La Mecánica de Hertz y la Formulación Temprana de la Mecánica Ondulatoria

Pedro W. Lamberti
FaMAF y CONICET

La Plata -Noviembre 2012

En el volumen III del curso de Física Teórica, Landau (y Lifshitz) expresa:

"La mecánica cuántica ocupa así una posición muy particular en el conjunto de las teorías físicas: contiene a la mecánica clásica como caso límite, y al mismo tiempo tiene la necesidad de este caso límite para su propia fundamentación"

Aquí abordaremos dos cuestiones:

1. ¿Qué raíces históricas tiene esta relación?

2. ¿Qué rol jugo la **formulación de Hertz de la mecánica** clásica en esta relación?

Pero antes…

Hertz´s Mechanics

Three basic ingredients:

Space
Time
Mass

In his new image (BILD) of mechanics,

Hertz distinguishes

- Physical content
- Mathematical form

Physical content: No forces;
No potential energy.

For Newton: Force
For Hamilton: Energy

For Hertz:

When a mechanical system seems to be acted on by forces, it is because it is rigidly connected to another system of hidden masses, whose fast cyclic motions have the same effect as forces in the traditional Newton-Lagrange <u>image</u> of mechanics.

Tratando de avanzar en algunos problemas sobre los fundamentos de la mecánica, Hertz desarrolló una nueva Filosofía de la ciencia

Con base en esa filosofía desarrolló una teoría mecánica

Mathematical form:

Geometrical structure of configuration space:

"The geometry of systems of points"

Devoted to the description of the movement of a system of points, rather than single particles.

In the configuration space he introduce a Riemannian metric:

$$\frac{1}{3}\left(\sum_{i=1}^{3n} m_i\right) ds^2 = \sum_{i=1}^{3n} m_i dx_i^2$$

where: $\{m_{3j+1} = m_{3j+2} = m_{3j+3}\}$

is the mass of the point mass with Cartesian coordinates $\{x_{3j+1}, x_{3j+2}, x_{3j+3}\}$

The point masses can be bound together by constraints expressed by first order differential equations:

$$\sum_{i=1}^{3n} c_{ij} dx_i \quad j = 1,2,\ldots k$$

Some of these constraints can be holonomic (a term invented by Hertz); that is, there exists a function f_j such that

$$f_j(x_1, x_2, \ldots, x_{3n}) = c_j = const.$$

If there exist k holonomic constraint, the number of independent coordinates is reduced to μ=3n-k.

In terms of generalized coordinates, the metric can be written

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{\mu} \alpha_{ij} dq dq_j$$

Hertz allows also non-holonomic constraints.

Example: sphere moving on a plane.

In the Riemannianan manifold Hertz introduces several geometrical notions, specially the concept of angles.

From this notion he can introduce the notion of the straightest path.

The curvature c of the path followed by the system in the 3n dimensional space, is given by the expression:

$$mc^2 = \sum_{i=1}^{3n} m_i \left(\frac{d^2 x_i}{ds^2} \right)^2$$

For a free system, his single postulate is:

“the actual path is the one of least curvature, and it is traversed at uniform rate;

$$\delta(mc^2) = 0$$

Usualmente se consideran tres raíces de la mecánica ondulatoria de Schrödinger

1.- Trabajo de Einstein de 1924

"Teoría cuántica del gas monoatómico ideal"

Einstein rescata la idea de de Broglie sobre ondas de materia. Podría ayudar a entender físicamente a la estadística de Bose-Einstein

2.- Trabajo de Schrödinger de 1922

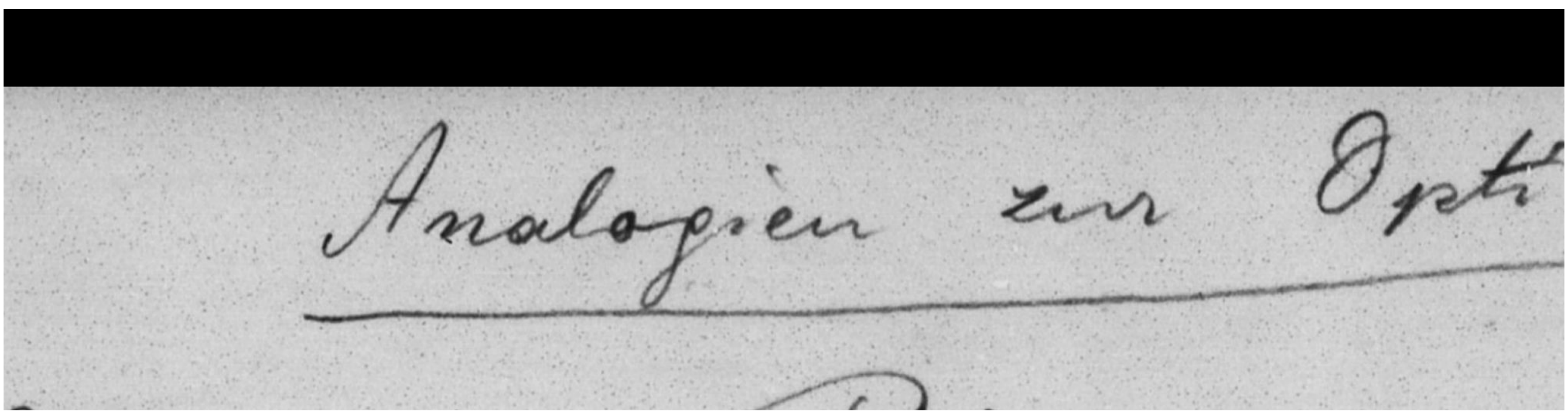
"Sobre una propiedad remarcable de las órbitas de un electrón"

Usa argumentos similares a los de de Broglie para derivar la cuantización de Bohr

3.- Tres notas tituladas *"Mecánica tensorial - analítica"* (probablemente de 1918-1922)

Estudia una extensión de la mecánica clásica inspirada por la Relatividad General y la reformulación de Hertz.

AHQP	Title	AHQP dating
39-3-001	Tensoranalytische Mechanik I	apparently ca. 1914
39-3-002	Tensoranalytische Mechanik II	apparently ca. 1914
39-3-003	Tensoranalytische Mechanik III & Optik inhomogener Medien	apparently ca. 1914
39-3-004	Hertz'sche Mechanik und Einstein'sche Gravitationstheorie	perhaps ca. 1915
39-3-005	*untitled manuscript draft continuing the previous one*	perhaps ca. 1915
40-5-001	Unidentified notes on electromagnetic(?) waves	1925/1926
40-5-002	H-Atom — Eigenschwingungen	evidently late 1925 or Jan. 1926
40-5-003	Eigenwertproblem des Atoms. I.	evidently late 1925 or Jan. 1926
40-6-001	Eigenwertproblem des Atoms. II.	evidently ca. Feb. 1926
40-6-002	Starkeffekt fortgesetzt	probably ca. Feb. 1926



Interés de Schrödinger de extender la mecánica clásica

Mecánica Analítica

Relatividad General

Mecánica Estadística de Boltzmann

Entendimiento Físico de la vieja Teoría cuántica

La analogía óptico-mecánica resultó ser la pieza más útil en este complejo rompecabezas de especulaciones teóricas.

Analogía óptico-mecánica de Hamilton

Optics:	**Mechanics:**
Characteristic function is time of propagation T: $$T = \int \frac{n}{c} ds = 0$$ n refractive index, c light velocity	Characteristic function is action intergral S: $$S = \int \sqrt{2m(E-U)}ds$$ m mass, $E-U$ kinetic energy
Integrand is inverse phase velocity $1/u$: $$\frac{1}{u} = \frac{n}{c}$$	Integrand is particle momentum p: $$p = \sqrt{2m(E-U)}$$
Fermat's principle: $$\delta T = 0$$	**Maupertuis's principle of least action:** $$\delta S = 0$$
This implies: Light rays are orthogonal to surfaces of equal time T (wave fronts).	This implies: Particle trajectories are orthogonal to surfaces of equal action S.

Analogía óptico - mecánica

$$H\left(q_k, \frac{\partial S}{\partial q_k}\right) = E$$

$S(q_k, E)$ Función Característica:
depende de las coordenadas, de la energía y de los puntos extremos.

Es una generalización de la acción.

En mecánica $$\frac{\partial S}{\partial q_k} = p_k : momento$$

En óptica $$\frac{\partial S}{\partial q_k} = inversa\, de\, la\, velocidad\ de\ fase.$$

En el año 1926, en el volumen 79 de los Annalen der Physik,
E. Schrödinger publica dos trabajos (parte I y parte II) con el título:

"La Cuantización como un Problema de Valores Propios"

La primera parte comienza con la ecuación de Hamilton

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = E$$

Luego reemplaza la acción clásica por la función ψ la transformación

$$S = K \log \psi$$

K es una constante con dimensiones de acción

$$H\left(q, \frac{K}{\psi}\frac{\partial \psi}{\partial q}\right) = E$$

$$\left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2 - \frac{2m}{K^2}\left(E + \frac{e^2}{r}\right)\psi\right] = 0$$

Las soluciones de esta ecuación, finitas y únicas en todo lugar, se dividen en dos clases

a) Para E negativo

$$E = -\frac{2\pi^2 me^4}{h^2 n^2}, n = 1,2,3,...$$

b) Todo valor positivo E>0

Todo bien, pero no le gustan los fundamentos…

La primera sección de la parte II tiene el título:

La Analogía Hamiltoniana entre Mecánica y Óptica.

"*Antes de continuar considerando el problema de valores propios para otros sistemas especiales, echaremos más luz sobre la correspondencia general que existe entre la ecuación diferencial de Hamilton-Jacobi de un problema mecánico y la ecuación de ondas "aliada", es decir:*

$$\nabla^2\psi + \frac{2m}{K^2}\left(E + \frac{e^2}{r}\right)\psi = 0$$

Schrödinger hace dos anotaciones importantes:

1) *La conexión interna entre la teoría de Hamilton y el proceso de propagación de una onda, para nada es una nueva idea… y la ecuación de Hamilton Jacobi expresa el principio de Huygens para esta propagación ondulatoria.*

2) Lamentablemente esta poderosa y crucial concepción está privada, en la mayoría de las reproducciones más modernas, de su hermosa…

Aquí cita a Felix Klein comentando "… quien de 1891 repetidamente desarrolló la Teoría de Jacobi a partir de consideraciones cuasi-ópticas en un espacio no-euclídeo Mayor"

Desarrollo:

Reescribe de una manera un poco distinta a la ecuación de Hamilton:

W: acción, es decir la integral temporal de la función de Lagrange T-V

$$2T\left(q_k, \frac{\partial W}{\partial q_k}\right) = 2(E - V)$$

E: constante arbitraria de integración.

La última ecuación, dice Schrödinger, "…puede ser expresada simplemente si hacemos uso del método de H. Hertz. Resulta, como toda aserción geométrica en el espacio de configuración (espacio de las variables q), especialmente simple si introducimos en este espacio una métrica no-euclídea por medio de la energía cinética del sistema.

$$ds^2 = 2T\left(q_k, \dot{q}_k\right)dt^2$$

Supone que existe una relación entre la trayectoria de una partícula en mecánica y la propagación de un frente de onda en óptica clásica

Si los frentes de onda están dados por la ecuación $S = const$

con gradiente $$\left| grad\ S \right| = \sqrt{2(E-V)}$$

Entonces ellos se propagan con velocidad de fase u $$u = \frac{ds}{dt} = \frac{E}{\sqrt{2(E-V)}}$$

$$0 = \delta \int_{P_1}^{P_2} \frac{ds}{u} = \delta \int_{P_1}^{P_2} \frac{ds\sqrt{2(E-V)}}{E} = \delta \int \frac{2T}{E} dt$$

Fermat

Maupertuis

La ecuación de ondas que describe el movimiento del frente de onda

$$div\ grad\ \psi + \frac{1}{u^2}\frac{\partial^{2\psi}}{\partial t^2} = 0$$

en el espacio de Riemann al estilo Hertz, es idéntica a la ec. De Schrödinger

$$\psi = \exp(2\pi i \nu t)\psi_q \qquad \frac{1}{\nu} = período$$

Es decir, a partir de la analogía mecánico – óptica pudo deducir la ec. de la Mecánica ondulatoria generalizada

$$div\ grad\ \psi_q + \frac{8\pi^2}{h^2}(E - V)\psi_q = 0$$

W. Heisenberg

En su último trabajo antes de su invención de la mecánica matricial, muestra una clara influencia de la Mecánica de Hertz.

Similitudes en la terminología:

Recurrentemente Heisenberg usa expresiones como

"modelo simbólico, tipo imágenes"

Ejemplo:

"De modo de utilizar esta hipótesis en el presente estado de la teoría cuántica, uno debe apoyarse en el uso de un modelo simbólico, tipo imágenes, las cuales son formadas más o menos por el comportamiento de los electrones en la teoría clásica"

Contrastar con lo dicho por Hertz en la introducción de su Mecánica:

"*Formamos para nosotros mismos imágenes o símbolos de los objetos externos*"

Estado de cosas en la teoría cuántica (1900-1925)

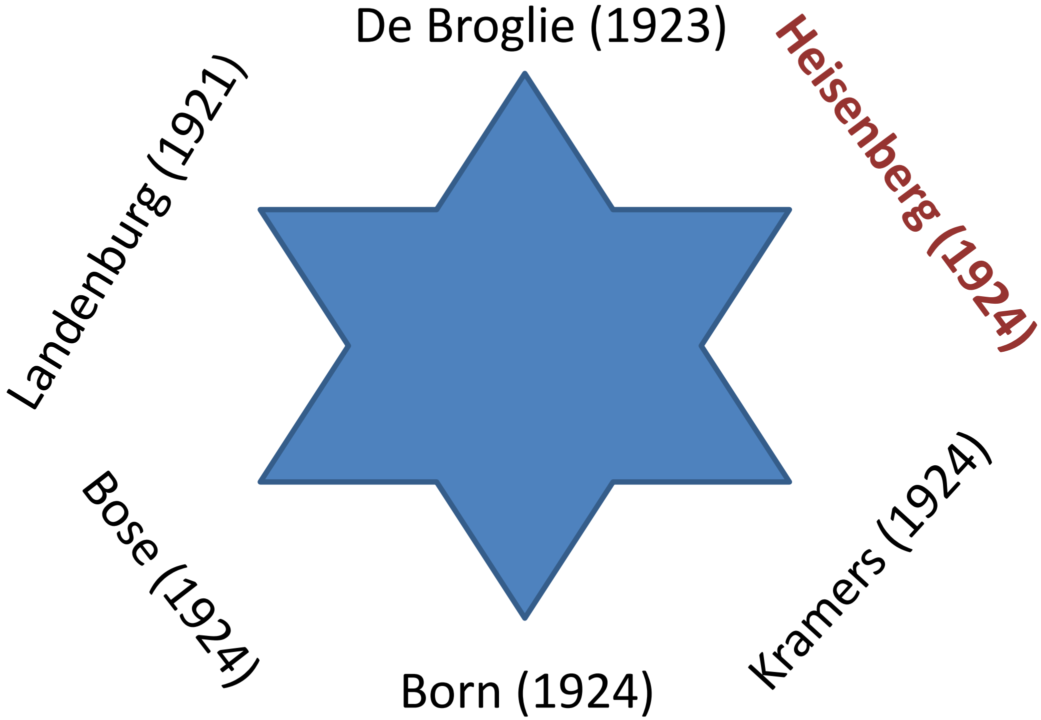
1900 Max Planck deriva la ley de radiación del cuerpo negro
1905 A. Einstein introduce el concepto de cuanto de luz, avanza sobre el problema del calor específico de los sólidos (1906) y demuestra la naturaleza doble (cuanto-onda) de la radiación.
1910 Arthur Haas propone el primer modelo de la estructura atómica que involucra el cuanto de acción.
1913 Niels Bohr explica la estructura atómica - molecular y la radiación emitida por ellos sobre la base de un modelo teórico cuántico de un núcleo y electrones.
1915 A. Sommerfeld extiende la teoría de Bohr.

A partir de 1913 lo fundamental es que el átomo se pensaba como un sistema planetario, con un núcleo y electrones orbitando alrededor de él, con órbitas discretas determinadas por la condición de cuantificación de Bohr-Sommerfeld.
El principio de correspondencia de Bohr (1918) permitía explicar la organización de los elementos químicos en el sistema periódico (1921-1922).

Pero este modelo fallaba aún para los sistemas más simples (átomo de He, ión de H, molécula de H)

LA VIEJA TEORÍA CUÁNTICA TENÍA QUE SER REEMPLAZADA POR UNA COMPLETAMENTE NUEVA

Algunos elementos de esta nueva teoría se insinuaban en nombres tales como



"Este cultivo de hipótesis ha resultado inmanejable, y para tratar con él fue necesario ir a través de cálculos complejos… Así en esa época el dominio del **electromagnetismo** *había resultado en una selva sin senderos. Hechos observados y deducciones a partir de teorías excesivamente dudosas, fueron entremezclados todos juntos."*

Hermann von Helmholtz