a otra ecuación diferencial en derivadas parciales, que de nuevo se resuelve aplicando nuevamente variables separables y una integración directa en ambos términos respecto r, con lo que obtenemos

$$-\ \frac{(P_1 - P_2)}{4L\mu} r^2 + \frac{(P_1 - P_2)}{4L\mu} R^2 = v\ (\ r\ ) - v\ (\ R\ )$$

Aplicamos como condición de borde que v (R) = 0 (el fluido en contacto con la pared del cilindro tiene velocidad nula), entonces obtenemos como resultado

$$\frac{(P_1 - P_2)}{4L\mu}(R^2 - r^2) = v\,(r)$$

Ordenando términos, se obtiene

$$\boxed{\frac{(P_1 - P_2)R^2}{4L\mu}\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) = v\,(r)}$$

Observamos que :

- en la Figura 8 la distribución de velocidades para un flujo laminar incompresible de un fluido newtoniano en un tubo largo es parabólica

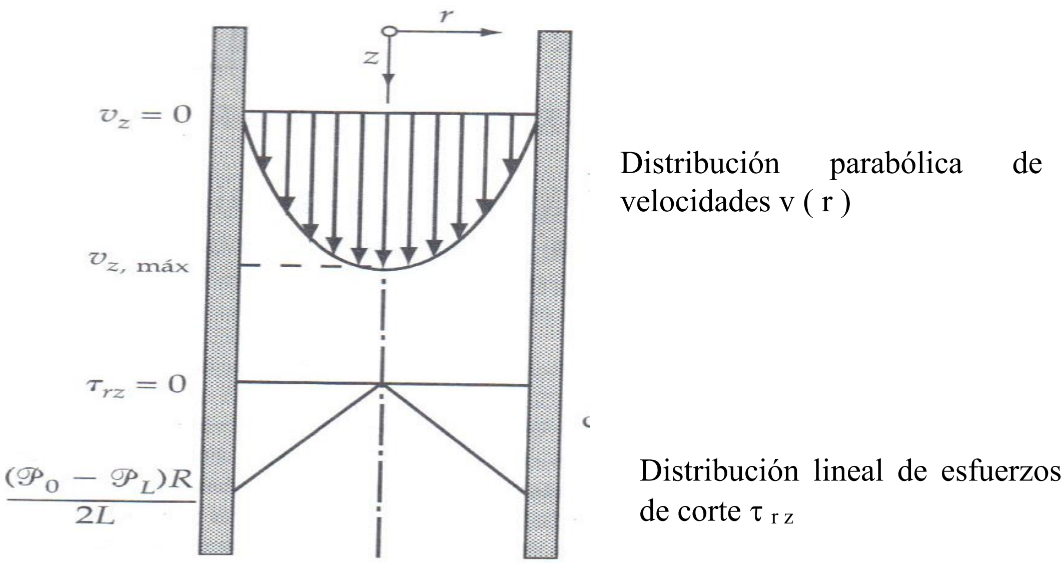

Figura 8.Gráfico de la función velocidad y esfuerzo de corte en función del radio r.
Fuente :.Bird,Byron. Fenómenos de Transporte

- la velocidad máxima ocurre cuando r=0 y vale

$$\frac{(P_1 - P_2)}{4L\mu}R^2 = v_{\text{máx}}$$

-la velocidad media < v > se obtiene dividiendo el caudal volumétrico total por el área de la sección transversal. Esa operación conduce a una integral doble en coordenadas polares, siendo

$$< v > = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^R v(r)\, r\, dr\, d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^R r\, dr\, d\theta}$$

$$< v > = \frac{\left(P_1 - P_2\right) R^2}{8\mu\, L}$$

$$< v > = \frac{1}{2}\, v_{\text{máx}}$$

-el caudal volumétrico de flujo es el producto del área de la sección transversal por la velocidad media < v >, obteniendo

$$Q = \pi \frac{\left(P_1 - P_2\right) R^4}{8\mu\, L}$$

$$que\ \ puede\ medirse\ en\ \left[\frac{m^3}{s}\right] o \left[\frac{m^3}{s}\right] o \left[\frac{lts}{s}\right]$$

fórmula conocida como ecuación de “ Hugen –Poiseville “

2. Materiales y Métodos

A- Area Física

- Experiencia : LEY DE POISEUILLE. RESISTENCIA AL FLUJO

OBJETIVOS

Comprobar la Ley de Poiseuille. Determinar la resistencia al flujo de un tubo de sección circular. Estimar la viscosidad del agua.

a-Arreglo experimental

Consideremos el dispositivo de la figura

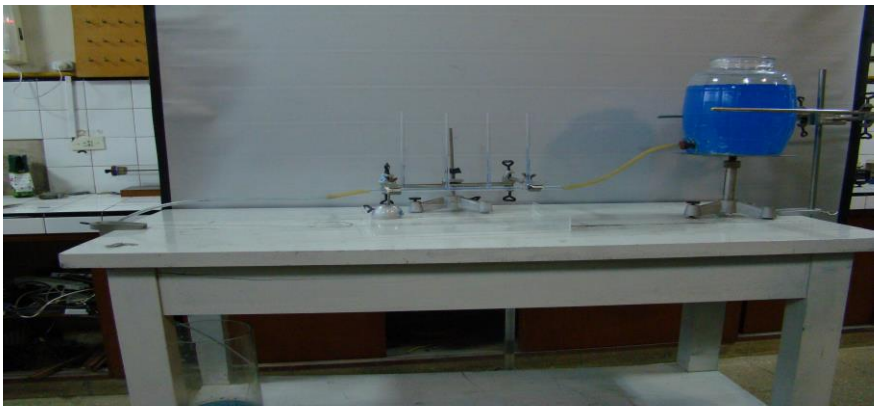

Figura 9.Fotografia del montaje.

Fuente :.Elaboración propia

El dispositivo experimental consta :

Figura 10. Tanque contenedor de fluido.
Fuente :.Elaboración propia

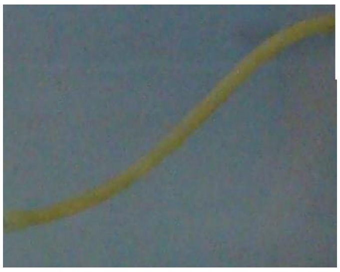

Figura 11 y 12. tubos flexibles de conexión.
Fuente :.Elaboración propia

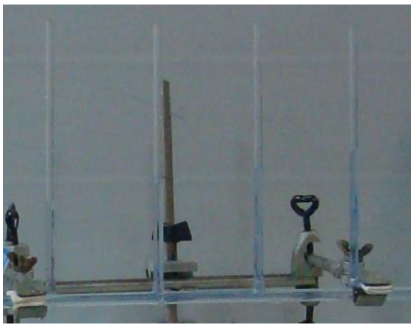

Figura 13. tubo de vidrio con cuatro piezómetros.
Fuente :.Elaboración propia

Figura 14. recipiente graduado receptor del líquido.

Fuente :.Elaboración propia

b-Marco teórico de la experiencia

Según el Teorema de Bernoulli, aplicable a fluidos ideales, la presión de fluido entre el primer piezometro y el ultimo debería ser la misma, por lo tanto la altura en cada uno de ellos debería ser igual

En realidad, debido a los efectos de viscosidad, entre los piezometros se crea una diferencia de presión proporcional al caudal, Q, dependiente de las características del tubo:

$$\Delta P = P_a - P_b = R\,Q \qquad (1)$$

R: resistencia al flujo del tubo.

Si el tubo es de sección constante, circular, la resistencia al flujo, de acuerdo con la Ley de Poiseuille descripta en anteriores párrafos, viene dada por:

$$R = \frac{8\eta L}{\pi r^4} \qquad (2)$$

Siendo :

η : viscosidad del fluido

r: radio del tubo

L : longitud del tubo

Para comprobar la Ley de Poiseuille, (1) , (2), vamos a utilizar un dispositivo como el de la figura A.

c- Desarrollo de la experiencia

Al circular el fluido (en nuestro caso, agua), proveniente del depósito, éste ascenderá por los piezómetros hasta alcanzar unas alturas h_A (en el primero) y h_B, (en el último), respectivamente. Podemos expresar las presiones en A y en B, en función de estas alturas, como:

$$\left.\begin{aligned} P_A &= P_o + \rho.g.h_A \\ P_B &= P_o + \rho.g.h_B \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

siendo ρ : densidad del agua, y Po : presión atmosférica

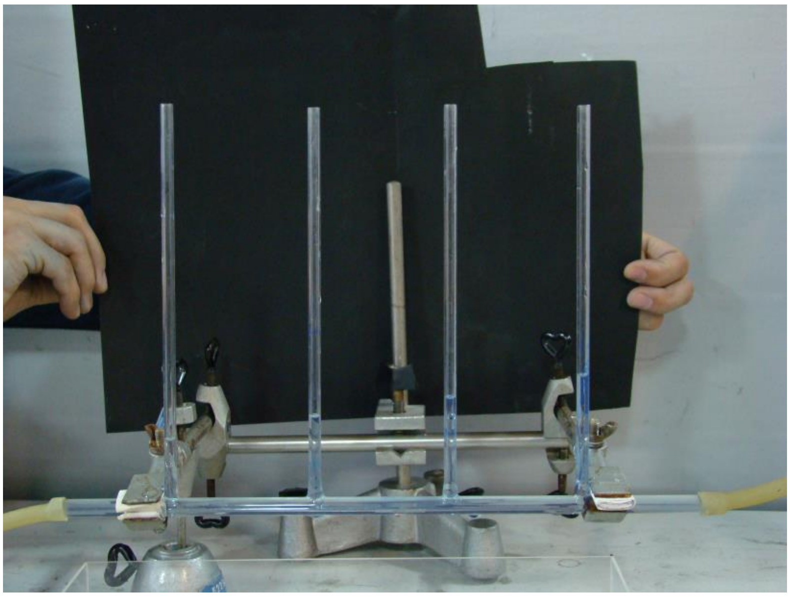

Figura 15. Vista de piezómetros durante la experiencia
Fuente :.Elaboración propia

Según esto, la pérdida de presión entre los tubos verticales extremos vendrá dada:

$$\Delta P = \rho.g.(h_A - h_B) = \rho.g.\Delta h \qquad (4)$$

Basta, pues, medir Δh para , de acuerdo con la ecuación (4), determinar ΔP.

Por otro lado, si se mide el volumen de líquido acumulado en el recipiente inferior aforado midiendo la altura indicada y el tiempo en lo cual ésto sucede, obtendremos el caudal volumétrico Q que circula por el tubo realizando el cociente entre el volumen V (A_{rec} . h_{afor}) que se desagua y el tiempo en dicho intervalo :

$$Q = V / T \qquad (5)$$

Si sustituímos las expresiones (4) y (5) en (1), obtenemos finalmente:

$$\rho \cdot g \cdot \Delta h = R\ V/T \qquad (6)$$

Esta última expresión, que es la que vamos a comprobar directamente en nuestro experimento, se puede escribir como:

$$\Delta h = a \,.\, V + b \qquad (7)$$

$$\text{donde } a = \frac{R}{\rho g T} \quad \text{y} \quad b = 0$$

d- Consideraciones para realizar la experiencia :

Para realizar nuestro estudio seguiremos los siguientes pasos:

1) Medir el área del recipiente de caída
2) Altura del líquido colectado
3) Tiempo que tarda en llegar a esa altura
4) Alturas alcanzadas en los piezómetros A y B
5) De una tabla, buscar la viscosidad del líquido en estudio, en este caso agua

3.**Resultados y Discusión**

En una de las experiencias realizadas se obtuvieron los siguientes valores

TABLA1- Resultados de una experiencia

Tiempo (s)	h agua colectada (cm)	h piez A (cm)	h piez B (cm)	Caudal volumétrico(cm3/s)	Dp (dinas/cm2)	Ley de Poiseville
10	8,7	5,4	3,9	27,30	1471,5	21,15
30	10	5,5	4	24,09	1471,5	21,15
45	12,5	5,5	4,1	25,24	1373,4	19,74
60	14,1	5,6	4,1	22,81	1471,5	21,15
71	15	5,7	4,1	21,06	1569,6	22,56
80	16	5,8	4,3	20,65	1471,5	21,15
90	17	5,8	4,5	20,08	1275,3	18,33
100	17,9	5,8	4,5	19,45	1275,3	18,33
110	18,3	5,8	4,5	18,15	1275,3	18,33
120	19,5	5,9	4,5	18,25	1373,4	19,74
130	20,5	5,9	4,6	18,07	1275,3	18,33
140	21,3	5,8	4,6	17,67	1177,2	16,92
150	22,1	5,8	4,6	17,32	1177,2	16,92

Radio del tubo(cm)	0,4		
Longitud del tubo(cm)	34,9	R(resistencia al flujo)	34,78
Diámetro del cubo(cm)	14,3		
Densidad agua(g/cm3)	1		
g (cm/s2)	981		
Viscosidad (dinas.s)	0,010019		
Altura de líquido inicial	7		

Fuente : elaboración propia

Se puede apreciar que el caudal volumétrico obtenido de la experiencia se acerca a los valores del caudal volumétrico predicho por la ley de Poiseville.

B- Area Análisis Matemático I y II

En la guia de Análisis Matemático I se presentan ejercicios de aplicación del tema desarrollado. Por ejemplo, de la guia. 3 ejercicio número 8

En un movimiento rectilineo la ecuación horaria x (t) viene dada por la función

$$x(t)\begin{cases} 3+4t-t^2 \text{ si } 0\leq t\leq 4 \\ -t+7 \text{ si } t>4 \end{cases}$$

donde x se mide en metros y t en segundos.

a- Analizar si esa función es continua en to= 4 s

b- ¿ Existe la velocidad en to= 4 s ?

c- Evaluar la función velocidad ($v(t)=\dfrac{dx}{dt}$ ***)***

En la guia de Análisis matemático II se presentan ejercicios de aplicación del tema desarrollado. Por ejemplo, de la guia. 5 ejercicio número 4

Sea un campo de velocidades dado por $\vec{v}(x,y)=\dfrac{y}{x+y}\,\hat{i}-\dfrac{x}{x+y}\,\hat{j}$ ***analizar si el flujo representado por dicho campo es laminar***

3. Conclusiones y recomendaciones

La experiencia fue realizada en primera instancia en la cursada 2015 de Física I como una mostración áulica.. Al fin de la cursada se propuso a los alumnos que realicen la experiencia descrita, asistidos por personal de laboratorio, obteniéndose en uno de los grupos los valores remitidos en la tabla 1.

Durante la mostración áulica también se desarrollo la mostración de flujo de aire en un tubo Venturi , a fin de que los alumnos comparasen la existencia de una diferencia de altura en un manómetro colocado en dos secciones consecutivas iguales y que observasen los resultados de ambas mostraciones : en el caso del agua , se notaba una diferencia de altura entre dos piezómetros consecutivos; en cambio, en el caso del flujo de aire no se encontró diferencia de altura apreciable. Como conclusión, los alumnos pudieron comparar dos modelos distintos de fluidos : aproximación de fluido no viscoso ideal (caso aire) y fluido viscoso real (caso agua).

Faltaria en esta experiencia realizar un estudio de incertezas, que en primera instancia al ser una experiencia de carácter áulica no se hizo pero si se menciona al realizarla. Queda en un futuro la incorporación el tratamiento de las incertezas en caso de que esta experiencia se realice como práctico de laboratorio.

Artículando con Análisis Matemático I se ejercieron ejercicios relaciionados con el tema

Esto permite al docente analizar un modelo más cercano a la realidad a medida que el estudiante adquiere herramientas más completas. En Análisis II al analizar campos vectoriales (como se visualiza en el ejercicio indicado en el trabajo) y ecuaciones diferenciales, permite retomar la experiencia desde un punto de vista matemática más formal.

Las prácticas de laboratorio en Física así como las mostraciones áulicas permiten que el alumno adquiera habilidades ya sea para la puesta en funcionamiento de un determinado dispositivo como la comparación entre distintos modelos teóricos analizados.

4. Referencias

[1] BIRD, BYRON (2011). *Fenómenos de Transporte*. Limusa.Méjico:Capítulo 1-Pág 12 y 57.

[2] MARSDEN ,JERROLD Y TROMBA,ANTHONY. (1991).Cálculo Vectorial.Addison-Wesley.Delawere,EEUU.Pág 219.

[3] GIANCOLI, DOUGLAS (2002). Física para universitarios. Pearson Education, Méjico. Tomo 1,Capítulo 13.

[4] LARSON,ROLAND Y HOSTETLER,ROBERT (2000) . Cálculo y Geometría Analítica.McGraw-Hill.Medellin .Colombia

[5] STEWART, JAMES (2008) Cálculo trascendente temprano. Thomson Brooks/Cole

[6] TIPLER - MOSCA (2006) Física para la ciencia y la tecnología. Vol. 2B Optica. Reverté

[7] P. TIPLER. (1994) Física para la ciencia y la tecnología. Reverté.

[8] RESNICK - HALLIDAY - KRANE. (1980) Física para Estudiantes de Ciencias e Ingeniería. CECSA

[9] SERWAY - JEWET. (2003) Física I. Thomson.Méjico

[10] SEARS; ZEMANSKY, YOUNG, FREEDMAN: (2009). Física Universitaria; Pearson Educación.