



UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS
DEPARTAMENTO DE FISICA

Trabajo de Tesis Doctoral:

Entrelazamiento y correlaciones en sistemas
fermiónicos

Tesista: Marco Di Tullio

Director: Raúl Dante Rossignoli

Año: 2021

Resumen

La extensión del concepto de entrelazamiento a sistemas de componentes indistinguibles, y en particular a sistemas fermiónicos es un problema fundamental que ha recientemente suscitado gran interés. En este trabajo se desarrolla y examina en profundidad esta extensión, considerando además su rol en información cuántica y en la caracterización de correlaciones en sistemas fuertemente interactuantes.

En primer lugar se considera el denominado entrelazamiento de un cuerpo, que es una medida de correlaciones fermiónicas basada en la matriz densidad de un cuerpo (SPDM) y que cuantifica la desviación de un estado puro fermiónico de un determinante de Slater. Se analiza su comportamiento en el estado fundamental de un sistema superconductor y de otros sistemas fuertemente interactuantes, mostrándose su correlación con el parámetro de orden correspondiente y saturación en el régimen de acoplamiento fuerte. Se examina también el entrelazamiento de estados reducidos del sistema por medio de la concurrencia fermiónica, mostrando que caracteriza la transición de fase.

En segundo lugar se analizan aspectos formales del entrelazamiento de un cuerpo. Se demuestra que el mismo puede ser considerado formalmente como un recurso cuántico. La teoría de recursos asociada tiene al conjunto de determinantes de Slater como estados libres, y un conjunto de operaciones, que incluyen transformaciones unitarias de un cuerpo y medidas de ocupación de un modo, como operaciones libres. Se introduce también una formulación general bipartita del entrelazamiento de un cuerpo, basada en una descomposición tipo Schmidt $1 - (N - 1)$ de un estado puro de N fermiones, en la que la SPDM emerge naturalmente.

Finalmente se generaliza esta formulación bipartita, separando los estados de $M < N$ y $(N - M)$ fermiones. Esta descomposición se encuentra directamente vinculada con las matrices densidad de M y $(N - M)$ cuerpos, que son isoespectrales. De aquí emerge naturalmente el concepto de entrelazamiento de M cuerpos, que generaliza el entrelazamiento de un cuerpo y provee una caracterización general de las correlaciones. Se demuestran también propiedades operacionales del mismo. Se presentan asimismo evaluaciones analíticas de los espectros de las matrices de M cuerpos en sistemas fuertemente correlacionados.

Los resultados obtenidos en la presente Tesis dieron origen a los trabajos [1-4]

Democrito, che 'l mondo a caso pone. **Divina Commedia - Dante Alighieri**

Índice general

1. Introducción	1
2. Conceptos básicos	5
2.1. Sistemas compuestos distinguibles y entrelazamiento	5
2.1.1. Descomposición de Schmidt	6
2.1.2. Entrelazamiento en estados mixtos	8
2.2. Entropía en teoría de la información cuántica	8
2.2.1. Entropía de Von Neumann	8
2.2.2. Entropía conjunta, condicional, relativa e información mutua en mecánica cuántica	10
2.3. Medidas de correlaciones cuánticas	12
2.3.1. Entrelazamiento de estados puros	12
2.3.2. LOCC	13
2.3.3. Características generales de una medida de entrelazamiento . .	15
2.3.4. Entrelazamiento de formación	16
2.3.5. Concurrencia	17
2.3.6. Discordia	18
3. Formalismo Fermiónico	21
3.1. Operadores de creación y aniquilación para fermiones	21
3.2. Representación de operadores	22
3.3. Transformaciones unitarias y de Bogoliubov para Fermiones	23
3.4. Vacíos de Bogoliubov	26
3.5. Transformaciones unitarias de un cuerpo	27
3.6. Matrices densidad de un cuerpo	28
3.7. Aproximación BCS	30

4. Entrelazamiento Fermiónico	33
4.1. Entrelazamiento de modos y partículas	33
4.1.1. Entrelazamiento de modos	33
4.1.2. Entrelazamiento de partículas	34
4.2. Formalismo	35
4.2.1. Entropía de entrelazamiento de un nivel	35
4.2.2. Entrelazamiento de un cuerpo	36
4.2.3. Generalización a cuasipartículas	37
4.2.4. Mínima entropía relativa	39
4.2.5. Estados mixtos	41
4.3. Entrelazamiento bipartito	43
4.3.1. Estados puros	43
4.3.2. Entrelazamiento de subespacios	44
4.4. Sistemas de dimensión $d \leq 3$	45
5. Sistema superconductor	49
5.1. Descripción del sistema	50
5.2. Resultados exactos	51
5.2.1. Entropía de un cuerpo	51
5.2.2. Entropía de entrelazamiento $k - \bar{k}$	53
5.2.3. Entrelazamiento de estados reducidos	54
5.3. Descripción aproximada	60
5.3.1. Aproximación de BCS	60
5.3.2. BCS Proyectado	65
6. Modelo de Lipkin	69
6.1. Descripción del sistema	69
6.2. Resultados exactos	72
6.2.1. Entropía de un cuerpo	72
6.2.2. Entropía de entrelazamiento arriba-abajo	74
6.2.3. Entrelazamiento de estados reducidos	75
6.3. Descripción aproximada	79
6.3.1. Aproximación de campo medio	79
6.3.2. Campo medio proyectado a S_z	84
6.3.3. Campo medio más RPA	87

7. Entrelazamiento de un cuerpo como recurso cuántico	91
7.1. Formalismo	92
7.1.1. Mayorización en el espacio SP	92
7.1.2. Descomposición de Schmidt asociada	93
7.1.3. Entropías de entrelazamiento de un cuerpo	94
7.2. Operaciones no generadoras de entrelazamiento de un cuerpo (ONG)	95
7.2.1. Definiciones y propiedades básicas	95
7.2.2. Óptica lineal fermiónica como ONG	97
7.2.3. Medidas ONG y operadores más generales	100
7.3. Entrelazamiento de un cuerpo como recurso	102
8. Entrelazamiento de M cuerpos	107
8.1. Formalismo	108
8.1.1. Estados de N fermiones	108
8.1.2. La representación $(M, N - M)$ y la MD de M cuerpos	109
8.1.3. La representación de Schmidt $(M, N - M)$	111
8.1.4. Los autovalores de la MD de M -cuerpos	113
8.2. Entrelazamiento de M -cuerpos	115
8.2.1. Grado de mezcla de la MD de M -cuerpos	115
8.2.2. Entropías de M -cuerpos	117
8.2.3. Operaciones que no aumentan la entropía de M -cuerpos	119
8.2.4. Operadores densidad de M -cuerpos y relaciones de mayoriza- ción generalizadas	122
8.2.5. Mapeando a sistemas bipartitos	124
8.3. Entrelazamiento de M -cuerpos en sistemas fuertemente correlacionados	128
8.3.1. Sistema superconductor	128
8.3.2. Modelo de Hubbard	130
9. Fermionic.jl: una librería para simulaciones fermiónicas	135
9.1. Requisitos e instalación	136
9.2. Capacidades	137
9.2.1. Operadores fermiónicos	137
9.2.2. Estados	142
9.2.3. Estados mixtos	144
9.2.4. Correlaciones	144
9.2.5. Compuertas lógicas	145

9.3. Ejemplos de uso	148
9.4. Bosonic.jl	151
10. Conclusiones	153
A. Apéndice A: Fermiones	161
A.1. Primera Cuantización	161
A.2. Segunda Cuantización	163
A.3. Descomposición de una Transformación de Bogoliubov	164
A.4. Teorema de Wick	166
B. Apéndice B: Sistemas correlacionados	169
B.1. Estados reducidos de cuatro modos como estados de dos qubits y discordia cuántica	169
B.2. Separabilidad fermiónica en el modelo de Lipkin	171
C. Apéndice C: Teoría de recursos	173
C.1. Apendice: Demostración de la desigualdad (7.34) y Corolario 1	173
C.2. Medidas de ocupación en estados libres	175
C.3. Comparando el entrelazamiento de un cuerpo de estados con diferente número de partícula	176
D. Apéndice D: Entrelazamiento de M cuerpos	179
D.1. Autovalores de $\rho^{(M)}$ en los estados $ \Psi_{2k}\rangle$	179
D.2. Comportamiento de la $\rho^{(2)}$ bajo medidas de ocupación de un modo	181

Agradecimientos

El trabajo de tesis simboliza en cierto modo el final de algo mucho más grande. Es por ello que estos agradecimientos son para todas aquellas personas que han contribuido, intencionalmente o no, a que haya podido completar esta etapa.

Quería agradecer en primer lugar a Raúl, por tomarme como estudiante y dedicar tanto tiempo a mi formación. Siempre tuvo la paciencia de guiarme, con mucho detalle y claridad, en temas completamente desconocidos para mí. En esta etapa descubrí también a una persona muy amena para hablar de los temas más diversos. No solo es un investigador brillante, sino también una excelente persona.

Quiero destacar también el aporte de mis compañeros de grupo, con quienes compartí ideas, trabajos, viajes y cervezas. En particular Nico Gigena, Alan Boette, Marco Cerezo y Nahuel Díaz.

Tuve la suerte de tener una hermosa familia que me apoyó siempre durante todo este proceso. Es por ello que les agradezco profundamente, especialmente a mis viejos y mi hermana que me hicieron quien soy y me acompañaron en este camino. También a mis abuelas, que siempre me malcrían y me enseñan. Una mención especial para el Nonno, a quien le tocó partir en esta etapa de mi vida, pero cuya influencia es completamente atemporal y me acompañará por siempre. Gracias, sobre todo, por ser siempre tan buenas personas.

A mi gran compañera de aventuras, mi novia Momi, esa personita tan especial que fue sin duda mi mayor apoyo en toda esta etapa. Por más logros de la mano.

A mis amigos y amigas, compañeros de risas y enseñanzas. Es siempre injusto enumerar seres queridos, sobre todo porque implican un orden que en casos como el presente están completamente de más. A Manu S, Manu D, Mario, Gus, Tomi C, Tomi G, Gasti, Agus M. La lista sigue.

Gracias a los grandes científicos que me inspiraron en este camino. Y finalmente al estado Argentino por permitirme estudiar de manera gratuita.

Introducción

El entrelazamiento cuántico es una de las características fundamentales de la mecánica cuántica [5]. Esto se debe, por un lado, a que refiere a un tipo de correlaciones entre observables que no poseen un análogo clásico, y que superan cotas satisfechas por todo sistema clásico. Por otro lado, se trata de una cantidad esencial en el área de la información cuántica [6-8], donde constituye un recurso en la implementación de protocolos cuánticos como teleportación [9] y algoritmos basados en estados puros que no pueden ser eficientemente simulados clásicamente [10]. El concepto de entrelazamiento ha proporcionado asimismo una nueva perspectiva para el análisis de correlaciones y transiciones de fase en sistemas de muchos cuerpos [11-14], así como para la propia fundamentación de la mecánica estadística [15], aportando también enfoques originales en otros problemas tales como la entropía de agujeros negros [16], la emergencia del tiempo [17], etc.

No obstante, el concepto estándar de entrelazamiento está definido para sistemas de componentes distinguibles, en los cuales el espacio de Hilbert del sistema completo tiene una estructura del tipo producto tensorial entre los espacios de los subsistemas. En el caso de sistemas de componentes indistinguibles, y en particular en sistemas fermiónicos, la noción de entrelazamiento es menos clara, dado el carácter necesariamente simétrico (bosones) o antisimétrico (fermiones) del estado y la consiguiente dificultad para distinguir subsistemas. La extensión del concepto de entrelazamiento a sistemas de componentes indistinguibles y en particular a sistemas fermiónicos es pues un problema fundamental, que ha seguido en los últimos dos líneas principales: Entrelazamiento de modos [18-21] y entrelazamiento de partículas (ó más allá de la simetrización) [22-33]. En el primer caso, las partes tienen acceso a distintos modos de una dada base del espacio de estados de una partícula, y el consiguiente entrelazamiento depende de la base elegida. En el segundo, por otro lado, se analizan las correlaciones entre las partículas más allá de la antisimetriza-

ción, siendo el entrelazamiento independiente de la base y no nulo solo en estados que no son *determinantes de Slater* (DS), es decir, que no son estados de partícula independiente. Existen también enfoques adicionales, principalmente concentrados en posibles extensiones basadas en correlaciones entre observables [21, 34-37].

Recientemente se ha desarrollado un formalismo para el tratamiento del entrelazamiento en sistemas fermiónicos, basado en la matriz densidad de un cuerpo, que unifica ambas líneas al vincular el entrelazamiento de partículas con el mínimo entrelazamiento de modos [31, 38]. Asimismo, se ha generalizado el concepto a estados donde el número de fermiones no es necesariamente fijo (aunque sí es fija la paridad del número de fermiones), tal como ocurre cuando se consideran excitaciones partícula-agujero sobre un mar de Fermi o en general estados y vacíos de cuasipartículas definidos mediante una transformación de Bogoliubov [31]. De esta forma se ha logrado extender el concepto de concurrencia fermiónica, originalmente introducido para sistemas de dos fermiones [22, 23, 25] a estados puros más generales, e incluso obtener una expresión analítica exacta para estados mezcla generales en espacios reducidos [31].

Por otro lado, en los últimos tiempos han ganado notoriedad las teorías cuánticas de recursos (QRT) [39, 40]. Estas describen procesos de información cuántica bajo un conjunto restringido de operaciones. La teoría estándar de entrelazamiento entre componentes distinguibles es, de hecho, una de estas teorías, de la misma forma que sistemas de referencia cuánticos y asimetrías [41], termodinámica cuántica [42, 43], coherencia [44, 45], no-localidad [46] y no-Gaussianidad [47]. Siguiendo entonces los pasos de la teoría para componentes distinguibles, resulta interesante pensar una formalización del entrelazamiento fermiónico en el marco de una teoría de recursos acorde.

En esta Tesis, tras una revisión de los conceptos fundamentales en los capítulos 2,3,4, se abordarán tres problemas vinculados al estudio de las correlaciones en sistemas fermiónicos.

1. En primer lugar, se estudiará el comportamiento de las correlaciones cuánticas en los estados fundamentales de sistemas fermiónicos fuertemente interactuantes, tales como superconductores finitos [48-51] (Cap. 5) y sistemas múltiplemente conectados, como modelos de Lipkin [52-54] (Cap. 6), mediante distintas medidas de entrelazamiento fermiónico. En ambos casos se observa una correlación clara entre entropías bipartitas de modos y el denominado entrelazamiento de un cuerpo, que satura en el límite de apareamiento fuerte y es pequeño en

la fase normal. Dicha correlación relaciona un recurso cuántico distinguible, que suele ser difícil de medir, con una cantidad puramente fermiónica que es en principio sencilla de obtener. Se ve además que el entrelazamiento de un cuerpo se correlaciona fuertemente con el parámetro de orden relevante (o de ruptura de simetría en aproximaciones de campo medio) tales como el gap en sistemas superconductores. Se observa también que el entrelazamiento de subsistemas localizados en torno a la superficie de Fermi, cuantificado mediante la concurrencia fermiónica, exhibe un comportamiento distinto, mostrando un pico prominente en la transición de fase correspondiente.

2. En segundo lugar, en el Cap. 7, se mostrará que el entrelazamiento de un cuerpo puede ser considerado un recurso cuántico. Para ello se define una teoría de recursos en la cual se toman como estados libres los DS y sus combinaciones convexas y se busca hallar el conjunto de operaciones libres consistentes. Estas operaciones se definen como aquellas que disminuyen el grado de mezcla, en el sentido riguroso de mayorización, de la matriz densidad de un cuerpo asociada a estados puros, y que implican una disminución de la correspondiente entropía. Se demuestra en forma rigurosa que dentro de estas operaciones libres es posible incluir las operaciones características de “Fermionic linear optics” [55-57], es decir transformaciones unitarias de un cuerpo y medidas de ocupación de un nivel o modo, lo que constituye uno de los resultados centrales de esta tesis. Se propone luego agregar operaciones no libres, como operadores de carga, para obtener así computación fermiónica universal.
3. Por último, en el Cap. 8, se extiende el formalismo anterior, basado en la densidad de un cuerpo, a matrices densidad generales de M cuerpos. Se introduce una representación general bipartita y una descomposición de Schmidt correspondiente para un estado puro arbitrario de N fermiones indistinguibles, basada en estados de $M < N$ y $(N-M)$ fermiones. Esta representación se conecta con las matrices densidad reducidas de M - y $(N-M)$ cuerpos, que tienen el mismo espectro. De aquí emerge el concepto de entrelazamiento de M cuerpos, que generaliza el concepto de entrelazamiento de un cuerpo. Esto constituye otro resultado fundamental de esta tesis. Además, se demuestran relaciones de mayorización rigurosas que son satisfechas por las matrices densidad de M -cuerpos normalizadas, implicando la existencia de una clase de operaciones que no aumentan en promedio el entrelazamiento de M cuerpos y que tienen estas matrices densidad como estados post-medida. Finalmente

se llevarán a cabo análisis detallados de los espectros de las matrices de M -cuerpos en sistemas fermiónicos fuertemente correlacionados. Es posible ver que dichos espectros indican la presencia de comportamientos tipo bosónicos y permiten en ciertos casos realizar aproximaciones fieles de los estados mediante el uso de unos pocos operadores.

Adicionalmente, en el capítulo 9, se presenta el funcionamiento de la librería de código abierto **Fermionic.jl** desarrollada en el contexto de la presente tesis doctoral, en el lenguaje *Julia*. También se comenta brevemente sobre la librería **Bosonic.jl**, que se encuentra en desarrollo.

Finalmente, en el Cap. 10, se resumen los resultados principales de la presente Tesis, junto con posibles perspectivas de trabajos futuros.

Publicaciones

Las investigaciones descritas en esta tesis dieron lugar a las publicaciones científicas [1-4] indicadas a continuación.

1. *Fermionic entanglement in superconducting systems*,
M. Di Tullio, N. Gigena, R. Rossignoli; *Phys. Rev. A* 97, 062109 (2018)
2. *Fermionic entanglement in the Lipkin model*,
M. Di Tullio, R. Rossignoli, M. Cerezo, N. Gigena; *Phys. Rev. A* 100, 062104 (2019)
3. *One-body entanglement as a quantum resource in fermionic systems*,
N. Gigena, M. Di Tullio, R. Rossignoli; *Phys. Rev. A* 102, 042410 (2020)
4. *Many-body entanglement in fermion systems*,
N. Gigena, M. Di Tullio, R. Rossignoli; *Phys. Rev. A* 103, 052424 (2021)

También ha dado lugar a la siguiente librería de código abierto.

- Fermionic.jl
<https://github.com/Marco-Di-Tullio/Fermionic.jl>
- Bosonic.jl
<http://github.com/Marco-Di-Tullio/Bosonic.jl>

Conceptos básicos

2.1. Sistemas compuestos distinguibles y entrelazamiento

Un sistema compuesto consiste, en el marco de la teoría cuántica, de una colección de objetos cuánticos. Se busca generalmente una descripción de los estados de estos sistemas en términos de aquellos que describen sus componentes. Para ello se considera en primer lugar un sistema formado por dos partes A y B , cuyos estados pertenecen a respectivos espacios de Hilbert \mathcal{H}_A y \mathcal{H}_B , con dimensiones D_A y D_B . Resulta de interés estudiar primero el caso en el cual las partes fueron preparadas de manera independiente, y en el que se pueden realizar observaciones por separado. Como el número máximo de resultados distintos que es posible obtener al medir cada parte (con una medida proyectiva) equivale a la dimensión de su espacio de Hilbert, el espacio del conjunto debe tener dimensión $D_A \times D_B$. En cada subsistema se tiene una base asociada a su respectivo conjunto completo de operadores que conmutan (CCOC), $\mathcal{B}_A = \{|\phi_j\rangle, j = 1, \dots, D_A\}$ y $\mathcal{B}_B = \{|\chi_k\rangle, k = 1, \dots, D_B\}$. Cada vector corresponde a un estado puro, es decir un estado de máxima información (existe un experimento que lo predice con certeza). Por cada par de vectores $\{|\phi_j\rangle_A, |\chi_k\rangle_B\}$ debe existir un vector en una base ortogonal y completa del espacio conjunto. Estos vectores son de la forma $|\phi_j\rangle_A \otimes |\chi_k\rangle_B \equiv |\phi_j\chi_k\rangle$ y conforman una base ortonormal para el espacio producto tensorial $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Luego, dadas bases \mathcal{B}_A y \mathcal{B}_B de cada subsistema, es posible construir una base producto del sistema completo $\mathcal{B}_A \otimes \mathcal{B}_B = \{|\phi_j\rangle_A \otimes |\chi_k\rangle_B\}$. Esto muestra nuevamente que $\dim(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B) = D_A D_B$.

El estado conjunto más general será una combinación lineal de los vectores de esta base. Estos estados no son necesariamente producto. Aquellos estados que no lo son se denominan *estados entrelazados* [5].

Si se toma, por ejemplo, un sistema de dos partículas, cada una con dos estados accesibles $|0\rangle$ y $|1\rangle$, el estado $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ es un vector en el espacio producto. Puede verse que este estado no es un estado producto. Para mostrar esto, se considera un estado producto general, que toma la siguiente forma

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{Prod} &= (\alpha_1 |0\rangle + \beta_1 |1\rangle) \otimes (\alpha_2 |0\rangle + \beta_2 |1\rangle) \\ &= \alpha_1\alpha_2 |00\rangle + \alpha_1\beta_2 |01\rangle + \beta_1\alpha_2 |10\rangle + \beta_1\beta_2 |11\rangle \end{aligned}$$

No hay elección posible de los parámetros α y β que haga que este estado sea igual al buscado. Luego no es posible escribir $|\psi\rangle$ como un estado producto. Esto significa que no hay experimento sobre las partes con resultado predecible con certeza, pero si lo hay sobre el par. En este caso se dice que las partículas están entrelazadas.

Este argumento puede generalizarse en forma inmediata: Un estado puro general en \mathcal{H}_{AB} puede expandirse en una base producto como $|\psi\rangle = \sum_{jk} C_{jk} |\phi_j\rangle \otimes |\chi_k\rangle$. El caso de un estado producto corresponde a $C_{jk} = C_j^A C_k^B \forall j, k$, es decir $C = C^A (C^B)^T$, de forma que $|\psi\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle$, con $|\psi_A\rangle = \sum_j C_j^A |\phi_j\rangle$, $|\psi_B\rangle = \sum_k C_k^B |\chi_k\rangle$.

Del párrafo anterior puede verse que, mientras un estado puro general normalizado queda determinado por $D_A D_B - 1$ parámetros complejos (descartando la fase global), un estado producto general queda determinado por $D_A + D_B - 2$ parámetros complejos. Los estados producto forman pues un subconjunto (que no es subespacio) de $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Pensándolo en términos de observables, para un sistema con espacio de Hilbert de dimensión N se tienen $N^2 - 1$ observables linealmente independientes (más el observable trivial identidad) porque una matriz hermítica de $N \times N$ tiene N^2 parámetros reales. Cualquier otro observable es combinación lineal de los anteriores. Si se combinan sistemas con dimensiones M y N respectivamente, se tienen $M^2 N^2 - 1$ observables no triviales linealmente independientes. Esto es mucho más numeroso que la suma de los observables de cada sistema por separado, $M^2 + N^2 - 2$. Luego un sistema compuesto tiene más información que la suma de sus partes. Esta información adicional reside en las correlaciones cuánticas y no tiene un análogo clásico [58].

2.1.1. Descomposición de Schmidt

Como se ha mencionado, combinando linealmente los elementos de la base producto es posible escribir cualquier estado como

$$|\psi\rangle = \sum_j^{D_A} \sum_k^{D_B} C_{jk} |\phi_j\rangle |\chi_k\rangle$$

Esta descomposición tiene en principio $D_A \times D_B$ términos. La descomposición de Schimidt consiste en elegir las bases de cada subespacio de forma tal que $|\psi\rangle$ se escriba como la suma de a lo sumo $\min(D_A, D_B)$ elementos.

Teorema 2.1.1. (Descomposición de Schmidt) Dado $|\psi\rangle$ estado puro del sistema compuesto AB , luego existen estados ortonormales $|\tilde{\phi}_m\rangle$ para A y $|\tilde{\chi}_m\rangle$ para B tales que

$$|\psi\rangle = \sum_{m=1}^{n_S} \lambda_m |\tilde{\phi}_m\rangle |\tilde{\chi}_m\rangle \quad (2.1)$$

con λ_m números reales positivos que satisfacen $\sum_m \lambda_m^2 = 1$ y son denominados coeficientes de Schmidt

Demostración. La descomposición en valores singulares (SVD) de la matriz que contiene los coeficiente C_{jk} es: $C = U\Lambda V$, con U y V matrices unitarias con dimensión $D_A \times D_A$ y $D_B \times D_B$ respectivamente y Λ de dimensión $D_A \times D_B$ con un bloque diagonal con $\min(D_A, D_B)$ elementos λ reales y mayores o iguales a cero (todos sus otros elementos son nulos). Luego se puede escribir $C_{jk} = \sum_m U_{jm} \lambda_m V_{mk}$ y entonces

$$|\psi\rangle = \sum_m \lambda_m \left(\sum_j U_{jm} |\phi_j\rangle \right) \left(\sum_k V_{mk} |\chi_k\rangle \right) = \sum_m \lambda_m |\tilde{\phi}_m\rangle |\tilde{\chi}_m\rangle$$

Se puede ver fácilmente que los vectores $|\tilde{\phi}_m\rangle$ son ortonormales, ya que son combinaciones unitarias de elementos de una base ortonormal. Lo mismo aplica para $|\tilde{\chi}_m\rangle$. Por la condición de normalización de $|\psi\rangle$ se tiene que $\sum_m \lambda_m^2 = 1$. \square

El número de términos n_S es llamado *número de Schmidt*, y es el rango de la matriz C . Se tiene $1 \leq n_S \leq \min(D_A, D_B)$, con $n_S = 1$ solo en caso de tener un estado producto. Los estados reducidos de A y B pueden describirse mediante las matrices densidad reducidas

$$\rho_A = \text{Tr}_B(|\psi\rangle\langle\psi|) = \sum_{m=1}^{n_S} \lambda_m^2 |\tilde{\phi}_m\rangle\langle\tilde{\phi}_m|, \quad \rho_B = \text{Tr}_A(|\psi\rangle\langle\psi|) = \sum_{m=1}^{n_S} \lambda_m^2 |\tilde{\chi}_m\rangle\langle\tilde{\chi}_m| \quad (2.2)$$

las cuales tienen claramente los mismos autovalores no nulos, que son los cuadrados de los valores singulares λ_m . Sus autovectores son los estados locales de la descomposición de Schmidt. De esta forma, si O_A y O_B son observables locales,

$$\langle\psi|O_A \otimes \mathbb{1}_B|\psi\rangle = \text{Tr} \rho_A O_A, \quad \langle\psi|\mathbb{1}_A \otimes O_B|\psi\rangle = \text{Tr} \rho_B O_B$$

2.1.2. Entrelazamiento en estados mixtos

Se dice que un estado mixto ρ_{AB} es separable si existen $p_k \geq 0$ y ρ_A^k y ρ_B^k estados mixtos de los subsistemas tales que

$$\rho_{AB} = \sum_k p_k \rho_A^k \otimes \rho_B^k \quad (2.3)$$

con $\sum_k p_k = 1$. En cualquier otro caso se dice que ρ_{AB} es un estado entrelazado. Esto es así porque un estado del tipo (2.3) puede ser preparado con operaciones locales y comunicación clásica (LOCC, ver sección 2.3.2). Más adelante se verá que esta es de hecho la definición formal del entrelazamiento.

2.2. Entropía en teoría de la información cuántica

2.2.1. Entropía de Von Neumann

Cualquier distribución de probabilidades trae asociada un grado de incertidumbre. Al realizar una medición, uno solo de los posibles resultados emerge como el final y se pasa a tener certeza. Puede hacerse una medida cuantitativa de cuanta información, en promedio, se obtiene al medir. Dadas p_1, p_2, \dots, p_n las probabilidades de los posibles resultados antes de medir, si se aplica la misma medición a N sistemas idénticamente preparados, con N suficientemente grande, se espera $N_j \equiv N p_j$ veces el resultado j . La cantidad de formas distintas de ordenar los N resultados es $\frac{N!}{N_1! N_2! \dots N_n!}$. Cuando $N \rightarrow \infty$ se puede usar Stirling, resultando

$$\ln \frac{N!}{N_1! N_2! \dots N_n!} \simeq N \ln N - N - \sum_j (N_j \ln N_j - N_j) = -N \sum_j p_j \ln p_j$$

Se define así la *entropía de Shannon*:

$$H(p_1, p_2, \dots, p_n) \equiv - \sum_{k=1}^n p_k \ln(p_k) \quad (2.4)$$

con $p_k \ln(p_k) = 0$ si $p_k = 0$ ($\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$).

La entropía de Shannon describe la falta de información asociada con una distribución de probabilidad clásica. Los estados cuánticos en cambio se representan mediante matrices densidad. Para poder usar esta descripción, se generaliza la entropía mediante la entropía de Von Neumann. Dado un sistema con matriz densidad ρ se la define como

$$S(\rho) \equiv - \text{Tr}(\rho \log \rho) \quad (2.5)$$

La traza no depende de la base en que se represente ρ . Para calcular $S(\rho)$ conviene diagonalizar la matriz, es decir escribirla en la base de autovectores,

$$\rho = \sum_k \lambda_k |k\rangle \langle k|$$

La entropía de Von Neumann queda simplemente expresada como

$$S(\rho) = - \sum_k \lambda_k \log \lambda_k \quad (2.6)$$

Se toma $0 \log 0 \equiv \lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x = 0$.

Algunas propiedades de la entropía de Von Neumann son:

- $S(\rho)$ es invariante frente a transformaciones unitarias de ρ , es decir $S(\rho) = S(U\rho U^\dagger)$ con U transformación unitaria¹ ($U^\dagger U = \mathbb{1}$).
- $S(\rho) = 0$ sii el estado es puro, ya que en este caso ρ posee un autovalor igual a 1 y el resto iguales a cero. Luego la entropía de Von Neumann resulta ser una forma eficiente de medir el apartamiento respecto de un estado puro.
- $S(\rho)$ es máxima e igual a $\log N$ para estados máximamente mixtos ($\rho = \mathbb{1}/N$), con N la dimensión del espacio de Hilbert.
- $S(\rho)$ es cóncava: dada una colección de números positivos p_i tales que $\sum_i p_i = 1$ se tiene

$$S\left(\sum_{i=1}^k p_i \rho_i\right) \geq \sum_{i=1}^k p_i S(\rho_i)$$

La entropía es una medida del grado de incertidumbre que se tiene sobre el sistema. En mecánica estadística clásica, este grado de desconocimiento está asociado a la cantidad de microestados compatibles con un valor dado de un conjunto de magnitudes macroscópicas. En mecánica cuántica, el *número de microestados* puede interpretarse como el número de estados puros ortogonales en los que se puede encontrar al sistema.

¹Esto incluye al operador evolución temporal $e^{-iHt/\hbar}$. La entropía de Von Neumann de un sistema aislado se preserva en el tiempo.

2.2.2. Entropía conjunta, condicional, relativa e información mutua en mecánica cuántica

Caso clásico

Recordemos primero la definición de estas cantidades para el caso clásico. Dadas dos variables aleatorias X e Y la probabilidad conjunta es $p(x, y) = p(X = x, Y = y)$, es decir, es la probabilidad de que X tome el valor x y simultáneamente, Y el valor y . La entropía conjunta de X e Y se define entonces como

$$H(X, Y) \equiv - \sum_{x,y} p(x, y) \log p(x, y) \quad (2.7)$$

Esta cantidad mide el grado de incertidumbre sobre el par de variables (X, Y) .

Si se conoce el valor de Y , se adquieren $H(Y)$ bits de información sobre el sistema, donde $H(Y) = - \sum_y p_Y(y) \log p_Y(y)$ es la entropía de la distribución marginal $p_Y(y) = \sum_x p(x, y)$. El grado de incertidumbre remanente sobre el par (X, Y) , es la *entropía condicional de X dado Y* , que se define como

$$H(X|Y) \equiv \sum_y p_Y(y) H(X|Y = y) = H(X, Y) - H(Y) \quad (2.8)$$

donde $H(X|Y = y) = - \sum_x p(x/y) \log p(x/y)$, con $p(x/y) = p(x, y)/p_Y(y)$ la probabilidad condicional de que X tome el valor x dado que Y tomó el valor y . La entropía condicional mide el nivel de incertidumbre promedio sobre el valor de X dado que se conoce el valor de Y . Se tiene que $H(X|Y) \geq 0$, con $H(X|Y) = 0$ si el valor de Y determina completamente el valor de X , y $H(X|Y) = H(X)$ si X e Y son variables aleatorias independientes.

Por otro lado, la *información mutua de X e Y* mide que tanta información X e Y tienen en común. Si se suma $H(X)$ a $H(Y)$, la información que tienen en común queda contada dos veces, mientras que la información que no es compartida queda contada una única vez. Se define entonces la *información mutua de X e Y* como

$$H(X : Y) \equiv H(X) + H(Y) - H(X, Y) \quad (2.9)$$

O alternativamente

$$H(X : Y) \equiv H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X) \quad (2.10)$$

Esta cantidad cuantifica entonces la información que puede obtenerse sobre una variable viendo la otra. Se tiene $H(X : Y) = 0$ si X e Y son variables independientes.

Por último, la entropía relativa es una medida de distancia entre distribuciones de probabilidad $p(x)$ y $q(x)$ sobre el mismo índice x . Se define como

$$H(p||q) \equiv \sum_x p(x) \log \frac{p(x)}{q(x)} \equiv -H(X) - \sum_x p(x) \log q(x) \quad (2.11)$$

con $-0 \log 0 \equiv 0$ y $-p(x) \log 0 \equiv +\infty$ si $p(x) > 0$. Esta cantidad se anula solo si $p(x) = q(x)$ para todo x .

Caso Cuántico

Dado un sistema cuántico bipartito A, B, en un estado descrito por un operador densidad ρ_{AB} , la entropía conjunta es la entropía de Von Neumann asociada a ρ_{AB} :

$$S(A, B) = -\text{Tr}(\rho_{AB} \log \rho_{AB}) \quad (2.12)$$

Esta entropía se anula si ρ_{AB} es un estado puro. Las entropías marginales son $S(A) = -\text{Tr} \rho_A \log \rho_A$, $S(B) = -\text{Tr} \rho_B \log \rho_B$.

La entropía condicional $S(A|B)$ se define en principio como [59]

$$S(A|B) = S(A, B) - S(B) = S(\rho_{AB}) - S(\rho_B) \quad (2.13)$$

No obstante, una diferencia sustancial con el caso clásico es que en mecánica cuántica, esta $S(A|B)$ puede ser *negativa*². El ejemplo típico es del un estado puro entrelazado, ya que en estos $S(A, B) = 0$, por ser ρ_{AB} puro, pero $S(A) = S(B) > 0$, por ser ρ_A y ρ_B estados mixtos con autovalores no nulos idénticos (Ec. (2.2)). Por lo tanto, se tiene en este caso $S(A|B) = S(B|A) = -S(A) = -S(B) < 0$.

Puede demostrarse que $S(A|B) \geq 0$ en todo estado mixto separable [60, 61], por lo que $S(A|B) < 0$ implica que ρ_{AB} es entrelazado. No obstante, existen estados mixtos entrelazados para los que $S(A|B) \geq 0$. Una definición alternativa para la entropía condicional, que resulta no negativa, se introdujo en relación con la discordia cuántica, que será discutida en 2.3.6.

La información mutua cuántica se define como

$$I(A : B) \equiv S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_{AB}) \quad (2.14)$$

A diferencia de la entropía condicional, esta cantidad sigue siendo no negativa en mecánica cuántica, anulándose si $\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$.

²En este caso, la entropía condicional se conoce como *información coherente* y tiene aplicaciones importantes en teoría de la información cuántica

La demostración puede basarse también en la positividad de la entropía relativa cuántica, definida como [59, 62]

$$S(\rho||\sigma) = \text{Tr } \rho \log \rho - \text{Tr } \rho \log \sigma \quad (2.15)$$

Puede demostrarse, al igual que en el caso clásico, que esta cantidad cumple $S(\rho||\sigma) \geq 0$, con $S(\rho||\sigma) = 0$ sii $\rho = \sigma$. La demostración es similar a la del caso clásico, utilizándose además la concavidad del logaritmo en la evaluación del segundo término en (2.15) [6].

Como en el caso clásico, la información mutua cuántica (2.14) puede escribirse también como

$$I(A : B) = S(\rho_{AB}||\rho_A \otimes \rho_B) \quad (2.16)$$

y por ende es siempre no negativa, anulándose sii $\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$. $I(A : B)$ es pues una medida de la correlación total entre A y B.

Quedan así generalizadas estas cantidades clásicas para sistemas cuánticos:

Clásico	Cuántico
$H(A)$	$S(\rho_A)$
$H(B)$	$S(\rho_B)$
$H(A, B)$	$S(\rho_{AB})$
$H(A B) \equiv H(A, B) - H(B)$	$S(A B) \equiv S(\rho_{AB}) - S(\rho_B)$
$H(A B)$	$S(A B)$
$I(A : B) \equiv H(A) + H(B) - H(AB)$	$I(A : B) \equiv S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_{AB})$

2.3. Medidas de correlaciones cuánticas

2.3.1. Entrelazamiento de estados puros

El entrelazamiento entre dos partes A y B , o entrelazamiento bipartito, se define para un estado $|\psi_{AB}\rangle \in \mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Si bien $S(\rho_{AB}) = 0$ por ser $\rho_{AB} = |\psi_{AB}\rangle \langle \psi_{AB}|$ un estado puro, los estados reducidos $\rho_A = \text{Tr}_B \rho_{AB}$ y $\rho_B = \text{Tr}_A \rho_{AB}$ son en general mixtos y con idénticos autovalores. La entropía de entrelazamiento del estado se define como la entropía de Von Neumann (2.5) de cualquiera de los subsistemas [63]:

$$E(A, B) = S(\rho_A) = S(\rho_B) = - \sum_{m=1}^{n_S} \lambda_m^2 \log \lambda_m^2 \quad (2.17)$$

Por lo tanto, $E(A, B) \geq 0$, con $E(A, B) = 0$ sii $n_S = 1$, es decir, sii el estado es separable. No importa cuál de las dos subsistemas se elija, ya que las dos entropías son siempre idénticas en un estado puro. Esta definición se basa en la estructura de producto tensorial del espacio de Hilbert.

Para un estado puro se tiene además $S(A|B) = S(B|A) = -S(\rho_A) = -E(A, B)$ (ya que $S(\rho_{AB}) = 0$), es decir la entropía condicional es negativa e igual a menos la entropía de entrelazamiento, mientras que $I(A : B) = S(\rho_A) + S(\rho_B) = 2E(A, B)$, es decir, la información mutua es el doble de dicha entropía. Por otro lado, en todo sistema clásico, $I(A : B) = S(A) - S(A|B) \leq S(A)$ y $I(A : B) \leq S(B)$, alcanzando dichos límites cuando el sistema es (clásicamente) máximamente correlacionado, es decir, cuando B queda fijo conociendo el valor de A y viceversa, tal que $S(A|B) = S(B|A) = 0$ y $S(A) = S(B) = S(A, B)$. Esto implica que un estado cuántico entrelazado viola estas desigualdades clásicas, dando como resultado una información mutua mayor que aquella posible en cualquier sistema clásico (de la misma dimensión).

2.3.2. LOCC

La teoría de recursos de operaciones locales y comunicación clásica (LOCC) se basa en un conjunto de operaciones que se aplican sobre estados bipartitos asociados a sistemas espacialmente separados. Se considerará un sistema bipartito A (Alice), B (Bob). Si un cierto estado puede transformarse en otro usando LOCC, entonces la transformación puede hacerse mediante un protocolo que involucra solo los siguientes pasos [6]:

1. Alice realiza una medición caracterizada por operadores M_m y una operación unitaria U_i .
2. Alice envía el resultado m a Bob.
3. Bob realiza una operación unitaria U_j sobre su sistema.

En general, se define como estado entrelazado a todos aquellos que no pueden generarse mediante LOCC, partiendo de un estado producto. Al complemento de estos estados se los llama separables.

Al aplicar una LOCC sobre un estado inicial separable, se llega siempre a otro estado separable, de la forma $\rho_{AB} = \sum_k p_k \rho_A^k \otimes \rho_B^k$, con $p_k \geq 0 \forall k$.

En general, puede demostrarse que un estado puro bipartito $|\psi\rangle$ puede transformarse en otro estado puro $|\phi\rangle$ usando LOCC si $\lambda_\psi^2 \prec \lambda_\phi^2$, con λ el conjunto de coeficientes de Schmidt³ [6]. Luego basta comparar los coeficientes de Schmidt de ambos estados para saber si es posible pasar de uno a otro mediante LOCC. En particular, esta condición implica $E_\psi(A, B) \geq E_\phi(A, B)$, de forma que el entrelazamiento final no puede superar al inicial. Las operaciones LOCC no pueden generar entrelazamiento.

Ejemplo 2.3.1. *El siguiente ejemplo ilustra la aplicación un protocolo basado en operaciones locales y comunicación clásica. Se tienen dos observadores, Alice y Bob, que tienen un canal de comunicación clásica (un teléfono ó internet por ejemplo). Se les da a Alice y Bob un par de qubits en el estado máximamente entrelazado $(|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$. Alice realiza una medida (ver Sección 2.3.3) basada en los operadores (escritos en la base estándar)*

$$M_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta \end{pmatrix}; \quad M_2 = \begin{pmatrix} \sin \theta & 0 \\ 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Los dos posibles estados resultantes son $\cos \theta |00\rangle + \sin \theta |11\rangle$ (1) ó $\sin \theta |00\rangle + \cos \theta |11\rangle$ (2). Si obtiene el segundo caso, Alice aplica una compuerta NOT (operación unitaria que cambia 0 por 1 y viceversa), pasando así a $\sin \theta |10\rangle + \cos \theta |01\rangle$. Luego envía el resultado de la medida a Bob. Si le llega el resultado 1 no hace nada, pero si en cambio le llega el 2 aplica otro NOT sobre su qubit. Luego el estado final es siempre $\cos \theta |00\rangle + \sin \theta |11\rangle$. Se pasó del estado $(|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$ al $\cos \theta |00\rangle + \sin \theta |11\rangle$, usando operaciones locales y comunicación clásica. Un estado máximamente entrelazado se lleva de esta forma a un estado con menor entrelazamiento.

Las LOCC toman importancia también a la hora de destilar o diluir entrelazamiento a partir de una cantidad considerable de copias de un estado $|\psi\rangle$. Destilar consiste en obtener tantos estados de Bell $(|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$, como sea posible, partiendo de los estados $|\psi\rangle$. Diluir es el proceso inverso, es decir convertir copias del estado de Bell⁴ $(|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$ en tantas copias de $|\psi\rangle$ como sea posible. Ambos mecanismos se llevan a cabo mediante operaciones LOCC.

³Esta relación se conoce como mayorización [64]. Equivale a pedir que las sumas parciales satisfagan $\sum_{j=1}^i \lambda_{\psi;j}^2 \leq \sum_{j=1}^i \lambda_{\phi;j}^2 \forall i$, donde los autovalores λ_i^2 están escritos en orden descendente.

⁴Los estados de Bell constituyen una base de estados máximamente entrelazados de dos qubits. Estos son $\{|\Phi^\pm\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle), |\Psi^\pm\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle)\}$.

2.3.3. Características generales de una medida de entrelazamiento

Formalmente, una medida de entrelazamiento para sistemas distinguibles debe ser una función real del estado que no puede aumentar bajo LOCC y que se anule para el caso de estados separables. Las propiedades que uno espera tener para una medida natural de entrelazamiento E en el caso de estados puros son las siguientes: [65]

- Debe ser aditiva para sistemas independientes.
- Debe ser conservada bajo operaciones locales unitarias $U = U_A \otimes U_B$.
- No puede aumentar bajo operaciones locales no unitarias.
- Puede concentrarse o diluirse mediante LOCC con eficiencia asintótica. Dados n sistemas idénticos, puede hacerse con probabilidad que tiende a 1 cuando n tiende a infinito.

La entropía de entrelazamiento definida en (2.17) cumple con estos requisitos.

Para estados no puros, el problema de determinar una medida de entrelazamiento consistente es más complejo. Es importante remarcar la diferencia entre entrelazamiento y correlaciones para estados mixtos. Un estado mixto separable, es decir de la forma (2.3), no es necesariamente un estado producto, por lo puede contener correlaciones. No obstante, las mismas pueden ser generadas por LOCC. Como ejemplo, el estado

$$\rho_1 = \frac{1}{2}(|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|)$$

no está entrelazado de acuerdo a la definición (2.3), pero exhibe correlación *clásica* máxima, ya que una medición en la base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ sobre la primer partícula determina el resultado de la segunda. Es posible generar ρ_1 de forma clásica siguiendo un simple protocolo: Charlie toma un bit 0 ó 1 de forma aleatoria de una distribución uniforme, lo duplica y le da un bit a Alice y otro a Bob. El estado resultante es ρ_1 , y es pues un estado clásicamente correlacionado, diagonal en una base producto.

Por otro lado puede considerarse el estado puro

$$\rho_2 = \frac{1}{2}(|00\rangle + |11\rangle)(\langle 00| + \langle 11|)$$

De la misma forma que con ρ_1 , medir sobre una parte en la base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ determina completamente la otra. Sin embargo, al medir en la base $\{|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)\}$ en uno de los lados (por ejemplo, Bob), se observan diferencias. Si se realiza la medición en el estado ρ_1 , el estado reducido de Alice es ahora $\rho_{1A} = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|)$ para ambos resultados, que es máximamente mezclado. Pero si se realiza en el estado ρ_2 , se obtiene $\rho_{2A} = |\pm\rangle\langle \pm|$, por lo que Alice obtiene siempre el mismo estado que Bob. El estado entrelazado tiene correlaciones perfectas al ser medido en bases diferentes. Esto no es posible en estados clásicamente correlacionados, diagonales en una base producto.

2.3.4. Entrelazamiento de formación

Se define el entrelazamiento de formación $E_f(A, B)$ de un estado mixto ρ_{AB} como el mínimo entrelazamiento promedio de cualquier ensamble de estados puros que compongan ρ_{AB} [66]. Dada una matriz densidad ρ_{AB} , se consideran todas las posibles descomposiciones de ρ_{AB} como combinación convexa de estados puros (no necesariamente ortogonales):

$$\rho_{AB} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle \psi_i|$$

donde $p_i \geq 0$, $\sum_i p_i = 1$. Luego se determina el mínimo entrelazamiento promedio entre todas las descomposiciones anteriores:

$$E_f(A, B) = \min_{\sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle \psi_i| = \rho_{AB}} \sum_i p_i E(|\psi_i\rangle) \quad (2.18)$$

Puede probarse [66] que esta definición es efectivamente no-creciente bajo LOCC. Cuantifica además el mínimo recurso cuántico necesario para formar un estado entrelazado. Puede pensarse como la cantidad de estados de Bell necesarios para formar copias de ρ_{AB} mediante una secuencia de LOCC. El entrelazamiento de formación es no aditivo.

Este tipo de extensiones de cantidades definidas para estados puros a estados mixtos se conoce como extensión de techo convexo (*convex roof extension*). En particular, (2.18) resulta, en general, difícil de calcular analíticamente, salvo en casos especiales o en sistemas de dos qubits (ver sección 2.3.5). Es por eso que se desarrollaron también otras medidas y criterios de entrelazamiento para estados mixtos, menos rigurosos pero más sencillos de calcular, como el criterio PPT (*positive partial*

transpose)⁵ [67] y la negatividad⁶ [68, 69].

2.3.5. Concurrencia

Si bien es difícil en general calcular analíticamente el entrelazamiento de formación, existen casos donde sí es posible. Por ejemplo, el caso de un estado arbitrario de dos qubits [70]: Para estados *puros* $|\psi\rangle$ de tal sistema se define en primer lugar la concurrencia como

$$C(|\psi\rangle) = |\langle\psi|\tilde{\psi}\rangle|, \quad |\tilde{\psi}\rangle = \sigma_y \otimes \sigma_y |\psi^*\rangle, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

con $|\psi^*\rangle$ el estado complejo conjugado expandido en la base estándar $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ y σ_y la matriz de Pauli. $|\tilde{\psi}\rangle$ corresponde a aplicar un spin flip sobre $|\psi\rangle$. Por ejemplo, al estado singlete $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$ la operación anterior lo deja idéntico (a menos de una fase), con lo cual $|\langle\psi|\tilde{\psi}\rangle| = 1$, es decir, $C = 1$. Por otra parte, el estado no entrelazado $|\psi\rangle = |01\rangle$ se flipea a su estado ortogonal $|\tilde{\psi}\rangle = |10\rangle$, con lo cual la concurrencia se anula.

Para estados puros C resulta ser igual a $\sqrt{2(1 - \text{Tr}\rho_A^2)}$, es decir, a la raíz de una entropía cuadrática del estado reducido $\rho_A = \text{Tr}_B |\psi\rangle\langle\psi|$, tomando valores entre 0 y 1. Es pues una medida de entrelazamiento. La entropía de entrelazamiento de von Neumann (2.17) para un estado puro de dos qubits puede así expresarse en términos de C como [70]

$$E(A, B) = - \sum_{\nu=\pm} p_\nu \log p_\nu, \quad p_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{1 - C^2}}{2} \quad (2.19)$$

siendo una función monótona creciente y convexa de C . Ambas cantidades toman valores entre 0 y 1.

Para un estado mixto general ρ de dos qubits, se tiene, en la base estándar,

$$\tilde{\rho} = (\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho^* (\sigma_y \otimes \sigma_y) \quad (2.20)$$

⁵Es una condición necesaria (pero no suficiente) de separabilidad de un estado ρ_{AB} . Dado un estado $\rho = \sum_{ijkl} p_{kl}^{ij} |i\rangle\langle j| \otimes |k\rangle\langle l|$, este indicador se basa en la presencia de al menos un autovalor negativo en la matriz transpuesta parcial $\rho_{AB}^{TB} \equiv (I \otimes T)(\rho_{AB}) = \sum_{ijkl} p_{kl}^{ij} |i\rangle\langle j| \otimes |l\rangle\langle k|$

⁶La negatividad se define como *menos la suma de los autovalores negativos de la traspuesta parcial* y es un indicador de entrelazamiento de estados mixtos, computable en estados y sistemas generales.

y la concurrencia (definida via convex roof extension de la expresión para estados puros), puede obtenerse analíticamente como [71]

$$C(\rho) = \text{máx}\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\} \quad (2.21)$$

donde λ_i son los autovalores en orden decreciente de la matriz hermítica $R = \sqrt{\sqrt{\rho}\tilde{\rho}\sqrt{\rho}}$. Esto es análogo a tomar la raíz cuadrada de los autovalores de la matriz no hermítica $\rho\tilde{\rho}$. Puede verse que para estados puros $|\psi\rangle$, el único autovalor no nulo de R coincide con $C(|\psi\rangle)$. El entrelazamiento de formación (2.18) se obtiene luego a partir de (2.21) por medio de la misma fórmula (2.19).

2.3.6. Discordia

Al querer generalizar la entropía condicional al caso cuántico surge una ambigüedad. En el caso clásico las dos expresiones de (2.8) son idénticas pero esto no sucede en el caso cuántico. Más aun, la primera no está unívocamente definida en el caso cuántico, ya que depende de la medida local elegida. Esta entropía condicional cuántica dependiente de la medida (en A) fue introducida en [72] y puede definirse como

$$S(B|\{P_j^A\}) = \sum_j p_j S(\rho_{B/j}) \quad (2.22)$$

donde $p_j = \text{Tr} \rho_{AB} P_j^A$ es la probabilidad de obtener el resultado j en A , $P_j^A = P_j \otimes I_B$ denota los proyectores (o en general operadores $M_j^{A\dagger} M_j^A$) que determinan la medida local en A y $\rho_{B/j} = p_j^{-1} \text{Tr}_A \rho_{AB} P_j^A$ el estado reducido de B luego del resultado j en A .

De esta forma, además de la información mutua (2.14), es decir

$$I(\rho_{AB}) \equiv S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_{AB}) \quad (2.23)$$

puede definirse una información mutua dependiente de la medida local utilizando (2.22) en la expresión (2.10), es decir,

$$J(\rho_{AB}|\{P_j^A\}) \equiv S(\rho_B) - S(B|\{P_j^A\}) \quad (2.24)$$

Estas dos expresiones no son equivalentes en el caso cuántico, ya que J involucra ahora una medición que cambia el estado final del sistema. Al realizar una medida proyectiva sobre uno de los subsistemas se pasa a tener un estado “clásico”. Para extraer toda correlación del tipo “clásica” se minimiza entonces la entropía condicional

sobre todas las posibles medidas locales, lo que equivale a maximizar J sobre dichas medidas.

Se define entonces la *discordia* $\mathcal{D}_A(\rho_{AB})$ como la diferencia entre las cantidades (2.23) y (2.24) maximizada [72]:

$$\mathcal{D}_A(\rho_{AB}) = I(\rho_{AB}) - \max_{\{P_j^A\}} J(\rho_{AB}|\{P_j^A\}) = \min_{\{P_j^A\}} S(B|\{P_j^A\}) - [S(\rho_{AB}) - S(\rho_A)] \quad (2.25)$$

Se tiene que \mathcal{D}_A y \mathcal{D}_B pueden en general ser diferentes (no es simétrica). Se cumple que $\mathcal{D}_A \geq 0$, con $\mathcal{D}_A = 0$ sii ρ_{AB} es un estado clásicamente correlacionado desde A , es decir de la forma $\rho_{AB} = \sum_j p_j |j\rangle\langle j|_A \otimes \rho_{B/j}$, tal que permanece invariante ante una medida local en A en la base $\{|j\rangle\langle j|_A\}$. Para estados puros se reduce a la entropía de entrelazamiento (2.17).

Por lo tanto, \mathcal{D}_A y \mathcal{D}_B se anulan en estados productos $\rho_A \otimes \rho_B$ y también en todo estado diagonal en una base producto, pero no se anulan en la mayoría de estados separables. Esto implica que la separabilidad no implica ausencia de correlaciones de tipo “cuántico”, en el sentido que conducen a una diferencia no nula entre las dos extensiones cuánticas de la entropía condicional, y que implican que el estado no permanece invariante frente a ninguna medida local. Estados con discordia no nula son más resistentes a ambientes disipativos, con lo cual resultan en principio de interés para ciertas aplicaciones [73]. Es en general muy difícil calcular en forma analítica la discordia a causa de la minimización involucrada. Solo en ciertos casos simples o en ciertos límites [74] se logra obtener expresiones cerradas.

Formalismo Fermiónico

El concepto de entrelazamiento está claramente definido para sistemas de componentes distinguibles, en los cuales el espacio de Hilbert del sistema completo es el producto tensorial de los espacios de los subsistemas. Para sistemas de componente indistinguibles, la noción de entrelazamiento es menos clara, dada la dificultad inherente para distinguir subsistemas. Vale aclarar que no existen las partículas distinguibles como tales. Lo que realmente es distinguible son los posibles modos de un sistema. Las partículas son una ocupación igual a 1 que se distribuye entre estos posibles modos. Es correcto tratar las partículas como sistemas completamente distinguibles cuando se encuentran acotadas a subconjuntos de modos ortogonales. Por ejemplo, si se tiene una partícula acotada a un conjunto de modos \mathcal{S} y otra acotada a un conjunto $\bar{\mathcal{S}}$ ortogonal a \mathcal{S} , entonces es correcto tratar a los fermiones como sistemas distinguibles, ya que la restricción en las ocupaciones hace que la distinguibilidad de los modos sea heredada por las partículas. Esto es lo que ocurre cuando las partículas se encuentran en estados con números cuánticos que las diferencian, ó existen barreras de potencial considerables entre las partículas.

En este trabajo, el foco va a estar sobre los sistemas fermiónicos. En primer lugar se va a repasar el formalismo usual para describir estos sistemas.

3.1. Operadores de creación y aniquilación para fermiones

Los operadores de creación y aniquilación fermiónicos se denotarán en general como c_ν^\dagger y c_ν , con $\nu = 1, \dots, d$ y d la dimensión del espacio de Hilbert \mathcal{H} de estados de un fermión. Los operadores cumplen las reglas de anticonmutación:

$$\{c_\nu^\dagger, c_\mu^\dagger\} = \{c_\nu, c_\mu\} = 0 \quad (3.1)$$

$$\{c_\nu, c_\mu^\dagger\} = \delta_{\nu\mu} \quad (3.2)$$

Esto define un álgebra que refleja antisimetrización ante el intercambio de partículas (ver Apéndice A). Definiendo el vacío $|0\rangle$ de los operadores c_ν , tal que $c_\nu|0\rangle = 0 \forall \nu$, los estados de un fermión $c_\nu^\dagger|0\rangle$ creados por los operadores c_ν^\dagger son por (3.2) obviamente ortogonales: $\langle 0|c_\nu c_\mu^\dagger|0\rangle = \delta_{\nu\mu}$. El estado $|\phi\rangle = c_1^\dagger \dots c_N^\dagger|0\rangle$ representa un determinante de Slater (DS) de N fermiones, es decir un estado de partícula independiente. Todo estado $|\psi\rangle$ de N fermiones puede escribirse como combinación lineal de DS de N fermiones:

$$|\psi\rangle = \sum_{n_1, \dots, n_d} C_{n_1 \dots n_d} (c_1^\dagger)^{n_1} \dots (c_d^\dagger)^{n_d} |0\rangle \quad (3.3)$$

donde $n_i = 0, 1$, con $\sum_i n_i = N$, denota la ocupación del estado de un fermión i . La condición $\langle \psi|\psi\rangle = 1$ implica $\sum_{n_1, \dots, n_d} |C_{n_1 \dots n_d}|^2 = 1$. Tal combinación lineal no es necesariamente un DS.

3.2. Representación de operadores

Ya se mostró como expresar cualquier estado de muchas partículas partiendo del vacío en función de los operadores de creación y destrucción. Para operadores puede hacerse algo similar.

Los *operadores de un cuerpo* son de la forma [75]

$$\hat{F} = \sum_{\nu, \nu'} f_{\nu\nu'} c_\nu^\dagger c_{\nu'} \quad (3.4)$$

cumpliéndose que $\langle \nu|\hat{F}|\nu'\rangle = \langle 0|c_\nu \hat{F} c_{\nu'}^\dagger|0\rangle = f_{\nu\nu'}$. Por ejemplo, el operador número de fermiones, $\hat{N} = \sum_\nu c_\nu^\dagger c_\nu$, es un operador de un cuerpo. Si \hat{F} es hermítico, $\hat{F}^\dagger = \hat{F}$ entonces la matriz F de elementos $f_{\nu\nu'}$ es hermítica: $f_{\nu\nu'} = f_{\nu'\nu}^*$.

Los *operadores de dos cuerpos* representan una interacción de dos partículas y pueden escribirse en la forma

$$\hat{V} = \frac{1}{4} \sum_{\mu, \nu, \mu', \nu'} \bar{v}_{\mu\nu\mu'\nu'} c_\mu^\dagger c_\nu^\dagger c_{\nu'} c_{\mu'}$$

donde \bar{v} es el elemento de matriz antisimetrizado, tal que $\bar{v}_{\mu\nu\mu'\nu'} = -\bar{v}_{\nu\mu\mu'\nu'} = -\bar{v}_{\mu\nu\nu'\mu'}$. Se cumple así que $\langle \mu\nu|\hat{V}|\mu'\nu'\rangle = \langle 0|c_\nu c_\mu \hat{V} c_{\mu'}^\dagger c_{\nu'}^\dagger|0\rangle = \bar{v}_{\mu\nu\mu'\nu'}$.

Los operadores anteriores conservan el número de fermiones, es decir, satisfacen $[\hat{F}, \hat{N}] = 0$, $[\hat{V}, \hat{N}] = 0$. Se pueden considerar también operadores que no conservan

el número de fermiones, tal como el operador

$$\hat{O} = \sum_{\nu, \nu'} f_{\nu\nu'} c_{\nu}^{\dagger} c_{\nu'} + \frac{1}{2} (g_{\nu\nu'} c_{\nu}^{\dagger} c_{\nu'}^{\dagger} + h_{\nu\nu'} c_{\nu} c_{\nu'}) \quad (3.5)$$

que es la forma bilineal más general en los operadores c, c^{\dagger} , con g y h matrices antisimétricas. Se cumple $\langle \nu\nu' | \hat{O} | 0 \rangle = g_{\nu\nu'}$, $\langle 0 | \hat{O} | \nu'\nu \rangle = h_{\nu\nu'}$. Estos operadores se conocen también como operadores de un cuerpo generalizados. Si \hat{O} es hermítico, $f_{\nu\nu'} = f_{\nu'\nu}^*$ y $h_{\nu\nu'} = -g_{\nu\nu'}^*$.

Resulta conveniente escribir el operador \hat{F} en su forma matricial

$$\hat{F} = \mathbf{c}^{\dagger} F \mathbf{c} \quad (3.6)$$

donde $\mathbf{c}^{\dagger} = (c_1^{\dagger}, \dots, c_d^{\dagger})$ (vector fila) y $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_d)^T$ (vector columna).

De forma similar, puede escribirse el operador (3.5) en la forma matricial extendida

$$\hat{O} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{c}^{\dagger} & \mathbf{c} \end{pmatrix} \mathcal{O} \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{c}^{\dagger} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \text{Tr } F \quad (3.7)$$

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} F & G \\ H & -F^T \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Así, \hat{O} resulta hermítico sii la matriz extendida \mathcal{O} es hermítica, es decir, $F^{\dagger} = F$ y $H = G^{\dagger} = -G^*$.

3.3. Transformaciones unitarias y de Bogoliubov para Fermiones

Son transformaciones lineales de los operadores de creación y aniquilación, que preservan las relaciones de anticonmutación. Suelen usarse para diagonalizar Hamiltonianos de un cuerpo (3.4) o de un cuerpo generalizados (3.5), y sirven para entender fenómenos físicos muy diversos, desde pairing hasta radiación de Hawking [76]. Estas transformaciones se denominan también canónicas.

Transformaciones unitarias

Se va considerar primero el caso de transformaciones unitarias $a_{\mu} = \sum_{\nu} U_{\mu\nu} c_{\nu}$, es decir,

$$\mathbf{a} = U \mathbf{c} \quad (3.9)$$

donde U es una matriz unitaria de $d \times d$. De esta forma, se verifican las relaciones de anticonmutación para los operadores a_ν, a_ν^\dagger :

$$\{a_\mu, a_\nu^\dagger\} = \sum_{\mu', \nu'} U_{\mu\mu'} U_{\nu\nu'}^* \{c_{\mu'}, c_{\nu'}^\dagger\} = (UU^\dagger)_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$$

La transformación (3.9) puede escribirse también como

$$\mathbf{a} = e^{-i\hat{K}} \mathbf{c} e^{i\hat{K}} \quad (3.10)$$

donde $\hat{K} = \mathbf{c}^\dagger K \mathbf{c}$ es un operador hermítico de un cuerpo de la forma (3.4) tal que $\exp[iK] = U$. Aquí se usa la conocida propiedad

$$e^O A e^{-O} = A + [O, A] + \frac{1}{2!}[O, [O, A]] + \frac{1}{3!}[O, [O, [O, A]]] + \dots \quad (3.11)$$

Mediante una transformación de este tipo, se puede diagonalizar (3.4) para \hat{F} hermítico: basta elegir U^\dagger como la matriz que diagonaliza F , es decir $UFU^\dagger = D$, con D diagonal, $D_{\mu\mu'} = \lambda_\mu \delta_{\mu\mu'}$, tal que

$$\hat{F} = \mathbf{a}^\dagger U F U^\dagger \mathbf{a} = \mathbf{a}^\dagger D \mathbf{a} = \sum_{\mu} \lambda_\mu a_\mu^\dagger a_\mu$$

Nótese que el vacío de los operadores \mathbf{a} es el mismo que el de los \mathbf{c} .

A esta subclase de transformaciones canónicas fermiónicas que conmutan con el operador número de partículas \hat{N} se las denota también como transformaciones pasivas [27].

Transformaciones de Bogoliubov

Las transformaciones unitarias anteriores pueden generalizarse considerando una transformación lineal que mezcle los operadores \mathbf{c} y \mathbf{c}^\dagger :

$$a_\mu = \sum_{\nu} U_{\mu\nu} c_\nu + V_{\mu\nu} c_\nu^\dagger, \quad a_\mu^\dagger = \sum_{\nu} U_{\mu\nu}^* c_\nu^\dagger + V_{\mu\nu}^* c_\nu \quad (3.12)$$

Puede pensarse a modo de ejemplo en la transformación *partícula-hueco*:

$$c_\nu \rightarrow c_\nu^\dagger, \quad c_\nu^\dagger \rightarrow c_\nu$$

Esta transformación deja invariantes las relaciones de anticonmutación y luego es equivalente hablar en términos de partículas o de huecos como *verdaderos* fermiones.

Se puede reescribir (3.12) de forma matricial como

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{a}^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U & V \\ V^* & U^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{c}^\dagger \end{pmatrix} = \mathcal{W} \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{c}^\dagger \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

con \mathcal{W} la matriz

$$\mathcal{W} = \begin{pmatrix} U & V \\ V^* & U^* \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

Para que los nuevos operadores a_μ, a_μ^\dagger cumplan las relaciones de anticonmutación,

$$\{a_\mu, a_\nu^\dagger\} = \delta_{\mu\nu}, \quad \{a_\mu, a_\nu\} = \{a_\mu^\dagger, a_\nu^\dagger\} = 0$$

la matriz \mathcal{W} tiene que ser *unitaria*:

$$\mathcal{W}^\dagger \mathcal{W} = \mathcal{W} \mathcal{W}^\dagger = \mathbf{1}$$

Esto implica

$$\begin{aligned} U^\dagger U + V^T V^* &= \mathbf{1}, & U U^\dagger + V V^\dagger &= \mathbf{1}, \\ U^\dagger V + V^T U^* &= 0, & U V^T + V U^T &= 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Lo que permite invertir la relación (3.12) para obtener

$$c_\nu = \sum_\mu U_{\mu\nu}^* a_\mu + V_{\mu\nu} a_\mu^\dagger, \quad c_\nu^\dagger = \sum_\mu U_{\mu\nu} a_\mu^\dagger + V_{\mu\nu}^* a_\mu$$

Mediante esta transformación, es siempre posible diagonalizar un operador de un cuerpo generalizado (3.5) hermítico: basta con elegir \mathcal{W}^\dagger como la matriz unitaria que diagonaliza \mathcal{O} , o sea $\mathcal{W} \mathcal{O} \mathcal{W}^\dagger = \mathcal{D}$, con $\mathcal{D} = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & -D \end{pmatrix}$ y D una matriz diagonal de elementos diagonales λ_μ . De esta forma, puede escribirse $\hat{\mathcal{O}}$ como

$$\hat{\mathcal{O}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{a}^\dagger & \mathbf{a} \end{pmatrix} \mathcal{D} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{a}^\dagger \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \text{Tr} F = \sum_\mu \lambda_\mu a_\mu^\dagger a_\mu + \frac{1}{2} \sum_\mu (F_{\mu\mu} - \lambda_\mu) \quad (3.16)$$

Los nuevos operadores $\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger$ se denominan operadores de destrucción y aniquilación de cuasipartículas, y si $\hat{\mathcal{O}}$ representa un Hamiltoniano los λ_k son las energías de cuasipartícula.

Las matrices \mathcal{O} de la forma (3.8) hermíticas ($H = -G^*, F = F^\dagger$) pueden ser siempre diagonalizadas por una matriz unitaria de la forma (3.14), teniendo siempre autovalores que aparecen en pares de signos opuestos, tal que un operador (3.5)

hermítico puede ser siempre llevado a la forma diagonal (3.16) mediante una transformación de Bogoliubov.

La transformación (3.12) puede escribirse también en la forma (3.10)

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{a}^\dagger \end{pmatrix} = e^{-i\hat{O}} \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{c}^\dagger \end{pmatrix} e^{i\hat{O}} \quad (3.17)$$

donde ahora \hat{O} es un operador hermítico cuadrático de la forma (3.5).

Se muestra en el Apéndice A.3 que toda transformación de Bogoliubov puede descomponerse en una transformación unitaria, una de BCS, que es una transformación de Bogoliubov que involucra solamente bloques (3.14) de 2×2 , y finalmente otra unitaria. Esto muestra que el uso de este tipo de transformaciones está usualmente vinculado al tratamiento de interacciones de apareamiento (ver 3.7).

A esta subclase de transformaciones canónicas que no conmutan con el operador número de partículas se las conoce también como activas [27].

3.4. Vacíos de Bogoliubov

A diferencia de las transformaciones unitarias, las transformaciones de Bogoliubov sí modifican el vacío: el de los operadores de cuasipartícula \mathbf{a} es distinto al de los \mathbf{c} . Si no es ortogonal a $|0\rangle$, el nuevo vacío puede escribirse como

$$|0'\rangle = N \exp[-\hat{O}] |0\rangle$$

Para ser un vacío debe cumplir que $a_\mu |0'\rangle = 0 = e^{-\hat{O}} e^{\hat{O}} a_\mu e^{-\hat{O}} |0\rangle \quad \forall \mu$. Usando (3.11) y tomando el operador \hat{O} de la siguiente forma [77]

$$\hat{O} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} T_{ij} c_i^\dagger c_j^\dagger$$

con T una matriz antisimétrica, sobrevive sólo el primer conmutador en (3.11). Al pedirle que sea cero, si $\det U \neq 0$, se llega a

$$T = U^{-1}V$$

El nuevo vacío queda escrito entonces como [75]

$$|0'\rangle = N \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i,j} T_{ij} c_i^\dagger c_j^\dagger \right] |0\rangle \quad (3.18)$$

con $|N| = |\langle 0|0'\rangle| = |\det U|^{1/2}$ la normalización. Puede verificarse, aplicando a_μ a este estado, que $a_\mu|0'\rangle = 0$. Vacíos $|0'\rangle$ ortogonales a $|0\rangle$ se obtienen aplicando uno o más operadores de creación c_i^\dagger al vacío anterior [75].

El nuevo vacío puede también obtenerse por medio de una transformación unitaria

$$|0'\rangle = \exp[-i\hat{O}]|0\rangle \quad (3.19)$$

donde \hat{O} es un operador hermítico de la forma (3.5)–(3.7). Puede elegirse además $F = 0$ en (3.8) [75].

3.5. Transformaciones unitarias de un cuerpo

Una operador unitario de un cuerpo es un operador unitario de la forma

$$U = \exp[-i\hat{K}], \quad \hat{K} = \mathbf{c}^\dagger K \mathbf{c}, \quad (3.20)$$

con \hat{K} un operador de un cuerpo hermítico ($K^\dagger = K$). Se ha visto ya en (3.10) que estos operadores unitarios transforman operadores fermiónicos \mathbf{c} en otros operadores fermiónicos \mathbf{a} preservando las relaciones de anticonmutación.

Una propiedad importante de estos operadores es que si $|\psi\rangle$ es un DS, entonces

$$|\psi'\rangle = U|\psi\rangle$$

es también un DS. Esto es consecuencia de (3.10). Aplicar U a $|\psi\rangle = c_1^\dagger \dots c_m^\dagger |0\rangle$, transformará los operadores fermiónicos \mathbf{c}^\dagger en nuevos operadores fermiónicos \mathbf{a}^\dagger , obteniéndose entonces el DS $a_1^\dagger \dots a_m^\dagger |0\rangle$. El vacío no cambia, ya que $U|0\rangle = |0\rangle$.

El producto de operadores unitarios de un cuerpo es otro operador unitario de un cuerpo: $e^{-i\hat{K}_1} e^{-i\hat{K}_2} = e^{-i\hat{K}_{12}}$, con $\hat{K}_{12} = \mathbf{c}^\dagger K_{12} \mathbf{c}$ un operador de un cuerpo definido por $e^{-iK_{12}} = e^{-iK_1} e^{-iK_2}$.

De la misma forma, puede probarse de (3.17) que un operador unitario de un cuerpo generalizado

$$U = \exp[-i\hat{O}] \quad (3.21)$$

con \hat{O} un operador hermítico de la forma (3.5) o (3.7), transformará vacíos de cuasipartículas en vacíos de cuasipartículas (y lo mismo con DS de cuasipartículas). El producto de estos operadores unitarios es otro operador unitario generalizado de un cuerpo: $e^{-i\hat{O}_1} e^{-i\hat{O}_2} = e^{-i\hat{O}_{12}}$, con \hat{O}_{12} determinado por la matriz extendida \mathcal{O}_{12}

definida por $e^{-i\mathcal{O}_{12}} = e^{-i\mathcal{O}_1}e^{-i\mathcal{O}_2}$.

A los DS o vacíos de cuasipartícula se los denomina estados fermiónicos gaussianos (puros). Los estados fermiónicos gaussianos mixtos son de la forma

$$\rho = Z^{-1} \exp[-\beta \hat{H}] \quad (3.22)$$

con $\beta > 0$, Z la función de partición asociada (tal que $\text{Tr } \rho = 1$) y \hat{H} un operador hermítico de un cuerpo, ya sea de la forma (3.4) o en general (3.5). Corresponden a estados térmicos de sistemas descritos por Hamiltonianos de un cuerpo o de un cuerpo generalizados, que son diagonales en una base ortogonal de DS's (estándar o de cuasipartícula). Debido a (3.10) y (3.17), estos operadores permanecen también gaussianos ante transformaciones unitarias de un cuerpo generales. Para $\beta \rightarrow \infty$ tienden a un estado gaussiano puro (el estado fundamental de \hat{H}).

3.6. Matrices densidad de un cuerpo

Dado un estado fermiónico arbitrario $|\psi\rangle$ (o en general un estado fermiónico mixto ρ) y un conjunto de operadores fermiónicos \mathbf{c} , se define la *matriz densidad de un cuerpo* ρ^{SP} (SPDM: single particle density matrix) [75], de elementos

$$\rho_{ij}^{\text{SP}} = \langle c_j^\dagger c_i \rangle \quad (3.23)$$

donde el valor medio es tomado respecto de $|\psi\rangle$ (o en general ρ). Puede escribirse como

$$\rho^{\text{SP}} = \mathbf{1} - \langle \mathbf{c} \mathbf{c}^\dagger \rangle \quad (3.24)$$

Esta matriz es hermítica y puede diagonalizarse por medio de una transformación unitaria (3.9), tal que si $\mathbf{a} = U\mathbf{c}$ y $U\rho^{\text{SP}}U^\dagger$ es diagonal, se tiene

$$\langle a_j^\dagger a_i \rangle = (U\rho^{\text{SP}}U^\dagger)_{ij} = f_i \delta_{ij}$$

con $f_i = \langle a_i^\dagger a_i \rangle \in [0, 1]$ los autovalores de ρ^{SP} . Nótese que si $\hat{N} = \sum_i c_i^\dagger c_i$ es el operador número, se tiene $\langle \hat{N} \rangle = \text{Tr } \rho^{\text{SP}} = \sum_i f_i$.

Si los valores medios se toman respecto de un estado $|\psi\rangle$ que es un DS, por ejemplo $|\psi\rangle = (\prod_i (a_i^\dagger)^{n_i}) |0\rangle$, con $n_i = 0, 1$ y $\sum_i n_i = N$ (el número de fermiones) los operadores a_i diagonalizan ρ^{SP} , con $f_i = n_i$, es decir, 0 o 1. Por lo tanto en este caso $(\rho^{\text{SP}})^2 = \rho^{\text{SP}}$. La inversa es también obviamente válida: si $(\rho^{\text{SP}})^2 = \rho^{\text{SP}}$, sus autovalores deben ser 1 o 0, y por lo tanto ρ debe ser un estado puro $|\psi\rangle\langle\psi|$, con $|\psi\rangle$

un DS construido con operadores a_i que diagonalizan ρ^{SP} .

Si $|\psi\rangle$ no tiene un número fijo de fermiones, (pero si una paridad de número definida $\hat{P} = e^{i\pi\hat{N}} = \pm 1$, tal como en el caso de un vacío de cuasipartículas), se puede definir la matriz densidad de un cuerpo extendida

$$\rho^{\text{qSP}} = 1 - \left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{c}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{c}^\dagger & \mathbf{c} \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix} \rho^{\text{SP}} & \kappa \\ -\bar{\kappa} & \mathbb{1} - \rho^{\text{SP}*} \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

donde $\kappa_{ij} = \langle c_j c_i \rangle$, $-\bar{\kappa}_{ij}^* = \langle c_j^\dagger c_i^\dagger \rangle$ y $\mathbb{1} - \rho_{ij}^{\text{SP}*} = \langle c_j c_i^\dagger \rangle$. La matriz κ (de $d \times d$) es antisimétrica y se anula para todo estado $|\psi\rangle$ con un número fijo de fermiones. Esta matriz extendida se puede definir también para estados mixtos ρ que conmutan con la paridad \hat{P} , tal que sus autoestados tienen todos paridad de número definida.

La matriz densidad (3.25) puede diagonalizarse mediante una transformación de Bogoliubov (3.13), tal que

$$1 - \left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{a}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}^\dagger & \mathbf{a} \end{pmatrix} \right\rangle = W \rho^{\text{qSP}} W^\dagger = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & 1 - f \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

con $f_i \in [0, 1]$, $1 - f_i$, los autovalores de ρ^{qSP} , lo que implica

$$\langle a_i^\dagger a_j \rangle = \delta_{ij} f_i, \quad \langle a_i a_j \rangle = 0$$

Los autovalores de (3.25) aparecen siempre en d pares $(f_i, 1 - f_i)$.

Al igual que en el caso anterior, puede verse que si $|\psi\rangle$ es un vacío de Bogoliubov, $f_i = 0 \forall i$ y entonces $(\rho^{\text{qSP}})^2 = \rho^{\text{qSP}}$. Lo mismo ocurre si $|\psi\rangle$ es un DS de cuasipartículas (no obstante, todo DS, estándar o de cuasipartículas, puede escribirse como un vacío de cuasipartículas mediante una transformación partícula-hueco, por lo que este caso está ya incluido en el anterior). Y si una matriz de la forma (3.25) cumple que $(\rho^{\text{qSP}})^2 = \rho^{\text{qSP}}$, entonces sus autovalores $f_i, 1 - f_i$ son 1 o 0, lo que implica (elijendo $f_i = 0 \forall i$) que el estado $|\psi\rangle$ es un vacío de los operadores de cuasipartícula a_i que diagonalizan ρ^{qSP} (si $\langle a_i^\dagger a_i \rangle = 1$, entonces $\langle a_i^\dagger a_i' \rangle = 0$ para $a_i' = a_i^\dagger$, por lo que en este caso siempre puede elegirse $f_i = 0 \forall i$).

Por lo tanto, un estado fermiónico es un vacío de cuasipartículas sii $(\rho^{\text{qSP}})^2 = \rho^{\text{qSP}}$, y es directamente un DS sii $(\rho^{\text{SP}})^2 = \rho^{\text{SP}}$.

3.7. Aproximación BCS

La aproximación de BCS constituye el primer modelo microscópico de superconductividad. A temperaturas suficientemente bajas, los electrones cercanos a la superficie de Fermi se vuelven inestables ante la formación de ligaduras con otros electrones, que se hace efectiva ante la presencia de un potencial atractivo y se conocen como *pares de Cooper*. En superconductores esta atracción se debe a la interacción entre los electrones y la red.

La aproximación BCS es capaz de dar una buena descripción del estado cuántico de muchos cuerpos del sistema de electrones dentro del metal. En este estado los electrones no se mueven libremente, sino que están ligados en pares de Cooper. La idea de BCS es proponer un *ansatz* para el estado fundamental, con parámetros determinados variacionalmente. Para estados de paridad de número par se tiene [75, 78]

$$|\text{BCS}\rangle = \prod_{k>0} (u_k + v_k c_k^\dagger c_{\bar{k}}^\dagger) |0\rangle \quad (3.27)$$

donde u_k y v_k son parámetros variacionales y $|0\rangle$ es el vacío de los operadores c_k , $c_{\bar{k}}$. Por cada estado $k > 0$ existe un conjugado $\bar{k} < 0$. Luego $|v_k|^2$ y $|u_k|^2$ son las probabilidades de que un par (k, \bar{k}) esté o no ocupado. Se tiene

$$|u_k|^2 + |v_k|^2 = 1 \quad (3.28)$$

Como la función de onda de BCS tiene libertad en la elección de la fase global, siempre es posible elegir coeficientes u_k reales y positivos. La fase de v_k se determina en principio minimizando el valor de expectación de la energía, pero se puede mostrar con algunas asunciones razonables para las interacciones, que los valores óptimos de v_k son también reales y positivos.

El estado propuesto no conserva el número de partículas pero si la paridad de número $\hat{P} = e^{i\pi\hat{N}}$. Puede reescribirse (3.27) de manera más explícita como

$$|\text{BCS}\rangle \propto |0\rangle + \sum_{k>0} \frac{v_k}{u_k} c_k^\dagger c_{\bar{k}}^\dagger |0\rangle + \frac{1}{2} \sum_{k,k'>0} \frac{v_k v_{k'}}{u_k u_{k'}} c_k^\dagger c_{\bar{k}}^\dagger c_{k'}^\dagger c_{\bar{k}'}^\dagger |0\rangle + \dots \quad (3.29)$$

Comparando con (3.18), se ve que (3.29) es un *vacío* de cuasipartículas, es decir,

$$|\text{BCS}\rangle = \left(\prod_k u_k \right) \exp \left[\sum_{k>0} \frac{v_k}{u_k} c_k^\dagger c_{\bar{k}}^\dagger \right] |0\rangle \quad (3.30)$$

siendo los operadores de cuasipartículas definidos por

$$a_k = u_k c_k - v_k c_k^\dagger, \quad a_{\bar{k}} = u_k c_{\bar{k}} + v_k c_k^\dagger \quad (3.31)$$

Es fácil verificar que $a_k |\text{BCS}\rangle = a_{\bar{k}} |\text{BCS}\rangle = 0 \forall k$.

El estado (3.27) no es autoestado del operador número $\hat{N} = \sum_k c_k^\dagger c_k$. El valor medio es

$$\langle \text{BCS} | \hat{N} | \text{BCS} \rangle = 2 \sum_{k>0} |v_k|^2 \quad (3.32)$$

En la aproximación de BCS este valor medio deberá coincidir con el número real de fermiones N .

Dado un Hamiltoniano de muchos cuerpos del tipo

$$H = \sum_{k \leq 0} \varepsilon_k c_k^\dagger c_k + \frac{1}{4} \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4 \leq 0} \bar{v}_{k_1 k_2 k_3 k_4} c_{k_1}^\dagger c_{k_2}^\dagger c_{k_4} c_{k_3} \quad (3.33)$$

su valor medio en el estado de BCS es, utilizando el teorema de Wick (ver Apéndice A.4), válido para DS o en general vacíos de cuasipartícula o estados gaussianos,

$$\langle \text{BCS} | H | \text{BCS} \rangle = \sum_{k \leq 0} (\varepsilon_k \langle c_k^\dagger c_k \rangle) + \frac{1}{2} \sum_{k' \leq 0} \bar{v}_{kk'kk'} \langle c_k^\dagger c_k \rangle \langle c_{k'}^\dagger c_{k'} \rangle + \sum_{k, k' > 0} \bar{v}_{k\bar{k}k'k'} \langle c_k^\dagger c_{\bar{k}}^\dagger \rangle \langle c_{k'} c_{k'} \rangle$$

donde $\langle c_k^\dagger c_k \rangle = |v_k|^2$, $\langle c_{\bar{k}} c_k \rangle = \langle c_k^\dagger c_{\bar{k}}^\dagger \rangle^* = u_k v_k$.

Los parámetros están restringidos por la condición de que el valor medio de partículas sea N . Para conseguir esto se agrega un multiplicador de Lagrange λ al Hamiltoniano, tal que se minimiza el valor medio del operador

$$H' = H - \lambda \hat{N}$$

Este multiplicador resulta ser el potencial químico, ó energía de Fermi, ya que representa el cambio de la energía $E = \langle \text{BCS} | H | \text{BCS} \rangle$ ante el cambio de número de partículas¹

$$\lambda = \frac{dE}{dN}$$

De la variación $\delta \langle \text{BCS} | H' | \text{BCS} \rangle = 0$, pueden obtenerse los parámetros u_k, v_k . Se obtiene así la ecuación

$$\left(\frac{\partial}{\partial v_k} + \frac{\partial u_k}{\partial v_k} \frac{\partial}{\partial u_k} \right) \langle \text{BCS} | H' | \text{BCS} \rangle = 0$$

¹El potencial químico se define como $\mu \equiv \frac{\partial E}{\partial N}$

que conduce, asumiendo v_k real, a

$$2\tilde{\epsilon}_k u_k v_k + \Delta_k (v_k^2 - u_k^2) = 0, \quad k > 0 \quad (3.34)$$

donde

$$\tilde{\epsilon}_k = \frac{1}{2}(\epsilon_k + \epsilon_{\bar{k}} + \sum_{k' \leq 0} (\bar{v}_{kk'k'} + \bar{v}_{\bar{k}k'\bar{k}}) v_{k'}^2) - \lambda$$

y el gap Δ_k es

$$\Delta_k = - \sum_{k' > 0} \bar{v}_{k\bar{k}k'\bar{k}'} u_{k'} v_{k'} \quad (3.35)$$

Fijando $\tilde{\epsilon}_k$ y Δ_k , y usando (3.28) y (3.34), se despejan los coeficientes

$$v_k^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\tilde{\epsilon}_k}{\sqrt{\tilde{\epsilon}_k^2 + \Delta_k^2}} \right)$$

$$u_k^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\tilde{\epsilon}_k}{\sqrt{\tilde{\epsilon}_k^2 + \Delta_k^2}} \right)$$

Reemplazando esto en el gap, se obtiene la ecuación del gap

$$\Delta_k = - \frac{1}{2} \sum_{k' > 0} \bar{v}_{k\bar{k}k'\bar{k}'} \frac{\Delta_{k'}}{\sqrt{\tilde{\epsilon}_k^2 + \Delta_k^2}} \quad (3.36)$$

que es una ecuación de autorecurrencia. Tiene una solución trivial nula y en general otra no trivial que puede obtenerse de forma numérica o recursiva. En cierto límites puede resolverse de forma analítica.

El estado de BCS resulta así el estado fundamental exacto del Hamiltoniano de un cuerpo generalizado autoconsistente

$$h'_{\text{BCS}} = \sum_{k \leq 0} \frac{\partial \langle H' \rangle}{\partial \langle c_k^\dagger c_k \rangle} c_k^\dagger c_k + \sum_{k > 0} \left[\frac{\partial \langle H' \rangle}{\partial \langle c_k^\dagger c_{\bar{k}}^\dagger \rangle} c_k^\dagger c_{\bar{k}}^\dagger + \frac{\partial \langle H' \rangle}{\partial \langle c_{\bar{k}} c_k \rangle} c_{\bar{k}} c_k \right] \quad (3.37)$$

Esta aproximación resulta muy adecuada para interacciones de apareamiento, en las que los términos $\bar{v}_{k\bar{k}k'\bar{k}'}$ de la interacción son los más importantes. En el caso general, puede utilizarse la aproximación de Hartree-Fock-Bogoliubov [75], en la que $|\text{BCS}\rangle$ se reemplaza por un vacío general de cuasipartículas, que es determinado variacionalmente y que es el estado fundamental de un Hamiltoniano generalizado de un cuerpo autoconsistente h'_{HFB} .

Entrelazamiento Fermiónico

Si bien el entrelazamiento ha sido extensamente estudiado para sistemas de componentes distinguibles, el estudio riguroso de las correlaciones entre fermiones ha tomado importancia solo en los últimos años y es un tema activo, que ha generado cierto debate.

La diferencia fundamental reside en que los sistemas de partículas indistinguibles podrían tener en principio correlaciones por el solo hecho de tener simetrizada (o antisimetrizada en el caso fermiónico) la función de onda. Sin embargo, y si bien existen controversias, estas correlaciones por si solas no serían en principio accesibles como recurso. El desafío consiste entonces en diferenciar y cuantificar las correlaciones más allá de la simetrización o antisimetrización básica y sus consecuencias. Se describen a continuación los dos abordajes principales al entrelazamiento fermiónico, que, como se verá posteriormente, están relacionados.

4.1. Entrelazamiento de modos y partículas

En el estudio del entrelazamiento para sistemas de partículas indistinguibles se han considerado dos enfoques cualitativamente distintos: *Entrelazamiento de Modos* y *Entrelazamiento de Partículas*.

4.1.1. Entrelazamiento de modos

Este tipo de entrelazamiento se conoce como entrelazamiento de modos [18-21], ya que lo que se entrelaza no son partículas sino la ocupación de ciertos estados. Depende de la base y no es invariante respecto a transformaciones unitarias generales en el espacio de una partícula (SP: single particle), sino solo frente a transformaciones que involucran únicamente a los modos accesibles a una de las partes. A nivel formal, es similar al caso distinguible. A modo de ejemplo elemental, se puede pensar en el

estado de un solo fermión, con dos modos (estados de SP) accesibles,

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_1^\dagger + c_2^\dagger)|0\rangle = c_+^\dagger|0\rangle$$

donde c_i^\dagger , $i = 1, 2$, crean fermiones en los estados (ortogonales) de una partícula, y $c_\pm^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_1^\dagger \pm c_2^\dagger)$ crean fermiones en los estados (ortogonales) $|\pm\rangle = (|1\rangle \pm |2\rangle)/\sqrt{2}$. Ambos conjuntos de operadores satisfacen las relaciones de anticonmutación fermiónicas, estando vinculados por una transformación unitaria. Este estado, que es obviamente un DS elemental de SP, puede ser considerado entrelazado en una configuración donde Alice tiene acceso solo a la ocupación del estado $|0\rangle$ y Bob a la del estado $|1\rangle$. Por otro lado, es obviamente no entrelazado si A solo puede medir la ocupación del estado $|+\rangle$ y B la del estado $|-\rangle$. Se ha examinado recientemente la posibilidad de detectar violaciones a las desigualdades de Bell basadas en este tipo de entrelazamiento (véase por ej. [79]).

4.1.2. Entrelazamiento de partículas

En el entrelazamiento de partículas [22-31], se consideran entrelazados los estados que tienen correlaciones más allá de la antisimetría del espacio, es decir que no son determinantes de Slater (DS). De esta forma, operaciones unitarias basadas en operadores de un cuerpo (Sec. 3.5) no pueden generar entrelazamiento. Se define el *rango de Slater* de un estado fermiónico como la cantidad mínima de determinantes de Slater necesarios para describirlo como combinación lineal (véase (3.3)). Cualquier sistema con rango de Slater mayor a 1 está entrelazado de acuerdo a esta definición. Si se considera, por ejemplo, un estado de dos partículas de la forma

$$|\psi\rangle = (\alpha c_1^\dagger c_2^\dagger + \beta c_3^\dagger c_4^\dagger)|0\rangle \quad (4.1)$$

puede mostrarse (ver Sec. 4.4) que para $\alpha\beta \neq 0$ no existe ninguna transformación unitaria de los operadores \mathbf{c} tal que este estado pueda escribirse como un DS. Es importante, para calcular sin ambigüedades el rango de Slater, hacer una minimización de esta cantidad sobre todas las bases del espacio de una partícula. Para sistemas mixtos, se muestra que un estado no está entrelazado si puede ser escrito como combinación convexa de determinantes de Slater.

Se describirá a continuación el formalismo utilizado en este trabajo [31], que relaciona el enfoque de modos con el de partículas.

4.2. Formalismo

Se van a considerar primero estados puros generales $|\psi\rangle$ de sistemas fermiónicos. Se incluyen estados que no tienen necesariamente un número fijo de fermiones, aunque sí una paridad de número definida (de acuerdo a la regla de superselección de paridad [20]), tal que

$$P|\psi\rangle = \pm|\psi\rangle, \quad P = \exp(i\pi\hat{N})$$

con $N = \sum_j c_j^\dagger c_j$ el operador número (esto implica que $\langle O \rangle = 0$ para cualquier operador O que sea producto de un cantidad impar de operadores fermiónicos c_j, c_j^\dagger). De esta forma, se pueden tratar estados típicos de sistemas fermiónicos interactuantes, tales como vacíos de cuasipartículas y combinaciones lineales de un vacío efectivo con excitaciones de pares partícula-hueco, dos partículas-dos huecos, etc., que poseen paridad de número fija, independientemente de la representación del estado. Se desea entonces tener medidas de correlaciones que sean invariantes frente a la transformación elemental de Bogoliubov partícula-hueco,

$$c_j \rightarrow c_j^\dagger, \quad c_j^\dagger \rightarrow c_j$$

ya que las relaciones de conmutación quedan iguales. Esto implica una arbitrariedad en considerar las partículas como fermiones o como huecos. Cualquier medida de correlación propuesta debe conservar esta simetría.

4.2.1. Entropía de entrelazamiento de un nivel

Se considerará aquí un espacio de Hilbert de una partícula \mathcal{H}_{SP} de dimensión n , y una base de estados de SP definidos por operadores fermiónicos $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)$. El espacio \mathcal{H} puede dividirse en dos regiones: La región A para el modo único (o “nivel”) j , y B para el espacio ortogonal remanente. Se define un conjunto ortogonal de proyectores $\mathcal{P}_j = c_j^\dagger c_j$, $\mathcal{P}_{\bar{j}} = c_j c_j^\dagger$, $j = 1, \dots, n$, que satisfacen $\mathcal{P}_j \mathcal{P}_{\bar{j}} = 0$ y $\mathcal{P}_j + \mathcal{P}_{\bar{j}} = \mathbb{1}$, de acuerdo a las relaciones de anticonmutación. Por lo tanto, definen una medida proyectiva estándar sobre el nivel j . Luego se puede descomponer cualquier estado $|\psi\rangle$ usando estos operadores de la siguiente forma [31]:

$$|\psi\rangle = c_j^\dagger c_j |\psi\rangle + c_j c_j^\dagger |\psi\rangle$$

El primer término selecciona la componente de $|\psi\rangle$ con el estado j ocupado y el segundo la componente con j desocupado. Si p_j ($p_{\bar{j}}$) es la probabilidad de hallar el

nivel j ocupado (vacío) en el estado $|\psi\rangle$,

$$p_j = \langle \psi | c_j^\dagger c_j | \psi \rangle, \quad p_{\bar{j}} = \langle \psi | c_j c_j^\dagger | \psi \rangle = 1 - p_j$$

se puede reescribir el estado $|\psi\rangle$ como

$$|\psi\rangle = \sqrt{p_j} |\psi_j\rangle + \sqrt{p_{\bar{j}}} |\psi_{\bar{j}}\rangle$$

donde $|\psi_j\rangle = \frac{1}{\sqrt{p_j}} \mathcal{P}_j |\psi\rangle$, $|\psi_{\bar{j}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{p_{\bar{j}}}} \mathcal{P}_{\bar{j}} |\psi\rangle$.

Si O_A es un operador que depende solo de c_j y c_j^\dagger , y O_B uno que depende solo de operadores fermiónicos de los niveles $k \neq j$, entonces

$$\langle \psi | O_{A(B)} | \psi \rangle = p_j \langle \psi_j | O_{A(B)} | \psi_j \rangle + p_{\bar{j}} \langle \psi_{\bar{j}} | O_{A(B)} | \psi_{\bar{j}} \rangle = \text{Tr}_{A(B)} \rho_{A(B)} O_{A(B)}$$

con $\rho_A = p_j c_j^\dagger |0\rangle \langle 0| c_j + p_{\bar{j}} |0\rangle \langle 0|$ y $\rho_B = p_j c_j | \psi_j \rangle \langle \psi_j | c_j^\dagger + p_{\bar{j}} | \psi_{\bar{j}} \rangle \langle \psi_{\bar{j}} |$. Luego el entrelazamiento (de modo) bipartito entre A y B puede calcularse con las definiciones usuales

$$S(\rho_A) = S(\rho_B) = -p_j \log_2 p_j - (1 - p_j) \log_2 (1 - p_j) \equiv h(p_j) \quad (4.2)$$

con $h(p) = -p \log_2 p - (1 - p) \log_2 (1 - p)$ y $S(\rho) = -\text{Tr} \rho \log_2 \rho$ la entropía de Von Neumann. Esta entropía es invariante ante transformaciones partícula-hueco. Se anula sii $|\psi\rangle$ es separable respecto al nivel j , es decir sii el nivel j está ocupado ($p_j = 1$) o vacío ($p_j = 0$). Y es máxima y vale 1 cuando $p_j = \frac{1}{2}$.

4.2.2. Entrelazamiento de un cuerpo

Para considerar todos los niveles, se define la suma

$$S_{\mathbf{c}} = \sum_j h(p_j)$$

Esta cantidad se anula sii cada nivel j de la base está ocupado o vacío en $|\psi\rangle$, de forma tal que $|\psi\rangle$ es un DS en esta base: $|\psi\rangle = c_{j_1}^\dagger \dots c_{j_m}^\dagger |0\rangle$ para alguna elección de estados $\{j_1, \dots, j_m\}$. Elegir la base es análogo a elegir los operadores de creación $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)$. Esta entropía depende pues de la base (es entrelazamiento de modos). Para quitar esta dependencia, y con el objetivo de obtener un resultado válido como entrelazamiento entre partículas, se procede a minimizar sobre todas las posibles bases de SP del espacio de Hilbert:

$$S^{sp} = \min_{\mathbf{c}'} S_{\mathbf{c}'} \quad (4.3)$$

con $S_{\mathbf{c}'} = \sum_j h(p'_j)$, $p'_j = \langle \psi | c'_j{}^\dagger c'_j | \psi \rangle$, $\mathbf{c}' = (c'_1, \dots, c'_n)^T = U\mathbf{c}$ y U una matriz unitaria de $n \times n$. Esta entropía se anula sii el estado es un DS en alguna base de \mathcal{H} : $|\psi\rangle = c'_{k_1}{}^\dagger \dots c'_{k_m}{}^\dagger |0\rangle$.

Se puede mostrar que el mínimo (4.3) se obtiene para aquellos operadores \mathbf{c}' que diagonalizan la SPDM $\rho^{sp} = \mathbb{1} - \langle \psi | \mathbf{c}\mathbf{c}^\dagger | \psi \rangle$ definida en (3.24), es decir, para operadores \mathbf{c}' tales que $\langle c'_k{}^\dagger c'_l \rangle = (U\rho^{sp}U^\dagger)_{lk} = p'_k \delta_{kl}$, con p'_k los autovalores de ρ^{sp} .

Demostración. Se tiene $p_j = \rho_{jj}^{sp} = \sum_k |U_{jk}|^2 p'_k$. Como la función $h(p)$ es cóncava y U unitaria,

$$\sum_j h(p_j) \geq \sum_{j,k} |U_{jk}|^2 h(p'_k) = \sum_k h(p'_k)$$

La igualdad se cumple sii los p_j ya son los autovalores p'_k de ρ^{sp} . \square

Luego el valor mínimo de (4.3) puede expresarse como

$$S^{\text{sp}}(|\psi\rangle) = \sum_k h(p'_k) = \text{Tr}(h(\rho^{sp})) \quad (4.4)$$

De nuevo, se anula sii los autovalores son 0 ó 1, es decir sii $(\rho^{sp})^2 = \rho^{sp}$, o sea, sii $|\psi\rangle$ es un DS.

Esta definición de entropía es invariante frente a cualquier transformación unitaria de un cuerpo $|\psi\rangle \rightarrow \exp(-iF)|\psi\rangle$, con F operador hermítico de un cuerpo de la forma (3.4), $F = \sum_{i,j} f_{ij} c_i^\dagger c_j$, ya que conduce a una transformación unitaria de ρ^{sp} que no cambia los autovalores. En particular si $|\psi\rangle$ es un DS, $\exp(-iF)|\psi\rangle$ es otro DS (Sec. 3.5).

4.2.3. Generalización a cuasipartículas

Si el estado $|\psi\rangle$ no posee un número fijo de fermiones, es posible extender la minimización a todas las bases de cuasipartículas.

$$S^{\text{qsp}}(|\psi\rangle) = \min_{\mathbf{a}} S_{\mathbf{a}} \quad (4.5)$$

con $S_{\mathbf{a}} = \sum_{\nu} h(\langle a_{\nu}^\dagger a_{\nu} \rangle)$ y \mathbf{a} el conjunto de operadores fermiónicos a_{ν} relacionados linealmente con los operadores originales \mathbf{c} y \mathbf{c}^\dagger mediante transformaciones de Bogoliubov (3.13).

En este caso el mínimo (4.5) se obtiene para aquellos operadores \mathbf{a} que diagonalizan la matriz densidad de un cuerpo extendida de $2n \times 2n$ (3.25), es decir,

$$\rho^{\text{qsp}} = \begin{pmatrix} \rho^{\text{sp}} & \kappa \\ -\kappa^* & \mathbb{1} - \rho^{\text{sp}} \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

con $\kappa_{ij} = \langle c_j c_i \rangle$. Para estos operadores, se tiene

$$\langle a_k^\dagger a_l \rangle = \delta_{kl} f_k, \quad \langle a_k a_l \rangle = 0$$

con $f_k, 1 - f_k$ los autovalores de ρ^{qsp} . Luego el mínimo (4.5) puede escribirse como

$$S^{\text{qsp}}(|\psi\rangle) = - \sum_k f_k \log_2 f_k + (1 - f_k) \log_2(1 - f_k) = - \text{Tr} \rho^{\text{qsp}} \log_2 \rho^{\text{qsp}} \quad (4.7)$$

donde Tr denota aquí la traza en el espacio extendido.

Demostración. Si $\{q_j\}$ y $\{\lambda_k\}$ denotan, respectivamente, el conjunto de elementos diagonales y autovalores de ρ^{qsp} , se tiene $q_j = \sum_i |W_{jk}^2| \lambda_k$. Por concavidad de la entropía de Von Neumann, se tiene $S_{\mathbf{c}} = \sum_j f(q_j) \geq \sum_{j,k} |W_{jk}|^2 f(\lambda_k) = \sum_k f(\lambda_k) = S^{\text{qsp}}$, donde $f(x) = -x \log_2 x$. \square

La entropía (4.7) se anula sii $|\psi\rangle$ es un DS de partículas o también cuasipartículas, es decir, sii es un vacío de cuasipartículas (ver Sec. 4.4). Si $|\psi\rangle$ posee un número fijo de fermiones ($\hat{N}|\psi\rangle = N|\psi\rangle$) entonces coincide con (4.4). Además, la misma permanece invariante frente a transformaciones generalizadas de un cuerpo $|\psi\rangle \rightarrow \exp(-iO)|\psi\rangle$, con O un operador hermítico de la (3.5), $O = \sum_{i,j} f_{ij} c_i^\dagger c_j + \frac{1}{2}(g_{ij} c_i^\dagger c_j^\dagger + h_{ij} c_i c_j)$, ya que esto conduce a una transformación unitaria de ρ^{qsp} que no cambia los autovalores. En particular si $|\psi\rangle$ es un vacío de quasipartículas, $\exp(-iO)|\psi\rangle$ es otro vacío.

Se cumplen las siguientes desigualdades

$$S_{\mathbf{c}} \geq S^{\text{sp}} \geq S^{\text{qsp}} \quad (4.8)$$

La igualdad en la última relación vale sii $\kappa = 0$, y en la primera sii los operadores \mathbf{c} diagonalizan ρ^{sp} . Estas desigualdades son en realidad también válidas para entropías más generales, como por ejemplo la entropía cuadrática S_2 , que se define como

$$S_2(|\psi\rangle) = 2 \text{Tr}[\rho^{\text{qsp}}(1 - \rho^{\text{qsp}})] = 4 \text{Tr}[\rho^{\text{sp}}(1 - \rho^{\text{sp}}) - \kappa^\dagger \kappa] = 4 \sum_k f_k(1 - f_k) \quad (4.9)$$

El factor 2 se toma para que el valor máximo para un nivel sea 1. La cantidad $S_2(\rho^{\text{qsp}})$ puede evaluarse tomando solo la traza, sin necesidad de conocer los autovalores. Al igual que S^{qsp} , es no negativa y se anula sii $|\psi\rangle$ es un DS o vacío de cuasipartículas.

4.2.4. Mínima entropía relativa

La entropía (4.4) tiene una interpretación adicional como se mostró en [1]. Esta puede verse como la entropía, en el ensamble gran canónico, del operador densidad

$$\rho' = \exp[-\lambda_0 - \mathbf{c}^\dagger \Lambda \mathbf{c}] = \exp\left[-\lambda_0 - \sum_i \lambda_i a_i^\dagger a_i\right] \quad (4.10)$$

con $e^{\lambda_0} = \text{Tr}[\exp[-\mathbf{c}^\dagger \Lambda \mathbf{c}]] = \prod_i (1 + e^{-\lambda_i})$, $\mathbf{c}^\dagger \Lambda \mathbf{c} = \sum_{i,j} \Lambda_{ij} c_i^\dagger c_j$ y λ_i los autovalores de Λ . Este operador reproduce toda la matriz densidad de un cuerpo completa determinada por $|\psi\rangle$, esto es

$$\text{Tr}[\rho'(\mathbb{1} - \mathbf{c}\mathbf{c}^\dagger)] = \rho^{sp}$$

tal que $\text{Tr}[\rho' c_j^\dagger c_i] = \langle \psi | c_j^\dagger c_i | \psi \rangle$ y luego $\text{Tr}[\rho' a_j^\dagger a_i] = f_i \delta_{ij}$. Esta condición implica $f_i = [1 + e^{\lambda_i}]^{-1}$, es decir

$$\rho^{sp} = [1 + \exp(\Lambda)]^{-1}$$

por lo que $\Lambda = \log[(\rho^{sp})^{-1} - 1]$. Luego (4.4) es la entropía de von Neumann de ρ' :

$$S(\rho') = -\text{Tr} \rho' \log_2 \rho' = \text{Tr} h(\rho^{sp})$$

A su vez, esta cantidad es también la entropía relativa entre el estado puro $\rho = |\psi\rangle \langle \psi|$ y ρ' , ya que $S(\rho) = 0$:

$$\begin{aligned} S(\rho||\rho') &= -\text{Tr} \rho (\log_2 \rho' - \log_2 \rho) \\ &= -\text{Tr} \rho' (\log_2 \rho') = \text{Tr} h(\rho^{sp}) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Se puede también demostrar [1], que es también la *mínima* entropía relativa en el ensamble GC entre ρ y cualquier operador exponente de operadores de un cuerpo:

$$\min_{\rho' = \exp[-\lambda_0 - \mathbf{c}^\dagger \Lambda \mathbf{c}]} S(\rho||\rho') = \text{Tr} h(\rho^{sp}) \quad (4.12)$$

y entonces (4.4) es también una medida de la distancia mínima entre ρ y cualquier operador de la forma (4.10).

Demostración. Para mostrar esto, se recuerda primero que dados dos operadores densidad ρ, ρ' , la entropía relativa se escribe como [59, 80]

$$S(\rho||\rho') = -\text{Tr}[\rho \log_2 \rho'] - S(\rho) \quad (4.13)$$

donde $S(\rho) = -\text{Tr} [\rho \log_2 \rho]$ es la entropía de von Neumann. Satisface $S(\rho||\rho') \geq 0$, con $S(\rho||\rho') = 0$ sii $\rho = \rho'$ [59], como se vió en (2.15). Se considera ahora ρ' de la forma

$$\rho' = Z^{-1} \exp\left[-\sum_{\nu=1}^m \lambda_\nu O_\nu\right] \quad (4.14)$$

donde $Z = \text{Tr} \exp[-\sum_{\nu=1}^m \lambda_\nu O_\nu]$ y $\{O_\nu, \nu = 1, \dots, m\}$ es un conjunto arbitrario de m operadores lineales independientes (hermíticos o que contienen simultáneamente a O_ν y O_ν^\dagger). Este tipo de ρ' maximiza la entropía $S(\rho')$ sujeta al constraint de valores de expectación fijos $\langle O_\nu \rangle, \nu = 1, \dots, m$. Es fácil mostrar [1] qué, para ρ fijo,

$$\text{Min}_{\{\lambda_\nu\}} S(\rho||\rho') = S(\rho') - S(\rho) \quad (4.15)$$

con el mínimo alcanzado para aquellos λ_ν que satisfacen

$$\text{Tr}[\rho' O_\nu] = \text{Tr}[\rho O_\nu], \quad \nu = 1, \dots, m \quad (4.16)$$

i.e., para aquel ρ' que reproduce los valores de expectación determinados por ρ de todos los operadores O_ν del conjunto elegido*.

Luego sigue que $S(\rho') \geq S(\rho)$, con $S(\rho') = S(\rho)$ sii $\rho' = \rho$. La entropía relativa mínima es entonces una medida de la información contenida en ρ que no puede contenerse en ningún operador de la forma (4.14). Si ρ es puro y los operadores O_ν comprenden el conjunto entero de operadores de un cuerpo $c_i^\dagger c_j$, (4.15) lleva a (4.12) si las trazas se toman en el ensamble Grand Canónico. \square

* Tomando $\langle O_\nu \rangle_\rho \equiv \text{Tr}[\rho O_\nu]$, se obtiene, de Ecs. (4.13)-(4.14),

$$S(\rho||\rho') = \frac{1}{\ln 2} \left(\sum_{\nu=1}^k \lambda_\nu \langle O_\nu \rangle_\rho + \ln Z \right) - S(\rho) \quad (4.17)$$

Como $\frac{\partial \ln Z}{\partial \lambda_\nu} = -\langle O_\nu \rangle_{\rho'}$, las ecuaciones $\frac{\partial}{\partial \lambda_\nu} S(\rho||\rho') = 0$ llevan a

$$\langle O_\nu \rangle_{\rho'} = \langle O_\nu \rangle_\rho, \quad \nu = 1, \dots, m \quad (4.18)$$

en cuyo caso la Ec. (4.17) se reduce a (4.15).

Extensión a cuasipartículas

Por otro lado, la entropía (4.7) es también la mínima entropía relativa entre $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ y cualquier operador que es resulta de exponenciar un operador generalizado de un cuerpo, es decir,

$$\min_{\rho'} S(\rho||\rho') = -\text{Tr } \rho^{\text{qsp}} \log_2 \rho^{\text{qsp}}, \quad (4.19)$$

con

$$\begin{aligned} \rho' &= \exp \left[-\lambda_0 - \begin{pmatrix} \mathbf{c}^\dagger & \mathbf{c} \end{pmatrix} \mathcal{L} \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{c}^\dagger \end{pmatrix} \right] \\ &= \exp \left[-\lambda_0 - \mathbf{c}^\dagger \Lambda \mathbf{c} - \frac{1}{2} (\mathbf{c}^\dagger \Gamma \mathbf{c}^{\dagger T} + \mathbf{c}^T \Gamma^* \mathbf{c}) \right] \end{aligned} \quad (4.20)$$

El mínimo se alcanza para el operador ρ' que reproduce la matriz completa ρ^{qsp} , es decir $\mathcal{L} = \log[(\rho^{\text{qsp}})^{-1} - \mathbb{1}]$ tal que

$$\rho^{\text{qsp}} = [1 + \exp(\mathcal{L})]^{-1}, \quad \mathcal{L} = \begin{pmatrix} \Lambda & \Gamma \\ -\Gamma^* & \mathbb{1} - \Lambda^* \end{pmatrix}$$

El mínimo es justamente la entropía $S(\rho')$ del ρ' minimizante.

Demostración. La demostración es análoga a la que se tenía para sistemas con número de partículas fijo, incluyendo ahora entre los O_ν también a los operadores $c_i c_j$ y $c_i^\dagger c_j^\dagger$, (4.15). Esto lleva a demostrar la Ec. (4.19) (nuevamente en el ensamble gran canónico). □

4.2.5. Estados mixtos

Se considerarán ahora estados mixtos de fermiones que conmutan con la paridad de número, es decir,

$$\rho = \sum_i q_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \quad (4.21)$$

con $q_i \geq 0$, $\sum_i q_i = 1$ y $P|\psi_i\rangle = \pm |\psi_i\rangle$, tal que $[\rho, P] = 0$. Se define entrelazamiento nulo si el estado puede escribirse como combinación convexa de vacíos (o DS) de cuasipartículas. Se tiene una medida similar al entrelazamiento de formación, mediante una extensión de la cantidad S^{qsp} ,

$$E^{\text{qsp}}(\rho) = \min_{\{\sum_i q'_i |\psi'_i\rangle \langle \psi'_i| = \rho\}} \sum_i q'_i S^{\text{qsp}}(|\psi'_i\rangle) \quad (4.22)$$

donde la minimización es sobre todas las descomposiciones de ρ como combinación convexa de estados puros de paridad definida. Se anula sii ρ es una combinación convexa de DS (de partículas o cuasipartículas). Si $[\rho, N] = 0$, $E^{\text{qsp}}(\rho) = E^{\text{sp}}(\rho)$, donde la última cantidad se define en forma análoga, minimizando sobre todas las

descomposiciones de ρ como combinación convexa de estados puros con un número fijo de partículas. Esta cantidad se anulará si ρ es una combinación convexa de DS estándar.

La cantidad (4.22) puede usarse, por ejemplo, para examinar sistemas interactuantes de fermiones a temperatura finita. A altas temperaturas los estados térmicos son esencialmente combinaciones convexas de estados gaussianos, es decir combinaciones convexas de operadores densidad diagonalizables cada uno en bases de DS [81, 82], y por lo tanto son separables. Existe pues una temperatura límite por encima de la cual $E^{\text{qsp}}(\rho)$ se anula.

El entrelazamiento de formación puede también utilizarse para examinar el entrelazamiento asociado a subespacios del espacio de SP, que quedarán descritos en general por estados mixtos, tal como se discute en (4.3).

Es posible derivar una expresión analítica de (4.22) para el caso particular de estados de dos fermiones en 4 niveles [22], que fue extendida en [31] a estados generales en 4 niveles (es decir, en un espacio \mathcal{H}_{SP} de dimensión 4), con número de fermiones no necesariamente fijo. Esto se consigue de forma análoga al caso de 2 espines distinguibles por medio de la concurrencia (ver Sec. 2.3.5):

$$E^{\text{qsp}}(\rho) = 4h\left(\frac{1 + \sqrt{1 - C^2}}{2}\right) \quad (4.23)$$

donde C se obtiene como

$$C(\rho) = \text{máx}\left[d_1 - \sum_{k=2}^r d_k, 0\right] \quad (4.24)$$

con d_k los autovalores de la matriz

$$R = \sqrt{\rho^{1/2} T \rho^* T \rho^{1/2}} \quad (4.25)$$

Aquí ρ^* es la conjugada de ρ en la base asociada al operador de dualización T [31] tal que $C(|\psi\rangle\langle\psi|) = |\langle\tilde{\psi}|\psi\rangle|$, con $|\tilde{\psi}\rangle = T|\psi\rangle^*$. Este puede representarse en dicha base en la forma real

$$T = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_4 \\ \mathbb{1}_4 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

4.3. Entrelazamiento bipartito

4.3.1. Estados puros

Se examinará aquí el entrelazamiento bipartito de modos asociado a una partición del espacio de SP y su relación con el entrelazamiento de un cuerpo. Se puede descomponer el espacio de Hilbert \mathcal{H} de SP en dos partes, tal que $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \oplus \mathcal{H}_B$, con dimensiones d_A y d_B . Este será desde luego un entrelazamiento de modos y por ende distinguible ya que corresponde a una bipartición entre grupos de modos, que son naturalmente distinguibles. Luego un estado general $|\psi\rangle$ puede expandirse en DS de cada parte, $|\psi\rangle = \sum_{\mu\nu} C_{\mu\nu} |\mu\nu\rangle$, con $|\mu\nu\rangle = (\prod_{i \in A} (c_i^\dagger)^{n_i^\mu}) (\prod_{j \in B} (c_j^\dagger)^{n_j^\nu}) |0\rangle$ y $n_i^\nu = 0, 1$ la ocupación del estado i en el DS ν . La suma está por su puesto restringida a estados $|\mu\nu\rangle$ con la misma paridad de número P que $|\psi\rangle$. Se pueden definir las matrices densidad reducidas $\rho_A = \sum_{\mu, \mu'} (CC^\dagger)_{\mu\mu'} |\mu\rangle \langle \mu'|$ y $\rho_B = \sum_{\nu, \nu'} (C^T C^*)_{\nu\nu'} |\nu\rangle \langle \nu'|$, las cuales determinan los valores medios de cualquier operador $O_{A(B)}$ construido con operadores $c_i, c_i^\dagger \in \mathcal{H}_{A(B)}$. La correspondiente entropía de Von Neumann $S(\rho_A) = -\text{Tr} \rho_A \log \rho_A = S(\rho_B)$ caracteriza el entrelazamiento bipartito asociado a esta partición.

Por ejemplo, si la partición \mathcal{H}_A involucra un solo estado de SP i , se tiene que $\rho_A \equiv \rho_i$ queda determinada por la ocupación del estado. En la base $\{c_i^\dagger |0\rangle, |0\rangle\}$ se tiene

$$\rho_i = \begin{pmatrix} \langle c_i^\dagger c_i \rangle & 0 \\ 0 & \langle c_i c_i^\dagger \rangle \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

con $\langle c_i c_i^\dagger \rangle = 1 - \langle c_i^\dagger c_i \rangle$. Por la conservación de paridad, $\langle c_i \rangle = 0$. La entropía $S(\rho_i) = h(\langle c_i^\dagger c_i \rangle)$ representa la entropía de entrelazamiento de ese modo con los restantes definida en (4.2). Si $S^{\text{SP}}(|\psi\rangle) = 0$ existe una elección de operadores fermiónicos \mathbf{c} tal que $S(\rho_i) = 0 \forall i$ y viceversa. La extensión a cuasipartículas es directa.

Si en cambio \mathcal{H}_A involucra dos estados o “niveles” $i \neq j$, entonces

$$\rho_{ij} = \begin{pmatrix} \langle c_i^\dagger c_i c_j^\dagger c_j \rangle & 0 & 0 & \langle c_j c_i \rangle \\ 0 & \langle c_i^\dagger c_i c_j c_j^\dagger \rangle & \langle c_j^\dagger c_i \rangle & 0 \\ 0 & \langle c_i^\dagger c_j \rangle & \langle c_i c_i^\dagger c_j^\dagger c_j \rangle & 0 \\ \langle c_i^\dagger c_j^\dagger \rangle & 0 & 0 & \langle c_i c_i^\dagger c_j c_j^\dagger \rangle \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

en la base $\{c_i^\dagger c_j^\dagger |0\rangle, c_i^\dagger |0\rangle, c_j^\dagger |0\rangle, |0\rangle\}$, que cumple $\text{Tr} \rho_i = 1$. De nuevo, la entropía

$S(\rho_{ij})$ es la entropía de entrelazamiento del par de modos con todos los restantes. En la base de operadores que diagonalizan ρ^{qsp} , se diagonaliza también ρ_{ij} . Luego $S^{\text{qsp}}(|\psi\rangle) = 0$ implica que existe una elección de operadores \mathbf{c} tal que $S(\rho_{ij}) = 0 \forall i \neq j$.

En un sistema de 4 niveles, puede mostrarse [83] que si $S^{\text{qsp}}(|\psi\rangle) > 0$, entonces existe entrelazamiento bipartito de modos en *cualquier* partición de \mathcal{H} , ya sea 1 – 3 (un nivel con resto) o 2 – 2 (dos niveles con el resto). Más aun, se cumple la desigualdad

$$S(\rho_A) = S(\rho_B) \geq \frac{1}{4} S(\rho^{\text{qsp}}) \quad (4.29)$$

de modo que la entropía de entrelazamiento fermiónico definida provee una cota inferior al entrelazamiento bipartito asociado a cualquier partición de \mathcal{H}_{SP} .

4.3.2. Entrelazamiento de subespacios

Dado el estado reducido ρ_A , generalmente mixto, asociado al subespacio $\mathcal{H}_A \subset \mathcal{H}$, si conmuta con el operador número de fermiones N_A , se define la entropía de formación de un cuerpo como en 4.2.5,

$$E(\rho_A) = \min_{\sum_{\alpha} q_{\alpha} |\Psi_{\alpha}^A\rangle \langle \Psi_{\alpha}^A| = \rho_A} q_{\alpha} S(|\Psi_{\alpha}^A\rangle)$$

donde se minimiza sobre todas las representaciones de ρ_A como combinación convexa de estados puros con número de fermiones fijo.

De forma análoga, si $|\psi\rangle$ posee paridad de número definida se define el entrelazamiento generalizado de formación de un cuerpo como

$$E^{\text{qsp}}(\rho_A) = \min_{\sum_{\alpha} q_{\alpha} |\Psi_{\alpha}^A\rangle \langle \Psi_{\alpha}^A| = \rho_A} q_{\alpha} S^{\text{qsp}}(|\Psi_{\alpha}^A\rangle)$$

con la minimización hecha ahora sobre todas las representaciones de ρ_A como combinación convexa de estados puros con paridad definida.

Para un nivel único i se tiene obviamente que $E(\rho_i) = E^{\text{qsp}}(\rho_i) = 0$ para cualquier $|\psi\rangle$. De forma análoga para dos niveles, $E^{\text{qsp}}(\rho_{ij}) = 0$, ya que cualquier estado con paridad definida en un espacio de dos niveles puede verse como un vacío de Bogoliubov, tal como se muestra en la Sec. 4.4. Lo mismo sucede para el sistema de tres niveles. El primer caso no trivial es el de cuatro niveles. Se tiene, usando (4.23)

$$E^{\text{qsp}}(\rho_{ijkl}) = -4 \sum_{\nu=\pm} f_{\nu} \log f_{\nu}, \quad f_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - C^2(\rho_{ijkl})}}{2}$$

con $C(\rho)$ la concurrencia ya definida en (4.24) y ρ_{ijkl} La matriz reducida de cuatro niveles de 16×16 .

A partir de estas definiciones, se puede demostrar el siguiente lema.

Lemma 4.3.1. *Dado un estado general fermiónico de cuatro niveles ρ_{ijkl} con paridad de número definida y tal que $C(\rho_{ijkl}) > 0$, cualquier bipartición de \mathcal{H}_{ijkl} (como podría ser $(ij - kl)$ o $(i - jkl)$) está entrelazada.*

Demostración. Si para una bipartición A, B el estado ρ_{ijkl} fuese separable, podría escribirse como combinación convexa de estados puros productos $|\mu_A\rangle \langle \mu_A| \otimes |\nu_B\rangle \langle \nu_B|$ con $|\mu_A\rangle, |\nu_B\rangle$ de paridad (de número) definida. Pero como son estados puros con paridad definida en $\dim \leq 3$, necesariamente son vacíos de cuasipartículas o determinantes de Slater (ver 4.4) y luego $C(\rho_{ijkl}) = 0$. Si se tiene $C(\rho_{ijkl}) > 0$, la bipartición debe estar entonces entrelazada para cualquier elección de partículas o cuasipartículas. \square

4.4. Sistemas de dimensión $d \leq 3$

No todos los sistemas fermiónicos pueden exhibir entrelazamiento de partícula. Se va a probar que el sistema más pequeño en el cual es posible tener estados puros de paridad de número definida que no sean DS o vacíos de cuasipartículas es el que tiene un espacio \mathcal{H}_{SP} de dimensión 4. Es decir, el estado debe vivir en un espacio con al menos 4 estados de SP ortogonales. Para dimensiones menores, todo estado puede escribirse como un DS o vacío. Luego el sistema de cuatro niveles es el más básico para estudiar entrelazamiento fermiónico, de la misma forma que el sistema de dos qubits lo es para el entrelazamiento de partículas distinguibles.

Sistema de 1 Nivel

Un sistema de un solo nivel tiene dos estados posibles: vacío \circ u ocupado \bullet . Si se conserva paridad de número, se tiene necesariamente un número de partículas fijo. Luego se tiene un estado u otro de forma excluyente, y se verifica trivialmente que es un vacío o DS.

Sistema de 2 Niveles

Dados dos niveles con paridad definida, se tienen los siguientes casos.

- Para el caso impar se tienen los estados

$$|\psi_1\rangle = c_1^\dagger |0\rangle, \quad \bullet\circ$$

$$|\psi_2\rangle = c_2^\dagger |0\rangle, \quad \circ\bullet$$

El estado impar más general se escribe como $|\psi\rangle = (\alpha c_1^\dagger + \beta c_2^\dagger) |0\rangle = \alpha \bullet\circ + \beta \circ\bullet$. Mediante una transformación unitaria se puede elegir $a_1^\dagger = \alpha c_1^\dagger + \beta c_2^\dagger$. Luego $|\psi\rangle = a_1^\dagger |0\rangle$, que es un DS elemental.

- El caso par tiene también dos estados

$$|\psi_1\rangle = |0\rangle, \quad \circ\circ$$

$$|\psi_2\rangle = c_1^\dagger c_2^\dagger |0\rangle, \quad \bullet\bullet$$

El estado más general es de nuevo una combinación: $|\psi\rangle = (\alpha + \beta c_1^\dagger c_2^\dagger) |0\rangle = \alpha \circ\circ + \beta \bullet\bullet$. Se puede hacer en primer lugar una transformación partícula-hueco en el modo 2: Se pasa a tener $|\psi\rangle = (\alpha c_2 c_2^\dagger + \beta c_1^\dagger c_2^\dagger) |0\rangle = (\alpha c_2 + \beta c_1^\dagger) |0'\rangle = (\alpha c_2^\dagger + \beta c_1^\dagger) |0'\rangle = \alpha \circ\bullet + \beta \bullet\circ$ con $|0'\rangle = c_2^\dagger |0\rangle$ y $c_2^\dagger = c_2$. Luego se toma $a_1^\dagger = \alpha c_2^\dagger + \beta c_1^\dagger$ y se llega al estado $|\psi\rangle = a_1^\dagger |0\rangle$ que corresponde a un DS en esta nueva base y a un vacío de cuasipartícula respecto de los operadores originales.

Sistema de 3 Niveles

Nuevamente se van a estudiar por separado las paridades:

- Los estados impares son cuatro:

$$|\psi_1\rangle = c_1^\dagger |0\rangle, \quad \bullet\circ\circ$$

$$|\psi_2\rangle = c_2^\dagger |0\rangle, \quad \circ\bullet\circ$$

$$|\psi_3\rangle = c_3^\dagger |0\rangle, \quad \circ\circ\bullet$$

$$|\psi_4\rangle = c_1^\dagger c_2^\dagger c_3^\dagger |0\rangle, \quad \bullet\bullet\bullet$$

El estado más general es $|\psi\rangle = (\alpha_1 c_1^\dagger + \alpha_2 c_2^\dagger + \alpha_3 c_3^\dagger + \beta c_1^\dagger c_2^\dagger c_3^\dagger) |0\rangle$. Se diagonaliza primero el sector de SP hasta tener el estado $|\psi\rangle = (\alpha_1' c_1^\dagger + \beta c_1^\dagger c_2^\dagger c_3^\dagger) |0\rangle$, con $c_1^\dagger c_2^\dagger c_3^\dagger |0\rangle = \epsilon_{ijk} U_{1'i} U_{2'j} U_{3'k} c_1^\dagger c_2^\dagger c_3^\dagger |0\rangle$. Las transformaciones U solo agregan fases relativas. A continuación se hace una transformación partícula-hueco en el segundo nivel: $c_2' \rightarrow a_2'^\dagger$, $c_2'^\dagger \rightarrow a_2'$ y luego $|\psi\rangle = (\alpha_1' c_1^\dagger a_2'^\dagger + \beta' c_1^\dagger c_3^\dagger) |0'\rangle = \alpha_1' \bullet\bullet\circ + \beta' \bullet\circ\bullet$. Ahora resta diagonalizar los niveles 2 y 3: $a_2'^\dagger = (\alpha_1' a_2'^\dagger + \beta c_3^\dagger)$. Se llega entonces al estado final $|\psi\rangle = c_1^\dagger a_2'^\dagger |0'\rangle$ que es un DS.

- Se tienen también 4 estados de paridad par

$$\begin{aligned}
 |\psi_0\rangle &= |0\rangle, & \circ\circ\circ \\
 |\psi_1\rangle &= c_1^\dagger c_2^\dagger |0\rangle, & \bullet\bullet\circ \\
 |\psi_2\rangle &= c_1^\dagger c_3^\dagger |0\rangle, & \bullet\circ\bullet \\
 |\psi_3\rangle &= c_2^\dagger c_3^\dagger |0\rangle, & \circ\bullet\bullet
 \end{aligned}$$

El estado más general es una combinación lineal de estos: $|\psi\rangle = (\alpha_0 + \alpha_1 c_1^\dagger c_2^\dagger + \alpha_2 c_1^\dagger c_3^\dagger + \alpha_3 c_2^\dagger c_3^\dagger) |0\rangle$. Haciendo una transformación partícula hueco en cualquiera de los modos, se recupera el sistema impar anterior. Luego se transforma hasta llegar al DS.

Sistema de 4 Niveles

Para 4 niveles se tiene que no es siempre posible hacer transformaciones de Bogoliubov para reescribir el estado como un DS. El caso más claro es el del estado con cantidad par de partículas

$$|\psi\rangle = (\alpha c_1^\dagger c_2^\dagger + \beta c_3^\dagger c_4^\dagger) |0\rangle = \alpha \bullet\bullet\circ\circ + \beta \circ\circ\bullet\bullet$$

No es posible escribir este estado como DS o vacío de Bogoliubov con $\alpha\beta \neq 0$. Esto puede verse pensando en la matriz densidad de un cuerpo asociada, que tendrá autovalores $|\alpha|^2$ y $|\beta|^2$ doblemente degenerados, y por lo tanto $\rho^2 \neq \rho$. Luego el sistema más básico donde aparece entrelazamiento fermiónico es el de 4 niveles, que ya fue discutido en la Sec. 4.2.5.

Sistema superconductor

Como primera aplicación de las medidas vistas en el capítulo anterior, se analiza en este capítulo el entrelazamiento fermiónico en el estado fundamental exacto de un sistema superconductor. Estudios previos del entrelazamiento en tales sistemas se han enfocado principalmente en las propiedades formales de las correlaciones apareamiento (ó pairing) [27] o en el estado específico de Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS) [84-87]. Se muestra aquí que la entropía de entrelazamiento de un cuerpo es un indicador directo de correlaciones de apareamiento, reflejando esencialmente el comportamiento del gap de BCS y saturando en el régimen de acoplamiento fuerte. La misma se correlaciona fuertemente con el entrelazamiento bipartito entre los Ω estados k y sus pares invertidos temporalmente \bar{k} , llegando a ser directamente proporcional a nivel de BCS. Por otro lado, el entrelazamiento fermiónico asociado a cuatro modos $k\bar{k}k'\bar{k}'$, exhibe un comportamiento distinto y llamativo. Esta cantidad se estudia mediante la concurrencia del estado mixto reducido [31] sin número de partículas fijo (pero paridad definida), presenta un pico en los acoplamientos cercanos a la transición de fase superconductor para los niveles k, k' cerca del nivel de Fermi y se hace pequeña (pero no nula) en la región de acoplamiento fuerte. En esta última zona, el estado reducido presenta correlaciones clásicas del tipo discord [72, 73, 88], con información mutua y discord cuántico finito. Se discuten también estas cantidades en la aproximación de BCS, que provee una correcta estimación de las primeras medidas en la fase superconductor, pero no logra capturar la correlación fermiónica de cuatro modos (trivialmente cero). Para recuperar esto último, es necesario considerar al menos un tratamiento de BCS proyectado. Los resultados de este capítulo dieron lugar al trabajo [1].

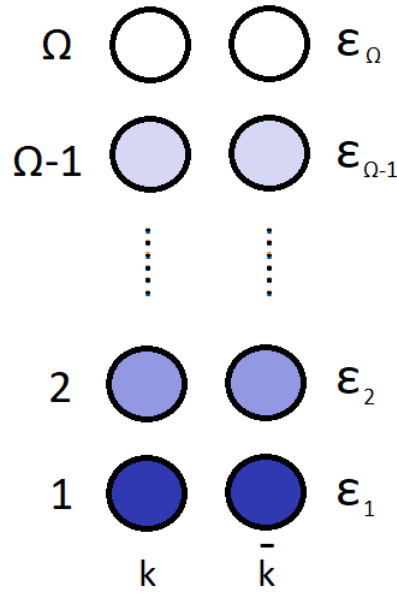


Figura 5.1: Esquema del sistema superconductor estudiado en el presente capítulo. Ω niveles de energía doblamente degenerados k y \bar{k} con energía ε_k . Se toma el caso semilleno $N = \Omega$.

5.1. Descripción del sistema

Se van a considerar sistemas fermiónicos en un espacio de una partícula de dimensión 2Ω , que comprenden Ω estados k y Ω estados \bar{k} (estados de momento con inversión temporal). El Hamiltoniano de apareamiento es de la forma

$$H = \sum_k \varepsilon_k (c_k^\dagger c_k + c_{\bar{k}}^\dagger c_{\bar{k}}) - \sum_{k,k'} G_{kk'} c_{k'}^\dagger c_{\bar{k}}^\dagger c_{\bar{k}} c_k \quad (5.1)$$

donde ε_k son las energías de una partícula, y son las mismas para los estados k y \bar{k} . La interacción mueve pares de fermiones de k, \bar{k} a k', \bar{k}' . Se considerará por simplicidad un espectro equiespaciado, es decir $\varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k = \varepsilon \quad \forall k$, y un acoplamiento constante $G_{kk'} = G \geq 0 \quad \forall k, k'$. El número de fermiones va a ser $N = \Omega$, con Ω par. Un esquema puede verse en la Fig. 5.1. Modelos de este tipo han sido considerados, por ejemplo, en la descripción de sistemas superconductores de escala nanométrica [48-51].

Debido a la forma de este acoplamiento, el estado fundamental (GS: ground state) exacto de (5.1) es una combinación lineal de DS con pares (k, \bar{k}) totalmente ocupados o totalmente vacíos, ya que tanto k como \bar{k} tienen la misma energía. Puede,

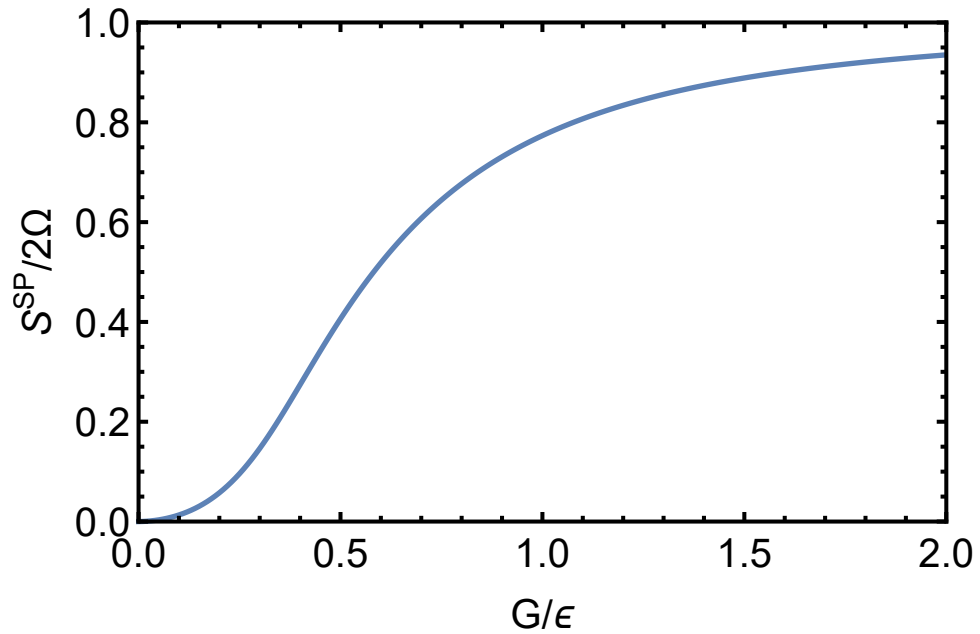


Figura 5.2: Entropía de un cuerpo S^{SP} del GS exacto del Hamiltoniano (5.1) como función de la constante de acoplamiento G/ε , para $2\Omega = 32$ niveles y $N = \Omega$. Tiende a 1 cuando $G/\varepsilon \rightarrow \infty$.

por tanto, escribirse en la forma

$$|\psi\rangle = \sum_{\nu} \alpha_{\nu} \left[\prod_k (c_k^{\dagger} c_{\bar{k}}^{\dagger})^{n_k^{\nu}} \right] |0\rangle \quad (5.2)$$

con $\sum_{\nu} |\alpha_{\nu}|^2 = 1$, $n_k^{\nu} = 0, 1$ y tal que $\sum_k n_k^{\nu} = N/2$. La cantidad de términos es la cantidad de formas de colocar los $N/2$ pares en Ω estados, es decir $\nu = 1, \dots, \binom{\Omega}{N/2}$.

5.2. Resultados exactos

5.2.1. Entropía de un cuerpo

Se comienza evaluando la entropía de entrelazamiento de un cuerpo (4.4). Tomando valores medios a partir del estado (5.2), es fácil mostrar que la matriz $\kappa = 0$ y la matriz densidad de un cuerpo es diagonal en la base no perturbada,

$$\begin{aligned} \langle c_k^{\dagger} c_{\bar{k}'} \rangle &= \langle c_{\bar{k}}^{\dagger} c_{k'} \rangle = 0 \quad \forall k, k' \\ \langle c_k^{\dagger} c_{k'} \rangle &= \langle c_{\bar{k}}^{\dagger} c_{\bar{k}'} \rangle = \delta_{kk'} f_k \end{aligned}$$

donde $f_k = \sum_{\nu} |\alpha_{\nu}|^2 n_k^{\nu}$ y $2 \sum_k f_k = N$. La entropía de un cuerpo (4.4) es entonces

$$S^{\text{SP}} = 2 \sum_k h(f_k) \quad (5.3)$$

con $h(f_k) = -f_k \log_2 f_k - (1 - f_k) \log_2(1 - f_k)$ la entropía de la matriz de un nivel ρ_k

$$\rho_k = \rho_{\bar{k}} = \begin{bmatrix} f_k & 0 \\ 0 & 1 - f_k \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Como el GS exacto $|\psi\rangle$ tiene N fijo, $S^{sp}(|\psi\rangle) = S^{qsp}(|\psi\rangle)$. Se tiene también que $h(f_k)$ es función creciente con la fluctuación de número de ocupación

$$\langle n_k^2 \rangle - \langle n_k \rangle^2 = f_k(1 - f_k) = \frac{1}{4} S_2(\rho_k) \quad (5.5)$$

donde $S_2(\rho) = 2Tr[\rho(\mathcal{I} - \rho)]$ es la entropía cuadrática (también llamada lineal). La Ec. (5.5) es también una medida de entrelazamiento de un modo. Esta relación entre entrelazamiento y fluctuaciones fue discutida en más detalle en [89] .

Puede graficarse la entropía (5.3) en función de la constante de acoplamiento. En la Fig. 5.2 se grafica el resultado para $2\Omega = 32$ niveles, obtenido a partir del estado GS exacto, derivado de la diagonalización exacta de H . Esta entropía, que mide la desviación del GS exacto respecto de un DS, es en este caso un indicador de las correlaciones de apareamiento, siendo no nula y monótonamente creciente para todo $G > 0$. Se verá más adelante que su comportamiento es semejante al del gap de BCS Δ/G . Vale remarcar que un estado correlacionado no exhibe necesariamente apareamiento, pero un estado con apareamiento debe estar correlacionado. El apareamiento es entonces un tipo particular de correlación que se detecta solamente con propiedades de una y dos partículas, y que es independiente de la base [27]. Los sistemas superconductores tienen efectivamente correlaciones de este tipo.

Resulta interesante graficar el comportamiento de la entropía $h(f_k)$ de cada modo individualmente. Esta cantidad aumenta más (menos) rápidamente para niveles cerca (lejos) del nivel de Fermi. Esto puede verse en la Fig. 5.3. Las correlaciones de apareamiento suavizan la superficie de Fermi, llevando las ocupaciones promedio finitas a $0 < f_k < 1/2$ para niveles de SP sobre el nivel de Fermi (que aumentan con G), y a $1/2 < f_k < 1$ para niveles por debajo del nivel de Fermi (que decrecen con G). Cada término $h(f_k)$ de la suma (5.3) aumenta junto con G . En un sistema finito los efectos de apareamiento en el GS exacto se hacen visibles también en la región de bajo acoplamiento $0 < G < G_c$, donde los resultados de BCS se desvanecen.

Como se ve en la Fig. 5.3, el aumento de las entropías de un modo $h(f_k)$ con G será inicialmente más rápido para niveles cercanos al nivel de Fermi, ya que sus

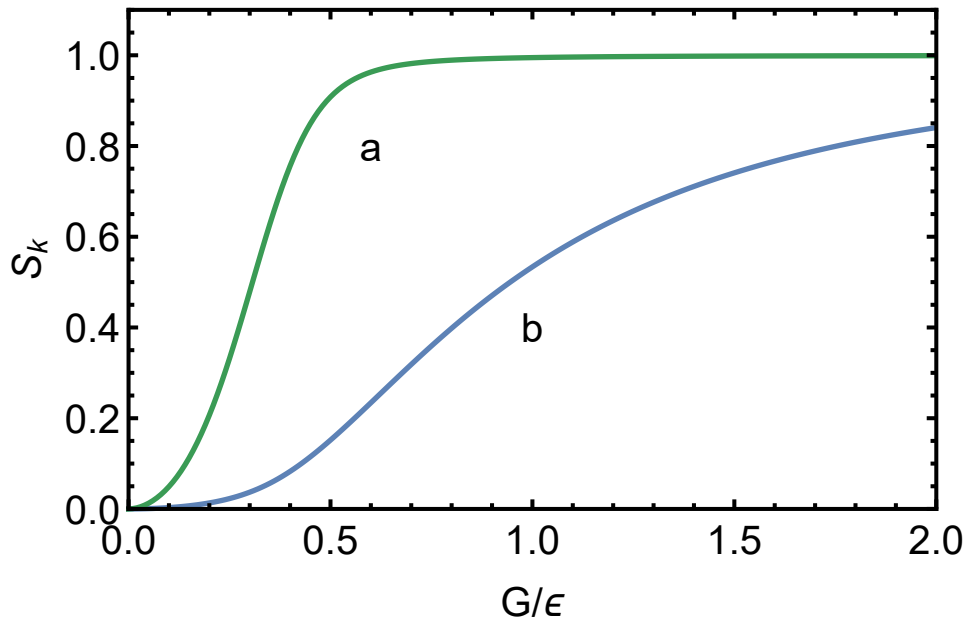


Figura 5.3: La entropía de entrelazamiento $S_k = S(\rho_k) = h(f_k)$ para niveles más cercanos al nivel de Fermi ($k = \Omega/2$)(a) y más distantes al nivel de Fermi ($k = 1$)(b).

ocupaciones se verán más fuertemente afectadas por el acoplamiento. La fluctuación del número de ocupación $f_k(1-f_k)$ aumenta también rápidamente para estos niveles, llevando a valores más grandes de $h(f_k)$. El valor no nulo de $S^{sp}(|\psi\rangle)$ para $0 < G < G_c$ se debe precisamente a estas contribuciones no despreciables de $h(f_k)$ de los niveles cercanos a la superficie de Fermi. Sin embargo, para G suficientemente grande, todos los niveles alcanzados por el acoplamiento son afectados significativamente y contribuyen a $S^{sp}(|\psi\rangle)$.

Se pueden obtener algunos resultados analíticos en el límite de apareamiento fuerte, es decir en el límite de $G/\Omega\varepsilon \rightarrow \infty$. En este régimen todos los niveles pasan a tener la misma probabilidad de poblarse. Para $N = \Omega$ se obtiene entonces

$$\alpha_\nu \xrightarrow{G/\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\binom{\Omega}{\Omega/2}}} \quad (5.6)$$

lo que conduce a $f_k \rightarrow \frac{1}{2}$ y $h(f_k) \rightarrow 1 \forall k$. Luego se tiene que $S^{sp} \rightarrow 2\Omega$, que es el valor máximo posible.

5.2.2. Entropía de entrelazamiento $k - \bar{k}$

Se considera a continuación el entrelazamiento bipartito al dividir el espacio de Hilbert entre los Ω estados con momento k y los Ω con momento \bar{k} . Se tiene entonces $\mathcal{H} = \mathcal{H}_\Omega \oplus \mathcal{H}_{\bar{\Omega}}$. Para esta partición, resulta que (5.2) ya es la descomposición de

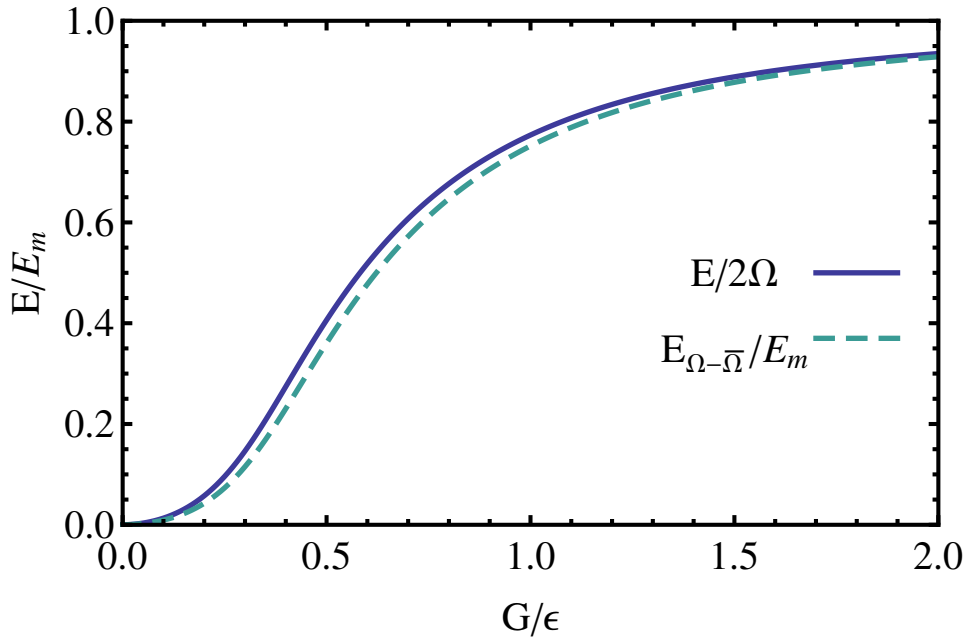


Figura 5.4: La entropía de entrelazamiento de un cuerpo (línea sólida) junto a la entropía bipartita del entrelazamiento entre todos los modos k y \bar{k} de (5.7) escaleada por su máximo valor E_m . En BCS estas cantidades van a coincidir.

Schmidt de $|\psi\rangle$. El entrelazamiento asociado es

$$E_{\Omega,\bar{\Omega}}(|\psi\rangle) = - \sum_{\nu} |\alpha_{\nu}|^2 \log_2 |\alpha_{\nu}|^2 \quad (5.7)$$

Este entrelazamiento resulta ser una función creciente de G/ϵ , que satura en su valor máximo en el límite de $G/\epsilon \rightarrow \infty$, y que exhibe un comportamiento muy similar al de S^{sp} , tal como se observa en la Fig. 5.4. Se obtiene $E_m \equiv E_{\Omega,\bar{\Omega}}^{\text{max}} = \log_2 \left(\frac{\Omega}{\Omega/2} \right)$ para $N = \Omega$, con $E_m \simeq \Omega$ para Ω grande. Esta relación se hará exacta para el caso de la aproximación de BCS, como se verá en la Sec. 5.3.1.

5.2.3. Entrelazamiento de estados reducidos

Se considerarán ahora estados reducidos de un conjunto de niveles, los cuales serán en general estados mixtos debido al entrelazamiento de $|\psi\rangle$.

En primer lugar se estudiará el estado reducido que emerge de considerar un par de modos (k, \bar{k}) . De la matriz (4.28), se anulan los términos del bloque del medio, ya que en el GS no hay pares rotos: $\langle c_k^{\dagger} c_k c_{\bar{k}}^{\dagger} c_{\bar{k}} \rangle = 0 = \langle c_k^{\dagger} c_k \rangle = \langle c_k c_{\bar{k}} \rangle$. Sobreviven, por tanto, solo los términos que involucran a los estados $|0\rangle$ y $c_k^{\dagger} c_{\bar{k}}^{\dagger} |0\rangle$, es decir el bloque

exterior de (4.28). Como $\langle c_k^\dagger c_{\bar{k}}^\dagger c_{\bar{k}} c_k \rangle = f_k$, el bloque que sobrevive va a ser idéntico a (5.4). Entonces $\forall k$ se tiene

$$S(\rho_{k\bar{k}}) = S(\rho_k) = S(\rho_{\bar{k}}) = h(f_k) \quad (5.8)$$

Esta entropía representa la del entrelazamiento de los dos modos con el resto de los modos.

Por otro lado, no hay entrelazamiento entre estos dos modos, $E^{\text{sp}}(\rho_{k\bar{k}}) = 0$, ya que la matriz $\rho_{k\bar{k}}$ es diagonal en la base $\{c_k^\dagger c_{\bar{k}}^\dagger |0\rangle, |0\rangle\}$, es decir se trata de una combinación convexa de determinantes de Slater, en concordancia con lo discutido anteriormente para dimensión 2. Por esta misma razón, se tiene $E^{\text{qsp}}(\rho_{k\bar{k}}) = 0$.

Puede calcularse también la información mutua

$$I_{k\bar{k}} = S(\rho_k) + S(\rho_{\bar{k}}) - S(\rho_{k\bar{k}}) = h(f_k) \quad (5.9)$$

Esta cantidad es no nula, lo que indica que si bien no existe entrelazamiento, sí se tiene una correlación clásica entre los modos k y \bar{k} .

El caso de cuatro niveles, como ya se ha demostrado, es el de más baja dimensionalidad en el cual aparecen correlaciones cuánticas no triviales. La matriz densidad reducida de 4 niveles $(k, \bar{k}, k', \bar{k}')$, $k \neq k'$ es de 16×16 , pero se anulan todos los estados con pares rotos. Se reduce entonces a una matriz efectiva de 4×4 $\rho_{k\bar{k}k'\bar{k}'}^r$, que escrita en la base $\{c_k^\dagger c_{\bar{k}}^\dagger c_{k'}^\dagger c_{\bar{k}'}^\dagger |0\rangle, c_k^\dagger c_{\bar{k}}^\dagger |0\rangle, c_{k'}^\dagger c_{\bar{k}'}^\dagger |0\rangle, |0\rangle\}$ es

$$\rho_{k\bar{k}k'\bar{k}'}^r = \begin{pmatrix} \langle n_{k\bar{k}} n_{k'\bar{k}'} \rangle & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \langle n_{k\bar{k}} \tilde{n}_{k',\bar{k}'} \rangle & \langle c_k^\dagger c_{\bar{k}}^\dagger c_{\bar{k}'} c_{k'} \rangle & 0 \\ 0 & \langle c_{k'}^\dagger c_{\bar{k}'}^\dagger c_{\bar{k}} c_k \rangle & \langle \tilde{n}_{k\bar{k}} n_{k',\bar{k}'} \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \langle \tilde{n}_{k\bar{k}} \tilde{n}_{k',\bar{k}'} \rangle \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

con $n_{k\bar{k}} = c_k^\dagger c_k c_{\bar{k}}^\dagger c_{\bar{k}}$, $\tilde{n}_{k\bar{k}} = c_k c_k^\dagger c_{\bar{k}} c_{\bar{k}}^\dagger$, que son no nulos sii el par (k, \bar{k}) está totalmente ocupado o totalmente vacío respectivamente. Al haber términos no diagonales, aparecen en principio correlaciones cuánticas. Se puede calcular entonces la concurrencia fermiónica definida por (4.24), que cuantifica la desviación del estado (5.10) respecto de una combinación convexa de DSs. y que permite obtener el correspondiente entrelazamiento de formación $E(\rho_{k\bar{k}k'\bar{k}'}^r) = E^{\text{qsp}}(\rho_{k\bar{k}k'\bar{k}'}^r)$ por medio de (4.23). Para esta matriz densidad se tiene

$$C_{kk'} = 2 \text{máx} [|\langle c_k^\dagger c_{\bar{k}}^\dagger c_{\bar{k}'} c_{k'} \rangle| - \sqrt{\langle n_{k\bar{k}} n_{k'\bar{k}'} \rangle \langle \tilde{n}_{k\bar{k}} \tilde{n}_{k'\bar{k}'} \rangle}, 0] \quad (5.11)$$

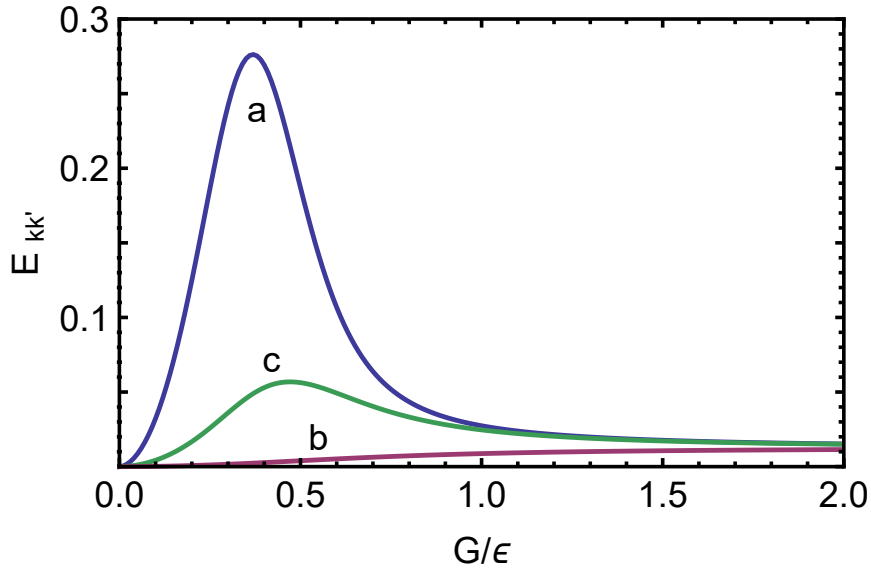


Figura 5.5: Entrelazamiento de formación $E_{kk'}$ determinada por la concurrencia fermiónica entre los modos $k\bar{k}$ y $k'\bar{k}'$ para pares más cercanos ($k = \Omega/2, k' = k + 1$) (a) y más distantes ($k = 1, k' = \Omega$) (b) al nivel de Fermi, y para pares vecinos al más cercano ($k = \Omega/2 - 1, k' = \Omega/2 + 2$) (c). Esta cantidad se anula en la aproximación BCS. El pico en (a) está centrado en la transición superconductora de BCS

Esta es también la concurrencia bipartita entre los modos $k\bar{k}$ y $k'\bar{k}'$. Puede pensarse cada par k, \bar{k} de forma análoga a un qubit (totalmente ocupado o vacío en el GS), formando ambos pares un sistema de dos qubits. El entrelazamiento de formación asociado es $E_{kk'} = E^{\text{qsp}}(\rho_{k\bar{k}k'\bar{k}'})/4$, (ya que para un estado puro en un espacio de cuatro niveles, $E^{\text{qsp}}(\rho) = 4h(f)$). Además, usando el teorema de Wick (ver Apéndice A.4), se verá que $C_{kk'}$ se anula idénticamente en la aproximación BCS, con lo cual estas correlaciones resultan ser demasiado sutiles para este tipo de aproximaciones. En la Fig. 5.5 puede verse el comportamiento de $E_{kk'}$ en función del acoplamiento.

Esta cantidad presenta un pico muy marcado en la transición de fase superconductora de BCS ($G \simeq G_c$) para los niveles más cercanos al nivel de Fermi. El pico aparece también en la concurrencia, ya que $E_{kk'}$ es función creciente de $C_{kk'}$.

Este pico surge porque el término de apareamiento $\langle c_k^\dagger c_{\bar{k}}^\dagger c_{k'} c_{\bar{k}'} \rangle$ se incrementa más rápido en esa zona que el producto de las probabilidades de encontrar ambos niveles llenos o vacíos. En el régimen superconductor fuerte este último producto también aumenta y ambos términos en la diferencia (5.11) son comparables, disminuyendo entonces el valor de $C_{kk'}$. En la zona crítica existe pues un entrelazamiento local más significativo que en el régimen $G \gg G_c$, lo que refleja un GS exacto más complejo

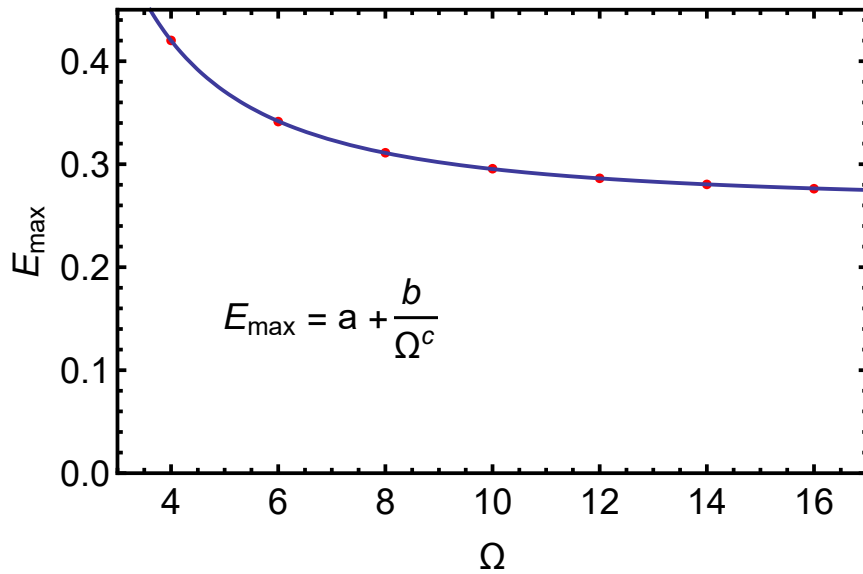


Figura 5.6: Valor del pico de entrelazamiento para los niveles más cercanos a la energía de Fermi en función de la cantidad de niveles considerados. Se tiene en el ajuste $a = 0,26$, $b = 1,61$ y $c = 1,67$ con $r^2 = 0,999973$. En el límite tiende a un valor finito distinto de cero.

que en la zona superconductor. Esta concurrencia representa así un indicador de complejidad de este estado (ver sección siguiente). A medida que se toman niveles más lejanos, la concurrencia del pico decae de forma simétrica.

Puede también analizarse la dependencia del pico más alto (correspondiente a los pares más cercanos al nivel de Fermi) con la cantidad de niveles disponibles. Esta dependencia resulta ser de la forma $a + \frac{b}{\Omega^c}$, con $c \simeq \frac{5}{3}$. El ajuste se ve en la Fig. 5.6.

De igual manera que en (5.6), en el límite $G/(\Omega\varepsilon) \rightarrow \infty$, la matriz $\rho_{k\bar{k}k'\bar{k}'}$ va a ser independiente de k, k' . En este límite puede despreciarse la energía de cada nivel, con lo cual todos los estados se pueblan con igual probabilidad. Esto reduce el problema de determinar sus elementos a un ejercicio de combinatorias. Esta matriz toma entonces la forma

$$\rho_{k\bar{k}k'\bar{k}'}^r = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

Para $N = \Omega/2$ se tiene que la probabilidad q de tener los dos pares llenos o vacíos

va a ser

$$q = \langle n_{k\bar{k}} n_{k'\bar{k}'} \rangle = \langle \tilde{n}_{k\bar{k}} \tilde{n}_{k'\bar{k}'} \rangle = \frac{\binom{\Omega-2}{\Omega/2}}{\binom{\Omega}{\Omega/2}} = \frac{\Omega-2}{4(\Omega-1)} \quad (5.13)$$

Por otro lado, los elementos del bloque interno son también iguales entre sí.

$$\alpha = \langle n_{k\bar{k}} \tilde{n}_{k',\bar{k}'} \rangle = \langle \tilde{n}_{k\bar{k}} n_{k',\bar{k}'} \rangle = \langle c_k^\dagger c_{\bar{k}}^\dagger c_{\bar{k}'} c_{k'} \rangle = \frac{\binom{\Omega-2}{\Omega/2-1}}{\binom{\Omega}{\Omega/2}} = \frac{\Omega}{4(\Omega-1)} \quad (5.14)$$

Los autovalores en este límite son $\{2\alpha, q, q, 0\}$, cumpliéndose que la traza es igual a 1. Reemplazando en (5.11) se llega a

$$C_{kk'} = \frac{1}{\Omega-1} \quad (5.15)$$

Este valor coincide con el límite obtenido de forma numérica. El consiguiente entrelazamiento de formación tiende, para $G/\varepsilon \rightarrow \infty$, a $E_{kk'} \simeq \frac{1}{2}\Omega^{-2} \log_2(2\Omega\sqrt{e})$. Vale la pena notar que en el límite de Ω tendiendo a infinito, la matriz anterior se reduce a

$$\rho_{h\bar{k}k'\bar{k}'}^r = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

con autovalores $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0\}$ y concurrencia cero.

Entonces, se concluye que el entrelazamiento entre pares $k\bar{k}$ y $k'\bar{k}'$ es apreciable solo para k, k' cercanos al nivel de Fermi y en la región de transición, pero no en el régimen de superconductividad fuerte. En esta última región, las correlaciones pueden medirse con la información mutua

$$I_{kk'} \equiv S(\rho_{k\bar{k}}) + S(\rho_{k'\bar{k}'}) - S(\rho_{k\bar{k}k'\bar{k}'}) = h(f_k) + h(f_{k'}) - S(\rho_{k\bar{k}k'\bar{k}'}) \quad (5.17)$$

y la discordia cuántica $D_{kk'}$. Para calcular esta última se utiliza un paralelismo entre este problema y el sistema de dos qubits. Esto se detalla en el Apéndice B.1. Estas cantidades se ven graficadas en la Fig. 5.7.

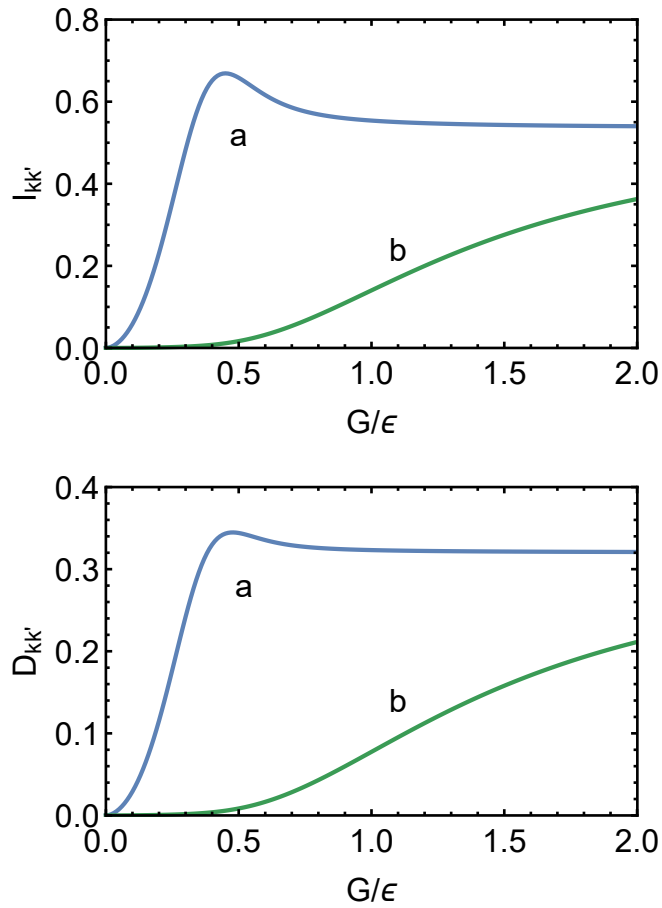


Figura 5.7: La información mutua y la discordia entre modos $k\bar{k}$ y $k'\bar{k}'$ para pares más cercanos (a) y más lejanos (b) al nivel de Fermi en el sistema superconductor. Ambas cantidades son apreciables en la fase superconductor. La aproximación BCS da resultados no nulos para $G > G_c$.

En el límite $G/\epsilon \rightarrow \infty$ se tiene $S(\rho_{k\bar{k}k'\bar{k}'}^r) \simeq \frac{1}{2}(3 - \Omega^{-1})$ para Ω grande. Esto implica $I_{kk'} \simeq \frac{1}{2}(1 + \Omega^{-1})$.

Tanto $I_{kk'}$ como $D_{kk'}$ presentan un pico moderado en la región de transición para pares cercanos al nivel de Fermi, pero a diferencia de las otras cantidades continúan siendo apreciables para valores $G > G_c$. El hecho de que la discordia no se anule indica que si bien no hay concurrencia, las correlaciones en este régimen no son puramente clásicas. En el caso de $\Omega = 2$, se tiene que $E_{kk'} = D_{kk'} = S_{k\bar{k}} = \frac{I_{kk'}}{2} = \frac{S^{\text{SP}}}{2} = \frac{E^{\text{qSP}}}{4}$.

5.3. Descripción aproximada

5.3.1. Aproximación de BCS

Como se ha discutido en 3.7, la aproximación de BCS se basa en un estado de la forma

$$|\text{BCS}\rangle = \prod_{k>0} (u_k + v_k c_k^\dagger c_{\bar{k}}^\dagger) |0\rangle$$

que es un vacío de cuasipartículas. La minimización de $\langle \text{BCS} | H | \text{BCS} \rangle$ conduce a que $|\text{BCS}\rangle$ deba ser el GS del Hamiltoniano autoconsistente efectivo

$$h_{\text{BCS}} = \sum_{k>0} h_k$$

donde, definiendo $H' = H - \mu N$, con μ el potencial químico,

$$\begin{aligned} h_k &= \underbrace{\frac{\partial \langle H' \rangle}{\partial \langle c_k^\dagger c_k \rangle}}_{e_k} c_k^\dagger c_k + \underbrace{\frac{\partial \langle H' \rangle}{\partial \langle c_{\bar{k}}^\dagger c_{\bar{k}} \rangle}}_{e_k} c_{\bar{k}}^\dagger c_{\bar{k}} + \underbrace{\left(\frac{\partial \langle H' \rangle}{\partial \langle c_{\bar{k}} c_k \rangle} c_{\bar{k}} c_k + h.c. \right)}_{-\Delta} \\ &= e_k (c_k^\dagger c_k + c_{\bar{k}}^\dagger c_{\bar{k}}) - \Delta (c_k^\dagger c_{\bar{k}}^\dagger + c_{\bar{k}} c_k) \\ &= \frac{1}{2} \left[(c_k^\dagger, c_{\bar{k}}) \begin{pmatrix} e_k & -\Delta \\ -\Delta & -e_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_k \\ c_{\bar{k}}^\dagger \end{pmatrix} + (c_{\bar{k}}^\dagger, c_k) \begin{pmatrix} e_k & \Delta \\ \Delta & -e_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{\bar{k}} \\ c_k^\dagger \end{pmatrix} \right] + e_k \quad (5.18) \end{aligned}$$

con los valores medios tomados respecto del estado $|\text{BCS}\rangle$. Aquí Δ es el gap de BCS,

$$\Delta = G \sum_k \langle c_k^\dagger c_{\bar{k}}^\dagger \rangle \quad (5.19)$$

Se despreciarán efectos menores en e_k derivados de los términos con $k = k'$ en la interacción, tal que en lo sucesivo $e_k = \varepsilon_k - \mu$ (en el GS exacto, los términos con $k = k'$ en la interacción solo añaden una constante $-\Omega G$ en la energía).

El Hamiltoniano efectivo (5.18) puede diagonalizarse mediante la transformación de Bogoliubov

$$a_k = u_k c_k - v_k c_{\bar{k}}^\dagger, \quad a_{\bar{k}} = v_k c_k^\dagger + u_k c_{\bar{k}} \quad (5.20)$$

obteniéndose

$$h_k = \lambda_k (a_k^\dagger a_k + a_{\bar{k}}^\dagger a_{\bar{k}}) + (e_k - \lambda_k)$$

con

$$\lambda_k = \sqrt{e_k^2 + \Delta^2} \quad (5.21)$$

las energías de cuasipartícula.

Los nuevos operadores $a_k, a_k^\dagger, a_{\bar{k}}, a_{\bar{k}}^\dagger$ conservan las reglas de anticonmutación fermiónicas si $|u_k^2| + |v_k^2| = 1$. Estos coeficientes están dados por

$$u_k = \sqrt{\frac{\lambda_k + e_k}{2\lambda_k}}, \quad v_k = \sqrt{\frac{\lambda_k - e_k}{2\lambda_k}} \quad (5.22)$$

Mediante BCS, es posible entonces aproximar el presente sistema por cuasipartículas no interactuantes. Como $\lambda_k > 0$, el GS de h , es decir, el estado de BCS, es el vacío de estos nuevos operadores a_k : se tiene $a_k |\text{BCS}\rangle = a_{\bar{k}} |\text{BCS}\rangle = 0$. El precio a pagar por esta aproximación es que se pierde la conservación del número de partículas.

De (5.22) se obtiene $\langle c_k^\dagger c_{\bar{k}}^\dagger \rangle = u_k v_k = \Delta / (2\lambda_k)$, con lo cual es posible deducir la siguiente relación

$$\Delta = G \sum_k u_k v_k = G \sum_k \frac{\Delta}{2\lambda_k} \quad (5.23)$$

Esta es una fórmula de autorecurrencia con dos soluciones. Una es $\Delta = 0$, que es la trivial, y la otra corresponde a $\Delta \neq 0$. En el segundo caso se tiene

$$1 = G \sum_k \frac{1}{2\lambda_k} = G \sum_k \frac{1}{2\sqrt{e_k^2 + \Delta^2}} \quad (5.24)$$

Puede calcularse el valor de G crítico, para el cual se anula Δ . Ese valor es

$$G_c = \frac{1}{\sum_k \frac{1}{2|e_k|}} \simeq \frac{\varepsilon}{\ln(\Omega/2) + \gamma} \quad (5.25)$$

donde la última expresión vale para el caso de niveles equiespaciados con $\varepsilon = e_{k+1} - e_k$, y $N = \Omega$, donde $\mu = \sum_k e_k/2$ y $\gamma = -\Gamma'(1/2)/\Gamma(1/2) \approx 1,96$.

El apareamiento se vincula con la siguiente cantidad que se hace grande en sistemas superconductores: $\langle V \rangle = G \sum_{k,k'} \langle c_k^\dagger c_{\bar{k}}^\dagger c_{\bar{k}'} c_{k'} \rangle$. Usando el teorema de Wick, se tiene respecto del estado de BCS, que

$$\langle V \rangle = G \sum_{k,k'} \langle c_k^\dagger c_{\bar{k}}^\dagger \rangle \langle c_{\bar{k}'} c_{k'} \rangle + \langle c_k^\dagger c_{k'} \rangle \langle c_{\bar{k}}^\dagger c_{\bar{k}'} \rangle \simeq G \sum_{k,k'} \langle c_k^\dagger c_{\bar{k}}^\dagger \rangle \langle c_{\bar{k}'} c_{k'} \rangle = \frac{\Delta^2}{G}$$

Entonces Δ es justamente un indicador de correlaciones de apareamiento entre los fermiones del sistema. Puede verse en la Fig. 5.8 que el entrelazamiento de un cuerpo (5.3) se comporta de forma análoga al gap escaleado de BCS Δ/g . Esto implica que las correlaciones detectadas son efectivamente del tipo esperado.

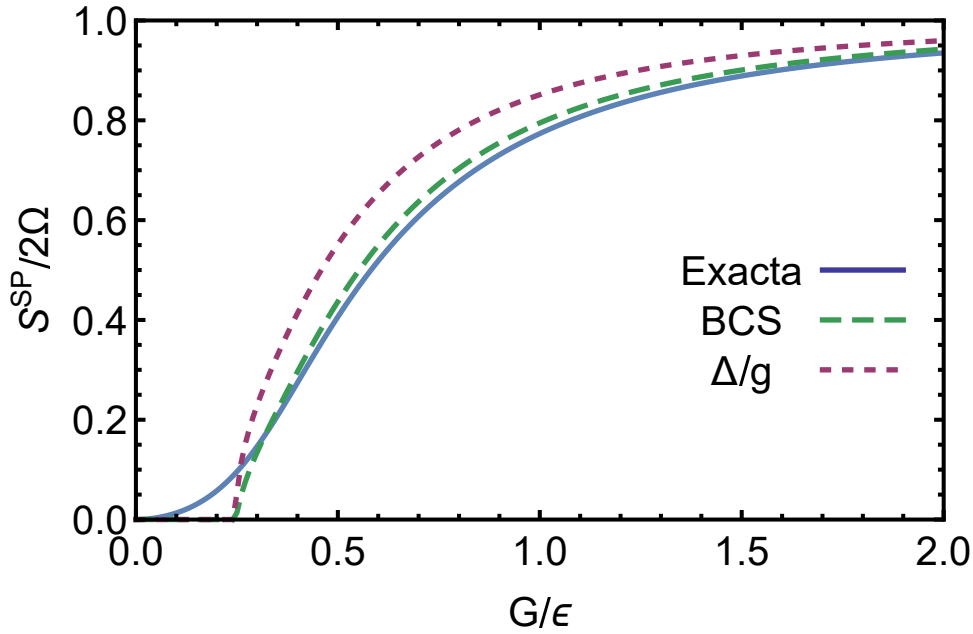


Figura 5.8: Entropía de un cuerpo S^{sp} del GS del Hamiltoniano (5.1) como función de la constante de acoplamiento G/ε , para $2\Omega = 32$ niveles y $N = \Omega$. Se muestran el resultado exacto, el de BCS y el gap escalado de BCS: Δ/g , con $g = G\Omega/2$. Todas las cantidades tienden a 1 cuando $G/\varepsilon \rightarrow \infty$.

Se tiene aquí que la matriz $\rho_{\text{BCS}}^{sp} = \langle \text{BCS} | \mathbb{1} - \mathbf{c}\mathbf{c}^\dagger | \text{BCS} \rangle$ es diagonal en la base sin perturbar:

$$\langle c_k^\dagger c_{k'} \rangle = \delta_{kk'} f_k \quad (5.26)$$

con

$$f_k = \langle c_k^\dagger c_k \rangle = \langle c_{\bar{k}}^\dagger c_{\bar{k}} \rangle = v_k^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{e_k}{\lambda_k} \right) \quad (5.27)$$

La interpretación física de Δ en el GS puede entonces verse mediante la ocupación promedio de cada nivel f_k , que para $G < G_c$ ($\Delta = 0$) es una función escalón con el valor crítico en el nivel de Fermi, deformándose suavemente a medida que aumenta Δ para $G > G_c$.

Como el estado de BCS es un vacío de cuasipartículas, $E^{qsp}(|\text{BCS}\rangle) = 0 \forall G$. Sin embargo puede calcularse el entrelazamiento de un cuerpo¹

$$E(|\text{BCS}\rangle) \equiv S^{sp}(|\text{BCS}\rangle) = \text{Tr} h(\rho_{\text{BCS}}^{sp}) = 2 \sum_k h(f_k) \quad (5.28)$$

¹Formalmente está definida para sistemas con número de partículas fijo, sin embargo es posible calcularla incluso en este caso.

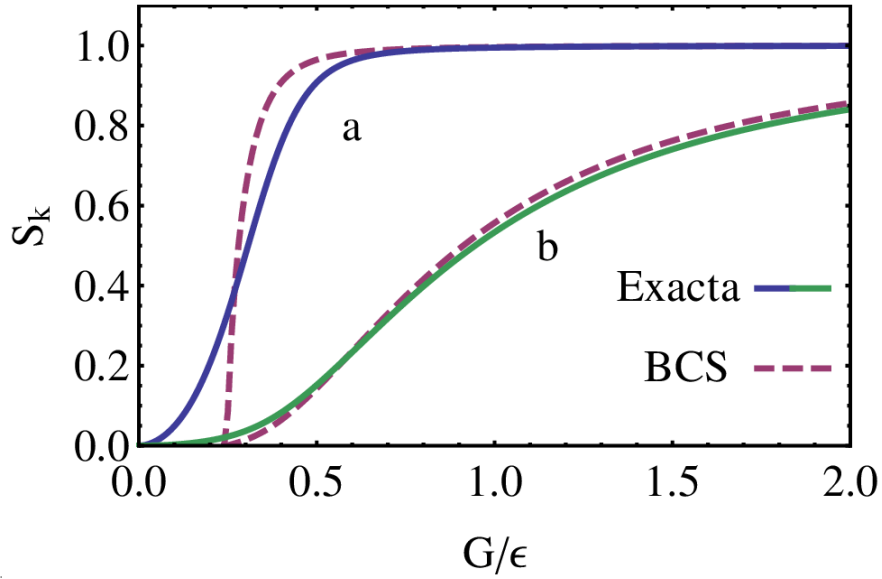


Figura 5.9: La entropía de entrelazamiento $S_k = S(\rho_k) = h(f_k)$ del modo k de SP con el resto del sistema, para el nivel de Fermi ($k = \Omega/2$) (a) y el más distante al nivel de Fermi ($k = 1$) (b), tanto en la solución exacta como en la aproximación BCS.

Esta cantidad se anula para $G < G_c$, pero es finita en la fase superconductor $G > G_c$, donde brinda una muy buena aproximación al valor exacto de S^{sp} (que en el caso exacto coincide con E^{qsp}). Esto puede verse en la Fig. 5.8.

En el límite de interacciones fuertes, se tiene

$$1 = \frac{\Omega G}{2\Delta}, \rightarrow \Delta = \frac{\Omega G}{2}$$

De aquí se obtiene

$$v_k^2 \simeq \frac{1}{2}(1 - e_k/\Delta) \quad (5.29)$$

y consecuentemente

$$E(|\text{BCS}\rangle) \simeq 2\Omega \left(1 - \frac{\sum_k e_k^2}{2\Omega\Delta^2 \ln 2}\right) \quad (5.30)$$

que satura en el límite.

El estado (5.27) resulta ser también una buena aproximación para la entropía de cada modo con el resto. Esto puede verse en la Fig. 5.9.

Al estudiar la entropía (5.7) de la bipartición entre los Ω modos k y los Ω modos \bar{k} , se tiene en la aproximación BCS el resultado destacable que esta cantidad resulta ser la mitad de la entropía de un cuerpo (5.28). Esto se debe a que el estado de BCS

es de la misma forma que (5.2) con $\alpha_\nu = \prod_k v_k^{n_k^\nu} u_k^{1-n_k^\nu}$, con los n_k^ν independientes (a diferencia del estado exacto). Luego el entrelazamiento entre modos con k y \bar{k} se reduce a la entropía de un producto de Ω operadores densidad independientes con autovalores $v_k^2 = f_k$ y $u_k^2 = 1 - f_k$. Entonces

$$E_{\Omega-\bar{\Omega}}(|\text{BCS}\rangle) = \sum_k h(f_k) = \frac{1}{2} E(|\text{BCS}\rangle) \quad (5.31)$$

Este resultado es muy notable, ya que conecta de forma exacta una cantidad como la entropía de un cuerpo, que resulta de considerar observables de un cuerpo, con la entropía distinguible de la bipartición, que es difícil de obtener pero sumamente útil en protocolos de información cuántica.

Para calcular el entrelazamiento entre los modos kk' , se puede usar el teorema de Wick para calcular valores medios generales, como por ejemplo

$$\langle c_k^\dagger c_k c_{k'}^\dagger c_{k'} \rangle = \langle c_k^\dagger c_k \rangle \langle c_{k'}^\dagger c_{k'} \rangle + \langle c_{k'}^\dagger c_{k'} \rangle \langle c_k^\dagger c_k \rangle - \langle c_k^\dagger c_{k'}^\dagger \rangle \langle c_k c_{k'} \rangle$$

con $\langle c_k^\dagger c_{k'}^\dagger \rangle = \langle c_k c_{k'} \rangle = \delta_{k'\bar{k}} u_k v_k$ y $\langle c_k^\dagger c_k \rangle = \delta_{kk'} f_k$. Pueden encontrarse así los términos de la matriz densidad reducida (5.10) en la aproximación BCS, como $\langle n_{k\bar{k}} n_{k'\bar{k}'} \rangle = \langle n_{k\bar{k}} \rangle \langle n_{k'\bar{k}'} \rangle$, $\langle n_{k\bar{k}} \tilde{n}_{k'\bar{k}'} \rangle = \langle n_{k\bar{k}} \rangle \langle \tilde{n}_{k'\bar{k}'} \rangle$ y $\langle \tilde{n}_{k\bar{k}} \tilde{n}_{k'\bar{k}'} \rangle = \langle n_{k\bar{k}} \rangle \langle n_{k'\bar{k}'} \rangle$, con $\langle n_{k\bar{k}} \rangle = v_k^2 = f_k$, $\langle \tilde{n}_{k\bar{k}} \rangle = u_k^2 = 1 - f_k \equiv \tilde{f}_k$ y $\langle c_k^\dagger c_k^\dagger c_{\bar{k}} c_{\bar{k}'} \rangle = u_k v_k u_{k'} v_{k'}$:

$$\rho_{kk'}^{BCS} = \begin{pmatrix} v_k^2 v_{k'}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_k^2 u_{k'}^2 & v_k u_k v_{k'} u_{k'} & 0 \\ 0 & v_k u_k v_{k'} u_{k'} & u_k^2 v_{k'}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_k^2 u_{k'}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_k f_{k'} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_k \tilde{f}_{k'} & \sqrt{f_k \tilde{f}_k f_{k'} \tilde{f}_{k'}} & 0 \\ 0 & \sqrt{f_k \tilde{f}_k f_{k'} \tilde{f}_{k'}} & \tilde{f}_k f_{k'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{f}_k \tilde{f}_{k'} \end{pmatrix} \quad (5.32)$$

Esta matriz tiene solo 3 autovalores no nulos: $v_k^2 v_{k'}^2 (f_k f_{k'})$, $u_k^2 u_{k'}^2 (f_k f_{k'})$ y $v_k^2 v_{k'}^2 + u_k^2 u_{k'}^2 (f_k \tilde{f}_{k'} + \tilde{f}_k f_{k'})$. Con esto se tiene que $C_{kk'} = 0 \quad \forall \Delta$ y $k \neq k'$ y por ende también se anula $E_{kk'}$. Es decir, el entrelazamiento de estos 4 modos no puede describirse en la aproximación BCS. Esto se debe a que el estado reducido puede escribirse como un estado fermiónico Gaussiano.

Sin embargo, BCS brinda buenos resultados en la fase superconductor $G > G_c$ para la información mutua y la discordia, como puede verse en la Fig. 5.10. Mas aun, para $G/(\Omega\varepsilon) \rightarrow \infty$, $u_k^2 = v_k^2 \rightarrow \frac{1}{2} \forall k$, con lo cual se recupera el límite (5.16). Por lo tanto, BCS predice los límites exactos para Ω grande de estas cantidades: $I_{kk'} = \frac{1}{2}$, $S(\rho_{kk'}) = \frac{3}{2}$ y $D_{kk'} = \frac{3}{2} - 3 \frac{\log_2 3}{4}$.

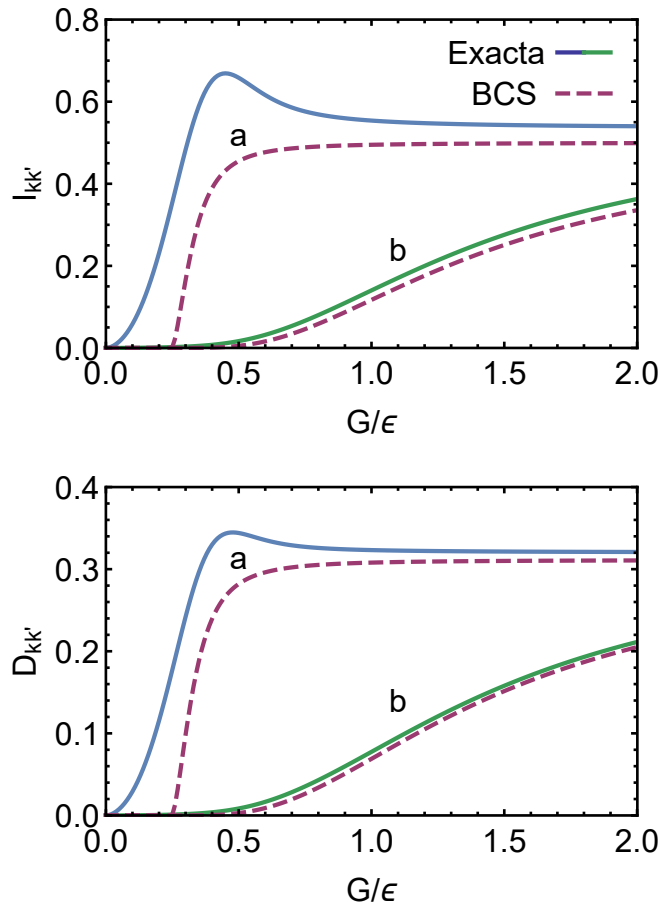


Figura 5.10: La información mutua (5.17) (arriba) y la discordia cuántica (abajo) entre los modos $k\bar{k}$ y $k'\bar{k}'$ para pares más cercanos (a) y más lejanos (b) al nivel de Fermi, calculado de manera exacta y con BCS. Se tiene una contribución significativa de estas cantidades para $G > G_c$.

5.3.2. BCS Proyectoado

Puede usarse el estado de BCS proyectado a un número fijo (par) de partículas:

$$P_N |\text{BCS}\rangle \propto \sum_{\nu} \left(\prod_k v_k^{\nu} u_k^{1-\nu} (c_k^{\dagger} c_k^{\dagger})^{n_k^{\nu}} \right) |0\rangle$$

donde $P_N = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\phi(\hat{N}-N)} d\phi$ es el proyector a un número de partículas fijo N (en el presente caso $N = \Omega$). Es un estado de la misma forma que el estado exacto (5.2) pero con coeficientes α_{ν} determinados por Δ .

Si se proyecta de forma previa a realizar las variación, se puede describir también el sector $G < G_c$, donde las estimaciones de BCS estándar se anulaban para todas las medidas de correlación. Una forma de estudiar esto es tomando los coeficientes u_k y v_k de BCS estándar, y dejar a Δ como parámetro variacional, a determinar por

la minimización del valor medio de la energía proyectada $\langle H \rangle_N = \frac{\langle \text{BCS} | P_N H | \text{BCS} \rangle}{\langle \text{BCS} | P_N | \text{BCS} \rangle}$. El Δ efectivo es positivo $\forall G > 0$ y aumenta con G .

Con este método se predice de forma bastante adecuada la concurrencia $C_{kk'}$ y la entropía de entrelazamiento $E_{kk'}$ del estado reducido $\rho_{k\bar{k}k'\bar{k}'}$, incluyendo el pico para pares $k\bar{k}, k'\bar{k}'$ cercanos al nivel de Fermi. Esto puede verse en el panel superior de la Fig. 5.11. Se reproducen además de forma muy precisa todas las otras cantidades mostradas en las Figs. 5.8, 5.9, 5.10, incluyendo el intervalo $0 < G < G_c$, donde los resultados de BCS estándar son nulos. Si se calcula la diferencia entre la entropía de un cuerpo exacta y de BCS proyectado, se tiene que esta es máxima también en la zona de transición, como se ve en el panel inferior de la Fig. 5.11, corroborando que esta es la zona de mayor complejidad del estado exacto.

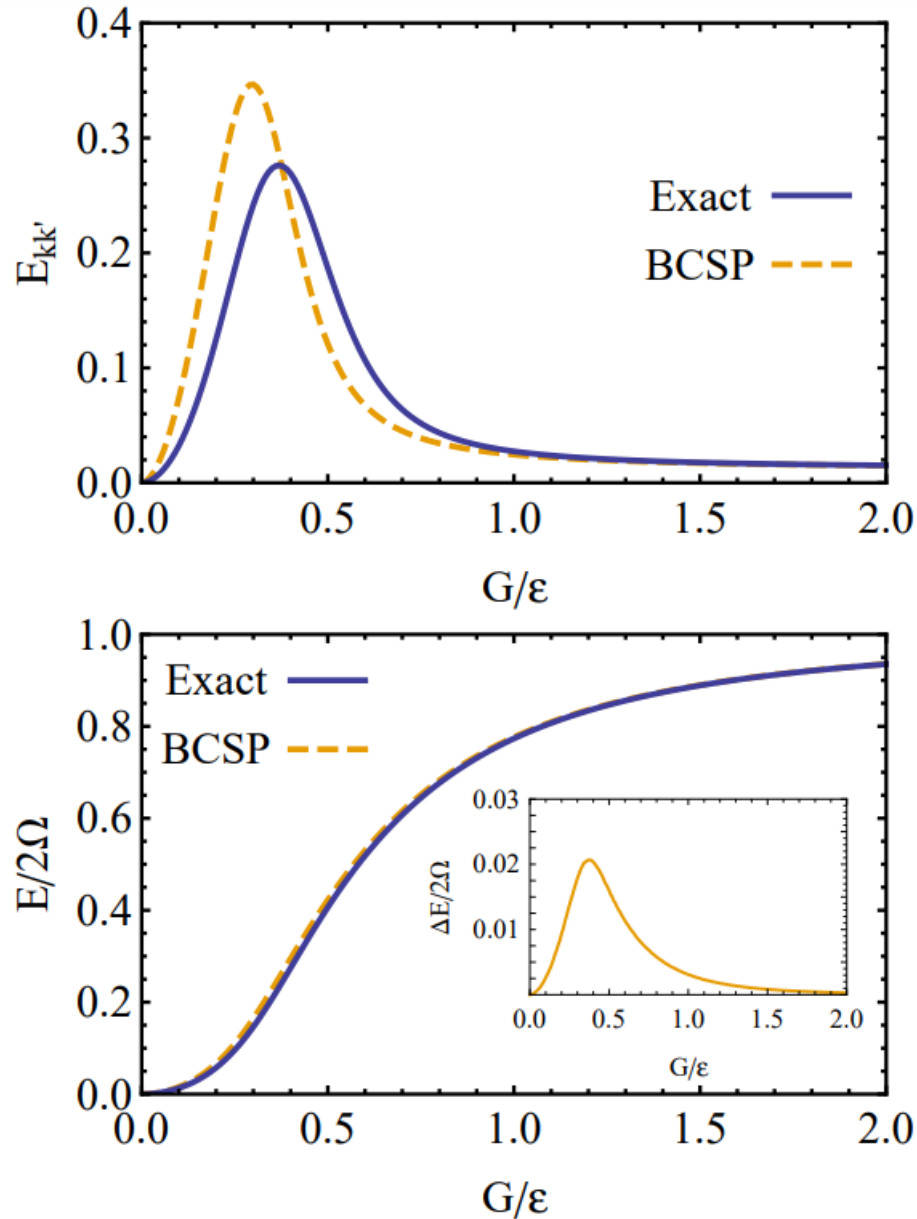


Figura 5.11: Panel superior: Entrelazamiento de formación $E_{kk'}$ entre modos $k\bar{k}$ y $k'\bar{k}'$ para pares más cercanos al nivel de Fermi de acuerdo los resultados exactos y los proyectados de BCS a N fijo. Panel inferior: La entropía de entrelazamiento de un cuerpo correspondiente. El resultado de BCS proyectado es muy similar al exacto para todos los valores de G , aunque la diferencia $\frac{\Delta E}{2\Omega} = \frac{(E_{\text{BCSP}} - E_{\text{exacta}})}{2\Omega}$ ilustrada en el inset es máxima en la región de transición.

Modelo de Lipkin

Análogamente a lo realizado en el capítulo anterior, se examina aquí en detalle el entrelazamiento fermiónico en el estado fundamental del modelo de Lipkin fermiónico y su relación con el entrelazamiento bipartito. Se muestra primero que la entropía de entrelazamiento fermiónica de un cuerpo, que cuantifica la mínima distancia a un estado fermiónico Gaussiano, se comporta de forma similar al parámetro de orden de campo medio y es esencialmente proporcional al entrelazamiento bipartito total entre los modos superiores e inferiores, cantidad que tiene sentido solo en la realización fermiónica del modelo. En segundo lugar, se analiza el entrelazamiento del estado reducido de cuatro modos (2 pares arriba-abajo), mostrando que su concurrencia fermiónica tiene un pico claro en la transición de fase y se comporta de forma diferente al entrelazamiento arriba-abajo correspondiente. Finalmente se muestra que las primeras medidas y el entrelazamiento reducido arriba-abajo pueden ser correctamente descritas mediante una formulación de campo medio con simetrías restauradas, mientras que la concurrencia requiere al menos considerar correlaciones del tipo RPA para poder predecirse correctamente. Se discute también la separabilidad fermiónica. Los resultados de este capítulo dieron lugar al trabajo [2].

6.1. Descripción del sistema

El modelo original de Lipkin [52-54] describe un sistema de fermiones en 2Ω estados de una partícula $|p\pm\rangle$, $p = 1, \dots, \Omega$, con energías $\varepsilon_{p\pm} = \pm\varepsilon/2$, completamente conectados mediante acoplamientos uniformes de dos cuerpos. El Hamiltoniano es

$$\begin{aligned} H = & \frac{1}{2}\varepsilon \sum_p (c_{p+}^\dagger c_{p+} - c_{p-}^\dagger c_{p-}) - W \sum_{p,q} c_{p+}^\dagger c_{q-}^\dagger c_{q+} c_{p-} \\ & - \frac{1}{2}V \sum_{p,q} (c_{p+}^\dagger c_{q+}^\dagger c_{q-} c_{p-} + c_{p-}^\dagger c_{q-}^\dagger c_{q+} c_{p+}), \end{aligned} \quad (6.1)$$

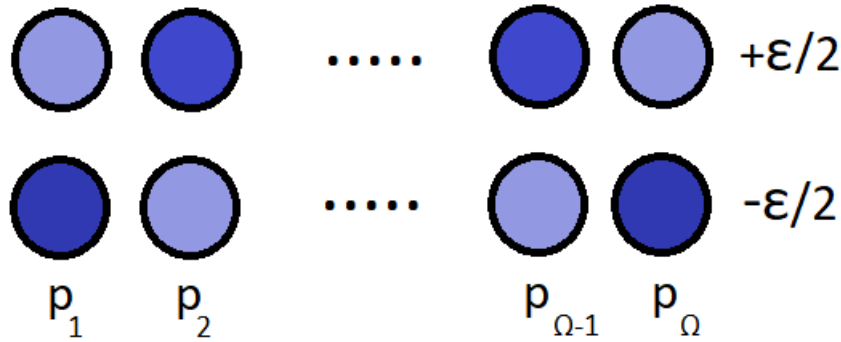


Figura 6.1: Esquema del sistema de Lipkin fermiónico estudiado en el presente capítulo. Se 2Ω estados de una partícula $|p_{\pm}\rangle$, $p = 1, \dots, \Omega$, con energías $\varepsilon_{p_{\pm}} = \pm\varepsilon/2$. Se toma nuevamente el caso semilleno $N = \Omega$. Este sistema tiene simetría de traslación en p .

donde los acoplamientos V crean (y destruyen) pares partícula-hueco sobre el GS sin perturbar,

$$|\Psi_0\rangle = \left(\prod_p c_{p-}^\dagger\right)|0\rangle, \quad (6.2)$$

mientras que los acoplamientos W representan términos de “hopping” entre pares. Un esquema del presente modelo puede apreciarse en la Fig. 6.1.

Como es bien sabido [52-54, 90], este Hamiltoniano, que representa un modelo esquemático simplificado de un sistema con una excitación colectiva, puede ser mapeado a un sistema de espines definiendo los siguientes operadores

$$\begin{aligned} S_{\pm} &= S_x \pm iS_y = \sum_p c_{p\pm}^\dagger c_{p\mp}, \\ S_z &= \frac{1}{2} \sum_p \left(c_{p+}^\dagger c_{p+} - c_{p-}^\dagger c_{p-} \right), \end{aligned} \quad (6.3)$$

que satisfacen de forma exacta las relaciones de conmutación de $SU(2)$:

$$[S_+, S_-] = 2S_z, \quad [S_z, S_{\pm}] = \pm S_{\pm}. \quad (6.4)$$

El Hamiltoniano (6.1) puede entonces ser reescrito como

$$H = \varepsilon S_z - \frac{W}{2}(S_+ S_- + S_- S_+ - N) - \frac{V}{2}(S_+^2 + S_-^2) \quad (6.5)$$

$$= \varepsilon S_z - V_x (S_x^2 + \chi S_y^2) + V_x \frac{1+\chi}{4} N, \quad (6.6)$$

donde $V_x = W + V$, $\chi = \frac{W-V}{W+V}$ y $N = \sum_{p,\mu=\pm} c_{p\mu}^\dagger c_{p\mu}$ es el operador número. Se va a considerar el caso semi-lleño de $N = \Omega$ fermiones, donde el spin total S puede tomar

valores de 0 a $\Omega/2$. Se fija, sin pérdida de generalidad, $|\chi| \leq 1$ (es decir $|V_y| \leq |V_x|$), y se considera el caso atractivo $V_x \geq 0$. Estas dos condiciones implican $W \geq 0$, $V \geq 0$. Es conveniente escalear el acoplamiento como

$$V_x = v_x/(\Omega - 1), \quad (6.7)$$

de forma tal que $\langle H \rangle / \Omega$ se mantenga finito e independiente de Ω para v_x , χ fijos y Ω grande. En la aproximación de campo medio (ver Sec. 6.3) la transición del GS a la fase con ruptura de simetría tiene lugar exactamente en $v_x = \varepsilon \forall \Omega$.

El Hamiltoniano H conmuta obviamente con el spin total $S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$. En el caso atractivo, la energía mínima se alcanza para spin total máximo $S = \Omega/2$, es decir, para el multiplete completamente simétrico. El GS exacto $|\Psi\rangle$ puede obtenerse diagonalizando el Hamiltoniano de spin equivalente (6.6) dentro del subespacio $S = \Omega/2$, de dimensión $\Omega + 1$, que contiene al GS sin perturbar (6.2) y donde hay siempre un solo fermión por sitio p (notar que $[H, n_p] = 0$, con $n_p = \sum_{\mu=\pm} c_{p\mu}^\dagger c_{p\mu}$ el número de fermiones en el sitio p). El GS va a tener entonces la forma

$$|\Psi\rangle = \sum_{K=0}^{\Omega} C_K |K\rangle, \quad (6.8)$$

donde K denota el número de fermiones en el nivel superior y $|K\rangle \equiv |S = \Omega/2, S_z = K - \Omega/2\rangle \propto S_+^K |\Psi_0\rangle$ son los autoestados de S_z para spin total máximo $S = \Omega/2$. Todos los coeficientes C_K serán reales y del mismo signo si $V > 0$.

Además, H conmuta también con la *paridad de S_z* :

$$[H, P_z] = 0, \quad P_z = \exp[i\pi(S_z + \Omega/2)]. \quad (6.9)$$

Para $N = \Omega$, P_z es equivalente a la paridad del número de fermiones en el nivel superior: $P_z = \exp\left[i\pi \sum_p c_{p+}^\dagger c_{p+}\right]$. Esto implica que para cualquier GS no degenerado, la suma (6.8) será sobre valores pares o impares de K , de acuerdo a la paridad del GS $P_z = \pm 1$. Esta simetría tendrá una influencia profunda en las medidas de entrelazamiento fermiónico.

En el caso isotrópico $\chi = 1$ ($V = 0$), el Hamiltoniano (6.6) conmuta también con S_z , con lo cual la suma en (6.8) se reduce a un solo término. En este caso las autoenergías exactas para $N = \Omega$ y $\chi = 1$ se convierten, usando la Ec. (6.6), en

$$E_{SK} = \varepsilon(K - \frac{\Omega}{2}) - V_x[S(S+1) - (K - \frac{\Omega}{2})^2 - \frac{\Omega}{2}], \quad (6.10)$$

con $S \leq \Omega/2$ y $\frac{\Omega}{2} - S \leq K \leq \frac{\Omega}{2} + S$. Se verifica entonces que para $V_x > 0$, el GS se obtiene del máximo spin S , con K comenzando de 0 para $V_x = 0$ y llegando a $[\Omega/2]$

para V_x grande. Luego, el GS para $\chi = 1$ atraviesa $[\Omega/2]$ transiciones $K \rightarrow K + 1$ a medida que V_x aumenta desde 0, en los acoplamientos

$$V_x^K = \frac{\varepsilon}{\Omega - 1 - 2K}, \quad K = 0, \dots, [\frac{\Omega}{2}] - 1, \quad (6.11)$$

con $v_x^0 = V_x^0/(\Omega - 1) = \varepsilon$ coincidente con el valor crítico de campo medio. Para $\chi \in (0, 1)$ ($0 < V < W$) y Ω finito, estas transiciones se convertirán en $[\Omega/2]$ transiciones de paridad P_z . Por otro lado, si $\chi \in [-1, 0]$ ($V \geq W$), el GS exacto tendrá paridad $P_z = +1 \forall V_x > 0$, a causa del rol predominante del acoplamiento V .

6.2. Resultados exactos

6.2.1. Entropía de un cuerpo

Se comienza evaluando la entropía de entrelazamiento de un cuerpo (4.4). Debido a la conservación de número fermiónico en cada sitio n_p , los elementos de la matriz densidad de un cuerpo ρ^{sp} en un estado de la forma (6.8) satisfacen $\langle c_{p\mu}^\dagger c_{q\nu} \rangle = \delta_{pq} \langle c_{p\mu}^\dagger c_{p\nu} \rangle$. Debido a la invarianza traslacional sobre los estados p , forman Ω bloques idénticos

$$\rho_p^{\text{sp}} = \begin{pmatrix} \langle c_{p+}^\dagger c_{p+} \rangle & \langle c_{p-}^\dagger c_{p+} \rangle \\ \langle c_{p+}^\dagger c_{p-} \rangle & \langle c_{p-}^\dagger c_{p-} \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_+ & 0 \\ 0 & f_- \end{pmatrix}, \quad (6.12)$$

donde $\langle c_{p\pm}^\dagger c_{p\mp} \rangle = \langle S_\pm \rangle / \Omega = 0$ debido a la conservación de P_z y $f_\pm = (\frac{1}{2} \pm \langle S_z \rangle / \Omega)$, es decir $f_+ = \langle K \rangle / \Omega = 1 - f_-$ con $\langle K \rangle = \sum_K C_K^2 K$. La entropía de un cuerpo $S^{\text{sp}}(|\Psi\rangle)$ se convierte entonces en

$$S^{\text{sp}}(|\Psi\rangle) = \Omega[h(f_+) + h(f_-)] = -2\Omega(f_+ \log_2 f_+ + f_- \log_2 f_-). \quad (6.13)$$

Queda pues determinada solo por $\langle S_z \rangle$, anulándose solo si $|\langle S_z \rangle| = \Omega/2$. Esto muestra que *cualquier* estado (6.8) con *paridad definida* P_z no es un DS a menos que $C_K = \delta_{K0}$ o $\delta_{K\Omega}$. Esto incluye en particular estados $|K\rangle$ (GS para $\chi = 1$), donde $f_+ = K/\Omega \equiv k$ y

$$S_K^{\text{sp}} \equiv S^{\text{sp}}(|K\rangle) = -2\Omega[k \log_2 k + (1 - k) \log_2 (1 - k)], \quad (6.14)$$

es positiva para $1 \leq K \leq \Omega - 1$, reflejando el hecho de que son excitaciones colectivas generadas por S_+ y por tanto no son DSs. La Ec. (6.13) es simplemente 2Ω veces la entropía de entrelazamiento del spin individual (es decir el entrelazamiento del spin i con el resto del sistema) en la representación de spin, donde el bloque (6.12) representa la matriz densidad reducida de cada spin.

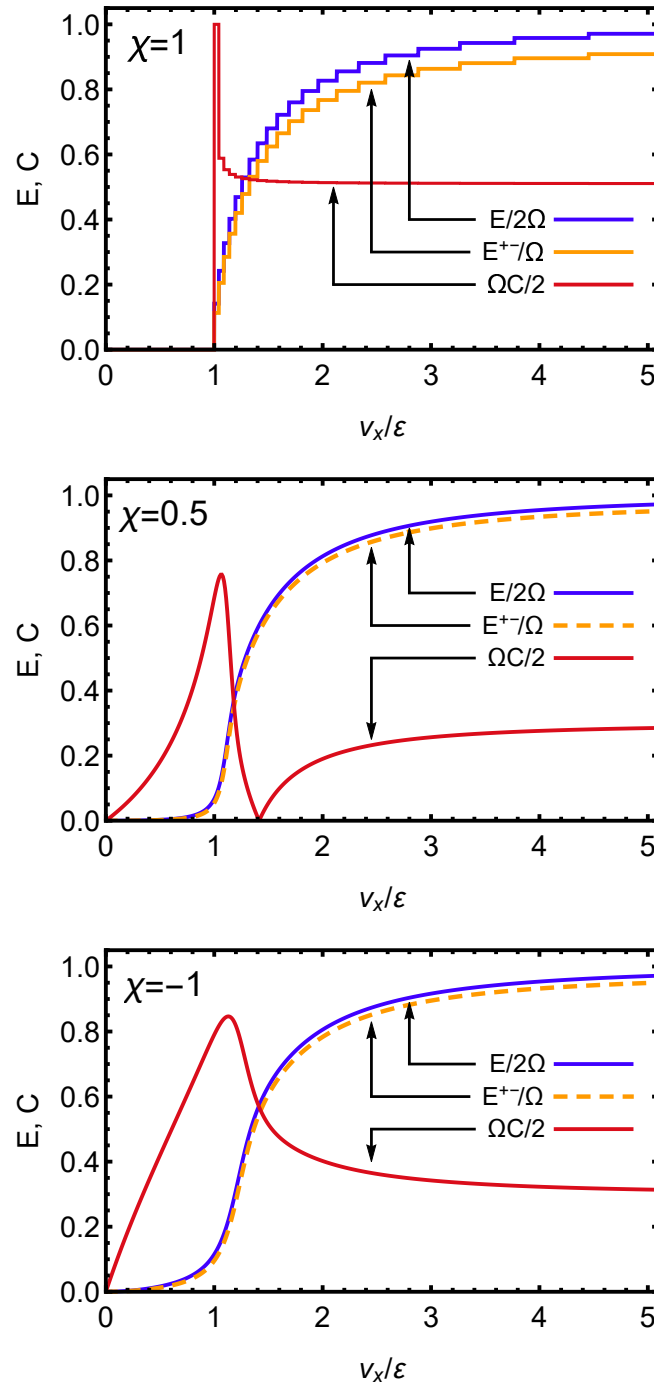


Figura 6.2: La entropía intensiva de un cuerpo $S^{sp}/(2\Omega)$, con $E \equiv S^{sp}$ en el gráfico, obtenida de la Ec. (6.13), junto con la entropía de entrelazamiento arriba-abajo E^{+-}/Ω y la concurrencia fermiónica escaleada $\Omega C/2$, en el GS del Hamiltoniano (6.1)–(6.6) como función de los acoplamientos relativos v_x/ϵ , para tres anisotropías χ diferentes y $\Omega = 50$ fermiones.

El comportamiento de la entropía de un cuerpo (6.13) como función de v_x/ε se muestra en la Fig. 6.2 para $\Omega = 50$ y diferentes anisotropías χ , junto con otras medidas de entrelazamiento discutidas debajo. Se hace significativa para $v_x > \varepsilon$, es decir en el régimen de acoplamiento fuerte donde el GS de campo medio exhibe ruptura de simetría de paridad de S_z (ver Sec. 6.3), aumentando monótonamente con el acoplamiento v_x/ε y saturando para $v_x/\varepsilon \rightarrow \infty$. Además, es casi independiente de χ , excepto por las transiciones visibles en el caso $\chi = 1$, que reflejan las transiciones de S_z del tipo $K \rightarrow K + 1$ (los escalones debido a las transiciones de paridad P_z en $\chi = 0,5$ son demasiado pequeños en la escala mostrada y no son apreciables). La descripción analítica de E para Ω grande se describe en la Sec. 6.3.

6.2.2. Entropía de entrelazamiento arriba-abajo

La versión fermiónica del modelo permite considerar una bipartición donde Alice tiene acceso a los Ω niveles inferiores y Bob a los Ω superiores, lo cual no tiene analogía física en el modelo de spines. Esta partición cobra sentido solo en el caso fermiónico, y el entrelazamiento resultante puede considerarse un recurso físico (es un entrelazamiento bipartito de modos). Es importante remarcar también que debido a la paridad P_z definida del GS, cada lado va a contener estados fermiónicos con paridad de número definida ($P_{N_{\pm}} = P_z (\pm P_z)$ para Ω par (impar)), implicando que combinaciones lineales arbitrarias de los estados locales involucrados no romperán la regla de superselección de paridad [20, 91].

Para calcular este entrelazamiento de forma exacta, conviene notar en primer lugar que cada estado $|K\rangle$ puede escribirse explícitamente como una suma de $\binom{\Omega}{K}$ DSs ortogonales con igual peso, cada uno con K fermiones arriba y $\Omega - K$ fermiones abajo en distintos sitios,

$$|K\rangle = \frac{1}{\sqrt{\binom{\Omega}{K}}} \sum_{\alpha} \left(\prod_p (c_{p+}^{\dagger} c_{p-})^{n_{p\alpha}} \right) |\Psi_0\rangle, \quad (6.15)$$

donde $n_{p\alpha} = 0, 1$, $\sum_p n_{p\alpha} = K$ y $\alpha = 1, \dots, \binom{\Omega}{K}$. Como todos los términos en la suma previa involucran estados ortogonales diferentes en cada lado, la Ec. (6.15) constituye la descomposición de Schmidt [6] para la partición arriba-abajo. Luego, la entropía de entrelazamiento arriba-abajo de los estados $|K\rangle$ es

$$E_K^{+-} = \log_2 \binom{\Omega}{K}. \quad (6.16)$$

Usando la Ec. (6.15), la entropía de entrelazamiento arriba abajo determinada por el GS exacto (6.8) es entonces

$$E^{+-} = \sum_K C_K^2 [\log_2 \left(\frac{\Omega}{K}\right) - \log_2 C_K^2], \quad (6.17)$$

donde la primera suma en (6.17) representa el entrelazamiento promedio que emerge de los estados $|K\rangle$ y la segunda emerge de la distribución sobre estos estados. Mientras que E^{+-} no requiere en principio un GS correlacionado (puede ser distinto de cero en un DS, ver Sec. 6.3, aunque en este caso no habrá paridad local definida), es aquí esencialmente *la mitad* de la entropía de un cuerpo (6.13) para Ω suficientemente grande: en los estados $|K\rangle$, una expansión de (6.16) para Ω y K grandes, con $k = K/\Omega$ finito, conduce a

$$\begin{aligned} E_K^{+-} &\approx -\Omega[k \log_2 k + (1-k) \log_2(1-k)] - \log_2 \sqrt{2\pi\Omega k(1-k)} \\ &= S_K^{sp}/2 + O(\log_2 \Omega). \end{aligned} \quad (6.18)$$

Una relación similar $E^\pm \approx S^{sp}/2$ es válida para Ω grande en un GS de paridad definida (6.8) (ver Sec. 6.3). Este resultado indica una marcada correlación entre el entrelazamiento fermiónico medido por $S^{sp}(|\Psi\rangle)$ y el entrelazamiento bipartito de modos arriba-abajo en el GS exacto de paridad definida. Esto permite obtener una estimación de este último, que puede ser considerado un recurso cuántico, a través de un promedio de un cuerpo fácilmente accesible ($\langle S_z \rangle$). Este resultado es análogo al del sistema superconductor. En la Fig. 6.2 se muestra también el comportamiento de E^{+-} en función de v_x/ε .

6.2.3. Entrelazamiento de estados reducidos

Se examinará a continuación el entrelazamiento arriba-abajo de los estados reducidos ρ_{pq} de cuatro estados $p_\pm, q_\pm, p \neq q$, que son estados mixtos para $\Omega > 2$. En primer lugar, como $n_p = 1$, puede notarse que el estado reducido ρ_p de un solo par de modos p_\pm (representado en principio por una matriz de 4×4 en la base $\{|0\rangle, c_{p+}^\dagger|0\rangle, c_{p-}^\dagger|0\rangle, c_{p+}^\dagger c_{p-}^\dagger|0\rangle\}$) contiene aquí solo un bloque diagonal ρ_p de 2×2 idéntico con la Ec. (6.12) en la base restringida $\{c_{p+}^\dagger|0\rangle, c_{p-}^\dagger|0\rangle\}$:

$$\rho_p = \begin{pmatrix} \langle c_{p+}^\dagger c_{p+} c_{p-} c_{p-}^\dagger \rangle & \langle c_{p-}^\dagger c_{p+} \rangle \\ \langle c_{p+}^\dagger c_{p-} \rangle & \langle c_{p+} c_{p+}^\dagger c_{p-}^\dagger c_{p-} \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_+ & 0 \\ 0 & f_- \end{pmatrix}. \quad (6.19)$$

Este estado no tiene obviamente entrelazamiento fermiónico, en el sentido de que es solo una mezcla estadística de estados de un fermión: $\rho_p = \sum_{\nu=\pm} f_\nu c_{p\nu}^\dagger|0\rangle\langle 0|c_{p\nu}$.

Además, tampoco tiene entrelazamiento arriba-abajo, ya que la conservación de P_z implica $\langle c_{p\pm}^\dagger c_{p\mp} \rangle = 0$, impidiendo coherencia entre los dos estados de un fermión (es decir, términos $\propto c_{p+}^\dagger |0\rangle \langle 0| c_{p-}$). Luego, si Alice y Bob tienen acceso solo a un modo p ($p-$ para Alice, $p+$ para Bob) el estado conjunto ρ_p contiene solo correlaciones clásicas (es equivalente al estado mezcla de dos qubits $f_- |01\rangle \langle 01| + f_+ |10\rangle \langle 10|$, con $|01\rangle = c_{p-}^\dagger |0\rangle$, $|10\rangle = c_{p+}^\dagger |0\rangle$).

La situación cambia cuando Alice y Bob o tienen acceso a dos estados diferentes $p \neq q$ ($p-, q-$ para Alice, $p+, q+$ para Bob). Como el número n_p de fermiones por sitio p es 1, la base en la cual se escribe ρ_{pq} (en principio una matriz de 16×16) involucra únicamente los cuatro estados de dos fermiones $\{c_{p+}^\dagger c_{q+}^\dagger |0\rangle, c_{p+}^\dagger c_{q-}^\dagger |0\rangle, c_{p-}^\dagger c_{q+}^\dagger |0\rangle, c_{p-}^\dagger c_{q-}^\dagger |0\rangle\}$ (ver Fig. 6.3). En esta base restringida, se tiene

$$\rho_{pq} = \begin{pmatrix} \langle n_{p+} n_{q+} \rangle & 0 & 0 & \langle s_{p-} s_{q-} \rangle \\ 0 & \langle n_{p+} n_{q-} \rangle & \langle s_{p-} s_{q+} \rangle & 0 \\ 0 & \langle s_{p+} s_{q-} \rangle & \langle n_{p-} n_{q+} \rangle & 0 \\ \langle s_{p+} s_{q+} \rangle & 0 & 0 & \langle n_{p-} n_{q-} \rangle \end{pmatrix} \quad (6.20)$$

donde $n_{p\pm} = c_{p\pm}^\dagger c_{p\pm}$ y $s_{p\pm} = c_{p\pm}^\dagger c_{p\mp}$. En el GS (6.8), sus elementos son independientes de p, q y pueden ser exactamente evaluados en términos de promedios globales:

$$\langle s_{p\pm} s_{q\pm} \rangle = \frac{\langle S_\pm^2 \rangle}{\Omega(\Omega - 1)}, \quad (6.21)$$

$$\langle s_{p\pm} s_{q\mp} \rangle = \frac{\Omega^2/4 - \langle S_z^2 \rangle}{\Omega(\Omega - 1)} = \langle n_{p\pm} n_{q\mp} \rangle, \quad (6.22)$$

$$\langle n_{p\pm} n_{q\pm} \rangle = \left(\frac{1}{4} \pm \frac{\langle S_z \rangle}{\Omega} + \frac{\langle S_z^2 \rangle - \Omega/4}{\Omega(\Omega - 1)} \right). \quad (6.23)$$

Como se ha hecho en el capítulo anterior, el entrelazamiento fermiónico de estados mixtos, que indica la desviación del estado respecto de una mezcla estadística de DSs, puede ser medida a través de la concurrencia fermiónica (4.24), que toma la forma aquí de

$$C = 2 \text{Max} [|\langle s_{p+} s_{q+} \rangle| - \langle n_{p+} n_{p-} \rangle, |\langle s_{p+} s_{q-} \rangle| - \sqrt{\langle n_{p+} n_{q+} \rangle \langle n_{p-} n_{q-} \rangle}, 0]. \quad (6.24)$$

Esta concurrencia resulta equivalente a la del sistema de dos qubits, coincidiendo con la de un par de espines en el sistema de spin [92-94] (es decir, con aquella que mide el entrelazamiento bipartito entre los estados $p\pm$ y $q\pm$). Puede ser considerado como “paralelo” (“antiparalelo”) si el primer (segundo) término en (6.24) es positivo,

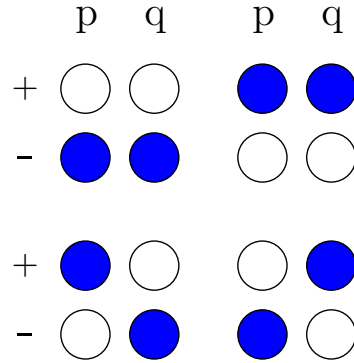


Figura 6.3: Las ocupaciones posibles de estados con cuatro modos p_{\pm} , q_{\pm} en el GS del Hamiltoniano (6.1). El estado reducido (6.20) contiene coherencias entre los dos estados de arriba y, separadamente, los dos estados de abajo, que llevan a una concurrencia fermiónica no nula y a entrelazamiento arriba-abajo.

y escala como Ω^{-1} [92, 94]. Como puede verse en la Fig. 6.2, el comportamiento de la concurrencia difiere significativamente del mostrado por las medidas de entrelazamiento previas. Al igual que en el sistema superconductor, esta tiene aquí también un pico en $v_x \approx \varepsilon$, es decir al iniciarse la fase con ruptura de simetría de campo medio, y se ve fuertemente afectada por la anisotropía.

Para $\chi = 1$, los GS exactos son estados $|K\rangle$ y la concurrencia es solo del tipo antiparalelo, ya que $\langle S_{\pm}^2 \rangle = 0$. Utilizando (6.24), viene dada como función de K por

$$C_K = \frac{2}{\Omega} \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{\Omega-1}{K(\Omega-K)}}}, \quad 1 \leq K \leq \Omega - 1. \quad (6.25)$$

anulándose para $K = 0$ y $K = \Omega$, y verificando $C_K = C_{\Omega-K}$. Tiene un pico definido en $K = 1$ (y en $K = \Omega - 1$), con $C_1 = 2/\Omega$ (el máximo valor posible en este modelo [94]), cayendo significativamente para $K = 2$ ($C_2/C_1 \approx 2 - \sqrt{2} \approx 0,586$ para Ω grande) y alcanzando un mínimo en $K = \Omega/2$ ($C_{\Omega/2} = \frac{1}{\Omega-1}$). Una comparación explícita entre la concurrencia C_K y las entropías de entrelazamiento S_K^{sp} y E_K^{+-} puede verse en la Fig. 6.4.

La concurrencia tiene también un pico en $v_x \approx \varepsilon$ para otras anisotropías. Estos picos aumentan su ancho cuando χ decrece, como puede verse en la Fig. 6.2. Además, para $\chi \in (0, 1)$ (panel central) se anula en el *punto de separabilidad*

$$v_x = \varepsilon / \sqrt{\chi}, \quad (6.26)$$

(ver Apéndice B.2) donde el GS cambia de antiparalelo a paralelo [95, 96] y existe un GS exacto separable. Este punto corresponde a la primera transición de paridad

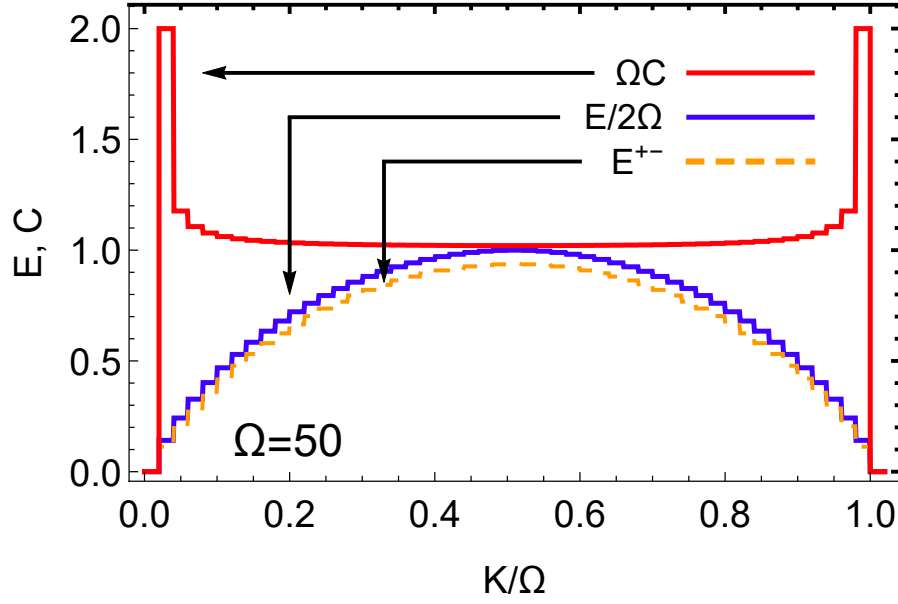


Figura 6.4: Medidas de entrelazamiento fermiónico en los estados $|K\rangle$ para $\Omega = 50$ fermiones ($|K\rangle = |S = \frac{\Omega}{2}, M = K - \frac{\Omega}{2}\rangle$). Aquí $E \equiv S^{sp}$ es la entropía de entrelazamiento de un cuerpo (6.14), E^{+-} la entropía de entrelazamiento arriba-abajo (6.16) y C la concurrencia (6.25).

P_z del GS, y en el mismo el GS es doblemente degenerado, siendo el subespacio fundamental generado por dos DSs no ortogonales de paridad opuesta (ver Sec. 6.3). Para $\chi < 0$, desaparece el punto de separabilidad del GS y C es positivo y paralelo $\forall v_x > 0$.

La concurrencia fermiónica no nula del estado reducido ρ_{pq} asegura la presencia de entrelazamiento bipartito no nulo para *cualquier* bipartición del espacio de SP 4-dimensional [1]. En particular, ρ_{pq} presenta entrelazamiento de modos arriba-abajo no nulo, que puede ser cuantificado a través de la negatividad pertinente [68, 69, 97]. Esta partición involucra cuatro estados distintos a cada lado: $|0\rangle$, $c_{p-}^\dagger c_{q-}^\dagger |0\rangle$, $c_{p-}^\dagger |0\rangle$ y $c_{q-}^\dagger |0\rangle$ para Alice y estados similares en los modos de arriba para Bob (Fig. 6.3), lo que equivale a un sistema de dos qudits con $d = 4$. La simetría de P_z implica que solo estados con la misma paridad local de número fermiónico están conectados en ρ_{pq} , implicando que la transposición parcial no va a mezclar estados con diferente paridad de número, siendo entonces posible aplicar las fórmulas estándar [97]. La negatividad resultante es simplemente la suma de los dos autovalores negativos de la matriz parcialmente transpuesta, con un signo menos:

$$\mathcal{N}^{+-} = |\langle s_{p+} s_{q+} \rangle| + |\langle s_{p+} s_{q-} \rangle|. \quad (6.27)$$

Como puede verse en la Fig. 6.5 (panel inferior), el comportamiento de esta can-

tidad recuerda el de las entropías globales S^{sp} y E^{+-} , aumentando monótonamente con v_x/ε . Si bien es débilmente dependiente de χ para $\chi < 1$, se reduce a la mitad para $\chi \rightarrow 1$: Para el estado $|K\rangle$, el primer término de (6.27) se anula y la Ec. (6.22) lleva a ($k = K/\Omega$)

$$\mathcal{N}_K^{+-} = \frac{\Omega}{\Omega - 1} k(1 - k), \quad (6.28)$$

tendiendo a $\frac{1}{4}\frac{\Omega}{\Omega-1}$ para $v_x/\varepsilon \rightarrow \infty$. Sin embargo, para $\chi < 1$, ambos términos de (6.27) contribuyen y la negatividad correspondiente como función de v_x/ε es esencialmente el doble de la obtenida para $\chi = 1$, como se ve en la Fig. 6.5 (ver Sec. 6.3).

En el caso trivial de $\Omega = 2$, ρ_{pq} es puro ($\rho_{pq} = |\Psi\rangle\langle\Psi|$) y *todas* las cantidades previas se hacen *equivalentes*: $C = 2\mathcal{N}^{+-} = 2\sqrt{f_+(1-f_+)}$, y $E = 4E^{+-} = 4h(f_+)$, con $f_+ = |\beta|^2$ para un GS con $P_z = +1$

$$|\Psi_+\rangle = \alpha|K=0\rangle + \beta|K=2\rangle = (\alpha c_{p-}^\dagger c_{q-}^\dagger + \beta c_{p+}^\dagger c_{q+}^\dagger)|0\rangle$$

($|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$), y $f_+ = 1/2$ para un GS con $P_z = -1$,

$$|\Psi_-\rangle = |K=1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_{p+}^\dagger c_{q-}^\dagger + c_{p-}^\dagger c_{q+}^\dagger)|0\rangle$$

donde todas las cantidades previas son máximas.

6.3. Descripción aproximada

A continuación, se evalúan las cantidades previas mediante métodos aproximados, con el objetivo de identificar los orígenes de los resultados exactos y obtener descripciones analíticas exactas en el límite termodinámico $\Omega \rightarrow \infty$.

6.3.1. Aproximación de campo medio

La primera aproximación básica para describir el presente sistema es la de campo medio (Mean Field: MF) o Hartree-Fock (HF), en la que el GS se aproxima por un DS. En este caso este es de la forma

$$|\Psi_{\text{mf}}\rangle = e^{-i\theta\mathbf{n}\cdot\mathbf{S}}|\Psi_0\rangle = \prod_p c_{p-}^\dagger|0\rangle, \quad (6.29)$$

con $\mathbf{S} = (S_x, S_y, S_z)$, $c_{p\pm}^\dagger = e^{-i\theta\mathbf{n}\cdot\mathbf{S}}c_{p\pm}^\dagger e^{i\theta\mathbf{n}\cdot\mathbf{S}}$ los operadores fermiónicos rotados y \mathbf{n} un vector de norma 1. Tanto θ como \mathbf{n} son obtenidos a partir de la minimización de

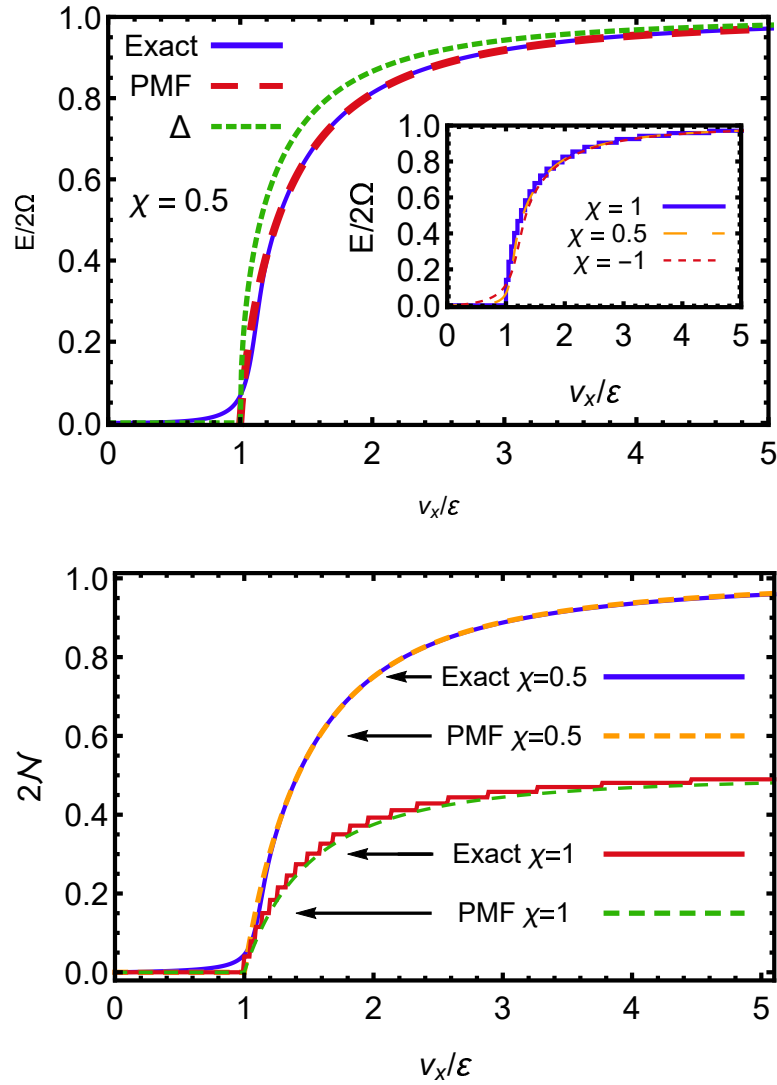


Figura 6.5: Panel superior: comparación entre la entropía de entrelazamiento de un cuerpo exacta $E \equiv S^{sp}$ y el valor obtenido con la aproximación de campo medio mediante proyección de paridad de S_z (PMF), Ec. (6.35), para $\chi = 0,5$ y $\Omega = 50$ fermiones. Se grafica también el parámetro de orden de campo medio $\Delta = 2|\langle s_x \rangle|_{\text{mf}} = \sin \theta$. En el panel interno se grafica el resultado exacto para distintos valores de χ , mostrando la débil dependencia con la anisotropía. Panel inferior: La negatividad arriba-abajo exacta en el estado reducido ρ_{pq} , Ec. (6.27), para $\chi = 0,5$ y $\chi = 1$ (Ec. 6.28), junto con los resultados de campo medio obtenidos mediante proyección de paridad P_z ($\chi = 0,5$) y S_z ($\chi = 1$), es decir las Ecs. (6.39)–(6.40), que coinciden prácticamente con las exactas.

la energía media, que por medio del teorema de Wick puede expresarse como

$$\langle \Psi_{\text{mf}} | H | \Psi_{\text{mf}} \rangle = \Omega [\varepsilon \langle s_z \rangle - v_x (\langle s_x \rangle^2 + \chi \langle s_y \rangle^2)], \quad (6.30)$$

donde $s_\mu = S_\mu / \Omega$. Para $|\chi| < 1$ y $v_x > 0$, el mínimo va a ser obtenido para $\langle \mathbf{s} \rangle$ en el plano x, z (es decir $\mathbf{n} \cdot \mathbf{S} = S_y$), lo que conduce a $\langle \mathbf{s} \rangle = -\frac{1}{2}(\sin \theta, 0, \cos \theta)$ y

$$c'_{p\pm}{}^\dagger = \cos \frac{\theta}{2} c_{p\pm}^\dagger \pm \sin \frac{\theta}{2} c_{p\mp}^\dagger. \quad (6.31)$$

El ángulo θ que minimiza (6.30) es tal que

$$\cos \theta = \begin{cases} 1, & 0 \leq v_x \leq \varepsilon \\ \varepsilon / v_x, & v_x > \varepsilon \end{cases}. \quad (6.32)$$

Por lo tanto, se obtiene la fase normal $\theta = 0$ para acoplamiento débil $0 \leq v_x \leq \varepsilon$, y la *fase con ruptura de paridad de S_z* para acoplamiento fuerte $v_x > \varepsilon$, en la que $|\theta| \in (0, \pi/2)$ (y por tanto $\Delta \equiv 2|\langle s_x \rangle| = \sin \theta > 0$). En este último caso, el signo de θ es arbitrario, lo que conduce a una degeneración doble del GS de MF (para $\chi = 1$, esta degeneración se hace continua, ya que la orientación de $\langle \mathbf{s} \rangle$ en el plano xy se hace arbitraria). Notar que θ es independiente de χ (para $|\chi| \leq 1$).

En cualquier DS se anulan tanto la concurrencia como la entropía de entrelazamiento de un cuerpo fermiónica. En particular, la matriz densidad de un cuerpo $\rho_{\text{mf}}^{\text{sp}}(\theta)$ determinada por (6.29) consiste en Ω bloques idénticos

$$\rho_p^{\text{sp}}(\theta) = \begin{pmatrix} \langle c_{p+}^\dagger c_{p+} \rangle & \langle c_{p-}^\dagger c_{p+} \rangle \\ \langle c_{p+}^\dagger c_{p-} \rangle & \langle c_{p-}^\dagger c_{p-} \rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & 1 + \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (6.33)$$

cuyos autovalores son obviamente 1 y 0 (y es diagonalizada por los operadores $c'_{p\pm}{}^\dagger$).

Sin embargo, es posible extraer una entropía de entrelazamiento de un cuerpo efectiva de MF, considerando solo los términos diagonales en (6.33), ya que los términos fuera de la diagonal exactos se anulan debido a la simetría de paridad de S_z . Esto puede justificarse a través de una restauración de simetría, es decir de paridad de S_z (ver siguiente subsección), lo que conduce en primera aproximación a la matriz densidad de un cuerpo $(\rho_{\text{mf}}^{\text{sp}}(\theta) + \rho_{\text{mf}}^{\text{sp}}(-\theta))/2$, compuesta por bloques diagonales:

$$\frac{1}{2}(\rho_p^{\text{sp}}(\theta) + \rho_p^{\text{sp}}(-\theta)) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - \cos \theta & 0 \\ 0 & 1 + \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (6.34)$$

La entropía de entrelazamiento de un cuerpo resultante se convierte en

$$S_{\text{mf}}^{\text{sp}} = -2\Omega \sum_{\nu=\pm} \frac{1 + \nu \cos \theta}{2} \log_2 \frac{1 + \nu \cos \theta}{2}, \quad (6.35)$$

con $\cos \theta$ dado por (6.32), siendo > 0 para $\theta \in (0, \pi)$ ($v_x > \varepsilon$), saturando para $v_x/\varepsilon \rightarrow \infty$ ($\theta \rightarrow \pi/2$, $S^{sp} \rightarrow 2\Omega$).

Como puede verse en el panel superior de la Fig. 6.5, las Ecs. (6.32)–(6.35) dan una estimación excelente de la entropía de un cuerpo exacta $E \equiv S^{sp} \forall v_x > \varepsilon$ si Ω es no muy pequeño, haciéndose exacta para $\Omega \rightarrow \infty$. Como se ha mencionado previamente y se muestra en el panel interno, la S^{sp} exacta exhibe solo una débil dependencia con la anisotropía χ . Para $\chi \rightarrow 1$ y Ω grande, la Ec. (6.11) exacta implica $\langle s_z \rangle \approx K/\Omega - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\varepsilon/v_x$ más términos $O(\Omega^{-1})$, que es el resultado de MF $\langle s_z \rangle = -\frac{1}{2} \cos \theta$, con la Ec. (6.14) tornándose idéntica a (6.35) ($k = \frac{1}{2}(1 - \varepsilon/v_x)$). Luego, MF es capaz de brindar, mediante una simple proyección a buena paridad de S_z (extracción de términos diagonales) el resultado exacto de la entropía de un cuerpo $E/(2\Omega)$ para Ω grande.

Además, la entropía de entrelazamiento arriba-abajo determinada por el estado de MF (6.29) es no nula: Este estado puede escribirse en la forma (6.8) con coeficientes

$$C_K(\theta) = \sqrt{\left(\frac{\Omega}{K}\right)} \cos^{\Omega-K} \frac{\theta}{2} \sin^K \frac{\theta}{2}, \quad (6.36)$$

para $\mathbf{n} \cdot \mathbf{S} = S_y$. La Ec. (6.17) conduce a

$$E_{\pm}^{+-} = -\Omega \sum_{\nu=\pm} \frac{1 + \nu \cos \theta}{2} \log_2 \frac{1 + \nu \cos \theta}{2} = S_{\text{mf}}^{\text{sp}}/2 \quad (6.37)$$

que coincide con la tendencia exacta para Ω grande y provee una buena aproximación en este límite. El resultado (6.37) es también obvio, ya que las ocupaciones arriba o abajo en cada sitio p del estado de MF (6.29) son independientes de los otros sitios. Luego, el resultado de MF (6.37) es el de Ω sistemas independientes de 2 qubits en un estado puro entrelazado $c'_{p-}^{\dagger}|0\rangle = \cos \frac{\theta}{2}|01\rangle + \sin \frac{\theta}{2}|10\rangle$, donde $|01\rangle \equiv c'_{p-}^{\dagger}|0\rangle$, $|10\rangle \equiv c'_{p+}^{\dagger}|0\rangle$, que es el estado reducido del sitio p a nivel de MF.

Vale la pena notar, sin embargo, que el entrelazamiento arriba-abajo de un solo sitio p es un efecto de MF emergente de la ruptura de paridad de S_z . Como se ha visto en (6.19), el estado reducido de un sitio p derivado del GS exacto es mixto y correlacionado solo clásicamente, en lugar de puro y entrelazado. Luego, en contraste con MF, en el GS exacto E^{+-} emerge de las correlaciones de dos cuerpos y no es estrictamente extensivo (ver también la Ec. (6.46) en la próxima sección).

Por otro lado, la concurrencia fermiónica de cuatro modos (6.24) está más allá de MF. Sin la proyección de paridad S_z , el estado (6.29) conduce al estado reducido puro $\rho_{pq}(\theta) = |\psi_{pq}(\theta)\rangle\langle\psi_{pq}(\theta)|$ con $|\psi_{pq}(\theta)\rangle = c'_{p-}^{\dagger}c'_{q-}^{\dagger}|0\rangle$ un DS, implicando $C = 0$.

Pero incluso después de una proyección de paridad básica, que conduce a

$$\begin{aligned} \rho_{pq} &= \frac{1}{2}(\rho_{pq}(\theta) + \rho_{pq}(-\theta)) \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (1 - \cos \theta)^2 & 0 & 0 & \sin^2 \theta \\ 0 & \sin^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 \\ \sin^2 \theta & 0 & 0 & (1 + \cos \theta)^2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (6.38)$$

se sigue teniendo $C = 0 \forall \theta$ (de acuerdo a la Ec. (6.24)), ya que el estado es una combinación convexa de DS's $\rho_{pq}(\theta)$.

Sin embargo, la Ec. (6.38) conduce a una estimación correcta de la negatividad arriba-abajo (6.27) para $\chi < 1$,

$$\mathcal{N}_{\text{mf}}^{+-} = \frac{1}{2} \sin^2 \theta \quad (\chi < 1), \quad (6.39)$$

la cual proporciona una excelente descripción del resultado exacto para Ω grande, como puede verse en el panel inferior de la Fig. 6.5. Notar que (6.39) es más pequeño que el resultado derivado directamente de MF sin proyectar (o sea de $\rho_{pq}(\theta) = |\psi_{pq}(\theta)\rangle\langle\psi_{pq}(\theta)|$), que conduce a $\mathcal{N}_{\text{mf}}^{+-}(\theta) = |\sin \theta|(1 + \frac{1}{2}|\sin \theta|)$, ya que esta última incluye términos que conectan estados con diferente paridad P_z (términos que son borrados en una proyección básica).

La Ec. (6.39) falla solo en el límite isotrópico $\chi \rightarrow 1$, donde es necesario considerar la proyección a buen S_z . El efecto principal de esta proyección es el de cancelar el término $\langle s_{p+} s_{q+} \rangle = \frac{1}{4} \sin^2 \theta$ en (6.38), dejando esencialmente inalterado $\langle s_{p+} s_{q-} \rangle$. Esto lleva a obtener la mitad de lo obtenido en (6.39):

$$\mathcal{N}_{\text{mf}}^{+-} = \frac{1}{4} \sin^2 \theta \quad (\chi = 1), \quad (6.40)$$

que está en concordancia con el resultado exacto, como puede verse en la Fig. 6.5. De hecho, para Ω grande, la Ec. (6.11) implica $k = \frac{1}{2}(1 - v_x/\varepsilon)$ y el resultado exacto (6.28) se hace idéntico a la Ec. (6.40).

Finalmente, para $\chi \in (0, 1)$, los dos estados (GS) de MF $|\Psi_{\text{mf}}(\pm\theta)\rangle$ se hacen GS *exactos* para *cualquier* Ω finito en los puntos de separabilidad (6.26) (ver Apéndice B.2). Sin embargo, el límite exacto de la entropía de un cuerpo en este punto sigue dado por la Ec. (6.35) para Ω grande, y es por tanto *no nulo*, ya que los límites laterales del GS exacto tienen P_z definido (ver próxima sección).

6.3.2. Campo medio proyectado a S_z

Un extracción más rigurosa del entrelazamiento fermiónico en campo medio puede conseguirse mediante estados con paridad P_z exactamente restaurada:

$$|\Psi^\pm\rangle = \frac{|\Psi_{\text{mf}}(\theta)\rangle \pm |\Psi_{\text{mf}}(-\theta)\rangle}{\sqrt{2(1 \pm \cos^\Omega \theta)}}, \quad (6.41)$$

donde $|\Psi_{\text{mf}}(\theta)\rangle$ denota el estado (6.29) (para $\mathbf{n} \cdot \mathbf{S} = S_y$) y $|\Psi_{\text{mf}}(-\theta)\rangle = P_z |\Psi_{\text{mf}}(\theta)\rangle$. Nótese que aquí se está proyectando a buena paridad después de realizar la minimización en θ . Si se desprecia el overlap $\langle \Psi_{\text{mf}}(-\theta) | \Psi_{\text{mf}}(\theta) \rangle = \cos^\Omega \theta$ y otros términos de orden similar (que se hacen muy pequeños para Ω y θ no demasiado pequeños), la matriz densidad de un cuerpo ρ^{sp} y el estado reducido ρ_{pq} de los estados (6.41) están dados precisamente por las Ecs. (6.34) y (6.38).

Sin embargo, es también posible derivar las expresiones exactas proyectadas. Las contracciones derivadas de los estados (6.41) son $\langle c_{p\mu}^\dagger c_{q\nu} \rangle_\pm = \delta_{pq} \delta_{\mu\nu} f_\mu^\pm$ para $\mu, \nu = \pm$, donde f_ν^\pm son las ocupaciones promedio proyectadas

$$f_\nu^\pm = \frac{1 - \nu \cos \theta}{2} \left(\frac{1 \mp \nu \cos^{\Omega-1} \theta}{1 \pm \cos^\Omega \theta} \right), \quad (6.42)$$

que satisfacen $f_+^\pm + f_-^\pm = 1$. Luego estos estados conducen a una matriz densidad de un cuerpo con Ω bloques idénticos en la diagonal

$$\rho_p^\pm = \begin{pmatrix} f_+^\pm & 0 \\ 0 & f_-^\pm \end{pmatrix}. \quad (6.43)$$

Como la diferencia entre f_ν^\pm y las ocupaciones promedio sin proyectar $\frac{1-\nu \cos \theta}{2}$ de la Ec. (6.34) es $O(\cos^{\Omega-1} \theta)$, la entropía de un cuerpo exacta determinada por los estados (6.41),

$$E_\pm = -2\Omega(f_+^\pm \log_2 f_+^\pm + f_-^\pm \log_2 f_-^\pm), \quad (6.44)$$

es muy cercana al resultado de MF diagonal (6.35) si Ω y θ no son demasiado pequeños.

El entrelazamiento arriba-abajo determinado por los estados (6.41) puede ser también evaluado exactamente: los coeficientes correspondientes normalizados en la expansión (6.8) son simplemente

$$C_K^\pm(\theta) = \sqrt{\frac{1 \pm (-1)^K}{1 \pm \cos^\Omega \theta}} C_K(\theta), \quad (6.45)$$

con $C_K(\theta)$ los coeficientes de MF (6.36), y conducen a

$$E_\pm^{+-} = -\Omega \left(\sum_{\nu=\pm} f_\nu^\pm \log_2 \frac{1+\nu \cos \theta}{2} \right) - \log_2 \frac{2}{1 \pm \cos^\Omega \theta}. \quad (6.46)$$

Incluso si se ignoran términos de orden $O(\cos^\Omega \theta)$, se obtiene una reducción $\approx -\log_2 2 = -1$ respecto a (6.37) debido a la proyección a buena paridad de S_z , que implica una dispersión sobre la mitad del número total de estados. Esta reducción explica la pequeña diferencia entre la mitad de la entropía de un cuerpo exacta y la aproximada que se observa en la Fig. 6.2 para $\chi < 1$. En particular, el entrelazamiento arriba-abajo es máximo para $\theta = \pi/2$ ($v_x/\varepsilon \rightarrow \infty$), en cuyo caso (6.46) implica $E_{\pm}^{+-} = \Omega - 1$, mientras que (6.37) lleva a $E^{+-} = \Omega$. Una interpretación alternativa de esta reducción es que, mientras en MF no proyectado Alice (niveles inferiores) y Bob (niveles superiores) comparten en este caso Ω pares de qubits máximamente entrelazados, en el estado proyectado el último par no es independiente ya que queda determinado por la restricción de paridad definida, reduciéndose el E^{+-} en una unidad. Por otro lado, se requiere de la proyección completa a S_z para obtener resultados precisos para $\chi = 1$, lo que conduciría a los resultados exactos de la Ec. (6.16).

El estado reducido de cuatro modos ρ_{pq} derivado del estado (6.41) tiene la forma (6.20) con elementos ($\nu = \pm$)

$$\begin{aligned} \langle s_{p\nu} s_{q\nu} \rangle_{\pm} &= \frac{\sin^2 \theta}{4} \left(\frac{1 \pm \cos^{\Omega-2} \theta}{1 \pm \cos^{\Omega} \theta} \right) \\ \langle s_{p\nu} s_{q-\nu} \rangle_{\pm} &= \frac{\sin^2 \theta}{4} \left(\frac{1 \mp \cos^{\Omega-2} \theta}{1 \pm \cos^{\Omega} \theta} \right) = \langle n_{p\nu} n_{q-\nu} \rangle_{\pm} \\ \langle n_{p\nu} n_{q\nu} \rangle_{\pm} &= \frac{1}{2} - \langle s_{p\nu} s_{q-\nu} \rangle_{\pm} \mp \frac{\cos \theta}{2} \left(\frac{1 \pm \cos^{\Omega-2} \theta}{1 \pm \cos^{\Omega} \theta} \right). \end{aligned} \quad (6.47)$$

A diferencia de (6.38), este estado lleva por medio de las expresiones anteriores a una concurrencia fermiónica pequeña pero *no nula*

$$C_{\pm}(\theta) = \sin^2 \theta \frac{\cos^{\Omega-2} \theta}{1 \pm \cos^{\Omega} \theta}, \quad (6.48)$$

que es paralela (antiparalela) para paridad de S_z positiva (negativa). Sin embargo es muy pequeña a menos que Ω y θ sean lo suficientemente pequeños. En un tratamiento proyectado después de variar (estado (6.41)), $\theta = 0$ para $v_x < \varepsilon$ y (6.48) implica una concurrencia apreciable solo en un intervalo pequeño después de la transición de fase en $v_x = \varepsilon$, donde θ sigue siendo pequeño pero distinto de cero.

Para $v_x < \varepsilon$, es posible mejorar los resultados previos proyectando *antes de la variación*, es decir, determinando θ (y P_z) a través de la minimización de $\langle \Psi^{\pm} | H | \Psi^{\pm} \rangle$ con $|\Psi^{\pm}\rangle$ el estado ya proyectado. En este caso θ será distinto de cero $\forall v_x > 0$ y (6.48) conducirá a valores de concurrencia apreciables en la región normal ($0 < v_x \lesssim \varepsilon$),

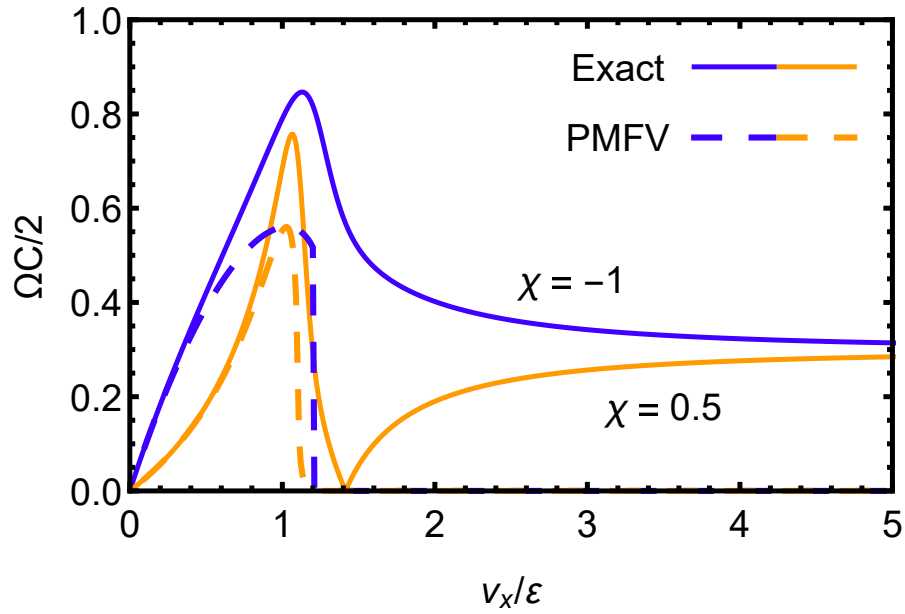


Figura 6.6: Comparación entre los resultados exactos para la concurrencia fermiónica para $\chi = 0$ y $\chi = 0,5$ con $\Omega = 50$, y los obtenidos con aproximación MF proyectado a buena paridad de S_z , antes de la variación (PMFV).

donde θ se mantiene pequeño. Como puede verse en la Fig. 6.6, los resultados obtenidos son precisos para $v_x/\varepsilon \ll 1$, aunque para $v_x > \varepsilon$, θ aumenta y la concurrencia (6.48) se hace pequeña para Ω apreciable, ya que ρ_{pq} se convierte esencialmente en una mezcla convexa de DSs.

Por otro lado, la negatividad arriba-abajo determinada por los elementos (6.47),

$$\mathcal{N}_{\pm}^{+-} = \frac{\sin^2 \theta}{2(1 \pm \cos^{\Omega} \theta)}, \quad (6.49)$$

muy cercana a los resultados previos (6.39) derivados de (6.38) para Ω y θ apreciables, proporcionando así una descripción correcta para $\chi < 1$.

Como comentario final, puede verse que los estados proyectados (6.41) coinciden con los límites laterales *exactos* del GS en los puntos de separabilidad (6.26) $\forall \Omega$. Como se ha visto, estos estados conducen a entropía de un cuerpo S^{sp} finita (y también entropía arriba-abajo E^{+-} y negatividad \mathcal{N}^{+-} finitas), que no se anula para Ω grande, en contraste con la concurrencia fermiónica asociada (6.48). Entonces, para Ω no muy pequeño, este punto será detectable solo por la concurrencia, como se verifica en la Fig. 6.2 (ver también Apéndice B.2).

6.3.3. Campo medio más RPA

Para obtener una buena descripción analítica de la concurrencia para Ω grande, es necesario utilizar al menos una aproximación de orden superior a campo medio tal como RPA (*Random-Phase Approximation*) [90], equivalente a una bosonización de primer orden de Holstein-Primakoff del Hamiltoniano alrededor de la solución de MF (ver [90] y también [92, 93, 98] y [94, 99]). Puede ser implementado con un simple mapeo aproximado de operadores colectivos de spin a operadores bosónicos. Para $0 < v_x < \varepsilon$ (y $|\chi| < 1$) este mapeo es de la forma

$$S_+ \rightarrow \sqrt{\Omega} b^\dagger, \quad S_- \rightarrow \sqrt{\Omega} b, \quad S_z \rightarrow b^\dagger b - \Omega/2,$$

donde se impone la condición bosónica $[b, b^\dagger] = 1$. Es válido cuando $\langle S_z \rangle$ es cercano a $-\Omega/2$, es decir en la fase normal de MF $v_x < \varepsilon$, donde el vacío $|0\rangle$ de b se corresponde con el GS sin perturbar $|\Psi_0\rangle$. Esto lleva a un Hamiltoniano bosónico cuadrático aproximado:

$$\begin{aligned} H - E_0 \rightarrow H_b &= (\varepsilon - w)b^\dagger b - \frac{v}{2}(b^{\dagger 2} + b^2) \\ &= \lambda b'^\dagger b' - \frac{\varepsilon - w - \lambda}{2}, \end{aligned} \quad (6.50)$$

donde $E_0 = \langle \Psi_0 | H | \Psi_0 \rangle$, $w = W\Omega$, $v = V\Omega$, y $b' = \alpha b - \beta b^\dagger$ es el operador bosónico normal final, con $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{\varepsilon - w \pm \lambda}{2\lambda}}$ ($[b', b'^\dagger] = \alpha^2 - \beta^2 = 1$) y

$$\lambda = \sqrt{(\varepsilon - w)^2 - v^2} = \sqrt{(\varepsilon - v_x)(\varepsilon - v_y)}, \quad (6.51)$$

su energía, donde $v_y = \chi v_x$. El GS $|\Psi\rangle$ es aproximado por el vacío $|0'\rangle = \alpha \exp\left[\frac{\beta}{2\alpha} b^{\dagger 2}\right] |0\rangle$ de b' , que conduce a su vez a $\langle b^2 \rangle = \alpha\beta = \frac{v}{2\lambda}$, $\langle b^\dagger b \rangle = \beta^2$ y por ende a $\langle S_+ \rangle^2 \approx \frac{\Omega v}{2\lambda}$, $\langle S_z \rangle \approx \frac{\varepsilon - w - \lambda}{2\lambda} - \Omega/2$. Con estos valores, es posible estimar la concurrencia a través de la Ec. (6.24), que para Ω grande lleva a la expresión asintótica

$$C \approx \frac{1 - \lambda/(\varepsilon - v_y)}{\Omega - 1}, \quad 0 < v_x < \varepsilon. \quad (6.52)$$

Este valor se corresponde con una concurrencia de tipo paralelo (fase normal) [93, 94].

Para $v_x > \varepsilon$, la bosonización debe hacerse alrededor del estado de MF con ruptura de paridad $|\Psi_{mf}\rangle$ de la Ec. (6.29), que va a corresponder al vacío bosónico inicial, y aplicado a los operadores rotados S'_\pm , S'_z . Esto implica

$$\begin{aligned} H - E'_0 \rightarrow H_b &= (\varepsilon' - w')b^\dagger b - \frac{v'}{2}(b^{\dagger 2} + b^2) \\ &= \lambda' b'^\dagger b' - \frac{\varepsilon' - w' - \lambda'}{2}, \end{aligned} \quad (6.53)$$

donde $E'_0 = \langle \Psi_{\text{mf}} | H | \Psi_{\text{mf}} \rangle$, $\cos \theta = \varepsilon / v_x$, $\varepsilon' = \varepsilon \cos \theta$, $w' = (v_x(3 \cos^2 \theta - 2) + v_y)/2$, $v' = (v_x \cos^2 \theta - v_y)/2$ y

$$\lambda' = |\sin \theta| \sqrt{v_x(v_x - v_y)}. \quad (6.54)$$

La expresión final para la concurrencia asintótica es

$$C \approx \begin{cases} \frac{1 - \lambda' / (v_x - v_y)}{\Omega - 1} & , \quad \varepsilon < v_x < \varepsilon / \sqrt{\chi} \\ \frac{1 - (v_x - v_y) / \lambda'}{\Omega - 1} & , \quad v_x > \varepsilon / \sqrt{\chi} \end{cases} \quad (6.55)$$

donde la fórmula superior (inferior) se corresponde con la concurrencia paralela (antiparalela), con la transición entre ambas ocurriendo justamente *en el punto de separabilidad* (6.26) [94, 96]. En este punto $v' = 0$ y $\lambda' = v_x - v_y$, implicando una concurrencia de RPA nula, en concordancia con el resultado exacto para Ω grande. Además, en este mismo punto $\varepsilon' - w' = \lambda'$ y $b' = b$, dejando el vacío bosónico sin alterar, es decir, es el GS de MF. Por ende, la separabilidad es detectada directa y exactamente en RPA. Para $-v_x < v_y < 0$ (es decir $-1 < \chi < 0$), la concurrencia es paralela y se tiene solo la ecuación superior de (6.55) ($\forall v_x > \varepsilon$). Las expresiones (6.52)–(6.55) logran dar una excelente descripción de la concurrencia fermiónica para todo $-1 \leq \chi < 1$ y tanto para $v_x < \varepsilon$ como para $v_x > \varepsilon$ en el caso de Ω apreciable, como se verifica en Fig. 6.7.

Es posible mejorar aún más estos resultados para sistemas finitos considerando el estado fermiónico correspondiente al vacío bosónico $|0'\rangle$. Para $v_x < \varepsilon$, tal estado tiene la forma

$$|\Psi_{\text{RPA}}\rangle \propto \exp[\gamma S_+^2] |\Psi_0\rangle, \quad (6.56)$$

donde $S_+ = \sum_p c_{p+}^\dagger c_{p-}$. El parámetro γ puede obtenerse de RPA ($\gamma = \frac{\beta}{2\Omega\alpha}$) o ser obtenido variacionalmente. Puede mostrarse explícitamente que (6.56) tiene paridad de S_z definida y no es un DS, es decir que tiene correlaciones fermiónicas.

Para $v_x > \varepsilon$ se pueden reemplazar $|\Psi_0\rangle \rightarrow |\Psi(\theta)\rangle$ y $S_+ \rightarrow S'_+$ en (6.56), con $|\Psi(\theta)\rangle$ el estado de MF (6.29), llevando a un estado $|\Psi_{\text{RPA}}(\theta)\rangle$. Además, en este caso se puede considerar la restauración de paridad S_z , que lleva a un estado de RPA proyectado

$$|\Psi_{\text{RPA}}^\pm\rangle \propto |\Psi_{\text{RPA}}(\theta)\rangle \pm |\Psi_{\text{RPA}}(-\theta)\rangle. \quad (6.57)$$

Los resultados obtenidos de esta forma son muy precisos para todo v_x y tamaño, como se verifica en la Fig. 6.7, y se acercan a los valores (6.55) para Ω grande. Para $\chi = 1$, se debe usar la proyección a buen S_z , que en este modelo conducirá a los GS exactos $|K\rangle$.

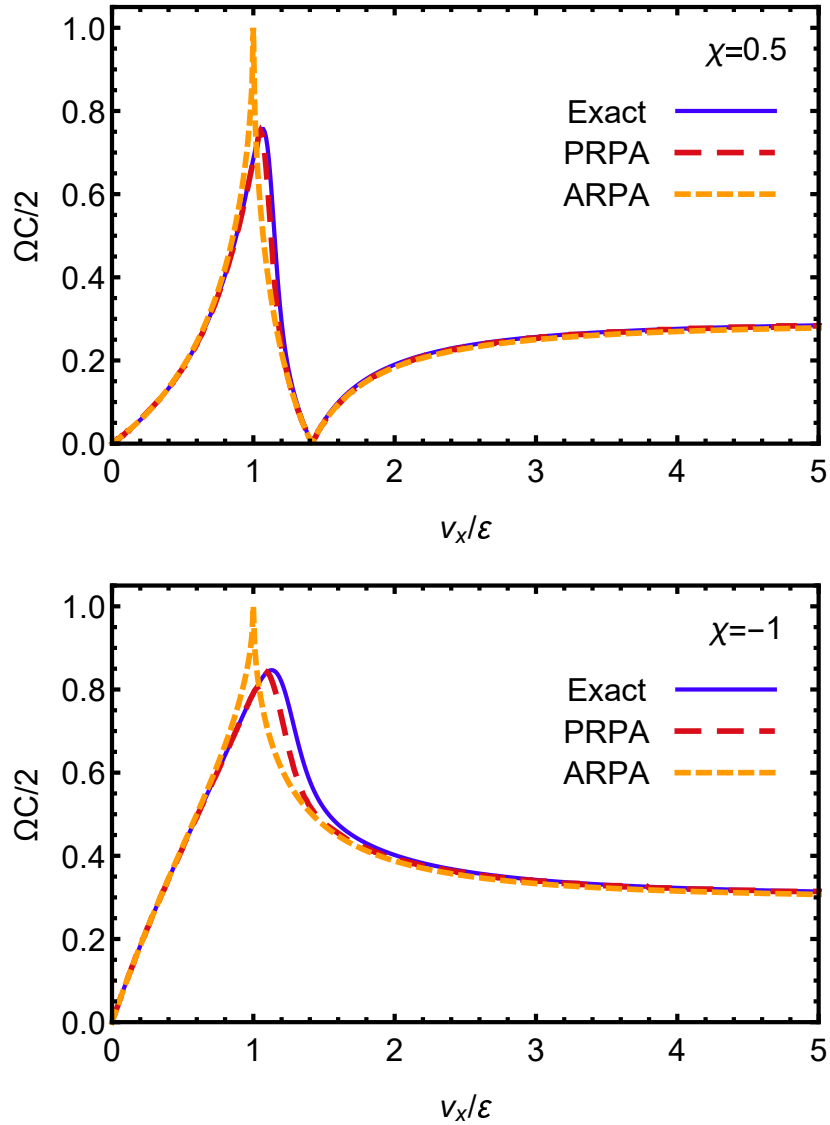


Figura 6.7: Comparación entre los resultados exactos y aproximados de RPA para la concurrencia fermiónica en dos anisotropías diferentes y $\Omega = 50$ fermiones. Se muestran resultados para las dos expresiones analíticas (6.52), (6.55) (ARPA), validas para Ω grande, y los resultados de Ω finito derivados de los estados (6.56)–(6.57) (PRPA).

Entrelazamiento de un cuerpo como recurso cuántico

Las teorías de recurso cuánticas (QRT) [39, 40] describen procesos de información cuántica bajo un conjunto restringido de operaciones. La teoría estándar de entrelazamiento en sistemas distinguibles es una de ellas, así como la termodinámica cuántica [42, 43], coherencia [44, 45], no-localidad [46] y no-Gaussianidad [47] entre otras.

En la teoría de entrelazamiento estándar se considera un sistema cuántico multipartito compartido por partes distantes. Cada parte puede hacer operaciones locales (en su propio subsistema) y pueden comunicarse entre sí mediante canales clásicos [100]. Con estas restricciones surge naturalmente el conjunto de operaciones locales y comunicación clásica (LOCC) como el conjunto de operaciones libres de la teoría, de donde se deduce que los estados libres son el conjunto de estados separables. En el caso fermiónico, ignorar las correlaciones de antisimetrización define a los Determinantes de Slater (DSs) y sus combinaciones convexas como el conjunto de estados libres \mathcal{S} , y se busca el conjunto de operaciones libres \mathcal{O} consistentes con este conjunto.

Con este objetivo, se define en primer lugar una relación de orden parcial en el espacio de Fock \mathcal{F} del sistema, basado en que tan mezclada se encuentra la matriz densidad de un cuerpo $\rho^{(1)}$, que determina cuando un estado fermiónico puro puede ser considerado más entrelazado que otro. Este entrelazamiento de un cuerpo puede pensarse en forma bipartita, separando entre la matriz de un cuerpo y la de $N - 1$ cuerpos, que son isoespectrales para estados puros con N fijo. Luego se define una clase de operaciones consistentes con \mathcal{S} y el orden parcial, a través de relaciones de mayorización que deben ser cumplidas por las SPDMs inicial y final, lo que asegura que el entrelazamiento de un cuerpo no crece al aplicar estas operaciones. Se muestra

también que las operaciones de óptica lineal fermiónica (FLO) [55-57], que incluyen transformaciones unitarias de un cuerpo y medidas de ocupación en el espacio de una partícula, están contenidas dentro de estas operaciones. El entrelazamiento de un cuerpo cumple entonces el rol de un recurso en una teoría donde \mathcal{S} es el conjunto convexo de determinantes de Slater y \mathcal{O} el de las operaciones FLO. Se discuten también posibles extensiones del conjunto de operaciones libres y la conexión de este recurso con modelos de computación cuántica. Los resultados de este capítulo originaron el trabajo [3].

7.1. Formalismo

7.1.1. Mayorización en el espacio SP

Se considera nuevamente un espacio de una partícula (SP) \mathcal{H} de dimensión finita n y un conjunto de operadores de creación y destrucción fermiónica c_k^\dagger, c_k asociados con una base ortogonal de \mathcal{H} y que satisfacen las relaciones de anticonmutación $\{c_k, c_{k'}^\dagger\} = \delta_{kk'}, \{c_k, c_{k'}\} = \{c_k^\dagger, c_{k'}^\dagger\} = 0$.

El grado de mezcla de un estado puede caracterizarse de manera rigurosa mediante relaciones de mayorización [64, 101-103]. Para estados $|\Psi\rangle, |\Phi\rangle$ con el mismo número fermiónico $N = \text{Tr } \rho_\Psi^{(1)} = \text{Tr } \rho_\Phi^{(1)}$, se dice que $|\Psi\rangle$ es no menos *entrelazado en un cuerpo* que $|\Phi\rangle$ si $\rho_\Psi^{(1)}$ es *más (o igualmente) mezclado* que $\rho_\Phi^{(1)}$, es decir si sus autovalores $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, ordenados en orden decreciente, satisfacen la relación de mayorización

$$\boldsymbol{\lambda}(\rho_\Psi^{(1)}) \prec \boldsymbol{\lambda}(\rho_\Phi^{(1)}), \quad (7.1)$$

es decir

$$\sum_{\nu=1}^m \lambda_\nu(\rho_\Psi^{(1)}) \leq \sum_{\nu=1}^m \lambda_\nu(\rho_\Phi^{(1)}) \quad (7.2)$$

para $m = 1, \dots, n-1$, e identidad para $m = n$. Luego los DSs son los estados con menos entrelazamiento de un cuerpo, ya que su matriz de un cuerpo mayoriza cualquier otra $\rho^{(1)}$ con la misma traza. La relación (7.1) es análoga a la impuesta por las operaciones LOCC en estados reducidos de sistemas con componentes distinguibles, que en el caso bipartito conducen al famoso teorema de Nielsen: $|\Psi_{AB}\rangle$ puede convertirse mediante LOCC a $|\Phi_{AB}\rangle$ (y por ende es menos entrelazado que $|\Psi_{AB}\rangle$) si su estado reducido satisface $\boldsymbol{\lambda}(\rho_\Psi^{A(B)}) \prec \boldsymbol{\lambda}(\rho_\Phi^{A(B)})$ [102, 104]. Medidas locales reducen la ignorancia acerca del estado del subsistema medido, disminuyendo la mezcla de estados reducidos y por ende el entrelazamiento bipartito. Análogamente, se va a

mostrar que el entrelazamiento de un cuerpo decrece bajo operaciones que reducen la ignorancia acerca de la matriz de un cuerpo.

7.1.2. Descomposición de Schmidt asociada

El entrelazamiento de un cuerpo admite también una formulación análoga a la bipartita del caso distinguible: un estado puro $|\Psi\rangle$ de N fermiones ($\sum_k c_k^\dagger c_k |\Psi\rangle = N|\Psi\rangle$) puede expandirse como

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{N} \sum_{k,l} \Lambda_{kl} c_k^\dagger C_l^\dagger |0\rangle \quad (7.3)$$

donde $C_l^\dagger = c_{l_1}^\dagger \dots c_{l_{N-1}}^\dagger$, $l = 1, \dots, \binom{n}{N-1}$, son operadores que crean $N - 1$ fermiones en estados específicos de una partícula etiquetados por l , y que satisfacen $\langle 0|C_l C_{l'}^\dagger|0\rangle = \delta_{ll'}$, mientras que los coeficientes Λ_{kl} forman una matriz Λ de $n \times \binom{n}{N-1}$ que satisface $\text{Tr} \Lambda \Lambda^\dagger = N$. Luego, cada término en (7.3) es un DS repetido N veces, de forma tal que

$$c_k |\Psi\rangle = \sum_l \Lambda_{kl} C_l^\dagger |0\rangle \quad (7.4)$$

es el estado no normalizado del resto de los fermiones cuando el estado de una partícula k está ocupado, mientras que

$$C_l |\Psi\rangle = (-1)^{N-1} \sum_k \Lambda_{kl} c_k^\dagger |0\rangle \quad (7.5)$$

es el de los fermiones faltantes cuando el estado de $N - 1$ partículas l está ocupado. De esta manera, $\langle \Psi|\Psi\rangle = \frac{1}{N} \text{Tr} \Lambda \Lambda^\dagger = 1$. Además, las Ecs. (7.4)–(7.5) permiten expresar los elementos de $\rho^{(1)}$ y de $\rho^{(N-1)}$ en términos de Λ como

$$\rho_{kk'}^{(1)} = \langle \Psi|c_{k'}^\dagger c_k|\Psi\rangle = (\Lambda \Lambda^\dagger)_{kk'} , \quad (7.6)$$

$$\rho_{ll'}^{(N-1)} = \langle \Psi|C_{l'}^\dagger C_l|\Psi\rangle = (\Lambda^T \Lambda^*)_{ll'} . \quad (7.7)$$

Las ecuaciones (7.6)–(7.7) son análogas a las de estados reducidos $\rho^{A(B)}$ en sistemas puros bipartitos distinguibles $|\Psi_{AB}\rangle = \sum_{i,j} C_{ij} |i_A, j_B\rangle$, donde $\rho_{ii'}^A = \langle |i'_A\rangle \langle i_A| \rangle = (CC^\dagger)_{ii'}$, $\rho_{jj'}^B = \langle |j'_B\rangle \langle j_B| \rangle = (C^T C^*)_{jj'}$ [6]. La única diferencia es ahora que $\text{Tr} \rho_{A(B)} = \text{Tr} CC^\dagger = 1$ mientras que $\text{Tr} \rho^{(1)} = \text{Tr} \rho^{(N-1)} = N$.

Luego las ecuaciones (7.6)–(7.7) implican que tanto $\rho^{(1)}$ como $\rho^{(N-1)}$ tienen los mismos autovalores no nulos λ_ν , que son las raíces de los valores singulares de Λ . Además, mediante la descomposición en valores singulares $\Lambda = UDV^\dagger$, con $D_{\nu\nu'} = \sqrt{\lambda_\nu} \delta_{\nu\nu'}$ y U, V matrices unitarias (de $n \times n$ y $\binom{n}{N-1} \times \binom{n}{N-1}$ respectivamente),

se puede obtener a partir de (7.3) la descomposición de Schmidt $1-(N-1)$ del estado de N fermiones:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{N} \sum_{\nu} \sqrt{\lambda_{\nu}} c_{\nu}^{\dagger} C_{\nu}^{\dagger} |0\rangle, \quad (7.8)$$

donde

$$c_{\nu}^{\dagger} = \sum_k U_{k\nu} c_k^{\dagger}, \quad C_{\nu}^{\dagger} = \sum_l V_{l\nu}^* C_l^{\dagger} \quad (7.9)$$

son los operadores de creación y destrucción “naturales” para 1 y $N-1$ fermiones, que satisfacen

$$\langle 0 | c_{\nu} c_{\nu'}^{\dagger} | 0 \rangle = \delta_{\nu\nu'} = \langle 0 | C_{\nu} C_{\nu'}^{\dagger} | 0 \rangle. \quad (7.10)$$

$$\langle \Psi | c_{\nu}^{\dagger} c_{\nu'} | \Psi \rangle = \lambda_{\nu} \delta_{\nu\nu'} = \langle \Psi | C_{\nu}^{\dagger} C_{\nu'} | \Psi \rangle. \quad (7.11)$$

Luego,

$$c_{\nu} |\Psi\rangle = \sqrt{\lambda_{\nu}} C_{\nu}^{\dagger} |0\rangle, \quad C_{\nu} |\Psi\rangle = (-1)^{N-1} \sqrt{\lambda_{\nu}} c_{\nu}^{\dagger} |0\rangle, \quad (7.12)$$

es decir que los estados ortogonales naturales de $N-1$ fermiones $C_{\nu}^{\dagger} |0\rangle$ son aquellos de los fermiones restantes cuando el orbital natural de una partícula ν está ocupado, mientras que $c_{\nu}^{\dagger} |\Psi\rangle$ son los estados ortogonales de los fermiones restantes cuando el estado natural de $N-1$ fermiones $C_{\nu}^{\dagger} |0\rangle$ (que no es más un DS) está ocupado. Consecuentemente, en un estado de N fermiones, el entrelazamiento de un cuerpo es en realidad un entrelazamiento entre $1-(N-1)$ cuerpos, asociados con las correlaciones entre observables de $1-(N-1)$ cuerpos.

En el caso de un DS $|\Psi\rangle = (\prod_{\nu=1}^N c_{\nu}^{\dagger}) |0\rangle$, $\lambda_{\nu} = 1$ (0) para $\nu \leq N$ ($> N$), con $C_{\nu}^{\dagger} \propto \prod_{\nu' \neq \nu}^N c_{\nu'}^{\dagger}$ tal que $c_{\nu}^{\dagger} C_{\nu}^{\dagger} |0\rangle = |\Psi\rangle$ para $\nu \leq N$. Por otro lado, para $N=2$, la Ec. (7.8) se convierte en una descomposición de Slater de un estado de dos fermiones [22-24],

$$|\Psi\rangle = \sum_{\nu} \sqrt{\lambda_{\nu}} c_{\nu}^{\dagger} c_{\bar{\nu}}^{\dagger} |0\rangle = \frac{1}{2} \sum_{\nu} \sqrt{\lambda_{\nu}} (c_{\nu} C_{\nu}^{\dagger} + c_{\bar{\nu}} C_{\bar{\nu}}^{\dagger}) |0\rangle \quad (7.13)$$

donde $C_{\nu}^{\dagger} = c_{\bar{\nu}}^{\dagger}$, $C_{\bar{\nu}}^{\dagger} = -c_{\nu}^{\dagger}$. En este caso el entrelazamiento de un cuerpo está directamente relacionado con el de los conjuntos normales de modos ν y $\bar{\nu}$, que contienen solamente un fermión cada uno (ver Sec. 7.3).

7.1.3. Entropías de entrelazamiento de un cuerpo

Una entropía general de entrelazamiento de un cuerpo $E(|\Psi\rangle) \equiv E^{(1)}(|\Psi\rangle) = S^{sp}(|\Psi\rangle)$ se define como

$$E(|\Psi\rangle) = S(\rho_{\Psi}^{(1)}) = S(\rho_{\Psi}^{(N-1)}), \quad (7.14)$$

donde $S(\rho^{(1)})$ es una función cóncava de Schur [64, 103] de $\rho^{(1)}$. Estas entropías van a satisfacer

$$E(|\Psi\rangle) \geq E(|\Phi\rangle), \quad (7.15)$$

cuando se cumpla la relación de mayorización de Ec. (7.1). Por ejemplo, entropías basadas en la traza

$$S(\rho^{(1)}) = \text{Tr} f(\rho^{(1)}) = \sum_{\nu} f(\lambda_{\nu}) \quad (7.16)$$

donde $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ es cóncava y satisface $f(0) = f(1) = 0$ [105], van a satisfacer (7.15) con $E(|\Psi\rangle) \geq 0 \forall |\Psi\rangle$ y $E(|\Psi\rangle) = 0$ sii $|\Psi\rangle$ es un DS. Un $E(|\Psi\rangle)$ de este tipo será una medida monótona del entrelazamiento de un cuerpo. Ejemplos de esto son la entropía de Von Neumann $\rho^{(1)}$, $S(\rho^{(1)}) = -\sum_{\nu} \lambda_{\nu} \log_2 \lambda_{\nu}$, una cantidad de interés en varios campos [106-110], y la entropía de un cuerpo que fue analizada extensamente en capítulos anteriores [1, 31]. Es importante notar que la matriz densidad de un cuerpo, y por ende cualquier medida (7.14), es en principio accesible experimentalmente. Se han reportado recientemente medidas de estas matrices en *optical lattices* [111].

Todas las medidas (7.14) pueden extenderse a a estados fermiónicos mixtos

$$\rho = \sum_{\alpha} p_{\alpha} |\Psi_{\alpha}\rangle \langle \Psi_{\alpha}| \quad (7.17)$$

a través de sus extensiones convexas por *convex roof* $E(\rho) = \text{Min} \sum_{\nu} p_{\nu} E(|\Psi_{\nu}\rangle)$, donde el mínimo es sobre todas las posibles representaciones $\{p_{\alpha} \geq 0, |\Psi_{\alpha}\rangle\}$ de ρ [31]. Tal $E(\rho)$ representa un entrelazamiento de un cuerpo de formación, anulándose sii ρ es una mezcla convexa de DSs.

7.2. Operaciones no generadoras de entrelazamiento de un cuerpo (ONG)

7.2.1. Definiciones y propiedades básicas

Se define a continuación una clase de operaciones que no genera entrelazamiento de un cuerpo, es decir que no aumenta, en promedio, el grado de mezcla de la matriz de un cuerpo.

Definición 1. Sea $\varepsilon(\rho) = \sum_j \mathcal{K}_j \rho \mathcal{K}_j^{\dagger}$ una operación cuántica en un estado fermiónico ρ , con $\{\mathcal{K}_j, \sum_j \mathcal{K}_j^{\dagger} \mathcal{K}_j = \mathbb{1}\}$ un conjunto de operadores de Kraus que

conservan el número de partículas. Sean $\rho^{(1)}$ y $\rho_j^{(1)}$ las matrices de un cuerpo determinadas por ρ y $\rho_j = \mathcal{K}_j \rho \mathcal{K}_j^\dagger / p_j$ con $\{\mathcal{K}_j, \sum_j \mathcal{K}_j^\dagger \mathcal{K}_j = \mathbb{1}\}$, con $p_j = \text{Tr}[\rho \mathcal{K}_j^\dagger \mathcal{K}_j]$. Se dice que ε es no generadora de entrelazamiento de un cuerpo (*One-body non generating: ONG*) si admite un conjunto de operadores de Kraus $\{\mathcal{K}_j\}$ tales que $\forall \rho$ satisfacen la relación

$$\boldsymbol{\lambda}(\rho^{(1)}) \prec \sum_j p_j \boldsymbol{\lambda}(\rho_j^{(1)}), \quad (7.18)$$

donde los autovalores $\boldsymbol{\lambda}(\rho_j^{(1)})$ están ordenados en orden decreciente.

Esta relación de mayorización es análoga a la que satisfacen los estados reducidos locales bajo operaciones locales en la teoría estándar de entrelazamiento [102], e implica

$$S(\rho^{(1)}) \geq S\left(\sum_j p_j \boldsymbol{\lambda}(\rho_j^{(1)})\right) \geq \sum_j p_j S(\rho_j^{(1)}), \quad (7.19)$$

para cualquier entropía cóncava $S(\rho^{(1)})$, como aquellas de la Ec. (7.16). Para estados puros $\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$, $\rho_j = |\Phi_j\rangle\langle\Phi_j|$ es también puro $\forall j$, con $|\Phi_j\rangle \propto \mathcal{K}_j |\Psi\rangle$, y las Ecs. (7.14), (7.19) implican

$$E(|\Psi\rangle) \geq \sum_j p_j E(|\Phi_j\rangle) \geq E(\varepsilon(|\Psi\rangle\langle\Psi|)), \quad (7.20)$$

mostrando que cualquier entropía monótona de un cuerpo (7.14) no aumenta, en promedio, luego de aplicar operaciones ONG. En particular, si $|\Psi\rangle$ es un DS, $E(|\Psi\rangle) = 0$ y la Ec. (7.20) implica que todos los estados $|\Phi_j\rangle \propto \mathcal{K}_j |\Psi\rangle$ deben ser DSs o cero, es decir *todos los operadores de Kraus que cumplen (7.18) deben mapear estados libres en estados libres*. Para el entrelazamiento de formación de un cuerpo de un estado mixto general ρ , la Ec. (7.20) implica

$$E(\rho) \geq E(\varepsilon(\rho)) \quad (7.21)$$

ya que, usando la representación minimizante,

$$E(\rho) = \sum_\alpha p_\alpha E(|\Psi_\alpha\rangle) \geq \sum_{\alpha,j} p_\alpha p_{\alpha j} E(|\Phi_{\alpha j}\rangle) \geq E(\varepsilon(\rho)) \quad (7.22)$$

También se desprende de (7.18) que el conjunto de ONG es convexo y *cerrado bajo composición*, es decir, $\boldsymbol{\lambda}(\rho^{(1)}) \prec \sum_{i,j} p_{ij} \boldsymbol{\lambda}(\rho_{ij}^{(1)})$ para $\mathcal{K}_{ij} = \mathcal{K}_i^b \mathcal{K}_j^a$ y $\varepsilon(\rho) = \varepsilon^b[\varepsilon^a(\rho)]$. Esta propiedad asegura que las operaciones ONG pueden ser aplicadas cualquier número de veces en cualquier orden.

Proposición 1. *La conversión de un estado puro $|\Psi\rangle \in \mathcal{F}$ en otro estado puro $|\Phi\rangle \in \mathcal{F}$ mediante operaciones ONG es posible sii se satisface la relación de mayorización (7.1) para las matrices de un cuerpo correspondientes.*

Demostración. La conversión de estados consistirá en una secuencia de operaciones ONG, que puede resumirse en una única ONG debido a que el conjunto es cerrado bajo composición. Sea $\{\mathcal{K}_j\}$ un conjunto asociado de operaciones de Kraus que satisfacen (7.18). Luego de aplicar esta operación, se tiene $\mathcal{K}_j|\Psi\rangle = \sqrt{p_j}|\Phi\rangle \forall j$, con $p_j = \langle\Psi|\mathcal{K}_j^\dagger\mathcal{K}_j|\Psi\rangle$, implicando $\rho_j^{(1)} = \rho_\Phi^{(1)} \forall j$ y por ende se tiene la Ec. (7.1) cuando se cumple (7.18). \square

Entonces los estados máximamente entrelazados en un cuerpo son aquellos estados puros cuya matriz de un cuerpo mayoriza a las de cualquier otro estado. A causa de (7.15), estos estados van a maximizar también $E(|\Psi\rangle)$ para cualquier elección de S . Para número fijo de fermiones $N \geq 2$ y dimensión de SP $n = mN$, son estados que conducen a

$$\rho^{(1)} = \mathbb{1}_n/m, \quad (7.23)$$

para los cuales cualquier elección de base es natural. Para m entero, dicho estado emerge, por ejemplo, de estados tipo GHZ:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{l=0}^{m-1} c_{Nl+1}^\dagger \cdots c_{Nl+N}^\dagger |0\rangle = \frac{1}{N\sqrt{m}} \sum_{\nu=1}^n c_\nu^\dagger C_\nu^\dagger |0\rangle, \quad (7.24)$$

que conduce a $\langle c_\nu^\dagger c_{\nu'} \rangle = \delta_{\nu\nu'}/m$.

7.2.2. Óptica lineal fermiónica como ONG

Se muestra ahora que operaciones FLO con conservación de número de partículas [55-57], que incluyen transformaciones unitarias de un cuerpo y medidas de ocupación de un modo de una partícula, están incluidas en el conjunto de ONG. En primer lugar, cualquier transformación unitaria de un cuerpo que conserve número de partículas

$$\mathcal{U} = \exp \left[-i \sum_{k,k'} H_{k'k} c_{k'}^\dagger c_k \right], \quad (7.25)$$

con $\mathcal{U}\mathcal{U}^\dagger = \mathbb{1}$ ($H^\dagger = H$) es obviamente ONG, ya que $\mathcal{U}c_k^\dagger\mathcal{U}^\dagger = \sum_{k'} U_{k'k} c_{k'}^\dagger$, con $U = e^{-iH}$, va a mapear la matriz de un cuerpo como $\rho^{(1)} \rightarrow U^\dagger \rho^{(1)} U$, dejando sus autovalores idénticos (y transformando por tanto DSs en DSs). Puede implementarse mediante una composición de unitarias de phaseshifting y beamsplitters [55-57] $\mathcal{U}_p(\phi) = e^{-i\phi c_k^\dagger c_k}$, $\mathcal{U}_b(\theta) = e^{-i\theta (c_k^\dagger c_{k'} + c_{k'}^\dagger c_k)}$, que son los elementos unitarios básicos del conjunto de operaciones FLO.

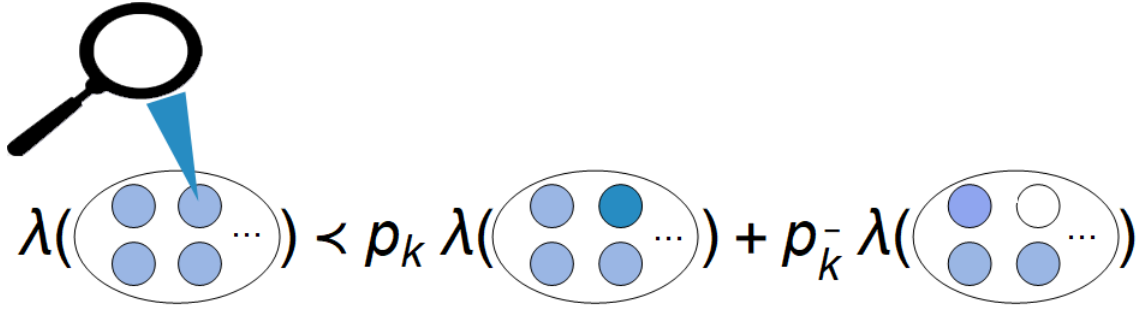


Figura 7.1: Medida de ocupación de un modo fermiónico k . Reduce (o no aumenta), en promedio, el grado de mezcla de la matriz de un cuerpo $\rho^{(1)}$ (con λ el espectro) y por tanto el entrelazamiento de un cuerpo.

Las operaciones FLO incluyen también medidas de ocupación de modos de una partícula, descriptos por proyectores

$$\mathcal{P}_k = c_k^\dagger c_k, \quad \mathcal{P}_{\bar{k}} = c_k c_k^\dagger, \quad (7.26)$$

que satisfacen $\mathcal{P}_k + \mathcal{P}_{\bar{k}} = \mathbb{1}$, y que fueron ya utilizados en 4.2.1 en la definición de la entropía de un cuerpo. Se muestra ahora explícitamente el siguiente resultado fundamental.

Teorema 7.2.1. *La medida de ocupación de un estado de una partícula $|k\rangle = c_k^\dagger|0\rangle \in \mathcal{H}$, descripta por los operadores (7.26), es una operación ONG.*

Demostración. Se considera un estado fermiónico puro general $|\Psi\rangle$ con matriz densidad de un cuerpo $\rho^{(1)}$. Sean $\rho_k^{(1)}$, $\rho_{\bar{k}}^{(1)}$ las matrices de un cuerpo luego de hallar el modo $|k\rangle$ ocupado o vacío respectivamente, determinado por los estados

$$|\Psi_k\rangle = \mathcal{P}_k|\Psi\rangle/\sqrt{p_k}, \quad |\Psi_{\bar{k}}\rangle = \mathcal{P}_{\bar{k}}|\Psi\rangle/\sqrt{p_{\bar{k}}}, \quad (7.27)$$

con $p_k = \langle\Psi|\mathcal{P}_k|\Psi\rangle = 1 - p_{\bar{k}}$ la probabilidad de que el modo k esté ocupado y $p_{\bar{k}}$. Luego

$$|\Psi\rangle = \sqrt{p_k}|\Psi_k\rangle + \sqrt{p_{\bar{k}}}\langle\Psi_{\bar{k}}\rangle. \quad (7.28)$$

Se probará ahora la relación (7.18), es decir

$$\lambda(\rho^{(1)}) \prec p_k\lambda(\rho_k^{(1)}) + p_{\bar{k}}\lambda(\rho_{\bar{k}}^{(1)}). \quad (7.29)$$

Si el estado medido $|k\rangle$ es un orbital natural tal que $\langle c_k^\dagger c_{k'}\rangle = p_k\delta_{kk'}$ con $p_k = \lambda_k$ un autovalor de $\rho^{(1)}$, la Ec. (7.29) es directa: En este caso (7.28) conduce a

$$\rho^{(1)} = p_k\rho_k^{(1)} + p_{\bar{k}}\rho_{\bar{k}}^{(1)}, \quad (7.30)$$

ya que $\langle \Psi_k | c_{k''}^\dagger c_{k'} | \Psi_{\bar{k}} \rangle = \delta_{k''k} (1 - \delta_{k'k}) \langle c_k^\dagger c_{k'} \rangle = 0 \forall k', k''$. La Ec. (7.30) implica (7.29) pues $\boldsymbol{\lambda}(A + B) \prec \boldsymbol{\lambda}(A) + \boldsymbol{\lambda}(B)$ para cualquiera de las dos matrices hermiticas A y B de $n \times n$ [102]. Este caso incluye el caso trivial de $p_k = 1$ ó 0 , donde $|\Psi\rangle = |\Psi_k\rangle$ ó $|\Psi_{\bar{k}}\rangle$ (en lo siguiente se considera $p_k \in (0, 1)$).

En otro caso, deja de valer la Ec. (7.30). Sin embargo, como $\langle \Psi_k | c_{k''}^\dagger c_{k'} | \Psi_{\bar{k}} \rangle = 0$ para dos estados cualquiera de una partícula $|k'\rangle, |k''\rangle$ ortogonales a $|k\rangle$, la Ec. (7.28) implica, para cualquier subespacio de una partícula $\mathcal{S}_\perp \subset \mathcal{H}$ ortogonal al estado medido $|k\rangle$,

$$\rho_{\mathcal{S}_\perp}^{(1)} = p_k \rho_{k\mathcal{S}_\perp}^{(1)} + p_{\bar{k}} \rho_{\bar{k}\mathcal{S}_\perp}^{(1)}, \quad (7.31)$$

donde $\rho_{\mathcal{S}_\perp}^{(1)} = P_{\mathcal{S}_\perp} \rho^{(1)} P_{\mathcal{S}_\perp}$ y $\rho_{k(\bar{k})\mathcal{S}_\perp}^{(1)}$ son las restricciones de $\rho^{(1)}$ y $\rho_{k(\bar{k})}^{(1)}$ a \mathcal{S}_\perp , y $P_{\mathcal{S}_\perp}$ es el proyector asociado. Este resultado es esperable, ya que la medida es *externa* a \mathcal{S}_\perp (si $[\mathcal{K}_j, O] = 0 \forall j \Rightarrow \text{Tr}[\rho O] = \text{Tr} \sum_j \mathcal{K}_j \rho \mathcal{K}_j^\dagger O = \sum_j p_j \text{Tr}[\rho_j O]$; para $\mathcal{K}_j = \mathcal{P}_{k(\bar{k})}$ y $O = c_{k''}^\dagger c_{k'}$ con k', k'' ortogonal a k , este resultado implica la Ec. (7.31)). Y para cualquier $\mathcal{S} \subset \mathcal{H}$ que contiene al estado $|k\rangle$, se tiene, como $\langle \Psi_k | c_{k''}^\dagger c_{k'} | \Psi_{\bar{k}} \rangle = 0$ para $k' = k$ ó k' ortogonal a k ,

$$\text{Tr} \rho_{\mathcal{S}}^{(1)} = \text{Tr} [p_k \rho_{k\mathcal{S}}^{(1)} + p_{\bar{k}} \rho_{\bar{k}\mathcal{S}}^{(1)}]. \quad (7.32)$$

Se puede probar ahora la desigualdad m -ésima en (7.29),

$$\sum_{\nu=1}^m \lambda_\nu(\rho^{(1)}) \leq \sum_{\nu=1}^m \left(p_k \lambda_\nu(\rho_k^{(1)}) + p_{\bar{k}} \lambda_\nu(\rho_{\bar{k}}^{(1)}) \right). \quad (7.33)$$

Sea $\mathcal{S}_m \subset \mathcal{H}$ el subespacio formado por los primeros m autoestados de $\rho^{(1)}$, tal que $\lambda_\nu(\rho_{\mathcal{S}_m}^{(1)}) = \lambda_\nu(\rho^{(1)})$ para $\nu \leq m$ y por ende $\text{Tr} \rho_{\mathcal{S}_m}^{(1)} = \sum_{\nu=1}^m \lambda_\nu(\rho^{(1)})$. Si \mathcal{S}_m es ortogonal a $|k\rangle$ o lo contiene completamente, las Ecs. (7.31) ó (7.32) valen para $\mathcal{S} = \mathcal{S}_m$, implicando (7.33) ya que $\text{Tr} \rho_{k(\bar{k})\mathcal{S}_m}^{(1)} \leq \sum_{\nu=1}^m \lambda_\nu(\rho_{k(\bar{k})}^{(1)})$ por el principio del máximo de Ky Fan¹ [102].

En caso contrario, se agrega a \mathcal{S}_m la componente $|k_\perp\rangle$ de $|k\rangle$ ortogonal a \mathcal{S}_m , obteniéndose así un subespacio $m + 1$ dimensional \mathcal{S}'_m donde sigue valiendo la Ec. (7.32) y $\lambda_\nu(\rho_{\mathcal{S}'_m}^{(1)}) = \lambda_\nu(\rho^{(1)})$ para $\nu \leq m$. Se prueba en el Apéndice C.1 que los autovalores restantes más pequeños satisfacen

$$\lambda_{m+1}(\rho_{\mathcal{S}'_m}^{(1)}) \geq p_k \lambda_{m+1}(\rho_{k\mathcal{S}'_m}^{(1)}) + p_{\bar{k}} \lambda_{m+1}(\rho_{\bar{k}\mathcal{S}'_m}^{(1)}). \quad (7.34)$$

¹Ky Fan: los m autovalores más grandes λ_ν de una matriz hermitica O satisfacen $\sum_{\nu=1}^m \lambda_\nu \geq \text{Tr} P'_m O = \sum_{\nu=1}^m \lambda'_\nu$ para cualquier proyector ortogonal P'_m de rango m , con λ'_ν los autovalores ordenados de $P'_m O P'_m$

Luego $\sum_{\nu=1}^m \lambda_{\nu}(\rho^{(1)}) \leq \sum_{\nu=1}^m p_k \lambda_{\nu}(\rho_{k\mathcal{S}'_m}^{(1)}) + p_{\bar{k}} \lambda_{\nu}(\rho_{\bar{k}\mathcal{S}'_m}^{(1)})$ debido a la conservación de la traza (7.32) para $\mathcal{S} = \mathcal{S}'_m$, que implica la Ec. (7.33) debido a la desigualdad de Ky Fan. Esto completa la prueba para estados puros. En el Apéndice C.2 se muestra explícitamente que estas medidas mapean DSs en DSs, como se implica en la Ec. (7.29).

La demostración anterior muestra la relación general

$$\boldsymbol{\lambda}(\rho_{\mathcal{S}}^{(1)}) \prec p_k \boldsymbol{\lambda}(\rho_{k\mathcal{S}}^{(1)}) + p_{\bar{k}} \boldsymbol{\lambda}(\rho_{\bar{k}\mathcal{S}}^{(1)}), \quad (7.35)$$

válida para las restricciones de $\rho^{(1)}$ a *cualquier* subespacio $\mathcal{S} \subset \mathcal{H}$, que contenga o sea ortogonal al estado medido $|k\rangle$ ($[P_{\mathcal{S}}, |k\rangle\langle k|] = 0$). El estado $\rho_{\mathcal{S}}^{(1)}$ va a quedar determinado por el estado mixto reducido $\rho_{\mathcal{S}} = \text{Tr}_{\mathcal{S}^{\perp}} |\Psi\rangle\langle\Psi|$ que satisface $\langle\Psi|O_{\mathcal{S}}|\Psi\rangle = \text{Tr} \rho_{\mathcal{S}} O_{\mathcal{S}}$ para cualquier operador $O_{\mathcal{S}}$ que involucre solo operadores de creación y destrucción de estados de una partícula \mathcal{S} (ver Apéndice C.1). La Ec. (7.35) muestra que (7.29) vale para *estados fermiónicos mixtos generales* ρ (asumiendo conmutación con el operador de número fermiónico $\hat{N} = c_k^{\dagger} c_k$ o con el operador de paridad $e^{i\pi\hat{N}}$), ya que pueden ser purificados y vistos como estados reducidos $\rho_{\mathcal{S}}$ de un estado fermiónico puro $|\Psi\rangle$ en un espacio aumentado (Ec. (C.5) en Apéndice C.1). \square

7.2.3. Medidas ONG y operadores más generales

Componiendo medidas (7.26) se pueden obtener medidas más complejas que satisfacen también (7.18). En particular, una medida en una base de DSs, que es obviamente ONG, resulta de la composición de todas las medidas $\{P_k, P_{\bar{k}}\}$ en una base de SP dada. Puede considerarse también la extensión de operaciones libres más allá de las medidas FLO estándar consideradas. La demostración del teorema 7.2.1 puede extenderse a medidas de un modo más generales:

Corolario 1. *Una medida general de un modo de una partícula k descrita por los operadores*

$$\mathcal{M}_k = \alpha \mathcal{P}_k + \beta \mathcal{P}_{\bar{k}}, \quad \mathcal{M}_{\bar{k}} = \gamma \mathcal{P}_k + \delta \mathcal{P}_{\bar{k}}, \quad (7.36)$$

donde $\mathcal{M}_k^{\dagger} \mathcal{M}_k + \mathcal{M}_{\bar{k}}^{\dagger} \mathcal{M}_{\bar{k}} = \mathbb{1}$ ($|\alpha|^2 + |\gamma|^2 = |\beta|^2 + |\delta|^2 = 1$), es también una operación ONG.

La demostración está dada en el Apéndice C.1 e implica que la Ec. (7.29) se satisface para $\rho_{k(\bar{k})}^{(1)}$ la matriz de un cuerpo obtenida de $|\Psi'_{k(\bar{k})}\rangle \propto \mathcal{M}_{k(\bar{k})} |\Psi\rangle$ y $p_k \rightarrow$

$p'_k = \langle \Psi | \mathcal{M}_k^\dagger \mathcal{M}_k | \Psi \rangle = 1 - p'_{\bar{k}}$. Este resultado implica que *cualquier* par de operadores de Kraus \mathcal{M}_k y $\mathcal{M}_{\bar{k}}$ para la medida de ocupación

$$\varepsilon(\rho) = \mathcal{P}_k \rho \mathcal{P}_k + \mathcal{P}_{\bar{k}} \rho \mathcal{P}_{\bar{k}} = \mathcal{M}_k \rho \mathcal{M}_k^\dagger + \mathcal{M}_{\bar{k}} \rho \mathcal{M}_{\bar{k}}^\dagger \quad (7.37)$$

será también una operación ONG, ya que son casos particulares de (7.36) ($\alpha\beta^* + \gamma\delta^* = 0$, es decir $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ unitario).

Es posible también considerar operaciones que no conservan el número fermiónico N pero que generan estados con número definido de partículas al aplicarse sobre tales estados. En este caso es necesario extender la noción de orden parcial (7.1) a estados con distinto número de partículas. La Ec. (7.1) implica una relación de mayorización similar (ver Apéndice C.3)

$$\boldsymbol{\lambda}(D_\Psi^{(1)}) \prec \boldsymbol{\lambda}(D_\Phi^{(1)}) \quad (7.38)$$

para los autovalores ordenados de la matriz de un cuerpo extendida de $2n \times 2n$,

$$D^{(1)} = \rho^{(1)} \oplus (\mathbb{1} - \rho^{(1)T}) = \begin{pmatrix} \rho^{(1)} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} - \rho^{(1)T} \end{pmatrix}, \quad (7.39)$$

con espectro $(\boldsymbol{\lambda}(\rho^{(1)}), 1 - \boldsymbol{\lambda}(\rho^{(1)}))$ y elementos $\langle c_{k'}^\dagger c_k \rangle$, $\langle c_k c_{k'}^\dagger \rangle$, cuya traza $\text{Tr } D^{(1)} = n$ está fijada por la dimensión del espacio de una partícula y es independiente de N .

Para estados generales, se dice que $|\Psi\rangle$ es no menos entrelazado que $|\Phi\rangle$ si se cumple la Ec. (7.38). Vale la pena notar que *todos* los DSs conducen al mismo espectro de autovalores ordenados $\boldsymbol{\lambda}(D^{(1)})$, independientemente de N , siendo todos ellos los estados con menor entrelazamiento, con $(D^{(1)})^2 = D^{(1)}$ sii $|\Psi\rangle$ es un DS. De manera similar, la Ec. (7.18) implica, para operaciones ONG, que conservan número de partículas

$$\boldsymbol{\lambda}(D^{(1)}) \prec \sum_j p_j \boldsymbol{\lambda}(D_j^{(1)}) \quad (7.40)$$

para las matrices extendidas. Se dice entonces que una operación que no conserva número fermiónico es ONG si admite un conjunto de operadores de Kraus \mathcal{K}_j tal que se satisface (7.40). La Prop. 1 sigue siendo válida para operaciones ONG generales reemplazando (7.1) por (7.38). Todas las propiedades anteriores satisfechas por las entropías (7.14) se extienden a las entropías

$$E(|\Psi\rangle) = S(D^{(1)}), \quad (7.41)$$

con $\text{Tr} f(D^{(1)}) = \text{Tr} f(\rho^{(1)}) + \text{Tr} f(\mathbb{1} - \rho^{(1)})$. En particular, la entropía de un cuerpo se convierte en la entropía de Von Neumann para $D^{(1)}$. Estados con entrelazamiento

de un cuerpo máximo son ahora aquellos que conducen a

$$D^{(1)} = \mathbb{1}_{2n}/2, \quad (7.42)$$

que van a maximizar todas las entropías (7.41). A modo de ejemplo basta considerar los estados GHZ mencionados previamente (7.24) en el caso medio-lleno ($m = 2$, $N = n/2 \geq 1$).

El Teorema 1 implica entonces el siguiente resultado para la medida básica con operadores c_k , c_k^\dagger :

Corolario 2. *Una medida en un único modo k de una partícula descrito por los operadores c_k y c_k^\dagger , que satisface $c_k^\dagger c_k + c_k c_k^\dagger = \mathbb{1}$, es una operación ONG:*

$$\lambda(D^{(1)}) \prec p_k \lambda(D_k^{(1)}) + p_{\bar{k}} \lambda(D_{\bar{k}}^{(1)}). \quad (7.43)$$

Aquí $p_k = \langle c_k^\dagger c_k \rangle = 1 - p_{\bar{k}}$, y $D^{(1)}$, $D_{k(\bar{k})}^{(1)}$ son las matrices de un cuerpo extendidas determinadas por ρ , $\rho_k = c_k \rho c_k^\dagger / p_k$ y $\rho_{\bar{k}} = c_{\bar{k}}^\dagger \rho c_{\bar{k}} / p_{\bar{k}}$. Como estas densidades extendidas $D_{k(\bar{k})}^{(1)}$ tienen claramente el *mismo* espectro que aquellas obtenidas de $\mathcal{P}_k \rho \mathcal{P}_k / p_k$ y $\mathcal{P}_{\bar{k}} \rho \mathcal{P}_{\bar{k}} / p_{\bar{k}}$, la Ec. (7.43) sigue directamente del Teorema 7.2.1 y de la Ec. (C.21). Por otro lado, la medida básica de ocupación (7.26) previa es solo una composición de esta medida consigo misma (ver Apéndice C.3). Esta extensión habilita considerar entonces la operación de agregar ancillas libres (DSs de N arbitrario) como operaciones libres, ya que la misma no va a alterar el espectro de la matriz de un cuerpo extendida $D^{(1)}$ en el espacio completo de SP.

Vale la pena remarcar, sin embargo, que operaciones FLO “activas” generales, es decir operaciones FLO que no conservan el número de partículas (transformaciones de Bogoliubov por ejemplo) pueden aumentar el entrelazamiento de un cuerpo determinado por $\rho^{(1)}$. No se discutirán estas operaciones aquí, se puede mencionar que, si se consideran libres, se debería considerar el entrelazamiento de un cuerpo generalizado determinado por la matriz densidad completa de cuasipartículas $D^{(1)}$ (ver 3.25), que contiene las contracciones de los pares de creación y destrucción. Este entrelazamiento es invariante frente a transformaciones de Bogoliubov y se hace nulo sii $|\Psi\rangle$ es un vacío (o DS) de cuasipartículas (ver Apéndice C.3).

7.3. Entrelazamiento de un cuerpo como recurso

La identificación de operaciones FLO que conservan el número de partículas como ONG, implica que DSs se mapean a DSs, como se muestra en el Apéndice C.2. Esta

es la explicación a porqué modelos de computación cuántica de estados puros con FLO pueden ser simulados de forma clásica eficientemente [112]. Esto se consigue tomando elementos de matrices de unitarias libres y deduciendo las probabilidades de los posibles resultados de las medidas a partir de los overlaps $\langle \Psi | \Phi \rangle$ entre DSs, que pueden a su vez ser computadas en tiempos polinomiales a través de un determinante [55].

Por el contrario, la medida simultaneas de ocupación de dos modos de SP k y k' , descritas por operadores $\{\mathcal{M}_0 = \mathcal{P}_{\bar{k}}\mathcal{P}_{\bar{k}'}, \mathcal{M}_1 = \mathcal{P}_{\bar{k}}\mathcal{P}_{k'} + \mathcal{P}_k\mathcal{P}_{\bar{k}'}, \mathcal{M}_2 = \mathcal{P}_k\mathcal{P}_{k'}\}$, no es libre, ya que \mathcal{M}_1 puede mapear un DS a un estado con número de Slater 2 [112], es decir a un estado con entrelazamiento de un cuerpo. Una medida similar con m posibles resultados puede devolver un estado con número de Slater exponencialmente grande (2^m) [112], cuyos valores de expectación serían difíciles de evaluar clásicamente. En [113] esta operación se identifica con una medida de detección de carga en un sistema de electrones libres, mostrando que es posible construir una compuerta CNOT con beamsplitters, rotaciones de spin y detección de carga. El conjunto extendido de FLO + detección de carga habilita entonces computación cuántica. Si el poder computacional de este modelo se conecta con un recurso cuántico, los estados y operaciones libres serían \mathcal{S} y \mathcal{O} respectivamente, y los resultados aquí derivados implican que el entrelazamiento de un cuerpo sería un recurso asociado.

El entrelazamiento de un cuerpo puede también considerarse un recurso para el entrelazamiento de modos. En particular, el entrelazamiento de modos con *número definido de partículas* N o *paridad definida* $e^{i\pi N}$ de cada lado requiere entrelazamiento de un cuerpo [3]. Un primer ejemplo puede verse en la forma normal (7.13) para un estado general de dos fermiones [22-24], donde el entrelazamiento entre los modos k (A) y \bar{k} (B), que contienen un fermión cada uno, se conecta directamente con el entrelazamiento de un cuerpo: La entropía de entrelazamiento $E(A, B) = S(\rho_A) = S(\rho_B)$ de esta partición es simplemente

$$E(A, B) = \sum_{\nu} f(\lambda_{\nu}) = \frac{1}{2}E(|\Psi\rangle) \quad (7.44)$$

para cualquier entropía $S(\rho) = -\text{Tr} f(\rho)$, donde $E(|\Psi\rangle) = S(\rho^{(1)})$ es el entrelazamiento de un cuerpo correspondiente a (7.14) (como $\langle c_{\nu}^{\dagger}c_{\nu'} \rangle = \langle c_{\bar{\nu}}^{\dagger}c_{\bar{\nu}'} \rangle = \lambda_{\nu}\delta_{\nu\nu'}$, $\langle c_{\nu}^{\dagger}c_{\bar{\nu}'} \rangle = 0$). En particular, cualquier estado entrelazado en un cuerpo de dos fermiones en un espacio de SP de dimensión 4 puede verse como un estado entrelazado de dos qubits distinguibles, permitiendo entonces la realización de tareas como teleportación cuántica [83]. En este caso, el entrelazamiento de un cuerpo indica una cota inferior para cualquier entrelazamiento bipartito de modos [83].

Para un estado general fermiónico $|\Psi\rangle$ (con número o paridad de número de partículas fija) se muestra ahora que el entrelazamiento de un cuerpo *es siempre necesario* para tener entrelazamiento bipartito de modos $E(A, B) > 0$ con número o paridad de número de partículas definida de cada lado A, B :

En este caso, y asumiendo que el lado A (B) se corresponde con un subespacio \mathcal{H}_A (\mathcal{H}_B) del espacio de SP $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \oplus \mathcal{H}_B$, la matriz de un cuerpo toma la forma diagonal en bloques $\rho^{(1)} = \rho_A \oplus \rho_B$, es decir,

$$\rho^{(1)} = \begin{pmatrix} \rho_A^{(1)} & 0 \\ 0 & \rho_B^{(1)} \end{pmatrix} \quad (7.45)$$

ya que para $k_A \in \mathcal{H}_A$, $k_B \in \mathcal{H}_B$, $c_{k_A}^\dagger c_{k_B}$ conecta estados con paridad diferente de cada lado y por tanto $\langle c_{k_A}^\dagger c_{k_B} \rangle = 0$ en este estado. Luego, si $|\Psi\rangle$ es un DS, $(\rho^{(1)})^2 = \rho^{(1)}$, implicando $(\rho_{A(B)}^{(1)})^2 = \rho_{A(B)}^{(1)}$, es decir, el estado de cada lado debe ser un DS y no hay directamente entrelazamiento $A - B$. Por ejemplo, un estado de un fermión $\frac{1}{\sqrt{2}}(c_{k_A}^\dagger + c_{k_B}^\dagger)|0\rangle$ implica entrelazamiento entre A y B , pero involucrando 0 y 1 fermión de cada lado, es decir no hay paridad local definida. Por el contrario, $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_{k_A}^\dagger c_{k_B}^\dagger + c_{k'_A}^\dagger c_{k'_B}^\dagger)|0\rangle$ conduce a entrelazamiento entre A y B con número fermiónico fijo (y por tanto paridad) de cada lado, pero no es un DS ya que tiene entrelazamiento de un cuerpo distinto de cero.

Expandiendo el estado en base de DS como $|\Psi\rangle = \sum_{\mu, \nu} C_{\mu\nu} A_\mu^\dagger B_\nu^\dagger |0\rangle$, donde $A_\mu^\dagger = \prod_k (c_{k_A}^\dagger)^{n_{k\mu}}$, $B_\nu^\dagger = \prod_k (c_{k_B}^\dagger)^{n_{k\nu}}$ involucra operadores de creación solo en \mathcal{H}_A y \mathcal{H}_B respectivamente (con $n_{k_\mu(\nu)} = 0, 1$ y μ, ν etiquetando todos los posibles conjuntos de números de ocupación, tales que $\langle 0|A_\mu A_{\mu'}^\dagger|0\rangle = \delta_{\mu\mu'}$, $\langle 0|B_\nu B_{\nu'}^\dagger|0\rangle = \delta_{\nu\nu'}$), se obtienen estados con paridad definida de cada lado, correspondientes a $(-1)^{\sum_k n_{k\mu}}$ y $(-1)^{\sum_k n_{k\nu}}$ fijos para todo μ, ν con $C_{\mu\nu} \neq 0$. La matriz densidad reducida del lado A es $\rho_A = \sum_{\mu\mu'} (CC^\dagger)_{\mu\mu'} A_\mu^\dagger |0\rangle \langle 0| A_{\mu'}$ (y similarmente para ρ_B ; ver Apéndice C.1), y hay entrelazamiento entre A y B cuando ρ_A tiene rango ≥ 2 , es decir que el rango(C) ≥ 2 . En tal caso, argumentos anteriores muestran que $|\Psi\rangle$ no puede ser un DS si el número de fermiones o la paridad está fija de un lado.

A causa de la regla de superselección de paridad [20, 114], se requiere paridad fija de cada lado para poder considerar combinaciones lineales arbitrarias de estados locales, y por ende tener entrelazamiento completamente equivalente al caso distinguible. La condición de número fijo de partículas de cada lado puede ser también requerida si se consideran otras reglas de superselección, como por ejemplo carga fija.

Finalmente, se destaca que el entrelazamiento de un cuerpo puede vincularse

también con el entrelazamiento multipartito en sistemas de constituyentes distinguibles. Se considera un sistema de N -partes con espacio de Hilbert $\mathcal{L} = \bigotimes_{i=1}^N \mathcal{L}_i$, donde \mathcal{L}_i es el espacio de Hilbert del i -ésimo constituyente. Se considera también un sistema de N fermiones con espacio de SP $\mathcal{H} = \bigoplus_{i=1}^N \mathcal{H}_i$, tal que $\dim \mathcal{H}_i = \dim \mathcal{L}_i$. Esto habilita la definición de un isomorfismo $\Theta_i : \mathcal{L}_i \rightarrow \mathcal{H}_i$ entre estos dos espacios: Cualquier estado puro separable en \mathcal{L} , $|S\rangle_{\mathcal{L}} = \bigotimes_{i=1}^N |\phi_i\rangle$, con $|\phi_i\rangle \in \mathcal{L}_i$, puede ser mapeado a un DS

$$|\Psi\rangle = \left[\prod_{i=1}^N c_{i,\phi}^\dagger \right] |0\rangle, = \Theta(|S\rangle_{\mathcal{L}}), \quad (7.46)$$

donde $c_{i,\phi}^\dagger$ crea un fermión en el estado $\Theta_i(|\phi_i\rangle) \in \mathcal{H}_i$.

El mapa $\Theta : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{F}$ es un isomorfismo entre \mathcal{L} y el subespacio de \mathcal{F} determinado por el estado fermiónico con número de ocupación $N_i = 1$ en $\mathcal{H}_i \subset \mathcal{H}$, es decir nuevamente número fijo de fermiones en cada parte. Luego, cualquier estado puro $|\Phi\rangle_{\mathcal{L}}$ del sistema multipartito es mapeado a un estado $|\Psi\rangle = \Theta(|\Phi\rangle_{\mathcal{L}})$ en \mathcal{F} . Es fácil verificar que en este caso la matriz de un cuerpo $\rho^{(1)}$ determinada por $|\Psi\rangle$ se bloquea como

$$\rho^{(1)} = \bigoplus_i \rho_i, \quad (7.47)$$

donde los elementos de la matriz ρ_i son aquellos del estado reducido del subsistema i asociado a $|\Phi\rangle_{\mathcal{L}}$. Luego monótonos de entrelazamiento de un cuerpo se convierten en $E(|\Psi\rangle) = \text{Tr} f(\rho^{(1)}) = \sum_i \text{Tr} f(\rho_i)$, siendo equivalentes a la versión multipartita de la *entropía de entrelazamiento lineal* [34, 115-117] y constituyendo así monótonos para el entrelazamiento multipartito de la representación de producto tensorial.

Esta conexión entre el entrelazamiento de un cuerpo y el entrelazamiento multipartito no es una sorpresa si se recuerda que operaciones locales en un sistema multipartito no aumentan, en promedio, la mezcla de autovalores locales. La relación (7.47) implica entonces que estas operaciones no pueden aumentar el grado de mezcla de la matriz de un cuerpo asociada a la representación fermiónica, en concordancia con la Ec. (7.1). Y cualquier unitaria local en la representación de producto tensorial puede ser implementada como una unitaria de un cuerpo en el sistema fermiónico, mientras que medidas locales proyectivas pueden realizarse como medidas de ocupación, ambas operaciones FLO que son ONG.

El overlap entre el entrelazamiento de un cuerpo y el multipartito, refuerza la idea de que la primera pueda ser el recurso detrás del poder computacional del modelo descrito en [113], ya que consiste en un mapeo de qubits a fermiones análogo al mapa Θ definido anteriormente.

Entrelazamiento de M cuerpos

En el presente capítulo se desarrolla la generalización de la formulación bipartita introducida en el capítulo anterior para el entrelazamiento de un cuerpo. Se consideran operadores en el espacio fermiónico de Fock que crean estados generales de M -fermiones y que serán usados para mostrar que un estado general de N fermiones puede siempre ser escrito como forma bipartita de $M < N$ y $N - M$ fermiones. Esta representación bipartita se conecta con las definiciones de las matrices densidad (MDs) reducidas de M y $N - M$ cuerpos [118-120] de forma similar a lo que se observa para estados bipartitos de componentes distinguibles. La descomposición símil-Schmidt del tipo $(M, N - M)$ resultante determina la forma diagonal de estas MDs, implicando que comparten los mismos autovalores no nulos.

Extendiendo la analogía, se propone vincular las correlaciones entre los observables de M y $N - M$ -cuerpos, que se define como *entrelazamiento de M -cuerpos*, con el grado de mezcla de la MD de M -cuerpos, medido a través de las relaciones de mayorización de sus autovalores. Se introduce una familia de medidas entrópicas de estas correlaciones y se muestra que existe una clase de operaciones que no aumentan en promedio este grado de mezcla en ningún estado de N fermiones. Finalmente, se demuestra la existencia de una familia de mapas cuánticos que convierten estados de N fermiones en estados bipartitos de M y $N - M$ fermiones efectivamente distinguibles. Las conversiones realizadas con estos mapas son tales que la entropía de entrelazamiento del estado bipartito final está acotado superiormente por la entropía de M cuerpos, asignándole a esta cantidad un claro significado operacional. Se presentan también evaluaciones analíticas y numéricas del espectro de las matrices densidad de M cuerpos para ciertos estados fermiónicos fuertemente correlacionados. Los resultados de este capítulo han originado el trabajo [4].

8.1. Formalismo

8.1.1. Estados de N fermiones

Se define el operador de creación de M -fermiones

$$C_{\alpha}^{(M)\dagger} = c_{i_1}^{\dagger} \cdots c_{i_M}^{\dagger}, \quad (8.1)$$

donde las etiquetas $i_1 < i_2 < \dots < i_M$ y $\alpha = (i_1, \dots, i_M)$ determinan todos los $\binom{D}{M} = \frac{D!}{M!(D-M)!}$ conjuntos distintos de estados de M partículas ordenados de forma creciente. Estos operadores satisfacen

$$\langle 0 | C_{\alpha}^{(M)} C_{\alpha'}^{(M')\dagger} | 0 \rangle = \delta^{MM'} \delta_{\alpha\alpha'}, \quad (8.2)$$

$$\sum_{\alpha} C_{\alpha}^{(M)\dagger} C_{\alpha}^{(M)} = \binom{\hat{N}}{M}, \quad (8.3)$$

donde $\hat{N} = \sum_i c_i^{\dagger} c_i$ es el operador número de fermiones y $\binom{\hat{N}}{M}$ es el operador que toma el valor $\binom{N}{M}$ en un estado de N fermiones ($\binom{\hat{N}}{M} |\Psi\rangle = \binom{N}{M} |\Psi\rangle$ para $\hat{N} |\Psi\rangle = N |\Psi\rangle$, con $\binom{\hat{N}}{1} = \hat{N}$, $\binom{\hat{N}}{2} = \frac{\hat{N}^2 - \hat{N}}{2}$, etc.). La Ec. (8.3) es una generalización del operador número, representando el número de “compuestos de M -fermiones”. Los estados $C_{\alpha}^{M\dagger} | 0 \rangle$ son DSs y forman, para todo α y $0 \leq M \leq D$, una base ortonormal del espacio de Fock 2^D -dimensional asociado a \mathcal{H} .

Un estado puro normalizado $|\Psi\rangle$ de N fermiones ($\hat{N} |\Psi\rangle = N |\Psi\rangle$) puede expandirse en esta base como

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{N!} \sum_{i_1, \dots, i_N} \Gamma_{i_1 \dots i_N} c_{i_1}^{\dagger} \cdots c_{i_N}^{\dagger} | 0 \rangle \quad (8.4)$$

$$= \sum_{\alpha} \Gamma_{\alpha}^{(N)} C_{\alpha}^{(N)\dagger} | 0 \rangle, \quad (8.5)$$

donde $\Gamma_{i_1 \dots i_N}$ son los elementos de un tensor totalmente antisimétrico y $\Gamma_{\alpha}^{(N)} = \langle 0 | C_{\alpha}^{(N)} |\Psi\rangle = \Gamma_{i_1 \dots i_N}$ (para $\alpha = (i_1, \dots, i_N)$, $i_1 < i_2 < \dots < i_N$), con

$$\sum_{\alpha} |\Gamma_{\alpha}^{(N)}|^2 = \frac{1}{N!} \sum_{i_1, \dots, i_N} |\Gamma_{i_1 \dots i_N}|^2 = 1. \quad (8.6)$$

Luego, $|\Gamma_{\alpha}^{(N)}|^2 = \langle \Psi | C_{\alpha}^{(N)\dagger} C_{\alpha}^{(N)} | \Psi \rangle$ es la probabilidad de encontrar los N estados de SP α ocupados en $|\Psi\rangle$.

8.1.2. La representación $(M, N - M)$ y la MD de M cuerpos

Para $0 \leq M \leq N$ puede reescribirse el estado (8.4) como

$$|\Psi\rangle = \binom{N}{M}^{-1} \sum_{\alpha, \beta} \Gamma_{\alpha\beta}^{(M)} C_{\alpha}^{(M)\dagger} C_{\beta}^{(N-M)\dagger} |0\rangle, \quad (8.7)$$

donde $\Gamma_{\alpha\beta}^{(M)} \equiv \Gamma_{\alpha\beta}^{(M, N-M)}$ viene dado por

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{(M)} = \langle 0 | C_{\beta}^{(N-M)} C_{\alpha}^{(M)} | \Psi \rangle = \Gamma_{i_1 \dots i_M j_1 \dots j_{N-M}}, \quad (8.8)$$

para $\alpha = (i_1, \dots, i_M)$, $\beta = (j_1, \dots, j_{N-M})$, y la suma en (8.7) es sobre todos los $\binom{D}{M}$ y los $\binom{D}{N-M}$ conjuntos distintos de M y $N - M$ estados de SP respectivamente, con (8.6) implicando

$$\sum_{\alpha, \beta} |\Gamma_{\alpha\beta}^{(M)}|^2 = \binom{N}{M}. \quad (8.9)$$

Se denotará la expresión (8.7) como la *representación de $(M, N - M)$ -cuerpos* del estado de N -fermiones (8.4). Es una expansión bipartita de $|\Psi\rangle$ en estados ortogonales de M - y $(N - M)$ -fermiones, que conducen a una representación matricial $\Gamma^{(M)}$ con dimensiones $\binom{D}{M} \times \binom{D}{N-M}$ del tensor original Γ de la Ec. (8.4). Naturalmente, descomposiciones $(M, N - M)$ y $(N - M, M)$ son equivalentes, con

$$\Gamma^{(N-M)} = (-1)^{M(N-M)} (\Gamma^{(M)})^T, \quad (8.10)$$

debido a la antisimetría de Γ (T denota la transpuesta). La Ec. (8.5) es la representación trivial $(N, 0)$. De la antisimetría de Γ sigue que

$$C_{\alpha}^{(M)} |\Psi\rangle = \sum_{\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^{(M)} C_{\beta}^{(N-M)\dagger} |0\rangle, \quad (8.11)$$

que representa el estado (no normalizado) de los $N - M$ fermiones restantes cuando los M estados de SP etiquetados por α están ocupados en $|\Psi\rangle$. Las Ecs. (8.11) y (8.2) implican que *la matriz densidad de M -cuerpos* [118, 120], cuyos elementos están definidos como

$$\rho_{\alpha\alpha'}^{(M)} := \langle \Psi | C_{\alpha'}^{(M)\dagger} C_{\alpha}^{(M)} | \Psi \rangle, \quad (8.12)$$

pueden expresarse en términos de $\Gamma^{(M)}$ como

$$\rho^{(M)} = \Gamma^{(M)} \Gamma^{(M)\dagger}, \quad (8.13)$$

es decir $\rho_{\alpha\alpha'}^{(M)} = \sum_{\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^{(M)} \Gamma_{\alpha'\beta}^{(M)*}$, de la misma forma que la matriz densidad reducida $\rho^A = \text{Tr}_B |\Psi_{AB}\rangle \langle \Psi_{AB}|$ se obtiene de un estado general $|\Psi_{AB}\rangle = \sum_{i,j} G_{ij} |i_A, j_B\rangle$ en

un sistema de componentes distinguibles ($\rho_{ii'}^A = (GG^\dagger)_{ii'}$ para $\rho_{ii'}^A = \langle \Psi_{AB} | |i'_A\rangle \langle i_A| \otimes \mathbb{1}_B | \Psi_{AB} \rangle$). En particular, $\rho_{\alpha\alpha}^{(M)}$ es la probabilidad de encontrar los M estados de SP especificados por los α ocupados en $|\Psi\rangle$. La Ec. (8.13) devuelve una matriz positiva semidefinida de dimensiones $\binom{D}{M} \times \binom{D}{M}$ que determina el valor medio de cualquier operador de M -cuerpos $\hat{O}^{(M)} = \sum_{\alpha, \alpha'} O_{\alpha\alpha'}^{(M)} C_\alpha^{(M)\dagger} C_{\alpha'}^{(M)}$ a través de

$$\langle \Psi | \hat{O}^{(M)} | \Psi \rangle = \text{Tr} [\rho^{(M)} O^{(M)}]. \quad (8.14)$$

Su traza viene dada por

$$\text{Tr} [\rho^{(M)}] = \binom{N}{M}, \quad (8.15)$$

como implican las Ecs. (8.3) ó (8.9). Se tiene también que

$$C_\beta^{(N-M)} |\Psi\rangle = \sum_{\alpha} \Gamma_{\beta\alpha}^{(N-M)} C_\alpha^{(M)\dagger} |0\rangle. \quad (8.16)$$

Por tanto, usando (8.10), la MD compañera de $(N - M)$ -cuerpos, con elementos $\rho_{\beta\beta'}^{(N-M)} = \langle \Psi | C_{\beta'}^{(N-M)\dagger} C_\beta^{(N-M)} | \Psi \rangle$, es

$$\rho^{(N-M)} = \Gamma^{(N-M)} \Gamma^{(N-M)\dagger} = (\Gamma^{(M)})^T \Gamma^{(M)*}, \quad (8.17)$$

que muestra que tiene *los mismos autovalores no nulos* (y por tanto la misma traza) que la MD de M -cuerpos (8.13) [118, 120], como se discutirá con más detalle en la Sec. 8.1.3.

En particular, para $M = 1$, $C_\alpha^{(1)\dagger} = c_i^\dagger$ y se recupera de (8.7) la representación $(1, N - 1)$ [3]

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{N} \sum_{i, \alpha} \Gamma_{i\alpha}^{(1)} c_i^\dagger C_\alpha^{(N-1)\dagger} |0\rangle, \quad (8.18)$$

donde la matriz $\Gamma^{(1)}$ de $D \times \binom{D}{N-1}$ elementos determina la MD de *un-cuerpo* $\rho^{\text{sp}} \equiv \rho^{(1)}$ (SPDM por sus siglas en inglés) $\rho_{ii'}^{(1)} = \langle \Psi | c_i^\dagger c_i | \Psi \rangle$ a través de

$$\rho^{(1)} = \Gamma^{(1)} \Gamma^{(1)\dagger}. \quad (8.19)$$

Finalmente se remarca que la Ec. (8.7) es un caso particular de la representación más general *k-partita* del estado (8.4),

$$|\Psi\rangle = \frac{M_1! \dots M_k!}{N!} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_k} \Gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^{M_1 \dots M_k} C_{\alpha_1}^{(M_1)\dagger} \dots C_{\alpha_k}^{(M_k)\dagger} |0\rangle, \quad (8.20)$$

donde $\Gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^{M_1 \dots M_k} = \langle 0 | C_{\alpha_k}^{(M_k)} \dots C_{\alpha_1}^{(M_1)} | \Psi \rangle = \Gamma_{i_1 \dots i_N}$ para $\alpha_1 \equiv (i_1, \dots, i_{M_1}), \dots, \alpha_k \equiv (i_{N-M_k+1}, \dots, i_N)$ y $\sum_{j=1}^k M_j = N$, con $k \leq N$ y sumas sobre todos los $\binom{D}{M_j}$ conjuntos de M_j estados de SP. La expansión básica (8.4) corresponde a $k = N$ y $M_j = 1$ para $j = 1, \dots, N$.

8.1.3. La representación de Schmidt ($M, N - M$)

Se puede aplicar la descomposición en valores singulares a la matriz $\Gamma^{(M)}$,

$$\Gamma^{(M)} = U^{(M)} D^{(M)} V^{(N-M)\dagger}, \quad (8.21a)$$

$$D_{\nu\nu'}^{(M)} = \sqrt{\lambda_\nu^{(M)}} \delta_{\nu\nu'}, \quad (8.21b)$$

donde $U^{(M)}, V^{(N-M)}$ son matrices unitarias de $\binom{D}{M} \times \binom{D}{M}$ y $\binom{D}{N-M} \times \binom{D}{N-M}$ y $D^{(M)} \equiv D^{(M, N-M)}$ una matriz diagonal de elementos no negativos de dimensión $\binom{D}{M} \times \binom{D}{N-M}$. Aquí $\lambda_\nu^{(M)}$ denota el cuadrado de los valores singulares de $\Gamma^{(M)}$, es decir los autovalores de $\Gamma^{(M)}\Gamma^{(M)\dagger} = \rho^{(M)}$ o equivalentemente $\Gamma^{(M)T}\Gamma^{(M)*} = \rho^{(N-M)}$, que tienen el mismo espectro (excepto por el número de autovalores no nulos). Luego es posible reescribir la Ec. (8.7) en la forma diagonal simil-Schmidt

$$|\Psi\rangle = \binom{N}{M}^{-1} \sum_{\nu=1}^{n_M} \sqrt{\lambda_\nu^{(M)}} A_\nu^{(M)\dagger} B_\nu^{(N-M)\dagger} |0\rangle, \quad (8.22)$$

donde n_M es el rango de $\Gamma^{(M)}$ y

$$A_\nu^{(M)\dagger} = \sum_{\alpha} U_{\alpha\nu}^{(M)} C_{\alpha}^{(M)\dagger}, \quad (8.23)$$

$$B_\nu^{(N-M)\dagger} = \sum_{\beta} V_{\beta\nu}^{(N-M)*} C_{\beta}^{(N-M)\dagger}, \quad (8.24)$$

son operadores “colectivos” que crean, respectivamente, M y $N - M$ fermiones en estados generales entrelazados (estados no-DSs para $M \geq 2$). Sin embargo, como están relacionados unitariamente al operador original $C_{\alpha}^{(M)\dagger}$ y $C_{\beta}^{(N-M)\dagger}$, satisfacen, para $1 \leq M \leq N - 1$,

$$\langle 0 | A_\nu^{(M)} A_{\nu'}^{(M)\dagger} | 0 \rangle = \delta_{\nu\nu'} = \langle 0 | B_\nu^{(N-M)} B_{\nu'}^{(N-M)\dagger} | 0 \rangle, \quad (8.25)$$

$$\sum_{\nu} A_\nu^{(M)\dagger} A_\nu^{(M)} = \binom{\hat{N}}{M} = \sum_{\nu} B_\nu^{(N-M)\dagger} B_\nu^{(N-M)}, \quad (8.26)$$

$$\langle 0 | B_{\nu'}^{(N-M)} A_\nu^{(M)} | \Psi \rangle = \sqrt{\lambda_\nu^{(M)}} \delta_{\nu\nu'}. \quad (8.27)$$

Además, las Ecs. (8.11), (8.21) y (8.23) llevan a

$$A_\nu^{(M)} | \Psi \rangle = \sqrt{\lambda_\nu^{(M)}} B_\nu^{(N-M)\dagger} | 0 \rangle, \quad (8.28)$$

de forma tal que $B_\nu^{(N-M)\dagger} | 0 \rangle$ es el estado de los $N - M$ fermions restantes cuando M fermiones son medidos en el estado “normal” ó “natural” $A_\nu^{(M)\dagger} | 0 \rangle$. Las Ecs. (8.25)–(8.28) también implican que los operadores normales $A_\nu^{(M)}, B_\nu^{(N-M)}$ *diagonalizan* la

MD de M - y $(N - M)$ -cuerpos:

$$\begin{aligned}
 \langle \Psi | A_{\nu'}^{(M)\dagger} A_{\nu}^{(M)} | \Psi \rangle &= (U^{(M)\dagger} \rho^{(M)} U^{(M)})_{\nu\nu'} \\
 &= \lambda_{\nu}^{(M)} \delta_{\nu\nu'} \\
 &= \langle \Psi | B_{\nu'}^{(N-M)\dagger} B_{\nu}^{(N-M)} | \Psi \rangle.
 \end{aligned} \tag{8.29}$$

Para $M = 1$ se recupera (8.23)–(8.24) la representación diagonal de la MD de un cuerpo $\rho^{(1)}$ [3], con $A_{\nu}^{(1)\dagger} = \sum_i U_{i\nu} c_i^{\dagger} = c_{\nu}^{\dagger}$ los operadores que crean un fermión en los orbitales de SP correspondientes.

En el caso trivial $M = N$, $\rho^{(N)}$ tiene un solo autovalor no nulo $\lambda_1^{(N)} = 1$ asociado con el operador $A_1^{(N)\dagger} = \sum_{\alpha} \Gamma_{\alpha}^{(N)} C_{\alpha}^{(N)\dagger}$ que crea el estado. Por otro lado, en un DS de N fermiones, que puede siempre escribirse como $|\Psi\rangle = c_1^{\dagger} \dots c_N^{\dagger} |0\rangle$ mediante una elección correcta de operadores c_i^{\dagger} , $\rho^{(M)}$ tiene exactamente $\binom{N}{M}$ autovalores no nulos $\lambda_{\nu}^{(M)} = 1$, asociados con los $\binom{N}{M}$ operadores $A_{\nu}^{(M)\dagger} = c_{i_1}^{\dagger} \dots c_{i_M}^{\dagger}$, $1 \leq i_1 < \dots < i_M \leq N$, en la base de los N estados de un cuerpo ocupados, satisfaciendo $\langle \Psi | A_{\nu'}^{(M)\dagger} A_{\nu}^{(M)} | \Psi \rangle = \delta_{\nu\nu'}$. Por ejemplo, la descomposición (8.22) de un DS con $N = 3$ $c_1^{\dagger} c_2^{\dagger} c_3^{\dagger} |0\rangle$ para $M = 1$ es simplemente $|\Psi\rangle = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 c_i^{\dagger} B_i^{(2)\dagger} |0\rangle$, con $B_1^{(2)\dagger} = c_2^{\dagger} c_3^{\dagger}$, $B_2^{(2)\dagger} = -c_1^{\dagger} c_3^{\dagger}$, $B_3^{(2)\dagger} = c_1^{\dagger} c_2^{\dagger}$ y $\langle c_i^{\dagger} c_j \rangle = \delta_{ij} = \langle B_i^{(2)\dagger} B_j^{(2)} \rangle$ para $i, j \leq 3$. Similarmente para un N general. Entonces, en un DS $\rho^{(M)}$ es idempotente: $(\rho^{(M)})^2 = \rho^{(M)} \forall M \leq N$.

Para un estado general puro de dos fermiones $|\Psi_2\rangle = \frac{1}{2} \sum_{i < j} \Gamma_{ij} c_i^{\dagger} c_j^{\dagger} |0\rangle$, con $\Gamma_{ij} = -\Gamma_{ji}$, los valores singulares (no nulos) de $\Gamma^{(1)} = \Gamma$ para la descomposición (1, 1) ($M = 1$), y por tanto los autovalores de $\rho^{(1)} = \Gamma \Gamma^{\dagger}$, son siempre doblemente degenerados [22], de forma tal que los operadores naturales pueden emparejarse como $A_{\nu}^{(1)\dagger} = c_{\nu}^{\dagger}$, $A_{\bar{\nu}}^{(1)\dagger} = c_{\bar{\nu}}^{\dagger}$ para $\lambda_{\nu}^{(1)} = \lambda_{\bar{\nu}}^{(1)}$, con $B_{\nu}^{(1)} = c_{\bar{\nu}}^{\dagger}$, $B_{\bar{\nu}}^{(1)} = -c_{\nu}^{\dagger}$ y $c_{\nu}^{\dagger} c_{\bar{\nu}} = \sum_j U_{j\nu(\bar{\nu})} c_j^{\dagger}$. Luego la Ec. (8.22) conduce a

$$|\Psi_2\rangle = \frac{1}{2} \sum_{\nu} \sqrt{\lambda_{\nu}^{(1)}} (A_{\nu}^{(1)\dagger} B_{\nu}^{(1)\dagger} + A_{\bar{\nu}}^{(1)\dagger} B_{\bar{\nu}}^{(1)\dagger}) |0\rangle \tag{8.30a}$$

$$= \sum_{\nu} \sqrt{\lambda_{\nu}^{(1)}} c_{\nu}^{\dagger} c_{\bar{\nu}}^{\dagger} |0\rangle, \tag{8.30b}$$

donde (8.30b) es la conocida descomposición de Slater de un estado de dos fermiones [22, 24], con $\langle c_{\nu}^{\dagger} c_{\nu'} \rangle = \langle c_{\bar{\nu}}^{\dagger} c_{\bar{\nu}'} \rangle = \lambda_{\nu}^{(1)} \delta_{\nu\nu'}$, $\langle c_{\nu}^{\dagger} c_{\bar{\nu}'} \rangle = 0$ y $\sum_{\nu} \lambda_{\nu}^{(1)} = 1$. Para $D = 4$ (dos fermiones en 4 niveles de SP), hay solo dos autovalores distintos $\lambda_{\nu}^{(1)}$, dados por $\lambda_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1-C^2}}{2}$, con $C = 2|\Gamma_{12}\Gamma_{34} - \Gamma_{13}\Gamma_{24} + \Gamma_{14}\Gamma_{23}| = 2\sqrt{\lambda_+ \lambda_-}$ la concurrencia fermiónica [22, 24, 31], y (8.30b) puede reescribirse como $(\sqrt{\lambda_+} c_1^{\dagger} c_1^{\dagger} + \sqrt{\lambda_-} c_2^{\dagger} c_2^{\dagger}) |0\rangle$.

8.1.4. Los autovalores de la MD de M -cuerpos

Mientras que los autovalores $\lambda_\nu^{(1)} = \langle \Psi | c_\nu^\dagger c_\nu | \Psi \rangle$ de la MD $\rho^{(1)}$ viven siempre en el intervalo $[0, 1]$ (ya que c_ν^\dagger son operadores fermiónicos estándar), para $M \geq 2$ los autovalores de $\rho^{(M)}$ pueden ser *mayores a 1* cuando $|\Psi\rangle$ no es un DS, ya que los operadores normales $A_\nu^{(M)\dagger}$ no serán, en general, un simple producto de M operadores de creación fermiónica. Estos operadores pueden exhibir características simil-bosónicas para $M \geq 2$, o en general características del tipo bosón + fermión para $M \geq 3$ impar.

En primer lugar puede notarse que cualquier operador $A^{(M)\dagger} = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} C_{\alpha}^{(M)\dagger}$ que crea $M < N$ fermiones puede expandirse en operadores normales (8.23) como $A^{(M)\dagger} = \sum_{\nu} \gamma_{\nu} A_{\nu}^{(M)\dagger}$, con $\gamma_{\nu} = \sum_{\alpha} U_{\alpha\nu}^* \gamma_{\alpha}$. Luego, usando (8.29),

$$\langle \Psi | A^{(M)\dagger} A^{(M)} | \Psi \rangle = \sum_{\nu} \lambda_{\nu}^{(M)} |\gamma_{\nu}|^2, \quad (8.31)$$

con $\langle 0 | A^{(M)} A^{(M)\dagger} | 0 \rangle = \sum_{\nu} |\gamma_{\nu}|^2$. Entonces, para operadores normalizados que satisfacen $\langle 0 | A^{(M)} A^{(M)\dagger} | 0 \rangle = 1$, el autovalor más grande $\lambda_{\max}^{(M)}$ de $\rho^{(M)}$ acota *cualquier* valor medio:

$$\langle \Psi | A^{(M)\dagger} A^{(M)} | \Psi \rangle \leq \lambda_{\max}^{(M)}. \quad (8.32)$$

En un DS, $\lambda_{\max}^{(M)} = 1$ y $\langle \Psi | A^{(M)\dagger} A^{(M)} | \Psi \rangle \leq 1 \forall M$ y $A^{(M)\dagger}$ normalizado. Esta cota puede romperse en estados fermiónicos generales.

A modo de ejemplo, se define, asumiendo dimensión de SP par D , el operador de creación del par colectivo.

$$A^\dagger = \frac{1}{\sqrt{D/2}} \sum_{i=1}^{D/2} c_{2i-1}^\dagger c_{2i}^\dagger, \quad (8.33)$$

que satisface $[A^\dagger, \hat{N}] = -2A^\dagger$ y

$$[A, A^\dagger] = 1 - \frac{2}{D} \hat{N}, \quad (8.34)$$

implicando $\langle 0 | A A^\dagger | 0 \rangle = 1$. Luego se consideran estados normalizados ($0 \leq k \leq D/2$)

$$|\Psi_{2k}\rangle = \frac{(A^\dagger)^k}{k! \sqrt{\left(\frac{2}{D}\right)^k \binom{D/2}{k}}} |0\rangle = \frac{\sum_{\mu} C_{\mu}^{(2k)\dagger}}{\sqrt{\binom{D/2}{k}}} |0\rangle, \quad (8.35)$$

que contienen k de estos pares, es decir $N = 2k$ fermiones, y donde $C_{\mu}^{(2k)\dagger} = \prod_i (c_{2i-1}^\dagger c_{2i}^\dagger)^{n_{i\mu}}$ con $n_{i\mu} = 0, 1$, $\sum_{\mu} n_{i\mu} = k$ y $1 \leq \mu \leq \binom{D/2}{k}$. Satisfacen

$$A^\dagger |\Psi_{2k}\rangle = \sqrt{(k+1)(1-2k/D)} |\Psi_{2(k+1)}\rangle \quad (8.36a)$$

$$A |\Psi_{2k}\rangle = \sqrt{k(1-2\frac{k-1}{D})} |\Psi_{2(k-1)}\rangle. \quad (8.36b)$$

para estos estados, A^\dagger se comporta como un operador escalera perfecto y puede por tanto considerarse un cobosón ideal de acuerdo a la definición de [121].

Como en $|\Psi_{2k}\rangle$ todos los estados de SP tienen la misma probabilidad de estar ocupados, y los fermiones se crean de a pares, es evidente que la MD de un cuerpo $\rho^{(1)}$ tendrá un único autovalor degenerado $\lambda_\nu^{(1)} = N/D \leq 1$ (ver Apéndice D.1). Luego será uniformemente mezclado, es decir, proporcional a la identidad y por ende diagonal en *cualquier* base de SP:

$$\rho^{(1)} = \frac{2k}{D} \mathbb{1}, \quad (8.37)$$

El estado (8.35) lleva al *máximo entrelazamiento de un cuerpo* compatible con un valor dado de N , y (8.37) muestra explícitamente que no hay DSs para $2k < D$.

Por otro lado, de las Ecs. (8.36) se sigue que $A^\dagger A |\Psi_{2k}\rangle = k(1 - 2\frac{k-1}{D}) |\Psi_{2k}\rangle$, implicando que la MD de dos cuerpos $\rho^{(2)}$ tiene un autovalor grande no degenerado (ver Apéndice D.1)

$$\lambda_{\max}^{(2)} = \langle \Psi_{2k} | A^\dagger A | \Psi_{2k} \rangle = k \left(1 - 2\frac{k-1}{D} \right) \geq 1, \quad (8.38)$$

asociado con el operador normal A^\dagger , que satisface $\lambda_{\max}^{(2)} > 1$ para $2 \leq k \leq \frac{D}{2} - 1$ [$\lambda_{\max}^{(2)} = 1 + (k-1)(1 - \frac{2k}{D})$].

Los restantes $\binom{D/2}{2} - 1$ autovalores de $\rho^{(2)}$ son todos pequeños e idénticos a (ver Apéndice D.1)

$$\lambda_{\text{rest}}^{(2)} = \frac{4k(k-1)}{D(D-2)} \leq 1, \quad (8.39)$$

de forma que $\lambda_{\max}^{(2)} + (\binom{D}{2} - 1)\lambda_{\text{rest}}^{(2)} = \binom{N}{2}$ (Ec. (8.15)). Como $\langle \Psi | A^\dagger A | \Psi \rangle \leq 1$ en *cualquier* DS (Ec. (8.32)), (8.38) señala claramente que $|\Psi_{2k}\rangle$ no es un DS.

El autovalor dominante (8.38) es máximo en el caso semi-lleño $k = \lfloor \frac{D+2}{4} \rfloor$, donde $\lambda_{\max}^{(2)} \approx D(1 + 2/D)^2/8$ aumenta linealmente con D para D grande, y puede ser arbitrariamente grande. Para $D \gg k$, $\lambda_{\max}^{(2)} \approx k = N/2$ es simplemente el número de pares, mientras que $\lambda_{\min}^{(2)} \approx (2k/D)^2$ se hace muy pequeño. Como puede verse de (8.34)–(8.35), para $D \rightarrow \infty$ con N fijo, A^\dagger se convierte en un bosón “verdadero” ($[A, A^\dagger] \rightarrow 1$), con $|\Psi_{2k}\rangle \rightarrow \frac{(A^\dagger)^k}{\sqrt{k!}} |0\rangle$ un condensado de k -bosones.

Los autovalores de MD con M impar pueden también superar 1. Por ejemplo, en un estado impar $|\Psi_{2k+1}\rangle = c_{D+1}^\dagger |\Psi_{2k}\rangle$, donde se ha agrandado el espacio de SP con un estado adicional, el autovalor máximo de la MD de 3 cuerpos $\rho^{(3)}$ viene dado por (8.38): $\langle \Psi_{2k+1} | c_{D+1}^\dagger A^\dagger A c_{D+1} | \Psi_{2k+1} \rangle = \lambda_{\max}^{(2)} \geq 1$. Se corresponde con el número de pares multiplicado por el número de “fermiones singulares” (1). Los autovalores

de $\rho^{(3)}$ en el estado par (8.35) pueden también determinarse de forma analítica (ver Apéndice D.1). Su autovalor máximo,

$$\lambda_{\max}^{(3)} = \frac{2k(k-1)(1-\frac{2}{D}(k-1))}{D-2}, \quad (8.40)$$

Aunque más pequeño que (8.38), sigue satisfaciendo que $\lambda_{\max}^{(3)} > 1$ para $1 + \sqrt{D/2} < k < D/2$, llegando a $\approx \frac{2D}{27}$ en $k \approx \frac{D}{3}$ para $D \gg 1$. La Fig. 8.1 muestra $\lambda_{\max}^{(M)}$ vs. k para $M \leq 4$ en el estado (8.35).

De (8.36) sigue que $(A^\dagger)^m A^m |\Psi_{2k}\rangle \propto |\Psi_{2k}\rangle$ para $m \leq k$. Luego, el autovalor más grande de la MD de $2m$ -cuerpos en el estado (8.35) se asocia con el operador normalizado $A^{(2m)\dagger} = \frac{(A^\dagger)^m}{m! \sqrt{(\frac{2}{D})^m \binom{D/2}{m}}}$ (ver también Apéndice D.1):

$$\lambda_{\max}^{(2m)} = \langle \Psi_{2k} | \frac{(A^\dagger)^m A^m}{m! \sqrt{(\frac{2}{D})^m \binom{D/2}{m}}} | \Psi_{2k} \rangle = \frac{\binom{k}{m} \binom{D/2-k+m}{m}}{\binom{D/2}{m}}, \quad (8.41)$$

que generaliza la Ec. (8.38) (caso $m = 1$). Luego, $\lambda_{\max}^{(2m)} > 1$ para $m < k < D/2$, con $\lambda_{\max}^{(2m)} \approx \binom{k}{m}$ si $D \gg k$. Similarmente, en el estado impar $|\Psi_{2k+1}\rangle = c_{D+1}^\dagger |\Psi_{2k}\rangle$, $\lambda_{\max}^{(2m+1)} = \lambda_{\max}^{(2m)}$.

Los autovalores de $\rho^{(M)}$ pueden ser también menores a 1. Por ejemplo, en un estado fermiónico simil-GHZ con $N = D/2$,

$$|\Psi_{D/2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (c_1^\dagger \dots c_{D/2}^\dagger + c_{D/2+1}^\dagger \dots c_D^\dagger) |0\rangle, \quad (8.42)$$

todos los autovalores no nulos de $\rho^{(M)}$ son

$$\lambda_\nu^{(M)} = 1/2, \quad (8.43)$$

para $1 \leq M \leq N-1$, $2 \binom{N}{M}$ degenerados. Este ejemplo muestra que distintos estados de N fermiones que parecen *idénticos* a nivel de un cuerpo, como (8.35) y (8.42) para $N = D/2$ ($\rho^{(1)} = \frac{1}{2} \mathbb{1}$), pueden diferir significativamente a niveles mayores de M -cuerpos ($\lambda_1^{(2)} = 1/2$ en (8.42) mientras $\lambda_1^{(2)} = \frac{D}{8}(1 + \frac{4}{D}) > 1$ en (8.35) para $k = D/4$ y $D \geq 8$).

8.2. Entrelazamiento de M -cuerpos

8.2.1. Grado de mezcla de la MD de M -cuerpos

La descomposición simil-Schmidt (8.22) de un estado puro de N -fermiones, y el hecho de que los números positivos $\lambda_\nu^{(M)}$ representan los autovalores no nulos de las

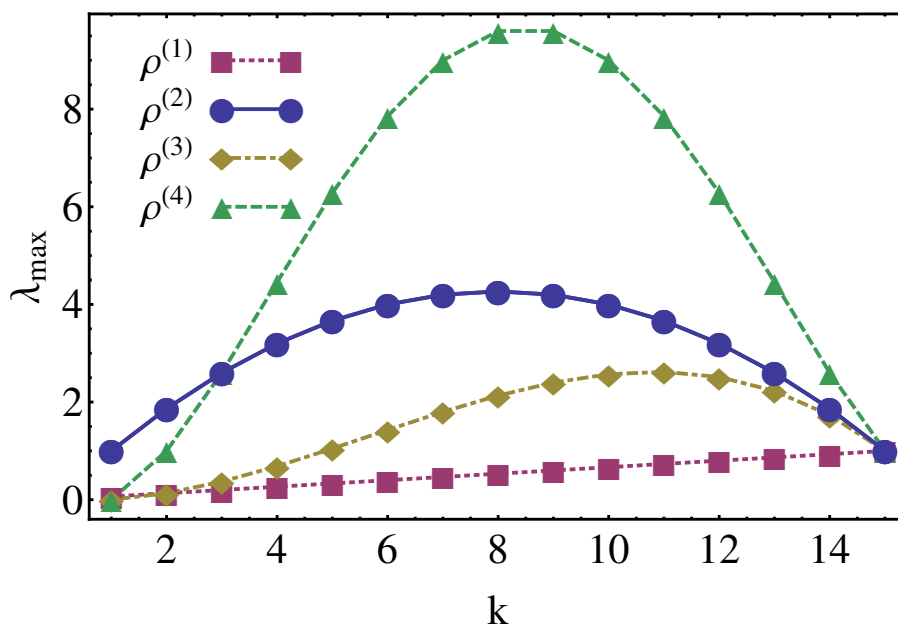


Figura 8.1: Autovalor máximo $\lambda_{\max} = \lambda_{\max}^{(M)}$ de las MD de M -cuerpos $\rho^{(M)}$ para $M \leq 4$ en el estado (8.35), como función del número de pares k , para espacio de SP de dimensión $D = 30$.

MDs de M y $(N - M)$ -cuerpos, llevan naturalmente a la noción de entrelazamiento de M -cuerpos, basada en la distribución de estos autovalores. Esta caracteriza la correlación entre los observables de M y $(N - M)$ -cuerpos en un estado de N -fermiones. Más precisamente, dados dos estados puros $|\Psi\rangle$, $|\Phi\rangle$ de N fermiones, vamos a decir que $|\Psi\rangle$ es *no menos* $(M, N - M)$ *entrelazado*, ó simplemente *no menos entrelazado en M -cuerpos* que $|\Phi\rangle$, si $\rho_{\Psi}^{(M)}$ es *más mezclado* que (ó tan mezclado como) $\rho_{\Phi}^{(M)}$, es decir, si sus autovalores satisfacen una relación de mayorización

$$\boldsymbol{\lambda}(\rho_{\Psi}^{(M)}) \prec \boldsymbol{\lambda}(\rho_{\Phi}^{(M)}), \quad (8.44)$$

donde $\boldsymbol{\lambda}(\rho^{(M)})$ denota el espectro de $\rho^{(M)}$, ordenado en orden decreciente. Explícitamente, la Ec. (8.44) significa que todas las desigualdades [64, 103]

$$\sum_{\nu=1}^j \lambda_{\nu}(\rho_{\Psi}^{(M)}) \leq \sum_{\nu=1}^j \lambda_{\nu}(\rho_{\Phi}^{(M)}), \quad j = 1, \dots, \binom{D}{M} - 1, \quad (8.45)$$

deben ser satisfechas por los autovalores ordenados λ_{ν} de $\rho_{\Psi}^{(M)}$ y $\rho_{\Phi}^{(M)}$, con igualdad para $j = \binom{D}{M}$, implicando que los autovalores de $\rho_{\Psi}^{(M)}$ están más homogéneamente distribuidos que los de $\rho_{\Phi}^{(M)}$. Por supuesto, se puede usar de igual manera la MD compañera $\rho^{(N-M)}$ en (8.44)–(8.45) ya que comparten los mismos autovalores no nulos.

Para $M = 1$ se recupera el concepto de entrelazamiento de un cuerpo, determinado por la MD de un cuerpo $\rho^{(1)}$ [3, 31].

La Ec. (8.44) es análoga a la satisfecha por los estados locales reducidos del sistema en el caso de componentes distinguibles (donde la misma garantiza que $|\Psi\rangle$ puede ser convertido en $|\Phi\rangle$ mediante operaciones LOCC [6, 102, 104]). La mayorización proporciona, sin embargo, un orden parcial, implicando que dos estados pueden ser incomparables de acuerdo al criterio previo. Por ejemplo, en un DS de N -fermiones, $\rho^{(M)}$ presenta solo $\binom{N}{M}$ autovalores no nulos iguales a 1, mientras que en el estado simil-GHZ (8.42), todos los $2\binom{N}{M}$ autovalores no nulos de $\rho^{(M)}$ son iguales a $1/2$ para $M < N$, implicando

$$\boldsymbol{\lambda}(\rho_{\Psi_{D/2}}^{(M)}) \prec \boldsymbol{\lambda}(\rho_{\text{SD}}^{(M)}) \quad (8.46)$$

para $1 \leq M \leq N - 1$. Luego el estado (8.42) está más entrelazado que un DS a *cualquier* nivel de M -cuerpos ($1 \leq M \leq N - 1$).

Sin embargo, en el par condensado $|\Psi_{2k}\rangle$ de Ec. (8.35) con $2 \leq k \leq D/2 - 1$, mientras que claramente $\boldsymbol{\lambda}(\rho_{\Psi_{2k}}^{(1)}) \prec \boldsymbol{\lambda}(\rho_{\text{SD}}^{(1)})$ (Ec. (8.37)), no se cumplen ni $\boldsymbol{\lambda}(\rho_{\Psi_{2k}}^{(2)}) \prec \boldsymbol{\lambda}(\rho_{\text{SD}}^{(2)})$ ni $\boldsymbol{\lambda}(\rho_{\text{SD}}^{(2)}) \prec \boldsymbol{\lambda}(\rho_{\Psi_{2k}}^{(2)})$, ya que el autovalor más grande de $\rho_{\Psi_{2k}}^{(2)}$ es mayor a 1 mientras los restantes $\binom{D}{2} - 1$ autovalores son no nulos y menores a 1 (Ecs. (8.38)–(8.39)), con $\binom{D}{2} > \binom{N}{2}$ para $D > N$. Luego, los DSs no son más los estados con las MDs de dos-cuerpos menos mezcladas. Lo mismo ocurre con la MD de tres-cuerpos cuando su autovalor máximo en el estado (8.35) excede a 1 (Ec. (8.40)), en cuyo caso $\boldsymbol{\lambda}(\rho_{\Psi_{2k}}^{(3)}) \not\prec \boldsymbol{\lambda}(\rho_{\text{SD}}^{(3)})$ y $\boldsymbol{\lambda}(\rho_{\text{SD}}^{(3)}) \not\prec \boldsymbol{\lambda}(\rho_{\Psi_{2k}}^{(3)})$.

8.2.2. Entropías de M -cuerpos

Asociado con la definición previa de (8.44), es posible considerar en primer lugar las entropías de M -cuerpos

$$E_f^{(M)}(|\Psi\rangle) = S_f(\rho_{\Psi}^{(M)}) = S_f(\rho_{\Psi}^{(N-M)}), \quad (8.47a)$$

$$= \sum_{\nu} f[\lambda_{\nu}(\rho_{\Psi}^{(M)})], \quad (8.47b)$$

donde $S_f(\rho) = \text{Tr} f(\rho)$ es una entropía en forma de traza [105, 122], con $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ una función estrictamente cóncava no negativa con $f(0) = 0$. Estas entropías satisfacen

$$E_f^{(M)}(|\Psi\rangle) \geq E_f^{(M)}(|\Phi\rangle) \quad (8.48)$$

siempre que la Ec. (8.44) se cumpla [61, 64, 103].

La Ec. (8.47) es particularmente adecuada para definir una entropía de entrelazamiento de un cuerpo [3, 31] ya que $\lambda_\nu^{(1)} \in [0, 1]$ y pueden aplicarse medidas entrópicas estándar. Para $M \geq 2$ es posible aplicar medidas entrópicas simil-bosónicas, obtenidas de $f(\lambda) = -\lambda \log \lambda + (1 + \lambda) \log(1 + \lambda)$ (tal que $\sum_\nu f(\lambda_\nu)$ representa la entropía de von Neumann de bosones independientes en el ensamble gran canónico con número de ocupación promedio λ_ν [122]), que es un ejemplo de una función cóncava creciente de λ que satisface $f(0) = 0$.

Una segunda posibilidad, fuertemente motivada por las relaciones de mayorización derivadas en la próxima subsección, es considerar la entropía de las MDs normalizadas

$$\rho_n^{(M)} = \rho^{(M)} / \binom{N}{M}, \quad (8.49)$$

que tienen autovalores $\lambda_\nu^{(M)} / \binom{N}{M} \in [0, 1]$ y satisfacen $\text{Tr}[\rho_n^{(M)}] = 1$. En este caso puede usarse cualquier medida entrópica $S_f(\rho) = \text{Tr} f(\rho)$ pensada para probabilidades estándar y definir una entropía de M -cuerpos asociada como

$$E_{n_f}^{(M)}(|\Psi\rangle) = S_f(\rho_{n_\Psi}^{(M)}) = S_f(\rho_{n_\Psi}^{(N-M)}). \quad (8.50)$$

En particular, la entropía de von Neumann $S(\rho) = -\text{Tr} \rho \log_2 \rho$ lleva a $S(\rho_n^{(M)}) = S(\rho^{(M)}) / \binom{N}{M} + \log_2 \binom{N}{M}$. Se pueden usar también otras funciones Schur-cóncavas [64] de $\rho_n^{(M)}$. Como a N fijo la Ec. (8.44) es totalmente equivalente a

$$\lambda(\rho_{n_\Psi}^{(M)}) \prec \lambda(\rho_{n_\Phi}^{(M)}), \quad (8.51)$$

ya que todos los autovalores se reescalan por el mismo factor. Va a implicar también que $E_{n_f}^{(M)}(|\Psi\rangle) \geq E_{n_f}^{(M)}(|\Phi\rangle)$. Además, cualquier par de estados fermiónicos de N -fermiones incomparable con (8.44) seguirá siendo incomparable con (8.51), y viceversa.

Por otro lado, la Ec. (8.51) puede también ser usada para comparar el grado de mezcla de las MDs reducidas $\rho_n^{(M)}$ para estados con distinto N , ya que $\rho_n^{(M)}$ tiene traza fija, implicando

$$\lambda(\rho_{n_\Psi}^{(M)}) \prec \lambda(\rho_{n_\Phi}^{(M)}) \Rightarrow E_{n_f}^{(M)}(|\Psi\rangle) \geq E_{n_f}^{(M)}(|\Phi\rangle). \quad (8.52)$$

La inversa de la Ec. (8.52) no vale en general: solo si la desigualdad entrópica $E_{n_f}^{(M)}(|\Psi\rangle) \geq E_{n_f}^{(M)}(|\Phi\rangle)$ vale para *toda* función cóncava f (y no solo una elección particular) puede afirmarse que $\lambda(\rho_{n_\Psi}^{(M)}) \prec \lambda(\rho_{n_\Phi}^{(M)})$ [61]. Y esto implica $\lambda(\rho_{n_\Psi}^{(M)}) \prec \lambda(\rho_{n_\Phi}^{(M)})$ solo cuando $\rho_{n_\Psi}^{(M)}$ y $\rho_{n_\Phi}^{(M)}$ tienen la misma traza, es decir cuando $|\Psi\rangle$ y $|\Phi\rangle$ tienen el mismo número de fermiones. Para estados con distinto N la Ec. (8.44) debe reemplazarse por (8.51).

8.2.3. Operaciones que no aumentan la entropía de M -cuerpos

Se determinan ahora operaciones básicas que no aumentan la entropía de M -cuerpos (8.50). Se nota en primer lugar que las transformaciones unitarias de un cuerpo

$$|\Psi\rangle \rightarrow \mathcal{U}|\Psi\rangle, \quad \mathcal{U} = \exp\left[-i \sum_{i,j} H_{ij} c_i^\dagger c_j\right], \quad (8.53)$$

donde $H^\dagger = H$, conduce a transformaciones unitarias de todas las MDs de M -cuerpos, dejando entonces sus autovalores (y por ende el entrelazamiento de M -cuerpos) sin cambiar: Como $\mathcal{U}^\dagger c_i \mathcal{U} = \sum_j U_{ij} c_j$ con $U = \exp[-iH]$, entonces $\rho^{(1)} \rightarrow U \rho^{(1)} U^\dagger$ y $\rho^{(M)} \rightarrow U^{(M)} \rho^{(M)} U^{(M)\dagger}$, con $U_{\alpha\alpha'}^{(M)} = \epsilon_{i_1 \dots i_m} U_{\alpha_1 \alpha'_{i_1}} \dots U_{\alpha_m \alpha'_{i_m}}$ y ϵ el tensor totalmente antisimétrico.

Tanto para estados puros $|\Psi\rangle$ como para estados mixtos

$$\rho = \sum_i q_i |\Psi_i\rangle \langle \Psi_i|, \quad (8.54)$$

con número de fermiones N definido ($q_i \geq 0$, $\sum_i q_i = 1$ y $\hat{N}|\Psi_i\rangle = N|\Psi_i\rangle \forall i$), se tiene el siguiente teorema:

Teorema 8.2.1. *La operación cuántica descrita por los operadores de Kraus*

$$\mathcal{M}_j^{(1)} = \frac{c_j}{\sqrt{N}}, \quad j = 1, \dots, D \quad (8.55)$$

que satisface $\sum_{j=1}^D \mathcal{M}_j^{(1)\dagger} \mathcal{M}_j^{(1)} = \hat{N}/N = \mathbb{1}_N$ dentro del subespacio de estados con número definido de fermiones N , no aumenta, en promedio, el grado de mezcla de las MDs de M -cuerpos normalizadas $\rho_n^{(M)} = \rho^{(M)} / \binom{N}{M}$ para $1 \leq M \leq N-1$, e implica la relación de mayorización

$$\lambda(\rho_n^{(M)}) \prec \sum_j p_j \lambda(\rho_{jn}^{(M)}), \quad (8.56)$$

entre el espectro de las MDs de M -cuerpos normalizadas inicial y post-medidas.

En (8.56), $\rho_{jn}^{(M)} = \rho_j^{(M)} / \binom{N-1}{M}$ son las MDs normalizadas de M -cuerpos determinadas por los estados post-seleccionados

$$\rho_j = p_j^{-1} \mathcal{M}_j^{(1)} \rho \mathcal{M}_j^{(1)\dagger} = \frac{c_j \rho c_j^\dagger}{\langle c_j^\dagger c_j \rangle}, \quad (8.57)$$

mientras que p_j es la probabilidad de obtener el resultado j :

$$p_j = \text{Tr} [\rho \mathcal{M}_j^{(1)\dagger} \mathcal{M}_j^{(1)}] = \langle c_j^\dagger c_j \rangle / N, \quad (8.58)$$

con $\sum_{j=1}^D p_j = 1$. Esta medida, con D resultados posibles, corresponde, por ejemplo, a la detección de un fermión a través de su momento o energía de SP (etiquetado por j), con ρ_j el estado correspondiente a los fermiones restantes. Notar que la Ec. (8.56) implica

$$S_f(\rho_n^{(M)}) \geq S_f[\sum_j p_j \lambda(\rho_{jn}^{(M)})] \geq \sum_j p_j S_f(\rho_{jn}^{(M)}), \quad (8.59)$$

para cualquier función Schur-cóncava de $\rho_n^{(M)}$, incluyendo en particular las entropías (8.50). Luego, el Teorema 8.2.1 implica que la entropía $S_f(\rho_n^{(M)})$ de las MDs normalizadas de M -cuerpos *no aumentan, en promedio, luego de dichas operaciones*. Para estados puros esto significa que la entropía de M cuerpos (8.50) no aumentará en promedio, y que disminuirá en general luego de dicha medida:

$$E_{n_f}^{(M)}(|\Psi\rangle) \geq \sum_j p_j E_{n_f}^{(M)}(|\Psi_j\rangle), \quad (8.60)$$

donde $|\Psi_j\rangle = \mathcal{M}_j|\Psi\rangle/\sqrt{p_j} = c_j|\Psi\rangle/\sqrt{\langle c_j^\dagger c_j \rangle}$ es el estado luego de medir j . Para estados mixtos ρ con N definido, la Ec. (8.60) implica una desigualdad similar

$$E_{n_f}^{(M)}(\rho) \geq \sum_j p_j E_{n_f}^{(M)}(\rho_j), \quad (8.61)$$

respecto a la extensión de convex-roof (8.50), el *entrelazamiento de formación* de M -cuerpos $E_{n_f}^{(M)}(\rho) = \text{Min} \sum_i q_i E_{n_f}^{(M)}(|\Psi_i\rangle)$, donde el mínimos sobre todas las representaciones (8.54) de ρ como mezclas convexas de estados puros con N definido. La Ec. (8.61) sigue de (8.60) usando la representación de ρ que minimice $E_{n_f}^{(M)}(\rho)$, como $E_{n_f}^{(M)}(\rho) = \sum_i q_i E_{n_f}^{(M)}(|\Psi_i\rangle) \geq \sum_{i,j} q_i p_{ij} E_{n_f}^{(M)}(|\Psi_{ij}\rangle) \geq \sum_j p_j E_{n_f}^{(M)}(\rho_j)$, donde $p_j = \sum_i q_i p_{ij}$ y $p_{ij} = \langle \Psi_i | c_j^\dagger c_j | \Psi_i \rangle / N$.

Demostración de la Ec. (8.56): Sea ρ el estado de un sistema de N fermiones sobre el cual se aplican las operaciones definidas por los operadores (8.55). Luego de obtener el resultado j , los elementos de la MD de M -cuerpos $\rho_j^{(M)}$ determinados por el estado (8.57) son, para $M \leq N - 1$,

$$(\rho_j^{(M)})_{\alpha\alpha'} = p_j^{-1} \text{Tr} \mathcal{M}_j^{(1)} \rho \mathcal{M}_j^{(1)\dagger} C_{\alpha'}^{(M)\dagger} C_{\alpha}^{(M)} \quad (8.62)$$

$$= p_j^{-1} \text{Tr} \rho C_{\alpha'}^{(M)\dagger} \mathcal{M}_j^{(1)\dagger} \mathcal{M}_j^{(1)} C_{\alpha}^{(M)}, \quad (8.63)$$

donde la última línea vale porque los operadores $C_{\alpha}^{(M)}$ y $\mathcal{M}_j^{(1)}$ conmutan o anticonmutan. Luego

$$\sum_j p_j (\rho_j^{(M)})_{\alpha\alpha'} = \text{Tr} [\rho C_{\alpha'}^{(M)\dagger} \frac{\hat{N}}{N} C_{\alpha}^{(M)}] = \frac{N-M}{N} \rho_{\alpha\alpha'}^{(M)}, \quad (8.64)$$

$\forall \alpha, \alpha'$, implicando $\sum_j p_j \rho_j^{(M)} = \frac{N-M}{N} \rho^{(M)}$ y luego

$$\rho^{(M)} / \binom{N}{M} = \sum_j p_j \rho_j^{(M)} / \binom{N-1}{M}, \quad (8.65)$$

para las MDs normalizadas de M -cuerpos, i.e.,

$$\rho_n^{(M)} = \sum_j p_j \rho_{jn}^{(M)}. \quad (8.66)$$

Esta ecuación implica la relación de mayorización (8.56) ya que

$$\lambda\left(\sum_i A_i\right) \prec \sum_i \lambda(A_i) \quad (8.67)$$

para cualquier conjunto de matrices hermíticas A_i de la misma dimensión [64, 101-103]. \square

En el capítulo anterior se mostró que el entrelazamiento de un cuerpo, es decir lo que se cuantifica con el grado de mezcla de la MD de un cuerpo $\rho^{(1)}$, es también no creciente bajo medidas de ocupación de un estado fijo de SP. Dicha medida, que tiene solo dos resultados posibles (1 or 0), se describe por los operadores de proyección que conservan número $\mathcal{P}_j = c_j^\dagger c_j$, $\mathcal{P}_{\bar{j}} = c_j c_j^\dagger = \mathbb{1} - \mathcal{P}_j$ y lleva a la relación de mayorización [3]

$$\lambda(\rho^{(1)}) \prec n_j \lambda(\rho_j^{(1)}) + (1 - n_j) \lambda(\rho_{\bar{j}}^{(1)}), \quad (8.68)$$

entre el espectro inicial y post-seleccionado de la MD de un cuerpo, donde $n_j = \langle \Psi | c_j^\dagger c_j | \Psi \rangle$ y $\rho_j^{(1)}$, $\rho_{\bar{j}}^{(1)}$ son las MD de un cuerpo determinadas por los estados post-seleccionados $|\Psi_j\rangle = c_j^\dagger c_j |\Psi\rangle / \sqrt{n_j}$ y $|\Psi_{\bar{j}}\rangle = c_j c_j^\dagger |\Psi\rangle / \sqrt{1 - n_j}$. Para un estado de N -fermiones $|\Psi\rangle$ vale una relación idéntica para las MDs normalizadas $\rho_n^{(1)} = \rho^{(1)} / N$, $\rho_{jn}^{(1)} = \rho_j^{(1)} / N$.

Sin embargo, la Ec. (8.68) no se mantiene, en general, para $\rho^{(M)}$ con $M \geq 2$, implicando que el entrelazamiento de M -cuerpos no necesariamente decrece luego de dicha medida. Un ejemplo analítico simple puede verse en el Apéndice D.2. Esencialmente, la medida de ocupación de un estado de SP reduce el espacio disponible de SP para “pares colectivos” en un estado como (8.35), lo que implica la presencia

de un autovalor máximo más bajo $\lambda_1^{(M)}$ en el estado post-medida y por ende violación de la desigualdad (8.68) por $\rho^{(M)}$ con $M \geq 2$. Este resultado es esperable ya que estas medidas no necesariamente aumenta nuestro conocimiento de la MD de M -cuerpos para $M \geq 2$.

8.2.4. Operadores densidad de M -cuerpos y relaciones de mayorización generalizadas

A cada MD de M -cuerpos se le puede asociar un operador densidad (OD) de M -cuerpos

$$\hat{\rho}^{(M)} = \sum_{\alpha, \alpha'} \rho_{\alpha\alpha'}^{(M)} C_{\alpha}^{(M)\dagger} |0\rangle \langle 0| C_{\alpha'}^{(M)}, \quad (8.69)$$

que es el único estado mixto de M fermiones que satisface

$$\text{Tr} [\hat{\rho}^{(M)} C_{\alpha'}^{(M)\dagger} C_{\alpha}^{(M)}] = \rho_{\alpha\alpha'}^{(M)} \quad (8.70)$$

$\forall \alpha, \alpha'$, debido a la Ec. (8.2). La descomposición normal (8.22) provee la representación diagonal:

$$\hat{\rho}^{(M)} = \sum_{\nu} \lambda_{\nu}^{(M)} A_{\nu}^{(M)\dagger} |0\rangle \langle 0| A_{\nu}^{(M)}. \quad (8.71)$$

Ahora se considera nuevamente la medida (8.55) aplicada a un estado general mixto ρ de N fermiones. Si el resultado es desconocido, el estado post-medido (sin post-selección) $\rho' = \sum_j p_j \rho_j$, es el estado de $N - 1$ fermiones

$$\rho' = \sum_j \mathcal{M}_j^{(1)} \rho \mathcal{M}_j^{(1)\dagger} = \frac{1}{N} \sum_j c_j \rho c_j^{\dagger}. \quad (8.72)$$

Usando la Ec. (8.64) para $M = N - 1$ se obtiene

$$\text{Tr} [\rho' C_{\alpha'}^{(N-1)\dagger} C_{\alpha}^{(N-1)}] = \frac{1}{N} \rho_{\alpha\alpha'}^{(N-1)} \quad (8.73)$$

$\forall \alpha, \alpha'$, implicando $\rho' = \hat{\rho}_n^{(N-1)} := \hat{\rho}^{(N-1)}/N$, el OD normalizado de $(N - 1)$ -cuerpos ($\text{Tr} \hat{\rho}_n^{(N-1)} = 1$). En resumen,

$$\hat{\rho}^{(N-1)} = \sum_j c_j \rho c_j^{\dagger}, \quad (8.74)$$

El OD de $(N - 1)$ -cuerpos es proporcional al estado post-medido (8.72), con la operación en (8.74) jugando el rol de traza parcial. Expresiones similares o equivalentes a (8.74) se obtuvieron en otros contextos en en las refs. [118, 120, 123].

Estos resultados, junto con las Ecs. (8.56)–(8.61), pueden extenderse a medidas de L -cuerpos, en las que L fermiones son destruidos. Estas medidas pueden obtenerse aplicando las medidas previas L veces, es decir, componiéndolas consigo mismas, y son descritas por los operadores de Kraus

$$\mathcal{M}_{\beta}^{(L)} = \frac{C_{\beta}^{(L)}}{\sqrt{\binom{N}{L}}} = \frac{c_{\beta_1} \cdots c_{\beta_L}}{\sqrt{\binom{N}{L}}}, \quad (8.75)$$

que, debido a Ec. (8.3) satisfacen

$$\sum_{\beta} \mathcal{M}_{\beta}^{(L)\dagger} \mathcal{M}_{\beta}^{(L)} = \frac{1}{\binom{N}{L}} \sum_{\beta} C_{\beta}^{(L)\dagger} C_{\beta}^{(L)} = \mathbb{1}_N \quad (8.76)$$

dentro del subespacio de estados de N -fermiones. Luego,

$$\text{Tr} \sum_{\beta} C_{\beta}^{(L)} \rho C_{\beta}^{(L)\dagger} C_{\alpha'}^{(M)\dagger} C_{\alpha}^{(M)} = \binom{N-M}{L} \rho_{\alpha\alpha'}^{(M)} \quad (8.77)$$

$\forall \alpha, \alpha'$ para $M \leq N - L$. Entonces, para $L = N - M$ implica

$$\hat{\rho}^{(M)} = \sum_{\beta} C_{\beta}^{(N-M)} \rho C_{\beta}^{(N-M)\dagger} \quad (8.78)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{(N-M)!} \sum_{j_1, \dots, j_{N-M}} c_{j_1} \cdots c_{j_{N-M}} \rho c_{j_{N-M}}^{\dagger} \cdots c_{j_1}^{\dagger} \\ &= \binom{N}{N-M} \sum_{\beta} \mathcal{M}_{\beta}^{(N-M)} \rho \mathcal{M}_{\beta}^{(N-M)\dagger}, \end{aligned} \quad (8.79)$$

que generaliza la Ec. (8.74). La suma en (8.79) es el estado post-medido (sin post-selección) luego de aplicar las medidas de $L = (N - M)$ -fermiones (8.75).

Para $L \leq N$ general, esta medida tiene $\binom{N}{L}$ resultados distintos β , con probabilidades

$$p_{\beta} = \text{Tr} \rho \mathcal{M}_{\beta}^{(L)\dagger} \mathcal{M}_{\beta}^{(L)} = \rho_{\beta\beta}^{(L)} / \binom{N}{L}, \quad (8.80)$$

que satisfacen $\sum_{\beta} p_{\beta} = 1$, y los estados post-seleccionados

$$\rho_{\beta} = p_{\beta}^{-1} \mathcal{M}_{\beta}^{(L)} \rho \mathcal{M}_{\beta}^{(L)\dagger} = C_{\beta}^{(M)} \rho C_{\beta}^{(M)\dagger} / \rho_{\beta\beta}^{(L)}, \quad (8.81)$$

que generalizan las Ecs. (8.57)–(8.58). De las Ecs. (8.77) se obtiene, para las MDs de M cuerpos condicionales de elementos $(\rho_{\beta}^{(M)})_{\alpha\alpha'} = \text{Tr} \rho_{\beta} C_{\alpha'}^{(M)\dagger} C_{\alpha}^{(M)}$,

$$\sum_{\beta} p_{\beta} \rho_{\beta}^{(M)} = \frac{\binom{N-M}{L}}{\binom{N}{L}} \rho^{(M)}, \quad (8.82)$$

para $M \leq N - L$. La Ec. (8.82) es equivalente a

$$\sum_{\beta} p_{\beta} \rho_{\beta}^{(M)} / \binom{N-L}{M} = \rho^{(M)} / \binom{N}{M}, \quad (8.83)$$

y luego a

$$\rho_n^{(M)} = \sum_{\beta} p_{\beta} \rho_{\beta_n}^{(M)}, \quad (8.84)$$

para las MDs de M -cuerpos normalizadas. La Ec. (8.84) implica la relación de mayorización

$$\lambda(\rho_n^{(M)}) \prec \sum_{\beta} p_{\beta} \lambda(\rho_{\beta_n}^{(M)}), \quad (8.85)$$

entre las MDs inicial y post-medidas condicionales normalizadas de M -cuerpos, que generaliza la Ec. (8.56) a la medida descrita por los operadores (8.75). Las entropías asociadas satisfacen

$$S_f(\rho_n^{(M)}) \geq \sum_{\beta} p_{\beta} S_f(\rho_{\beta_n}^{(M)}). \quad (8.86)$$

Para estados puros esto implica que las entropías de entrelazamiento (8.50) no aumentan, en promedio, luego de estas medidas. Lo mismo ocurre con el entrelazamiento de formación asociado para estados iniciales mixtos.

8.2.5. Mapeando a sistemas bipartitos

En la sección previa se propuso conectar el grado de mezcla tanto de $\rho^{(M)}$ como de $\rho^{(N-M)}$, como MD reducida de un estado dado de N -fermiones, al grado de correlación entre los observables de M y $N - M$ -cuerpos en dicho estado. En esta sección se va a mostrar que esta relación está operativamente justificada por la existencia de una clase de mapas cuánticos que convierten estados de fermiones indistinguibles en estados de fermiones efectivamente distinguibles, de forma tal que el entrelazamiento en el estado final está acotado por la entropía (8.50) de la MD normalizada de M -cuerpos del estado inicial.

Sea $|\Psi\rangle$ un estado de N -fermiones con soporte en un subespacio de SP \mathcal{H} de dimensión $D \geq N$ y sea \mathcal{H}_A un subespacio de SP de dimensión $D_A \geq M$ ortogonal a \mathcal{H} , tal que $\{c_{i_A}, c_j\} = \{c_{i_A}^{\dagger}, c_j^{\dagger}\} = \{c_{i_A}, c_j^{\dagger}\} = 0$ para i_A (j) etiquetando estados de SP en \mathcal{H}_A (\mathcal{H}) (implicando $\langle i_A | j \rangle = \langle 0 | c_{i_A} c_j^{\dagger} | 0 \rangle = 0 \forall i_A, j$). Son, por supuesto, subespacios de un espacio completo de SP \mathcal{H}_T tal que $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}_A \subset \mathcal{H}_T$.

Se consideran ahora mapas CPTP \mathcal{T}_M descritos por operadores de Kraus

$$\mathcal{T}^r = \frac{1}{\sqrt{\binom{N}{M}}} \sum_{\mu, \alpha} T_{\mu\alpha}^r C_{\mu}^{(M)\dagger} C_{\alpha}^{(M)}, \quad (8.87)$$

donde $C_{\mu}^{(M)\dagger} = (c_{i_{1A}}^{\dagger}, \dots, c_{i_{MA}}^{\dagger})$ crea M fermiones en \mathcal{H}_A y $C_{\alpha}^{(M)} = (c_{j_M}, \dots, c_{j_1})$ destruye M fermiones en \mathcal{H} , y T^r es una matriz de $\binom{D_A}{M} \times \binom{D}{M}$. Asumiendo \mathcal{H}_A inicialmente “vacío” y la condición $\sum_r T^{r\dagger} T^r = \mathbb{1}$, estos operadores van a satisfacer

$$\sum_r \mathcal{T}^{r\dagger} \mathcal{T}^r = \frac{1}{\binom{N}{M}} \sum_{\alpha, \alpha', r} (T^{r\dagger} T^r)_{\alpha' \alpha} C_{\alpha'}^{(M)\dagger} C_{\alpha}^{(M)} = \mathbb{1}_N \quad (8.88)$$

por la Ec. (8.3), dentro del espacio de Fock $\mathcal{F}_N(\mathcal{H})$ de estados de N fermiones en \mathcal{H} .

Su acción en un estado de N -fermiones $|\Psi\rangle \in \mathcal{F}_N(\mathcal{H})$ es, usando las Ecs (8.7) y (8.11),

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^r |\Psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\binom{N}{M}}} \sum_{\mu, \alpha, \beta} T_{\mu\alpha}^r \Gamma_{\alpha\beta}^{(M)} C_{\mu}^{(M)\dagger} C_{\beta}^{(N-M)\dagger} |0\rangle \\ &= \sum_{\mu, \beta} \Gamma_{\mu\beta}^r C_{\mu}^{(M)\dagger} C_{\beta}^{(N-M)\dagger} |0\rangle, \end{aligned} \quad (8.89)$$

donde $\Gamma^r = T^r \Gamma^{(M)} / \binom{N}{M}^{\frac{1}{2}}$. Se verifica que la probabilidad de obtener el resultado r ,

$$p_r = \langle \Psi | \mathcal{T}^{r\dagger} \mathcal{T}^r | \Psi \rangle = \text{Tr}(\Gamma^{r\dagger} \Gamma^r), \quad (8.90)$$

satisface $\sum_r p_r = \frac{1}{\binom{N}{M}} \text{Tr}(\Gamma^{(M)\dagger} \Gamma^{(M)}) = 1$ debido a la Ec. (8.15).

Los operadores (8.87) pueden por tanto ser considerados como operadores de Kraus que describen mapas CPTP en el espacio de Fock de N -fermiones que llevan, con probabilidad p_r , el estado original $|\Psi\rangle$ al estado bipartito $(M, N - M)$ $|\Phi_{AB}^r\rangle = (\sqrt{p_r})^{-1} \mathcal{T}^r |\Psi\rangle$ que contiene $N - M$ fermiones en \mathcal{H} y M fermiones en el espacio de SP ortogonal \mathcal{H}_A .

Luego de implementar el mapa y obtener el resultado r , se puede ver el estado reducido de los modos fermiónicos en \mathcal{H}_A para el estado $|\Phi_{AB}^r\rangle$ (que va a contener M fermiones), $\rho_A^r = \text{Tr}_B |\Phi_{AB}^r\rangle \langle \Phi_{AB}^r|$, tal que $\langle \Phi_{AB}^r | O_A | \Phi_{AB}^r \rangle = \text{Tr}[\rho_A^r O_A]$ para cualquier operador O_A que conserve número y dependa solo de los operadores $c_{i_A}^{\dagger}, c_{i_A}$ en \mathcal{H}_A . Usando (8.89) se obtiene $\rho_A^r = \sum_{\mu, \mu'} (\rho_A^r)_{\mu\mu'} C_{\mu}^{(M)\dagger} |0\rangle \langle 0| C_{\mu'}^{(M)}$ con

$$\rho_A^r = \Gamma^r \Gamma^{r\dagger} / p_r. \quad (8.91)$$

Similarmente $\rho_B^r = \Gamma^{rT} \Gamma^{r*} / p_r$.

Como consecuencia directa de la expresión (8.91) se puede derivar el siguiente resultado importante: Si $\lambda(\rho_A^r)$ y $\lambda(\rho_n^{(M)})$ denotan nuevamente los vectores de autovalores (ordenados en forma decreciente) de ρ_A^r y $\rho_n^{(M)} = \rho^{(M)} / \binom{N}{M}$ respectivamente, entonces vale la siguiente relación de mayorización:

$$\lambda(\rho_n^{(M)}) \prec \sum_r p_r \lambda(\rho_A^r), \quad (8.92)$$

donde el vector de menor dimensión se asume completado con ceros hasta igualar dimensiones.

Demostración. De las Ecs. (8.91) y (8.13) se obtiene

$$p_r \rho_A^r = \frac{1}{\binom{N}{M}} T^r \Gamma^{(M)} \Gamma^{(M)\dagger} T^{r\dagger} = T^r \rho_n^{(M)} T^{r\dagger}.$$

Es posible también escribir

$$\rho_n^{(M)} = \sum_r \sqrt{\rho_n^{(M)}} T^{r\dagger} T^r \sqrt{\rho_n^{(M)}},$$

que implica, usando nuevamente (8.67),

$$\lambda(\rho_n^{(M)}) \prec \sum_r \lambda \left(\sqrt{\rho_n^{(M)}} T^{r\dagger} T^r \sqrt{\rho_n^{(M)}} \right) = \sum_r p_r \lambda(\rho_A^r) \quad (8.93)$$

ya que los autovalores no nulos de $(\sqrt{\rho_n^{(M)}} T^{r\dagger})(T^r \sqrt{\rho_n^{(M)}})$ son los mismos que aquellos de $T^r \sqrt{\rho_n^{(M)}} \sqrt{\rho_n^{(M)}} T^{r\dagger} = p_r \rho_A^r$. \square

En particular, la Ec. (8.92) implica que la entropía de entrelazamiento bipartito promedio entre A y B de los estados finales, definida por $\sum_r p_r E_f(|\Phi_{AB}^r\rangle)$ con $E_f(|\Phi_{AB}^r\rangle) = S_f(\rho_A^r) = S_f(\rho_B^r)$, *no va a exceder nunca a la entropía de M -cuerpos* (8.50), que provee, por tanto, una cota superior al entrelazamiento bipartito generado:

$$E_{f_n}^{(M)}(|\Psi\rangle) = S_f(\rho_n^{(M)}) \geq \sum_r p_r S_f(\rho_A^r). \quad (8.94)$$

Un segundo corolario inmediato de (8.92) es la condición para la conversión de un estado puro de N -fermiones $|\Psi\rangle$ en un estado bipartito $|\Phi_{AB}\rangle$ de M y $N - M$ fermiones en espacios ortogonales de SP, i.e., con M fermiones ocupando estados de SP en \mathcal{H}_A , y $N - M$ en \mathcal{H} , por medio de un mapa CPTP descrito por los operadores (8.87): para que tal conversión sea posible, debe cumplirse la relación

$$\lambda(\rho_n^{(M)}) \prec \lambda(\rho_A), \quad (8.95)$$

donde ρ_A es el estado reducido de A en $|\Phi_{AB}\rangle$.

Demostración. Si el mapa lleva $|\Psi\rangle$ a $|\Phi_{AB}\rangle$ y es descrito por los operadores (8.87), se tiene para todo r

$$\mathcal{T}^r |\Psi\rangle = \sqrt{p_r} |\Phi_{AB}\rangle, \quad (8.96)$$

con p_r dado por (8.90). Sigue que $\rho_A^r = \rho_A \forall r$, y por (8.92), sigue la Ec. (8.95). \square

Se ha identificado entonces una clase de mapas cuánticos que pueden ser usados para transformar un estado puro $|\Psi\rangle$ de N fermiones indistinguibles en otro estado $|\Phi_{AB}\rangle$ que contiene un número definido de fermiones en dos subespacios de SP ortogonales, tales que M fermiones pueden ser efectivamente “distinguidos” de los restantes $N - M$ debido a la ortogonalidad (por ejemplo, M fermiones confinados en una región espacial separada de la de los restantes $N - M$ fermiones, o en orbitales ortogonales a los ocupados en $|\Psi\rangle$). La conversión es tal que el entrelazamiento entre estos dos conjuntos de partículas en el estado objetivo está acotado superiormente, en promedio, por la entropía de la MD normalizada de M -cuerpos. Esto provee un claro significado operacional a la conexión sugerida entre el grado de mezcla de los autovalores de esta matriz y el grado de correlaciones entre partículas indistinguibles en $|\Psi\rangle$.

Como ejemplo trivial, se considera el siguiente estado de dos fermiones

$$|\Psi\rangle = (\alpha c_1^\dagger c_2^\dagger + \beta c_3^\dagger c_4^\dagger)|0\rangle. \quad (8.97)$$

Como se menciona en la Sec. 8.1.3, cualquier estado de dos fermiones en un subespacio de SP de dimensión 4 (es decir ocupando solo 4 niveles de SP) puede ser escrito de esta forma [22, 23, 31]. Su MD de un cuerpo $\rho^{(1)}$ es diagonal en esta base, con $\langle c_j^\dagger c_i \rangle = \delta_{ij} f_i$ y $f_i = |\alpha|^2$ para $i = 1, 2$, $f_i = |\beta|^2$ para $i = 3, 4$ y $f_i = 0$ en otro caso, tal que sus autovalores no nulos son $\lambda(\rho^{(1)}) = (|\alpha|^2, |\alpha|^2, |\beta|^2, |\beta|^2)$, con $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Se considera ahora un mapa simple $\mathcal{T} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_i c_{i_A}^\dagger c_i$, donde c_i destruye un fermión en \mathcal{H} ($i = 1, \dots, D$) mientras que $c_{i_A}^\dagger$ crea un fermión en \mathcal{H}_A , inicialmente vacío (y de dimensión $D_A \geq D$). Luego $\mathcal{T}^\dagger \mathcal{T} = \mathbb{1}_2$ en $\mathcal{F}_2(\mathcal{H})$ y

$$\mathcal{T}|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [\alpha (c_{1_A}^\dagger c_2^\dagger - c_{2_A}^\dagger c_1^\dagger) + \beta (c_{3_A}^\dagger c_4^\dagger - c_{4_A}^\dagger c_3^\dagger)]|0\rangle \quad (8.98)$$

es un estado normalizado de dos fermiones, uno en \mathcal{H}_A y otro en \mathcal{H} . Esto conduce a estados reducidos $\rho_{A(B)}$ con espectro $\lambda(\rho_{A(B)}) = (|\alpha|^2, |\alpha|^2, |\beta|^2, |\beta|^2)/2$ idéntico al de $\rho^{(1)}/2$, y por ende saturando las desigualdades de la relación de mayorización (8.92). Incluso si $\beta = 0$, en cuyo caso $|\Psi\rangle$ es un DS, $\mathcal{T}|\Psi\rangle$ no es más un DS y tiene por tanto entrelazamiento de un cuerpo no nulo. Esto coincide con los resultados previamente presentados, donde se ha mostrado que el entrelazamiento bipartito con número de fermiones fijo o paridad fija de cada lado requiere entrelazamiento de un cuerpo (ver Cap. 7).

En cambio, para $\mathcal{T}^r = \frac{1}{\sqrt{2}} c_{1_A}^\dagger c_r$, $r = 1, \dots, D$, todavía vale $\sum_r \mathcal{T}^{r\dagger} \mathcal{T}^r = \mathbb{1}_2$ en $\mathcal{F}_2(\mathcal{H})$ pero $\mathcal{T}^r|\Psi\rangle$ es o bien 0 o bien proporcional al estado $c_{1_A}^\dagger c_j^\dagger|0\rangle$ con $c_j^\dagger|0\rangle \in \mathcal{H}$,

y no se general entrelazamiento directo $A - B$, lo que satisface trivialmente la Ec. (8.92).

8.3. Entrelazamiento de M -cuerpos en sistemas fuertemente correlacionados

Como ya se ha demostrado en la Sec. 8.1.4, las MDs de M -cuerpos pueden tener, en el caso general, autovalores mayores a 1. Un ejemplo es el caso particular (8.35). En lo siguiente se verá que efectivamente estados con autovalores de la MD de 2-cuerpos mayor a 1 emergen naturalmente en sistemas físicos relevantes.

8.3.1. Sistema superconductor

Se considerará el sistema superconductor ya tratado en el capítulo 5. Dicho sistema consiste de un espacio de SP \mathcal{H} con $D = 2\Omega$ modos compuestos por Ω estados de SP ortogonales k y sus correspondientes Ω estados invertidos temporalmente \bar{k} y descritos por el siguiente Hamiltoniano:

$$H = \sum_k \varepsilon_k (c_k^\dagger c_k + c_{\bar{k}}^\dagger c_{\bar{k}}) - \sum_{k,k'} G_{kk'} c_{k'}^\dagger c_{\bar{k}'}^\dagger c_{\bar{k}} c_k \quad (8.99)$$

con ε_k la energía del nivel k y \bar{k} . Se considera el caso semilleno, es decir con un número fijo de fermiones $N = \Omega$, con espectro equiespaciado $\varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k = \varepsilon \quad \forall k$ y $G_{kk'} = G \geq 0 \quad \forall k, k'$. El estado fundamental de este sistema era de la forma

$$|\psi\rangle = \sum_\nu \alpha_\nu \left[\prod_k \left(c_k^\dagger c_{\bar{k}}^\dagger \right)^{n_k^\nu} \right] |0\rangle \quad (8.100)$$

Mientras que en el Capítulo 5 el énfasis fue puesto en el comportamiento de la MD de un cuerpo $\rho^{(1)}$, se estudia aquí la estructura de la MD de dos cuerpos $\rho^{(2)}$, determinada por

$$\rho_{\alpha\alpha'}^{(2)} = \langle \psi | C_{\alpha'}^{(2)\dagger} C_\alpha^{(2)} | \psi \rangle \quad (8.101)$$

donde $\alpha \in \{kk', \bar{k}\bar{k}', k\bar{k}', \bar{k}k'\}$ y $k < k'$.

En la Fig. 8.2 puede verse el espectro de autovalores de la MD de 2-cuerpos [124] generada por el estado fundamental. Se observa la emergencia de un autovalor > 1 dominante al aumentar la constante de acoplamiento, que aumenta monótonamente y satura en el límite $G \rightarrow \infty$, justamente al valor (8.38), ya que en este límite el estado fundamental converge al estado de pares (8.35). El resto de los autovalores tienden a homogeneizarse lentamente, aproximándose al valor (8.39).

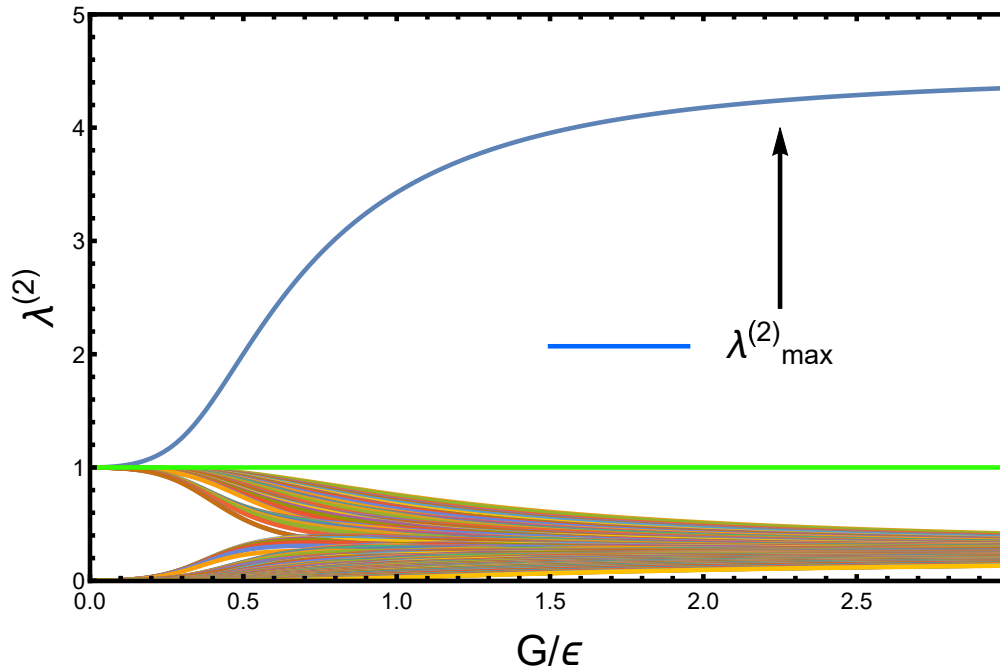


Figura 8.2: Autovalores exactos de la MD de 2-cuerpos $\rho^{(2)}$ en el estado fundamental del Hamiltoniano de superconductividad (5.1) en función del acoplamiento adimensionalizado G/ϵ .

Expansión en el subespacio reducido

Debido a la forma de la interacción, el Hamiltoniano (8.99) satisface $[H, N_+] = [H, N_-] = 0$, con N_+ el número de partículas en los modos k ($N_+ = \sum_k c_k^\dagger c_k$) y N_- el número de partículas en los modos \bar{k} ($N_- = \sum_k c_k^\dagger c_{\bar{k}}$). La MD completa de 2-cuerpos se bloquea entonces en submatrices compatibles con la conservación de N_\pm .

En particular, el bloque más interesante es $\rho_{k\bar{k},k'\bar{k}'}^{(2)}$, que es una matriz de $D/2 \times D/2$ proveniente de las contracciones $\langle \psi | c_k^\dagger c_{\bar{k}}^\dagger c_{k'} c_{\bar{k}'} | \psi \rangle$. Este bloque posee $D/2$ autovalores distintos y su traza es igual al número total de pares $\sum_k c_k^\dagger c_k c_{\bar{k}}^\dagger c_{\bar{k}} = N/2$. En la Fig. 8.3 se puede ver la comparación entre los autovalores de este bloque con los de los otros bloques. Solo en $\rho_{k\bar{k},k'\bar{k}'}^{(2)}$ se tiene la presencia de un autovalor dominante mayor a 1.

Es posible entonces escribir para el estado fundamental una descomposición de Schmidt (2, $N - 2$) que involucre solo los elementos de este bloque:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{(N/2)} \sum_{\nu=1}^{D/2} \sqrt{\lambda_\nu^{(2)}} A_\nu^{(2)\dagger} A_\nu^{(N-2)\dagger} |0\rangle, \quad (8.102)$$

donde la suma es sobre los autovalores de este bloque. Se puede también aproximar

el estado conservando solo los primeros k términos:

$$|\psi\rangle \simeq |k\rangle = C \sum_{\nu=1}^k \sqrt{\lambda_{\nu}^{(2)}} A_{\nu}^{(2)\dagger} A_{\nu}^{(N-2)\dagger} |0\rangle, \quad (8.103)$$

con C una constante de normalización.

Para medir que tan buena es la aproximación se usa el overlap con el estado fundamental exacto $\langle k|\psi\rangle$. El resultado se grafica en la Fig. 8.4. Se ve que la aproximación es muy buena ya para un número pequeño de términos, incluso para *un sólo término*, excepto en la zona crítica $G/\varepsilon \approx 0,4$ donde $\langle k|\psi\rangle$ tiene un mínimo y es necesario agregar más términos. El cambio en la complejidad de la aproximación es un indicador de la presencia de transiciones de fase en este sistema.

Se pueden obtener explícitamente los operadores normales de creación de pares $A_{\nu}^{(2)\dagger}$ involucrados en la expansión (8.102), que emergen de la descomposición SVD de la matriz de coeficientes como $A_{\nu}^{(2)\dagger} = \sum_k U_{k\nu}^{(2)} c_k^{\dagger} c_k^{\dagger}$. Para G suficientemente grande, el operador correspondiente al autovalor $\lambda_{\nu}^{(2)}$ máximo es esencialmente el del estado (8.35),

$$A_1^{(2)\dagger} \approx A^{(2)\dagger} := \sum_{k=1}^{\Omega} \frac{1}{\sqrt{\Omega}} C_{kk}^{(2)\dagger} \quad (8.104)$$

que corresponde a una distribución uniforme, en coincidencia con el estado de la Eq. (8.35).

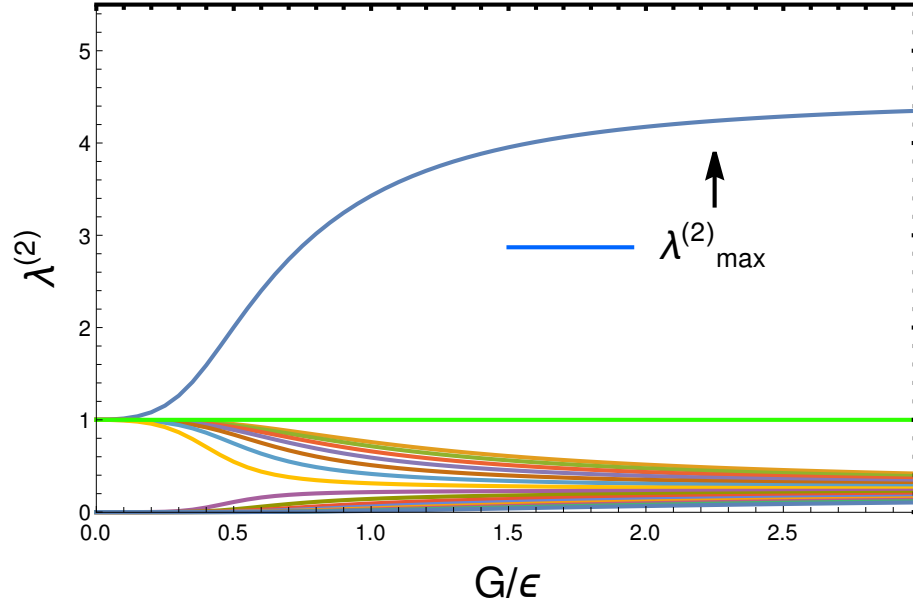
8.3.2. Modelo de Hubbard

El modelo de Hubbard es bien conocido en física de estado sólido [125-128]. Constituye un modelo sencillo para describir la transición entre las fases conductora y aislante. A modo ilustrativo, se considera aquí brevemente el caso fermiónico con 2Ω estados de SP, que comprenden Ω estados ortogonales i y sus correspondientes Ω estados invertidos temporalmente \bar{i} , descrito por el siguiente Hamiltoniano:

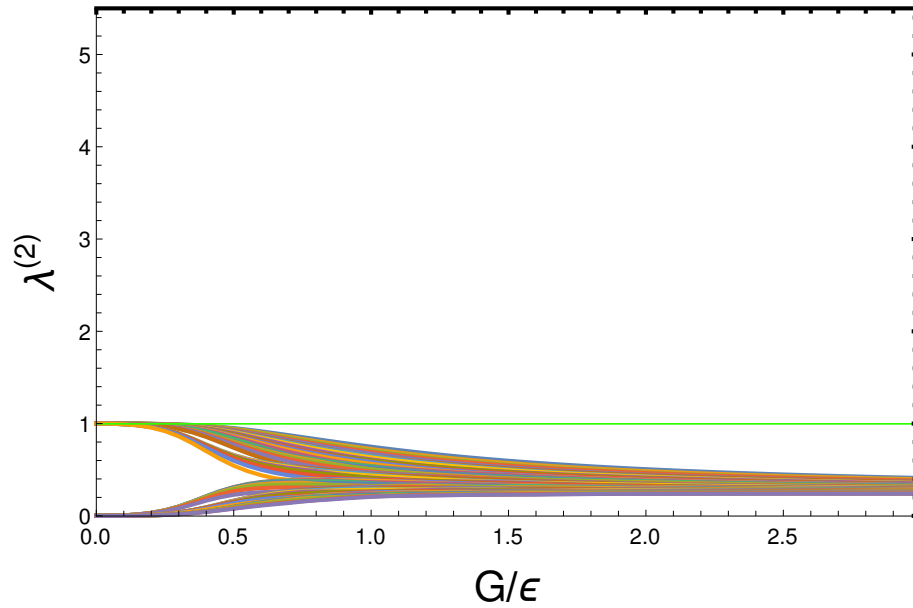
$$H = \sum_i t(c_i^{\dagger} c_{i+1} + c_i^{\dagger} c_{\bar{i}+1} + h.c.) + U n_i n_{\bar{i}} - h(n_i - n_{\bar{i}}) \quad (8.105)$$

Aquí t es la amplitud de *hopping*, asociada con el movimiento de los electrones entre distintos sitios de la red, h es un campo magnético externo y U es el acoplamiento *on-site*, con $n_i = c_i^{\dagger} c_i$.

El caso repulsivo $U > 0$ no muestra comportamiento bosónico. Por el contrario, en el caso atractivo $U < 0$, el estado fundamental conduce a una MD de 2-cuerpos que posee un autovalor mayor a 1, como puede verse en la Fig. 8.5 para $N = 12$ y $h \simeq 0$. Esto refleja la presencia de atracciones *on-site*.



(a) Autovalores del bloque no diagonal $k\bar{k}, k', \bar{k}'$



(b) Autovalores de los bloques diagonales

Figura 8.3: Comparación entre los distintos subconjuntos de autovalores de $\rho^{(2)}$ en el estado fundamental del Hamiltoniano de superconductividad (5.1) en función del acoplamiento adimensionalizado G/ϵ .

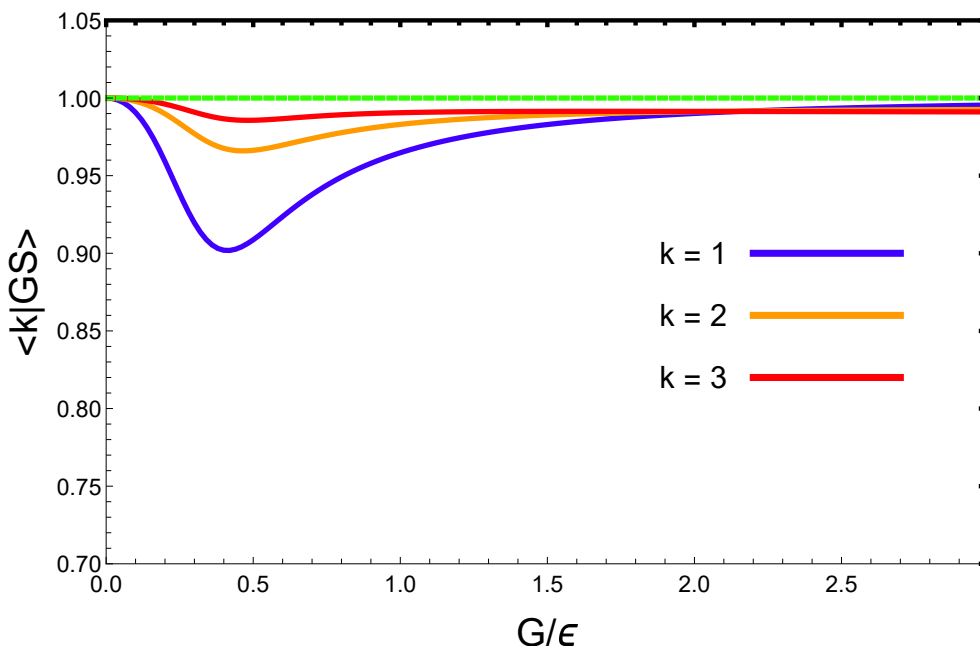


Figura 8.4: Overlap entre el estado fundamental exacto y el estado aproximado (8.103). Cada curva corresponde a un valor distinto de k (número máximo de términos considerados en la expansión, $k = 1, 2, 3$). La línea punteada verde indica la suma completa.

Expansión en el subespacio reducido

Este Hamiltoniano satisface también $[H, N_+] = [H, N_-] = 0$, con $N_+ = \sum_i c_i^\dagger c_i$, $N_- = \sum_i c_i c_i^\dagger$. El bloque relevante es ahora $\rho_{ij,ki}^{(2)}$, que es una matriz de $(\frac{D}{2})^2 \times (\frac{D}{2})^2$ correspondiente a las contracciones $\langle \psi | c_i^\dagger c_j^\dagger c_l c_k | \psi \rangle$. Nuevamente, este bloque no tiene autovalores degenerados, y su traza es $(N/2)^2$.

Es posible realizar una descomposición de Schmidt $(2, N - 2)$ del estado fundamental, que involucre solo este bloque:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^{(D/2)^2} \sqrt{\lambda_\nu^{(2)}} A_\nu^{(2)\dagger} A_\nu^{(N-2)\dagger} |0\rangle. \quad (8.106)$$

Esta expansión puede ser aproximada hasta sus primeros k términos. Nuevamente, puede mostrarse que el overlap es también muy bueno en este modelo, como se aprecia en la Fig. 8.6.

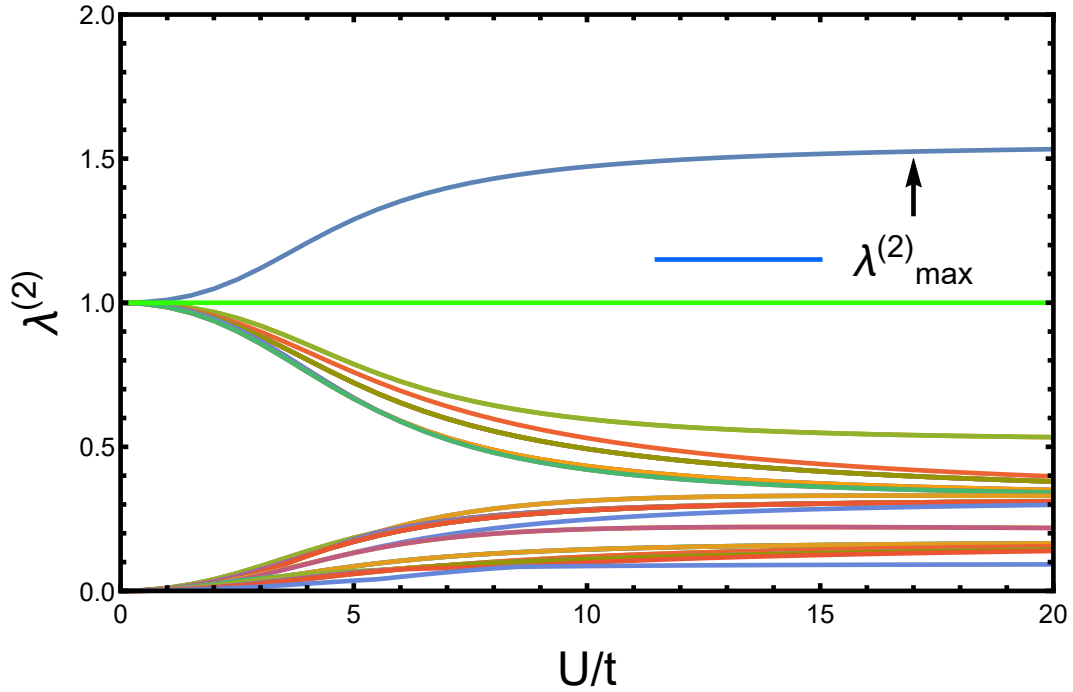


Figura 8.5: Autovalores exactos de la MD de 2-cuerpos $\rho^{(2)}$ en el estado fundamental del Hamiltoniano de Hubbard (8.105) en función del acoplamiento adimensionalizado U/t .

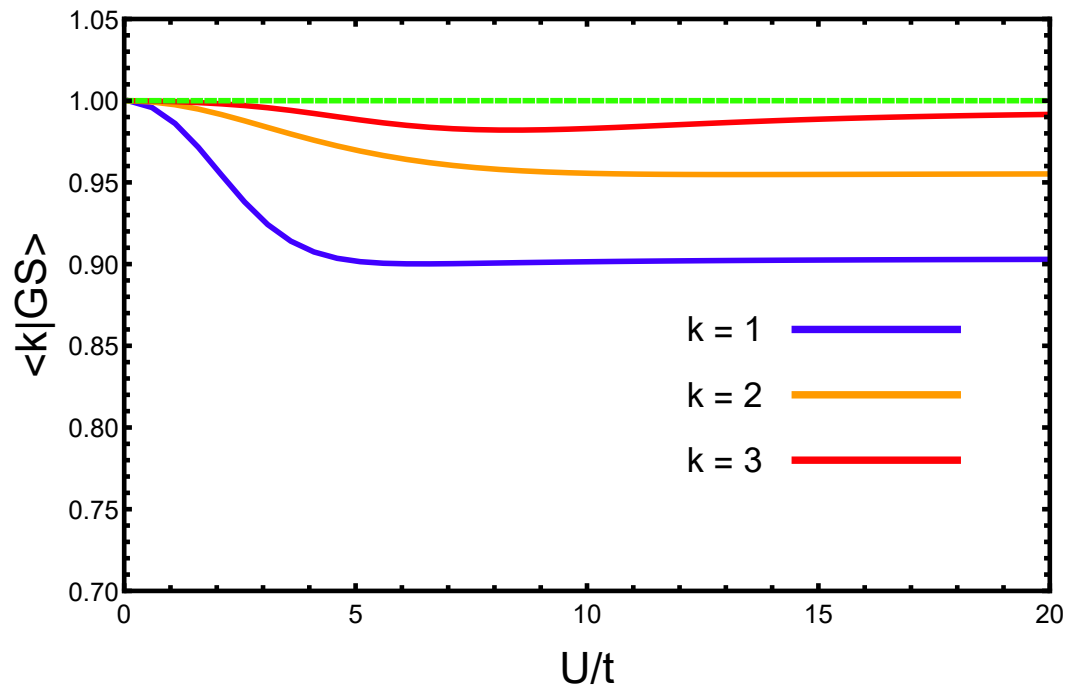


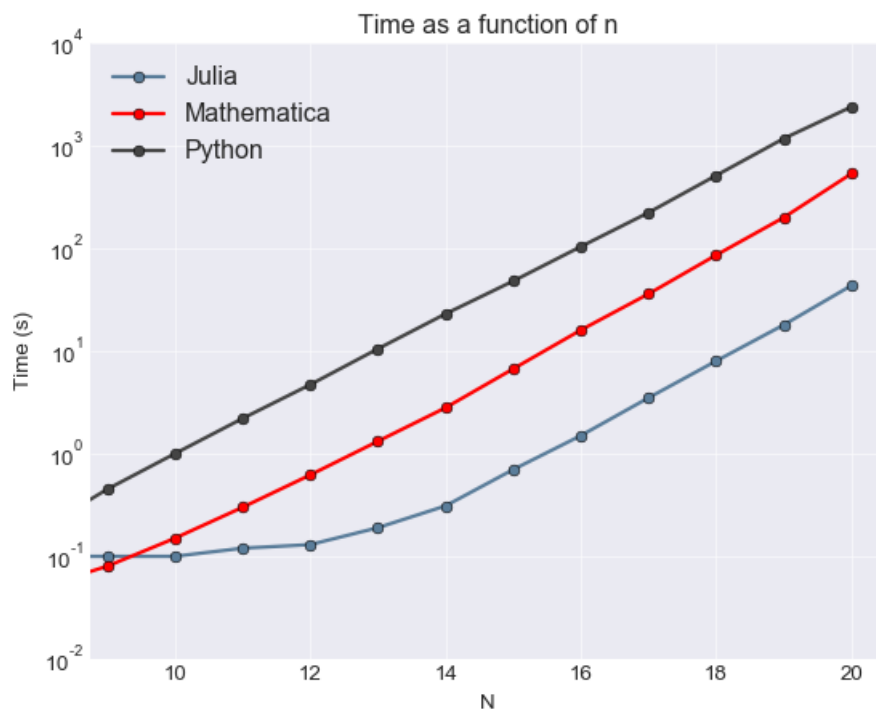
Figura 8.6: Overlap entre el estado fundamental exacto y el estado aproximado (8.106). Cada curva corresponde a un valor distinto de k , el número máximo de términos considerados en la expansión ($k = 1, 2, 3$).

Fermionic.jl: una librería para simulaciones fermiónicas

Se puede apreciar un rápido movimiento dentro de la comunidad de información cuántica hacia formas más colaborativas de generación de conocimiento [129-134]. La aparición de librerías de código abierto en los últimos años han empujado muchas ideas y han establecido bases sólidas para el desarrollo futuro. Del uso de estas herramientas emerge una ciencia más democrática y eficiente. Sin embargo, hay todavía muchas áreas sin explorar que se beneficiarían de este tipo de desarrollos. Dentro de estas puede incluirse la información cuántica con fermiones.

En el marco de las investigaciones doctorales, resultó de gran utilidad el desarrollo de herramientas propias para simular sistemas fermiónicos. Estas herramientas son de utilidad no solo en el área de información cuántica, sino también en materia condensada, nanomateriales y química cuántica. Si bien existen librerías fermiónicas, como OpenFermion [130], estas tienen un enfoque principalmente basado en los orbitales. Fermionic.jl define operadores fermiónicos para dimensión finita como matrices, y estados como vectores sobre los que operar, lo que es mucho más adecuado para protocolos de información cuántica. Sin embargo, la mayor ventaja de la librería es la capacidad para trabajar en sistemas con número de partículas fijo, lo que reduce la dimensionalidad del problema de 2^d a $\binom{d}{N}$, donde d es la dimensión del espacio de SP y N el número fijo de partículas. Esto es único de esta librería y permite alcanzar simulaciones en dimensiones mucho más altas.

La librería está escrita en Julia, que es un lenguaje de alto nivel con muy alta velocidad, que está creciendo notablemente en el campo de computación científica [134]. Se eligió Julia porque tiene un rendimiento 100 veces superior a Python en la misma tarea, siendo además igual o más fácil de leer y escribir. Todas las librerías de Python pueden importarse directamente en Julia a través de PyCall.



9.1. Requisitos e instalación

Fermionic.jl es una librería de Julia que puede ser instalada en Mac, Windows y Linux. Para correrla, es necesario tener Julia instalado. Eso puede hacerse en el siguiente link

<https://julialang.org/downloads/>

Luego, los paquetes se instalan directamente desde la consola o desde una notebook de Jupyter. Para instalar Fermionic desde la consola, se escribe en primer lugar `]` para acceder al modo "pkg". Luego, el comando

```
1 add Fermionic
```

instalará el paquete. Alternativamente, es posible instalarlo directo desde un editor o un notebook de Jupyter con los siguientes comandos

```
1 import Pkg
2 Pkg.add("Fermionic")
```

El código fuente de Fermionic.jl está hospedado en GitHub, y puede encontrarse en la siguiente dirección

<https://github.com/Marco-Di-Tullio/Fermionic.jl>

El mismo está distribuido bajo Licencia MIT.

9.2. Capacidades

Esta sección tiene el objetivo de presentar las capacidades de la librería. El núcleo de Fermionic.jl consiste en definir de forma eficiente operadores fermiónicos como matrices esparsas. Estas matrices se escriben en la base ortogonal de determinantes de Slater fermiónicos en la dimensión de input d . La dimensión de estas matrices escala como 2^d , y es allí donde la velocidad de Julia tiene un rol clave. Además, la capacidad de simular sistemas con número fijo de partículas N en el subespacio correspondiente, permite alcanzar dimensiones mucho más altas que definiendo el espacio de SP entero.

Con operadores y estados ya definidos, es posible construir herramientas más avanzadas, como compuertas lógicas fermiónicas y medidas de correlación.

9.2.1. Operadores fermiónicos

Base completa

Los operadores fermiónicos a_i, a_j^\dagger se definen con las siguientes relaciones de anticonmutación $\{a_i, a_j^\dagger\} = \delta_{ij}$, $\{a_i, a_j\} = \{a_i^\dagger, a_j^\dagger\} = 0$. En un determinante de Slater, cada modo estará ocupado o desocupado. Todos los posibles estados en dimensión d pueden generarse a partir de la base de posibles ocupaciones y forman una base para el espacio de Fock. Por ejemplo, si $d = 3$, la base será $B = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$, donde se definió un orden para los operadores de creación. Aquí, el estado $(1, 1, 0)$ corresponde a $a_1^\dagger a_2^\dagger |0\rangle = -a_2^\dagger a_1^\dagger |0\rangle$, con $|0\rangle$ el estado de vacío. Los operadores de creación y destrucción fermiónicos pueden escribirse como matrices en esta base. La librería trabaja en su lugar con matrices esparsas, ya que es más eficiente en tiempo y memoria.

Para inicializar los operadores fermiónicos en dimensión d , se utiliza `Op(d)`

```
1 using Fermionic
2 op = Op(d);
```

Estos operadores pertenecen al tipo `::Op`. Una de las grandes ventajas de definir operadores como tipos, es la posibilidad de definir simultáneamente operadores para distintas dimensiones. Esto puede ser útil en numerosas aplicaciones, como por ejemplo comparar resultados de distintas dimensiones sin perder los operadores en cada inicialización. Se puede acceder a cada operador fermiónico con los siguientes comandos:

$$\begin{aligned} a_i &\rightarrow \text{a}(0p, i) \\ a_i^\dagger &\rightarrow \text{ad}(0p, i) \end{aligned}$$

Luego los operadores fermiónicos pueden obtenerse multiplicando estos operadores fundamentales. Los operadores de un cuerpo se definen especialmente por su uso intensivo

$$\begin{aligned} a_i a_j &\rightarrow \text{aa}(0p, i, j) \\ a_i^\dagger a_j^\dagger &\rightarrow \text{adad}(0p, i, j) \\ a_i a_j^\dagger &\rightarrow \text{aad}(0p, i, j) \\ a_i^\dagger a_j &\rightarrow \text{ada}(0p, i, j) \end{aligned}$$

Los mismos podían obtenerse también multiplicando simplemente los operadores fermiónicos:

$$a_i^\dagger a_j \rightarrow \text{ada}(0p, i, j) = \text{ad}(0p, i) * \text{a}(0p, j)$$

Los operadores pueden sumarse, multiplicarse o incluso exponenciarse. Por ejemplo una unitaria puede obtenerse de la siguiente forma

```

1 t=1/2
2 u = exp(Matrix(im*t*(ada(op, 1, 2)+ada(op, 2, 1))))

```

Con el comando `basis(op)` es posible visualizar la base total del espacio de Fock.

Subespacio con número fijo de partículas

En muchos casos, interesan los operadores fermiónicos en sistemas con conservación de número de partículas. Este es el caso, por ejemplo, de los Hamiltonianos tratados en esta tesis. Si se trabaja en dimensión d con n partículas, es posible reducir el tamaño de las matrices de $2^d \times 2^d$ a $\binom{d}{n} \times \binom{d}{n}$.

En este tipo de sistemas, serán de interés principalmente aquellos operadores que conserven el número de partículas. Estos se construyen a partir de multiplicar y combinar operadores de un cuerpo $a_i^\dagger a_j$ y $a_i a_j^\dagger$. Se accede a estos operadores usando los mismos comandos `ada` y `aad` del espacio completo de Fock, pero Julia diferencia entre funciones en base al input mediante `multipledispatch` (otros idiomas diferencian en base a unos pocos inputs, julia tiene todos en cuenta).

Se utilizan `ada(d,n,i,j)` y `aad(d,n,i,j)` para obtener los operadores con dimensión d y n partículas correspondientes a modos i, j . Por ejemplo:

```

1 # d = dimensión
2 d = 4
3 # n = número de partículas
4 n = 2
5 # i el modo creado
6 i = 2
7 # j el modo destruido
8 j = 4
9 # este es el operador a_i^dagger a_j
10 ada(d,n,i,j)
11
12 Output: 6×6 SparseArrays.SparseMatrixCSC{Float64,Int64} with 2
    ↪ stored entries:
13 [3, 1] = -1.0
14 [6, 4] = 1.0

```

Este operador vive en la base reducida, que puede obtenerse con el comando `basis_m(d,n)`

```

1 b, index = basis_m(d,n);
2 Matrix(b)

```

```

3
4 Output: 6×4 Array{Float64,2}:
5  0.0  0.0  1.0  1.0
6  0.0  1.0  0.0  1.0
7  0.0  1.0  1.0  0.0
8  1.0  0.0  0.0  1.0
9  1.0  0.0  1.0  0.0
10 1.0  1.0  0.0  0.0

```

Si se piensa trabajar con algunos operadores de este tipo, es conveniente inicializarlos con la base ya predefinida. De esta forma se evita redefinir la base cada vez que se corre el operador:

```

1 b, index = basis_m(d,n)
2 ada(b, index, i, j)
3
4 Output: 6×6 SparseArrays.SparseMatrixCSC{Float64,Int64} with 2
   → stored entries:
5  [3, 1] = -1.0
6  [6, 4] = 1.0

```

Por último, y como se hizo con los operadores en la base completa, es posible definir todos los operadores de un cuerpo en este espacio en simultaneo. Esto es muy útil cuando se trabaja con muchos operadores de este tipo, como puede ser un Hamiltoniano, que itera muchas veces sobre los mismos operadores (por ejemplo, operadores de dos cuerpos sumando sobre todos los modos). Para esto se usa `Op_fixed(d,n)`:

```

1 opf = Op_fixed(d,n)
2 ada(opf,i,j)
3
4 Output: 6×6 SparseArrays.SparseMatrixCSC{Float64,Int64} with 2
   → stored entries:
5  [3, 1] = -1.0
6  [6, 4] = 1.0

```

Es posible definir operadores de creación a_i^\dagger y destrucción a_i que mueven entre espacios de número fijo pasando de N a $N + 1$ o $N - 1$ respectivamente. Para esto se definen `ad(d,n,i)` y `a(d,n,i)`. Estas serán matrices no cuadradas que mapean entre los espacios. Estos operadores pueden aplicarse sobre estados.

```

1 s=[0, 0, 0, 0, 0, 1]
2 println("Se parte del estado de 2 fermiones en la base de
   ↪  dimensión 4 ",s)
3 b,_=basis_m(4,2)
4 println("Que corresponde a ", Array(b[6,:]))
5 println("Si se aplica el operador de creación en el cuarto modo
   ↪  se obtiene ", ad(4,2,4)*s)
6 b2,_=basis_m(4,3)
7 println("Que corresponde a ", Array(b2[3,:]))
8 println("Si se aplica el operador de creación en un modo
   ↪  externo, se agrega una ancilla ", ad(4,2,5)*s)
9 b3,_=basis_m(5,3)
10 println("Que corresponde a ", Array(b3[8,:]))
11
12 Output:
13 "Se parte del estado de 2 fermiones en la base de dimensión 4
   ↪  [0, 0, 0, 0, 0, 1]"
14 "Que corresponde a [1.0, 1.0, 0.0, 0.0]"
15 "Si se aplica el operador de creación en el cuarto modo se
   ↪  obtiene [0.0, 0.0, 1.0, 0.0]"
16 "Que corresponde a [1.0, 1.0, 0.0, 1.0]"
17 "Si se aplica el operador de creación en un modo externo, se
   ↪  agrega una ancilla [0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0,
   ↪  0.0, 0.0]"
18 "Que corresponde a [1.0, 1.0, 0.0, 0.0, 1.0]"

```

Se definen también métodos para realizar aplicaciones sucesivas.

En caso de querer pasar del espacio completo de Fock al espacio reducido con número fijo puede aplicarse la función `fixed(op,m)` que toma dos argumentos: el operador `op` que desea reducirse y `m` el número fijo de partículas en el espacio final.

9.2.2. Estados

Base completa

Los estados son arrays escritos en la misma base que los operadores, con 2^d elementos. Pueden generarse a partir de arrays normales o sparse con el comando `State(s::AbstractVector, o::Op)`, que crea un elemento del tipo `State`, ganando así acceso a varias propiedades.

Por ejemplo, un estado aleatorio con n partículas en dimensión d puede crearse como:

```

1 op = Op(d)
2 l = 2^d
3
4 ran_state = [0.0 for i in 1:l]
5
6 for i in 1:l
7     if sum(basis(op)[i,:]) == n
8         ran_state[i] = 2*rand(Float64,1)[1]-1
9     end
10 end
11
12 ran_state = ran_state/sqrt(ran_state'*ran_state)
13
14 ran_state = State(ran_state, op);

```

Naturalmente, los estados pueden crearse aplicando operadores de creación sobre el vacío. El estado de vacío se inicializa con `vacuum(Op)`. El estado resultante es sparse:

```

1 op = Op(d)
2 vac = vacuum(op)
3 state = (ad(op,1)*ad(op,2)+ad(op,3)*ad(op,4))*vac
4 state = state/sqrt(state'*state)
5 state = State(state, op);

```

Una vez inicializado un estado, se tiene acceso a varias propiedades. Algunas de estas son:

- `st(s::State)` : devuelve el array usado para construir el estado s .
- `ope(s::State)` : devuelve el elemento `Op` usado correspondiente al espacio donde vive el estado.
- `n_avg(s::State)` : devuelve el número medio de partículas en el estado s .
- `rhosp(s::State, prec=15)` : devuelve la matriz densidad de un cuerpo, es decir ρ tal que $\rho_{ij} = \langle \psi | a_j^\dagger a_i | \psi \rangle$, con $|\psi\rangle$ el estado.
- `rhoqsp(s::State, prec = 15)` : devuelve la matriz densidad de cuasipartículas, es decir ρ^{qsp} tal que $\rho^{qsp} = \begin{pmatrix} \rho^{sp} & \kappa \\ \bar{\kappa} & 1 - \rho^{sp} \end{pmatrix}$, con ρ^{sp} la matriz de un cuerpo, κ tal que $\kappa_{ij} = \langle \psi | a_j a_i | \psi \rangle$ y $\bar{\kappa}$ el hermítico conjugado de κ , con $|\psi\rangle$ el estado fermiónico s .
- `rhom(s::State, m::Int64, prec = 15)` : devuelve la matriz densidad de m -cuerpos en la base original, es decir ρ^m tal que $\rho_{ij}^m = \langle \psi | a_{i_1}^\dagger a_{i_2}^\dagger \dots a_{i_m}^\dagger a_{j_1} a_{j_2} \dots a_{j_m} | \psi \rangle$, con $|\psi\rangle$ el estado fermiónico s .

Hay muchas más funciones, algunas de las cuales serán introducidas más adelante. La lista completa puede verse en <https://bit.ly/2SAKJKX>

Subespacio con número fijo de partículas

Análogamente a lo hecho para operadores los estados pueden también vivir en el espacio reducido, ahorrando tiempo y memoria. Estados en el subespacio reducido pueden inicializarse con `State_fixed(s::AbstractVector, o::Op, n::Int64)`, donde n es el número fijado de partículas. Estos estados tienen accesibles las mismas funciones que `State` a excepción de aquellas relacionadas a número de partículas no definido, como `rhoqsp()`, `n_avg()` y las correlaciones correspondientes. En lugar de `n_avg()`, se tiene el comando `nume(s::State_fixed)` que devuelve el número fijado de partículas.

Estados que viven en el espacio completo pueden llevarse al espacio reducido de n partículas usando `fixed_state(state, n::Int64)`, donde `state` puede ser un `AbstractVector` (en cuyo caso devuelve el vector reducido) ó un `State` (en cuyo caso devuelve el `State_fixed` correspondiente).

También es posible realizar el proceso inverso, es decir pasar de la base restringida a la base entera. Para eso se usa `unfixed_state()`, que convierte vectores reducidos ó `State_fixed` en vectores completos ó `State` respectivamente.

9.2.3. Estados mixtos

Hasta ahora, se trató solamente con estados puros. Sin embargo, los estados más generales son mixtos. La matriz densidad de un cuerpo de estados mixtos se obtiene combinando convexamente las matrices de un cuerpo de los estados puros involucrados en la descomposición:

$$\rho^{\text{sp}} = \sum_i p_i \rho_i^{\text{sp}} \quad (9.1)$$

Es posible construir directamente esta matriz con

`rhosp_mixed(probs::Array{Float64,1}, st::Array{s,1})`, con `s::State/State_fixed`, es decir `st` es un array de estados de alguno de estos tipos, cada uno con su probabilidad correspondiente en el vector de misma longitud `probs`, tal que $\text{tr}(\text{probs}) = 1$.

9.2.4. Correlaciones

La capacidad de acceder a estados exactos es vital para el estudio de correlaciones. Estas cantidades suelen ser muy sensibles y por tanto difíciles de computar mediante aproximaciones. Como se ha mencionado, esta librería cuenta con funcionalidades especializadas al estudio de estas cantidades que se aplican sobre `State` y `State_fixed`:

- `ssp(s)`: con `s::State/State_fixed`, devuelve la entropía de un cuerpo $S = -\sum_i (\lambda_i \log_2(\lambda_i) + (1 - \lambda_i) \log_2(1 - \lambda_i)) / N$ con λ_i los autovalores de la matriz densidad de un cuerpo correspondiente al estado fermiónico `s`.
- `sqsp(s)`: con `s::State/State_fixed`, devuelve la entropía de un cuerpo generalizada $S = -\sum_i (\lambda_i \log_2(\lambda_i) + (1 - \lambda_i) \log_2(1 - \lambda_i)) / N$ con λ_i los autovalores de la matriz de un cuerpo de cuasipartículas correspondiente al estado fermiónico `s`.
- `trp(s::State, mod::Array{Int64,1})`: devuelve la matriz densidad $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ correspondiente al sistema restringido al subespacio de modos `mod` (que se indica por ejemplo como `[1, 4, 2, 6]`, identificando el subespacio de estos 4 modos).

Finalmente, es posible también comparar dos estados mediante relaciones de mayorización. Para eso se introducen los siguientes comandos:

- `majorization_sp(s1,s2)` : con `s1`, `s2` estados de cualquier tipo, devuelve 1 si `s1` mayoriza a `s2`, -1 si `s2` mayoriza a `s1` ó 0 si no hay relación de mayorización (todo respecto a la matriz de un cuerpo).
- `majorization_qsp(s1,s2)` : con `s1`, `s2` estados de cualquier tipo, devuelve 1 si `s1` qsp-mayoriza a `s2`, -1 si `s2` qsp-mayoriza a `s1` ó 0 si no hay relación de mayorización (todo respecto a la matriz de un cuerpo de cuasipartículas).

Se espera agregar más funcionalidades de este tipo en versiones posteriores de Fermionic.

9.2.5. Compuertas lógicas

En vistas de desarrollar modelos de computación cuántica fermiónica, puede plantarse una analogía del formalismo de compuertas utilizado para sistemas de qubits efectivamente distinguibles. La definición de de compuertas lógicas fermiónicas no es una tarea fácil, y fue tratada en detalle por Bravyi y Kitaev en el trabajo [135]. Se busca imitar el comportamiento de las compuertas de spin, considerando el mapeo de spines donde $|0\rangle$ se corresponde con un modo vacío y $|1\rangle$ con un modo ocupado. Este mapeo debe hacerse con cautela, ya que aparecen algunas diferencias. Por ejemplo, en la operación SWAP, se tiene un cambio en la fase debido a las reglas de anticonmutación. Las compuertas incluidas son:

1. Pauli x-gate: `sigma_x(o::Op,mode::Int64)`

En sistemas distinguibles, esta compuerta actúa sobre un qubit mapeando el estado $|0\rangle$ a $|1\rangle$ y el $|1\rangle$ al $|0\rangle$. Es por tanto equivalente a la compuerta clásica NOT. Con fermiones, se mapeará este comportamiento para las ocupaciones de los modos. Esta compuerta llevará el estado $a_i^\dagger|0\rangle$ a $|0\rangle$ y viceversa.

$$\begin{aligned}\sigma_x(j)|1_j\rangle &= |0_j\rangle \\ \sigma_x(j)|0_j\rangle &= |1_j\rangle\end{aligned}$$

Es importante remarcar que esta compuerta no conserva paridad de número de fermiones.

2. Pauli y-gate: `sigma_y(o::Op,mode::Int64)`

Esta compuerta es muy similar a la x-gate, pero introduce fases adicionales. Mapea $|0\rangle$ a $i|1\rangle$ y $|1\rangle$ a $-i|0\rangle$.

$$\begin{aligned}\sigma_y(j)|1_j\rangle &= i|0_j\rangle \\ \sigma_y(j)|0_j\rangle &= -i|1_j\rangle\end{aligned}$$

No se conserva la paridad en esta operación.

3. Pauli z-gate: `sigma_z(o::Op,mode::Int64)`

A diferencia de las dos compuertas anteriores, esta es diagonal. Mapea $|0\rangle$ a $|0\rangle$ y $|1\rangle$ a $-|1\rangle$. Agrega un signo negativo al aplicarse sobre modos ocupados.

$$\begin{aligned}\sigma_z(j)|0_j\rangle &= |0_j\rangle \\ \sigma_z(j)|1_j\rangle &= -|1_j\rangle\end{aligned}$$

En este caso la paridad sí se conserva.

4. Phase shift: `phase(o::Op,mode::Int64,phase::Float64)`

Esta operación es una generalización de la compuerta de Pauli z. Mide si un modo j se encuentra o no ocupado, y si lo está le aplica la fase ϕ .

$$\begin{aligned}R(j, \phi)|0\rangle &= |0\rangle \\ R(j, \phi)|1\rangle &= e^{i\phi}|1\rangle\end{aligned}$$

Cuando $\phi = \pi$ se recupera la Pauli z gate, y cuando $\phi = \pi/4$ se tiene la T-gate.

Phase shift gate conserva paridad.

5. Hadamard: `hadamard(o::Op,mode1::Int64,mode2::Int64)`

En sistemas distinguibles, la compuerta Hadamard es una operación sobre un qubit que mapea $|0\rangle$ a $\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}$ y $|1\rangle$ a $\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}$. Básicamente, crea una superposición entre los elementos.

Al trabajar con fermiones, surge una complejidad adicional. La regla de superselección de paridad impide mezclar estados fermiónicos con distinta paridad de número. Por tanto un mapeo directo a ocupaciones no está permitido. El mejor candidato para esta compuerta, requiere estados de dos modos tales que

$$\begin{aligned}|01\rangle &\rightarrow \frac{|01\rangle+|10\rangle}{\sqrt{2}} \\ |10\rangle &\rightarrow \frac{|01\rangle-|10\rangle}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Lo que se está realmente haciendo es transformando los operadores de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}a_i^\dagger &\rightarrow \frac{a_i^\dagger+a_j^\dagger}{\sqrt{2}} \\ a_j^\dagger &\rightarrow \frac{a_i^\dagger-a_j^\dagger}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

De este mapeo se pueden deducir también las siguientes transformaciones:

$$\begin{aligned}|00\rangle &\rightarrow |00\rangle \\ |11\rangle &\rightarrow |11\rangle\end{aligned}$$

que son equivalentes a la transformación identidad.

6. UCNOT: `ucnot(o::Op, control::Int64, target::Int64)`

Las compuertas controladas actúan sobre 2 o más entradas, donde una sirve a modo de control para determinar si una operación se realiza o no sobre las restantes, que se comportan como objetivos. La más común de estas es la Controlled NOT, ya que es una de las operaciones fundamentales que permiten computación cuántica universal. Esta operación cambia el estado objetivo si y solo si el control está activado. Para sistemas distinguibles de qubits, si el primer modo actúa de control y el segundo de objetivo, se tiene el siguiente mapeo

$$\begin{aligned} |00\rangle &\rightarrow |00\rangle \\ |01\rangle &\rightarrow |01\rangle \\ |10\rangle &\rightarrow |11\rangle \\ |11\rangle &\rightarrow |10\rangle \end{aligned}$$

Se tendrá el mismo mapeo para fermiones, pero ahora con ocupaciones, donde 0 representa el modo desocupado y 1 el modo ocupado. Esta operación se escribe como $U_{\text{CNOT}} = |0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes \sigma_x = \exp[i\frac{\pi}{4}(1 - \sigma_z) \otimes (1 - \sigma_x)]$.

Es importante remarcar que esta operación no conserva la paridad de número fermiónico en general. Una solución común a este problema consiste en aplicar Ucnnot a más de 1 objetivo, definiendo un subespacio de paridad fija. Por ejemplo, si se tiene el siguiente estado

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}(a_5^\dagger + a_6^\dagger)(a_1^\dagger a_3^\dagger + a_2^\dagger a_4^\dagger)|0\rangle$$

donde 5 y 6 son modos auxiliares (ancillas). Se puede aplicar una control gate con el modo 5 de control, y los modos 1 y 2 como objetivos. Los modos 1 y 2 viven en un subespacio con ocupación 1. Cualquier aplicación de Ucnnot va a conservar la paridad. Al tener varios objetivos, la operación total se descompone en el producto de operaciones individuales.

7. SWAP: `swap(o::Op, mode1::Int64, mode2::Int64)`

La compuerta SWAP intercambia la ocupación de dos modos fermiónicos.

$$\begin{aligned} S_{ij}|0_i 0_j\rangle &= |0_i 0_j\rangle \\ S_{ij}|0_i 1_j\rangle &= |1_i 0_j\rangle \\ S_{ij}|1_i 0_j\rangle &= |0_i 1_j\rangle \\ S_{ij}|1_i 1_j\rangle &= -|1_i 1_j\rangle \end{aligned}$$

Es diferente a la operación usual SWAP de qubits ya que se tiene un signo negativo en el caso de doble ocupación. Esto se debe a las propiedades de anticonmutación de los fermiones. Esta transformación puede obtenerse con la siguiente operación fermiónica:

$$S = I - a_i^\dagger a_i - a_j^\dagger a_j + a_i^\dagger a_j + a_j^\dagger a_i = \exp\left(i\frac{\pi}{2}(a_i^\dagger - a_j^\dagger)(a_i - a_j)\right)$$

Esta operación preserva la paridad de número de fermiones.

8. Unitary:

Es posible realizar transformaciones generales de operadores fermiónicos considerando la función exponencial. Esto es útil, por ejemplo, para evolucionar temporalmente un estado con un Hamiltoniano dado.

Por el momento, Julia no soporta exponenciales de matrices sparse (puede aproximarse manualmente haciendo el desarrollo de Taylor). Por eso, en el siguiente ejemplo se convierte la matriz a dense

```

1   op = Op_fixed(d,n)
2   t=1/2
3   u = exp(Matrix(im*t*(ada(op,1,2)+ada(op,2,1))))

```

9.3. Ejemplos de uso

En esta sección se mostrará un ejemplo concreto de uso de la librería. Se mostrará como obtener el estado fundamental de un sistema superconductor, como el descrito en el Capítulo 5. Dicho sistema contaba con Ω fermiones en 2Ω modos, compuestos por Ω niveles de energía, cada uno con degeneración doble k y \bar{k} (pensar en dos columnas paralelas). Los distintos niveles interactúan con un término de pairing. El Hamiltoniano completo tiene un término libre y otro de interacción:

$$H = H_0 + H_I \tag{9.2}$$

$$= \sum_k \epsilon_k (c_k^\dagger c_k + c_{\bar{k}}^\dagger c_{\bar{k}}) - \sum_{k,k'} G_{k,k'} c_{k'}^\dagger c_{\bar{k}}^\dagger c_{\bar{k}} c_k \tag{9.3}$$

El término libre $H_0 = \sum_k \epsilon_k (c_k^\dagger c_k + c_{\bar{k}}^\dagger c_{\bar{k}})$ describe dos estados k y \bar{k} con la misma energía. Se considera el caso de espectro equiespaciado, es decir $\epsilon_k = \epsilon_0 \quad \forall k$ (esto puede fácilmente cambiarse en el código). Por otro lado, se tiene el término de interacción $H_I = \sum_{k,k'} G_{k,k'} c_{k'}^\dagger c_{\bar{k}}^\dagger c_{\bar{k}} c_k$. Este término se activa cuando tanto k como \bar{k}

se encuentran ocupados. Como es un término negativo, el estado fundamental tendrá ocupaciones simultaneas de k con \bar{k} .

Se tiene en este caso $[H, \hat{N}] = 0$, con lo cual se puede trabajar directamente en el subespacio de número fijo de partículas. El siguiente código encuentra el estado fundamental de este sistema:

```

1 #importar las librerías necesarias
2 using Fermionic
3 using LinearAlgebra
4
5 #se selecciona la dimensión d y el número fijo de partículas n
6 d = 8
7 n = Int(d/2)
8
9 #inicialización de operadores
10 o = Op_fixed(d,n)
11
12 #el espectro de energías para el término libre
13 epsilon = [e0*(i-d/4-1/2) for i in 1:d/2]
14 epsilon = sort([epsilon; epsilon])
15
16 #el término libre
17 h0 = sum([epsilon[i]*(ada(o,i,i) + ada(o,i+1,i+1)) for i in
    ↪ 1:2:(Int(d)-1)])
18
19 #el término de interacción
20 hi = sum([sum([if i==j spzeros(binomial(d,nume),
    ↪ binomial(d,nume)) else -(ada(o,j,i+1)*ada(o,j+1,i)) end
21 for i in 1:2:(Int(d)-1))] for j in
    ↪ 1:2:(Int(d)-1)])
22
23 #los valores de acoplamiento
24 e0 = 1.0
25 g = 5.0
26
27 #construcción del Hamiltoniano completo
28 h = e0*h0 - g*hi

```

```

29
30 #se selecciona el autovector correspondiente al autovalor más
    → pequeño
31 fundamental = eigvecs(Matrix(h))[:,1]
32
33 #opcional: inicializar el estado para estudiar más propiedades
34 fund = State_fixed(fundamental,o);

```

Con el estado exacto, pueden medirse distintas medidas de correlación, como las ya presentadas previamente, u otras funciones definidas manualmente.

Una de las ventajas de Julia, es su facilidad para interactuar con librerías de Python mediante la librería `PyCall`. A modo de ejemplo, se resuelve nuevamente el sistema superconductor pero usando acoplamientos simbólicos. Se usa para esto la librería `Sympy`:

```

1 using Fermionic
2 using SparseArrays
3 using PyCall
4
5 #se importa el paquete de sympy a través de PyCall
6 sympy = pyimport("sympy");
7
8 d = 4
9 n = Int(d/2)
10
11 e0 = 1.0
12
13 o = Op_fixed(d,n)
14
15 epsilon = [e0*(i-d/4-1/2) for i in 1:d/2]
16 epsilon = sort([epsilon; epsilon])
17 h0 = sum([epsilon[i]*(ada(o,i,i) + ada(o,i+1,i+1)) for i in
    → 1:2:(Int(d)-1)])
18 hi = sum([sum([if i==j spzeros(binomial(d,nume),
    → binomial(d,nume)) else -(ada(o,j,i+1)*ada(o,j+1,i)) end
19 for i in 1:2:(Int(d)-1)]) for j in
    → 1:2:(Int(d)-1)])

```

```

20
21 #se definen los símbolos
22 g = sympy.Symbol("g")
23 e = sympy.Symbol("e")
24
25 mh = e*sympy.Matrix(h0) - g*sympy.Matrix(hi)
26 (P, D) = mh.diagonalize()
27
28 # D es el Hamiltoniano diagonalizado con los autovalores sobre
   ↪ su diagonal
29 D

```

Que devuelve:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(e^2 + g^2)^{0,5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (e^2 + g^2)^{0,5} \end{bmatrix}$$

Esto coincide con los resultados conocidos.

En el siguiente vínculo se presenta más detalle y desarrollo, así como otros ejemplos de uso:

<https://github.com/Marco-Di-Tullio/Fermionic.jl/tree/master/examples>

9.4. Bosonic.jl

En el último tiempo, se ha comenzado a explorar, con un formalismo análogo el caso bosónico. Con ese motivo, y partiendo del desarrollo previo de *Fermionic.jl*, resultó natural crear una librería que funcione de forma análoga y permita contrastar resultados analíticos numéricamente. Esta librería es un proyecto en desarrollo y cuenta con menos funcionalidades disponibles que Fermionic.

La principal diferencia con el caso fermiónico es que la base de Fock tiene en principio dimensión infinita. Es por ello que esta librería lidia solo con el caso con

número fijo de partículas. Con esta restricción, la base aumenta de tamaño proporcionalmente a $\binom{d+N-1}{N}$ donde d es la cantidad de modos disponibles y N la cantidad fija de partículas.

Al igual que Fermionic, Bosonic.jl es una librería de Julia que puede ser instalada en Mac, Windows y Linux. Para instalar la librería desde la consola, se escribe en primer lugar `]` para acceder al modo “pkg”. Luego, el comando

```
1 add Bosonic
```

instalará el paquete. Es posible también realizar la instalación desde un notebook de Jupyter con los siguientes comandos

```
1 import Pkg
2 Pkg.add("Bosonic")
```

El código fuente de Bosonic.jl está hosteado en GitHub, y puede encontrarse en la siguiente dirección

<https://github.com/Marco-Di-Tullio/Bosonic.jl>

El mismo se encuentra también distribuido bajo Licencia MIT.

Conclusiones

En la presente Tesis se han desarrollado y examinado nuevas medidas de entrelazamiento en sistemas fermiónicos.

En primer lugar, tras una revisión de los conceptos fundamentales, se reexaminó el denominado entrelazamiento de un cuerpo, basado en la matriz densidad de un cuerpo. A diferencia del entrelazamiento de modos, este entrelazamiento es independiente de la elección de base del espacio de una partícula, midiendo la desviación del estado respecto de un determinante de Slater. De hecho, como se mostró en el Capítulo 4 para estados puros, la correspondiente entropía de entrelazamiento representa la mínima entropía relativa (una medida entrópica de distancia) a un estado fermiónico Gaussiano, anulándose pues si el estado es un determinante de Slater o, en su versión extendida, un vacío de cuasipartículas. En estados mixtos, el correspondiente entrelazamiento de formación se anula solo para mezclas convexas de este tipo de estados. Mediante la concurrencia fermiónica, el mismo puede evaluarse en forma exacta en estados fermiónicos generales de cuatro modos.

Como primera aplicación, se investigó en el Capítulo 5 el comportamiento de este entrelazamiento en el estado fundamental de un sistema superconductor. Se mostró que la correspondiente entropía de entrelazamiento refleja la intensidad de las correlaciones de apareamiento, aumentando monótonamente con la constante de acoplamiento y saturando a su valor máximo en el régimen de acoplamiento fuerte. Al considerar la bipartición global entre todos los modos k y los reversos temporales \bar{k} , la correspondiente entropía de entrelazamiento resultó ser justamente muy similar a la entropía de un cuerpo (adecuadamente normalizada), siendo ambas directamente proporcionales en la aproximación BCS. Por tanto resulta así posible aproximar un recurso como la entropía de entrelazamiento bipartita entre modos distinguibles, mediante una cantidad accesible por medidas de un cuerpo, tal como la entropía de un cuerpo.

Se examinó luego el entrelazamiento fermiónico de estados reducidos de un con-

junto de modos, los cuales son, desde ya, estados mixtos. El primer caso no trivial es el estado reducido de 4 niveles $(k, \bar{k}, k', \bar{k}')$, $k \neq k'$, donde el entrelazamiento de formación asociado, calculado mediante la concurrencia fermiónica, exhibe un comportamiento distinto al de las entropías anteriores. Dicha medida presenta un pico prominente en la transición de fase superconductor para los niveles más cercanos al nivel de Fermi, haciéndose pequeña en el límite de acoplamiento fuerte.

Estas medidas fueron también calculadas para descripciones aproximadas del estado fundamental del mismo sistema, tales como BCS y BCS proyectado a número fijo de fermiones. Se observó una correlación estrecha entre el gap de BCS y el entrelazamiento de un cuerpo global, confirmando la relación de este último con las correlaciones de apareamiento. La aproximación de BCS es capaz de proveer una muy buena descripción, en la fase superconductor correspondiente a acoplamiento $G > G_c$, de la entropía de un cuerpo, así como de la entropía asociada a la partición entre todos los modos k y \bar{k} , que resulta ser en este caso exactamente la mitad de la anterior. Sin embargo, la aproximación normal de BCS no es capaz de describir la concurrencia fermiónica del estado reducido de cuatro modos (que depende de observables de dos cuerpos), dando un valor idénticamente nulo. Es necesario para ello proyectar el estado de BCS a un número de partículas fijo. El estado resultante (obtenido por variación luego de la proyección) es capaz de proporcionar una descripción correcta de la concurrencia fermiónica, reproduciendo el pico de la concurrencia para niveles k, k' próximos al nivel de Fermi. También es capaz de predecir correctamente el valor pequeño pero no nulo (en sistemas finitos) de las otras medidas de correlaciones en la zona normal $G < G_c$. Si bien las predicciones de esta última aproximación son muy buenas para todo valor de G , la zona $G \approx G_c$ es aquella donde se observa la mayor desviación, confirmando que el pico de la concurrencia se da en la zona de mayor complejidad de la función de onda exacta.

Se analizaron también otras medidas de correlaciones en el estado reducido de estos subsistemas, tales como la información mutua y la discordia cuántica. En contraposición con la concurrencia, estas siguen siendo significativas en la zona superconductor y también en el límite de acoplamiento fuerte.

Las mismas medidas fueron también examinadas, en el Capítulo 6, en el estado fundamental exacto del modelo de múltiplemente conectado de Lipkin fermiónico. Aquí se encontró también que la entropía de un cuerpo se correlaciona fuertemente con el parámetro de orden de campo medio asociado a la ruptura de simetría, y aumenta monótonamente con la intensidad del acoplamiento, saturando en el límite

de acoplamiento fuerte. Es también aproximadamente proporcional a la entropía de entrelazamiento total bipartita entre los modos superiores e inferiores, una cantidad que no tiene análogo físico en una realización pura de espines de este modelo. Ambas entropías escalan con la dimensión del sistema, son débilmente dependientes de la anisotropía y pueden ser correcta y analíticamente descritas por una aproximación de campo medio con paridad de número de ocupación de nivel restaurada. Esta simetría tiene un rol importante en la proporcionalidad previa y asegura una paridad de número de fermiones fija en el entrelazamiento entre modos superiores e inferiores, permitiendo considerar el entrelazamiento total arriba-abajo como un recurso cuántico.

Se analizó también el entrelazamiento fermiónico del estado reducido de cuatro modos (dos pares arriba-abajo, primer caso no trivial) mediante la concurrencia fermiónica. A diferencia de las medidas globales previas, esta concurrencia presenta un pico dominante en la transición de fase, al igual que en el sistema superconductor, cuyo ancho es dependiente de la anisotropía del acoplamiento. Mientras que esta concurrencia puede ser directamente asociada con un entrelazamiento de modos bipartito (es decir con un par de spin $1/2$ efectivo $p - q$), difiere de un entrelazamiento arriba-abajo del par, ρ_{pq} , el cual puede ser medido mediante la negatividad correspondiente. Esta última cantidad se comporta similarmente a medidas globales previas. La aproximación de campo medio puede predecir correctamente esta negatividad si se restaura la simetría rota de paridad de ocupación de nivel, pero no puede predecir la concurrencia para acoplamientos fuertes incluso después de restauración de simetría, a diferencia del caso superconductor anterior. Solo considerando correlaciones de RPA (del tipo bosones efectivos colectivos) sobre campo medio es posible capturar el comportamiento y valor de la concurrencia correctamente, obteniéndose así expresiones analíticas exactas en el límite termodinámico.

En el Capítulo 7, se volvieron a tratar los aspectos formales del entrelazamiento de un cuerpo, demostrando que puede ser considerado como un recurso cuántico. En primer lugar, se desarrolló una formulación bipartita general del entrelazamiento de un cuerpo en estados puros, que se relaciona con correlaciones entre observables de 1 y $(N - 1)$ -cuerpos, y es formalmente análoga a la de sistemas de componentes distinguibles. Esta formulación conduce a una descomposición tipo Schmidt del estado, que contiene los autovalores de las matrices densidad de 1 y $(N - 1)$ cuerpos (las cuales son iso espectrales).

Se identificó a continuación la clase de operaciones que no generan entrelazamien-

to de un cuerpo, a través de relaciones de mayorización que debe satisfacer la matriz densidad correspondiente. Se demostró en el Teorema (7.2.1) que medidas de ocupación de un modo (de una base arbitraria) satisfacen efectivamente esta relación, implicando que estas disminuyen (o no aumentan), en promedio, el entrelazamiento de un cuerpo, en forma análoga a lo que ocurre con las medidas locales en la teoría usual LOCC de entrelazamiento entre componentes distinguibles. La teoría de recurso resultante tiene entonces a los determinantes de Slater como estados libres y a las operaciones FLO (Fermionic Linear Optics) con conservación de número como operaciones libres. En los corolarios (1) y (2) del teorema se extienden estos resultados a medidas de ocupación más generales. Los resultados aquí obtenidos constituyen la base para una teoría general de recursos asociada a las correlaciones cuánticas más allá de la antisimetrización en sistemas fermiónicos. Se discutieron también conexiones con el entrelazamiento de modos, mostrando que el entrelazamiento de un cuerpo es necesario para tener entrelazamiento bipartito de modos con número fijo de fermiones en cada parte (o también paridad de número fija).

En el Capítulo 8, se generalizó el formalismo anterior al caso de M cuerpos. En primer lugar se introdujo una representación bipartita de estados arbitrarios de N -fermiones, y una correspondiente descomposición de Schmidt, expresada en términos de operadores generales de creación de M - y $(N-M)$ fermiones. La misma se encuentra directamente conectada con las matrices densidad reducidas de M y $(N-M)$ -cuerpos, que comparten los mismos autovalores no nulos, asemejándose formalmente al caso estándar de componentes distinguibles. Se presentó también el concepto de entrelazamiento de M -cuerpos, que emerge naturalmente de esta representación, determinado por el grado de mezcla de las matrices densidad de M o $(N-M)$ -cuerpos, que generaliza el entrelazamiento de un cuerpo y caracteriza las correlaciones entre los operadores de M - y $(N-M)$ -cuerpos. Dicho entrelazamiento es naturalmente independiente de la elección de base (no es un entrelazamiento de modos) y de la elección de los operadores de creación de M -fermiones.

El conjunto completo de matrices densidad de M -cuerpos $\rho^{(M)}$ ($1 \leq M \leq N/2$) y en particular sus autovalores, provee una caracterización detallada de la estructura de los estados correlacionados de N -fermiones. Se ha visto explícitamente que estados correlacionados que se ven similares a nivel de un cuerpo pueden llevar a matrices densidad de M -cuerpos muy distintas, como sucede con los estados (8.42) y (8.35). En este último estado, se tiene la aparición de características tipo bosónicas como la emergencia de autovalores mayores a 1 en las matrices densidad de M -cuerpos para

$M \geq 2$. Por otro lado, todos los determinantes de Slater llevan a matrices densidad de M -cuerpos idempotentes (i.e. con autovalores 1 ó 0) $\forall M$. Los autovalores de $\rho^{(M)}$ determinan el valor medio de los operadores de M -cuerpos y sus autovalores más grandes dan una cota superior a todos los valores medios $\langle A^{(M)\dagger} A^{(M)} \rangle$ (Ec. (8.32)) determinados por operadores “colectivos” $A^{(M)\dagger}$ que crean estados normalizados de M fermiones. El comportamiento de los autovalores de la matriz de M -cuerpos fue estudiado en el estado fundamental de un sistema supeconductor y en un modelo tipo Hubbard fermiónico atractivo. En ambos casos se observaron comportamientos del tipo bosónicos, como se vió refljado por la presencia de autovalores de la matriz densidad de 2 cuerpos mayores a 1. Fue posible, además, identificar una familia de aproximaciones basadas en la descomposición de Schimdt (exacta) previamente presentada y la presencia de simetrías, que logra dar una buena aproximación con pocos términos.

Se investigaron asimismo las implicancias operacionales del entrelazamiento de M -cuerpos. Al demostrar la relación de mayorización (8.56), se mostró que la entropía de entrelazamiento asociada a la matriz densidad normalizada de M -cuerpos ($1 \leq M \leq (N - 1)$) no aumentará (y decrecerá en general) bajo medidas de un fermión determinadas por los operadores de Kraus (8.55). Este resultado puede extenderse a medidas generales de L -fermiones basadas en operadores (8.75) (Ecs. (8.85)–(8.86)), que tienen matrices densidad reducidas de M -cuerpos como estados post-medidos, Además, demostrando la relación de mayorización (8.92), se mostró que dicha entropía de M -cuerpos provee también una cota superior al entrelazamiento bipartito promedio entre M y $(N - M)$ fermiones efectivamente distinguibles generados por el mapeo determinado por los operadores (7.32). Estos resultados sirven de base para una teoría general de entrelazamiento de muchos cuerpos en sistemas fermiónicos más allá de la antisimetrización.

Finalmente, en el Capítulo 9 se describió en detalle el funcionamiento de la librería de código abierto Fermionic.jl, desarrollada y utilizada en el marco de la presente tesis.

A partir de estos resultados se desprenden varias extensiones y aplicaciones que se planea investigar a futuro. Entre ellas, el análisis y caracterización de sistemas fermiónicos fuertemente correlacionados en base a las matrices densidad de M cuerpos y el correspondiente entrelazamiento, el desarrollo de protocolos de computación cuántica basados en los recursos aquí presentados, la extensión del formalismo a sistemas bosónicos, y la extensión a cuasipartículas de la última parte del formalismo.

Finalmente, cabe destacar que todas las partículas a nivel fundamental son indistinguibles, por lo que el presente formalismo, es necesariamente la base para todo tipo de teorías rigurosas de entrelazamiento, incluyendo las basadas en componentes efectivamente distinguibles.

Apéndice

Apéndice A: Fermiones

A.1. Primera Cuantización

Una primera aproximación al problema de la simetrización consiste en considerar las partículas como objetos cuánticos, pero sus alrededores de forma clásica. Considerando primero un sistema de dos partículas, una en el estado n_1 y otra en el estado n_2 , un primer *Ansatz* para la función de onda sería

$$|n_1\rangle |n_2\rangle$$

Que pertenece claramente al espacio producto tensorial $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Sin embargo, esta expresión permite la posibilidad de distinguir ambas partículas (la partícula 1 es la que está en el estado n_1 y la partícula 2 en el estado n_2). Dos estados físicos son equivalentes si difieren solo en una fase compleja. Luego se tienen los siguientes estados posibles

$$|n_1\rangle |n_2\rangle \pm |n_2\rangle |n_1\rangle$$

Con esta función de onda no es posible identificar a las partículas, ya que es un autoestado del operador correspondiente a intercambiar las partículas 1 y 2 (esto se verá con más detalle a continuación). Tomar el signo positivo equivale a considerar estados simétricos, y el signo negativo a estados antisimétricos. Si $n_1 = n_2$ el estado antisimétrico se anula trivialmente. Esto significa que no se puede tener partículas idénticas antisimétricas en el mismo estado. Este es el principio de exclusión de Pauli.

Simetría de intercambio

Se define un operador lineal P , operador de intercambio, que actúa sobre el producto tensorial de dos vectores de estados y los intercambia

$$P(|\phi\rangle |\psi\rangle) \equiv |\psi\rangle |\phi\rangle$$

P es hermítico y unitario, se tiene $P^2 = \mathbb{1}$ y luego sus autovalores son $+1$ y -1 . Se tiene

$$P|S\rangle = |S\rangle, \quad P|A\rangle = -|A\rangle$$

Donde $|S\rangle$ es un estado simétrico y $|A\rangle$ uno antisimétrico. El operador P es tal que $[P, H] = 0$ para los sistemas fermiónicos. Esto significa que el valor que toma P es una cantidad conservada. Los vectores quedan confinados a un subespacio con P definido del espacio total de Hilbert.

Pueden definirse operadores de simetrización $S = \frac{1}{N!} \sum_{\alpha} P_{\alpha}$ y antisimetrización $A = \frac{1}{N!} \sum_{\alpha} \epsilon(\alpha) P_{\alpha}$ (con $\epsilon(\alpha) = +1$ si α par y $\epsilon(\alpha) = -1$ si α impar) proyectores sobre el espacio simétrico y el antisimétrico respectivamente.

Para ver en que sentido la simetrización o antisimetrización cambian las propiedades del sistema, puede verse lo que ocurre con las probabilidades. Dado $|\psi\rangle_T = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1 : \chi_1, 2 : \chi_2\rangle + \epsilon|1 : \chi_2, 2 : \chi_1\rangle)$, con $\epsilon = \pm 1$, se quiere ver la probabilidad de encontrar una partícula en x y otra en x' .

$$\begin{aligned} Prob(x, x' | |\psi\rangle_T) &= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle x, x' | + \epsilon \langle x', x |) \frac{1}{\sqrt{2}} (|1 : \chi_1, 2 : \chi_2\rangle + \epsilon |1 : \chi_1, 2 : \chi_2\rangle) \right|^2 \\ &= \left| \frac{1}{2} (\chi_1(x)\chi_2(x') + 2\epsilon\chi_2(x)\chi_1(x') + \epsilon^2\chi_1(x)\chi_2(x')) \right|^2 \\ &= |(\chi_1(x)\chi_2(x') + \epsilon\chi_2(x)\chi_1(x'))|^2 \\ &= |\chi_1(x)|^2|\chi_2(x')|^2 + |\chi_1(x')|^2|\chi_2(x)|^2 + 2\epsilon \operatorname{Re}(\chi_1(x)\chi_1^*(x')\chi_2(x')\chi_2^*(x)) \end{aligned}$$

El último término es de interferencia y no aparece si partículas son distinguibles. Se anula si $x = x'$.

Usando el teorema de spin estadístico puede mostrarse que las partículas con valores de spin semientero (fermiones) son antisimétricas ante el operador P , y aquellas con spin entero (bosones) son simétricas frente al mismo operador.

Primera cuantización consiste en tomar el producto de las funciones de onda ortogonales de las partículas individuales (producto de Hartree). Para el caso de dos fermiones con coordenadas x_1 y x_2 que sea antisimétrico ante el intercambio de posiciones, es posible definir la siguiente combinación lineal normalizada:

$$\Phi(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\chi_1(x_1)\chi_2(x_2) - \chi_1(x_2)\chi_2(x_1)] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \chi_1(x_1) & \chi_2(x_1) \\ \chi_1(x_2) & \chi_2(x_2) \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Para el caso general de N fermiones se tiene el determinante de Slater definido como

$$\Psi(x_1, x_2, \dots, x_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \det \begin{pmatrix} \chi_1(x_1) & \chi_2(x_1) & \dots & \chi_N(x_1) \\ \chi_1(x_2) & \chi_2(x_2) & \dots & \chi_N(x_2) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \chi_1(x_N) & \chi_2(x_N) & \dots & \chi_N(x_N) \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Si el conjunto de χ_i es linealmente dependiente, el determinante se anula (principio de exclusión de Pauli). Formalmente, se trata de un producto wedge.

Para bosones, puede hacerse el mismo tratamiento pero con *permanentes* en lugar de determinantes. Es decir que la combinación lineal queda expresada siempre con signo positivo.

A.2. Segunda Cuantización

En primera cuantización, la (anti)simetrización de las partículas se consigue representando la función de onda con combinaciones lineales de determinantes de Slater o de permanentes de estados de una partícula. En segunda cuantización, la (anti)simetrización se obtiene automáticamente de los operadores de creación y destrucción.

En el lenguaje de primera cuantización, el estado de varias partículas se describe respondiendo *¿que partícula está en que estado?* Pero estas preguntas no tienen mucho significado físico, pues las partículas son idénticas y es imposible decir que partícula está en que lugar. Los estados aparentemente distintos $\psi_1 \otimes \psi_2$ y $\psi_2 \otimes \psi_1$ son en realidad nombres redundantes del mismo estado cuántico de muchos cuerpos. Luego las (anti)simetrizaciones se introducen para eliminar esta redundancia. En el lenguaje de segunda cuantización en cambio, en vez de preguntar que partícula está en que estado, se pregunta *¿cuántas partículas hay en cada estado?* No se etiquetan las partículas y luego no surgen las redundancias. El estado de muchas partículas se representa con los números de ocupación

$$|[n_\alpha]\rangle = |n_1, n_2, \dots, n_\alpha, \dots\rangle$$

Este estado tiene n_α partículas en el estado $|\alpha\rangle$. A los números de ocupación $|[n_\alpha]\rangle$ se los conoce como *estados de Fock*. Se tiene $\sum_\alpha n_\alpha = N$. Para fermiones, n_α puede ser solo 0 ó 1, mientras que para bosones puede ser cualquier entero no negativo.

Todos los estados de Fock forman un conjunto completo del espacio de Hilbert de muchas partículas, o *Espacio de Fock*.

Definición A.2.0.1. *El espacio de Fock es una construcción algebraica usada para construir estados cuánticos con número variable de partículas idénticas a partir de un mismo espacio de Hilbert \mathcal{H} , cada uno con la simetría correspondiente. Se construye con la suma directa de los espacios*

$$F_v(\mathcal{H}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} S_v \mathcal{H}^{\otimes n} = \mathcal{C} \oplus \mathcal{H} \oplus (S_v(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H})) \oplus (S_v(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{H})) \oplus \dots \quad (\text{A.3})$$

Con S_v el operador que simetriza o antisimetriza.

Cualquier estado genérico de muchos cuerpos puede ser expresado como combinación lineal de estados de Fock. El espacio de Fock permite además variar el número de partículas y definir un estado de vacío $|0\rangle$ con todos los números de ocupación iguales a cero $|0\rangle = |\dots, 0_\alpha, \dots\rangle$. El estado de Fock con un solo valor de ocupación distinto de cero $|n_\alpha\rangle = |\dots, 0, n_\alpha, 0, \dots\rangle$ se conoce como es estado de modo único.

En términos de primera cuantización, el vacío es la unidad del producto tensorial: $|0\rangle = 1$. El estado de una partícula se reduce a su función de onda $|1_\alpha\rangle = \psi_\alpha$ y para más partículas se tiene $|2_\alpha\rangle = \psi_\alpha \otimes \psi_\alpha$ y $|n_\alpha\rangle = \psi_\alpha^{\otimes n}$. Para estados de Fock multimodos, se necesita simetrización: $|1_1, 1_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1\psi_2 \pm \psi_2\psi_1)$, con signo positivo para bosones y negativo para fermiones. Para agregar o quitar partículas se introducen los operadores de creación y aniquilación. Todos los estados de Fock pueden obtenerse aplicando operadores de creación sobre el estado del vacío. Estos operadores se construyen originalmente en el contexto del oscilador armónico cuántico y se generalizan en teoría cuántica de campos. Son fundamentales en el sentido de que cualquier operador puede expresarse a partir de estos. Las partículas que se crean con estos operadores tienen la simetrización ya adecuada.

A.3. Descomposición de una Transformación de Bogoliubov

Estas transformaciones pueden pensarse en pasos. Usando el Teorema de Bloch y Messiah [75], una matriz de la forma (3.14) puede siempre descomponerse como

el producto de 3 matrices de la siguiente forma

$$\mathcal{W} = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{U} & \bar{V} \\ \bar{V} & \bar{U} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C^* \end{pmatrix}$$

O análogamente

$$U = D\bar{U}C \quad V = D^*\bar{V}C$$

con D y C son matrices unitarias, y \bar{U}, \bar{V} son matrices reales de la siguiente forma

$$\bar{U} = \begin{pmatrix} 0 & & & \dots & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 0 & & & & & & & & \\ & & & u_1 & 0 & & & & & & \\ & & & 0 & u_1 & & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & u_n & 0 & & \\ & & & & & & & 0 & u_n & & \\ & & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad (A.4)$$

$$\bar{V} = \begin{pmatrix} 1 & & & \dots & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & 0 & v_1 & & & & & & \\ & & & -v_1 & 0 & & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & 0 & v_n & & \\ & & & & & & & -v_n & 0 & & \\ & & & & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Esto implica que la transformación (3.12) ocurre en tres partes:

1. Una transformación unitaria de los operadores c y c^\dagger entre ellos

$$d_k^\dagger = \sum_l D_{lk} c_l^\dagger$$

2. Una transformación especial de Bogoliubov, que distingue entre niveles apareados (es decir los que tienen $u_p > 0$ y $v_p > 0$)

$$\begin{aligned}\alpha_p^\dagger &= u_p d_p^\dagger - v_p d_{\bar{p}} \\ \alpha_{\bar{p}}^\dagger &= u_p d_{\bar{p}}^\dagger + v_p d_p\end{aligned}$$

con los bloqueados (es decir los que están ocupados $v_i = 1, u_i = 0$ ó desocupados $v_m = 0, u_m = 1$)

$$\begin{aligned}\alpha_i^\dagger &= d_i, & \alpha_m^\dagger &= d_m^\dagger \\ \alpha_i &= d_i^\dagger, & \alpha_m &= d_m\end{aligned}$$

Se conectan por los bloques de 2×2 de las matrices (A.4). Las relaciones (3.15) garantizan con los coeficientes de ocupación u_p y v_p estén normalizados.

3. Una transformación unitaria de los α_k^\dagger entre ellos

$$a_k^\dagger = \sum_{k'} C_{k'k} \alpha_{k'}^\dagger$$

A.4. Teorema de Wick

El teorema de Wick [75] establece reglas que permiten reordenar un conjunto de N operadores c, c^\dagger , que cumplen con la propiedad que el conmutador (en el caso bosónico) o el anticonmutador (en el caso fermiónico) de dos operadores elegidos de manera arbitraria de este conjunto es un número.

Se define en primer lugar el *producto T-ordenado* (producto ordenado temporalmente) de un producto de operadores $a(t_2), a(t_3), a^\dagger(t_1) \dots$ como el reordenamiento de estos de forma tal que los argumentos temporales aumentan de derecha a izquierda. Las permutaciones impares poseen un signo negativo.

$$T\{a(t_1)a^\dagger(t_3)a(t_2)a^\dagger(t_4)\} = -a(t_1)a(t_2)a^\dagger(t_3)a^\dagger(t_4) \quad t_1 > t_2 > t_3 > t_4$$

En un *producto normalmente ordenado*, los operadores se ordenan de manera tal que los de *creación* a^\dagger están a la izquierda y los de *destrucción* a a la derecha. Nuevamente, las permutaciones impares dan un signo negativo.

$$N\{a_\nu a_\mu a_\rho a_\sigma^\dagger\} \equiv: a_\nu a_\mu a_\rho a_\sigma^\dagger := -a_\sigma^\dagger a_\nu a_\mu a_\rho$$

Finalmente se define la contracción \widehat{UV} de dos campos U y V , el valor medio de su producto, como

$$\widehat{UV} \equiv T\{UV\} - N\{UV\}$$

Con estas definiciones se tiene finalmente el teorema de Wick

$$\begin{aligned}
T\{UVW\dots XYZ\} &= N\{UVW\dots XYZ\} + N\{\widehat{UVW}\dots XYZ\} \\
&+ \dots + N\{UVW\dots \widehat{XYZ}\} + N\{\widehat{UVW}\dots \widehat{XYZ}\} \\
&+ \dots + N\{\widehat{UVW}\widehat{\dots}\widehat{XYZ}\} + \dots
\end{aligned} \tag{A.5}$$

Luego el producto T-ordenado de operadores de campos es igual a su producto normalmente ordenado sumado a los productos normalmente ordenados con una contracción (de todas las formas posibles), sumado a los productos normalmente ordenados con dos contracciones (de todas las formas posibles), etc. Se debe tener cuidado al quitar una contracción del producto normalmente ordenado, ya que puede haber un cambio de signo:

$$N\{\widehat{UV}XY\} = \widehat{UV}N\{XY\}, \quad N\{\widehat{UV}XY\} = -\widehat{UX}N\{VY\}$$

Cuando los operadores no tienen dependencia temporal, el orden temporal se define como el orden dado en primer lugar. Al calcular valores de expectación de estados determinantes de Slater, o estados que son exponenciales de operadores de un cuerpo (exponenciales de $c^\dagger c$) o de un cuerpo generalizado (exponenciales de operadores $c^\dagger c$, cc , $c^\dagger c^\dagger$), en la expresión (A.5) se anulan todos los términos que no están totalmente contraídos. Luego se tiene, por ejemplo,

$$\langle c_1^\dagger c_2^\dagger c_3 c_4 \rangle = \langle c_1^\dagger c_2^\dagger \rangle \langle c_3 c_4 \rangle + \langle c_1^\dagger c_4 \rangle \langle c_2^\dagger c_3 \rangle - \langle c_1^\dagger c_3 \rangle \langle c_2^\dagger c_4 \rangle \tag{A.6}$$

y expresiones similares para operadores de n cuerpos. Es posible entonces expresar los valores medios de operadores de dos o n cuerpos en estos estados en términos de los elementos de la matriz densidad de un cuerpo extendida determinada por los mismos.

Apéndice B: Sistemas correlacionados

B.1. Estados reducidos de cuatro modos como estados de dos qubits y discordia cuántica

El GS (5.2) es una superposición de estados donde los pares de modos $k\bar{k}$ están totalmente ocupados o vacíos. Siguiendo la ref. [83], se puede pensar en estos pares como qubits de paridad par y usar esta representación para estudiar el estado reducido (5.10) de cuatro modos k, \bar{k}, k', \bar{k}' , como un estado mixto de dos qubits. Del Lemma 1 de [83] sigue que la concurrencia fermiónica (5.11) es la concurrencia de Wootters [71] de estos dos qubits.

Además, se pueden introducir operadores fermiónicos análogos a las matrices de Pauli de estos qubits, de forma tal que las operaciones locales pueden describirse con las siguientes analogías:

$$\tilde{\sigma}_k^x = c_k^\dagger c_k^\dagger + c_{\bar{k}} c_k \quad (\text{B.1})$$

$$\tilde{\sigma}_k^y = -i(c_k^\dagger c_k^\dagger - c_{\bar{k}} c_k) \quad (\text{B.2})$$

$$\tilde{\sigma}_k^z = c_k^\dagger c_k + c_{\bar{k}} c_{\bar{k}} - 1 \quad (\text{B.3})$$

Estos operadores satisfacen $[\tilde{\sigma}_k^\mu, \tilde{\sigma}_{k'}^\nu] = 2i\delta_{kk'}\epsilon_{\mu\nu\gamma}\tilde{\sigma}_k^\gamma$ y $(\tilde{\sigma}_k^\mu)^2|\psi\rangle_k = |\psi\rangle_k$ para cualquier paridad del estado $|\psi\rangle_k$ de los pares $k\bar{k}$. Cualquier estado mixto de dos qubits puede escribirse, en función de estos operadores, como

$$\rho_{kk'} = \rho_k \rho_{k'} + \frac{1}{4} C_{\mu\nu} \sigma_k^\mu \sigma_{k'}^\nu \quad (\text{B.4})$$

$$\rho_k = \frac{1}{2}(1 + r_{k\mu} \sigma_k^\mu) \quad (\text{B.5})$$

donde $r_{k\mu} = \langle \sigma_k^\mu \rangle$ y $C_{\mu\nu} = \langle \sigma_k^\mu \sigma_{k'}^\nu \rangle - \langle \sigma_k^\mu \rangle \langle \sigma_{k'}^\nu \rangle$ es el tensor de correlación del estado. Esta representación es conveniente para evaluar la discordia cuántica [74].

La discordia cuántica $D(A|B)$ de un estado ρ_{AB} de un sistema bipartito de componentes distinguibles A, B puede definirse como la mínima diferencia entre dos extensiones cuánticas de la entropía condicional [73, 136, 137] (véase (2.25)),

$$D(A|B) = \min_{\{\Pi_j\}} S(A|B_{\{\Pi_j\}}) - [S(\rho_{AB}) - S(\rho_B)] \quad (\text{B.6})$$

$$S(A|B_{\{\Pi_j\}}) = \sum_j p_j S(\rho_{A/\Pi_j}) \quad (\text{B.7})$$

donde $\rho_{A(B)} = \text{Tr}_{B(A)} \rho_{AB}$ es el estado reducido del subsistema $A(B)$, el conjunto $\{\Pi_j\}$ describe una medida local en B , $p_j = \text{Tr}[\rho_{AB}\Pi_j]$ es la probabilidad de obtener el resultado j en esta medida y $\rho_{A/\Pi_j} = p_j^{-1} \text{Tr}[\rho_{AB}\Pi_j]$ es el estado condicional de A luego de obtener este resultado. Evaluar $D(A|B)$, requiere entonces encontrar el mínimo sobre todas las medidas locales de la entropía condicional $S(A|B_{\Pi_j})$.

Para estados de dos qubits y para una medida proyectiva a lo largo de la dirección k en la esfera de Bloch del qubit B , la entropía condicional (B.7) toma la forma

$$S(A|B_k) = \sum_{\mu=\pm, \nu=\pm} p_{\nu\mathbf{k}} f(\lambda_{\nu\mathbf{k}}^\mu) \quad (\text{B.8})$$

donde $f(x) = -x \log_2 x$, $p_{\nu\mathbf{k}} = \frac{1}{2}(1 + \nu \mathbf{r}_B \cdot \mathbf{k})$ son las probabilidades de los dos posibles resultados de la medida y

$$\lambda_{\nu\mathbf{k}}^\mu = \frac{1}{2} \left(1 + \mu |\mathbf{r}_A + \nu \frac{C_{\mathbf{k}}}{1 + \nu \mathbf{r}_B \cdot \mathbf{k}}| \right) \quad (\text{B.9})$$

son los autovalores de los estados condicionales correspondientes $\rho_{A/\nu\mathbf{k}}$ del qubit A . Se mostró en [74] que en el régimen débilmente correlacionado, la medida minimizante (B.8) se determina esencialmente por la dirección de uno de los vectores singulares del tensor de correlación C . El estado de interés es (5.10), que en la notación actual es un estado del tipo X simétrico bajo rotaciones alrededor del eje z . Tiene vectores marginales $\mathbf{r}_{k(k')}$ paralelos al vector singular $z_{k(\bar{k})}$ de C , i.e., $\mathbf{r}_k = (0, 0, r_{kz})$ con $r_{kz} = 2\langle n_{k\bar{k}} \rangle - 1$, y un tensor de correlación ya diagonal en la base elegida, con

$$C_{xx} = C_{yy} = 2\langle c_k^\dagger c_{\bar{k}}^\dagger c_{\bar{k}'} c_{k'} \rangle \quad (\text{B.10})$$

$$C_{zz} = 4(\langle n_{k\bar{k}} n_{k'\bar{k}'} \rangle - \langle n_{k\bar{k}} \rangle \langle n_{k'\bar{k}'} \rangle) \quad (\text{B.11})$$

Por ende, la medida minimizante en el límite débilmente correlacionado puede ser una medida proyectiva a lo largo de z o a lo largo de cualquier vector \mathbf{k} en el plano xy . Más allá de este límite, es fácil mostrar que para este estado las medidas proyectivas previas siguen siendo estacionarias. Además, para los estados reducidos obtenidos del GS del sistema con apareamiento (superconductor), se ha verificado aquí que el

mínimo se obtiene siempre para medidas a lo largo de cualquier vector \mathbf{k} en el plano xy , que es precisamente el determinado por las correlaciones de apareamiento (Ec. (B.10)).

Luego se obtiene $p_{\nu\mathbf{k}} = \frac{1}{2}$ y $\lambda_{\nu\mathbf{k}}^\mu = \frac{1}{2}[1 + \mu\sqrt{r_{kz}^2 + C_{xx}^2}]$ para ambos $\nu = \pm$. En particular, en el régimen de superconductor fuerte, las Ecs. (5.13-5.14) llevan a $r_{kz} = 0$ y $C_{xx} = \frac{\Omega}{4(\Omega-1)}$, en cuyo caso las Ecs. (B.6-B.7) llevan a

$$D_{kk'} \simeq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\log_2 3}{2}(3 + \Omega^{-1})\right) \quad (\text{B.12})$$

para Ω grande. Es decir que el discord es finito en este límite.

El caso $N = \Omega = 2$: El caso de $N = 2$ fermiones en $\Omega = 2$ niveles degenerados es el caso no trivial más pequeño del sistema superconductor. El GS exacto del Hamiltoniano 5.1 es simplemente $|\psi\rangle = (\alpha_k c_k^\dagger c_{\bar{k}}^\dagger + \alpha_{k'} c_{k'}^\dagger c_{\bar{k}'}^\dagger)|0\rangle$ con $k = 1, k' = 2$, $\alpha_{k'} = \sqrt{\frac{\lambda \pm \varepsilon}{2\lambda}}$ y $\lambda = \sqrt{\varepsilon^2 + G^2}$, que es entrelazado para $G > 0$ (i.e., no es un DS o un vacío de cuasipartículas). El estado (5.10) es obviamente puro, con $\langle n_{k\bar{k}} n_{k'\bar{k}'} \rangle = \langle \tilde{n}_{k\bar{k}} \tilde{n}_{k'\bar{k}'} \rangle = 0$ y $\langle n_{k\bar{k}} \tilde{n}_{k'\bar{k}'} \rangle = |\alpha_k^2|$, $\langle c_{k'}^\dagger c_{\bar{k}'}^\dagger c_{\bar{k}} c_k \rangle = \alpha_k \alpha_{k'}^* = G/(2\lambda)$. La concurrencia (5.11) se reduce a $C = 2|\alpha_k \alpha_{k'}|$, es decir,

$$C_{kk'} = \frac{|G|}{\sqrt{\varepsilon^2 + G^2}} \quad (\text{B.13})$$

que tiende a 1 cuando $G/\varepsilon \rightarrow \infty$, en concordancia con el límite (5.15) para $\Omega = 2$. La discordia cuántica coincide entonces exactamente con la entropía de entrelazamiento bipartito $E_{\Omega, \bar{\Omega}}$ y es exactamente proporcional con la entropía de un cuerpo $S^{sp}(|\psi\rangle) = h(\rho^{sp})$: $D_{kk'} = E_{\Omega, \bar{\Omega}} = S(\rho_{k\bar{k}}) = S(\rho_{k'\bar{k}'}) = S^{sp}(|\psi\rangle)/4 = -\sum_k |\alpha_k^2| \log_2 |\alpha_k^2| = h(f_k) = h(f_{k'})$, con $I_{kk'} = 2E_{\Omega, \bar{\Omega}}$ y $f_k = |\alpha_k^2|$, $k = 1, 2$ los autovalores (dos veces degenerados) de ρ^{sp} .

B.2. Separabilidad fermiónica en el modelo de Lipkin

El GS exacto con paridad definida de S_z (6.8) del modelo de Lipkin es entrelazado, es decir no es un DS, si $|S_z| < \Omega/2$. Sin embargo, en la transición de paridad que emerge al aumentar v_x/ε con χ fijo, $\chi \in (0, 1)$, el GS es doblemente degenerado y el GS exacto puede tener paridad P_z no definida [96]. En particular, en la *primera* transición (Ec. (6.26)) un DS con ruptura de paridad S_z de la forma (6.29) (el GS de MF) se hace *exacto* para cualquier Ω (separabilidad fermiónica).

Este resultado puede verse fácilmente escribiendo el Hamiltoniano de la Ec. (6.6) en término de los operadores de quasi-spin rotados $S'_\pm = \sum_p c'_{p\pm}^\dagger c'_{p\mp}$, $S'_z = \frac{1}{2} \sum_p (c'_{p+}^\dagger c'_{p+} - c'_{p-}^\dagger c'_{p-})$, determinado por los operadores fermiónicos primados (6.31). Se obtiene, descartando los términos constantes $V_x(1 + \chi)N/4$,

$$H = \varepsilon \cos \theta S'_z - V_x (S_x'^2 \cos^2 \theta + S_z'^2 \sin^2 \theta + \chi S_y'^2) + \sin \theta [\varepsilon S'_x + V_x \cos \theta (S'_x S'_z + S'_z S'_x)]. \quad (\text{B.14})$$

La condición estacionaria de MF (6.32) cancela los términos de excitación $\propto S'_+$, presentes en la segunda línea de (B.14), al aplicarse al estado de MF (6.29) (para $\mathbf{n} \cdot \mathbf{S} = S_y$). Los términos de excitaciones de dos fermiones $\propto S_+'^2$ en la primera línea de (B.14) se anulan también sii se cumple la condición

$$\cos \theta = \sqrt{\chi} \quad (\text{B.15})$$

en cuyo caso el estado de MF (6.29)–(6.31) se hace autoestado exacto para ambos signos de θ . Como para $\theta > 0$ sus coeficientes $C_K(\theta)$, de la Ec. (6.36), son todos positivos, tal estado no puede ser ortogonal al GS (6.8) (donde $C_K \geq 0 \forall k$) y debe ser entonces un GS. La Ec. (B.15) lleva, junto con (6.32), a los puntos de factorización (6.26). Esta separabilidad es equivalente a la que se tiene en la representación de spines [95, 96, 138, 139], donde se corresponde con un GS factorizado.

Los *límites laterales* del GS exacto en esta transición tienen, sin embargo, paridad definida y vienen dados por los estados de campo medio proyectados a paridad de S_z (6.41) [96], con θ determinado por (B.15). Estos estados están entrelazados para $\theta \in (0, \pi)$, es decir $\chi < 1$ (para $\chi \rightarrow 1$, $\theta \rightarrow 0$ y $|\Psi^+\rangle \rightarrow |\Psi_0\rangle = |K=0\rangle$, mientras que $|\Psi^-\rangle \rightarrow |K=1\rangle$). Por lo tanto, en los límites laterales del punto de separabilidad, la entropía de un cuerpo exacta se acerca a los valores dados por la Ec. (6.44), es decir esencialmente el resultado de la diagonal de campo medio (6.35) para θ y Ω no tan pequeños, que son *no nulos* e iguales para ambas partes (ambos ocurren con los límites laterales de E^{+-} y \mathcal{N}^{+-} , Ecs. (6.46) y (6.49)). En contraste, los límites laterales exactos (6.48) de la concurrencia fermiónica de cuatro niveles se hacen muy pequeños para θ y Ω no muy pequeños, mientras que ρ_{pq} es esencialmente una mezcla de estados Gaussianos. Como consecuencia, la existencia de separabilidad en la transición de paridad S_z se ve claramente reflejada en la desaparición de la concurrencia fermiónica, pero no en el comportamiento de E (ni de E^{+-} o \mathcal{N}^{+-}), como puede verse en la Fig. 6.2.

Apéndice C: Teoría de recursos

C.1. Apendice: Demostración de la desigualdad (7.34) y Corolario 1

Demostración. Se prueba en primer lugar la Ec. (7.34) para el autovalor más bajo de $\rho_{\mathcal{S}'_m}^{(1)}$, donde \mathcal{S}'_m es el subespacio que contiene el estado medido $|k\rangle$ y los primeros m autovalores de $\rho^{(1)}$. Se escribe el autovalor más bajo de $\rho_{\mathcal{S}'_m}^{(1)}$ como $\alpha|k\rangle + \beta|k'\rangle$, con $|k'\rangle \in \mathcal{S}'_m$ ortogonal a $|k\rangle$, tal que $\lambda_{m+1}(\rho_{\mathcal{S}'_m}^{(1)})$ es el autovalor más chico λ_- de la matriz de 2×2 .

$$\rho_{kk'}^{(1)} = \begin{pmatrix} \langle c_k^\dagger c_k \rangle & \langle c_{k'}^\dagger c_k \rangle \\ \langle c_k^\dagger c_{k'} \rangle & \langle c_{k'}^\dagger c_{k'} \rangle \end{pmatrix}. \quad (\text{C.1})$$

Fijando $\langle c_k^\dagger c_k \rangle = p_k$, sus autovalores son

$$\lambda_{\pm} = \frac{p_k + p_{k'}}{2} \pm \sqrt{\frac{(p_k - p_{k'})^2}{4} + |\langle c_{k'}^\dagger c_k \rangle|^2}. \quad (\text{C.2})$$

Dados $\mathcal{P}_k = c_k^\dagger c_k$, $\mathcal{P}_{\bar{k}} = c_k c_k^\dagger = \mathbb{1} - \mathcal{P}_k$, un estado general $|\Psi\rangle$ puede expandirse como

$$|\Psi\rangle = \sum_{\mu, \mu'} \mathcal{P}_\mu \mathcal{P}_{\mu'} |\Psi\rangle = \sum_{\mu, \mu'} \sqrt{p_{\mu\mu'}} |\Psi_{\mu\mu'}\rangle, \quad (\text{C.3})$$

donde $\mu = k, \bar{k}$, $\mu' = k', \bar{k}'$ (tal que $\sum_{\mu, \mu'} \mathcal{P}_\mu \mathcal{P}_{\mu'} = \mathbb{1}$) y $|\Psi_{\mu\mu'}\rangle = \mathcal{P}_\mu \mathcal{P}_{\mu'} |\Psi\rangle / \sqrt{p_{\mu\mu'}}$, con $p_{\mu\mu'} = \langle \Psi | \mathcal{P}_\mu \mathcal{P}_{\mu'} | \Psi \rangle$, son estados con ocupaciones de un cuerpo definidas $|k\rangle$, $|k'\rangle$. Se tiene entonces $p_k = p_{kk'} + p_{k\bar{k}'}$, $p_{k'} = p_{kk'} + p_{\bar{k}k'}$ y $\langle c_{k'}^\dagger c_k \rangle = r \sqrt{p_{\bar{k}k'} p_{k\bar{k}'}}$, con $|r| \leq 1$. Luego, $|\langle c_{k'}^\dagger c_k \rangle|^2 \leq p_{\bar{k}k'} p_{k\bar{k}'}$, y (C.2) implica $\lambda_- \geq \frac{p_k + p_{k'}}{2} - \frac{p_{\bar{k}k'} + p_{k\bar{k}'}}{2}$, es decir,

$$\lambda_- \geq p_{kk'} \geq p_k \lambda_{m+1}(\rho_{k\mathcal{S}'_m}^{(1)}) + p_{\bar{k}} \lambda_{m+1}(\rho_{\bar{k}\mathcal{S}'_m}^{(1)}), \quad (\text{C.4})$$

ya que $p_k \lambda_{m+1}(\rho_{k\mathcal{S}'_m}^{(1)}) \leq p_{kk'}$ y $\lambda_{m+1}(\rho_{\bar{k}\mathcal{S}'_m}^{(1)}) = 0$ (ya que el estado k está vacío en $\rho_{\bar{k}\mathcal{S}'_m}^{(1)}$). Esto implica la Ec. (7.34) porque $\lambda_{m+1}(\rho_{\mathcal{S}'_m}^{(1)}) = \lambda_-$. \square

Considerando el autovalor más grande λ_+ en (C.2) de un bloque similar de 2×2 , tal que el primer autovalor (el más grande) de $\rho^{(1)}$ es barrido por $|k\rangle$ y $|k'\rangle$, se verifica, usando nuevamente $|\langle c_{k'}^\dagger c_k \rangle|^2 \leq p_{\bar{k}k'} p_{k\bar{k}'}$, que $\lambda_1(\rho^{(1)}) = \lambda_+ \leq p_k + p_{\bar{k}k'} \leq p_k \lambda_1(\rho_k^{(1)}) + p_{\bar{k}} \lambda_1(\rho_{\bar{k}}^{(1)})$, ya que $\lambda_1(\rho_k^{(1)}) = 1$ y $p_{\bar{k}k'} \leq p_{\bar{k}} \lambda_1(\rho_{\bar{k}}^{(1)})$, que es la primera desigualdad ($m = 1$) en la Ec. (16).

Esta demostración para el Teorema 1 es válida también para estados fermiónicos mixtos generales ρ (asumiendo que conmutan con el operador de número fermiónico $\hat{N} = \sum_k c_k^\dagger c_k$, o en general con el operador paridad $e^{i\pi\hat{N}}$), ya que siempre pueden purificarse, es decir considerarse como el estado reducido ρ_S de un estado fermiónico puro

$$|\Psi\rangle = \sum_{\mu,\nu} C_{\mu\nu} A_\mu^\dagger B_\nu^\dagger |0\rangle, \quad (\text{C.5})$$

de paridad definida. Aquí $A_\mu^\dagger, B_\nu^\dagger$ contienen operadores de creación en \mathcal{S} y en un espacio ortogonal de una partícula \mathcal{S}_\perp respectivamente, satisfaciendo $\langle 0|A_{\mu'} A_\mu^\dagger|0\rangle = \delta_{\mu\mu'}$, $\langle 0|B_{\nu'} B_\nu^\dagger|0\rangle = \delta_{\nu\nu'}$, $\langle 0|B_{\nu'} A_\mu^\dagger|0\rangle = 0$. Es posible asumir, por ejemplo, que $\{A_\mu^\dagger B_\nu^\dagger|0\rangle\}$ es un conjunto completo de determinantes de Slater ortogonales. Luego $\rho_S = \text{Tr}_{\mathcal{S}_\perp} |\Psi\rangle\langle\Psi| = \sum_{\mu,\mu'} (CC^\dagger)_{\mu\mu'} |\mu\rangle\langle\mu'|$, con $|\mu\rangle = A_\mu^\dagger|0\rangle$ un DS en \mathcal{S} , satisface $\langle\Psi|O_S|\Psi\rangle = \text{Tr}\rho_S O_S \forall$ los operadores O_S que contienen operadores de creación y destrucción de estados de una partícula $\in \mathcal{S}$.

Dado un estado fermiónico mixto arbitrario ρ_S la Ec. (C.5) es una purificación de ρ_S para cualquier matriz C que satisface $(CC^\dagger)_{\mu\mu'} = \langle\mu|\rho_S|\mu'\rangle$ (requiere $\dim \mathcal{S}_\perp \geq \dim \mathcal{S}$).

Se demuestra a continuación el Corolario 1, es decir la extensión del Teorema 1 a los operadores de medida de ocupación más generales de la Ec. (7.36). En términos de los estados (7.28), los estados post-medida correspondientes $|\Psi'_{k(\bar{k})}\rangle \propto M_{k(\bar{k})} |\Psi\rangle$ son

$$|\Psi'_k\rangle = (\alpha\sqrt{p_k} |\Psi_k\rangle + \beta\sqrt{p_{\bar{k}}} |\Psi_{\bar{k}}\rangle) / \sqrt{p'_k}, \quad (\text{C.6})$$

$$|\Psi'_{\bar{k}}\rangle = (\gamma\sqrt{p_k} |\Psi_k\rangle + \delta\sqrt{p_{\bar{k}}} |\Psi_{\bar{k}}\rangle) / \sqrt{p'_{\bar{k}}}, \quad (\text{C.7})$$

donde $|\alpha|^2 + |\gamma|^2 = 1$, $|\beta|^2 + |\delta|^2 = 1$ y

$$p'_k = p_k |\alpha|^2 + p_{\bar{k}} |\beta|^2, \quad p'_{\bar{k}} = p_k |\gamma|^2 + p_{\bar{k}} |\delta|^2, \quad (\text{C.8})$$

con $p'_k + p'_{\bar{k}} = 1$. Hay que probar

$$\lambda(\rho^{(1)}) \prec p'_k \lambda(\rho_k^{(1)}) + p'_{\bar{k}} \lambda(\rho_{\bar{k}}^{(1)}), \quad (\text{C.9})$$

donde $\rho'_{k(\bar{k})}{}^{(1)}$ son ahora las matrices densidad de un cuerpo determinadas por los estados (C.6)–(C.7). La generalización de la Ec. (7.32),

$$\text{Tr } \rho_{\mathcal{S}}^{(1)} = \text{Tr} [p'_k \rho'_{k\mathcal{S}}{}^{(1)} + p'_{\bar{k}} \rho'_{\bar{k}\mathcal{S}}{}^{(1)}], \quad (\text{C.10})$$

sigue valiendo para cualquier subespacio \mathcal{S} tanto ortogonal como contenedor del estado de un cuerpo $|k\rangle$, como $[M_{k(\bar{k})}, c_{k'}^\dagger c_{k'}] = 0$ tanto para $k' = k$ como para k' ortogonal a k (ver comentario debajo de la Ec. (7.31)). Procediendo de la misma forma y usando notación previa, se ve que $p'_k \lambda_{m+1}(\rho'_{k\mathcal{S}'_m}{}^{(1)})$ es menor o igual al autovalor más pequeño λ_{k-} de la matriz de 2×2

$$\begin{pmatrix} |\alpha|^2 p_k & \alpha \beta^* \langle c_{k'}^\dagger c_k \rangle \\ \alpha^* \beta \langle c_{k'}^\dagger c_{k'} \rangle & |\alpha|^2 p_{kk'} + |\beta|^2 p_{\bar{k}\bar{k}'} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.11})$$

mientras $p'_{\bar{k}} \lambda_{m+1}(\rho'_{\bar{k}\mathcal{S}'_m}{}^{(1)})$ es menor o igual al autovalor más pequeño $\lambda_{\bar{k}-}$ de una matriz similar con $\alpha \rightarrow \gamma$, $\beta \rightarrow \delta$. Es sencillo probar entonces, usando la Ec. (C.2) para λ_- , que $\lambda_{m+1}(\rho_{\mathcal{S}'_m}^{(1)}) = \lambda_- \geq \lambda_{k-} + \lambda_{\bar{k}-}$, ya que

$$\begin{aligned} \lambda_- - \lambda_{k-} - \lambda_{\bar{k}-} &= \sqrt{\frac{(|\alpha|^2 p_{k\bar{k}'} - |\beta|^2 p_{\bar{k}k'})^2}{4} + |\alpha \beta \langle c_{k'}^\dagger c_k \rangle|^2} \\ &\quad + \sqrt{\frac{(|\gamma|^2 p_{k\bar{k}'} - |\delta|^2 p_{\bar{k}k'})^2}{4} + |\gamma \delta \langle c_{k'}^\dagger c_k \rangle|^2} \\ &\quad - \sqrt{\frac{(p_{k\bar{k}'} - p_{\bar{k}k'})^2}{4} + |\langle c_{k'}^\dagger c_k \rangle|^2} \\ &\geq 0, \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

con igualdad para $|r| = 1$ ($|\langle c_{k'}^\dagger c_k \rangle| = \sqrt{p_{\bar{k}k'} p_{k\bar{k}'}}$) ó $|\alpha| = |\beta|$. Luego la desigualdad m – esima en (C.9),

$$\sum_{\nu=1}^m \lambda_\nu(\rho^{(1)}) \leq \sum_{\nu=1}^m p'_k \lambda_\nu(\rho'_{k}{}^{(1)}) + p'_{\bar{k}} \lambda_\nu(\rho'_{\bar{k}}{}^{(1)}), \quad (\text{C.13})$$

vale debido a (C.10) y la desigualdad de Ky Fan. La Ec. (C.9) es también válida en cualquier subespacio \mathcal{S} que contiene (o es ortogonal a) el estado de una partícula $|k\rangle$. \square

C.2. Medidas de ocupación en estados libres

La Ec. (7.18) implica que los operadores de Kraus \mathcal{K}_j que se corresponden con una ONG deben convertir estados libres en estados libres, es decir DSs en DSs.

Para las medidas de ocupación de las Ec. (7.26) (Teorema 1), (7.36) (Corolario 1) y Corolario 2, esta propiedad puede verificarse fácilmente. Sea

$$|\Psi\rangle = \left(\prod_{\nu=1}^N c_{\nu}^{\dagger}\right)|0\rangle, \quad (\text{C.14})$$

un DS general para N fermiones, con $\{c_{\nu}, c_{\nu'}^{\dagger}\} = \delta_{\nu\nu'}$. Un operador fermiónico de creación general $c_k^{\dagger} = \sum_{\nu=1}^N \alpha_{\nu} c_{\nu}^{\dagger}$, con $\alpha_{\nu} = \{c_{\nu}, c_k^{\dagger}\}$ y $\{c_k, c_k^{\dagger}\} = \sum_{\nu} |\alpha_{\nu}|^2 = 1$, puede escribirse como

$$c_k^{\dagger} = \sqrt{p_k} c_{k_{\parallel}}^{\dagger} + \sqrt{p_{\bar{k}}} c_{k_{\perp}}^{\dagger}, \quad (\text{C.15})$$

donde $\sqrt{p_k} c_{k_{\parallel}}^{\dagger} = \sum_{\nu \leq N} \alpha_{\nu} c_{\nu}^{\dagger}$ es la componente en el subespacio ocupado de $|\Psi\rangle$, con $p_k = \sum_{\nu \leq N} |\alpha_{\nu}|^2 = \langle \Psi | c_k^{\dagger} c_k | \Psi \rangle$ la probabilidad de ocupación de un modo k y $c_{k_{\parallel}}^{\dagger} | \Psi \rangle = 0$, mientras que $\sqrt{p_{\bar{k}}} c_{k_{\perp}}^{\dagger} = \sum_{\nu > N} \alpha_{\nu} c_{\nu}^{\dagger}$ es el complemento ortogonal, con $p_{\bar{k}} = \sum_{\nu > N} |\alpha_{\nu}|^2 = 1 - p_k$ y $c_{k_{\perp}} | \Psi \rangle = 0$. Si $p_k > 0$, puede hacerse la elección de forma tal que $c_{k_{\parallel}}^{\dagger} = c_{\nu=N}^{\dagger}$, mediante una transformación unitaria de c_{ν}^{\dagger} para $\nu \leq N$. Por tanto, para los operadores de medida del Corolario 2, se tiene que

$$c_k | \Psi \rangle = \sqrt{p_k} c_{k_{\parallel}} | \Psi \rangle, \quad c_k^{\dagger} | \Psi \rangle = \sqrt{p_{\bar{k}}} c_{k_{\perp}}^{\dagger} | \Psi \rangle, \quad (\text{C.16})$$

son claramente DSs ortogonales. Para los operadores de medida del Teorema 1, la Ec. (C.16) implica

$$c_k^{\dagger} c_k | \Psi \rangle = \sqrt{p_k} c_k^{\dagger} c_{k_{\parallel}} | \Psi \rangle, \quad (\text{C.17})$$

$$c_k c_k^{\dagger} | \Psi \rangle = \sqrt{p_{\bar{k}}} c_k c_{k_{\perp}}^{\dagger} | \Psi \rangle = \sqrt{p_{\bar{k}}} c_{k'}^{\dagger} c_{k_{\parallel}} | \Psi \rangle, \quad (\text{C.18})$$

donde $c_{k'}^{\dagger} = \sqrt{p_{\bar{k}}} c_{k_{\parallel}}^{\dagger} - \sqrt{p_k} c_{k_{\perp}}^{\dagger}$, son también DSs ortogonales ($\{c_k, c_{k'}^{\dagger}\} = 0$). Y en el caso de la medida generalizada basada en operadores (7.36), se ve de (C.17)–(C.18) que

$$M_k | \Psi \rangle = (\alpha \sqrt{p_k} c_k^{\dagger} + \beta \sqrt{p_{\bar{k}}} c_{k'}^{\dagger}) c_{k_{\parallel}} | \Psi \rangle \quad (\text{C.19})$$

$$M_{\bar{k}} | \Psi \rangle = (\gamma \sqrt{p_k} c_k^{\dagger} + \delta \sqrt{p_{\bar{k}}} c_{k'}^{\dagger}) c_{k_{\parallel}} | \Psi \rangle \quad (\text{C.20})$$

son también DSs, no necesariamente ortogonales.

C.3. Comparando el entrelazamiento de un cuerpo de estados con diferente número de partícula

Dados dos estados fermiónicos puros $|\Psi\rangle, |\Phi\rangle$ con el mismo número fermiónico N , tal que sus matrices de un cuerpo asociadas tienen la misma traza $\text{Tr} \rho_{\Psi}^{(1)} =$

$\text{Tr } \rho_{\Phi}^{(1)} = N$, $|\Psi\rangle$ es considerada no menos entrelazada que $|\Phi\rangle$ si se satisface Ec. (7.1) ($\boldsymbol{\lambda}(\rho_{\Psi}^{(1)}) \prec \boldsymbol{\lambda}(\rho_{\Phi}^{(1)})$). Aquí $\boldsymbol{\lambda}(\rho^{(1)})$ denota el espectro de $\rho^{(1)}$ ordenado en forma decreciente. Se puede mostrar que

$$\boldsymbol{\lambda}(\rho_{\Psi}^{(1)}) \prec \boldsymbol{\lambda}(\rho_{\Phi}^{(1)}) \implies \boldsymbol{\lambda}(D_{\Psi}^{(1)}) \prec \boldsymbol{\lambda}(D_{\Phi}^{(1)}), \quad (\text{C.21})$$

para la matriz densidad extendida definida en Ec. (7.39), cuyo espectro es $(\boldsymbol{\lambda}, 1 - \boldsymbol{\lambda})$. La Ec. (C.21) se deduce de las propiedades (ver por ejemplo [64, 103])

- i) $\boldsymbol{\lambda} \prec \boldsymbol{\lambda}' \implies 1 - \boldsymbol{\lambda} \prec 1 - \boldsymbol{\lambda}'$,
- ii) $\boldsymbol{\lambda} \prec \boldsymbol{\lambda}'$ y $\boldsymbol{\mu} \prec \boldsymbol{\mu}' \implies (\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \prec (\boldsymbol{\lambda}', \boldsymbol{\mu}')$,

donde $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda}', \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}' \in \mathbb{R}^n$ están ordenados de forma decreciente y $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \in \mathbb{R}^{2n}$ denota el vector ordenado resultante de la unión de $\boldsymbol{\lambda}$ y $\boldsymbol{\mu}$. Estas propiedades implican también que la relación de mayorización (7.18) conduce a

$$\boldsymbol{\lambda}(D^{(1)}) \prec \sum_j p_j \boldsymbol{\lambda}(D_j^{(1)}), \quad (\text{C.22})$$

para las matrices densidad extendidas correspondientes. La ventaja de las Ecs. (C.21)–(C.22) es que dentro de un espacio de SP fijo, los vectores extendidos pueden siempre compararse mediante mayorización, sin importar el número de partículas N , ya que $\text{Tr } D^{(1)} = n = \dim \mathcal{H}$ está fijado por la dimensión del espacio de una partícula. Para dos estados $|\Psi\rangle, |\Phi\rangle$ con número de fermiones definidos pero no necesariamente coincidentes, se dice que $|\Psi\rangle$ es no menos entrelazado en un cuerpo que $|\Phi\rangle$ si se cumple la Ec. (C.21). En particular, está claro que, a menos de una permutación, el mismo vector de autovalores $\boldsymbol{\lambda}(D^{(1)})$ se asigna a todos los estados DS en el espacio de Fock del sistema, sin importar N , de forma tal que son todos estados menos entrelazados.

La extensión de la Definición 1 a operaciones ONG generales, es decir sin conservar necesariamente el número de partículas, es directa: una operación cuántica es ONG si admite un conjunto de operadores de Kraus $\{\mathcal{K}_j\}$ que satisfacen la Ec. (C.22) $\forall \rho$, con $D^{(1)}$ y $D_j^{(1)}$ las matrices de un cuerpo extendidas determinadas por ρ y ρ_j respectivamente. Esta extensión permite considerar operaciones tales como las del Corolario 2, con operadores de Kraus c_k, c_k^\dagger . La matriz de un cuerpo extendida $D^{(1)}$ de los estados postmedidos $\frac{1}{\sqrt{p_k}} c_k |\Psi\rangle$ y $\frac{1}{\sqrt{p_k}} c_k^\dagger |\Psi\rangle$ tienen claramente el mismo espectro del obtenido de $\frac{1}{\sqrt{p_k}} c_k^\dagger c_k |\Psi\rangle$ y $\frac{1}{\sqrt{p_k}} c_k c_k^\dagger |\Psi\rangle$, a menos de una permutación, con las mismas probabilidades, tal que el Teorema 1 implica directamente el Corolario 2. De hecho, la medida de ocupación con conservación de número es solo una composición de las anteriores consigo mismas, como $(c_k, c_k^\dagger) \circ (c_k, c_k^\dagger) = (c_k c_k^\dagger, c_k^\dagger c_k)$.

Se puede por tanto incluir la teoría de recursos con preservación de número fermiónico dentro de una teoría más general en la cual el conjunto de estados libres es el hull convexo de estados DS, para cualquier número de partículas posible, y donde las operaciones libres son las unitarias de un cuerpo y las operaciones basadas en medidas de $\{c_k, c_k^\dagger\}$, que mapean estados DSs en DSs. Cualquier DS y por tanto cualquier estado libre puede ser preparado a partir de un estado arbitrario ρ por medio de operaciones libres, es decir, aplicando unitarias de un cuerpo y medidas sucesivas $\{c_k, c_k^\dagger\}$ con post-selección. Como el estado inicial es arbitrario, cualquier estado libre en esta teoría puede ser convertido en cualquier otro estado libre por medio de operaciones libres. Al permitir que varíe el número de partículas, se implica que adjuntar estados libres es también una operación libre, ya que no altera el espectro de la matriz $D^{(1)}$ asociada en el espacio completo de una partícula.

Se han considerado aquí estados libres $|\Psi\rangle$ con número de fermiones definido y operaciones \mathcal{K}_j que producen estados $\mathcal{K}_j|\Psi\rangle$ con número fermiónico definido al aplicarse sobre tales estados. La extensión a estados libres de cuasipartículas (es decir vacíos de cuasipartícula con paridad definida) y operaciones de cuasipartículas es directa y no será considerada aquí. Requiere reemplazar $D^{(1)}$ por la matriz densidad de cuasipartículas [31] de dimensión $2n \times 2n$, que contiene adicionalmente las contracciones de pairing $\langle c_k^\dagger c_{k'}^\dagger \rangle$, $\langle c_{k'} c_k \rangle$. Sus autovalores no son afectados por transformaciones de Bogolubov y su mezcla indica la desviación de $|\Psi\rangle$ de un vacío de cuasipartículas fermiónico. La teoría extendida se reduce a la aquí presentada cuando se consideran solo estados puros con N bien definido.

Apéndice D: Entrelazamiento de M cuerpos

D.1. Autovalores de $\rho^{(M)}$ en los estados $|\Psi_{2k}\rangle$

Se van a derivar, en primer lugar, los autovalores de las primeras tres MDs de M -cuerpos en los estados (8.35). Como los fermiones se crean en pares $c_{2i-1}^\dagger c_{2i}^\dagger$ con igual probabilidad, los elementos de la MD de un cuerpo de estos estados son

$$\langle \Psi_{2k} | c_i^\dagger c_j | \Psi_{2k} \rangle = \delta_{ij} N/D, \quad (\text{D.1})$$

implicando $\rho^{(1)} = \frac{N}{D} \mathbb{1}$. Luego, es la MD de un cuerpo máximamente mezclada compatible con el número total de fermiones N , haciéndose diagonal en *cualquier* base de SP con único autovalor D veces degenerado N/D .

Por otro lado, los elementos de la MD de dos cuerpos se bloquean en dos submatrices. La primera, comprende los pares de creación de pares contiguos $c_{2i-1}^\dagger c_{2i}^\dagger$ que forman el operador A^\dagger de la Ec. (8.33), y tiene elementos

$$\langle \Psi_{2k} | c_{2i-1}^\dagger c_{2i}^\dagger c_{2j} c_{2j-1} | \Psi_{2k} \rangle = \alpha \delta_{ij} + \beta (1 - \delta_{ij}), \quad (\text{D.2})$$

donde, usando $k = N/2$ y asumiendo D par,

$$\alpha = \frac{\binom{D/2-1}{k-1}}{\binom{D/2}{k}} = \frac{2k}{D}, \quad \beta = \frac{\binom{D/2-2}{k-1}}{\binom{D/2}{k}} = \frac{2k(D-2k)}{D(D-2)}.$$

Luego, como este bloque de $\frac{D}{2} \times \frac{D}{2}$ es simplemente $(\alpha - \beta) \mathbb{1} + M$, con M una matriz de rango uno con todos los elementos iguales a β , tiene solo dos autovalores distintos: un autovalor no degenerado

$$\lambda_{\max}^{(2)} = \alpha + \left(\frac{D}{2} - 1\right)\beta = k(1 - 2(k-1)/D), \quad (\text{D.3})$$

que es precisamente el asociado con los operadores de creación de pares colectivos uniformemente distribuidos A^\dagger :

$$\langle \Psi_{2k} | A^\dagger A | \Psi_{2k} \rangle = \lambda_{\max}^{(2)}, \quad (\text{D.4})$$

y los autovalores más chicos $(D/2 - 1)$ -veces degenerados

$$\lambda_{\text{rest}}^{(2)} = \alpha - \beta = \frac{4k(k-1)}{D(D-2)}. \quad (\text{D.5})$$

El otro bloque contiene los restantes $\binom{D}{2} - \frac{D}{2}$ operadores de creación de pares $c_i^\dagger c_j^\dagger$ que involucran dos pares distintos y es directamente diagonal, con elementos $\frac{\binom{D/2-2}{k-2}}{\binom{D/2}{k}} = \lambda_{\text{rest}}^{(2)}$. Luego, el resultado final es un autovalor grande no degenerado $\lambda_{\max}^{(2)} \geq 1$, y $\binom{D}{2} - 1$ autovalores más pequeños e idénticos $\lambda_{\text{rest}}^{(2)} < 1$, que satisfacen

$$\lambda_{\max}^{(2)} + \left(\binom{D}{2} - 1\right) \lambda_{\text{rest}}^{(2)} = \binom{N}{2}. \quad (\text{D.6})$$

El mismo procedimiento puede aplicarse para determinar los autovalores de la MD de tres cuerpos $\rho^{(3)}$. Para la creación de tres fermiones con dos de ellos en un par contiguo $(2i-1, 2i)$, se obtiene

$$\langle \Psi_{2k} | c_{2i-1}^\dagger c_{2i}^\dagger c_j^\dagger c_k c_{2l} c_{2l-1} | \Psi_{2k} \rangle = \delta_{jk} [\gamma \delta_{il} + \eta(1 - \delta_{il})] \quad (\text{D.7})$$

donde $k \neq 2l$, $k \neq 2l-1$, $j \neq 2i$, $j \neq 2i-1$, y

$$\gamma = \frac{\binom{D/2-2}{k-2}}{\binom{D/2}{k}}, \quad \eta = \frac{\binom{D/2-3}{k-2}}{\binom{D/2}{k}}.$$

Se obtienen entonces D bloques idénticos $\left(\frac{D}{2} - 1\right) \times \left(\frac{D}{2} - 1\right)$, cada uno de los cuales tiene un autovalor grande no degenerado

$$\lambda_{\max}^{(3)} = \gamma + \left(\frac{D}{2} - 2\right)\eta = \frac{2k(k-1)(1-2(k-1)/D)}{D-2} \quad (\text{D.8})$$

$$= \langle \Psi_{2k} | A_j^{(3)\dagger} A_j^{(3)} | \Psi_{2k} \rangle, \quad (\text{D.9})$$

donde $A_j^{(3)\dagger} = \frac{1}{\sqrt{D/2-1}} \sum_i c_{2i-1}^\dagger c_{2i}^\dagger c_j^\dagger$, y $D/2 - 2$ autovalores idénticos más pequeños

$$\lambda_{\text{rest}}^{(3)} = \gamma - \eta = \frac{8k(k-1)(k-2)}{D(D-2)(D-4)}, \quad (\text{D.10})$$

asociados a operadores ortogonales $A_\nu^{(3)\dagger}$. Por otro lado, los restantes $\binom{D}{3} - D\left(\frac{D}{2} - 1\right)$ tripletes $c_i^\dagger c_j^\dagger c_k^\dagger$ que pertenecen a pares distintos llevan a un bloque diagonal en $\rho^{(3)}$ con elementos diagonales idénticos $\frac{\binom{D/2-3}{k-3}}{\binom{D/2}{k}} = \lambda_{\text{rest}}^{(3)}$. Se tienen, por tanto, D autovalores iguales a $\lambda_{\max}^{(3)}$ más $\binom{D}{3} - D$ autovalores iguales a $\lambda_{\text{rest}}^{(3)}$, que satisfacen

$$D\lambda_{\max}^{(3)} + \left(\binom{D}{3} - D\right) \lambda_{\text{rest}}^{(3)} = \binom{N}{3}. \quad (\text{D.11})$$

Debe notarse que, mientras $\lambda_{\text{rest}}^{(3)} \leq 1$, $\lambda_{\text{max}}^{(3)} \geq 1$ para $1 + \sqrt{D/2} \leq k \leq D/2$, alcanzando su máximo para $k \approx D/3$ para $D \geq 6$, donde $\lambda_{\text{max}}^{(3)} \approx 2D/27$.

Para obtener el autovalor máximo $\lambda_{\text{max}}^{(2m)}$ de las MD de $M = 2m$ -cuerpos algebraicamente, se puede directamente notar que el mismo emerge del bloque $\binom{D/2}{m} \times \binom{D/2}{m}$ que contiene productos de m pares distintos $c_{2i-1}^\dagger c_{2i}^\dagger$ y $c_{2j} c_{2j-1}$. Todos los elementos $\langle \Psi_{2k} | c_{2i_1-1}^\dagger c_{2i_1}^\dagger \cdots c_{2j_1} c_{2j_1-1} | \Psi_{2k} \rangle$ serán positivos con todas las filas de este bloque sumando lo mismo a causa de la simetría. El máximo autovalor será entonces igual a esta suma (como se verifica en (D.3) para $m = 1$) y se asocia con el autovector uniforme $\propto (1, 1, \dots, 1)$, es decir al operador colectivo $A^{(2m)\dagger} \propto (A^\dagger)^m$, de la Ec. (8.35), implicando la Ec. (8.41).

D.2. Comportamiento de la $\rho^{(2)}$ bajo medidas de ocupación de un modo

Se va a probar ahora que en el estado (8.35), las medidas de ocupación de un modo de SP a través de los operadores $\mathcal{P}_k = c_k^\dagger c_k$ y $\mathcal{P}_{\bar{k}} = c_k c_k^\dagger$, romperán la Ec. (8.68) para $\rho^{(2)}$. Se tendrá, de hecho, que el autovalor más grande (D.3) de $\rho^{(2)}$ es más grande que el de $\rho_k^{(2)}$ y $\rho_{\bar{k}}^{(2)}$, implicando

$$\lambda_1^{(2)} > p_k \lambda_{1k}^{(2)} + (1 - p_k) \lambda_{1\bar{k}}^{(2)}, \quad (\text{D.12})$$

que rompe la primera desigualdad de mayorización en (8.68).

Demostración: Si al medir la ocupación de un nivel de SP k se detecta ocupación, lo que ocurre con probabilidad $p_k = N/D$, el par contiguo asociado $(k, k+1)$ (k impar) ó $(k-1, k)$ (k par) se “congela” y el máximo autovalor $\lambda_{k \text{ max}}^{(2)}$ de la MD correspondiente $\rho_k^{(2)}$ surge de los restantes $N - 2$ fermiones ocupando los otros $D - 2$ estados de SP. Como consecuencia, usando la Ec. (D.3) para $D \rightarrow D - 2$ y $k = N/2 \rightarrow N/2 - 1$,

$$\lambda_{k \text{ max}}^{(2)} = \frac{N-2}{2(D-2)}(D+2-N) < \frac{N}{2D}(D+2-N) = \lambda_{\text{max}}^{(2)}$$

donde la desigualdad vale para $N < D$. Similarmente, si el estado k no está ocupado, un razonamiento similar lleva a

$$\lambda_{k \text{ max}}^{(2)} = \frac{N}{2(D-2)}(D-N) < \frac{N}{2D}(D+2-N) = \lambda_{\text{max}}^{(2)}$$

donde la desigualdad vale para $N > 2$. Estos dos resultados implican la Ec. (D.12) y por ende la violación de las relaciones de mayorización (8.68) para $M = 2$. Resultados análogos pueden obtenerse para $M = 3$ en los mismos estados (8.35). Por

completitud, puede también verificarse que para la medida (8.55) en el mismo estado (8.35), vale la primera desigualdad

$$\frac{\lambda_{\max}^{(2)}}{\binom{N}{2}} \leq \sum_k p_k \frac{\lambda_{k \max}^{(2)}}{\binom{N-1}{2}}, \quad (\text{D.13})$$

en (8.56) para los autovalores más grande de las MDs de dos cuerpos normalizadas inicial y post-medida: Usando nuevamente la Ec. (D.3) para $\lambda_{\max}^{(2)}$ (con $k = N/2$) y $\lambda_{k \max}^{(2)}$ (con $k = N/2 - 1$ y $D \rightarrow D - 2$), con $p_k = \frac{\langle c_k^\dagger c_k \rangle}{M} = \frac{1}{D}$, se obtiene, en concordancia con (D.13),

$$\frac{1}{D} \sum_k \frac{(N-2)(D+2-N)}{2(D-2)\binom{N-1}{2}} = \frac{D+2-N}{(D-2)(N-1)} \geq \frac{(D+2-N)}{D(N-1)} = \frac{\lambda_{\max}^{(2)}}{\binom{N}{2}}.$$

Bibliografía

- [1] M Di Tullio, N Gigena y R Rossignoli. “Fermionic entanglement in superconducting systems”. *Phys. Rev. A* 97, 062109 (2018).
- [2] M Di Tullio y col. “Fermionic entanglement in the Lipkin model”. *Phys. Rev. A* 100, 062104 (2019).
- [3] N. Gigena, M. Di Tullio y R. Rossignoli. “One-body entanglement as a quantum resource in fermionic systems”. *Phys. Rev. A* 102, 042410 (2020).
- [4] N. Gigena, M. Di Tullio y R. Rossignoli. “Many-body entanglement in fermion systems”. *Phys. Rev. A* 103, 052424 (2021).
- [5] E. Schrödinger. “Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik”. *Naturwiss.* 23, 807 (1935).
- [6] Michael A. Nielsen e Isaac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Camb. Univ. Press, 2000.
- [7] V.Vedral. *Introduction to Quantum Information Science*. Oxford Univ. Press, 2006.
- [8] S. Haroche y J.M. Raimond. *Exploring the Quantum*. Oxford Univ. Press, 2013.
- [9] Charles H Bennett y col. “Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels”. *Phys. Rev. Lett.* 70, 1895 (1993).
- [10] Richard Jozsa y Noah Linden. “On the role of entanglement in quantum-computational speed-up”. *Proc. R. Soc. Lond. A*: 459, 2011-2032 (2003).
- [11] L. Amico y col. *Rev. Mod. Phys.* 80, 517 (2008).
- [12] J. Eisert y M.B. Plenio. “Introduction to the basics of entanglement theory in continuous-variable systems”. *Int. J. Quant. Inf.* 1 (2003).

-
- [13] Tobias J. Osborne y Michael A. Nielsen. “Entanglement in a simple quantum phase transition”. *Phys. Rev. A* 66, 032110 (2002).
- [14] G. Vidal y col. “Entanglement in Quantum Critical Phenomena”. *Phys. Rev. Lett.* 90 227902 (2003).
- [15] Sandu Popescu, Anthony J. Short y Andreas Winter. “Entanglement and the foundations of statistical mechanics”. *Nat. Phys.* 2, 754 (2006).
- [16] S.N. Solodukhin. “Entanglement entropy of black holes”. *Living Rev. Relativity* 14 (2011).
- [17] V. Giovannetti, S. Lloyd y L. Maccone. “Quantum time”. *Phys. Rev. D* 92, 045033 (2015).
- [18] Paolo Zanardi. “Quantum entanglement in fermionic lattices”. *Phys. Rev. A* 65, 042101 (2002).
- [19] Yu Shi. “Quantum entanglement of identical particles”. *Phys. Rev. A* 67, 024301 (2003).
- [20] Nicolai Friis, Antony R Lee y David Edward Bruschi. “Fermionic-mode entanglement in quantum information”. *Phys. Rev. A* 87, 022338 (2013).
- [21] Fabio Benatti, Roberto Floreanini y Ugo Marzolino. “Entanglement in fermion systems and quantum metrology”. *Phys. Rev. A* 89, 032326 (2014).
- [22] J. Schliemann y col. “Quantum correlations in two-fermion systems”. *Phys. Rev. A* 64, 022303 (2001).
- [23] John Schliemann, Daniel Loss y A. H MacDonald. “Double-occupancy errors, adiabaticity, and entanglement of spin qubits in quantum dots”. *Phys. Rev. B* 63, 085311 (2001).
- [24] K Eckert y col. “Quantum correlations in systems of indistinguishable particles”. *Ann. Phys.* 299, 88 (2002).
- [25] H. M. Wiseman y J. A. Vaccaro. “Entanglement of indistinguishable particles shared between two parties”. *Phys. Rev. Lett.* 91, 097902 (2003).
- [26] G. Ghirardi y L. Marinatto. “General criterion for the entanglement of two indistinguishable particles”. *Phys. Rev. A* 70, 012109 (2004).
- [27] C.V. Kraus y col. “Pairing in fermionic systems: A quantum-information perspective”. *Phys. Rev. A* 79, 012306 (2009).

- [28] Fernando Iemini y Reinaldo O Vianna. “Computable measures for the entanglement of indistinguishable particles”. *Phys. Rev. A* 87, 022327 (2013).
F. Iemini, T. Debarba and R.O. Vianna, *Phys. Rev. A* 89, 032324 (2014).
- [29] Michał Oszmaniec, Jan Gutt y Marek Kuś. “Classical simulation of fermionic linear optics augmented with noisy ancillas”. *Phys. Rev. A* 90, 020302 (2014).
- [30] G. Sarosi y P. Levay. “Coffman-Kundu-Wootters inequality for fermions”. *Phys. Rev. A* 90, 052303 (2014).
- [31] N Gigena y Raúl Rossignoli. “Entanglement in fermion systems”. *Phys. Rev. A* 92, 042326 (2015).
- [32] Lexin Ding y Christian Schilling. “Correlation Paradox of the Dissociation Limit: A Quantum Information Perspective”. *Journal of Chemical Theory and Computation* 16, 4159 (2020).
- [33] Benjamin Morris y col. “Entanglement between Identical Particles Is a Useful and Consistent Resource”. *Phys. Rev. X* 10, 041012 (2020).
- [34] H. Barnum y col. “A subsystem-independent generalization of entanglement”. *Phys. Rev. Lett.* 92, 107902 (2004).
- [35] Paolo Zanardi, Daniel A Lidar y Seth Lloyd. “Quantum tensor product structures are observable induced”. *Phys. Rev. Lett.* 92, 060402 (2004).
- [36] Toshihiko Sasaki, Tsubasa Ichikawa e Izumi Tsutsui. “Entanglement of indistinguishable particles”. *Phys. Rev. A* 83, 012113 (2011).
- [37] A.P. Balachandran y col. “Entanglement and particle identity: a unifying approach”. *Phys. Rev. Lett.* 110, 080503 (2013).
- [38] N Gigena y R Rossignoli. “One-body information loss in fermion systems”. *Phys. Rev. A* 94, 042315 (2016).
- [39] Eric Chitambar y Gilad Gour. “Quantum resource theories”. *Rev. Mod. Phys.* 91, 025001 (2019).
- [40] Dario Egloff y col. “Of Local Operations and Physical Wires”. *Phys. Rev. X* 8, 031005 (2018).
- [41] Jonathan Barrett. “Information processing in generalized probabilistic theories”. *Phys. Rev. A* 75, 032304 (2007).
- [42] John Goold y col. “The role of quantum information in thermodynamics—a topical review”. *J. Phys. A: Math. Theor.* 49, 143001 (2016).

-
- [43] Gilad Gour y col. “The resource theory of informational nonequilibrium in thermodynamics”. *Phys. Rep.* 583, 1–58 (2015).
- [44] T. Baumgratz, M. Cramer y M. B. Plenio. “Quantifying Coherence”. *Phys. Rev. Lett.* 113, 140401 (2014).
- [45] Alexander Streltsov, Gerardo Adesso y Martin B Plenio. “Colloquium: Quantum coherence as a resource”. *Rev. Mod. Phys.* 89, 041003 (2017).
- [46] Nicolas Brunner y col. “Bell nonlocality”. *Rev. Mod. Phys.* 86, 419 (2014).
- [47] Christian Weedbrook y col. “Gaussian quantum information”. *Rev. Mod. Phys.* 84, 621 (2012).
- [48] J. Von Delft y D.C. Ralph. “Spectroscopy of discrete energy levels in ultrasmall metallic grains”. *Phys. Rep.* 345, 61 (2001).
- [49] N. Canosa y R. Rossignoli. “Paramagnetic breakdown of superconductivity in nanoscale particles at finite temperature”. *Phys. Rev. B* 62, 5886 (2000).
- [50] R. Rossignoli y N. Canosa. “Thermal dependence of pairing correlations in small superconducting particles in a finite magnetic field”. *Phys. Rev. B* 63, 134523 (2001).
- [51] R. Rossignoli, N. Canosa y P. Ring. “Effects of gap fluctuations on the pair-transfer correlation function in nanometer-scale superconducting grains”. *Phys. Rev. B* 67, 144517 (2003).
- [52] H.J. Lipkin, N. Meshkov y A.J. Glick. “Validity of many-body approximation methods for a solvable model:(I). Exact solutions and perturbation theory”. *Nucl. Phys.* 62, 188–198 (1965).
- [53] N. Meshkov, A.J. Glick y H.J. Lipkin. “Validity of many-body approximation methods for a solvable model:(II). Linearization procedures”. *Nucl. Phys.* 62, 199–210 (1965).
- [54] A.J. Glick, H.J. Lipkin y N. Meshkov. “Validity of many-body approximation methods for a solvable model:(III). Diagram summations”. *Nucl. Phys.* 62, 211-224 (1965).
- [55] Barbara M Terhal y David P DiVincenzo. “Classical simulation of noninteracting-fermion quantum circuits”. *Phys. Rev. A* 65, 032325 (2002).
- [56] Sergey Bravyi. “Classical capacity of fermionic product channels”. *Quantum Inf. Comput.* 5, 216 (2005).

- [57] Allan DC Tosta, Daniel J Brod y Ernesto F Galvão. “Quantum computation from fermionic anyons on a one-dimensional lattice”. *Phys. Rev. A* 99, 062335 (2019).
- [58] Asher Peres. *Quantum Theory: Concepts and Methods*. Kluwer, 1993.
- [59] Alfred Wehrl. “General properties of entropy”. *Rev. Mod. Phys.* 50, 221 (1978).
- [60] M. A. Nielsen y J. Kempe. “Separable States Are More Disordered Globally than Locally”. *Phys. Rev. Lett.* 86, 5184 (2001).
- [61] R. Rossignoli y N. Canosa. “Generalized entropic criterion for separability”. *Phys. Rev. A* 66, 042306 (2002). R. Rossignoli, N. Canosa, Violation of majorization relations in entangled states and its detection by means of generalized entropic forms, *Phys. Rev. A* 67, 042302 (2003).
- [62] A.M. Kowalski, R. Rossignoli y E.M.F. Curado. *Concepts and Recent Advances in Generalized Information Measures and Statistics*. Bentham, 2013.
- [63] Benjamin Schumacher. “Quantum coding”. *Phys. Rev. A* 2738 51 (1995). C.H. Bennett, H. Bernstein, S. Popescu and B. Schumacher, “Concentrating partial entanglement by local operations”, *Phys. Rev. A* 53, 2046 (1996).
- [64] R. Bhatia. *Matrix Analysis*. Springer, New York, 1997.
- [65] D. Girolami, T. Tufarelli y G. Adesso. “Characterizing Nonclassical Correlations via Local Quantum Uncertainty”. *Phys. Rev. Lett.* 110, 240402 (2013).
- [66] C.H. Bennett y col. “Mixed-state entanglement and quantum error correction”. *Phys. Rev. A* 54, 3824 (1996).
- [67] Asher Peres. “Separability Criterion for Density Matrices”. *Phys. Rev. Lett.* 77, 1413 (1996).
- [68] K. Zyczkowski y col. “Volume of the set of separable states”. *Phys. Rev. A* 58, 883 (1998). K. Zyczkowski, “Volume of the set of separable states. II”, *Phys. Rev. A* 60, 3496 (1999).
- [69] G. Vidal y R. F. Werner. “Computable measure of entanglement”. *Phys. Rev. A* 65, 032314 (2002).
- [70] S. Hill y W.K. Wootters. “Entanglement of a Pair of Quantum Bits”. *Phys. Rev. Lett.* 78, 5022 (1997). W. Wootters, “Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits”, *Phys. Rev. Lett.* 80, 2245 (1998).

-
- [71] W.K. Wootters. “Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits”. *Phys. Rev. Lett.* 80, 2245 (1998).
- [72] Harold Ollivier y Wojciech H. Zurek. “Quantum Discord: A Measure of the Quantumness of Correlations”. *Phys. Rev. Lett.* 88, 017901 (2001).
- [73] Kavan Modi y col. “The classical-quantum boundary for correlations: Discord and related measures”. *Rev. Mod. Phys.* 84, 1655 (2012).
- [74] N. Gigena y R. Rossignoli. “Generalized conditional entropy optimization for qudit-qubit states”. *Phys. Rev. A* 90, 042318 (2014).
- [75] P. Ring y P. Schuk. *The Nuclear Many-Body Problem*. 1980.
- [76] Samuli Hemming y Esko Keski-Vakkuri. “Hawking radiation from AdS black holes”. *Phys. Rev. D* 64, 044006 (2001).
- [77] D. J. Thouless. “Stability conditions and nuclear rotations in the Hartree-Fock theory”. *Nucl. Phys.* 21, 225 (1960).
- [78] J. Bardeen, L. N. Cooper y J. R. Schrieffer. “Theory of Superconductivity”. *Phys. Rev.* 108, 1175 (1957).
- [79] David Dasenbrook y col. “Single-electron entanglement and nonlocality”. *New J. Phys.* 18, 043036 (2016).
- [80] V. Vedral. “The role of relative entropy in quantum information theory”. *Rev. Mod. Phys.* 74, 197 (2002).
- [81] R. Rossignoli, N. Canosa y P. Ring. “Thermal and Quantal Fluctuations for Fixed Particle Number in Finite Superfluid Systems”. *Phys. Rev. Lett.* 80, 1853 (1998).
- [82] R. Rossignoli, A. Ansari y P. Ring. “Projected statistics and level densities”. *Phys. Rev. Lett.* 70, 1061 (1993).
- [83] N Gigena y R Rossignoli. “Bipartite entanglement in fermion systems”. *Phys. Rev. A* 95, 062320 (2017). *Phys. Rev. A* 95, 042315 (2016).
- [84] Xavier M Puspup, Kristian Hauser Villegas y Francis NC Paraan. “Entanglement spectrum and number fluctuations in the spin-partitioned BCS ground state”. *Phys. Rev. B* 90, 155123 (2014).
- [85] Clare Dunning, Jon Links y Huan-Qiang Zhou. “Ground-State Entanglement of the BCS Model”. *Phys. Rev. Lett.* 94, 227002 (2005).

- [86] Sangchul Oh y Jaewan Kim. “Entanglement of electron spins in superconductors”. *Phys. Rev. B* 71, 144523 (2005).
- [87] Chun Kit Chung y C. K. Law. “Negativity and momentum entanglement in Bardeen-Cooper-Schrieffer states at finite temperature”. *Phys. Rev. A* 78, 034302 (2008).
- [88] L Henderson y V Vedral. “Classical, quantum and total correlations”. *J. Phys. A: Mathematical and General* 34, 6899 (2001).
- [89] H. Francis Song y col. “Bipartite fluctuations as a probe of many-body entanglement”. *Phys. Rev. B* 85, 035409 (2012).
- [90] P. Ring y P. Schuck. *The Nuclear Many-Body Problem*. Springer, 1980.
- [91] Nicolai Friis. “Reasonable fermionic quantum information theories require relativity”. *New J. Phys.* 18, 033014 (2016).
- [92] Julien Vidal, Guillaume Palacios y Rémy Mosseri. “Entanglement in a second-order quantum phase transition”. *Phys. Rev. A* 69, 022107 (2004). S. Dusuel, J. Vidal, *Phys. Rev. Lett.* 93, 237204 (2004).
- [93] S. Dusuel y J. Vidal. “Continuous unitary transformations and finite-size scaling exponents in the Lipkin-Meshkov-Glick model”. *Phys. Rev. B* 71, 224420 (2005).
- [94] J. M. Matera, R. Rossignoli y N. Canosa. “Thermal entanglement in fully connected spin systems and its random-phase-approximation description”. *Phys. Rev. A* 78, 012316 (2008). N. Canosa, J.M. Matera, R. Rossignoli, *Phys. Rev. A* 76, 022310 (2007).
- [95] Tommaso Roscilde y col. “Studying Quantum Spin Systems through Entanglement Estimators”. *Phys. Rev. Lett.* 93, 167203 (2004). *Phys. Rev. Lett.* 94, 147208 (2004).
- [96] R. Rossignoli, N. Canosa y J. M. Matera. “Entanglement of finite cyclic chains at factorizing fields”. *Phys. Rev. A* 77, 052322 (2008). *Phys. Rev. A* 80, 062325 (2009).
- [97] Hassan Shapourian y Shinsei Ryu. “Entanglement negativity of fermions: Monotonicity, separability criterion, and classification of few-mode states”. *Phys. Rev. A* 99, 022310 (2019).

-
- [98] Thomas Barthel, Sébastien Dusuel y Julien Vidal. “Entanglement Entropy beyond the Free Case”. *Phys. Rev. Lett.* 97, 220402 (2006). “Entanglement entropy in collective models”, J. Vidal, S. Dusuel, T. Barthel, *J. Stat. Mech.: Theory Exp.*, P01015 (2007).
- [99] J. M. Matera, R. Rossignoli y N. Canosa. “Evaluation of ground-state entanglement in spin systems with the random phase approximation”. *Phys. Rev. A* 82, 052332 (2010).
- [100] Martin B. Plenio y Shashank Virmani. “An Introduction to Entanglement Measures”. *Quant. Inf. Comp.* 7, 1-51 (2007).
- [101] M. A. Nielsen. “Characterizing mixing and measurement in quantum mechanics”. *Phys. Rev. A* 63, 022114 (2001).
- [102] M. A. Nielsen y G. Vidal. “Majorization and the interconversion of bipartite states”. *Quantum Information and Computation* 1, 76 (2001).
- [103] A. W. Marshall, I. Olkin y B. C. Arnold. *Inequalities: Theory of Majorization and its Applications*. Springer, New York, 2011.
- [104] M. A. Nielsen. “Conditions for a Class of Entanglement Transformations”. *Phys. Rev. Lett.* 83, 436 (1999).
- [105] N. Canosa y R. Rossignoli. “Generalized nonadditive entropies and quantum entanglement”. *Phys. Rev. Lett.* 88, 1704011 (2002).
- [106] R.O. Esquivel y col. “Physical interpretation of information entropy: numerical evidence of the Collins conjecture”. *Phys. Rev. A* 54, 259 (1996).
- [107] P. Gersdorf y col. “Correlation entropy of the H₂ molecule”. *Int. J. Q. Chemistry* 61, 935 (1997).
- [108] Paul Ziesche y col. “Two-site Hubbard model, the Bardeen-Cooper-Schrieffer model, and the concept of correlation entropy”. *Phys. Rev. B* 55, 10270 (1997).
- [109] Paul Ziesche y col. “The He isoelectronic series and the Hooke’s law model: Correlation measures and modifications of Collins’ conjecture”. *J. Chem. Phys.* 110, 6135 (1999).
- [110] Soumya Bera y col. “Many-body localization characterized from a one-particle perspective”. *Phys. Rev. Lett.* 115, 046603 (2015).
- [111] Luis A Peña Ardila, Markus Heyl y André Eckardt. “Measuring the single-particle density matrix for fermions and hard-core bosons in an optical lattice”. *Phys. Rev. Lett.* 121, 260401 (2018).

- [112] David P DiVincenzo y Barbara M Terhal. “Fermionic linear optics revisited”. *Found. Phys.* 35, 1967 (2005).
- [113] C.W.J Beenakker y col. “Charge detection enables free-electron quantum computation”. *Phys. Rev. Lett.* 93, 020501 (2004).
- [114] Nicolai Friis. “Reasonable fermionic quantum information theories require relativity”. *New J. Phys.* 18, 033014 (2016).
- [115] Michael Walter y col. “Entanglement polytopes: multiparticle entanglement from single-particle information”. *Science* 340, 1205 (2013).
- [116] David A Meyer y Nolan R Wallach. “Global entanglement in multiparticle systems”. *J. Math. Phys.* 43, 4273 (2002).
- [117] S Boixo y A Monras. “Operational interpretation for global multipartite entanglement”. *Phys. Rev. Lett.* 100, 100503 (2008).
- [118] B. C. Carlson y J. M. Keller. “Eigenvalues of Density Matrices”. *Phys. Rev.* 121, 659 (1961).
- [119] T. Ando. “Properties of Fermion Density Matrices”. *Rev. Mod. Phys.* 35, 690 (1963).
- [120] G.G. Amosov y S.N. Filippov. “Spectral properties of reduced fermionic density operators and parity superselection rule”. *Quantum Inf. Process.* 16, 2 (2017).
- [121] C. K. Law. “Quantum entanglement as an interpretation of bosonic character in composite two-particle systems”. *Phys. Rev. A* 71, 034306 (2005).
- [122] R. Rossignoli y N. Canosa. “Non-additive entropies and quantum statistics”. *Phys. Lett. A* 264, 148 (1999).
- [123] Leonardo da Silva Souza y col. “Completely positive maps for reduced states of indistinguishable particles”. *Phys. Rev. A* 98, 052135 (2018).
- [124] M Di Tullio, A Cianciulli y R Rossignoli. “ M -body entanglement in strongly correlated systems”. *En preparación* (2021). A.Cianciulli, Tesis de Licenciatura, UBA (2021).
- [125] John Hubbard. “Electron correlations in narrow energy bands”. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences* 276, 238 (1963).
- [126] Nevill F Mott. “Metal-insulator transition”. *Rev. of Mod. Phys.* 40, 677 (1968).

-
- [127] Volker Bach, Elliott H Lieb y Jan Philip Solovej. “Generalized Hartree-Fock theory and the Hubbard model”. *J. Stat. Phys.* 76, 3 (1994).
- [128] Fabian HL Essler y col. *The one-dimensional Hubbard model*. Cambridge University Press, 2005.
- [129] Nathan Killoran y col. “Strawberry Fields: A Software Platform for Photonic Quantum Computing”. *Quantum* 3, 129 (2019).
- [130] Jarrod R McClean y col. “OpenFermion: the electronic structure package for quantum computers”. *Quantum Science and Technology* 5, 034014 (2020).
- [131] Cirq Developers. *Cirq*. Ver. v0.12.0. <https://github.com/quantumlib/Cirq/>. 2021.
- [132] Damian S Steiger, Thomas Häner y Matthias Troyer. “ProjectQ: an open source software framework for quantum computing”. *Quantum* 2, 49 (2018).
- [133] Andrew Cross. “The IBM Q experience and QISKit open-source quantum computing software”. En: *APS March Meeting Abstracts*. Vol. 2018, L58-003. 2018.
- [134] Xiu-Zhe Luo y col. “Yao.jl: Extensible, Efficient Framework for Quantum Algorithm Design”. *Quantum* 4, 341 (2020).
- [135] Sergey B Bravyi y Alexei Yu Kitaev. “Fermionic quantum computation”. *Annals of Physics* 298, 210 (2002).
- [136] Wojciech Hubert Zurek. “Quantum discord and Maxwell’s demons”. *Phys. Rev. A* 67, 012320 (2003).
- [137] V. Vedral. “Classical Correlations and Entanglement in Quantum Measurements”. *Phys. Rev. Lett.* 90, 050401 (2003).
- [138] L. Amico y col. “Divergence of the entanglement range in low-dimensional quantum systems”. *Phys. Rev. A* 74, 022322 (2006).
- [139] Salvatore M. Giampaolo, Gerardo Adesso y Fabrizio Illuminati. “Theory of Ground State Factorization in Quantum Cooperative Systems”. *Phys. Rev. Lett.* 100, 197201 (2008).