



**UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA**  
**FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS**  
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**

Trabajo de tesis doctoral:

**Utilización de bases wavelet para la resolución  
numérica de Ecuaciones Diferenciales**

TESISTA: LIC. LUCILA CALDERÓN

DIRECTORA: DRA. MARÍA TERESA MARTÍN

CO-DIRECTORA: DRA. VICTORIA VAMPA

AÑO: 2021



*A mi familia*

# Agradecimientos

*En primer lugar, me gustaría agradecer especialmente a mis directoras Tere y Vic por todo su apoyo a lo largo de estos años. Siempre están ahí para guiarme y transmitirme su entusiasmo para seguir adelante, especialmente en los últimos años que fue tan difícil para todes. Chicas: lo logramos!!*

*Gracias a mi familia. Mis padres, hermanes y sobrines me apoyaron durante todo el proceso.*

*No puedo dejar de agradecer a mis amigos de mi vida y de la universidad, son demasiados, no puedo nombrarlos, pero ellos saben quiénes son.*

*Durante mis años de doctorado conocí a muchas personas hermosas del Departamento de Ciencias Básicas de la de Ingeniería y del Departamento de Matemáticas de la Escuela de Ciencias de Precisión, les agradezco su apoyo.*

*Gracias a los miembros del jurado de esta tesis, Dra. María Inés Troparesuky, Dra. Diana Rubio y Dra. Liliana Castro, por tomarse el tiempo para leer en detalle y brindar sus comentarios y opiniones al respecto.*

*Finalmente, un agradecimiento especial a Eduardo Serrano, que está muy presente en mis recuerdos y en mi corazón. Su contribución fue fundamental para el desarrollo de esta tesis.*

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>7</b>
1.1. Objetivos	8
1.2. Desarrollo de la investigación	8
1.3. Organización de la tesis	10
<b>2. Preliminares</b>	<b>11</b>
<b>3. Análisis Wavelet</b>	<b>15</b>
3.1. Análisis Multirresolución (AMR)	16
3.2. Wavelets	17
3.3. B-splines	19
<b>4. Problema de valores de contorno</b>	<b>23</b>
4.1. Formulación variacional	23
4.1.1. Método Wavelet-Galerkin	24
4.1.2. Estimación del error del Método de Galerkin	25
<b>5. Análisis Multirresolución en un intervalo</b>	<b>29</b>
5.1. AMR en $L_2[0, 1]$	29
5.2. B-splines en $L_2[0, 1]$	31
5.3. AMR B-splines en $L_2[0, 1]$	33
5.3.1. Relación de dos escalas	33
5.4. AMR B-Splines Cúbicos en $L_2[0, 1]$	37
<b>6. Diseño de una base spline wavelet sobre el intervalo</b>	<b>41</b>
6.1. Motivación	41
6.2. Construcción de una wavelet madre	43
6.3. Bases spline wavelet con derivada ortogonal sobre el intervalo	45
6.3.1. Wavelets de borde	46
6.3.2. Diseño de nuevas wavelets de borde	48
6.3.3. Propiedades de las bases spline wavelet con derivada ortogonal	50
6.3.4. Condicionamiento de la matriz de rigidez	54
<b>7. Resultados Numéricos</b>	<b>57</b>
7.1. Aplicación de las bases B-spline wavelet	57
7.2. Estimación del error	59
7.3. Algoritmo de aproximación a la solución	59

## ÍNDICE GENERAL

---

7.4. Ejemplos . . . . .	60
<b>8. Conclusiones y trabajos futuros</b>	<b>65</b>
<b>Apéndice A. Funciones de escala B-splines cúbicas</b>	<b>67</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>80</b>

# Capítulo 1

## Introducción

El análisis wavelet ha generado un gran interés en la investigación tanto teórica como aplicada durante los últimos años. Los conceptos para comprender la teoría wavelet fueron proporcionados por Y. Meyer, S. Mallat, I. Daubechies y muchos otros. Desde entonces, se han desarrollado diferentes aplicaciones de wavelets en áreas de la matemática, ingeniería, física y ciencias aplicadas, tales como el análisis de señales e imágenes, compresión de datos y resolución numérica de ecuaciones diferenciales.

Las wavelets son funciones compactamente soportadas o con decaimiento exponencial, que pueden representar exactamente funciones polinómicas, por lo cual resultan bases atractivas para aproximar soluciones numéricas de ecuaciones diferenciales.

Desde el gran avance, en el que Daubechies ([1],[2]) construyó una familia de wavelets ortogonales con soporte compacto, se han desarrollado diferentes métodos basados en wavelets para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales ([3]-[11]). Dentro de estos métodos podemos destacar los métodos Wavelet-Galerkin ([12],[13]) que tienen buenas características de convergencia y estabilidad. Para obtener soluciones convergentes, precisas y estables de manera eficiente mediante el método de Wavelet-Galerkin, es importante que la matriz del sistema lineal asociado, conocida como matriz de rigidez, sea una matriz rala con número de condición pequeño, por lo cual la elección de la base wavelet es fundamental. Generalmente, existen algunas consideraciones básicas para la elección de la wavelet: ortogonalidad, soporte compacto, propiedades de interpolación, así como la capacidad de representar funciones en diferentes niveles de resolución.

Bases wavelet definidas en la recta real no resultan una herramienta conveniente para la resolución de problemas de valores de contorno, porque en este caso se requiere aproximar la solución en dominios acotados. Por lo cual, es necesario adaptar las wavelets a un intervalo. La construcción de bases wavelet en el intervalo ha sido ampliamente discutida en la literatura y se han desarrollado varios enfoques ([14]-[19]). En particular, Swelden *y col.* [20] proponen un conjunto de herramientas de fácil implementación que permiten obtener wavelets en el intervalo que conservan propiedades de localización, buena aproximación, etc. La idea detrás de estos métodos es partir de wavelets definidas en la recta real y luego conservar la mayoría de las funciones interiores, es decir, las funciones de escala y las wavelets cuyo soporte está contenido en el intervalo; y construir por separado las funciones de escala y wavelets de borde adecuadas.

En los últimos años el interés por construir bases wavelet con propiedades de ortogo-

nalidad más débiles, como las wavelets *semiortogonales* o las wavelets *biortogonales* se ha incrementado. Por ejemplo, a partir de splines cúbicos de Hermite, Dahmen *y col.* [21] diseñaron multiwavelets biortogonales en el intervalo que poseen soporte compacto, exactitud polinomial y tienen momentos nulos. Jia *y col.* [22], obtuvieron multiwavelets de Hermite adaptadas al intervalo  $[0, 1]$ , para resolver la ecuación de Sturm-Liouville con condiciones de frontera de Dirichlet en el intervalo  $[0, 1]$ . Las wavelets en diferentes niveles son ortogonales con respecto al producto interno de las derivadas. Debido a las propiedades de estas bases, se obtienen matrices de rigidez ralas y bien condicionadas. A partir de las funciones splines se han obtenido diferentes wavelets, por un lado Vampa *y col.* [23] han diseñado una base spline wavelet cúbicas semiortogonales adaptadas al intervalo con buenos resultados de convergencia. Por otro lado, Černá *y col.* propusieron diferentes bases spline wavelet biortogonales ([18],[24],[25]).

## 1.1. Objetivos

El propósito general de la presente investigación, es el desarrollo de herramientas y estrategias basadas en la transformada wavelet para su aplicación en la resolución numérica de ecuaciones diferenciales. En particular, se propone construir una base spline wavelet cúbica sobre intervalo, con un requerimiento de ortogonalidad sobre sus derivadas entre distintas escalas de aproximación. El objetivo de esta construcción es que las matrices, provenientes de la discretización del problema diferencial de segundo orden, posean una estructura por bloques y particularmente rala o esparcida, con número de condición pequeño y uniformemente acotado.

## 1.2. Desarrollo de la investigación

La presente investigación parte de una primera experiencia de la autora en el estudio e implementación de técnicas usando wavelets B-splines para la solución de ecuaciones diferenciales parciales de tipo parabólico. Se estudió un método Wavelet-Taylor Galerkin (WGT) para la resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Integrando las ideas de Kumar *y col.* [27] y el método híbrido desarrollado por Vampa *y col.* [28], se propuso un esquema numérico alternativo que combina ecuaciones variacionales y de colocación. El método diseñado condujo a aproximaciones con excelentes propiedades de convergencia. Estos resultados dieron lugar a comunicaciones orales y trabajos publicados en actas de congreso que se enumeran a continuación:

- L. Calderón, V. Vampa y M. T. Martín, *Utilización de bases wavelet en la resolución de ecuaciones diferenciales parabólicas*, 'Primer Encuentro de Estudiantes de grado y posgrado de Matemática Aplicada de la Asociación de Universidades del Grupo Montevideo', Buenos Aires, 2014.
- L. Calderón, V. Vampa y M. T. Martín, *Métodos Wavelet- Galerkin para la resolución de la ecuación del calor*, 'Reunión anual de la Unión Matemática Argentina', San Luis, 2014.

- L. Calderón, V. Vampa y M. T. Martín, *B-splines en el Método Wavelet- Taylor-Galerkin*. Anales del 'V Congreso de Matemática Aplicada Computacional e Industrial', MACI, Vol. 5 , pp. 571-574. ISSN 2314-3282, 2015. (PRIMER PREMIO en la categoría Póster de posgrado).

Prosiguiendo esta línea de investigación, se inició el estudio y construcción de diferentes familias de wavelets (wavelets spline, multiwavelets de Hermite, etc.), que condujeron al desarrollo de esta tesis. Utilizando funciones B-splines cúbicas y la metodología introducida por Jia *y col.* [22], se obtuvo una wavelet madre que satisface ciertas condiciones de ortogonalidad. Para diseñar la base, en una primera instancia, se utilizaron traslaciones y dilaciones de la wavelet madre obtenida restringidas al intervalo  $[0, 1]$ , pero ello no permitió obtener soluciones eficientes del problema de segundo orden. Luego se consideraron solo aquellas traslaciones y dilaciones contenidas en el intervalo llamadas *wavelets interiores*, y se analizaron diferentes clases de *wavelets de borde*. En primer lugar, se utilizaron las definidas por Černá *y col.* [24] y luego, se diseñaron wavelets de borde con mejores resultados de convergencia imponiendo condiciones de ortogonalidad sobre sus derivadas. Esto constituye uno de los aportes más importantes de esta tesis. Cuando estas bases se aplican en discretización de ecuaciones diferenciales de segundo orden, mediante esquemas del tipo Wavelet-Galerkin conducen a la resolución de sistemas lineales. Las matrices asociadas tienen buenas propiedades: son esparcidas, diagonales por bloques, el número de condición se mantiene acotado independientemente del nivel de aproximación y se obtiene a partir de las constantes de Riesz de las bases. Los avances y resultados obtenidos de esta etapa fueron presentados en congresos nacionales e internacionales:

- L. Calderón, M .T. Martín y V. Vampa, *Construcción de multiwavelets de Hermite*, 'Reunión anual de la Unión Matemática Argentina', Bahía Blanca, 2016.
- L. Calderón, M .T. Martín y V. Vampa, *Construcción de bases wavelets ortogonales*. Anales del 'VI Congreso de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial', MACI, Vol. 6, pp. 126-129. ISSN 2314-3282, 2017.
- L. Calderón, M. T. Martín y V. Vampa, *Requerimiento de Ortogonalidad en un Análisis Multirresolución sobre Intervalo*, Mecánica Computacional Vol. XXXV. Number 44. Applications of Wavelets (B), pp. 2559-2559 (resumen). ISSN 2591-3522, 2017.
- L. Calderón, M. T. Martín y V. Vampa, *Wavelet Methods for second order boundary value problems*, 'Congreso Internacional de Matemática ICM 2018', Río de Janeiro, 2018.
- L. Calderón, M. T. Martín y V. Vampa, *Construcción de bases de wavelets splines cúbicas sobre intervalo bien condicionadas*. Anales del 'VII Congreso de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial', MACI, Vol. 7, pp. 213-216. ISSN: 2314-3282, 2019.
- L. Calderón, M.T. Martín y V. Vampa *Bases de wavelets B-splines en el intervalo con condiciones de Dirichlet homogéneas*. V Jornadas de Investigación, Transfe-

rencia y Extensión de la Facultad de Ingeniería, La Plata, pp. 235-240. ISBN 978-950-34-1749-2, 2019.

- L. Calderón, M.T. Martín and V. Vampa *Wavelet B-Splines Bases on the Interval for Solving Boundary Value Problems*. Applications of Wavelet Multiresolution Analysis. SEMA SIMAI Springer Series, Vol 4, pp. 23-40, 2021.

### 1.3. Organización de la tesis

La tesis está organizada de la siguiente forma: el Capítulo 2 se dedica a conceptos preliminares; en el Capítulo 3 se exponen los aspectos básicos del análisis wavelet y la estructura multirresolución, que constituyen un marco para la construcción de wavelets. Además se describen las funciones de escala B-splines con sus propiedades básicas.

En el Capítulo 4 se presenta el método Wavelet-Galerkin para un problema general de valores de contorno, mostrando además cotas del error de aproximación.

En el Capítulo 5 se describe un Análisis Multirresolución en un intervalo. En particular, se muestra la construcción de bases de funciones de escala B-splines cúbicas en el intervalo  $[0, 1]$ .

Los principales resultados de esta tesis se encuentran en el Capítulo 6. Consisten en el desarrollo de un método para obtener una base spline wavelet a partir de las funciones de escala B-splines cúbicas. Se muestra la construcción de una wavelet madre que cumple ciertas condiciones de ortogonalidad y se definen wavelets de borde. Además se detallan y demuestran las buenas propiedades de estas bases spline wavelet.

Para mostrar el desempeño de las bases spline wavelet construidas, en el Capítulo 7 se presentan los resultados numéricos obtenidos mediante el método Wavelet-Galerkin, descrito en el Capítulo 4, para varios problemas de valores de contorno de segundo orden. En el Capítulo 8 se exponen las conclusiones generales y las líneas futuras de investigación por desarrollar. Se complementa con un Apéndice que describe los cálculos para obtener las funciones B-splines cúbicas a partir de nodos múltiples.

# Capítulo 2

## Preliminares

La idea de este capítulo es presentar los conceptos y basamentos matemáticos sobre los que se apoya la presente tesis.

$H$  denotará un espacio de Hilbert arbitrario y  $\{e_k\}$  una base ortonormal de dicho espacio.

Se definen los siguientes operadores sobre funciones  $f \in L_2(\mathbb{R})$  que juegan un papel importante en los sistemas generados por traslaciones y dilataciones de una función.

- Operador traslación  $\mathbb{T}$ :  $\mathbb{T}_k f(x) := f(x - k)$ , con  $k \in \mathbb{R}$ .
- Operador dilatación diádico  $\mathbb{D}$ :  $\mathbb{D}f(x) := 2^{1/2}f(2x)$ , si  $n \geq 1$ ,  $\mathbb{D}^n = \mathbb{D}^{n-1} \circ \mathbb{D}$ .

Dada una función  $\phi \in L_2(\mathbb{R})$ , para cada  $j, k \in \mathbb{Z}$  denotamos  $\phi_{j,k}$

$$\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \phi(2^j x - k) = \mathbb{D}^j \mathbb{T}_k \phi(x). \quad (2.1)$$

Si  $\widehat{f}(w)$  denota la Transformada de Fourier de  $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ , los operadores  $\mathbb{T}$  y  $\mathbb{D}$  satisfacen,

1.  $\widehat{\mathbb{T}_k f}(w) = e^{(-i w k)} \widehat{f}(w)$ .
2.  $\widehat{\mathbb{D}^{1/2} f}(w) = \widehat{\mathbb{D}^2 f}(w)$ .

## Bases de Riesz

Las bases de Riesz tienen muchas propiedades útiles de las bases ortonormales, como la representación única en términos de sus elementos, pero no requieren ortogonalidad. Esto permite que su construcción sea más flexible que las bases ortonormales.

Formalmente, la definición de una base de Riesz puede expresarse en términos de operadores con ciertas condiciones que actúan sobre una base ortonormal.

**Definición 2.1.** *Dado un espacio  $H$  y una base ortonormal  $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ , una sucesión  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  es una **base de Riesz** de  $H$  si existe un operador lineal  $T : H \rightarrow H$  acotado y biyectivo tal que  $T e_k = f_k$  para todo  $k$ . [34]*

Es claro que si  $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$  es una base ortonormal, entonces es una base de Riesz, basta tomar el operador identidad.

El siguiente teorema da condiciones equivalentes para que  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  sea base de Riesz. La demostración puede encontrarse en [34].

**Teorema 2.1.** *Una sucesión  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  en  $H$  es una base de Riesz de  $H$  si y sólo si  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  es completa en  $H$  (es decir,  $\text{gen}\{f_k\}_{k=1}^{\infty} = H$ ) y existen constantes  $A, B > 0$  tal que para toda sucesión de escalares  $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in l_2(\mathbb{N})$  se cumple que*

$$A \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k \right\|^2 \leq B \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \quad (2.2)$$

**Observación 2.1.** *Si  $A = B = 1$  la base es ortonormal.*

*Si  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  es una base de Riesz, los números  $A, B > 0$  que satisfacen Ec.(2.2) son llamados cotas inferior y superior de Riesz, respectivamente. Claramente estas cotas no son únicas y se definen las cotas óptimas como el valor más grande posible de  $A$  y el valor más pequeño posible de  $B$ . El siguiente corolario muestra que las cotas óptimas se pueden hallar en términos de los operadores que aparecen en el teorema anterior [34].*

**Corolario 2.1.** *Sea  $\{f_k = T e_k\}_{k=1}^{\infty}$  una base de Riesz para  $H$  y  $G : l^2(\mathbb{N}) \rightarrow l^2(\mathbb{N})$  un operador cuya representación matricial es*

$$G = \{ \langle f_k, f_l \rangle \}_{l,k=1}^{\infty}. \quad (2.3)$$

*Luego las cotas óptimas de Riesz son*

$$A = \frac{1}{\|T^{-1}\|^2} = \frac{1}{\|G^{-1}\|^2} \quad y \quad B = \|T\|^2 = \|G\|^2 \quad (2.4)$$

*La matriz  $G$  es conocida como **matriz Grammiana**.*

Las bases de Riesz también pueden caracterizarse en términos de la Transformada de Fourier que será muy útil para algunas demostraciones.

Dada  $\phi(x) \in L_2(\mathbb{R})$ , se considera la función periódica

$$\Theta(w) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(w + 2k\pi)|^2. \quad (2.5)$$

La función  $\Theta$  pertenece a  $L_1[0, 2\pi]$ , pues

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \Theta(w) dw &= \int_0^{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(w + 2k\pi)|^2 dw \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} |\widehat{\phi}(w)|^2 dw = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\phi}(w)|^2 dw < \infty, \end{aligned} \quad (2.6)$$

ya que  $\widehat{\phi} \in L_2(\mathbb{R})$ .

**Teorema 2.2.** Dada una función  $\phi(x) \in L_2(\mathbb{R})$ , la familia  $\{\phi(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  es una sucesión de Riesz de  $L_2(\mathbb{R})$  si y sólo si existen constantes  $A, B > 0$  tales que

$$A \leq \Theta(w) \leq B, \text{ en casi todo punto de } [0, 2\pi], \quad (2.7)$$

con  $\Theta(w)$  definida en Ec.(2.5).

*Demostración.* Sabiendo que  $\{\phi(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  es una base de Riesz de  $L_2(\mathbb{R})$ , para cada sucesión  $\{c_k\}$  y aplicando la fórmula de Parseval <sup>1</sup> se prueba que,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \phi(x - k) \right\|^2 &= \frac{1}{2\pi} \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \widehat{\phi(x - k)} \right\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{-iwk} \widehat{\phi}(w) \right|^2 dw \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |C(w) \widehat{\phi}(w)|^2 dw, \end{aligned} \quad (2.8)$$

donde  $C(w) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{-iwk} \in L_2[0, 2\pi]$ . Haciendo un cambio de variables  $w = x + 2m\pi$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |C(w) \widehat{\phi}(w)|^2 dw &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{2\pi m}^{2\pi(m+1)} |C(w) \widehat{\phi}(w)|^2 dw = \frac{1}{2\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} |C(x) \widehat{\phi}(x + 2m\pi)|^2 dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |C(x)|^2 \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(x + 2m\pi)|^2 dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |C(x)|^2 \Theta(x) dx. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Notar que  $\|C\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |C(x)|^2 dx = \sum_{m \in \mathbb{Z}} |c_k|^2$ . Con lo cual, por la condición de Riesz Ec.(2.2),

$$A \sum_{m \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 = A \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |C(x)|^2 dx \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |C(x)|^2 \Theta(x) dx \quad (2.10)$$

$$\leq B \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |C(x)|^2 dx = B \sum_{m \in \mathbb{Z}} |c_k|^2. \quad (2.11)$$

---

<sup>1</sup>Si  $f, g \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$   $\int_{\mathbb{R}} f(t) g(t) dt = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f(w)} \widehat{g(w)} dw$ .

De aquí se obtiene la desigualdad Ec.(2.2).

Para demostrar la condición suficiente, supongamos que existen constantes  $A, B > 0$  cumpliendo Ec.(2.2). Por otro lado sabemos que,

$$\left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \phi(x - k) \right\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |C(w)|^2 \Theta(w) dw. \quad (2.12)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} A \frac{1}{2\pi} |C(w)|^2 &\leq \frac{1}{2\pi} |C(w)|^2 \Theta(w) \leq B \frac{1}{2\pi} |C(w)|^2 \\ A \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |C(w)|^2 dw &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |C(w)|^2 \Theta(w) dw \leq B \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |C(w)|^2 dw \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$A \sum_{m \in \mathbb{Z}} |c_m|^2 \leq \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \phi(x - k) \right\|^2 \leq B \sum_{m \in \mathbb{Z}} |c_m|^2. \quad (2.14)$$

Por lo tanto, aplicando el teorema (2.1) se tiene que  $\{\phi(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  es una sucesión de Riesz de  $L_2(\mathbb{R})$ . □

# Capítulo 3

## Análisis Wavelet

El análisis wavelet ha generado un interés significativo tanto en la investigación teórica como aplicada durante los últimos años. Sus inicios pueden encontrarse de la Teoría de Análisis de frecuencias Fourier en 1807, cuando se introdujo la expansión de señales periódicas como suma de senos y cosenos. Desde entonces se fueron incorporando conceptos que llevan a la teoría actual.

La palabra *wavelet* fue mencionada por primera vez en el apéndice de la tesis de A. Haar en 1909, convirtiéndose Haar en el primer referente de la teoría wavelet. Si bien la wavelet de Haar tiene soporte compacto no es continua por lo que se limita a ciertas aplicaciones.

Entre los años 1930 y 1980 se definieron los conceptos básicos con el aporte de importantes matemáticos, físicos e ingenieros como P. Levy, D. Gabor, J. Morlet, R. Coiffman, entre otros.

Luego de los años 80' S. Mallat e Y. Meyer desarrollaron el concepto de análisis multiresolución que permitió obtener las primeras wavelets no triviales (continuas pero sin un soporte compacto) que fueron aplicadas en el análisis de señales.

En 1988, I. Daubechies usó la idea de análisis de multiresolución para crear una familia de wavelets que lleva su nombre. Esta familia satisface varias propiedades: tienen soporte compacto, ortogonalidad, regularidad y continuidad. Sus desventajas radican en que no poseen expresión explícita y su suavidad depende de la longitud del soporte.

Con la propiedad de análisis multiresolución, soporte compacto y ortogonalidad, las wavelets se convierten en una alternativa atractiva como base de funciones para la obtención de soluciones débiles de ecuaciones diferenciales.

Al comienzo de este capítulo se brindan los aspectos básicos de la estructura análisis multiresolución, que constituye el marco para la construcción de bases wavelet. Luego se definen la función de escala y wavelet, además se muestran las propiedades más importantes de las wavelets. Por último, se describen funciones de escala B-splines que gozan de las mejores propiedades en cuanto a su capacidad para aproximar funciones suaves, tienen una expresión explícita y el cálculo de sus derivadas e integrales es simple lo que facilita la implementación computacional. A partir de estas se define el AMR B-splines que se utiliza en este trabajo de tesis.

### 3.1. Análisis Multirresolución (AMR)

En 1986, S. Mallat e Y. Meyer presentaron una herramienta general para construir bases ortonormales de  $L_2(\mathbb{R})$ : el Análisis Multirresolución. Si se relaja la condición de ortogonalidad es posible construir bases de Riesz [35, 36].

**Definición 3.1.** Un **Análisis Multirresolución (AMR)** en  $L_2(\mathbb{R})$  se define como una sucesión de subespacios cerrados  $V_j \subset L_2(\mathbb{R})$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ ,

$$\dots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots$$

que verifican:

1.  $V_j \subset V_{j+1}$ ,  $j \in \mathbb{Z}$
2.  $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}$ ,  $j \in \mathbb{Z}$
3.  $\bigcap V_j = \{0\}$
4.  $\overline{\bigcup V_j} = L_2(\mathbb{R})$
5. Existe una función llamada función de escala  $\phi(x)$  en  $V_0$  tal que la familia  $\{\phi(x - k), k \in \mathbb{Z}\}$  constituye una base de Riesz de  $V_0$ .

**Observación 3.1.** La función  $\phi$  es única, salvo traslaciones enteras.

Como consecuencia de las condiciones (1)-(5) se tiene que para cada  $j \in \mathbb{Z}$ , la familia  $\{\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\phi(2^j x - k) : k \in \mathbb{Z}\}$  constituye una base de Riesz de  $V_j$ .

Si se desea construir una base ortonormal se requiere que en la propiedad (5) la función de escala constituya una base ortonormal de  $V_0$ .

Al subíndice  $j$  se lo denomina escala. Una escala fina corresponde a valores de  $j$  grandes teniendo mayor nivel de aproximación.

**Observación 3.2.** Generalmente un AMR se construye identificando primero el subespacio  $V_0$  y la función de escala  $\phi$ . Más adelante veremos un ejemplo de construcción de AMR utilizando funciones B-splines como funciones de escala.

**Ejemplo 3.1.1.** AMR de Haar. Un simple AMR está generado a partir de la función de escala  $\phi(x) = \chi_{[0,1]}$ . El espacio  $V_j$  es el subespacio de funciones  $f \in L_2(\mathbb{R})$ , de manera que  $f(x)$  es constante en los intervalos semiabiertos  $[2^{-j}k, 2^j(k+1))$  con  $k \in \mathbb{Z}$  [35].

**Ejemplo 3.1.2.** AMR de Meyer. Desarrollado por Y. Meyer [14], la base wavelet correspondiente es el primer ejemplo de una base ortonormal suave.

**Ejemplo 3.1.3.** AMR de Daubechies. Son familias de funciones continuas, ortogonales y de soporte compacto que fueron diseñadas en 1988 por I. Daubechies [1].

#### Relación de dos escalas

A partir de la función de escala puede establecerse una relación entre los espacios  $V_j$ .

Como  $V_0 \subset V_1$ ,  $\phi(x)$  puede escribirse como combinación lineal de  $\{\phi(2x - k), k \in \mathbb{Z}\}$ , es decir que existe una sucesión de coeficientes  $h_k \in l_2(\mathbb{Z})$  tal que

$$\phi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi(2x - k). \quad (3.1)$$

Esta ecuación es llamada **ecuación de dos escalas** o de **refinamiento** y la sucesión de coeficientes  $h_k$  se denomina *filtro de escala*.

De aquí, es inmediato comprobar que el conjunto  $\{\phi_{j,k}(x); k \in \mathbb{Z}\}$  es una base de Riesz de  $V_j$  [35].

## 3.2. Wavelets

La estructura de subespacios anidados implica la existencia, para cada  $j$ , de subespacios  $W_j$  que son complementos ortogonales de  $V_j$  en  $V_{j+1}$ ,

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j. \quad (3.2)$$

**Definición 3.2.** Una función  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  es llamada **wavelet madre** si la familia de las trasladadas  $\{\psi(x - l), l \in \mathbb{Z}\}$  es una base de Riesz de  $W_0$  y si

1.  $\psi$  tiene energía finita:

$$E = \int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 dx < \infty \quad (3.3)$$

2.  $\psi$  satisface la condición de admisibilidad

$$A_\psi = \int_{\mathbb{R}} \frac{|\widehat{\psi(w)}|^2}{|w|} dw < \infty, \quad (3.4)$$

donde  $\widehat{\psi}(w)$  denota la transformada de Fourier de  $\psi$ .

Como consecuencia de Ec.(3.4) se tiene que

$$0 = \widehat{\psi}(0) = \int \psi(x) dx. \quad (3.5)$$

El conjunto de funciones wavelets  $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ , con  $\psi_{j,k}(x) := 2^{j/2} \psi(2^j x - k)$ ,  $j, k \in \mathbb{Z}$  es entonces una **base wavelet de Riesz** de  $L^2(\mathbb{R})$ .

Debido a la Ec.(3.2) como la wavelet madre  $\psi \in V_1$ , existe un desarrollo convergente de  $L_2(\mathbb{R})$  tal que,

$$\psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{g}_k \phi(2x - k). \quad (3.6)$$

$\tilde{g}_k$  es llamado *filtro de la wavelet*.

El teorema que sigue provee un algoritmo para construir una base wavelet ortonormal en el marco de un Análisis de Multirresolución [35].

**Teorema 3.1.** Sea  $\{V_j\}_j$  un AMR con función de escala  $\phi$  cuya familia  $\{\phi(x - k); k \in \mathbb{Z}\}$  es ortogonal y filtro de escala  $h_k \in l_1(\mathbb{Z})$ . Se define el filtro de la wavelet  $\tilde{g}_k$  por

$$\tilde{g}_k = (-1)^k h_{1-k} \quad (3.7)$$

y la wavelet tiene la expresión

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{g}_k \phi(2x - k). \quad (3.8)$$

**Ejemplo 3.2.1.** Para el AMR de Haar, los coeficientes del filtro de escala son

$$h_k = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{si } k = 0, 1 \\ 0 & \text{si } k \neq 0, 1 \end{cases}.$$

Por el teorema (3.1),

$$\tilde{g}_k = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{si } k = 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{si } k \neq 0, 1 \end{cases}$$

Así, la wavelet asociada está definida por

$$\psi(x) = \phi(2x) - \phi(2x - 1).$$

Utilizando Ec.(3.2), para algún  $j_0 \in \mathbb{Z}$ , el espacio  $V_j$  se puede descomponer como:

$$V_j = \underbrace{V_{j-1}}_{V_{j-2} \oplus W_{j-2}} \oplus W_{j-1}. \quad (3.9)$$

$$V_j = V_{j_0} + W_{j_0} + W_{j_0+1} \dots + W_{j-1}. \quad (3.10)$$

Si  $V_j$  y  $W_j$  están generados por los conjuntos de funciones

$$\Phi_j := \{\phi_{j,k}, j, k \in \mathbb{Z}\}, \quad \Psi_j := \{\psi_{j,k}, j, k \in \mathbb{Z}\} \quad (3.11)$$

respectivamente, una base wavelet para  $V_j$  es la unión de todos los conjuntos  $\Phi_{j_0}$  y  $\Psi_j$ , para  $j > j_0$ .

Si  $L_2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j$ , una base wavelet para  $L_2(\mathbb{R})$  es

$$\Psi = \Phi_{j_0} \cup \bigcup_{j \geq j_0} \Psi_j. \quad (3.12)$$

## Propiedades

La elección de la base wavelet depende fuertemente de las propiedades que cumple la wavelet madre. Ahora detallaremos algunas propiedades importantes.

- Momentos nulos: Decimos que  $\psi$  tiene  $p$  momentos nulos si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^k \psi(t) dt = 0. \quad \text{para } 0 \leq k < p \quad (3.13)$$

- Soporte compacto:  $\psi$  tiene soporte compacto si y sólo si la sucesión  $\{h_k\} \in l_2(\mathbb{Z})$  es finita.

**Observación 3.3.** *La longitud del soporte de una función y la cantidad de momentos nulos son a priori independientes. Sin embargo, se observa en el teorema (7.5) de [36], que las restricciones impuestas a las wavelets implican que si  $\psi$  tiene  $p$  momentos nulos, entonces su soporte es al menos de longitud  $2p - 1$ . Las wavelets de Daubechies son óptimas en el sentido de que tienen un soporte de tamaño mínimo para un número dado de momentos nulos. Al elegir una wavelet en particular, nos enfrentamos a una compensación entre el número de momentos de nulos y la longitud del soporte.*

- Ortogonalidad y semiortogonalidad: Dada una wavelet madre  $\psi$ , la familia  $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$  se dice:

- *ortogonal* si para cada escala  $j$  las trasladadas son ortogonales, es decir

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{j,l} \rangle = 0, \quad \text{para } k \neq l; \quad (3.14)$$

- *semiortogonal* si las trasladadas son ortogonales entre escalas diferentes.

Esta propiedad resulta muy importante en las aplicaciones a ecuaciones diferenciales.

### 3.3. B-splines

En esta sección se introducen funciones B-splines que generan bases de Riesz y constituyen un AMR en  $L_2(\mathbb{R})$  que se utiliza en esta tesis.

Una de las ventajas principales de las B-splines es que, además de tener una expresión explícita, gozan de excelentes propiedades en cuanto a su capacidad para aproximar funciones suaves y a su facilidad en la implementación computacional.

**Definición 3.3.** *Sea  $m \in \mathbb{N}$  la función  $\varphi_{m+1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida mediante convoluciones*

$$\begin{aligned}\varphi_1(x) &= \chi_{[0,1]}(x) \\ \varphi_{m+1}(x) &= \varphi_m * \varphi_1(x) = \int_0^1 \varphi_m(x-t) dt,\end{aligned}\tag{3.15}$$

se llama función **B-spline** de orden  $m + 1$ .

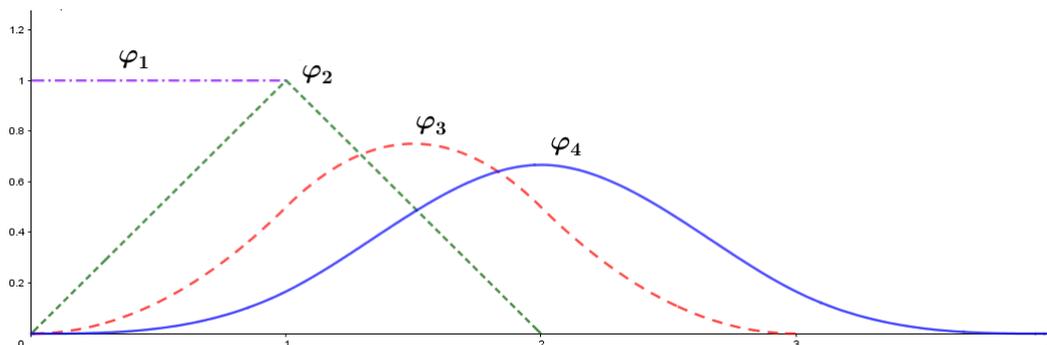


Fig 3.1: B-splines de orden 2, 3 y 4.

## Propiedades de las funciones B-splines

Las demostraciones de las propiedades pueden encontrarse en [35, 37, 23].

- Soporte compacto:  $\text{sop } \varphi_{m+1} = [0, m + 1]$ .
- Suavidad: las B-splines son polinomios a trozos de grado  $m$ ,  $\varphi_{m+1} \in C^{m-1}(\mathbb{R})$ .
- Propiedad de recursividad :  $\varphi_{m+1}(x) = \frac{x}{m} \varphi_m(x) + \frac{(m+1-x)}{m} \varphi_m(x-1)$ .
- Fórmula explícita:

$$\varphi_{m+1}(x) = \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} (-1)^k (x-k)_+^m,\tag{3.16}$$

donde  $(x)_+^m = (\max(0, x))^m$ .

- Relación de dos escalas:

$$\varphi_{m+1}(x) = 2^{-m} \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} \varphi_{m+1}(2x-k).\tag{3.17}$$

- Semiortogonalidad: La familia  $\{\varphi_{m+1,j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$  es semiortogonal, es decir que si  $j_1 \neq j_2$

$$\langle \varphi_{m+1,j_1,k}, \varphi_{m+1,j_2,k'} \rangle = 0.\tag{3.18}$$

- La expresión dada por la Ec.(3.16) para  $\varphi_{m+1}$  puede interpretarse como la diferencia hacia atrás  $m$ -ésima de la función  $(x)^m$ , es decir:

$$\varphi_{m+1}(x) = \Delta^m(x)^m, \quad (3.19)$$

donde  $\Delta^m$  se obtiene de aplicar  $m$  veces el operador hacia atrás  $\Delta f(x) = f(x) - f(x-1)$ .

- Las derivadas de orden  $1 \leq k \leq m-1$  se obtienen directamente por diferencia:

$$\frac{d^k}{dx^k} \varphi_{m+1}(x) = \Delta^k \varphi_{m+1-k}(x), \quad (3.20)$$

donde  $\Delta^k$  es el operador diferencia de orden  $k$ . Corresponde, entonces, a una reducción en  $k$  del orden de la spline. De forma similar, la integración produce un incremento en su orden.

- A partir del producto de convoluciones

$$\varphi_{m+1} * \varphi_{n+1}(x) = \varphi_{m+n+2}(x) \quad (3.21)$$

se obtiene:

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_{m+1}(x-k) \varphi_{n+1}(x-l) dx = \varphi_{m+n+2}(n+1+l-k). \quad (3.22)$$

Por lo tanto, calcular productos internos de las funciones B-splines consiste en la simple evaluación en los enteros de splines de orden más alto.

**Proposición 3.1.** Para  $m \geq 1$ , la sucesión  $\{\varphi_{m+1}(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  es una sucesión de Riesz en  $L_2(\mathbb{R})$ .

Por otra parte,  $\{\varphi_1(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  es un sistema ortogonal en  $L_2(\mathbb{R})$ .

*Demostración.* Para demostrar que  $\{\varphi_{m+1}(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  es una sucesión de Riesz se utiliza el teorema (2.2).

Sabiendo que  $\widehat{\varphi_1}(w) = \left(\frac{1-e^{-iw}}{iw}\right) = e^{-iw/2} \left(\frac{\sin(w/2)}{w/2}\right)$  y aplicando que  $\widehat{f * g} = \widehat{f} * \widehat{g}$ , para  $f, g \in L_1(\mathbb{R})$ , de la definición de B-splines es inmediato que,

$$\widehat{\varphi_{m+1}}(w) = (\widehat{\varphi_1}(w))^{m+1} = \left(\int_0^1 e^{-iwt} dt\right)^{m+1} = \left(e^{-iw/2} \left(\frac{\sin(w/2)}{w/2}\right)\right)^{m+1}. \quad (3.23)$$

Como  $|\widehat{\varphi_1}(w)| \leq 1$  y  $\{\varphi_1(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  es un sistema ortogonal en  $L_2(\mathbb{R})$  se tiene que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi_{m+1}}(w + 2\pi n)|^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi_1}(w + 2\pi n)|^2 \leq 1. \quad (3.24)$$

Por otra parte,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi_{m+1}}(w + 2\pi n)|^2 \geq \inf_{w \in [-\pi, \pi]} |\widehat{\varphi_{m+1}}(w)|^2 = \left( \frac{\sin(w/2)}{w/2} \right)^{2m+2} = \left( \frac{2}{\pi} \right)^{2m+2}. \quad (3.25)$$

Por lo tanto de Ecs.(3.24) y (3.25),

$$\left( \frac{2}{\pi} \right)^{2m+2} \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi_{m+1}}(w + 2\pi n)|^2 \leq 1. \quad (3.26)$$

Con lo cual queda demostrada la proposición. □

De la proposición anterior se puede ver que las traslaciones de las B-splines forman una base de Riesz de  $L_2(\mathbb{R})$  y además que las funciones B-splines de orden  $m + 1$  cumplen la relación de dos escalas, entonces llamando

$$V_0 = \text{gen} \{ \varphi_{m+1}(x - k), k \in \mathbb{Z} \} \quad \text{y} \quad V_j = \text{gen} \{ \varphi_{m+1,j,k}, k \in \mathbb{Z} \} \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (3.27)$$

con  $\varphi_{m+1,j,k}(x) = 2^{j/2} \varphi_{m+1}(2^j x - k)$ , para cada  $m$  la colección de subespacios  $\{V_j\}_j$  forman un AMR en  $L_2(\mathbb{R})$ .

**Observación 3.4.** *Las funciones splines de orden  $m + 1$  se aproximan a una función Gaussiana cuando  $m$  crece (ver Fig. (3.1)), en particular la spline de orden 4 es una buena aproximación polinómica de la función Gaussiana, razón por la cual es la más utilizada.*

# Capítulo 4

## Problema de valores de contorno

Las ecuaciones diferenciales modelan problemas provenientes del campo de la ciencia y de la ingeniería, tales como problemas de la mecánica de fluidos, deformación de los cuerpos sólidos y campos electromagnéticos. A través de tratamientos numéricos del tipo Wavelet-Galerkin es posible obtener soluciones aproximadas para este tipo de problemas. Estos esquemas proponen una discretización de las ecuaciones involucradas, utilizando el método de Galerkin y permiten expresar la solución del problema como una combinación lineal de las funciones de una base wavelet.

En este capítulo, se presenta la formulación variacional de un problema de valores de contorno general (PVC). Luego, se introduce el método Wavelet-Galerkin y se muestran fórmulas generales del error de aproximación. Al final del capítulo se presenta el problema de segundo orden en una dimensión.

### 4.1. Formulación variacional

Se considera el problema de valores de contorno (PVC):

$$\begin{cases} Lu = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.1)$$

donde  $L$  es un operador diferencial lineal y acotado de orden 2 definido en  $H$ ,  $\Omega$  es un dominio abierto y acotado,  $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  es desconocida y  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y suficientemente suave.

**Observación 4.1.** *Se plantean condiciones de contorno nulas como caso general ya que si se tienen condiciones de contorno de Dirichlet no nulas, el problema puede transformarse, con un cambio de variables adecuado, a un problema con condiciones de Dirichlet homogéneas [38].*

Bajo ciertas hipótesis de regularidad sobre  $\Omega$  y su frontera, existe una única función  $u$  que satisface el problema en todo punto del dominio [39].

Si  $f \in H$ , multiplicando la expresión  $Lu = f$  por una función test  $v \in V$ , donde  $V$  es un subespacio de  $H$  e integrando, se obtiene

$$\langle Lu, v \rangle = \langle f, v \rangle, \quad (4.2)$$

con  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  el producto interno de  $H$ .

Si  $a : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$  dada por  $a(\cdot, \cdot) = \langle Lu, v \rangle$  es una forma bilineal continua y coerciva asociada al operador  $L$  y  $F$  el funcional  $F(v) = \langle f, v \rangle$ , la *formulación variacional o débil* del problema Ec.(4.1) puede establecerse de la siguiente forma: sea  $V'$  espacio dual de  $V$ ,

$$\text{dado } F \in V', \text{ hallar } u \in V \text{ tal que } a(u, v) = F(v), \quad \forall v \in V. \quad (4.3)$$

La continuidad y la coercividad de la forma bilineal  $a$  implican la existencia de una solución única del problema Ec.(4.3). Este resultado se conoce como teorema de Lax-Milgram [40].

### 4.1.1. Método Wavelet-Galerkin

El método clásico de Galerkin consiste en aproximar el espacio  $V$  por subespacios de dimensión finita. Cuando estos subespacios son obtenidos de un Análisis Multiresolución el método se conoce como Método Wavelet-Galerkin.

Sea  $\{V_j\}_j$  un AMR en  $V$  con  $\dim(V_j) = N_j$ . Cada subespacio  $V_j$  es generado por una base  $\{\phi_{j,k}\}_{k=1}^{N_j}$ .

Una vez definido el espacio  $V_j$ , se plantea el problema de la Ec.(4.3) sobre  $V_j$ ,

*dado un subespacio  $V_j \subset V$  y  $F \in V'$ , encontrar  $u_j \in V_j$  tal que*

$$a(u_j, v_j) = F(v_j) \quad \forall v_j \in V_j. \quad (4.4)$$

Este problema normalmente se lo denomina *problema discreto o aproximación de Galerkin*.

Utilizando el teorema de Lax-Milgram [40] se puede afirmar que el problema discreto tiene solución única  $u_j \in V_j$ .

La ventaja del método de Galerkin es que la solución  $u_j$  del problema discreto Ec.(4.4), se puede encontrar explícitamente como una combinación lineal de las funciones base de  $V_j$

$$u_j = \sum_{k=1}^{N_j} \alpha_k \phi_{j,k}, \quad (4.5)$$

con  $\alpha_k, k = 1, \dots, N_j$  coeficientes desconocidos.

Tomando  $v_j = \phi_{j,i}$ , con  $1 \leq i \leq N_j$  y reemplazando Ec.(4.5) en la ecuación Ec.(4.4), se obtiene

$$\sum_{k=1}^{N_j} a(\phi_{j,i}, \phi_{j,k}) \alpha_k = F(\phi_{j,i}) \quad 1 \leq i \leq N_j, \quad (4.6)$$

o, en forma matricial

$$K^j \alpha = \mathbf{b}, \quad (4.7)$$

siendo,

- $K^j$  la matriz de dimensión  $N_j \times N_j$  cuyos elementos son  $K_{i,k} := a(\phi_{j,i}, \phi_{j,k})$ ;
- $\mathbf{b}$  el vector del término independiente de dimensión  $N_j$ , con elementos  $b_i := F(\phi_{j,i})$ ;
- $\alpha = (\alpha_k)_k$  el vector de coeficientes.

Así, mediante el método de Galerkin se convierte la ecuación variacional Ec.(4.4) en la forma de un sistema lineal de ecuaciones algebraicas Ec.(4.6).

Debido a que la forma bilineal  $a(.,.)$  es coerciva, la matriz  $K^j$  es definida positiva [41]. En consecuencia  $K^j$  es no singular. Luego, el sistema tiene única solución y a partir de los coeficientes  $\alpha_k$ , se obtiene la solución aproximada Ec.(4.5).

Bajo hipótesis apropiadas, la sucesión de soluciones  $\{u_j\}_{N_j=1}^{\infty}$ , converge a la solución exacta del problema Ec.(4.3).

Parece natural pensar que para obtener una buena aproximación, se debe aumentar  $N_j$ , pero con este procedimiento sucede que también se incrementará la dimensión de la matriz  $K^j$ , lo que a veces, incurre en un alto costo computacional. Una estrategia para solucionar esto, es elegir el subespacio  $V_j$  y la base  $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{N_j}\}$  de manera tal, que el diseño de algoritmos para resolver el sistema lineal, sea lo más eficiente posible. Por ello, interesa que:

- $K^j$  sea una matriz rala o esparcida, es decir, con una alta proporción de entradas nulas.
- El número de condición de  $K^j$  sea pequeño.

Una de las ventajas de utilizar el método Wavelet-Galerkin es que los subespacios  $V_j$  de AMR se modifican recursivamente ya que las funciones bases son generadas a partir de dilataciones y traslaciones de una función generadora madre. Esto permite mejorar la aproximación  $u_j$  haciendo cálculos simples.

### 4.1.2. Estimación del error del Método de Galerkin

Resulta necesario conocer bajo qué condiciones el método de Galerkin resulta convergente y qué características de precisión presenta la solución aproximada.

El error  $e_j := u - u_j$  de la solución para el problema discreto Ec.(4.4) presenta la siguiente propiedad de ortogonalidad.

**Lema 4.1.** *Sea  $u \in V$  la solución exacta del problema Ec.(4.3) y  $u_j$  la solución del problema Ec.(4.4). Entonces el error  $e_j$  satisface*

$$a(e_j, v) = 0 \quad \forall v \in V_j, \quad (4.8)$$

es decir,

$$a(u - u_j, v) = 0 \quad \forall v \in V_j. \quad (4.9)$$

En este sentido, la aproximación de Galerkin es la función de  $V_j$  más cercana a  $u$ .

A continuación se introduce el lema de Céa, el cual establece la relación entre el error de la aproximación  $e_j := u - u_j$  y las propiedades de la interpolación del subespacio  $V_j$ , usando las constantes  $\bar{C}$  y  $\rho$ , que surgen de la continuidad y la coercividad de la forma bilineal.

**Teorema 4.1.** *Lema de Céa [40]*

Sea  $V$  un espacio de Hilbert,  $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  una forma bilineal acotada y coerciva. Sea  $u \in V$  la solución del problema (4.3). Además, sea  $V_j$  un subespacio de  $V$  y  $u_j \in V_j$ . Entonces

$$\|u - u_j\|_V^2 \leq \frac{\bar{C}}{\rho} \inf_{v \in V_j} \|u - v\|_V^2, \quad (4.10)$$

donde  $\bar{C}$  y  $\rho$  son las constantes de continuidad y coercividad de la forma bilineal  $a$ .

**Observación 4.2.** *El lema de Céa afirma que el error de aproximación  $e_j$  depende de la elección del subespacio de Galerkin  $V_j$ , pero no depende de la selección de la base.*

La convergencia del método de Galerkin es una simple consecuencia del lema de Céa [41]. A partir del mismo lema, además, se pueden hallar cotas para el error  $\|u - u_j\|_V^2$  a partir de evaluar localmente los errores de interpolación [42],

$$\|u - u_j\|_V^2 \leq \|u - \pi u\|_V^2, \quad (4.11)$$

donde  $\pi u \in V_j$  es el elemento del espacio  $V_j$  que interpola a  $u$  en los nodos con un polinomio de grado  $\leq r$ . Las desigualdades que resultan son:

$$\|u - \pi u\|_{L_2}^2 \leq \bar{C} h^{r+1} |u|_{H^{r+1}}^2, \quad (4.12)$$

y

$$\|u - \pi u\|_{H^1}^2 \leq \bar{C} h^r |u|_{H^{r+1}}^2, \quad (4.13)$$

siendo  $H^s$  espacios de Sobolev con  $s \geq 0$ .

Las cotas del error dependen de la regularidad de la solución exacta  $u$ . Si  $u \in H^{r+1}$  se dice que el orden del método es  $r$ .

## Problema de segundo orden

Los problemas de segundo orden resultan de interés en el campo de la mecánica. Pueden surgir como modelo, en particular, en el estudio de la vibración de una barra elástica, una cuerda elástica o en la distribución de temperatura en una barra.

Como un caso particular del problema Ec(4.1), se considera el siguiente problema de valores de contorno en el intervalo  $I = [0, 1]$ .

Sea  $L$  el operador,  $Lu(x) = -\frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x) u(x)$ ,

$$Lu(x) = f(x), \quad (4.14)$$

$$u(0) = u(1) = 0,$$

donde  $p(x)$ ,  $q(x)$  y  $f(x)$  son funciones continuas en  $I$ .

Sea  $V = H_0^1(I)$ , multiplicando por  $v$  a Ec.(4.14) y luego integrando por partes el primer término, el problema presentado puede asociarse con uno variacional  $a(u, v) = \langle f, v \rangle$  como Ec.(4.3), en el que la forma bilineal es,

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_0^1 \left[ -\frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x) u(x) \right] v(x) dx \\ &= \int_0^1 [p(x) u'(x) v'(x) + q(x) u(x) v(x)] dx \\ &= \langle p u', v' \rangle + \langle q u, v \rangle \end{aligned} \tag{4.15}$$

y

$$\langle f, v \rangle = \int_0^1 f(x) v(x) dx, \tag{4.16}$$

para  $u$  y  $v \in H_0^1(I)$ .

A continuación se prueba que  $a(., .)$  es bilineal, continua y, bajo ciertas condiciones sobre  $p(x)$  y  $q(x)$ , también es coerciva.

Para verificar la continuidad de  $a(., .)$ , de la desigualdad triangular se tiene,

$$|a(u, v)| \leq \int_0^1 |p(x)| |u'(x)| |v'(x)| dx + \int_0^1 |q(x)| |u(x)| |v(x)| dx,$$

por ser  $p(x)$  y  $q(x)$  acotadas en  $I$  y por las desigualdades de Cauchy y de Poincaré <sup>1</sup> se obtiene,

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq \|p(x)\|_{L^\infty(I)} \|u'\|_{L^2(I)} \|v'\|_{L^2(I)} + \|q(x)\|_{L^\infty(I)} \|u\|_{L^2(I)} \|v\|_{L^2(I)} \\ &\leq \|p(x)\|_{L^\infty(I)} \|u'\|_{L^2(I)} \|v'\|_{L^2(I)} + C_1 \|q(x)\|_{L^\infty(I)} \|u'\|_{L^2(I)} \|v'\|_{L^2(I)} \\ &\leq \bar{C} \|u'\|_{L^2(I)} \|v'\|_{L^2(I)} \\ &\leq \bar{C} \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1}, \end{aligned}$$

donde  $\bar{C} = \|p(x)\|_{L^\infty(I)} + C_1 \|q(x)\|_{L^\infty(I)}$ .

Para la coercividad,

$$a(u, u) = \int_0^1 p(x)' (u')^2 dx + \int_0^1 q(x) u^2 dx.$$

Sea  $q(x) \geq 0$ , como  $q(x)$  está acotada en  $I$ , tomar  $\rho = \min_{x \in I} q(x) \geq 0$ .

---

<sup>1</sup>Si  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  es un abierto acotado entonces  $\exists \gamma > 0 : \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \gamma \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \forall u \in H_0^1(\Omega)$

- Si  $p(x)=\text{cte} (> 0)$ ,

$$\begin{aligned}
 a(u, u) &= \int_0^1 p(u')^2 dx + \int_0^1 q(x)u^2 dx \\
 &\geq p \int_0^1 (u')^2 dx + \rho \int_0^1 u^2 dx \\
 &\geq \text{mín} \{p, \rho\} \left( \int_0^1 (u')^2 dx + \int_0^1 u^2 dx \right) \\
 &= \bar{\rho} \|u\|_{H_0^1}^2.
 \end{aligned}$$

- Si  $p(x)$  no es constante, se supone  $p(x) > 0$ , como  $p(x)$  es acotada en  $I$ ,  $\rho_1 = \text{mín}_{x \in I} p(x) > 0$ ,

$$\begin{aligned}
 a(u, u) &\geq \rho_1 \int_0^1 (u')^2 dx + \rho \int_0^1 u^2 dx \\
 &= \text{mín} \{\rho_1, \rho\} \left( \int_0^1 (u')^2 dx + \int_0^1 u^2 dx \right) \\
 &= \bar{\rho} \|u\|_{H_0^1}^2.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $a(\cdot, \cdot)$  es una forma bilineal, continua y coerciva. Luego, por el teorema de Lax-Milgram el problema Ec.(4.15) tiene una única solución débil  $u \in H_0^1(I)$ . □

# Capítulo 5

## Análisis Multirresolución en un intervalo

En problemas de valores de contorno se requiere que las soluciones buscadas cumplan condiciones de borde sobre dominios acotados. Se necesita entonces una base wavelet del espacio de funciones con dominio en un intervalo  $I$  (en el caso unidimensional). Para formular dicha base se parte de un AMR en  $L_2(\mathbb{R})$  y luego se definen funciones interiores, es decir, las funciones cuyos soportes están contenidos en el intervalo, y tratar por separado las funciones de borde, aquellas cuyos soportes no están incluidos en el intervalo pero tienen intersección no vacía con el mismo. En algunos casos basta con restringir las funciones de la base, pero en general es necesario construir funciones especiales en los bordes del intervalo  $[0, 1]$ . Durante el procedimiento, determinadas propiedades importantes de las funciones de escala y wavelets deben preservarse, como suavidad, buena localización y regularidad.

En este capítulo se muestra el desarrollo del Análisis de Multirresolución en el intervalo  $[0, 1]$ . Primero se describen brevemente diferentes métodos que permiten adaptar la estructura de análisis multirresolución sobre  $\mathbb{R}$  al intervalo. Luego se muestra una construcción de bases de funciones de escala B-splines en un intervalo.

### 5.1. AMR en $L_2[0, 1]$

En la revisión bibliográfica correspondiente se encuentran diversas estrategias para adaptar un AMR de  $L_2(\mathbb{R})$  al intervalo ([\[14\]](#)-[\[24\]](#),[\[28\]](#),[\[36\]](#),[\[43\]](#)). A continuación se describen algunas de las más importantes. Sin pérdida de generalidad se considera el intervalo  $[0, 1]$ .

1. *Extensión a cero.* Dada  $f \in L_2(\mathbb{R})$ , el enfoque más simple es establecer  $f(x) = 0$  fuera del intervalo  $[0, 1]$  y luego usar AMR en  $L_2(\mathbb{R})$ . Sin embargo, para una función general  $f$ , se introducen discontinuidades en los extremos del intervalo.
2. *Periodización.* Dada  $f \in L_2(\mathbb{R})$  se define la *periodización* de  $f$  sobre  $[0, 1]$  por

$$f^{per}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x+n). \quad (5.1)$$

Una base  $\{\phi_{j,k}\}_{(j,k) \in \mathbb{Z}^2}$  de  $L_2(\mathbb{R})$  se transforma a una base de  $L_2[0, 1]$  si se periodiza cada una de las funciones  $\phi_{j,k}$ .

Las funciones periódicas resultantes son

$$\phi_{j,k}^{per}(x) = 2^{j/2} \sum_{m=0}^{+\infty} \phi(2^j x - k + m). \quad (5.2)$$

Para  $j \geq 0$  y  $0 \leq k < 2^j$ , se tienen  $2^j$  diferentes funciones periódicas. Si el soporte de  $\phi_{j,k}$  está contenido en  $[0, 1]$ , luego  $\phi_{j,k}^{per} = \phi_{j,k}$  para  $x \in [0, 1]$ . Así la restricción solo modifica las funciones de borde cuyos soportes se superponen a  $x = 0$  o  $x = 1$ . Excepto que las funciones  $\phi_{j,k}$  ya sean periódicas, esta construcción introduce nuevamente una discontinuidad en los extremos del intervalo.

3. *Restricción.* Se puede obtener una base de  $L_2[0, 1]$  al restringir las funciones de escala  $\phi_{j,k}$  al intervalo, que denotamos por  $\phi_{j,k}^I(x) = \phi_{j,k} \chi_{[0,1]}(x)$ . Si bien esta base hereda buenas propiedades de la base original, como la suavidad y la localización, cuando se aplican en la resolución numérica de ecuaciones diferenciales, pueden llevar a un mal condicionamiento de la matriz de rigidez.

Una estructura más eficiente resulta ser un AMR en  $L_2[0, 1]$ . La estrategia usual para definirlo es partir de un AMR en  $L_2(\mathbb{R})$  y luego utilizar tantas trasladadas como sea posible de las funciones de escala interiores al intervalo y construir *funciones de borde*. La construcción se realiza en un nivel mínimo  $j_{min}$ , que se elige de tal manera que las funciones de borde a la derecha y a la izquierda no se superpongan. De ese modo, ambos extremos del intervalo se pueden tratar por separado.

La adaptación a un intervalo implica algunos cambios en los conceptos de un Análisis Multirresolución en  $\mathbb{R}$  definido en el Capítulo 3, ya no puede haber una sucesión infinita de subespacios encajados. En cambio, se debe comenzar desde un subespacio inicial  $V_{j_{min}}^{[0,1]}$ . Para  $L_2[0, 1]$  se adoptará la siguiente definición ([14]-[16]).

Sea  $j \geq j_{min}$ ,

$$V_{j_{min}}^{[0,1]} \subset V_{j_{min}+1}^{[0,1]} \dots \subset V_{-1}^{[0,1]} \subset V_0^{[0,1]} \subset V_1^{[0,1]} \subset V_2^{[0,1]} \subset \dots$$

tal que  $\overline{\bigcup_{j \geq j_{min}} V_j^{[0,1]}} = L_2[0, 1]$ . Además para cada  $j \geq j_{min}$ , el subespacio  $W_j^{[0,1]}$  es complemento ortogonal de  $V_j^{[0,1]}$  en  $V_{j+1}^{[0,1]}$ ,

$$V_{j+1}^{[0,1]} = V_j^{[0,1]} \oplus W_j^{[0,1]}. \quad (5.3)$$

Para tratar los extremos del intervalo  $[0, 1]$  se deben introducir funciones de borde especiales (funciones de escala y wavelets). El objetivo es construir bases de Riesz para los espacios  $V_j^{[0,1]}$  y  $W_j^{[0,1]}$  que consisten de un conjunto de funciones interiores y funciones de borde especialmente construidas.

## 5.2. B-splines en $L_2[0, 1]$

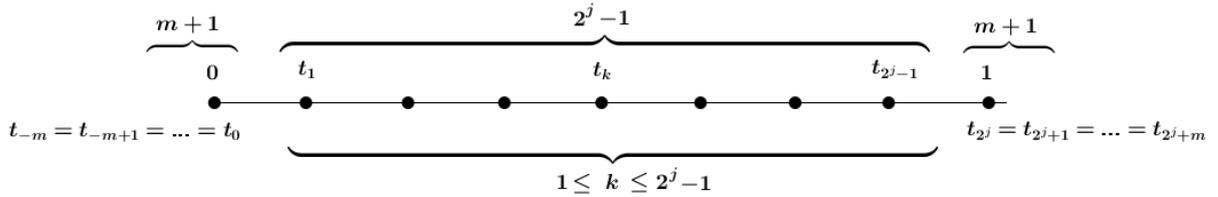
En la resolución de los problemas de valores de contorno planteados en la Sección 4.1, se buscan soluciones que satisfacen condiciones de Dirichlet nulas, por lo tanto se necesitan bases en el espacio  $H_0^1[0, 1]$ .

Sea  $\{V_j\}_j$  el AMR en  $L_2(\mathbb{R})$  definido en la Sección 3.3 que se obtiene de las funciones B-splines  $\varphi_{m+1}$ . Los subespacios generados por las restricciones al intervalo  $[0, 1]$  de las funciones de la base de  $V_j$ , forman un AMR en  $L_2[0, 1]$ , pero no pertenecen a  $H_0^1[0, 1]$ , por lo cual se debe modificar la construcción de las bases. Una herramienta apropiada para la modificación son las B-splines con nodos múltiples diseñadas por Chui y Quak [15]. Una gran ventaja de este enfoque es que se adapta fácilmente al caso del intervalo  $[0, 1]$  al introducir nodos equidistantes en el interior del intervalo y nodos múltiples (nodos que se repiten) en los extremos del intervalo.

Sea  $m+1$  el orden de exactitud polinómica requerida en la base del espacio de funciones de escala, entonces se tiene la siguiente definición:

**Definición 5.1.** Para  $j \in \mathbb{N}$ , sea  $\mathbf{t}^j := (t_k^j)_{-m \leq k \leq 2^j + m}$  una sucesión de nodos sobre  $[0, 1]$  con,

$$t_k^j := \begin{cases} 0 & \text{para } k = -m, \dots, 0, \\ \frac{k}{2^j} & \text{para } k = 1, \dots, 2^j - 1, \\ 1 & \text{para } k = 2^j, \dots, 2^j + m. \end{cases} \quad (5.4)$$



Notar que para  $k = -m, \dots, -1$ , la sucesión de nodos contiene un nodo múltiple en 0 y para  $k = 2^j - m, \dots, 2^j - 1$  un nodo múltiple en 1.

Se definen las funciones B-spline de orden  $m+1$  asociadas a  $\mathbf{t}^j$  como

$$B_{k,m+1}^j(x) := (t_{k+m+1}^j - t_k^j) f[t_k^j, \dots, t_{k+m+1}^j], \quad (5.5)$$

donde  $f(t) = (t-x)_+^m = (\max(t-x, 0))^m$  y el símbolo  $f[t_k, \dots, t_{k+m+1}]$  es la  $(m+1)$ -diferencia dividida de  $f$  en los nodos  $t_k, \dots, t_{k+m+1}$ , la cual se define recursivamente como

$$f[t_k, \dots, t_{k+m+1}] = \begin{cases} \frac{f[t_{k+1}, \dots, t_{k+m+1}] - f[t_k, \dots, t_{k+m}]}{t_{k+m+1} - t_k} & \text{si } t_k \neq t_{k+m+1} \\ \frac{f^{(m+1)}(t_k)}{(m+1)!} & \text{si } t_k = t_{k+m+1} \end{cases} \quad (5.6)$$

con  $f[t_k] = f(t_k)$  y  $f^{(m+1)}$  es la derivada de orden  $m+1$  de  $f$ .

El siguiente lema resume las propiedades importantes de las splines  $B_{k,m+1}^j$  y su demostración se puede encontrar en [44].

**Lema 5.1.** Sea  $B_{k,m+1}^j$ ,  $k = -m, \dots, 2^j - 1$  definido previamente, entonces

- i)  $\text{sop } B_{k,m+1}^j = [t_k^j, t_{k+m+1}^j]$ .
- ii) Simetría:  $B_{-(m+1)+k,m+1}^j(x) = B_{2^j-k,m+1}^j(x-k)$  para  $k = 1, \dots, 2^j + m$ .
- iii) Sea  $j \geq 0$ , para  $k = 0, \dots, 2^j - m - 1$  se tiene

$$2^{j/2} B_{k,m+1}^j(x) = 2^{j/2} \varphi_{m+1}(2^j x - k) = \varphi_{m+1,j,k}(x), \quad (5.7)$$

donde  $\varphi_{m+1}$  es la función de escala B-spline definida en la Sección 3.3.

- iv) Para  $k = -m, \dots, 2^j - m - 1$ , vale que  $B_{k,m+1}^{j+1}(x) = B_{k,m+1}^j(2x)$ .

Del lema (5.1) se deduce que las funciones  $B_{k,m+1}^j$ :

- son interiores si  $0 \leq k \leq 2^j - m - 1$ ,
- son de borde si  $-m \leq k \leq -1$  o  $2^j - m \leq k \leq 2^j - 1$ , que corresponden al borde izquierdo y derecho, respectivamente.

**Ejemplo 5.2.1.** Sean las B-splines lineales ( $m = 1$ ) y sea  $j = 2$ , la sucesión de nodos es

$$t_k^2 := \begin{cases} 0 & \text{para } k = -1, 0, \\ \frac{k}{2^2} & \text{para } k = 1, 2, 3, \\ 1 & \text{para } k = 4, 5. \end{cases}$$

En la sucesión  $\mathbf{t}^2 := (t_k^2)_{-1 \leq k \leq 5}$  hay 3 nodos interiores, dos nodos múltiples en 0 y otros dos en 1. Los soportes de  $B_{-1,2}^2$ ,  $B_{0,2}^2$ ,  $B_{1,2}^2$ ,  $B_{2,2}^2$  y  $B_{3,2}^2$  son  $[0, \frac{1}{4}]$ ,  $[0, \frac{1}{2}]$ ,  $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$  y  $[\frac{1}{2}, 1]$  y  $[\frac{3}{4}, 1]$ , respectivamente.

En la Fig.(5.1) se muestran las funciones  $B_{0,2}^2$ ,  $B_{1,2}^2$  y  $B_{2,2}^2$  que corresponden a las funciones interiores. En este caso, hay dos funciones de borde que son simétricas:  $B_{-1,2}^2$  correspondiente al borde izquierdo y  $B_{3,2}^2$  al borde derecho.

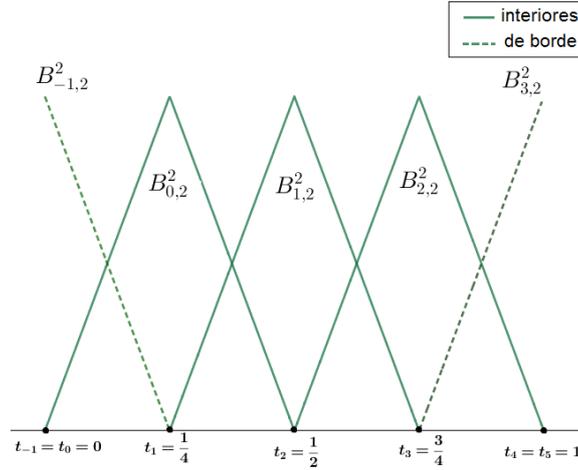


Fig 5.1: Funciones B-splines para  $m = 1$  y  $j = 2$  para la secuencia de nodos  $\{0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, 1\}$ .

### 5.3. AMR B-splines en $L_2[0, 1]$

Se presenta un AMR en  $L_2[0, 1]$ , donde los subespacios que lo forman son generados por funciones de escala B-splines con nodos múltiples definidas en Ec.(5.5).

**Teorema 5.1.** *La sucesión de subespacios  $\{\widehat{V}_j^{[0,1]}\}_{j \geq j_0}$ ,  $j_0 \in \mathbb{N}$  donde  $\widehat{V}_j^{[0,1]}$  está generado por  $\{2^{j/2} B_{k,m+1}^j, k = -m, \dots, 2^j - 1\}$  constituyen un AMR en  $L_2[0, 1]$ . Además*

$$\dim \widehat{V}_j^{[0,1]} = 2^j + m. \quad (5.8)$$

En la base de  $\widehat{V}_j^{[0,1]}$  hay  $2^j - m$  funciones interiores y  $2m$  funciones de borde.

La demostración del teorema puede encontrarse en ([44], [15]).

La Fig.(5.2) muestra una base de funciones de escala B-splines cúbicas ( $m = 3$ ) para  $j = 3$ , con secuencia de nodos  $\mathbf{t}^3 = \left\{0, 0, 0, 0, \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8}, \frac{7}{8}, 1, 1, 1, 1\right\}$ . En el Apéndice A se muestra en detalle la obtención de las funciones correspondientes a esta secuencia de nodos.

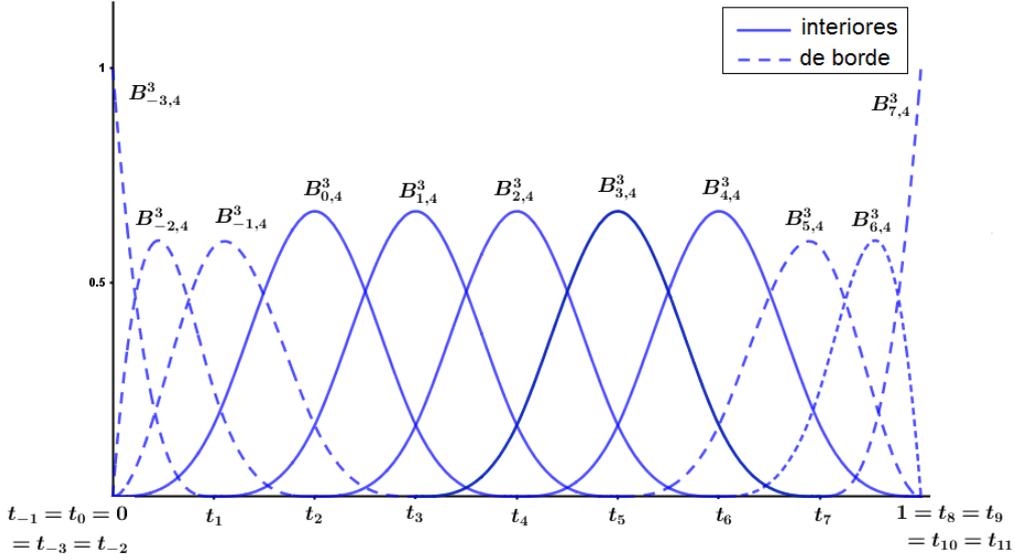
#### 5.3.1. Relación de dos escalas

Para las funciones interiores  $2^{j/2} B_{k,m+1}^j$ , con  $k = 0, \dots, 2^j - (m+1)$ , debido a la Ec.(5.7) del lema (5.1), se tiene que

$$2^{j/2} B_{k,m+1}^j(x) = \varphi_{m+1,j,k}(x),$$

donde  $\varphi_{m+1,j,k}$  son las funciones de escala B-spline de orden  $m+1$  definidas en Ec.(3.27). Como  $\varphi_{m+1}$  satisface la relación de dos escalas dada por Ec.(3.17),

$$\varphi_{m+1}(x) = \sum_{l=0}^{m+1} h_l \varphi_{m+1}(2x - l), \quad \text{con } h_l = 2^{-m} \binom{m+1}{l}, \quad (5.9)$$


 Fig 5.2: Funciones de la base del subespacio B-spline cúbico  $\widehat{V}_3^{[0,1]}$ .

se tiene que

$$2^{j/2} B_{k,m+1}^j(x) = \varphi_{m+1,j,k}(x) = 2^{j/2} \varphi_{m+1}(2^j x - k) \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} &= 2^{j/2} \sum_{l=0}^{m+1} h_l \varphi_{m+1}(2^{j+1} x - (2k + l)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{l=0}^{m+1} h_l 2^{(j+1)/2} \varphi_{m+1,j+1,2k-l}(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{l=0}^{m+1} h_l 2^{(j+1)/2} B_{2k-l,m+1}^{j+1}(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{l=0}^{m+1} h_l 2^{(j+1)/2} B_{2k-l,m+1}^j(2x). \end{aligned} \quad (5.11)$$

La última igualdad vale por condición *iv*) del lema (5.1). Por lo tanto, la relación de dos escalas para las funciones interiores  $2^{j/2} B_{k,m+1}^j$  con  $k = 0, \dots, 2^j - (m + 1)$ , es la dada en Ec.(5.11).

Para obtener los coeficientes de la relación de dos escalas de las funciones de borde se tiene en cuenta el siguiente lema.

**Lema 5.2.** Para  $n = 1, \dots, 2m$  y  $k = 1, \dots, m$  existen coeficientes  $\tilde{h}_{n,k} \in \mathbb{R}$ , tal que

$$B_{-(m+1)+k,m+1}^j(x) = \sum_{n=1}^{2m} \tilde{h}_{n,k} B_{-(m+1)+n,m+1}^j(2x), \quad (5.12)$$

**Demostración.** Para demostrar el lema se consideran las funciones B-splines en el intervalo  $[0, \infty)$ ,  $B_{k,m+1}^0$  con  $k \in \mathbb{Z} \cap [-m, \infty)$  definidas en la secuencia de nodos en los

números enteros [46]. Estas splines forman una base para el espacio de las funciones splines de orden  $m+1$  definidas con la secuencia de nodos  $\{0, \dots, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ . Además,  $B_{k,m+1}^0(2x)$ ,  $k \in \mathbb{Z} \cap [-m, \infty)$  son una base para las splines de orden  $m+1$  asociada a los nodos  $\left\{0, \dots, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots\right\}$ . Luego,  $B_{k,m+1}^0$  satisfacen la siguiente relación de dos escalas,

$$B_{-(m+1)+k,m+1}^0(x) = \sum_{n=1}^{2m} \tilde{h}_{n,k} B_{-(m+1)+n,m+1}^0(2x), \quad k = 1, \dots, m, \quad (5.13)$$

donde la suma finita se debe a que  $\text{sop } B_{-(m+1)+k,m+1}^0 = [\text{máx}\{0, k-m+1\}, k]$ . Así, existen coeficientes  $\tilde{h}_{n,k} \in \mathbb{R}$ ,  $n = 1, \dots, 2m$  y  $k = 1, \dots, m$ .

Ahora, para  $j \geq 0$  aplicando  $j$  veces la condición (iv) del lema (5.1), se tiene  $B_{k,m+1}^j(x) = B_{k,m+1}^0(2^j x)$ , con  $k = -m, \dots, 2^j - (m+1)$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} B_{-(m+1)+k,m+1}^j(x) &= B_{-(m+1)+k,m+1}^0(2^j x) \\ &= \sum_{n=1}^{2m} \tilde{h}_{n,k} B_{-(m+1)+n,m+1}^0(2^{j+1} x) \\ &= \sum_{n=1}^{2m} \tilde{h}_{n,k} B_{-(m+1)+n,m+1}^{j+1}(x) \\ &= \sum_{n=1}^{2m} \tilde{h}_{n,k} B_{-(m+1)+n,m+1}^j(2x) \end{aligned}$$

Esto prueba, la existencia de la relación de dos escalas Ec.(5.12) para las funciones de borde del extremo izquierdo. Utilizando la propiedad de simetría de las splines, se obtiene la relación de dos escalas para las funciones de borde del extremo derecho.  $\square$

### Cálculo de los coeficientes $\tilde{h}_{n,k}$

Los coeficientes  $\tilde{h}_{n,k} \in \mathbb{R}$ ,  $n = 1, \dots, 2m$  y  $k = 1, \dots, m$  se pueden calcular utilizando Ec.(5.13) y tomando  $x = \frac{l}{2}$  con  $l = 0, \dots, 2m-1$ ,

$$B_{-(m+1)+k,m+1}^0\left(\frac{l}{2}\right) = \sum_{n=1}^{2m} \tilde{h}_{n,k} B_{-(m+1)+n,m+1}^0(l), \quad (5.14)$$

se tiene un sistema de ecuaciones, matricialmente

$$\underbrace{\left[ B_{-(m+1)+k,m+1}^0\left(\frac{l}{2}\right) \right]_{l=0,k=1}^{2m-1,m}}_{:=B_1} = \underbrace{\left[ B_{-(m+1)+n,m+1}^0(l) \right]_{l=0,n=1}^{2m-1,2m}}_{:=B_2} \left[ \tilde{h}_{n,k} \right]_{n=1,k=1}^{2m,m} \quad (5.15)$$

Debido a que  $B_{-(m+1)+k,m+1}^0$ ,  $k \in \mathbb{Z} \cap [-m, \infty)$  son funciones positivas,  $B_{-m,m+1}^0(0) = 1$  y cuando  $l \geq k$   $B_{-(m+1)+k,m+1}^0(l) = 0$ , la matriz  $B_2$  es una matriz triangular superior invertible. Por lo tanto

$$\left[ \tilde{h}_{n,k} \right]_{n=1,k=1}^{2m,m} = B_2^{-1} B_1. \quad (5.16)$$

Así, a partir del cálculo de las matrices  $B_1$  y  $B_2$  se obtienen los coeficientes de la relación de dos escalas para las funciones de borde.

En los siguientes ejemplos se calculan los coeficientes  $\tilde{h}_{n,k}$  para el caso de las B-splines lineales ( $m = 1$ ) y para las B-splines cúbicas ( $m = 3$ ) que se utilizarán en la próxima sección.

**Ejemplo 5.3.1.** B-splines lineales ( $m = 1$ ). Sea  $k = 1$  y  $n = 2$ , las matrices  $B_1$  y  $B_2$  son,

$$B_1 = \left[ B_{-1,2}^0 \left( \frac{l}{2} \right) \right]_{l=0}^1 = \begin{bmatrix} B_{-1,2}^0(0) \\ B_{-1,2}^0(\frac{1}{2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \left[ B_{-2+k,2}^0(l) \right]_{l=0,k=1}^{1,2} = \begin{bmatrix} B_{-1,2}^0(0) & B_{0,2}^0(0) \\ B_{-1,2}^0(1) & B_{0,2}^0(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Por lo tanto,

$$\left[ \tilde{h}_{n,1} \right]_{n=1}^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Así, para la función de borde  $B_{-1,2}^2$  del ejemplo (5.2.1) se tiene la relación de dos escalas Ec.(5.12) para  $k = 1$  y  $j = 2$ ,

$$\begin{aligned} B_{-1,2}^2(x) &= \sum_{n=1}^2 \tilde{h}_{n,1} B_{-2+n,2}^j(2x) \\ &= \left( \tilde{h}_{1,1} B_{-1,2}^2(2x) + \tilde{h}_{2,1} B_{0,2}^2(2x) \right) \\ &= B_{-1,2}^2(2x) + \frac{1}{2} B_{0,2}^2(2x). \end{aligned}$$

**Ejemplo 5.3.2.** B-splines cúbicas ( $m = 3$ ). Sea  $k = 1, 2, 3$  y  $n = 1, 2, \dots, 6$ , las correspondientes matrices  $B_1$  y  $B_2$  son:

$$B_1 = \left[ B_{-4+k,4}^0 \left( \frac{l}{2} \right) \right]_{l=0,k=1}^{5,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{19}{32} & \frac{25}{96} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{7}{12} \\ 0 & \frac{1}{32} & \frac{15}{32} \\ 0 & 0 & \frac{1}{16} \\ 0 & 0 & \frac{1}{48} \end{bmatrix},$$

$$B_2 = [B_{-4+k,4}^0(l)]_{l=0,k=1}^{5,6} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{7}{12} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto

$$[\tilde{h}_{n,k}]_{n=1,k=1}^{6,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{3}{16} & \frac{11}{16} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix}. \quad (5.17)$$

Para  $k = 1, 2, 3$ , la relación de dos escalas Ec.(5.12) para las funciones de borde es,

$$B_{-4+k,4}^j(x) = \sum_{n=1}^6 \tilde{h}_{n,k} B_{-4+n,4}^j(2x).$$

$$\begin{aligned} \text{Si } k = 1, \quad B_{-3,4}^j(x) &= \sum_{n=1}^6 \tilde{h}_{n,1} B_{-4+n,4}^j(2x) \\ &= B_{-3,4}^j(2x) + \frac{1}{2} B_{-2,4}^j(2x). \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} \text{Si } k = 2, \quad B_{-2,4}^j(x) &= \sum_{n=1}^6 \tilde{h}_{n,2} B_{-4+n,4}^j(2x) \\ &= \frac{1}{2} B_{-2,4}^j(2x) + \frac{3}{4} B_{-1,4}^j(2x) + \frac{3}{16} B_{0,4}^j(2x). \end{aligned} \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} \text{Si } k = 3, \quad B_{-1,4}^j(x) &= \sum_{n=1}^6 \tilde{h}_{n,3} B_{-4+n,4}^j(2x) \\ &= \frac{1}{4} B_{-1,4}^j(2x) + \frac{11}{16} B_{0,4}^j(2x) + \frac{1}{2} B_{1,4}^j(2x) + \frac{1}{8} B_{2,4}^j(2x). \end{aligned} \quad (5.20)$$

## 5.4. AMR B-Splines Cúbicos en $L_2[0, 1]$

Para el caso especial de funciones B-splines cúbicas ( $m = 3$ ) se diseña un AMR en  $L_2[0, 1]$ . Como fue mencionado antes las funciones de la base deben pertenecer al espacio

$H_0^1[0, 1]$ . Al examinar las funciones de la base que generan el espacio  $\widehat{V}_j^{[0,1]}$  se observa que las funciones de borde  $B_{-3,4}^j$  y  $B_{2^j-1,4}^j$  no pertenecen a  $H_0^1[0, 1]$ .

Por lo tanto, llamando  $\varphi_{b_1}(x) = B_{-2,4}^0(x)$  y  $\varphi_{b_2}(x) = B_{-1,4}^0(x)$ , se define el conjunto de **funciones de escala de borde** como,

$$\Phi_j^{bord} = \{ \varphi_{j,1}, \varphi_{j,2}, \varphi_{j,2^j}, \varphi_{j,2^j+1} \} \text{ para } j \geq 1 \quad (5.21)$$

donde,

$$\varphi_{j,1}(x) = 2^{j/2} \varphi_{b_1}(2^j x), \quad \varphi_{j,2}(x) = 2^{j/2} \varphi_{b_2}(2^j x), \quad (5.22)$$

$$\varphi_{j,2^j}(x) = 2^{j/2} \varphi_{b_2}(2^j(1-x)), \quad \varphi_{j,2^j+1}(x) = 2^{j/2} \varphi_{b_1}(2^j(1-x)). \quad (5.23)$$

El conjunto de **funciones de escala interiores** son traslaciones de la función  $\varphi(x) = \varphi_4(x)$  (función de escala B-spline cúbica),

$$\Phi_j^{int} = \{ \varphi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \varphi(2^j x - k + 3), k = 3, 4, \dots, 2^j - 1 \}. \quad (5.24)$$

Para  $j \geq 1$ , el conjunto de funciones

$$\Phi_j = \Phi_j^{int} \cup \Phi_j^{bord}, \quad (5.25)$$

generan el subespacio  $V_j^{[0,1]}$  de B-splines cúbicos. La dimensión de  $V_j^{[0,1]}$  es  $2^j + 1$ . En la Fig.(5.3) se muestran las funciones de la base de  $V_3^{[0,1]}$ .

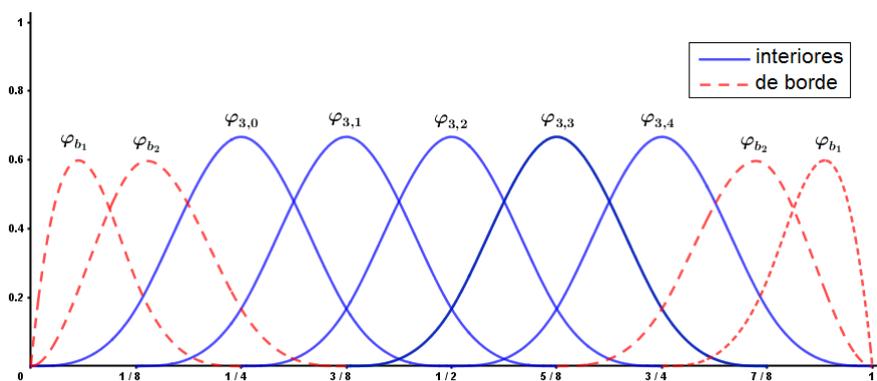


Fig 5.3: Funciones de la base del subespacio B-spline cúbico  $V_3^{[0,1]}$ .

**Observación 5.1.** La relación de dos escalas para las funciones de borde, corresponden a  $j = 0$  en las expresiones Ecs.(5.19) y (5.20)

$$\varphi_{b_1}(x) = \frac{\varphi_{b_1}(2x)}{2} + \frac{3\varphi_{b_2}(2x)}{4} + \frac{3\varphi(2x)}{16}, \quad (5.26)$$

$$\varphi_{b_2}(x) = \frac{\varphi_{b_2}(2x)}{4} + \frac{11\varphi(2x)}{16} + \frac{\varphi(2x-1)}{2} + \frac{\varphi(2x-2)}{8}. \quad (5.27)$$

A partir de la estructura AMR B-splines cúbicos ([46]), en el próximo capítulo se definen los subespacios  $W_j^{[0,1]}$  asociados a este AMR.



# Capítulo 6

## Diseño de una base spline wavelet sobre el intervalo

En este capítulo se desarrolla un método para obtener una base spline wavelet para los subespacios  $W_j^{[0,1]}$  asociados a la estructura AMR B-splines cúbicos definido en el capítulo anterior. Primero se construye una *wavelet madre* que satisface condiciones específicas de ortogonalidad.

Para obtener una base wavelet para los subespacios  $W_j^{[0,1]}$  se definen wavelets interiores que son traslaciones y dilaciones de la wavelet madre obtenida. Para las funciones de borde primero se presenta una construcción realizada por Černá *y col.* [24] y luego se expone una construcción, donde se imponen condiciones de ortogonalidad.

Las bases spline wavelet definidas poseen muy buenas propiedades. Una de las propiedades más importantes es que el número de condición de la matriz de rigidez que surge al utilizar el esquema Wavelet-Galerkin en la discretización de ecuaciones diferenciales, permanece uniformemente acotado en las sucesivas aproximaciones.

### 6.1. Motivación

Diversas construcciones de bases spline wavelet se han utilizado en la resolución de ecuaciones diferenciales. Por ejemplo, Vampa *y col.* [23] desarrollaron un procedimiento para aproximar la solución con bases B-splines adaptadas al intervalo  $[0, 1]$  mediante el planteo de un sistema algebraico con ecuaciones variacionales y de colocación. Estos autores diseñaron un algoritmo adaptativo que permite reducir el costo computacional y obtuvieron buenos resultados de convergencia, aunque el número de condición no está uniformemente acotado. Construcciones más recientes de bases spline wavelet biortogonales realizadas por Černá *y col.* [24] y Primbs [46] logran mejorar el condicionamiento, pero los algoritmos de aplicación son de elevada complejidad computacional ya que las funciones de la base dual no poseen expresión explícita o tienen soporte de gran longitud.

Una de las primeras construcciones de bases con derivada ortogonal se puede ver en el trabajo de Jia *y col.* [22], donde se proponen bases multiwavelets de Hermite adaptadas al intervalo  $[0, 1]$ . Este requisito de ortogonalidad resulta conveniente para la obtención de soluciones numéricas de ecuaciones diferenciales, ya que en las formulaciones

CAPÍTULO 6. DISEÑO DE UNA BASE SPLINE WAVELET SOBRE EL  
INTERVALO

---

variacionales de tales ecuaciones, aparecen productos internos entre las funciones base y sus derivadas. Por ejemplo, en el problema de segundo orden planteado en Ec.(4.14)

$$L u(x) = -\frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x) u(x) = f(x) \quad x \in (0, 1), \quad (6.1)$$

$$u(0) = u(1) = 0,$$

$p(x)$ ,  $q(x)$  y  $f(x)$  son funciones continuas en  $[0, 1]$ ,  $p(x) > 0$  y  $q(x) \geq 0$  para  $x \in [0, 1]$ .

Utilizando el método Wavelet-Galerkin presentado en el Capítulo 4, en el marco de un AMR, es posible obtener soluciones del problema variacional asociado Ec.(4.15) en un subespacio  $V_j$  de dimensión  $N_j$ . Sustituyendo en la forma débil discreta

$$a(u_j, v_j) = \langle p u'_j, v'_j \rangle + \langle q u_j, v_j \rangle = \langle f, v_j \rangle \quad u_j, v_j \in V_j, \quad (6.2)$$

y tomando el conjunto  $\{\varphi_{j,1}, \varphi_{j,2}, \dots, \varphi_{j,N_j}\}$  como una base de  $V_j$ , se resuelve un sistema algebraico

$$K^j \alpha = b, \quad (6.3)$$

con  $K^j_{n,k} = a(\varphi_{j,n}, \varphi_{j,k})$ ,  $1 \leq n, k \leq N_j$ ,  $b = \langle f, \varphi_{j,k} \rangle$  y  $\alpha$  el vector de incógnitas.

Llamando  $D^j$  a la matriz que corresponde a la discretización del primer término de la forma bilineal  $a(u_j, v_j)$  en Ec.(6.2) con  $D^j_{n,k} = \langle \varphi'_{j,n}, \varphi'_{j,k} \rangle$  y  $G^j$  a la matriz Grammiana definida en Ec.(2.3) con  $G^j_{n,k} := \langle \varphi_{j,n}, \varphi_{j,k} \rangle$ , que corresponde al segundo término y teniendo en cuenta que  $\varphi'_{j,k}(x) = 2^j \varphi'(2^j x - k)$ , se tiene que

$$K^j \approx 2^{2j} p D^j + q G^j \quad (6.4)$$

donde  $p$  y  $q$  son valores de las funciones  $p(x)$  y  $q(x)$  evaluados en un  $x^*$  elegido adecuadamente.

Debido al producto de las derivadas por los factores de escala, aunque  $q \neq 0$ , el número de condición de  $K^j$  está dominado por la matriz  $D^j$ .

Si se cuenta con una base wavelet que satisface condiciones de ortogonalidad sobre su derivada, esto es,

$$\langle \psi'(x), \varphi'(x - k) \rangle = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (6.5)$$

y

$$\langle \psi'(2^{j_1} x - k_1), \psi'(2^{j_2} x - k_2) \rangle = 0, \quad \forall k_1, k_2 \in \mathbb{Z}, j_1, j_2 \in \mathbb{N}_0, \quad (6.6)$$

con  $\varphi \in V_{j_0}$  y  $\psi \in W_{j_0}$ , se tiene una matriz de rigidez  $K^j$  más o menos rala (dependiendo del soporte de las funciones de la base) con buen condicionamiento.

En este trabajo de tesis, se combinan enfoques presentados por Jia *y col.* [22] y Černá *y col.* [24] para construir una base spline wavelet con tales características.

## 6.2. Construcción de una wavelet madre

A partir de la estructura AMR sobre  $\mathbb{R}$  de los espacios B-splines cúbicos definidos en Ec.(3.27), se propone la construcción de una spline wavelet con alguna condición especial.

La estructura de subespacios anidados del AMR implica que el subespacio wavelet  $W_0$  está contenido en el subespacio de aproximación  $V_1$ , ya que  $V_1 = V_0 \oplus W_0$ . Por lo tanto, una wavelet  $\psi(x)$  se puede expresar como una combinación lineal de funciones de escala pertenecientes al subespacio  $V_1$ ,

$$\psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k \varphi(2x - k), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (6.7)$$

donde  $\varphi$  es la función de escala B-spline cúbica.

La expresión de la spline wavelet se obtiene calculando los coeficientes  $d_k$  de la ecuación de dos escalas Ec.(6.7). Para calcular estos coeficientes, se impone la condición de ortogonalidad de las derivadas sobre la función de escala y wavelet,

$$\langle \psi'(x), \varphi'(x - l) \rangle = 0, \quad \forall l \in \mathbb{Z}. \quad (6.8)$$

Entonces, para  $l \in \mathbb{Z}$ , el producto interno adopta la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \langle \psi'(x), \varphi'(x - l) \rangle &= 2 \left\langle \sum_{k \in \mathbb{Z}} [d_k \varphi'(2x - k)], \varphi'(x - l) \right\rangle \\ &= 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k \langle \varphi'(2x - k), \varphi'(x - l) \rangle. \end{aligned} \quad (6.9)$$

$\varphi(x)$  tiene soporte  $[0, 4]$ , por lo que  $\varphi(x - l)$  tiene soporte  $[l, 4 + l]$ . Por otro lado,  $\varphi(2x - k)$  tiene soporte  $\left[\frac{k}{2}, \frac{4 + k}{2}\right]$ . Existe intersección entre los soportes si  $2l - 4 < k < 2l + 8$ , por lo cual la sumatoria anterior es finita:

$$\langle \psi'(x), \varphi'(x - l) \rangle = 2 \sum_{k=2l-3}^{2l+7} d_k \langle \varphi'(2x - k), \varphi'(x - l) \rangle. \quad (6.10)$$

Por otra parte,  $\varphi(x)$  satisface la ecuación de refinamiento dada por,

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^4 h_n \varphi(2x - n), \quad (6.11)$$

donde  $h_n$  son las componentes del vector  $h = \left[\frac{1}{8}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right]$ , que se obtienen utilizando Ec.(5.9) para  $m = 3$ . Teniendo en cuenta esta expresión y propiedades de las B-splines, el producto interno de las derivadas puede escribirse de la siguiente manera:

$$\langle \varphi'(2x - k), \varphi'(x - l) \rangle = -2 \sum_{n=0}^4 h_n \varphi_8''(4 + 2l + n - k). \quad (6.12)$$

Por lo tanto, para cada  $l \in \mathbb{Z}$ , la Ec.(6.8) adopta la forma:

$$\langle \psi'(x), \varphi'(x - l) \rangle = -4 \sum_{k=2l-3}^{2l+7} d_k \left( \sum_{n=0}^4 h_n \varphi_8''(4 + 2l + n - k) \right) = 0 \quad (6.13)$$

donde  $\varphi_8''(4 + 2l + n - k)$  representa la derivada segunda de la spline de orden 7 evaluada en  $x = 4 + 2l + n - k$  y los  $h_n$  están dados por relación de 2 escalas Ec.(6.11).

Para cada  $k$  de Ec.(6.13), se resuelve la suma en  $n$  evaluando  $\varphi_8''$  en los valores correspondientes y multiplicando por  $h_n$ . Para cada  $l \in \mathbb{Z}$ , se tiene

$$\begin{aligned} \langle \psi'(x), \varphi'(x - l) \rangle = & -\frac{1}{240} d_{2l-3} - \frac{7}{60} d_{2l-2} - \frac{39}{80} d_{2l-1} - \frac{8}{15} d_{2l} + \frac{59}{120} d_{2l+1} + \frac{13}{10} d_{2l+2} + \\ & + \frac{59}{120} d_{2l+3} - \frac{8}{15} d_{2l+4} - \frac{39}{80} d_{2l+5} - \frac{7}{60} d_{2l+6} - \frac{1}{240} d_{2l+7} = 0. \end{aligned}$$

Se considera para cada  $l \in \mathbb{Z}$ , que la ecuación definida anteriormente es una ecuación lineal en diferencias. Con lo cual, para hallar  $d_k$ , con  $k = \{2l - 3, 2l - 2, \dots, 2l + 7\}$ , se utiliza la transformada  $Z$ . Para  $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ , sean

$$q_1(z) := \sum_{l \in \mathbb{Z}} d_{2l+1} z^{2l+1} \quad \text{y} \quad q_2(z) := \sum_{l \in \mathbb{Z}} d_{2l} z^{2l}. \quad (6.14)$$

La condición de ortogonalidad Ec.(6.8) se puede reescribir matricialmente,

$$P(z)(q_1(z), q_2(z))^T = 0, \quad \forall z \in \mathbb{C} - \{0\} \quad (6.15)$$

donde

$$(P(z))^T = \begin{bmatrix} -\frac{1}{240} z^7 - \frac{39}{80} z^5 + \frac{59}{120} z^3 + \frac{59}{120} z - \frac{39}{80} z^{-1} - \frac{1}{240} z^{-3} \\ -\frac{7}{60} z^6 - \frac{8}{15} z^4 + \frac{13}{10} z^2 - \frac{8}{15} - \frac{7}{60} z^{-2} \end{bmatrix}.$$

La Ec.(6.15) se resuelve utilizando comandos específicos y lenguaje simbólico en MATLAB y una solución es

$$\begin{bmatrix} q_1(z) \\ q_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -28z^5 - 184z^3 - 28z^1 \\ z^6 + 119z^4 + 119z^2 + 1 \end{bmatrix}.$$

De  $q_1(z)$  y  $q_2(z)$  se obtienen los coeficientes  $d_k$ , y se reemplazan en Ec.(6.7). Así la expresión para la wavelet  $\psi$  es:

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^6 d_k \varphi(2x - k), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (6.16)$$

con  $[d_0, d_1, \dots, d_6] = [1, -28, 119, -184, 119, -28, 1]$ .

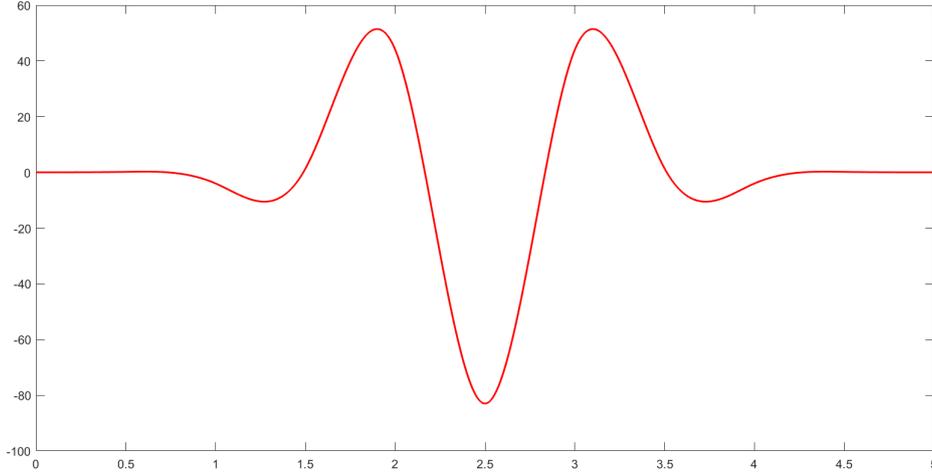


Fig 6.1: Wavelet madre  $\psi$ .

$\psi(x)$  tienen soporte en  $[0, 5]$ , es simétrica (Fig. (6.1)) y satisface las condición de ortogonalidad Ec.(6.8).

### 6.3. Bases spline wavelet con derivada ortogonal sobre el intervalo

Teniendo en cuenta que la colección de los subespacios B-splines cúbicos  $\{V_j^{[0,1]}\}_j$  definidos en la Sección 5.4 forman un AMR en  $L_2[0, 1]$  [46], para cada  $j$  existe un subespacio wavelet  $W_j^{[0,1]}$  que satisface,

$$V_{j+1}^{[0,1]} = V_j^{[0,1]} \oplus W_j^{[0,1]}. \quad (6.17)$$

Como la dimensión de cada subespacio  $V_{j+1}^{[0,1]}$  es  $2^{j+1} + 1$ , de la relación anterior se tiene que

$$\dim(V_{j+1}^{[0,1]}) = \dim(V_j^{[0,1]} \oplus W_j^{[0,1]}) = \dim(V_j^{[0,1]}) + \dim(W_j^{[0,1]}) = 2^{j+1} + 1. \quad (6.18)$$

De aquí se deduce que la dimensión de  $W_j^{[0,1]}$  es  $2^j$ , para  $j \geq 1$ .

Se busca, entonces, una base wavelet para  $W_j^{[0,1]}$ , donde las funciones componentes satisfagan la condición de ortogonalidad de las derivadas.

Debido a que el soporte de wavelet madre  $\psi$  es  $[0, 5]$ , se tiene que sólo  $2^j - 4$  funciones  $\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k)$  tienen soporte totalmente contenido en  $[0, 1]$ . Para completar la base, como las trasladadas de  $\psi$  son linealmente independientes, es necesario definir definir 4 wavelets más para formar una base de  $W_j^{[0,1]}$ .

### 6.3.1. Wavelets de borde

En el trabajo de Černá *y col.* [24] se proponen dos wavelets  $\psi_{b_1}, \psi_{b_2} \in W_0^{[0,1]}$ , como combinación lineal de traslaciones y dilataciones adecuadas de  $\varphi, \varphi_{b_1}$  y  $\varphi_{b_2}$  definidas como funciones de borde en la Sección 5.4,

$$\psi_{b_1}(x) = c_0^{b_1}\varphi_{b_1}(2x) + c_1^{b_1}\varphi_{b_2}(2x) + \sum_{k=2}^4 c_k^{b_1}\varphi(2x - k + 2) \quad (6.19)$$

$$\psi_{b_2}(x) = c_0^{b_2}\varphi_{b_1}(2x) + c_1^{b_2}\varphi_{b_2}(2x) + \sum_{k=2}^6 c_k^{b_2}\varphi(2x - k + 2) \quad (6.20)$$

donde

$$\begin{aligned} [c_0^{b_1}, c_1^{b_1}, \dots, c_4^{b_1}] &= \left[ \frac{939}{70}, \frac{-393}{20}, \frac{6233}{560}, -4, 1 \right], \\ [c_0^{b_2}, c_1^{b_2}, \dots, c_6^{b_2}] &= \left[ \frac{1444}{953}, \frac{1048}{1871}, \frac{-1340}{209}, \frac{545}{48}, \frac{-6839}{655}, 7, -3 \right]. \end{aligned}$$

Por su definición, el soporte de  $\psi_{b_1}$  es  $[0, 3]$  y el soporte de  $\psi_{b_2}$  es  $[0, 4]$ . Ambas wavelets tienen dos momentos nulos y además cumplen la condición de ortogonalidad Ec.(6.8).

A partir de estas funciones, para cada escala  $j \geq 1$  se definen,

$$\begin{aligned} \psi_{j,1}(x) &= \frac{2^{-j/2}}{\|\psi'_{b_1}\|} \psi_{b_1}(2^j x), & \psi_{j,2}(x) &= \frac{2^{-j/2}}{\|\psi'_{b_2}\|} \psi_{b_2}(2^j x), \\ \psi_{j,2^j-1}(x) &= \frac{2^{-j/2}}{\|\psi'_{b_2}\|} \psi_{b_2}(2^j(1-x)), & \psi_{j,2^j}(x) &= \frac{2^{-j/2}}{\|\psi'_{b_1}\|} \psi_{b_1}(2^j(1-x)), \end{aligned}$$

( $\|\cdot\|$  denota la norma en  $L_2[0, 1]$ ), el conjunto de **wavelets de borde**

$$\Psi_j^{bord} = \{ \psi_{j,1}, \psi_{j,2}, \psi_{j,2^j-1}, \psi_{j,2^j} \}, \quad (6.21)$$

y el conjunto de **wavelets interiores** como,

$$\Psi_j^{int} = \left\{ \psi_{j,k}(x) := \frac{2^{-j/2}}{\|\psi'_{j,k}\|} \psi(2^j x - k + 3), k = 3, 4, \dots, 2^j - 2 \right\}. \quad (6.22)$$

Para cada  $j \geq 1$ , el subespacio  $W_j^{[0,1]} = \text{gen } \Psi_j$  donde,

$$\Psi_j = \Psi_j^{int} \cup \Psi_j^{bord}. \quad (6.23)$$

En la Fig.(6.2) se muestran las funciones interiores de la base de  $W_3^{[0,1]}$ .

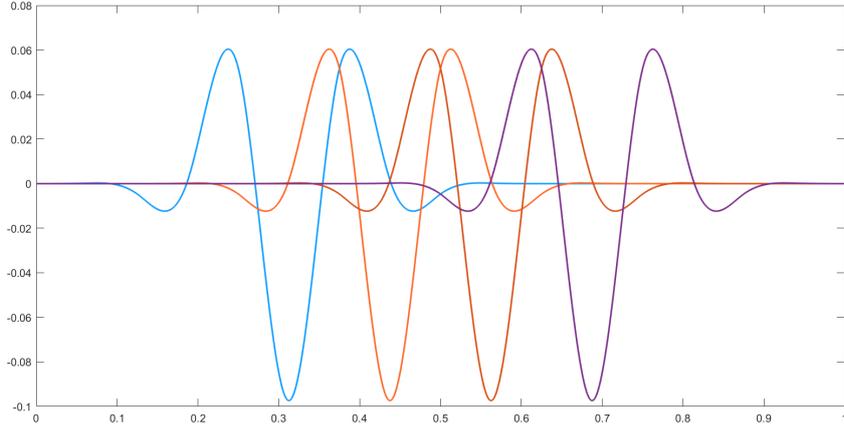


Fig 6.2: Wavelets interiores de la base de  $W_3^{[0,1]}$ .

De Ec.(6.17) se sabe que  $V_{j+1}^{[0,1]}$  es suma directa de  $V_j^{[0,1]}$  y  $W_j^{[0,1]}$  para  $j \geq j_0$ ,

$$V_{j+1}^{[0,1]} = V_{j_0}^{[0,1]} \oplus W_{j_0}^{[0,1]} \oplus W_{j_0+1}^{[0,1]} \dots \oplus W_j^{[0,1]}, \quad \text{para } j_0 \geq 3. \quad (6.24)$$

Considerando los conjuntos de índices,

$$\mathcal{I}_j = \{k \in \mathbb{Z}, 1 \leq k \leq 2^j + 1\}, \quad \mathcal{J}_j = \{k \in \mathbb{Z}, 1 \leq k \leq 2^j\}, \quad (6.25)$$

se reescriben las bases dadas en Ec.(5.25) y Ec.(6.23) para los espacios  $V_j^{[0,1]}$  y  $W_j^{[0,1]}$  respectivamente, como

$$\Phi_j = \left\{ \frac{\varphi_{j,k}}{\|\varphi'_{j,k}\|}, k \in \mathcal{I}_j \right\} \quad \text{y} \quad \Psi_j = \{\psi_{j,k}, k \in \mathcal{J}_j\}. \quad (6.26)$$

De esta manera se puede definir una base que tiene como wavelets de borde a las wavelets de Černá y col.

**Definición 6.1.** Dado  $j_0 \geq 3$  y  $J \geq j_0$ , a partir de la descomposición dada en Ec.(6.24), una **base wavelet para los subespacios**  $V_{j+1}^{[0,1]}$  es,

$$\Psi_{j_0}^J = \Phi_{j_0} \cup \bigcup_{j=j_0}^J \Psi_j \quad (6.27)$$

### 6.3.2. Diseño de nuevas wavelets de borde

En base a la experimentación numérica realizada, con el objetivo de mejorar la convergencia se decidió proponer una construcción alternativa para las wavelets de borde. En este caso, se requiere que las wavelets satisfagan la condición de ortogonalidad Ec.(6.8).

Se definen  $\psi_{b_1}^{lc}, \psi_{b_2}^{lc} \in V_1^{[0,1]}$ , con soporte en  $[0, 3]$  y  $[0, 4]$ , respectivamente, las expresiones de las funciones son:

$$\psi_{b_1}^{lc}(x) = a_0\varphi_{b_1}(2x) + a_1\varphi_{b_2}(2x) + \sum_{k=2}^4 a_k\varphi(2x - k + 2), \quad (6.28)$$

$$\psi_{b_2}^{lc}(x) = \tilde{a}_0\varphi_{b_1}(2x) + \tilde{a}_1\varphi_{b_2}(2x) + \sum_{k=2}^6 \tilde{a}_k\varphi(2x - k + 2). \quad (6.29)$$

Se imponen dos condiciones para obtener los coeficientes de  $\psi_{b_1}^{lc}$  y  $\psi_{b_2}^{lc}$ :

1.  $\psi_{b_1}^{lc}$  y  $\psi_{b_2}^{lc}$  satisfacen la condición de admisibilidad Ec.(3.4) entonces,

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_{b_1}^{lc}(x) dx = 0 \quad y \quad \int_{\mathbb{R}} \psi_{b_2}^{lc}(x) dx = 0. \quad (6.30)$$

2.  $\psi_{b_1}^{lc}$  y  $\psi_{b_2}^{lc}$  satisfacen la condición de ortogonalidad de las derivadas Ec.(6.8),

$$\left\langle \psi_{b_1}^{\prime lc}(x), \varphi'(x - l) \right\rangle = 0, \quad \forall l \in \mathbb{Z}. \quad (6.31)$$

$$\left\langle \psi_{b_2}^{\prime lc}(x), \varphi'(x - l) \right\rangle = 0, \quad \forall l \in \mathbb{Z}. \quad (6.32)$$

Los coeficientes  $a_k$  y  $\tilde{a}_k$ , se obtienen de manera análoga que los coeficientes  $d_k$  de la wavelet madre. Así,

$$[a_0, a_1, \dots, a_4] = \left[ \frac{-286}{49}, \frac{117}{14}, \frac{-1691}{392}, 1, \frac{-1}{28} \right], \quad (6.33)$$

$$[\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_6] = \left[ \frac{3999}{121}, \frac{-2236}{49}, \frac{5837}{295}, 1, \frac{397}{98}, 1, \frac{-1}{28} \right]. \quad (6.34)$$

**Proposición 6.1.** *Las wavelets  $\psi_{b_1}^{lc}$  y  $\psi_{b_2}^{lc}$  definidas anteriormente satisfacen la condición de ortogonalidad Ec.(6.8) y tienen dos momentos nulos.*

*Demostración.* La condición de ortogonalidad se cumple por la construcción. Para demostrar que  $\psi_{b_1}^{lc}$  y  $\psi_{b_2}^{lc}$  tienen 2 momentos nulos se debe probar que

$$\int_{\mathbb{R}} x^i \psi_{b_1}^{lc}(x) dx = 0 \quad y \quad \int_{\mathbb{R}} x^i \psi_{b_2}^{lc}(x) dx = 0, \quad \text{con } i = 0, 1. \quad (6.35)$$

Si  $i = 0$ , se trata de la condición dada por Ec.(6.30) que se cumple para cada una de las wavelets por construcción.

Si  $i = 1$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} x \psi_{b_1}^{lc}(x) dx &= a_0 \int_0^3 x \varphi_{b_1}(2x) dx + a_1 \int_0^3 x \varphi_{b_2}(2x) dx + \sum_{k=2}^4 a_k \int_0^3 x \varphi(2x - k + 2) dx \\ &= a_0 \frac{3}{40} + a_1 \frac{9}{40} + a_3 \frac{1}{2} + a_4 \frac{3}{4} + a_5 1 \\ &= 0, \end{aligned}$$

y la última igualdad vale tomando los coeficientes  $a_k$  de Ec.(6.33). De manera similar se demuestra que  $\int_{\mathbb{R}} x \psi_{b_2}^{lc}(x) dx = 0$ . □

Utilizando estas wavelets de borde, el nuevo conjunto de *wavelets de borde* es

$$\begin{aligned} \Psi_j^{lc} &= \{ \psi_{j,1}, \psi_{j,2}, \psi_{j,2^j-1}, \psi_{j,2^j} \}, \tag{6.36} \\ \psi_{j,1}(x) &= \frac{2^{-j/2}}{\| \psi_{b_1}'^{lc} \|} \psi_{b_1}^{lc}(2^j x), & \psi_{j,2}(x) &= \frac{2^{-j/2}}{\| \psi_{b_2}'^{lc} \|} \psi_{b_2}^{lc}(2^j x), \\ \psi_{j,2^j-1}(x) &= \frac{2^{-j/2}}{\| \psi_{b_2}'^{lc} \|} \psi_{b_2}^{lc}(2^j(1-x)), & \psi_{j,2^j}(x) &= \frac{2^{-j/2}}{\| \psi_{b_1}'^{lc} \|} \psi_{b_1}^{lc}(2^j(1-x)), \end{aligned}$$

Para cada  $j \geq 1$ , el subespacio wavelet  $\widetilde{W}_j^{[0,1]} = \text{gen } \widetilde{\Psi}_j$  con,

$$\widetilde{\Psi}_j = \Psi_j^{int} \cup \Psi_j^{lc} = \{ \psi_{j,k}, k \in \mathcal{J}_j \}. \tag{6.37}$$

**Definición 6.2.** Dado  $j_0 \geq 3$  y  $J \geq j_0$ , a partir de la descomposición dada en Ec.(6.24), una *base spline wavelet con derivada ortogonal para los subespacios*  $V_{j+1}^{[0,1]}$  es,

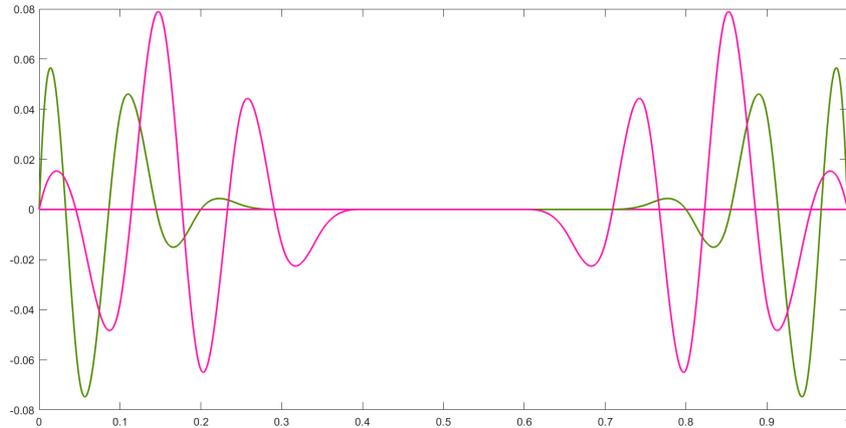
$$\widetilde{\Psi}_{j_0}^J = \Phi_{j_0} \cup \bigcup_{j=j_0}^J \widetilde{\Psi}_j = \{ g_1, g_2, \dots, g_{2^{J+1}+1} \}, \tag{6.38}$$

donde

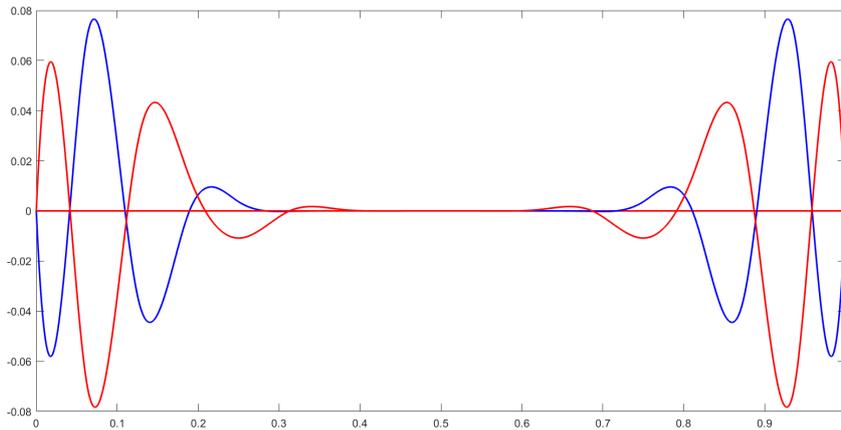
- $g_l = \varphi_{j_0,l}$ , para  $l = 1, 2, \dots, 2^{j_0} + 1$
- $g_{2^j+1+l} = \psi_{j,l}$ , para  $l = 1, 2, \dots, 2^j$ ,  $j = j_0, \dots, J$

Debido a que  $L_2[0, 1]$  es suma directa de  $V_{j_0}^{[0,1]}$ ,  $\widetilde{W}_{j_0}^{[0,1]}$ ,  $\widetilde{W}_{j_0+1}^{[0,1]}$ ,  $\dots$ , y como consecuencia de la definición anterior, la unión de las bases de estos subespacios forman una base wavelet con derivada ortogonal para  $L_2[0, 1]$ ,

$$\Psi = \Phi_{j_0} \cup \bigcup_{j=j_0}^{\infty} \widetilde{\Psi}_j. \tag{6.39}$$



(a) Wavelets de borde de de la base de  $W_3^{[0,1]}$ :  $\psi_{b_1}$  (verde)  $\psi_{b_2}$  (rosa).



(b) Wavelets de borde de la base de  $\widetilde{W}_3^{[0,1]}$ :  $\psi_{b_1}^{lc}$  (azul),  $\psi_{b_2}^{lc}$  (rojo).

Fig 6.3: Wavelets de borde.

**Observación 6.1.** Si bien las wavelets de borde definidas por Černá y col. y las diseñadas en esta tesis cumplen las mismas propiedades, puede observarse en la Fig.(6.3), que las gráficas de  $\psi_{b_1}^{lc}$  y  $\psi_{b_2}^{lc}$  están más concentradas cerca de los bordes  $x = 0$  y  $x = 1$ . Esta característica resultará muy ventajosa a la hora de utilizar las bases en la resolución de ecuaciones diferenciales.

### 6.3.3. Propiedades de las bases spline wavelet con derivada ortogonal

Aquí se describen las propiedades más importantes de las bases spline wavelet definidas en Ec.(6.38). Primero se demuestra que las derivadas de las funciones de escala y wavelets son ortogonales, al igual que las derivadas de las wavelets entre diferentes

escalas. Luego, en el teorema (6.1), se demuestra que el conjunto de derivadas de las funciones de la base  $\tilde{\Psi}_j$  definida en Ec.(6.37) constituyen una sucesión de Riesz en  $L_2[0, 1]$ .

**Proposición 6.2.** *Si  $\varphi_{j_0,k} \in V_{j_0}^{[0,1]}$ ,  $\psi_{j,k} \in \tilde{W}_j^{[0,1]}$  con  $j \geq j_0$ , se tiene que:*

$$\langle \psi'_{j,k}, \varphi'_{j_0,k} \rangle = 0, \quad (6.40)$$

$$\langle \psi'_{j_1,k}, \psi'_{j_2,\bar{k}} \rangle = 0, \quad j_1 \neq j_2. \quad (6.41)$$

***Demostración.***

- Cuando  $j = j_0$ , la Ec.(6.40) es la condición de ortogonalidad requeridas en Ecs.(6.8), (6.31) y (6.32).
- Si  $j > j_0$ , se puede escribir  $j = j_0 + n$  con  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\langle \varphi'_{j_0,k_1}, \psi'_{j,k_2} \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi'(2^{j_0}x - k_1) \psi'(2^{j_0+n}x - k_2) \, dx \quad (6.42)$$

$$= 2^{-j_0} \int_{\mathbb{R}} \varphi'(u) \psi'(2^n u - k_3) \, du, \quad (6.43)$$

donde  $k_3 = k_2 - 2^n k_1$ , con  $k_1 = 3, \dots, 2^j - 1$  y  $k_2 = 3, \dots, 2^j - 2$ . Como  $\varphi(u) \in V_0^{[0,1]}$  y  $V_0^{[0,1]} \subset \dots \subset V_n^{[0,1]}$ , luego  $\varphi(u) = \sum_{l=1}^{2^{n+1}} c_l \varphi_{n,l}(u)$ , derivando y reemplazando en Ec.(6.43) se tiene,

$$= 2^{-j_0} \int_{\mathbb{R}} \left( 2^n \sum_{l=1}^{2^{n+1}} c_l \varphi'(2^n u - l) \right) \psi'(2^n u - k_3) \, du \quad (6.44)$$

$$\begin{aligned} &= 2^{n-j_0} \sum_{l=1}^{2^{n+1}} c_l \left( \int_{\mathbb{R}} \varphi'(2^n u - l) \psi'(2^n u - k_3) \, du \right) \\ &= 0, \end{aligned} \quad (6.45)$$

debido a la la condición de ortogonalidad Ecs.(6.8).

Para demostrar Ec.(6.41) se tiene en cuenta que  $\psi_{j_1,k} \in \tilde{W}_{j_1}^{[0,1]}$  y  $\psi_{j_2,\bar{k}} \in \tilde{W}_{j_2}^{[0,1]}$ , sin pérdida de generalidad se supone  $j_2 > j_1$ .

Como  $\psi_{j_1,k}(x) = \sum_{n=0}^6 d_n \varphi(2(2^{j_1}x - k) - n)$ ,

$$\begin{aligned} \left\langle \psi'_{j_1,k}, \psi'_{j_2,\tilde{k}} \right\rangle &= \left\langle 2^{j_1+1} \sum_{n=0}^6 d_n \varphi'(2^{j_1+1}x - (2k+n)), \psi'_{j_2,\tilde{k}}(x) \right\rangle \\ &= 2^{j_1+1} \sum_{n=0}^6 d_n \left\langle \varphi'(2^{j_1+1}x - (2k+n)), \psi'_{j_2,\tilde{k}}(x) \right\rangle \\ &= 2^{j_1+1} \sum_{n=0}^6 d_n \left\langle \varphi'_{j_1+1,2k+n}, \psi'_{j_2,\tilde{k}} \right\rangle \\ &= 0, \end{aligned} \tag{6.46}$$

pues si  $j_2 = j_1 + 1$  por Ec.(6.40) el producto interno  $\left\langle \varphi'_{j_1+1,2k+n}, \psi'_{j_2,\tilde{k}} \right\rangle = 0$ . Si  $j_2 > j_1 + 1$  por lo demostrado en Ec.(6.42) el producto interno anterior también vale 0.

De manera análoga se muestra que Ec.(6.41) es válida para las wavelets de borde.  $\square$

**Definición 6.3.** Una sucesión  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  en  $L_2[0,1]$  es una **sucesión de Riesz**, si existen constantes positivas  $A$  y  $B$  tales que

$$A \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k \right\|_{L_2[0,1]}^2 \leq B \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2, \tag{6.47}$$

para toda sucesión de escalares  $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in l_2(\mathbb{N})$ .

**Teorema 6.1.** La sucesión  $\{\psi'_{j,k} : j = 3, 4, \dots, k = 1, \dots, 2^j\}$  es una sucesión de Riesz uniforme en  $L_2[0,1]$ .

**Demostración.** Se debe que probar que  $\{\psi'_{j,k} : j = 3, 4, \dots, k = 1, \dots, 2^j\}$  satisface la Ec.(6.47), es decir que existen constantes positivas  $A$  y  $B$  tal que

$$A \sum_{j=3}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^j} |b_{j,k}|^2 \leq \left\| \sum_{j=3}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^j} b_{j,k} \psi'_{j,k} \right\|_{L_2[0,1]}^2 \leq B \sum_{j=3}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^j} |b_{j,k}|^2 \tag{6.48}$$

para cualquier sucesión de escalares  $\{b_{j,k}\}_{k=1}^{\infty}$ .

Por la condición de ortogonalidad de las derivadas dada en Ec.(6.41) vale que,

$$\left\| \sum_{j=3}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^j} b_{j,k} \psi'_{j,k} \right\|_{L_2[0,1]}^2 = \sum_{j=3}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{2^j} b_{j,k} \psi'_{j,k} \right\|_{L_2[0,1]}^2. \tag{6.49}$$

Basta probar, para  $j$  dado, que existen constantes positivas  $A$  y  $B$  que no dependen de  $j$  tal que

$$A \sum_{k=1}^{2^j} |b_{j,k}|^2 \leq \left\| \sum_{k=1}^{2^j} b_{j,k} \psi'_{j,k} \right\|_{L_2[0,1]}^2 \leq B \sum_{k=1}^{2^j} |b_{j,k}|^2.$$

Aplicando el Corolario (2.1) a la sucesión  $\{\psi'_{j,k} : k = 1, \dots, 2^j\}$  para  $j$  fijo, se tiene que las constantes de Riesz de la sucesión son

$$A = \sqrt{|\lambda_{\min}(D^j)|}, \quad B = \sqrt{|\lambda_{\max}(D^j)|}, \quad (6.50)$$

donde  $D^j = (\langle \psi'_{j,k}, \psi'_{j,l} \rangle)_{1 \leq k, l \leq 2^j}$ ,  $\lambda_{\min}(D^j)$  y  $\lambda_{\max}(D^j)$  denotan el mínimo y el máximo autovalor de  $D^j$ , que pueden estimarse utilizando los círculos de Gerschgorin [49] que se enuncian en el siguiente lema.

**Lema 6.1.** Sea  $M = (m_{i,l})_{1 \leq i, l \leq n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , se definen  $r_i = \sum_{i \neq l} |a_{i,l}|$  y los discos de Gerschgorin  $D_i = \{z \in \mathbb{C}, |z - m_{i,i}| \leq r_i\}$ , entonces cada autovalor  $\lambda_k$  de  $M$  se encuentra en la unión de los  $n$  discos de Gerschgorin, esto es  $\lambda_k \in \bigcup_{i=1}^n D_i$  para todo  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Volviendo a la demostración,  $D^j$  es una matriz banda, diagonal dominante y teniendo en cuenta la normalización de las funciones de la base tiene los siguientes elementos,

$$(D^j)_{k,l} = \begin{cases} 1 & k = l \\ \frac{618}{2519} & |k - l| = 1 \\ -\frac{261}{4010} & |k - l| = 2 \\ -\frac{88}{28899} & |k - l| = 3 \\ -\frac{7}{143505} & |k - l| = 4 \end{cases}$$

Utilizando el teorema de Gerschgorin se tiene

$$\lambda_{\min}^j \geq \min \left( |D_{k,k}^j| - \sum_{l=1, l \neq k}^{2^j} |D_{k,l}^j| \right) > \frac{1}{5}, \quad (6.51)$$

$$\lambda_{\max}^j \leq \max \left( |D_{k,k}^j| + \sum_{l=1, l \neq k}^{2^j} |D_{k,l}^j| \right) < \frac{9}{5}, \quad (6.52)$$

donde  $D_{k,l}^j$  son las entradas de  $D^j$ . Con lo cual,  $\lambda_{\min}^j > \frac{1}{5}$  y  $\lambda_{\max}^j < \frac{9}{5}$ .

Como para cualquier  $j$ ,  $D_j$  tiene la misma forma, las cotas para  $\lambda_{\min}^j$  y  $\lambda_{\max}^j$  halladas anteriormente, pueden elegirse para todo  $j$ , entonces

$$A = \sqrt{\frac{1}{5}} \quad y \quad B = \sqrt{\frac{9}{5}}. \quad (6.53)$$

Así, existen constantes positivas  $A$  y  $B$  independientes de  $j$  tal que

$$A \sum_{k=1}^{2^j} |b_{j,k}|^2 \leq \left\| \sum_{k=1}^{2^j} b_{j,k} \psi'_{j,k} \right\|_{L_2[0,1]}^2 \leq B \sum_{k=1}^{2^j} |b_{j,k}|^2. \quad (6.54)$$

Aplicando estas desigualdades en Ec.(6.49), se tiene que existen constantes positivas  $A$  y  $B$  tal que

$$A \sum_{j=3}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^j} |b_{j,k}|^2 \leq \left\| \sum_{j=3}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^j} b_{j,k} \psi'_{j,k} \right\|_{L_2[0,1]}^2 \leq B \sum_{j=3}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^j} |b_{j,k}|^2.$$

Con lo cual el teorema queda demostrado. □

### 6.3.4. Condicionamiento de la matriz de rigidez

Uno de los resultados más importantes de esta tesis es que el número de condición de la matriz de rigidez que se obtiene al utilizar las bases construidas en la resolución numérica del problema Ec.(6.1), está uniformemente acotado.

Al inicio de este capítulo se presentó un problema de segundo orden, cuya forma bilineal es

$$a(u, v) = \langle p u', v' \rangle + \langle q u, v \rangle \quad (6.55)$$

con  $p(x), q(x)$  funciones continuas en  $[0, 1]$  y  $p(x) > 0$  y  $q(x) \geq 0$  para  $x \in [0, 1]$ .

Si se utiliza la base  $\tilde{\Psi}_{j_0}^J$  del subespacio  $V_{J+1}^{[0,1]}$  definida en Ec.(6.38), en el método Wavelet-Galerkin, la matriz de rigidez asociada

$$\mathbf{K}_J := a(g_i, g_l)_{1 \leq i, l \leq 2^{J+1}}, \quad (6.56)$$

es una matriz banda, simétrica y definida positiva.

**Teorema 6.2.** *El número de condición de la matriz de rigidez  $K_J$  está uniformemente acotado.*

**Demostración.** *Debido a que  $K_J$  es una matriz simétrica y definida positiva el número de condición en norma 2 está dado por*

$$\text{cond}(K_J) = \frac{\lambda_{\text{máx}}}{\lambda_{\text{mín}}}, \quad (6.57)$$

donde  $\lambda_{\text{máx}}$  y  $\lambda_{\text{mín}}$  denotan el máximo y mínimo autovalor de la matriz  $K_J$ .

Para demostrar que  $\text{cond}(K_J)$  está acotado hay que encontrar cotas para  $\lambda_{\text{máx}}$  y  $\lambda_{\text{mín}}$ , independientes de  $j$ .

Por un lado, se sabe que si  $u = \sum_{l=1}^{2^{J+1}+1} \beta_l g_l$ , con  $g_l \in \tilde{\Psi}_{j_0}^J$  y  $\beta$  es un vector de coeficientes, se satisface la siguiente desigualdad,

$$\lambda_{\min} \leq \frac{\beta^t K_J \beta}{\beta^t \beta} \leq \lambda_{\max}, \quad (6.58)$$

con  $\lambda_{\min} = \min_{\beta \neq 0} \frac{\beta^t K_J \beta}{\beta^t \beta}$  y  $\lambda_{\max} = \max_{\beta \neq 0} \frac{\beta^t K_J \beta}{\beta^t \beta}$ .

Como  $a(u, u) = \beta^t K_J \beta$ , probando que

$$c(\beta^t \beta) \leq a(u, u) \leq C(\beta^t \beta) \quad (6.59)$$

para toda  $u$ , se encuentran cotas para  $\lambda_{\min}$  y  $\lambda_{\max}$ .

Tomando  $u \in V_{J+1}^{[0,1]}$ ,  $u = \sum_{k=1}^{2^{j_0}+1} c_{j_0,k} \varphi_{j_0,k} + \sum_{j=j_0}^J \sum_{k=1}^{2^j} b_{j,k} \psi_{j,k}$ , con  $\varphi_{j_0,k}, \psi_{j,k} \in \tilde{\Psi}_{j_0}^J$  se tiene,

$$a(u, u) \geq \langle p u', u' \rangle \geq \mu \langle u', u' \rangle = \mu \|u'\|_{L_2[0,1]}^2, \quad (6.60)$$

donde  $\mu = \min_{x \in (0,1)} p(x) > 0$ .

$$\|u'\|_{L_2[0,1]} = \left\| \sum_{k=1}^{2^{j_0}+1} c_{j_0,k} \varphi'_{j_0,k} + \sum_{j=j_0}^J \sum_{k=1}^{2^j} b_{j,k} \psi'_{j,k} \right\|_{L_2[0,1]}, \quad (6.61)$$

por teorema (6.1) el conjunto de derivadas de  $\varphi_{j_0,k}$  y  $\psi_{j,k}$  es una sucesión de Riesz, con lo cual existe una constante positiva  $C_1$  independiente de  $j$  tal que

$$\|u'\|_{L_2[0,1]} \geq C_1 \left( \sum_{k=1}^{2^{j_0}+1} |c_{j_0,k}|^2 + \sum_{j=j_0}^J \sum_{k=1}^{2^j} |b_{j,k}|^2 \right)^{1/2}. \quad (6.62)$$

Así, de Ecs.(6.60) y (6.62), existe  $C_2 = \mu C_1^2$  que cumple

$$a(u, u) \geq C_2(\beta^t \beta). \quad (6.63)$$

Para obtener la desigualdad de la derecha de Ec.(6.59), observar que si  $\nu = \min_{x \in [0,1]} \{p(x), q(x)\}$ ,

$$a(u, u) \leq \nu \left( \|u'\|_{L_2[0,1]}^2 + \|u\|_{L_2[0,1]}^2 \right). \quad (6.64)$$

Por teorema (6.1), existe una constante positiva  $C_3$  independiente de  $j$  tal que

$$\|u'\|_{L_2[0,1]} \leq C_3 \left( \sum_{k=1}^{2^{j_0}+1} |c_{j_0,k}|^2 + \sum_{j=j_0}^J \sum_{k=1}^{2^j} |b_{j,k}|^2 \right)^{1/2}. \quad (6.65)$$

Además,

$$\|u\|_{L_2[0,1]} \leq \left\| \sum_{k=1}^{2^{j_0+1}} c_{j_0,k} \varphi_{j_0,k} \right\|_{L_2[0,1]} + \sum_{j=j_0}^J \left\| \sum_{k=1}^{2^j} b_{j,k} \psi_{j_0,k} \right\|_{L_2[0,1]} .$$

Debido a que  $\|\psi_{j,k}\|_{L_2[0,1]} = O(2^{-j})$  cuando  $j \rightarrow \infty$  y  $\varphi_{j_0,k}, k \in \mathcal{I}_{j_0}$  forman una base de Riesz existe una constante positiva  $C_4$ , entonces

$$\|u\|_{L_2(0,1)} \leq C_4 \left( \left( \sum_{k=1}^{2^{j_0+1}} |c_{j_0,k}|^2 \right)^{1/2} + \sum_{j \geq j_0} 2^{-j} \left( \sum_{k=1}^{2^{j+1}} |b_{j,k}|^2 \right)^{1/2} \right). \quad (6.66)$$

El término de la derecha de la desigualdad anterior, puede reescribirse como el módulo del producto interno entre  $(1, 2^{-j_0}, 2^{-(j_0+1)}, \dots)$  y  $\left( \left( \sum_{k=1}^{2^{j_0+1}} |c_{j_0,k}|^2 \right)^{1/2}, \left( \sum_{k=1}^{2^{j_0}} |b_{j,k}|^2 \right)^{1/2}, \left( \sum_{k=1}^{2^{j_0+1}} |b_{j,k}|^2 \right)^{1/2}, \dots \right)$ , aplicando la desigualdad de Schwarz, se tiene que existe una constante positiva  $C_5$  independiente de  $j$  tal que

$$\|u\|_{L_2[0,1]}^2 \leq C_5 \left( \sum_{k=1}^{2^{j_0+1}} |c_{j_0,k}|^2 + \sum_{j \geq j_0} \sum_{k=1}^{2^j} |b_{j,k}|^2 \right). \quad (6.67)$$

Por lo tanto, tomando  $C_6 = \nu(C_3 + C_5)$  vale

$$a(u, u) \leq C_6(\beta^t \beta). \quad (6.68)$$

De las Ecs.(6.63) y (6.68), se obtiene que  $\text{cond}(K_J) \leq \frac{C_6}{C_2}$ , independiente de la escala  $J$ .

□

# Capítulo 7

## Resultados Numéricos

En este capítulo se presentan los resultados numéricos obtenidos mediante la implementación del método Wavelet-Galerkin descrito en el Capítulo 4, utilizando las bases formadas por las funciones de escala B-splines y wavelets construidas en el Capítulo 6. Se diseña un algoritmo eficiente para hallar soluciones aproximadas de los problemas planteados. Para esto, se describen las ventajas de la matriz de rigidez y se analizan los errores de las aproximaciones.

Se presentan problemas de valores de contorno de segundo orden cuyas soluciones analíticas son conocidas y se emplean para calcular los errores relativos y verificar orden de convergencia.

En el primer ejemplo, cuya solución tiene un gradiente alto en un valor de su dominio, se verifican los resultados teóricos sobre el condicionamiento y el orden de convergencia.

En los ejemplos 2 y 3 se comparan velocidades de convergencia. En primer lugar, utilizando bases con diferentes wavelets de borde y posteriormente se implementa el método de Vampa *y col.* [17].

En el último ejemplo se muestran las buenas propiedades de la matriz de rigidez.

### 7.1. Aplicación de las bases B-spline wavelet

Para obtener soluciones aproximadas del problema de segundo orden con condiciones de Dirichlet homogéneas planteado en Ec.(6.1),

$$\begin{aligned} L u(x) = -\frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x) u(x) &= f(x) \quad x \in (0, 1), \\ u(0) = u(1) &= 0, \end{aligned} \quad (7.1)$$

se utiliza el método de Wavelet-Galerkin, tomando como subespacios de aproximación a  $V_{J+1}^{[0,1]}$  definidos en la Sección 6.3. Una solución aproximada puede escribirse como

$$u_{J+1} = \sum_{i=1}^{2^{J+1}+1} \alpha_i g_i, \quad (7.2)$$

donde  $g_i$  pertenecen a la base spline wavelet de  $V_{J+1}^{[0,1]}$  definida en Ec.(6.38).

Sin pérdida de generalidad, se consideran  $p(x)$  y  $q(x)$  constantes en Ec.(7.1) . Sustituyendo  $u_{J+1}$  en la forma débil discreta Ec.(6.2), se tiene el problema en forma matricial Ec.(6.3),

$$K_J \alpha = b, \quad (7.3)$$

siendo  $b = \langle f, g_i \rangle_{1 \leq i \leq 2^{J+1}+1}$  el vector del término independiente,  $\alpha = (\alpha_i)_{1 \leq i \leq 2^{J+1}+1}$  el vector de  $2^{J+1} + 1$  incógnitas y  $K_J$  la matriz de rigidez dada por

$$K_J := p \langle g'_i, g'_l \rangle_{1 \leq i, l \leq 2^{J+1}+1} + q \langle g_i, g_l \rangle_{1 \leq i, l \leq 2^{J+1}+1}. \quad (7.4)$$

La matriz  $K_J$ , de dimensión  $N_J = (2^{J+1} + 1)$ , es rala, diagonal por bloques y cada bloque es una matriz banda (Fig. 7.1), debido a la semiortogonalidad de las funciones de escala Ec.(3.18) y la ortogonalidad de las derivadas.

**Observación 7.1.** *Es importante destacar, que a un nivel de aproximación  $j_0$  inicial y  $J \geq j_0$ , el primer bloque de  $K_J$  tiene dimensión  $2^{j_0} + 1$  y cada bloque que se agrega tiene dimensión  $2^j$ , con  $j = j_0, j_0 + 1, \dots, J$  con lo cual para avanzar a la escala  $j_0 + 1$ , solo es necesario resolver el subsistema de dimensión  $2^j$ .*

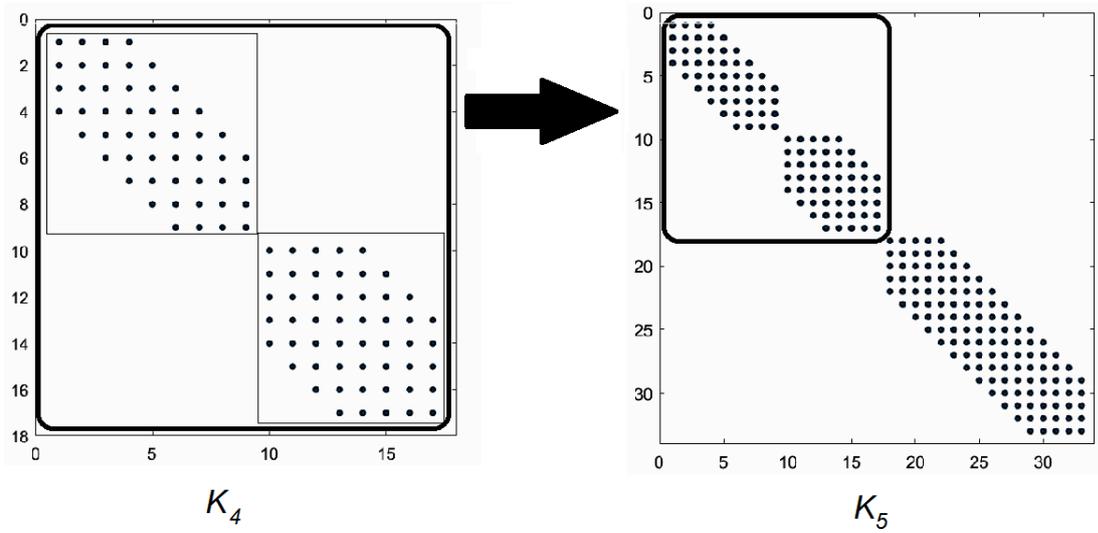


Fig 7.1: Estructura de la matriz  $K_J$ .

Debido a que las bases provienen de una estructura AMR, la solución  $u_{J+1}$  de Ec.(7.2), puede reescribirse como

$$u_{J+1} = \sum_{i=1}^{2^{J+1}+1} \alpha_i g_i \quad (7.5)$$

$$= \sum_{l=1}^{2^{j_0}+1} \alpha_{j_0,l} \varphi_{j_0,l} + \sum_{j=j_0}^J \sum_{l=1}^{2^j} \alpha_{j,l} \psi_{j,l}. \quad (7.6)$$

La primera sumatoria refiere a la aproximación en el subespacio  $V_{j_0}^{[0,1]}$  y la segunda corresponde a los subespacios  $W_j^{[0,1]}$ ,  $j = j_0, j_0 + 1, \dots, J$ .

## 7.2. Estimación del error

Al aplicar el lema de Céa Ec.(4.10), utilizando los subespacios de B-splines cúbicos  $V_{j_0}^{[0,1]}$ , se pueden obtener las cotas para los errores de aproximación. Schoenberg [51] demostró que cuando se interpola una función  $u \in C^4$ , en una red uniforme de nodos de paso  $h$ , con la función spline cúbica  $S_h$ , el error de interpolación puede acotarse con

$$\|u - S_h\|_{H^1}^2 \leq C_1 h^4 \|u\|_\infty. \quad (7.7)$$

Si  $h = 2^{-j}$ , la cota para el error de aproximación utilizando splines es

$$\|u - u_j\|_{L_2}^2 \leq C_2 2^{-4j}. \quad (7.8)$$

Para medir los errores de las aproximaciones en los ejemplos que se verán más adelante, se utiliza la seminorma en  $L_2$ ,  $\|v\|_{L_2} = \left( \sum_{k=0}^{2^j} |v(k/2^j)|^2 \right)^{1/2}$ . Sea  $u$  la solución exacta y  $u_J$  la solución numérica con una escala de nivel  $J$ .

- El error relativo de la aproximación se calcula  $e(J) := \frac{\|u - u_{J+1}\|_{L_2}}{\|u\|_{L_2}}$  para  $J \geq 0$ .
- El error relativo interior denotado por  $e_I(J)$ , donde se calcula el error relativo en un intervalo  $I' = (0 + \delta, 1 - \delta)$  con  $\delta > 0$ .

Para verificar el orden de convergencia  $R$  se tiene en cuenta que

$$e(J) \leq C_2 2^{-jR},$$

de donde  $\frac{e(J)}{e(J+1)} = 2^R$ , con lo cual

$$R = \log_2(e(J)) - \log_2(e(J+1)). \quad (7.9)$$

## 7.3. Algoritmo de aproximación a la solución

A partir de la estructura de la matriz  $K_J$  y del análisis del error se obtiene el siguiente algoritmo.

Se elige una escala inicial  $j_0 \geq 3$ .

- **Paso 1:** Se resuelve el sistema algebraico Ec.(7.3) que se obtiene del primer bloque de la matriz  $K_J$  y se hallan los coeficientes  $\alpha_{j_0,l}$  correspondientes a las funciones de escala. Se tiene  $u_{j_0} = \sum_{l=1}^{2^{j_0}+1} \alpha_{j_0,l} \varphi_{j_0,l}$ .

- **Paso 2:**  $J = j_0$ . Se hallan los coeficientes asociados a las wavelets resolviendo el sistema algebraico Ec.(7.3) proporcionado por el siguiente bloque de la matriz  $K_J$ ,

$$u_{J+1} = u_{j_0} + \sum_{l=1}^{2^J} \alpha_{J,l} \psi_{J,l}.$$

- **Paso 3:** Dada una tolerancia  $\epsilon$  se aplica un criterio de finalización: si  $e(J) < \epsilon$ , PARAR se tiene una buena aproximación, SI NO ir al paso siguiente.
- **Paso 4:**  $J = J + 1$  y se vuelve a **Paso 2**.

## 7.4. Ejemplos

**Ejemplo 1.** En primer lugar se considera el problema Ec.(7.1) con  $p = 1$  y  $q = 0$ ,

$$\begin{aligned} Lu(x) = -u''(x) &= f(x), \\ u(0) = 0, \quad u(1) &= 0, \end{aligned} \tag{7.10}$$

con  $f(x) = 2 + \left(\frac{4}{e^{50} - 1}\right) \left(100^2 \frac{e^{100x}}{e^{50} - 1} - 50^2 \left(1 + \frac{2}{e^{50} - 1}\right) e^{50x}\right)$ .

La solución exacta

$$u(x) = \left(\frac{4}{e^{50} - 1}\right) (e^{50x} - 1) \left(1 - \frac{e^{50x} - 1}{e^{50} - 1}\right) + x(1 - x),$$

tiene gradiente alto cerca de  $x = 1$  y luego es suave en el resto del dominio.

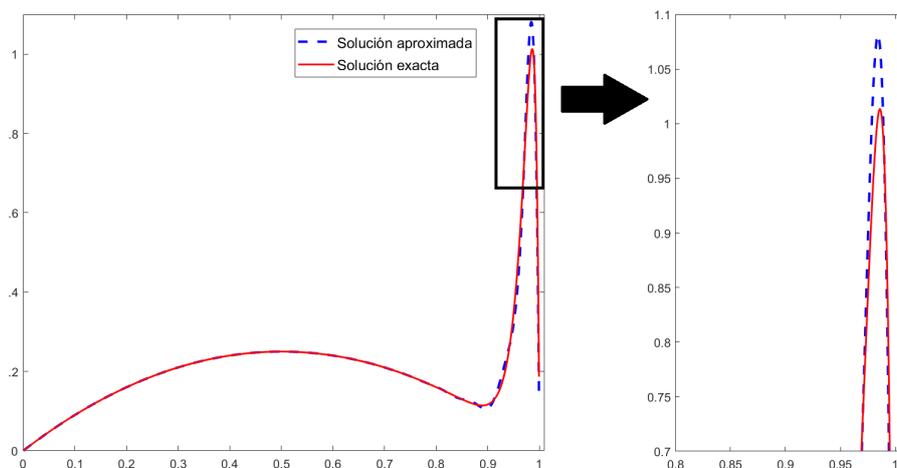
La matriz asociada a este problema es

$$\tilde{K}_J := \langle g'_i, g'_i \rangle_{1 \leq i, l \leq 2^{J+1} + 1}.$$

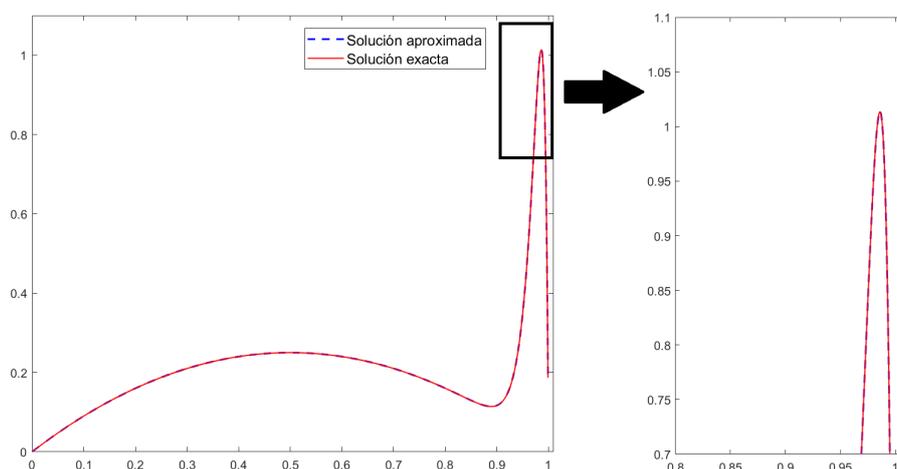
$J$	$e(J)^{lc}$	$e_{I'}(J)^{lc}$
8	1.621e-06	4.841e-09
9	9.482e-08	2.873e-10
10	1.076e-08	1.923e-11
11	1.024e-08	1.239e-12
12	1.020e-08	3.396e-13

Tabla 7.1: Resultados del Ejemplo 1.

Por el teorema (6.2), el número de condición con respecto a la norma 2,  $cond(\tilde{K}_J) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$  está uniformemente acotado, cuando  $J = 10$  el condicionamiento de la matriz  $\tilde{K}_J$  es aproximadamente 219.



(a)  $J = 4$



(b)  $J = 6$

Fig 7.2: Solución exacta y aproximada  $u_J$  para  $J = 4$  y  $J = 6$  del Ejemplo 1.

En la Tabla (7.1) se muestran los errores relativos  $e(J)^{lc}$  y  $e_{I'}(J)^{lc}$  para distintas escalas  $J$ . Se verifica el orden de convergencia teórico para el error relativo interior,

$$e_{I'}(J) = O(2^{-4J}).$$

Lo que significa que para que el error relativo sea inferior a  $1.e-04$  alcanza con la escala  $J = 3$ . En la Fig. (7.2) se muestran las aproximaciones para las escalas  $J = 4$  y  $J = 6$ .

**Ejemplo 2.** Se considera un problema similar al del Ejemplo 1 con

$$f(x) = (70\pi)^2 \sin(70\pi x) - \pi^2 \cos\left(\pi x + \frac{\pi}{2}\right).$$

La solución exacta de esta ecuación diferencial es  $u(x) = \sin(70\pi x) - \cos\left(\pi x + \frac{\pi}{2}\right)$ .

$J$	$N_J$	$e(J)^{lc}$	$e(J)^C$	$e_{I'}(J)^{lc}$	$e_{I'}(J)^C$
5	65	6.140e-01	6.140e-01	5.864e-01	5.535e-01
6	129	1.434e-02	1.632e-02	1.223e-02	1.287e-02
7	257	4.703e-04	8.234e-03	3.995e-04	5.146e-04
8	513	3.975e-05	8.224e-03	1.979e-05	3.021e-04
9	1025	3.208e-05	8.224e-03	1.183e-06	3.014e-04
10	2049	3.202e-05	8.224e-03	2.997e-07	3.013e-04

Tabla 7.2: Resultados del Ejemplo 2.

En la Tabla (7.2) se muestran los errores relativos utilizando la base de Černá y col. [24] denotado con  $e(J)^C$  y  $e_{I'}(J)^C$ , y los errores relativos utilizando la base diseñada en esta tesis, denotado por  $e(J)^{lc}$  y  $e_{I'}(J)^{lc}$ . Se observa que las bases  $\tilde{\Psi}_{j_0}^J$  permiten una convergencia más rápida a la solución exacta. En la Fig. (7.3) se muestra la convergencia de las aproximaciones para distintas escalas.

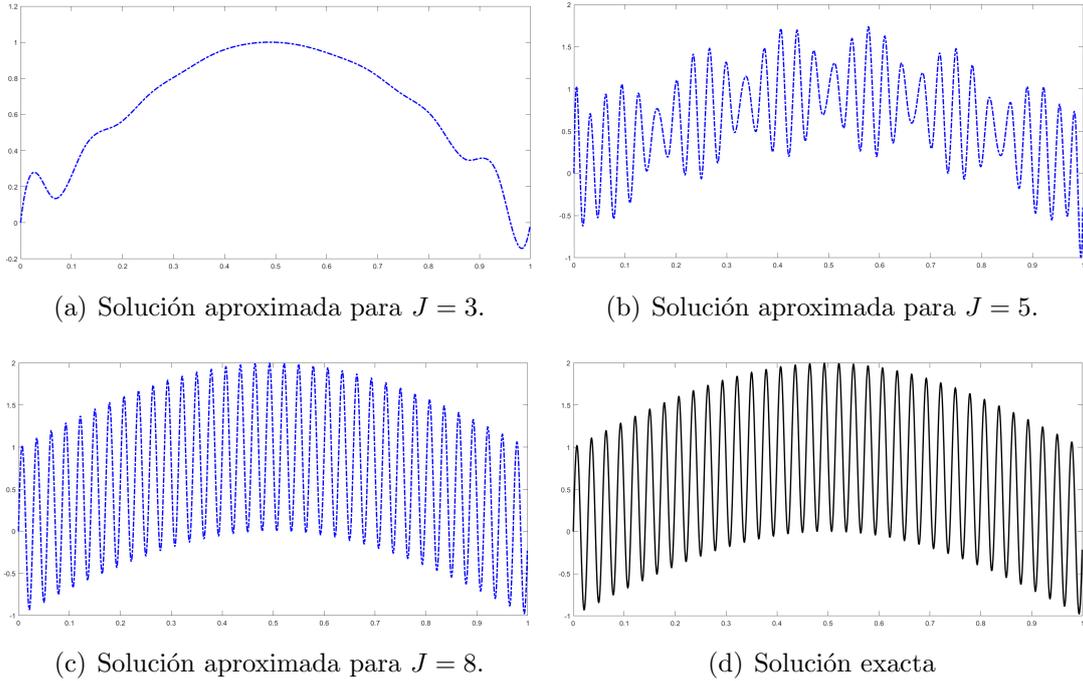


Fig 7.3: Solución exacta y aproximadas del Ejemplo 2 para  $u_J$ ,  $J = 3, 5, 8$ .

**Ejemplo 3.**

$$L u(x) = -u''(x) = f(x), \tag{7.11}$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0,$$

con  $f(x) = (53.7\pi)^2 \text{sen}(53.7\pi x) + (2.3\pi)^2 \text{sen}(2.3\pi x)$  cuya solución exacta es

$$u(x) = \text{sen}(53.7\pi x) + \text{sen}(2.3\pi x).$$

En este problema se realiza una comparación respecto de los resultados obtenidos por el método propuesto por Vampa y col.[17] y las bases de Černá y col.[24].

En la Tabla (7.3) los valores de la primer columna  $e(J)^{hib}$  fueron obtenidos por el método Híbrido propuesto por Vampa y col.[17], mientras que los valores de la segunda y tercera columna corresponden a los resultados obtenidos utilizando la base spline wavelet con derivada ortogonal Ec.(6.38), las columnas restantes corresponden a las bases de Černá y col.[24]. Se observa que la convergencia hacia la solución exacta es levemente más rápida utilizando la base spline wavelet con derivada ortogonal  $\tilde{\Psi}_{j_0}^J$  construida en esta tesis. La gran diferencia se observa en la Tabla (7.4) donde el condicionamiento de la matriz  $\tilde{K}_J^{hib}$  (matriz que se obtiene aplicando el método de Vampa y col.[17]) aumenta a medida que la escala aumenta, mientras que aplicando las otras bases, el condicionamiento se mantiene acotado.

$J$	$e(J)^{hib}$	$e(J)^{lc}$	$e_P(J)^{lc}$	$e(J)^C$	$e_P(J)^C$
6	6.102e-01	3.638e-03	3.572e-03	5.789e-03	3.507e-03
7	7.295e-02	1.482e-04	1.451e-04	4.408e-03	1.421e-04
8	4.682e-03	9.148e-06	7.832e-06	4.406e-03	7.877e-06
9	2.886e-04	4.189e-06	4.690e-07	4.406e-03	6.720e-07
10	1.739e-05	4.167e-06	7.460e-08	4.406e-03	4.044e-07

Tabla 7.3: Errores relativos para distintas escalas del Ejemplo 3.

$J$	$\text{cond}(\tilde{K}_J^{hib})$	$\text{cond}(\tilde{K}_J^{lc})$	$\text{cond}(\tilde{K}_J^C)$
6	7.46e+04	5.54e+02	4.56e+02
7	4.17e+05	5.54e+02	4.56e+02
8	2.34e+06	5.54e+02	4.56e+02
9	1.32e+07	5.54e+02	4.56e+02
10	7.47e+07	5.54e+02	4.56e+02

Tabla 7.4: Condicionamiento de la matriz del sistema del Ejemplo 3.

**Ejemplo 4.** Se considera, por último, un problema con  $p = 1$  y  $q = 1$  en Ec.(7.1),

$$L u = -u''(x) + u(x) = f(x),$$

$$u(0) = 1 \quad u(1) = 0,$$

donde  $f(x) = ((53.7\pi)^2 + 1) \text{sen}(53.7\pi x) + ((2.3\pi)^2 + 1) \text{sen}(2.3\pi x)$  con solución exacta

$$u(x) = \text{sen}(53.7\pi x) + \text{sen}(2.3\pi x).$$

$J$	$N_J$	$e(J)^{lc}$	$e_{I'}(J)^{lc}$	$cond(K_J)$
8	513	$8.122e-06$	$7.832e-06$	503
9	1025	$4.947e-07$	$4.669e-07$	503
10	2049	$5.273e-08$	$3.009e-08$	503
11	4097	$4.224e-08$	$5.421e-09$	503

Tabla 7.5: Resultados del Ejemplo 4.

La matriz correspondiente a este problema es  $K_J = D_J + G_J$ , donde

$$D_J = \langle g'_i, g'_i \rangle_{1 \leq i, l \leq 2^{J+1}+1}, \quad G_J = \langle g_i, g_l \rangle_{1 \leq i, l \leq 2^{J+1}+1}.$$

La Tabla (7.5) confirma el resultado teórico dado en el teorema (6.2), donde el número de condición de  $K_J$  está uniformemente acotado. Además se observan muy buenos resultados de convergencia.

# Capítulo 8

## Conclusiones y trabajos futuros

En este trabajo de tesis se propone una metodología para el diseño de bases spline wavelet satisfaciendo condiciones específicas de ortogonalidad, para su aplicación en la resolución de ecuaciones diferenciales de segundo orden.

Para la construcción de estas bases wavelet, se estudia la estructura de un Análisis Multirresolución en la recta y su adaptación al intervalo. Se analizan en particular las funciones B-splines y sus ventajas numéricas. A partir de nodos múltiples, se describe un AMR B-splines en el intervalo  $[0, 1]$ .

Utilizando las funciones de escala B-splines cúbicas, se obtiene una base spline wavelet con derivada ortogonal en el intervalo formada por wavelets interiores que son traslaciones y dilaciones de una wavelet madre; y se diseñan wavelets de borde que combinan suavidad con soporte pequeño.

Debido a las buenas propiedades de estas bases, como el análisis multirresolución, soporte compacto y ortogonalidad, la resolución numérica de problemas de valores de contorno de segundo orden, mediante el método Wavelet-Galerkin, es fácil y eficiente. En este sentido, la técnica expuesta en esta tesis, mejora notablemente la complejidad computacional, ya que la matriz involucrada en el sistema lineal a resolver, tiene muy buenas propiedades:

- es rala, diagonal por bloques y cada bloque es una matriz banda, con lo cual cada bloque puede tratarse por separado;
- el número de condición se mantiene acotado al aumentar la escala.

Estas características permiten diseñar un algoritmo iterativo de aproximación a la solución exacta, pasando de una escala  $J$  a una escala  $J + 1$  con el menor costo computacional.

Se resolvieron problemas de segundo orden, algunos de los cuales tienen soluciones exactas muy oscilantes, sin embargo se obtuvieron muy buenos resultados de convergencia a la solución. Además se realizaron comparaciones respecto a los resultados reportados por otros autores.

En resumen, el método para la confección de bases propuesto en esta tesis permite diseñar bases con propiedades de suavidad, soporte compacto y ortogonalidad. Aprovechando estas características junto con las ventajas del Análisis Multirresolución, se

## CAPÍTULO 8. CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

---

define un algoritmo de fácil implementación y bajo costo computacional que logra obtener resultados de elevada precisión.

Para dar continuidad al trabajo que ha sido presentado en esta tesis, algunas de las posibles líneas de investigación futuras son:

- Implementar las bases spline wavelet con derivada ortogonal para resolver ecuaciones diferenciales no lineales y en dos dimensiones.
- Estudiar y analizar el diseño de otras familias de wavelets con diferentes condiciones.

Esperamos abordar algunos de estos problemas en trabajos futuros.

# Apéndice A

## Funciones de escala B-splines cúbicas

Se presenta en este Apéndice el desarrollo de los cálculos para la obtención de las funciones B-splines cúbicas de la base de  $V_3$  utilizando nodos múltiples.

Siguiendo las definiciones de la Sección 5.2 para  $m = 3$  ( $m + 1$  orden de la spline) y  $j = 3$ , la sucesión de nodos asociada es

$$t_k^3 := \begin{cases} 0 & \text{para } k = -3, \dots, 0, \\ \frac{k}{2^j} & \text{para } k = 1, \dots, 2^3 - 1, \\ 1 & \text{para } k = 2^3, \dots, 2^3 + 3. \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Las funciones B-splines de la base del subespacio  $V_3$  son

$$B_{k,4}^3(x) := (t_{k+4} - t_k) f[t_k, \dots, t_{k+4}], \quad \text{para } k = -3, -2, \dots, 2^3 - 1, \quad (\text{A.2})$$

donde

- $f(t) = (t - x)_+^3 = (\text{máx}(t - x, 0))^3$ .
- $f[t_k, \dots, t_{k+4}]$  es la diferencia dividida de orden 4 de  $f$  en los nodos  $t_k, \dots, t_{k+4}$ , la cual se define recursivamente como  $f[t_k] = f(t_k)$  y

$$f[t_k, \dots, t_{k+4}] = \begin{cases} \frac{f[t_{k+1}, \dots, t_{k+4}] - f[t_k, \dots, t_{k+3}]}{t_{k+4} - t_k} & \text{si } t_k \neq t_{k+4} \\ \frac{f^{(4)}(t_k)}{(4)!} & \text{si } t_k = t_{k+4} \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

con  $f^{(4)}$  es la derivada de orden 4 de  $f$ .

- Si  $k = -3$ ,

$$B_{-3,4}^3(x) := (t_1 - t_{-3}) f[t_{-3}, \dots, t_1] \quad (\text{A.4})$$

tiene asociada la sucesión de nodos  $t_{-3} = t_{-2} = t_{-1} = t_0 = 0$  y  $t_1 = \frac{1}{8}$ .

El soporte de  $B_{-3,4}^3$  es  $[0, \frac{1}{8}]$ .

Primero se obtiene la tabla de diferencias divididas  $f[t_{-3}, \dots, t_1]$  (ver Tabla (A.1)), luego se reemplaza lo obtenido en Ec.(A.4) y se tiene

$$B_{-3,4}^3(x) = \begin{cases} (1 - 8x)^3 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{8}] \\ 0 & \text{si } x \notin (0, \frac{1}{8}) \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

- Si  $k = -2$ , la sucesión de nodos que se tiene en cuenta para definir  $B_{-2,4}^3$  es

$$t_{-2} = t_{-1} = t_0 = 0, t_1 = \frac{1}{8} \quad \text{y} \quad t_2 = \frac{2}{8}.$$

El soporte de  $B_{-2,4}^3$  es  $[0, \frac{2}{8}]$ .

$$B_{-2,4}^3(x) := (t_2 - t_{-2}) f[t_{-2}, \dots, t_2]. \quad (\text{A.6})$$

Haciendo la tabla de diferencias divididas de  $f[t_{-2}, \dots, t_2]$  (ver Tabla (A.2)), se obtiene que

$$B_{-2,4}^3(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(2 - 8x)^3 - 2(1 - 8x)^3 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{8}] \\ \frac{(2 - 8x)^3}{4} & \text{si } x \in (\frac{1}{8}, \frac{2}{8}] \end{cases}. \quad (\text{A.7})$$

- Si  $k = -1$ ,

$$B_{-1,4}^3(x) := (t_3 - t_{-1}) f[t_{-1}, \dots, t_3]. \quad (\text{A.8})$$

y la sucesión de nodos asociada es

$$t_{-1} = t_0 = 0, t_1 = \frac{1}{8}, \quad t_2 = \frac{2}{8} \quad \text{y} \quad t_3 = \frac{3}{8}.$$

De los valores obtenidos en la Tabla (A.3) de diferencias divididas de  $f[t_{-1}, \dots, t_3]$ , se tiene

$$B_{-1,4}^3(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}(3 - 8x)^3 - \frac{3}{4}(2 - 8x)^3 + \frac{3}{2}(1 - 8x)^3 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{8}] \\ \frac{1}{6}(3 - 8x)^3 - \frac{3}{4}(2 - 8x)^3 & \text{si } x \in (\frac{1}{8}, \frac{2}{8}] \\ \frac{1}{6}(3 - 8x)^3 & \text{si } x \in (\frac{2}{8}, \frac{3}{8}] \end{cases}. \quad (\text{A.9})$$

De manera similar se obtienen las restantes funciones de la base de  $V_3$ .

En las tablas (A.1), (A.2) y (A.3) se encuentran las diferencias divididas hasta orden 4. La primer columna de tabla contiene los nodos, en la segunda columna se encuentran las diferencias divididas de orden 1, en la tercera las de orden 2, en la cuarta las de orden 3 y en la última columna se encuentran las diferencias divididas de orden 4.

Nodos	Dif. div. de orden 1	Dif. div. de orden 2	Dif. div. de orden 3	Dif. div. de orden 4
$t_k$	$f[t_k]$	$f[t_k, t_{k+1}]$	$f[t_k, t_{k+1}, t_{k+2}]$	$f[t_k, t_{k+1}, t_{k+2}, t_{k+3}]$
$t_{-3} = 0$	$f[t_{-3}] = 0$			
$t_{-2} = 0$	$f[t_{-2}] = 0$	$f[t_{-3}, t_{-2}] = 0$		
$t_{-1} = 0$	$f[t_{-1}] = 0$	$f[t_{-2}, t_{-1}] = 0$	$f[t_{-3}, t_{-2}, t_{-1}] = 0$	
$t_0 = 0$	$f[t_0] = 0$	$f[t_{-1}, t_0] = 0$	$f[t_{-2}, t_{-1}, t_0] = 0$	$f[t_{-3}, \dots, t_0] = 0$
$t_1 = \frac{1}{8}$	Si $x \in [0, \frac{1}{8}]$ , $f[t_1] = (\frac{1}{8} - x)^3$	Si $x \in [0, \frac{1}{8}]$ , $f[t_0, t_1] = 8(\frac{1}{8} - x)^3$	Si $x \in [0, \frac{1}{8}]$ , $f[t_{-1}, t_0, t_1] = 8^2(\frac{1}{8} - x)^3$	Si $x \in [0, \frac{1}{8}]$ , $f[t_{-2}, \dots, t_1] = 8^3(\frac{1}{8} - x)^3$

Tabla A.1: Diferencias divididas de  $f[t_{-3}, \dots, t_1]$ .

Nodos	Dif. div. de orden 1	Dif. div. de orden 2	Dif. div. de orden 3	Dif. div. de orden 4
$t_k$	$f[t_k]$	$f[t_k, t_{k+1}]$	$f[t_k, t_{k+1}, t_{k+2}]$	$f[t_k, t_{k+1}, t_{k+2}, t_{k+3}]$
$t_{-2} = 0$	$f[t_{-2}] = 0$			
$t_{-1} = 0$	$f[t_{-1}] = 0$	$f[t_{-2}, t_{-1}] = 0$		
$t_0 = 0$	$f[t_0] = 0$	$f[t_{-1}, t_0] = 0$	$f[t_{-2}, t_{-1}, t_0] = 0$	
$t_1 = \frac{1}{8}$	Si $x \in [0, \frac{1}{8}]$ , $f[t_1] = (\frac{1}{8} - x)^3$	Si $x \in [0, \frac{1}{8}]$ , $f[t_0, t_1] = 8(\frac{1}{8} - x)^3$	Si $x \in [0, \frac{1}{8}]$ , $f[t_{-1}, t_0, t_1] = 8^2(\frac{1}{8} - x)^3$	Si $x \in [0, \frac{1}{8}]$ , $f[t_{-2}, \dots, t_1] = 8^3(\frac{1}{8} - x)^3$
$t_2 = \frac{2}{8}$	Si $x \in [0, \frac{2}{8}]$ , $f[t_2] = (\frac{2}{8} - x)^3$	Si $x \in [0, \frac{1}{8}]$ , $f[t_1, t_2] = 8^2(\frac{2}{8} - x)^3 - 8(\frac{1}{8} - x)^3$ Si $x \in (\frac{1}{8}, \frac{2}{8}]$ , $f[t_1, t_2] = 8(\frac{2}{8} - x)^3$	Si $x \in [0, \frac{1}{8}]$ , $f[t_0, t_1, t_2] = \frac{8^2}{2}(\frac{2}{8} - x)^3 - 8^2(\frac{1}{8} - x)^3$ Si $x \in (\frac{1}{8}, \frac{2}{8}]$ , $f[t_0, t_1, t_2] = \frac{8^2}{2}(\frac{2}{8} - x)^3$	Si $x \in [0, \frac{1}{8}]$ , $f[t_{-1}, \dots, t_2] = \frac{8^3}{4}(\frac{2}{8} - x)^3 - 8^3(\frac{1}{8} - x)^3$ Si $x \in (\frac{1}{8}, \frac{2}{8}]$ , $f[t_{-1}, \dots, t_2] = \frac{8^3}{4}(\frac{2}{8} - x)^3$

 Tabla A.2: Tabla de diferencias divididas de  $f[t_{-2}, \dots, t_2]$ .

Nodos	Dif. div. orden 1	Dif. div. de orden 2	Dif. div. de orden 3	Dif. div. de orden 4
$t_k$	$f[t_k]$	$f[t_k, t_{k+1}]$	$f[t_k, t_{k+1}, t_{k+2}]$	$f[t_k, t_{k+1}, t_{k+2}, t_{k+3}]$
$t_{-1} = 0$	$f[t_{-1}] = 0$			
$t_0 = 0$	$f[t_0] = 0$	$f[t_{-1}, t_0] = 0$		
$t_1 = \frac{1}{8}$	Si $x \in [0, \frac{1}{8}]$ , $f[t_1] = (\frac{1}{8} - x)^3$	Si $x \in [0, \frac{1}{8}]$ , $f[t_0, t_1] = 8(\frac{1}{8} - x)^3$	Si $x \in [0, \frac{1}{8}]$ , $f[t_{-1}, t_0, t_1] = 8^2(\frac{1}{8} - x)^3$	
$t_2 = \frac{2}{8}$	Si $x \in [0, \frac{2}{8}]$ , $f[t_2] = (\frac{2}{8} - x)^3$	Si $x \in [0, \frac{1}{8}]$ , $f[t_1, t_2] = 8(\frac{2}{8} - x)^3 - 8(\frac{1}{8} - x)^3$ Si $x \in (\frac{1}{8}, \frac{2}{8}]$ , $f[t_1, t_2] = 8(\frac{2}{8} - x)^3$	Si $x \in [0, \frac{1}{8}]$ , $f[t_0, t_1, t_2] = \frac{8^2}{2}(\frac{2}{8} - x)^3 - 8^2(\frac{1}{8} - x)^3$ Si $x \in (\frac{1}{8}, \frac{2}{8}]$ , $f[t_0, t_1, t_2] = \frac{8^2}{2}(\frac{2}{8} - x)^3$	Si $x \in [0, \frac{1}{8}]$ , $f[t_{-1}, \dots, t_2] = \frac{8^3}{4}(\frac{2}{8} - x)^3 - 8^3(\frac{1}{8} - x)^3$ Si $x \in (\frac{1}{8}, \frac{2}{8}]$ , $f[t_{-1}, \dots, t_2] = \frac{8^3}{4}(\frac{2}{8} - x)^3$
$t_3 = \frac{3}{8}$	Si $x \in [0, \frac{3}{8}]$ , $f[t_3] = (3/8 - x)^3$	Si $x \in [0, \frac{2}{8}]$ , $f[t_2, t_3] = 8(\frac{3}{8} - x)^3 - 8(\frac{2}{8} - x)^3$ Si $x \in (\frac{2}{8}, \frac{3}{8}]$ , $f[t_2, t_3] = 8(\frac{3}{8} - x)^3$	Si $x \in [0, \frac{1}{8}]$ , $f[t_1, t_2, t_3] = \frac{8^2}{2}(\frac{3}{8} - x)^3 - 8^2(\frac{2}{8} - x)^3 + \frac{8^2}{2}(\frac{1}{8} - x)^3$ Si $x \in (\frac{1}{8}, \frac{2}{8}]$ , $f[t_1, t_2, t_3] = \frac{8^2}{2}(\frac{3}{8} - x)^3 - 8^2(\frac{2}{8} - x)^3$ Si $x \in (\frac{2}{8}, \frac{3}{8}]$ , $f[t_1, t_2, t_3] = \frac{8^2}{2}(\frac{3}{8} - x)^3$	Si $x \in [0, \frac{1}{8}]$ , $f[t_0, \dots, t_3] = \frac{8^3}{6}(\frac{3}{8} - x)^3 - \frac{8^3}{2}(\frac{2}{8} - x)^3 + \frac{8^3}{2}(\frac{1}{8} - x)^3$ Si $x \in (\frac{1}{8}, \frac{2}{8}]$ , $f[t_0, \dots, t_3] = \frac{8^3}{6}(\frac{3}{8} - x)^3 - \frac{8^3}{2}(\frac{2}{8} - x)^3$ Si $x \in (\frac{2}{8}, \frac{3}{8}]$ , $f[t_0, \dots, t_3] = \frac{8^3}{6}(\frac{3}{8} - x)^3$

 Tabla A.3: Tabla de diferencias divididas de  $f[t_{-1}, \dots, t_3]$ .



# Notación

$\langle \cdot, \cdot \rangle$  producto interior en  $H$ .

$\|\cdot\|$  norma en  $H$ .

$\|\cdot\|_{L_2}$  norma en  $L_2$ .

$a(\cdot, \cdot)$  forma bilineal.

$a_k$  coeficientes de  $\psi_{b_1}^{lc}$ .

$\tilde{a}_k$  coeficientes de  $\psi_{b_2}^{lc}$ .

$A$  constante de Riesz.

$A_\psi$  condición de admisibilidad de  $\psi$ .

$\mathbf{b}$  es el vector del término independiente.

$B$  constante de Riesz.

$B_1$  matriz para obtener los coeficientes  $\tilde{h}_{n,k}$ .

$B_2$  matriz para obtener los coeficientes  $\tilde{h}_{n,k}$ .

$B_{k,m+1}^0$  B-spline de orden  $m+1$  asociada una sucesión de nodos en los números enteros.

$B_{k,m+1}^j$  B-spline de orden  $m+1$  asociada una sucesión de nodos.

$C^m(\mathbb{R})$   $m \in \mathbb{N}$ , espacio de funciones  $m$ -veces continuamente diferenciable.

$\{c_k\}_{k=1}^\infty$  sucesión de escalares.

$\text{cond}(\cdot)$  número de condición de una matriz.

$\bar{C}$  constante de continuidad de la forma bilineal  $a$ .

$D^j$  matriz de derivadas.

$\{d_k\}$  coeficientes de la wavelet madre.

$\mathbb{D}$  operador dilatación diádico.

$\{e_k\}$  base ortonormal.

- $e_{N_h} := u - u_{N_h}$  error de la solución para el problema discreto.
- $e(J)$  error relativo de una aproximación.
- $e_I(J)$  error relativo interior de una aproximación.
- $f$  término independiente del problema diferencial.
- $\{f_k\}$  sucesión de funciones.
- $F$  funcional correspondiente a la formulación variacional.
- $\hat{f}(w)$  transformada de Fourier de  $f$ .
- $\tilde{g}_k$  coeficientes del filtro de la wavelet.
- $\{g_i\}$  funciones de la base  $\tilde{\Psi}_{j_0}^J$ .
- $G$  operador de la matriz Grammiana.
- $G^j$  matriz Grammiana en la escala  $j$ .
- $h_k$  coeficientes del filtro de la función de escala.
- $\tilde{h}_k$  coeficientes del filtro de la función de escala de borde.
- $H$  espacio de Hilbert.
- $H_0^1(\Omega)$  subespacio de funciones de  $H^1(\Omega)$  que se anulan en la frontera de  $\Omega$ .
- $K^j$  matriz de rigidez.
- $K_J$  matriz de rigidez.
- $\tilde{K}_J$  matriz de rigidez.
- $L$  operador diferencial.
- $t_k^j$  sucesión de nodos sobre  $[0, 1]$ .
- $f[t_0, \dots, t_n]$  diferencias divididas de  $f$ .
- $T : H \rightarrow H$  operador acotado y biyectivo.
- $\mathbb{T}$  operador traslación.
- $u$  solución del problema variacional.
- $u_{N_h}$  solución del problema variacional discreto.
- $u_J$  solución del problema variacional discreto.
- $V$  subespacio de  $H$  donde se plantea el problema variacional.
- $V'$  espacio dual de  $V$ .

$V_j$  subespacios cerrados de  $L_2(\mathbb{R})$  que constituyen un AMR.

$\widehat{V}_j^{[0,1]}$  subespacios cerrados de B-splines de orden  $m+1$  de  $L_2[0, 1]$  que constituyen un AMR.

$V_j^{[0,1]}$  subespacios cerrados de B-splines cúbicos de  $L_2[0, 1]$  que constituyen un AMR.

$V_{N_h}$  subespacios de dimensión finita.

$W_j$  complemento ortogonal de  $V_j$  en  $V_{j+1}$ ,  $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ .

$W_j^{[0,1]}$  complemento ortogonal de  $V_j^{[0,1]}$  en  $V_{j+1}^{[0,1]}$ ,  $V_{j+1}^{[0,1]} = V_j^{[0,1]} \oplus W_j^{[0,1]}$ .

$\alpha$  el vector de coeficientes.

$\phi(x)$  función de escala en un análisis de multirresolución.

$\phi_{j,k}(x)$  funciones generadas componiendo traslaciones y dilataciones de  $\phi(x)$ .

$\Phi_j$  base B-spline cúbica.

$\Phi_j^{int}$  conjunto de B-spline cúbicas interiores.

$\Phi_j^{bord}$  conjunto de B-spline cúbicas de borde.

$\varphi_{m+1,j,k}$  función de escala B-spline de orden  $m+1$ , escala  $j$ .

$\varphi_{m+1}$  función B-spline de orden  $m+1$ .

$\varphi_{b_1}$  función de escala de borde B-spline cúbica.

$\varphi_{b_2}$  función de escala de borde B-spline cúbica.

$\rho$  constante de coercividad de la forma bilineal  $a$ .

$\pi u$  el elemento del espacio  $V_{N_h}$  que interpola a  $u$  en los nodos.

$\psi(x)$  wavelet madre.

$\psi_{j,k}(x)$  funciones generadas componiendo traslaciones y dilataciones de  $\psi(x)$ .

$\psi_{b_1}$  wavelet de borde.

$\psi_{b_2}$  wavelet de borde.

$\psi_{b_1}^{lc}$  wavelet de borde nueva.

$\psi_{b_2}^{lc}$  wavelet de borde nueva.

$\Psi_j$  base wavelet.

$\widetilde{\Psi}_j$  base wavelet con derivada ortogonal.

$\Psi_j^{int}$  conjunto de wavelets interiores.

$\Psi_j^{bord}$  conjunto de wavelets de borde.

$\Psi_j^{lc}$  conjunto de wavelets de borde.

$\Psi_{j_0}^J$  base spline wavelet e  $V_{J+1}^{[0,1]}$ .

$\tilde{\Psi}_{j_0}^J$  base spline wavelet con derivada ortogonal de  $V_{J+1}^{[0,1]}$ .

$\Theta(w) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(w + 2k\pi)|^2$ .

$\Omega$  dominio de definición del operador  $L$ .

# Bibliografía

- [1] I. Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets*, volume 61. SIAM, 1992.
- [2] I. Daubechies. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Comm. Pure and Appl. Math.*, 41:909–996, 1988.
- [3] S. Dahlke and A. Kunoth. A biorthogonal wavelet approach for solving boundary value problems. *Institut fur Geometrie un Praktische Mathematik-RWTH Aachen, preprint*, 70, 1993.
- [4] R.O Wells and X. Zhou. Wavelet solutions for the Dirichlet problem. *Numer. Math*, 70:379–396, 1995.
- [5] S. Jaffard. Wavelet Methods for Fast Resolution of Elliptic Problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 29:965–986, 1992.
- [6] A. Cohen. *Wavelets in Numerical Analysis, Handbook of Numerical Analysis*, volume VII. Elsevier, 2001.
- [7] Y. Maday, V. Perrier, and J. C. Ravel. Adaptivité dynamique sur bases d’ondelettes pour l’approximation déquations aux dérivées partielles. *C.R. Acad Sci. Paris*, 312 Serie I, 1991.
- [8] X. Chen, S. Yang, J. Ma, and Z. He. The construction of wavelet finite element and its application. *Finite Elements in Analysis and Design*, 40:541–554, 2004.
- [9] J.N. Reddy. On the numerical solution of differential equations by the finite element method. *Indian Journal Pure and Applied Math*, 16,12:1512–1528, 1985.
- [10] A. Bindal, J.G. Khinast, and M.G. Ierapetritou. Adaptive multiscale solution of dymanical systems in chemical processes using wavelets. *Computers and Chemical Engineering*, 27:131–142, 2003.
- [11] R.Q. Jia and W. Zhao. Riesz bases of wavelets and applications to numerical solutions of elliptic equations. *Math. Comput.*, 80:1525–1556, 2011.
- [12] W. Cai and J. Wang. Adaptive multiresolution collocation methods for initial boundary value problems of nonlinear pdes. *SIAM J. Numer. Anal.*, 33:937–970, 1996.

- 
- [13] V. Kumar and M. Mehra. Cubic spline adaptive wavelet scheme to solve singularly perturbed reaction diffusion problems. *International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing*, 5:317–331, 2007.
- [14] Y. Meyer. Ondelettes sur l intervalle. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 7:115–143, 1991.
- [15] C.K. Chui and E. Quak. Wavelets on a bounded interval, in Numerical Methods of Approximation Theory. *International Series of Numerical Mathematics*, pages 53–75, 1992.
- [16] E.P. Cammilleri and E. Serrano. Spline multiresolution analysis on the interval. *Latin American Applied Research*, 31:65–71, 2001.
- [17] V. Vampa, M.T. Martín, and E. Serrano. A hybrid method using wavelets for the numerical solution of boundary value problems on the interval. *Adv. Comput. Math*, 217:3355–3367, 2010.
- [18] D. Černá and V. Finěk. Construction of optimally conditioned cubic spline wavelets on the interval. *Adv. Comput. Math*, 34:219–252, 2011.
- [19] W. Dahmen, A. Kunoth, and K. Urban. Biorthogonal Spline Wavelets on the Interval- Stability and Moment Conditions. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 6:132–196, 1999.
- [20] W. Swelden and P. Schöder. *Building Your Own Wavelets at Home*.
- [21] W. Dahmen, B. Han, and R.Q. Jia. Biorthogonal Multiwavelets on the Interval: Cubic Hermite Splines. *Constr. Approx.*, 16:221–259, 2000.
- [22] R.Q. Jia and S.T. Liu. Wavelet bases of Hermite cubic splines on the interval. *Adv. Comput. Math*, 25:23–29, 2006.
- [23] V. Vampa. *Desarrollo de herramientas basadas en la transformada wavelet para su aplicación en la resolución numérica de ecuaciones diferenciales*. Tesis Doctoral, Universidad Nacional de La Plata, 2011.
- [24] D. Černá and V. Finěk. Wavelet basis of cubic splines on the interval on the hypercube satisfying homogeneous boundary conditions. *International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing*, 13, 2015.
- [25] D. Černá and V. Finěk. Galerkin method with new quadratic spline wavelets for integral and integro-differential equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 363:426–443, 2020.
- [26] B. Han and M. Michelle. Derivative-orthogonal Riesz wavelets in Sobolev spaces with applications to differential equations. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 47:759–794, 2017.
- [27] B.V.R Kumar and M. Mehra. Wavelet-Taylor-Galerkin method for Parabolic and Hyperbolic Partial Differential Equations. *International Journal of Computational Methods*, 2:75–77, 2005.

- 
- [28] V. Vampa, M.T. Martín, and E. Serrano. A new refinement Wavelet-Galerkin method in a spline local multiresolution analysis scheme for boundary value problems. *International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing*, 11:1, 2013.
- [29] L. Calderón, V. Vampa, and M.T. Martín. B-splines en el Método Wavelet- Taylor-Galerkin. *V Congreso de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial*, 5:571–574, 2015.
- [30] L. Calderón, M.T. Martín, and V. Vampa. Construcción de bases wavelets ortogonales. *VI Congreso de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial*, 6:126–127, 2017.
- [31] L. Calderón, M.T. Martín, and V. Vampa. Construcción de bases de wavelets splines cúbicas sobre intervalo bien condicionadas. *V Congreso de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial*, 7:213–216, 2019.
- [32] L. Calderón, M.T. Martín, and V. Vampa. Bases de wavelets B-splines en el intervalo con condiciones de Dirichlet homogéneas. *V Jornadas de Investigación, Transferencia y Extensión de la Facultad de Ingeniería*, pages 235–240, 2019.
- [33] L. Calderón, M.T. Martín, and V. Vampa. Wavelets B-splines Bases on the interval for Solving Boundary Value Problems. *Applications of Wavelet Multiresolution Analysis. SEMA SEMAI Springer Series*, 4:23–40, 2021.
- [34] O. Christensen. *An Introduction to Frames and Riesz Bases*. Birkhäuser, 2003.
- [35] D. Walnut. *An introduction to Wavelet Analysis*. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2002.
- [36] S. Mallat. *A Wavelet Tour of Signal Processing- The Sparse Way*. Academic Press, Elsevier, 2009.
- [37] C.K. Chui. *An Introduction on Wavelet Analysis*. Academic Press, Elsevier, 1992.
- [38] R.L Burden and Faires J.D. *Análisis numérico*, volume 7ma Edición. Thomson, 2002.
- [39] L.C. Evans. *Partial Differential Equation*, volume 19. Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, 1997.
- [40] P.G Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems*. North Holland, 1978.
- [41] G. Calderón and R. Gallo. Introducción al método de los Elementos finitos: Un enfoque matemático. *XXIV Escuela Venezolana de Matemáticas*, 2011.
- [42] P.A. Raviart and J.M. Thomas. *Introduction l'analyse numérique de e.d.p.* Masson, 1983.
- [43] J. Wang. Spline Wavelets in Numerical Resolution of Partial Differential Equations. *AMS-IP Studies in Advanced Mathematics*, 25:257–277, 2002.

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [44] L. Schumaker. *Spline Functions: Basic Theory*. Cambridge Mathematical Library, 2006.
- [45] M. Primbs. New stable biorthogonal spline-wavelets on the interval. *Results in Mathematics*, 57:121–162, 2010.
- [46] M. Primbs. *Stabile biorthogonale Spline-Waveletbasen auf dem Intervall*. Dissertation, Universitat Duisburg-Essen, 2007.
- [47] R.Q. Jia and C.A Micchelli. Using the Refinement Equations for the Construction of Pre-Wavelets II: Powers of Two. *Curves and Surfaces. Academic Press, New York*, pages 209–246, 1991.
- [48] C. Heil, G Strang, and V. Strela. Approximation by translates of refinable functions. *Numer. Math*, 73:75–94, 1996.
- [49] J. Epperson. *An Introduction to Numerical Methods and Analysis*. New York, Wiley, 2013.
- [50] E. Isaacson and H. Keller. *Analysis of Numerical Methods*. New York, Wiley, 1966.
- [51] I.J Schoenberg. Cardinal interpolation and spline functions. *Journal of Approximation Theory*, 2:167–206, 1969.