



## ***SOBRE ALGUNAS CUESTIONES BÁSICAS ESTUDIANDO LA REPRESENTACIÓN AXONOMÉTRICA NORMAL***

TEMA: Docencia

SUBTEMA: Enseñanza de la Expresión Gráfica en las Ingenierías

**SALGUEIRO, Walter**

IFIMAT – Facultad de Ciencias Exactas – Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires y CIFICEN (CONICET - CIC – UNCPBA), Pinto 399 7000 Tandil, Argentina.

Comisión de Investigaciones Científicas de la Provincia de Buenos Aires.

Calle 526 e/ 10 y 11 - 1900 La Plata, Argentina

wsalgue@exa.unicen.edu.ar

### **PALABRAS CLAVES:**

Axonometría normal, sistemas de representación, asignaturas básicas de Ingeniería.

### **ABSTRACT:**

In order to obtain a normal axonometric projection it is necessary to know the angles between the projection of the cartesian axes that are the reference system of the object to represent, measured on the projection plane (axonometric axes) and reduction coefficients. A basic analogic analysis of that problem was presented by the autor in EGRAFA 2016 applying basic trigonometry. In the present work a continuation is developed using software of dynamic geometry in order to show a graphical analysis of the problem. The application of digital resources, but not advanced CADs, focuses the study in fundamental issues.

### **RESUMEN:**

El estudio de la axonometría normal es parte del temario de Sistemas de Representación en carreras de Ingeniería. Si bien la representación axonométrica puede obtenerse fácilmente ya sea analógicamente mediante el uso de papel axonométrico (en general normal isométrico) o mediante el muy eficiente recurso de sistemas CAD, de la experiencia en el aula se observa que la interpretación del proceso de representación exhibe dificultades. Apoyar dicha interpretación mediante recursos digitales, pero de acceso rápido y simple, puede ayudar al alumno sobre todo en cursadas iniciales. El uso de CADs avanzados distrae el foco centrado en los fundamentos de la axonometría. Conducen al alumno hacia la exploración de gran cantidad de recursos y herramientas disponibles que son extremadamente adecuados en manos de quien conoce elementos de Geometría Descriptiva, que no es el caso del alumno de cursadas iniciales. Particularmente determinada la dirección de observación de un objeto geométrico, para obtener la axonometría se deben determinar los ángulos entre los ejes axonométricos (proyecciones de los ejes cartesianos que referencian el objeto), medidos sobre el plano de proyección, y los coeficientes de reducción correspondientes. Si bien para desarrollar esa tarea es posible usar distintos procedimientos citados en la bibliografía, como así también programas de acceso libre en la red global, a nivel pedagógico resulta útil un análisis gráfico simple del proceso que permita obtener las expresiones analíticas de tales ángulos, si es posible usando recursos matemáticos elementales tales como trigonometría básica. En un trabajo del autor presentado en EGRAFA 2016 se describe un procedimiento analógico de este tipo. Como continuación, en el presente trabajo se describe una propuesta de análisis gráfico usando un software de geometría dinámica (free software) que permite una interpretación visual del problema factible de presentarse en forma dinámica. Se describen en forma gráfica los abatimientos que permiten construir una figura geométrica simple útil para analizar aplicando trigonometría básica. Se parte del triedro formado por los tres planos de proyección diédrica a que se referencia el objeto mediante coordenadas cartesianas. Se muestra asimismo la intersección del triedro con el plano de proyección axonométrica definiendo el triángulo de las trazas. Se destaca que el análisis no requiere recursos computacionales avanzados ni de un CAD avanzado lo que permite mantener enfocado el análisis en conceptos fundamentales presentados en forma simple cumpliendo un objetivo netamente didáctico.

## 1.- INTRODUCCIÓN

Cuando se inicia una representación usando axonometría normal se inicia el trabajo analizando las características del objeto de Ingeniería a representar a efectos de determinar la dirección de observación del mismo. La elección responde a la búsqueda de una representación que destaque características específicas del objeto (al menos parcialmente). Se deberá, además, considerar la normalización vigente [1], sin embargo desde un punto de vista didáctico resulta conveniente la libertad de elegir una dirección de observación arbitraria. Determinada esa dirección de observación quedarán determinados los ángulos entre el sistema cartesiano (ejes X, Y, Z) a que se referencia el objeto y los ejes en proyección axonométrica (X', Y', Z'). Se determinan así tres ángulos ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ) entre los ejes X-X', Y-Y' y Z-Z' respectivamente. Los cosenos trigonométricos respectivos de dichos ángulos se denominan coeficientes de reducción  $c_1$ ,  $c_2$  y  $c_3$  y deberán cumplir la relación:

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 2 \quad (1)$$

Usualmente se dan como dato los coeficientes de reducción que por si mismos fijan las proporciones perspectivas entre lados de un objeto representado en axonometría. Por ello habiendo seleccionado dichos coeficientes el problema que se presenta es la determinación de los ángulos entre los ejes proyectados (ejes axonométricos), en otras palabras, los ángulos entre los ejes con que se confeccionará la perspectiva axonométrica normal. Para ello se pueden usar tablas [2,3], o recursos en la web que permiten obtener los ángulos directamente, ver por ejemplo [4]. Puede usarse directamente un CAD [5], pero en todos estos casos mencionados se pierde la oportunidad didáctica de análisis del problema. Desde esa óptica didáctica, en este trabajo se presenta una descomposición directa de la proyección que permite obtener los ángulos entre los ejes axonométricos dada una combinación específica de coeficientes de reducción. En el análisis se recurre a elementos básicos de trigonometría sobre un trabajo presentado por el autor en [6]. Se extiende dicho trabajo aplicando un análisis gráfico usando recursos de software libre que ayuda a

la interpretación de los cálculos a desarrollar contribuyendo al estudio del tema proyección axonométrica en el marco del estudio de la Geometría Descriptiva. El resultado del análisis se puede usar como dato de ingreso para una representación axonométrica analógica, o se puede usar un recurso informático.

## 2.- DESARROLLO

### 2.1- Análisis gráfico

En la Figura 1 (parte superior) se observa que la dirección de la normal al plano de proyección pasando por el centro O. La normal determina el punto O' en su intersección con el plano de proyección. Rectas proyectantes paralelas la dirección OO' proyectan sobre el plano de proyección la terna de ejes X, Y, Z determinando los ejes proyectados X', Y', Z' (ejes axonométricos).

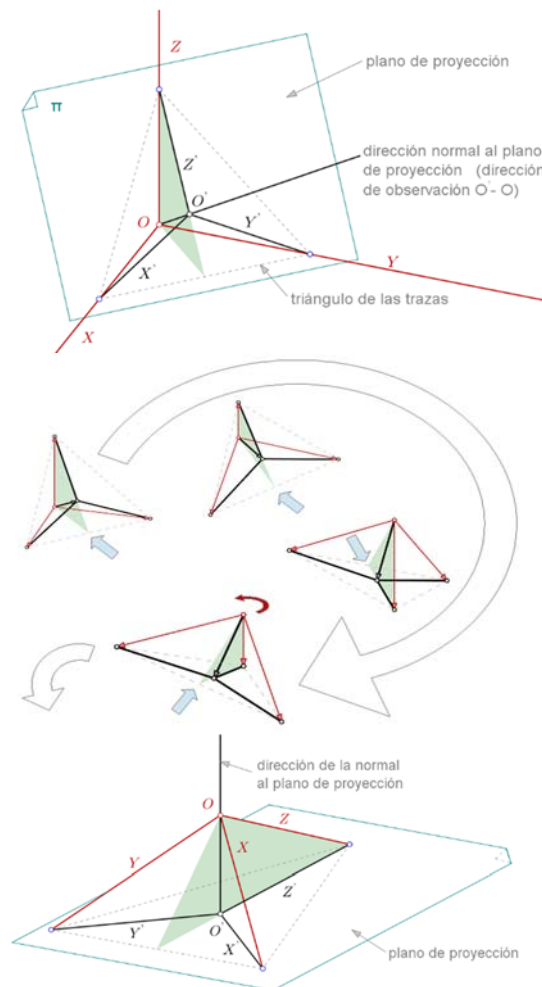


Fig. 1 – Determinación del triedro de proyección axonométrica y su abatimiento, ver texto.

En el centro de la Figura 1 se muestra el proceso de abatimiento del triedro formado

por los ejes XYZ y el plano de proyección (donde se obtiene la perspectiva axonométrica). El proceso finaliza ubicando el plano de proyección en posición horizontal. De esta manera la dirección OO' resulta vertical ya que es normal al plano de proyección como se observa en la parte inferior de la Figura 1. En todo el proceso se ha destacado el plano formado por los ejes ZZ' a efectos de usarlo como referencia visual.

En la Figura 2 parte superior se muestra el mismo triedro abatido de la parte inferior de la Figura 1 pero en este caso se destacan los planos formados por los ejes YY' y XX'. El siguiente paso consiste en efectuar una rotación del plano YY' usando la dirección OO' como eje de rotación para ubicar este plano en forma coincidente con el plano XX'.

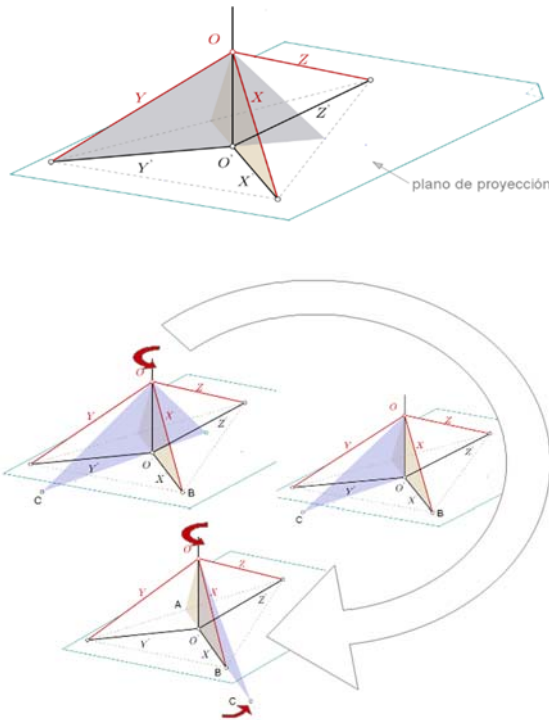


Fig. 2 – Rotación del plano YY' a efectos de ubicarlo coincidente con el plano XX', ver texto.

A continuación, tal como se muestra en la Figura 3, se lleva adelante otro proceso de abatimiento del plano XX' y del plano obtenido luego de la rotación del plano YY' descrita en párrafo precedente. Estos dos abatimientos se realizan usando como eje de abatimiento la dirección X'. El resultado de ambos abatimientos se muestra en la Figura 4 donde se observa el punto O abatido que se denomina (O).

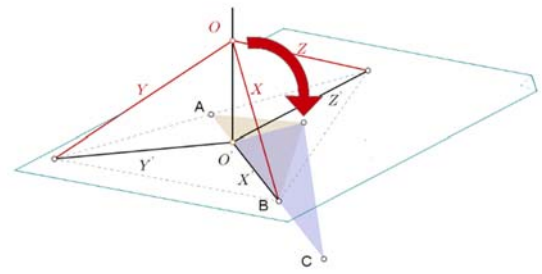


Fig. 3 – Abatimiento de plano XX' y del plano resultante de la rotación del YY' mostrada en la Figura 2.

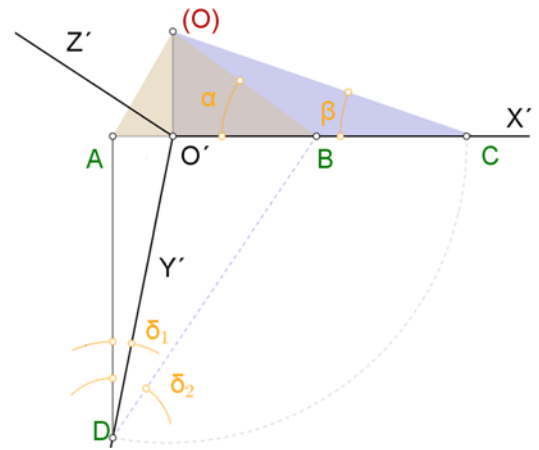


Fig. 4 – Figura de análisis obtenida por los procesos de rotación y abatimientos descritos en Figuras 1 a 3.

## 2.2- Cálculo de ángulos entre ejes axonométricos

Analizando la Figura 4 se pueden identificar los triángulos rectángulos A-B-(O), A-O'-D, A-O'-(O) y O'-B-(O). La recta (O)O' es perpendicular a X' y la recta A(O) es perpendicular a (O)B. Se definen los segmentos O'B, AO', AB, O'C y DA (este último perpendicular a X') y ángulos que se definirán en función de los citados segmentos constituyendo triángulos rectángulos. Es así que se puede ejecutar un análisis trigonométrico como el presentado por el autor en [6]. Usando dicho análisis se calculan los ángulos  $\delta_1$  y  $\delta_2$  como:

$$\delta_1 = \text{arc sen} (tg \alpha \ tg \beta) \quad (1)$$

$$\delta_2 = \text{arc tg} \left[ \frac{(1 + tg^2 \alpha) \ tg \beta}{tg \alpha \ \cos \delta_1} \right] \quad (2)$$

Un punto a destacar es que se ha considerado  $\alpha > \beta$ . Si no fuera este el caso se puede hacer una reasignación de ejes o reconsiderar las relaciones que surjan siguiendo un procedimiento similar al presentado. Además dado que la distancia  $OO'$  es arbitraria puede definirse unitaria a efectos de simplicidad, sin embargo la elección no es determinante dado que se simplifica durante las operaciones de cálculo tanto de  $\delta_1$  como de  $\delta_2$ .

Determinados  $\delta_1$  y  $\delta_2$  Se calculan los ángulos entre ejes axonométricos  $\mu_1, \mu_2$  y  $\mu_3$  (ver Figura 5):

$$\mu_1 = 90 + \delta_1 \quad (3)$$

$$\mu_2 = 90 + (\delta_2 - \delta_1) \quad (4)$$

$$\mu_3 = 360 - (\mu_1 + \mu_2) \quad (5)$$

Se pueden encontrar más detalles sobre el procedimiento de cálculo en [6]. Asimismo se debe notar que si el procedimiento se desarrolló correctamente cada eje primado resultará perpendicular a uno de los lados del triángulo de las trazas que se indica con línea de trazo en la Figura 5.

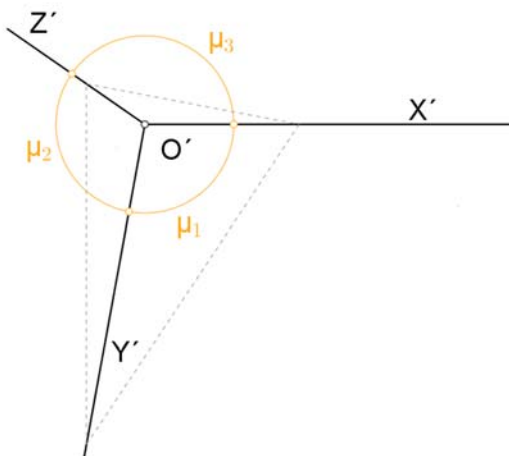


Fig. 5 – Ángulos entre los ejes axonométricos. Se indica el triángulo de las trazas.

### 2.3- Cálculo gráfico de los ángulos entre ejes axonométricos

El análisis presentado en las Figuras 1 a 4 permite interpretar una conocida alternativa que hace uso solo de recursos gráficos. En efecto un procedimiento de ese tipo [8] que puede ser aplicado para obtener los ángulos  $\mu_1, \mu_2$  y  $\mu_3$  se explica brevemente a

continuación. Se procede a determinar una recta horizontal arbitraria que se denomina  $X'$ . Pasando por un punto  $O'$  arbitrario determinado sobre ella se traza una perpendicular. Sobre la perpendicular se determina el punto (O) a una distancia arbitraria. Considerando como referencia el punto (O) se subtienden los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  determinando los puntos B y C respectivamente. Pasando por (O) se traza una recta perpendicular a (O)B determinando el punto A en su intersección con  $X'$ . Se traza un arco de circunferencia con centro  $O'$  y radio  $O'C$  determinando el punto D sobre una perpendicular a  $X'$  que pasa por el punto A. La dirección del eje  $Y'$  queda definida por la recta  $DO'$ . Asimismo la dirección del eje  $Z'$  resulta definida mediante la intersección (punto M) de la recta DA (extendida por encima de A) con una perpendicular a  $Y'$  que pase por el punto B. Uniendo M con  $O'$  se obtiene la dirección del eje  $Z'$ .

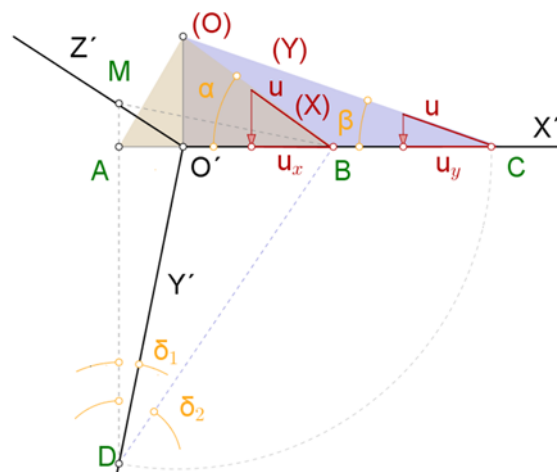


Fig. 6 – Determinación gráfica de los ángulos entre ejes axonométricos y sus correspondientes y unidades reducidas dados los coeficientes de reducción.

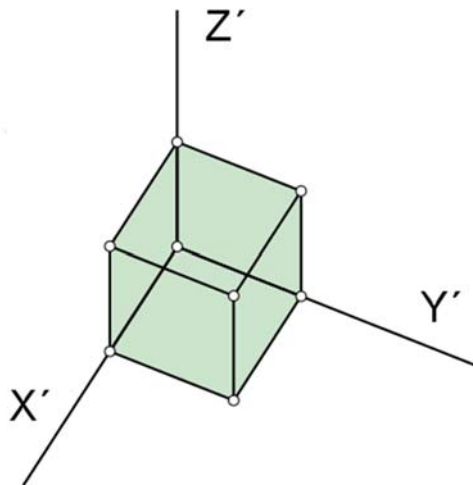
### 2.4- La unidad reducida

Dado que  $\cos \alpha$  y  $\cos \beta$  resultan ser respectivamente los coeficientes de reducción  $c_1$  y  $c_2$ , si se representa la unidad (u) sobre las rectas de dirección (O)B y (O)C es posible obtener gráficamente las unidades de medida (unidades reducidas  $u_x$  y  $u_y$ ) sobre los eje  $X'$  e  $Y'$  tal como se muestra en la Figura 6. Notar que la dirección (O)B corresponde al eje X abatido y se denomina (X). Para el eje Y se puede efectuar la misma consideración. Por otra parte es posible construir un ángulo  $\gamma$  en

posición arbitraria para obtener la tercera unidad reducida de forma gráfica.

## 2.5- Determinando la axonometría

Como paso final se debe considerar que la Figura 5 representa los ejes proyectados observándolos con sentido desde el punto O hacia el O'. En representación axonométrica el sentido de observación se dirige desde O' hacia O (convención de orientación para la terna de ejes [7]) por esa razón para iniciar la perspectiva conviene invertir esa Figura (girándola por ejemplo 180° usando como eje de giro una de las trazas) y luego ubicar el eje Z' en posición vertical. Estas operaciones no afectarán los ángulos determinados y han sido efectuadas para obtener la Figura 7. Representando en esa Figura las unidades reducidas  $u_x$ ,  $u_y$  y  $u_z$  sobre los ejes correspondientes se puede iniciar la representación de un objeto de ingeniería. A modo de ejemplo en la misma Figura 7 se representa la axonometría de un cubo unidad.



*Fig. 7 – Usando los ángulos entre ejes axonométricos y unidades reducidas ( $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$ ) se obtiene la axonometría de un cubo de lado unidad.*

## 3.- CONCLUSIONES

Se ha presentado una descripción de un método para obtener analíticamente el ángulo entre los ejes axonométricos en axonometría normal haciendo énfasis en describir el proceso desde el punto de vista de un análisis gráfico, determinando dichos

ángulos en función de los coeficientes de reducción dados como dato. En otras palabras conocidos  $c_1$ ,  $c_2$  y  $c_3$  (con lo que resultan determinados los ángulos  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ ) se obtienen los ángulos entre ejes axonométricos  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  y  $\mu_3$ . El enfoque evidencia un proceso que requiere de análisis con principios básicos y puede ser útil para comprender la esencia de la representación axonométrica con enfoque netamente didáctico. Asimismo se revisan algunos métodos gráficos, pero se enfatiza la parte analítica dado el carácter digital de la forma actual de trabajo.

## 4.- AGRADECIMENTOS

El autor agradece a la Comisión de Investigaciones Científicas de la Provincia de Buenos Aires (CICPBA) y a la Secretaría de Ciencia Arte y Tecnología de la UNCPBA, Argentina.

## 5.- REFERENCIAS

- [1] Manual de normas IRAM para dibujo tecnológico 2011 (2013). 32 ed. Instituto Argentino de Normalización y Certificación. Buenos Aires. p.17.
- [2] IZQUIERDO ASENSI FERNANDO (1999). Geometría descriptiva. 19 ed. DOSSAT. Barcelona. p. 357.
- [3] IZQUIERDO ASENSI FERNANDO (2005). Ejercicios de geometría descriptiva III (sistema axonométrico). Fernando Izquierdo Asensi.
- [4] TREVISAN CAMILLO. [www.camillotrevisan.it](http://www.camillotrevisan.it). Pestaña software/Axo\_orto. Consultado junio 2018.
- [5] VERGER GUILLERMO (2007). Axonometrias con Autocad. Actas del Congreso EGRAFIA 2007. Rosario 2007. p. 1.
- [6] SALGUEIRO WALTER (2016). Revisitando la Axonometría Normal como Ejercicio de Abstracción Gráfica y Cálculo Trigonométrico. Actas del Congreso EGRAFIA 2016. Córdoba 2016. p. 244.
- [7] SANCHEZ GALLEGU JUAN ANTONIO (1999). Geometría descriptiva. Sistemas de proyección cilíndrica. Alfaomega, Barcelona. p. 101.



[8] CHESÑEVAR CARLOS (1985). Apuntes de Geometría Descriptiva. Centro de Estudiantes Facultad de Ingeniería de Olavarría. Olavarría. p. VII-4.