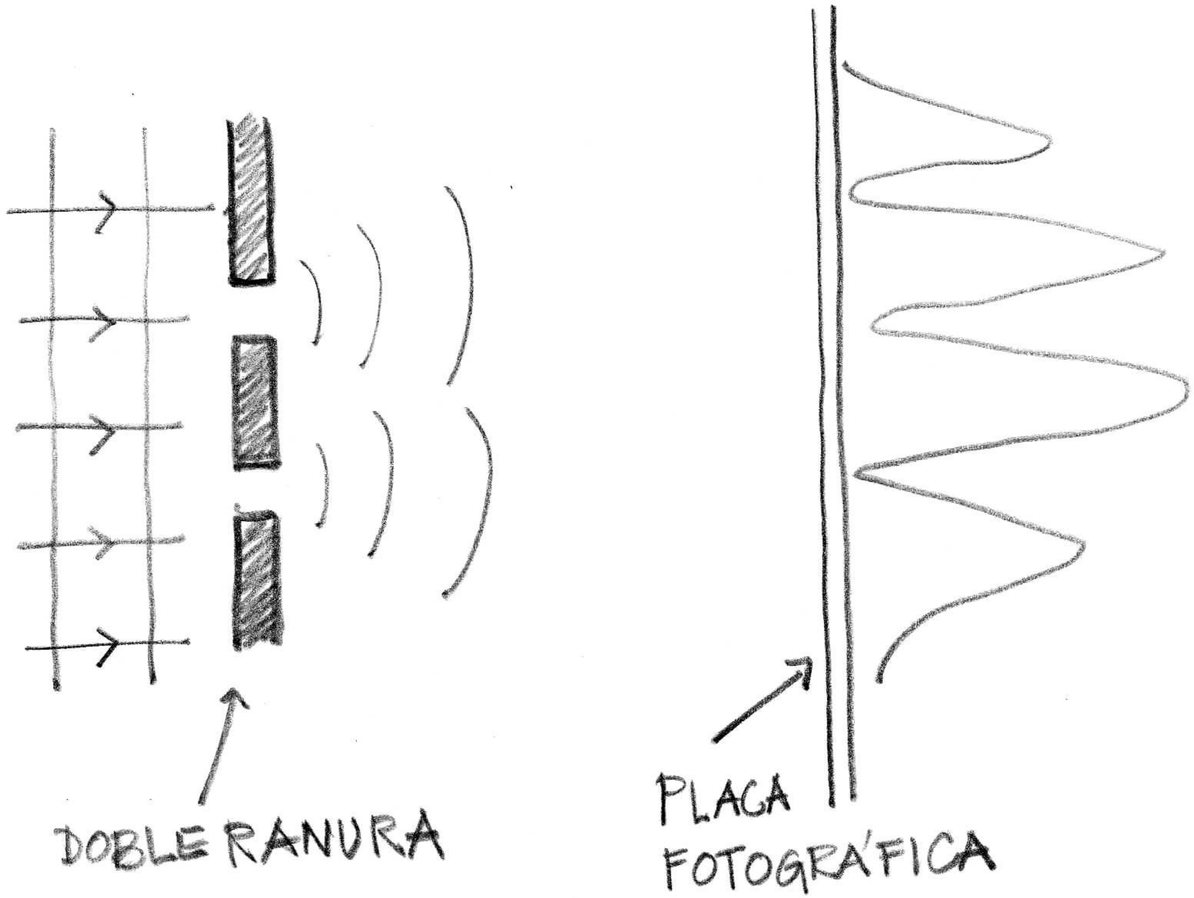
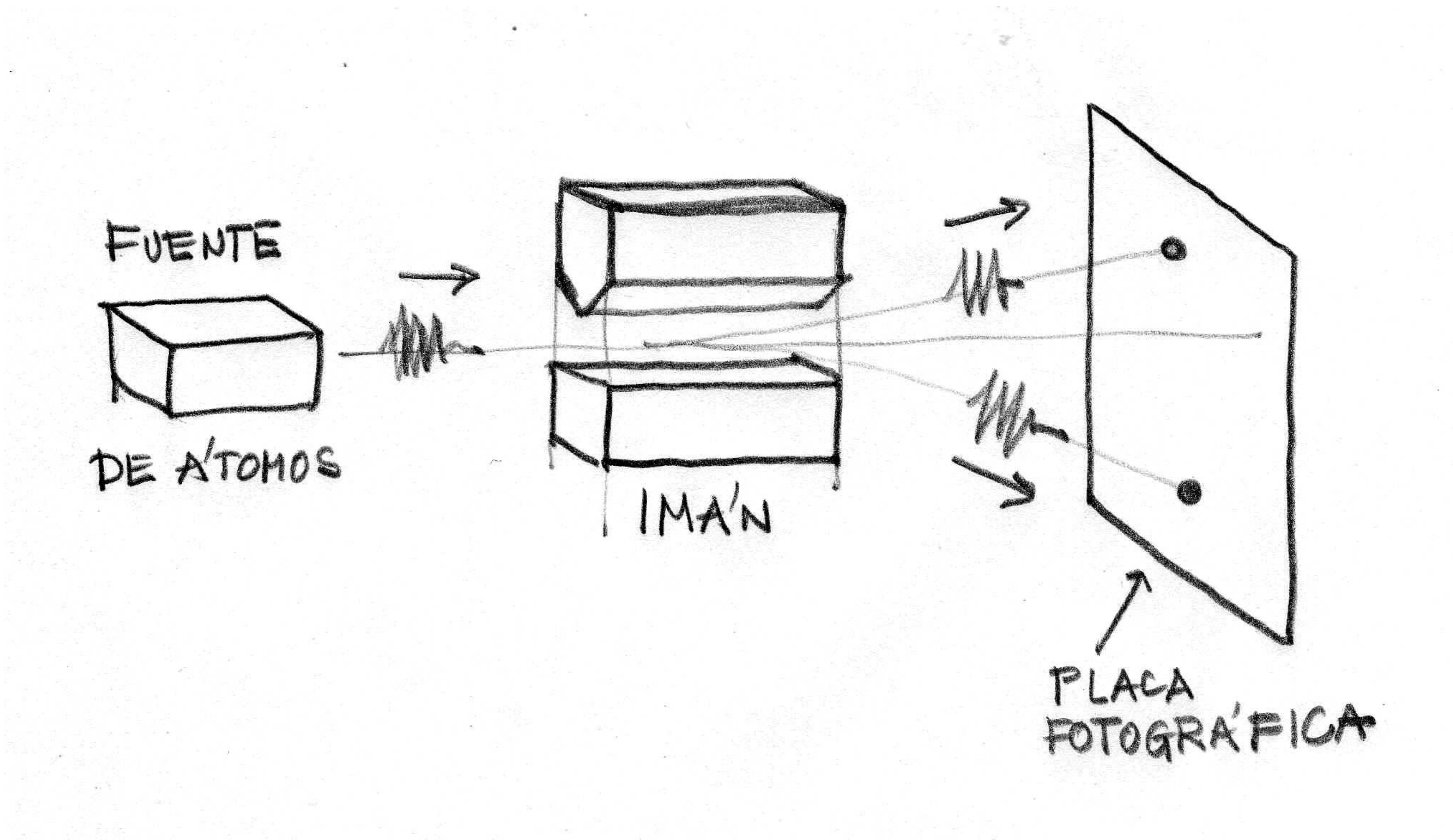
HISTORIAS CUÁNTICAS

Leonardo Vanni[1] y Roberto Laura[2]

[1] Facultad de Ciencias Exactas y Naturales (UBA). idaeos@gmail.com
[2] Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (UNR). rlaura@fceia.unr.edu.ar



“No se puede decir por cual ranura pasó en t_1 la partícula que produce una mancha en la película fotográfica en $t_2 > t_1$”.



"Si al tiempo t_2 hay una mancha en la parte superior de la placa, entonces en el tiempo $t_1 < t_2$ había un átomo con spin hacia arriba".

HISTORIAS EN MECÁNICA CLÁSICA

Γ: espacio de las fases

Una propiedad p se representa con $C_p \subset \Gamma$

Densidad de probabilidad al tiempo t:

$$\rho_t\colon \Gamma \longrightarrow [0,\infty) \subset \mathbb{R}, \quad \int_\Gamma \rho_t(x)dx = 1$$

Probabilidad de la propiedad p al tiempo t:

$$Pr_t(p) \equiv \int_{C_p} \rho_t(x)dx$$

Ley de movimiento: $x(t') = S_{t't}\, x(t), \quad (x \in \Gamma)$

$$\rho_{t'}(x) = \rho_t(S_{t't}^{-1}\, x)$$

Si p' es la traslación temporal de p desde t hasta t', se cumple:

$$C_{p'} = S_{t't}\, C_p, \quad Pr_t(p) = Pr_{t'}(p')$$

Historia:

propiedades $p^1, \dots, p^n$ en $t^1 < \cdots < t^n$, $h = (p^1, \dots, p^n)$

Relación de orden:

$h \leq h_*$ si $C_{p^1} \subset C_{p_*^1}, \dots, C_{p^n} \subset C_{p_*^n}$

Conjunción:

$$h \wedge h_* \equiv Inf(h, h_*) = (p^1 \wedge p_*^1, \dots, p^n \wedge p_*^n),$$

$$C_{p^j \wedge p_*^j} = C_{p^j} \cap C_{p_*^j}$$

Disjunción:

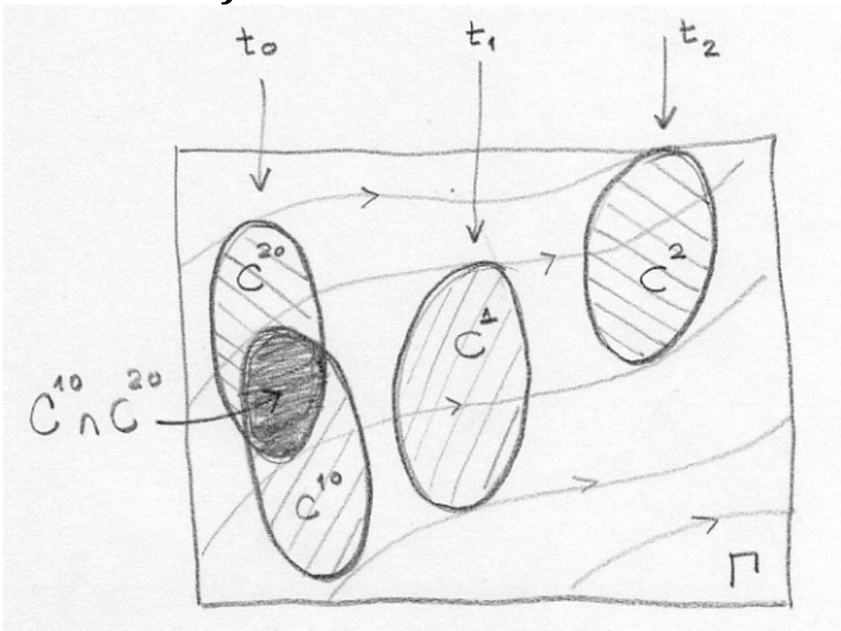
$$h \vee h_* \equiv Sup(h, h_*) = (p^1 \vee p_*^1, \dots, p^n \vee p_*^n),$$

$$C_{p^j \vee p_*^j} = C_{p^j} \cup C_{p_*^j}$$

Complemento: $\overline{h} \equiv (\overline{p^1}, \dots, \overline{p^n}), \quad C_{\overline{p^j}} = \Gamma - C_{p^j}$

Es un reticulado distributivo y ortocomplementado de historias

Probabilidad: $$Pr(h) \equiv \int_{C^{10}\cap\ldots\cap C^{n0}} \rho_{t_0}(x)dx,$$
$$C^{j0} \equiv S_{t_0 t_j}\, C^j, \quad (j = 1, \ldots, n)$$



Son probabilidades de Kolmogorov:

i) $0 \le Pr(h) \le 1$

ii) $Pr(h_\Omega) = 1, \quad h_\Omega = (\Omega, \ldots, \Omega), \quad C_\Omega = \Gamma$

iii) $h \wedge h_* = h_0 \Rightarrow Pr(h \vee h_*) = Pr(h) + Pr(h_*)$

$h_0 \equiv (0, \ldots, 0), \quad C_0 = \phi$

HISTORIAS EN MECÁNICA CUÁNTICA

espacio de las fases $\Gamma \longrightarrow$ espacio de Hilbert $\mathcal{H}$

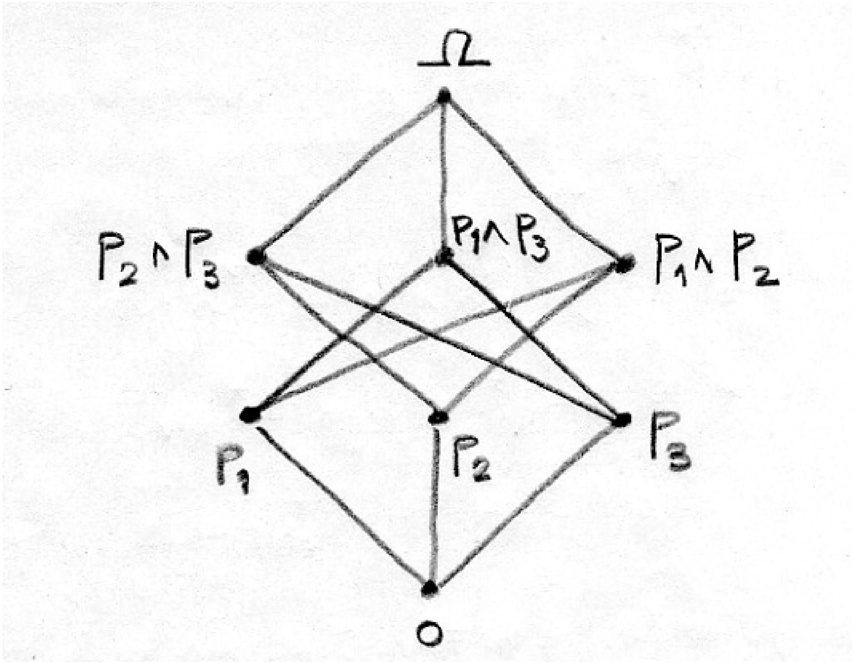
Una propiedad p se representa con un subespacio $\mathcal{H}_p$ de $\mathcal{H}$,
o con un proyector $\widehat{\Pi}_p$ ($\widehat{\Pi}_p^2 = \widehat{\Pi}_p, \mathcal{H}_p = \widehat{\Pi}_p \mathcal{H}$)

Relación de orden: $p \leq p'$ si $\mathcal{H}_p \subset \mathcal{H}_{p'}$
Conjunción: $p \wedge p' = Inf(p, p')$, $\mathcal{H}_{p \wedge p'} = \mathcal{H}_p \cap \mathcal{H}_{p'}$
Disjunción: $p \vee p' = Sup(p, p')$, $\mathcal{H}_{p \vee p'} = \mathcal{H}_p + \mathcal{H}_{p'}$
Complemento: $\overline{p}$, $\mathcal{H}_{\overline{p}} = \mathcal{H}_p^{\perp} = (\hat{I} - \widehat{\Pi}_p)\mathcal{H}$

Es un reticulado ortocomplementado y no distributivo.

Contexto de propiedades cuánticas:

Se obtienen de propiedades atómicas $\{\boldsymbol{p_j},\ \boldsymbol{j} \in \boldsymbol{\sigma}\}$ excluyentes ($\widehat{\boldsymbol{\Pi}}_{\boldsymbol{i}}\widehat{\boldsymbol{\Pi}}_{\boldsymbol{j}} = \boldsymbol{\delta_{ij}}\widehat{\boldsymbol{\Pi}}_{\boldsymbol{j}}$) y exhaustivas ($\sum_{\boldsymbol{i}} \widehat{\boldsymbol{\Pi}}_{\boldsymbol{i}} = \widehat{\boldsymbol{I}}$)



Se obtiene así un reticulado distributivo y ortocomplementado.

Un universo del discurso es siempre un contexto.

Estado al tiempo t**:** $\hat{\rho}_t : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$, $\hat{\rho}_t^\dagger = \hat{\rho}_t$, $Tr\hat{\rho}_t = 1$

Probabilidad de p **al tiempo** t**:** $Pr_t(p) = Tr(\hat{\rho}_t \hat{\Pi}_p)$

Ley de movimiento: $\hat{\rho}_{t'} = \hat{U}(t', t)\, \hat{\rho}_t$

Si p' **es la traslación temporal de** p **desde** t **hasta** t'**, se cumple:**
$\hat{\Pi}_{p'} = \hat{U}(t', t)\hat{\Pi}_p \hat{U}^{-1}(t', t)$, $Pr_t(p) = Pr_{t'}(p')$

Historia:

propiedades $p^1, \ldots, p^n$ **en** $t^1 < \cdots < t^n$, $h = (p^1, \ldots, p^n)$

Relación de orden:

$h \leq h_*$ **si** $\mathcal{H}_{p^1} \subset \mathcal{H}_{p_*^1}, \ldots, \mathcal{H}_{p^n} \subset \mathcal{H}_{p_*^n}$

Conjunción:

$h \wedge h_* \equiv Inf(h, h_*) = (p^1 \wedge p_*^1, \ldots, p^n \wedge p_*^n)$,

$$\mathcal{H}_{p^j \wedge p_*^j} = \mathcal{H}_{p^j} \cap \mathcal{H}_{p_*^j}$$

Disjunción:

$$h \vee h_* \equiv Sup(h, h_*) = (p^1 \vee p_*^1, \dots, p^n \vee p_*^n),$$

$$\mathcal{H}_{p^j \vee p_*^j} = \mathcal{H}_{p^j} + \mathcal{H}_{p_*^j}$$

Complemento: $\overline{h} \equiv (\overline{p^1}, \dots, \overline{p^n}), \quad \mathcal{H}_{\overline{p^j}} = \mathcal{H}_{p^j}^{\perp}$

Es un reticulado no distributivo de historias cuánticas.

Si se construyen las historias con propiedades de un contexto para cada tiempo, el reticulado es distributivo.

PROBABILIDADES DE HISTORIAS:

Para una historia $h = (p^1, \dots, p^n)$ definimos

$Pr(h) \equiv Pr_{t^0}(p^{10} \wedge \dots \wedge p^{n0})$,

donde p^{j0} es la traslación temporal de la propiedad p^j desde t^j hasta el tiempo común t^0 ($\widehat{\Pi}_{p^{j0}} = \widehat{U}\left(t^0, t^j\right)\widehat{\Pi}_{p^j}\ \widehat{U}^{-1}(t^0, t^j)$).

Resulta entonces

$Pr(h) \equiv Tr\left\{\widehat{\rho}_{t^0} \lim_{m\to\infty}\left(\prod_j \widehat{\Pi}_{p^{j0}}\right)^m\right\}$.

Pero estas probabilidades no son de Kolmogorov, a menos que consideremos "contextos de historias".

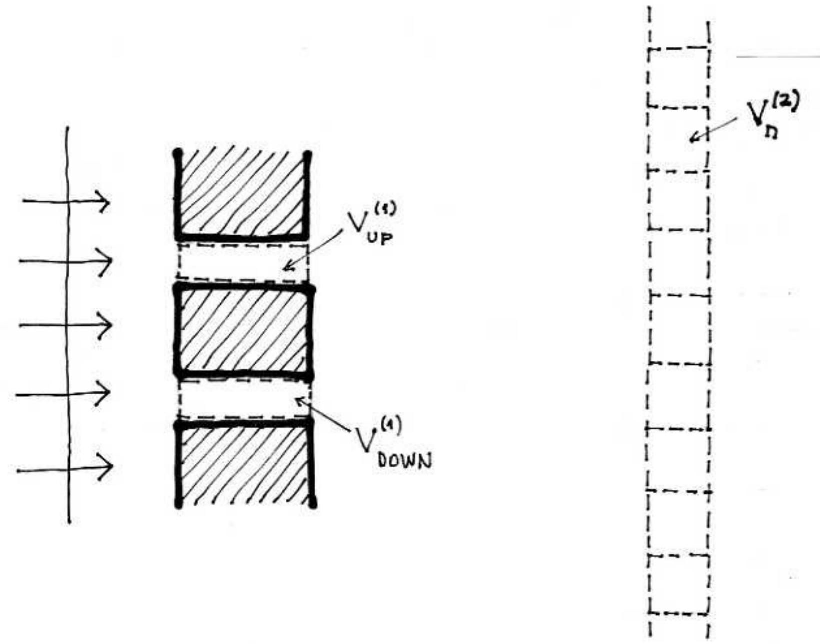
CONTEXTO DE HISTORIAS:

Es una familia de historias formada a partir de un contexto en cada tiempo, donde estos contextos son compatibles al trasladarse a un tiempo común. Compatibles quiere decir que

las propiedades trasladadas a un tiempo común se representan con proyectores que conmutan entre sí.
La probabilidad de una historia historia resulta
$\boldsymbol{Pr(h) \equiv Tr\left\{\hat{\rho}_{t^0} \prod_j \hat{\Pi}_{p^{j0}}\right\}}$.

POSTULADO:
Todo universo de discurso válido para un sistema es un contexto de historias.

Experimento de la doble ranura sin detectores

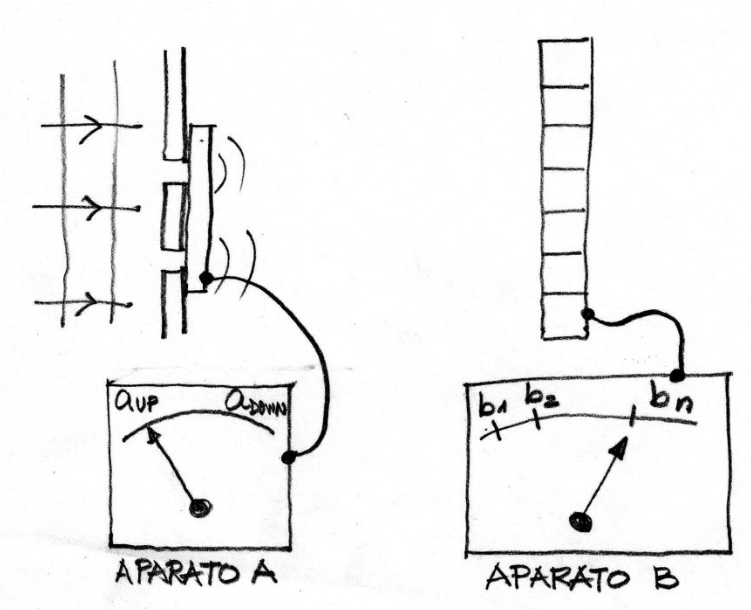


$$\hat{\Pi}_{up}^{(1)} = \int_{V_{up}^{(1)}} d^3r \,|\,\bar{r}\rangle\langle\bar{r}\,|, \qquad \hat{\Pi}_{down}^{(1)} = \int_{V_{down}^{(1)}} d^3r \,|\,\bar{r}\rangle\langle\bar{r}\,|, \qquad \hat{\Pi}_{n}^{(2)} = \int_{V_{n}^{(2)}} d^3r \,|\,\bar{r}\rangle\langle\bar{r}\,|$$

$\hat{\Pi}_{up(down)}^{(1,0)}$ y $\hat{\Pi}_{n}^{(2,0)}$ **no conmutan**

No es posible una descripción que involucre a la partícula en una región de la pantalla al tiempo t_2, y pasando por una de las ranuras al tiempo anterior t_1.

Doble ranura con detectores



$$H = H_S \otimes H_A \otimes H_B$$

Propiedades atómicas al tiempo t_1: $\hat{\Pi}^{(1)}_{a_{up}} = \hat{I}_S \otimes | a_{up} \rangle\langle a_{up} | \otimes \hat{I}_B, \quad \hat{\Pi}^{(1)}_{a_{down}} = \hat{I}_S \otimes | a_{down} \rangle\langle a_{down} | \otimes \hat{I}_B$.

Propiedades atómicas al tiempo t_2: $\hat{\Pi}^{(2)}_{b_n} = \hat{I}_S \otimes \hat{I}_A \otimes | b_n \rangle\langle b_n |$.

$\hat{\Pi}^{(1,0)}_{a_{up}(a_{down})}$ y $\hat{\Pi}^{(2,0)}_{b_n}$ **conmutan**.

Es posible hacer una descripción del sistema que involucre los registros del aparato A al tiempo t_1, y los registros del aparato B al tiempo t_2.