



UNIVERSIDAD  
NACIONAL  
DE LA PLATA



Facultad de Ciencias  
**Astronómicas  
y Geofísicas**  
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

# Estudio de la dinámica de estrellas S que orbitan alrededor de $SgrA^*$ en contextos de alta densidad de materia oscura

Tesis de Licenciatura en Astronomía

Valentina Crespi

Director: Carlos R. Argüelles

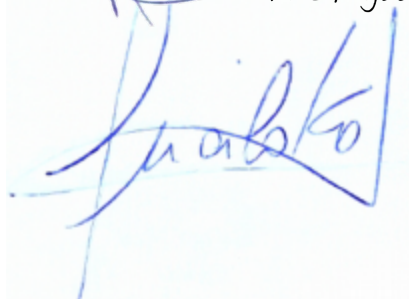
Codirector: Martín F. Mestre

Firma del Director:



Carlos Argüelles

Firma de uno de los Jurados:



Lucila Kraiselburd

Marzo 2022  
La Plata, Argentina

*Un especial agradecimiento  
a mis directores  
Charly y Martín.*

*Dedicado a mi familia, amigos  
y especialmente a mi compañero  
de vida y estudio, Lu.*

## Resumen

La dinámica de las estrellas del cúmulo S alrededor del centro galáctico provee uno de los mejores observables astrofísicos para inferir el potencial gravitatorio central dominado por una fuente compacta, Sgr A\*, tradicionalmente asumida como un Agujero Negro (AN). Un modelo alternativo que explica la componente de materia oscura a lo largo de toda la galaxia es el modelo Ruffini-Argüelles-Rueda (RAR), que consiste en una distribución continua de materia constituida por fermiones neutros de spin 1/2 cuya morfología de núcleo denso y compacto logra explicar la dinámica de las estrellas del cúmulo S, mientras que la componente más externa de halo diluido ajusta las curvas de rotación de la galaxia.

En este trabajo de Tesis se calcula la energía potencial efectiva en geometrías Schwarzschild y RAR, y se realiza un análisis de estabilidad de órbitas. Con el estudio de geodésicas en estos espacios se calculan los ángulos de precesión para dos estrellas del cúmulo S y se realiza una comparación entre ambos modelos. Las soluciones RAR, al ser una distribución extendida de materia con un núcleo compacto, permiten una precesión retrógrada y directa, que depende de la energía de los fermiones. Se realiza también un análisis de la energía de ligadura gravitacional para partículas masivas de prueba en órbitas circulares, alrededor de distribuciones RAR y de agujeros negros. Mientras que para la solución no-singular de energía de los fermiones de  $mc^2 = 56$  keV la eficiencia de energía radiada es comparable con la correspondiente eficiencia de acreción sobre estrellas Enanas Blancas con  $\epsilon \sim 10^{-4}$ , para la solución RAR crítica con  $mc^2 = 345$  keV (justo antes del colapso gravitacional del núcleo compacto), la eficiencia resulta un factor de aproximadamente 5 veces mayor que para el caso de AN de Schwarzschild.

# Abstract

The dynamics of the S-Cluster around the galactic center provides one of the best astrophysical observable to test the central gravitational potential dominated by a compact source, Sgr A\*, traditionally assumed to be a Black Hole (BH). An alternative model, which explains the dark matter component of the galaxy from the center all the way to the external halo, is the Ruffini-Argüelles-Rueda (RAR) model. It consists of a continuous matter distribution of neutral, spin 1/2 fermions whose morphology of a dense and compact core also explains the dynamics of the S-cluster stars, while the outermost diluted halo component fits the galaxy rotation curves. In this Thesis work, the effective potential energy in Schwarzschild and RAR geometries is calculated, and an orbit stability analysis is performed. With the study of geodesics in these spaces, the precession angles are calculated for two stars of the S cluster, and a comparison is made between both models. The RAR solutions, being an extended matter distribution with a compact core, allows retrograde and direct precession, which depends on the fermion's energy. An analysis of the gravitational binding energy for massive test particles in circular orbits around RAR and BH distributions is also performed. While non-singular solutions with fermion energies of  $mc^2 = 56keV$ , the radiated energy efficiency is comparable to gas accretion onto White Dwarf stars with  $\epsilon \sim 10^{-4}$ , for the critical energy solution, just before the gravitational collapse of the compact core  $mc^2 = 345keV$ , the efficiency turns out to be an order of magnitude higher than the Schwarzschild BH case.



# Índice General

<b>Resumen</b>	<b>3</b>
<b>Abstract</b>	<b>4</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>10</b>
1.1. Materia Oscura y su contexto histórico . . . . .	11
1.2. Inconsistencias a pequeñas escalas . . . . .	12
<b>2. Modelo RAR extendido</b>	<b>17</b>
2.1. Soluciones numéricas del modelo . . . . .	23
<b>3. Geodésicas</b>	<b>31</b>
3.1. Comportamiento radial y análisis de estabilidad . . . . .	33
3.1.1. Caso Schwarzschild . . . . .	34
3.1.2. Caso RAR . . . . .	37
3.2. Constantes de movimiento para órbitas acotadas . . . . .	39
3.3. Precesión del periastro . . . . .	40
3.4. Tercera Ley de Kepler en Relatividad General . . . . .	42
<b>4. Cúmulo de estrellas S</b>	<b>45</b>
4.1. Estrella S2 . . . . .	46
4.2. Estrella S4714 . . . . .	52
4.3. <i>Hotspots</i> . . . . .	53
<b>5. Energía de ligadura gravitacional</b>	<b>57</b>
<b>6. Conclusiones</b>	<b>62</b>
6.1. Perspectivas a futuro . . . . .	64
<b>Referencias</b>	<b>66</b>

## Índice de Figuras

1.1. Discrepancia <i>core-cusp</i> . . . . .	13
1.2. Problema de los satélites faltantes . . . . .	14
2.1. Parámetros de degeneración y de corte para $mc^2 = 48$ keV . . . . .	28
2.2. Masa acumulada para $mc^2 = 56$ keV . . . . .	29
2.3. Perfil de densidad y curva de velocidad circular para distribuciones RAR . . . . .	29
3.1. Potenciales efectivos en la geometría Schwarzschild . . . . .	35
3.2. Potenciales efectivos RAR para partículas masivas . . . . .	38
3.3. Potenciales efectivos RAR para partículas sin masa . . . . .	38
4.1. Cúmulo de estrellas S . . . . .	47
4.2. Potenciales efectivos de S2 . . . . .	49
4.3. Precesión de la estrella S2 . . . . .	50
4.4. Precesión de la estrella S4714 . . . . .	51
4.5. <i>Hotspots</i> . . . . .	55
5.1. Energía de Ligadura Gravitacional . . . . .	60

## Índice de Tablas

2.1. Condiciones de borde para el modelo RAR . . . . .	26
2.2. Condiciones iniciales para distintas soluciones RAR . . . . .	27
4.1. Parámetros orbitales de S2 . . . . .	48
4.2. Parámetros orbitales de S4714 . . . . .	52
4.3. Ajustes de órbitas circulares para <i>hotspots</i> . . . . .	54

## Siglas y Acrónimos

- RAR; Modelo Rufini-Argüelles-Rueda
- MO; Materia Oscura
- MOC; Materia Oscura Caliente
- MOT; Materia Oscura Tibia
- MOF; Materia Oscura Fría
- $\Lambda$ CDM; Modelo Cosmológico Estándar
- $\Lambda$ WDM; Modelo Cosmológico con Materia Oscura Tibia
- RG; Relatividad General
- FD; Función de Distribución
- TOV; Tolmann-Oppenheimer-Volkoff
- EE; Ecuaciones de Estado
- EM; Ecuaciones de Movimiento
- ISCO; Órbita circular estable más interna
- EHT; Telescopio Event Horizon





## 1. Introducción

Este trabajo de Tesis tiene como objetivo, el estudio de la dinámica de estrellas del cúmulo S como objetos para testear el modelo alternativo de halos de materia oscura a escalas galácticas, Ruffini-Argüelles-Rueda (RAR).

Este modelo desarrolla perfiles de densidad con una morfología de núcleo compacto - halo diluido, de manera que el halo externo logra reproducir la curva de rotación galáctica, mientras que el núcleo compacto funciona como alternativa al paradigma del agujero negro central en Sgr A\*.

Un tema abierto de gran interés, es precisamente cómo se distribuye tal componente de materia a escalas galácticas, y cuál es la naturaleza y masa de las partículas que la componen.

La estructura de este trabajo consiste en:

Presentar un Marco Teórico en los primeros dos capítulos. En la primera, se introduce brevemente el concepto de Materia Oscura y su evolución histórica pasando por el modelo cosmológico estándar  $\Lambda$ CDM, centrándose en dos de sus discrepancias a pequeñas escalas, y se introducen ideas alternativas de modelos de materia oscura. En el segundo capítulo, se presenta el modelo de materia oscura fermionica RAR extendido. Se aborda el análisis de las hipótesis y ecuaciones diferenciales que componen el modelo, y se estudia el cálculo numérico de este sistema de ecuaciones.

Los siguientes capítulos presentan los cálculos, resultados y discusiones de este trabajo.

En el tercer capítulo se estudia en detalle el cálculo de geodésicas en simetría esférica y estática. Se analiza la estabilidad de órbitas de partículas de prueba en soluciones de espacio-tiempo de Schwarzschild y soluciones RAR con el uso del potencial efectivo del objeto central.

En el cuarto capítulo se presenta al cúmulo de estrellas S, donde algunas de sus estrellas principales constituyen objeto de estudio de esta Tesis, y se describen aplicaciones, resultados y discusiones.

En el quinto capítulo de este trabajo se estudia la energía de ligadura gravitacional y se compara de manera cualitativa el fenómeno de acreción de materia entre los distintos modelos singulares y no-singulares.

Se finaliza con un capítulo de conclusiones y se presentan posibles temas a abordar en el futuro.

## 1.1. Materia Oscura y su contexto histórico

La idea de *Materia Oscura* (MO) surgió hace más de un siglo con los primeros trabajos de Lord Kelvin (1824 – 1907), quien estimó la masa de la Vía Láctea midiendo velocidades de dispersión de estrellas orbitando alrededor del centro galáctico. Seguido por Henri Poincaré (1854 – 1912), quien en la primera década del siglo XX propuso el nombre para esta componente galáctica desconocida. En 1933, el astrofísico suizo Zwicky (1898 – 1974) que estudiaba Cúmulos de Galaxias realizó una estimación similar utilizando el Teorema del Virial aplicado al cúmulo de Coma (Zwicky 1933). Él pudo inferir que el cúmulo contenía aproximadamente 400 veces más masa de la que se observaba visualmente.

Sin embargo, recién en la década de 1970 los cálculos de las primeras curvas de rotación de galaxias revelaron la necesidad de grandes cantidades de materia no luminosa y a partir de entonces gran parte de la comunidad científica empezó a tomar con mayor seriedad el tema en cuestión.

Actualmente, se ha llegado a un consenso sobre la naturaleza de la MO que apunta a una partícula masiva fundamental aún desconocida, creada en los inicios del Universo.

Se cree que previo a la época de recombinación, cuando el Universo se enfrió lo suficiente, estas partículas comenzaron a aglomerarse debido a su propia interacción gravitatoria formando regiones sobredensas de materia. Estas perturbaciones en densidad, al alcanzar un régimen no lineal en su evolución, van convirtiendo energía potencial en energía cinética al colapsar. El resultado es lo que llamamos un halo virializado de Materia Oscura. Estas configuraciones esféricas constituyen los progenitores de las galaxias que vemos hoy.

Los candidatos de MO se agruparon en base a sus efectos en la formación de estructura:

- Las partículas de Materia Oscura *Caliente* (MOC,  $mc^2 \sim 1$  eV) siguen siendo relativistas hasta una fase relativamente tardía de la evolución del Universo, y logran escapar de las regiones sobredensas de materia. Sólo las grandes sobredensidades con escalas de los cúmulos de galaxias sobreviven y en consecuencia el colapso se produce muy lentamente. Esta formación de estructura del tipo *top down*, donde primero se forma la estructura y luego se va fragmentando en subestructuras, no es compatible con el universo observado.
- Las partículas de Materia Oscura *Tibia* (MOT,  $mc^2 \sim 1$  keV) tienen velocidades iniciales más pequeñas volviéndose no relativistas antes, y suprimen las perturbaciones en escalas galácticas.

- Las partículas de Materia Oscura *Fría* (MOF,  $mc^2 \sim 100$  GeV) tienen una velocidad térmica insignificante, y no se difunden de las sobredensidades en ninguna escala relevante para la formación de galaxias. La formación de estructura en estos dos escenarios es del tipo *bottom up*, donde las galaxias se forman primero, y luego los cúmulos de galaxias. Esto provee una descripción mucho mejor de lo que vemos en el Universo, y conduce a una imagen para la formación de estructuras llamada formación de estructura jerárquica.

En la década de 1990, surgió el modelo cosmológico más aceptado por la comunidad llamado  $\Lambda$ CDM. Es la culminación de un siglo de trabajo en la física de formación de estructura del Universo dentro del marco de la Relatividad General (RG). En este modelo, la estructura del Universo está dada por fluctuaciones primordiales que crecen por inestabilidades gravitacionales en un espacio-tiempo en expansión. Las observaciones astrofísicas que van desde escalas del *Horizonte* ( $\sim 15$  Gpc) hasta escalas de  $\sim 1$  Mpc, prueban ser consistentes con un Universo en la cosmología  $\Lambda$ CDM dominado actualmente por Energía Oscura ( $\sim 70\%$ ), Materia Oscura Fría ( $\sim 25\%$ ) y materia bariónica ordinaria que solo contribuye un ( $\sim 5\%$ ) a la densidad de energía total (Planck-Collaboration 2016).

El modelo cosmológico  $\Lambda$ CDM ha proporcionado un pilar para la teoría de formación de galaxias. Sin embargo, hay observaciones a escalas menores a  $\sim 1$  Mpc que resultan más problemáticas de entender en el marco de este modelo.

## 1.2. Inconsistencias a pequeñas escalas

El modelo cosmológico de energía oscura + MOF ( $\Lambda$ CDM) ha sido muy exitoso prediciendo y explicando la estructura a gran escala del Universo y su evolución en el tiempo. Pese a esto, a escalas de longitud menores a  $\sim 1$  Mpc la teoría se enfrenta a un número de desafíos.

En el campo de la astrofísica, una pregunta todavía abierta es cuál es la naturaleza de las partículas que componen la MO, y también cómo ésta se distribuye a lo largo de las galaxias.

Con la llegada de las simulaciones numéricas de N-cuerpos a finales del siglo pasado (Ghigna et al. 1998; Springel et al. 2005), se logró proporcionar la MO necesaria para explicar la estructura observada a gran escala en el Universo (por encima de  $\sim 100$  Mpc), hasta escalas similares al exterior de una galaxia. Así mismo, se pudo resolver la estructura interna de halos de MOF a pequeñas escalas. Sin embargo, enseguida surgieron los dos desafíos más importantes del modelo:

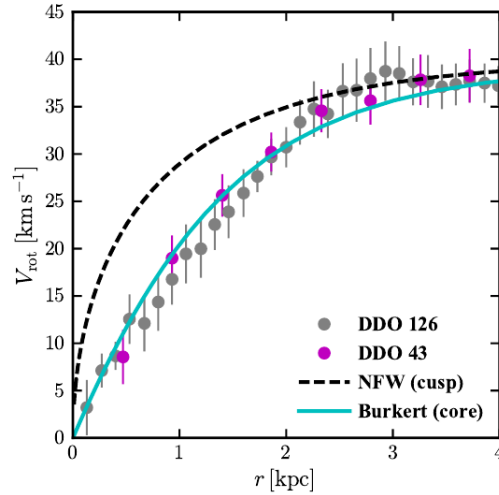


Figura 1.1: Discrepancia *core-cusp*: La curva negra punteada muestra la predicción obtenida para halos formados solamente por MO para una galaxia con curva de velocidad de rotación típica de  $V_{rot} \simeq 40 \text{ km/s}$ . Esta curva refleja una densidad central del tipo *cusp* con  $\rho(r) \propto 1/r$  (Navarro et al. 2010). La línea sólida crece más suavemente con una densidad central constante del tipo *core* (Burkert 1995), la cual ajusta mejor los datos tomados de *LITTLE THINGS Survey* que muestran las curvas de rotación de dos galaxias (Oh et al. 2015). Fuente: Bullock et al. 2017

el problema núcleo-cúspide (*core-cusp*, Ben Moore 1994) y el problema de los satélites faltantes (*missing satellite problem*, Klypin et al. 1999; B. Moore et al. 1999).

- *Core-Cusp Problem*: Las simulaciones de N-cuerpos que incluyen sólo la componente de MOF predicen que los halos de MO deberían tener perfiles de densidad que crecen muy rápidamente a radios pequeños de la forma  $\rho(r) \propto r^{-\gamma}$ , donde  $\gamma \simeq 0,8 - 1,4$  (Navarro et al. 2010). Observacionalmente, en contraste con estas predicciones, en galaxias de baja masa dominadas por la componente de MO con mediciones precisas de sus curvas de rotación, parecen ajustar mejor perfiles de densidad central constante  $\gamma \simeq 0,0 - 0,5$  (Naray et al. 2008) Ver figura 1.1.
- *Missing Satellites Problem*: En simulaciones de halos similares al tamaño de la Vía Láctea, se espera una gran cantidad de subhalos que están atraídos gravitacionalmente por el potencial del halo que las hospeda. Sin embargo, el número de galaxias enanas observadas es de órdenes de magnitud inferiores a las esperadas por las simulaciones. En el caso del Grupo Local, sólo se conocen  $\sim 50$  galaxias satélite que orbitan dentro del radio virial de la Vía Láctea (Drlica-Wagner et al. 2015) Ver figura 1.2.

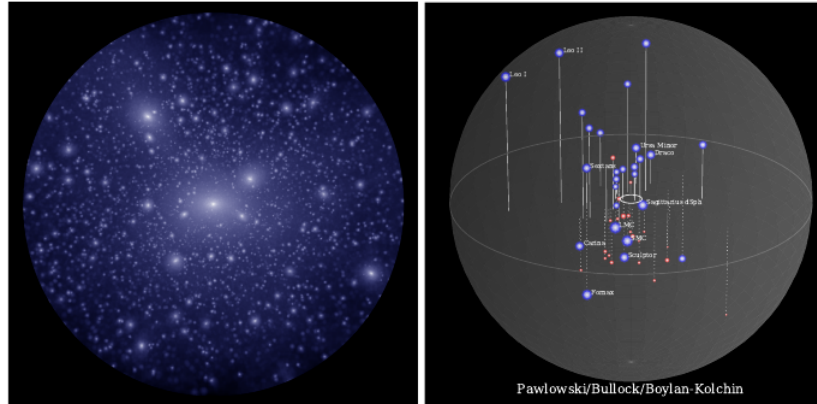


Figura 1.2: *Missing Satellites Problem*: A la izquierda se muestra la subestructura predicha con simulaciones de  $\Lambda$ CDM, y a derecha los satélites conocidos de la Vía Láctea. Actualmente se conocen  $\sim 50$  galaxias satélites, comparados con miles de subhalos predichos por las simulaciones de N-cuerpos.

Fuente: Bullock et al. 2017

El paradigma de un modelo cosmológico de MO Tibia ( $\Lambda$ WDM) permite aliviar los problemas descritos anteriormente (Bullock et al. 2017). Sin embargo, simulaciones numéricas en estas cosmologías presentan otras inconsistencias como el problema *Catch 22* (Shao et al. 2013), donde perfiles de densidad de halos satélites de galaxias similares a la Vía Láctea pueden ser descritos por perfiles tipo *core* para los cuales se ajusta una energía de  $mc^2 \sim 0,5$  keV. Esto entra en conflicto con observaciones de *Lyman  $\alpha$  forest* que imponen una cota inferior de  $mc^2 \gtrsim 1,2$  keV (Seljak et al. 2006).

Un enfoque alternativo al de simulaciones de N-cuerpos para describir halos de MO, es aquel en el cual los halos se forman a partir de un principio de maximización de entropía (Binney et al. 2008). Los primeros trabajos de dinámica y termodinámica autogravitantes se desarrollaron para partículas clásicas en gravedad Newtoniana aplicados a cúmulos estelares (King 1966; Lynden-Bell 1967). Seguido a esto, se empezaron a proponer modelos de partículas cuánticas autogravitantes (Ruffini y Bonazzola 1969).

El primer trabajo sobre sistemas de fermiones se basó en la descripción matemática de las soluciones, sin una aplicación fenomenológica a los halos galácticos (Gao et al. 1990). Las aplicaciones de esta teoría a halos de MO en equilibrio hidrostático fueron desarrolladas en Ruffini, Argüelles et al. 2015; P. H. Chavanis et al. 2015; Argüelles, Krut et al. 2018; Argüelles, Krut et al. 2019.

La aproximación de equilibrio hidrostático para halos de MO viene justificado

por el mecanismo de relajación violenta, el cual puede explicar como un conjunto de partículas autogravitantes no-colisionales llega a un estado cuasi-estacionario como el que se observa hoy. Este mecanismo involucra variaciones rápidas en el tiempo del campo gravitacional, permitiendo redistribuir la energía entre partículas incluso más rápido que escalas temporales de mecanismos de relajación colisionales (Binney et al. 2008). Estos resultados también se generalizaron para incluir estados fuera del equilibrio, permitiendo por ejemplo el efecto de escape de partículas que lleva a una función de distribución (FD) de Fermi-Dirac truncada, que implica sistemas de tamaño finito (P.-H. Chavanis 1998).

El proceso por el cual es posible obtener una FD de equilibrio de MO, se conoce formalmente como el principio de maximización de entropía (P.-H. Chavanis 1998; P. H. Chavanis et al. 2015) y provee un posible mecanismo de formación de halos de MO en la cosmología (Argüelles, Díaz et al. 2021).

Estos resultados dan pie al modelo a utilizar en este trabajo de Tesis, el modelo RAR (por sus autores Ruffini, Argüelles y Rueda) que basado en el proceso de maximización de entropía para fermiones autogravitantes, alcanzan un estado de equilibrio desarrollando un perfil de densidad del tipo núcleo compacto - halo diluido. El núcleo de fermiones degenerados puede jugar un papel alternativo al de los agujeros negros supermasivos en los centros galácticos, mientras que el halo exterior permite explicar las curvas de rotación de las galaxias (Argüelles, Krut et al. 2018; Argüelles, Krut et al. 2019). Estos fermiones presentan un rango de energías que va desde un orden de 10 – 100 keV en una cosmología MOT. Además, el espectro de potencias que se obtiene hasta escalas del Mpc coincide con el predicho por el paradigma de MOF, por lo tanto a grandes escalas se espera la misma estructura (Boyarsky et al. 2009).

Por otra parte, tampoco entra en tensión con el número de satélites de la Vía Láctea (J.Tollerud et al. 2008). Así mismo, el perfil de densidad desarrolla un *plateau* extendido en la parte interna del halo, por lo cual no sufre del problema *core-cusp*.





## 2. Modelo RAR extendido

El modelo RAR extendido consiste en un sistema de fermiones autogravitantes de spin 1/2 en equilibrio hidrostático y equilibrio termodinámico, en el marco de la Relatividad General (RG). La distribución de materia oscura fermionica se obtiene a partir de la solución de las ecuaciones de Tolmann - Oppenheimer - Volkoff (TOV) para un fluido ideal, cuyas ecuaciones de estado (EE) tienen en cuenta que las partículas son relativistas, una temperatura finita de la distribución y el escape de partículas a través de un corte en la función distribución (FD) de Fermi-Dirac (Argüelles, Krut et al. 2018). Este modelo extiende el RAR original en el cual la FD es la de Fermi-Dirac estándar (no truncada Ruffini, Argüelles et al. 2015), volviendo el modelo RAR extendido más realista ya que los halos están acotados en radio y masa.

El conjunto de parámetros del modelo viene dado por la masa  $m$  de los fermiones y tres parámetros adimensionales: el parámetro de temperatura del sistema  $\beta$ , el parámetro de degeneración  $\theta$  y el parámetro de corte  $W$

$$\beta(r) = \frac{kT(r)}{mc^2} \quad ; \quad \theta(r) = \frac{\mu(r)}{kT(r)} \quad ; \quad W(r) = \frac{\epsilon_c(r)}{kT(r)} \quad (2.1)$$

donde  $T(r)$  es la temperatura del sistema,  $\mu(r)$  es el potencial químico con la energía en reposo de los fermiones sustraída,  $k$  es la constante de Boltzmann, y  $\epsilon_c(r)$  es la energía cinética de corte que da cuenta del tamaño finito de los halos, donde  $\epsilon_c(r_b) = 0$ , con  $r_b$  el radio límite (*boundary*) de la configuración de materia oscura.

Las correspondientes EE dependerán de los cuatro parámetros del modelo:  $\rho(\beta, \theta, W, m)$  y  $P(\beta, \theta, W, m)$  donde  $\rho$  y  $P$  son la densidad de energía y la presión del fluido, y se obtienen directamente de la integración sobre el espacio de momentos (evaluado hasta el momento de corte) de la función distribución  $f_c$ .

Las EE fermionicas se expresan de la siguiente manera

$$\rho(r) = \frac{2m}{h^3} \int_0^{\epsilon_c} f_c(p, r) \left( 1 + \frac{\epsilon(p)}{mc^2} \right) d^3p \quad (2.2)$$

$$P(r) = \frac{4}{3h^3} \int_0^{\epsilon_c} f_c(p, r) \epsilon(p) \frac{1 + \epsilon(p)/2mc^2}{1 + \epsilon(p)/mc^2} d^3p \quad (2.3)$$

la función distribución  $f_c(p, r)$  difiere de la de Fermi-Dirac en la energía de corte. Con esto se manifiesta que las partículas con una energía superior a la energía de escape son demasiado rápidas como para quedar ligadas a la configuración de masa, provocando un corte en el espacio de momentos

$$f_c(\epsilon \leq \epsilon_c, r) = \frac{1 - e^{(\epsilon - \epsilon_c)/kT(r)}}{e^{(\epsilon - \mu)/kT(r)} + 1}, \quad f_c(\epsilon > \epsilon_c, r) = 0 \quad (2.4)$$

donde  $\epsilon(p) = \sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4} - mc^2$  es la energía cinética de la partícula,  $k$  es la constante de Boltzmann,  $h$  es la constante de Planck y  $c$  es la velocidad de la luz. Al considerar  $kT \ll mc^2$  no se incluye la presencia de antifermiones.

Con estas características del fluido ideal, se resuelven en conjunto las ecuaciones de Einstein (2.5) con las ecuaciones de equilibrio termodinámico de Tolman (Tolman 1930) y de Klein (Klein 1949), que son una generalización de la ley cero y primera ley de la termodinámica en RG, formando un sistema de ecuaciones diferenciales

$$\left\{ \begin{array}{l} G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = -\frac{8\pi G_N}{c^4} T_{\alpha\beta} \end{array} \right. \quad (2.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{\nu(r)/2} T(r) = \text{constante} \end{array} \right. \quad (2.6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{\nu(r)/2} (\mu(r) + mc^2) = \text{constante} \end{array} \right. \quad (2.7)$$

Estas últimas dos ecuaciones surgen dado que el calor, al igual que cualquier otra fuente de energía, también está sometido a la gravedad. Esto genera que ya no se cumpla que dos regiones del mismo sistema tengan que estar a la misma temperatura para respetar el equilibrio térmico, sino que la temperatura propia del sistema necesariamente varía punto a punto dentro del fluido autogravitante en estado de equilibrio, cumpliéndose la ecuación de Tolman (2.6). Análogamente, ocurre para el potencial químico cumpliéndose la ecuación de Klein (2.7).

Considerando las hipótesis ya mencionadas y tomando la velocidad de la luz en unidades naturales ( $c = 1$ ), se procede a obtener las ecuaciones diferenciales para las variables que caracterizan al modelo, éstas son la masa de la distribución  $M(r)$ , la densidad de masa  $\rho(r)$  y los parámetros  $\beta(r)$ ,  $\theta(r)$  y  $W(r)$ .

El tensor métrico más general para una configuración de energía-momento estática y con simetría esférica, viene dado por

$$ds^2 = e^{\nu(r)} dt^2 - e^{\lambda(r)} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 = g_{\alpha\beta}(r) dx^\alpha dx^\beta \quad (2.8)$$

La componente  $\alpha = \beta = 0$  de esta métrica es la que aparece en las ecuaciones de Tolman y de Klein. Con el uso del tensor métrico se calculan los elementos de la conexión de Levi-Civita  $\Gamma_{\alpha\beta}^{\rho}$ , a partir de los cuales se construye el tensor de Ricci  $R_{\alpha\beta}$  y el escalar de curvatura  $R$  para obtener el tensor de Einstein  $G_{\alpha\beta}$  dados en 2.5, con  $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$  y  $G_N$  la constante de gravitación universal.

Se obtienen las componentes no nulas del tensor

$$\begin{cases} G_{00} = \frac{e^{\nu-\lambda}}{r^2} [1 - r\lambda' - e^{\lambda}] \\ G_{11} = \frac{1}{r^2} [-r\nu' + e^{\lambda} - 1] \\ G_{22} = r^2 e^{-\lambda} \left[ \nu'' + (\nu')^2 - \nu'\lambda' + \frac{\nu' - \lambda'}{r} \right] \\ G_{33} = \sin^2(\theta) G_{22} \end{cases}$$

donde se desestima la dependencia radial de las funciones  $\nu(r)$  y  $\lambda(r)$ , y las componentes primadas corresponden a derivadas con respecto a la coordenada radial.

El tensor de energía-momento es el de un fluido ideal en equilibrio hidrostático

$$T_{\alpha\beta} = (\rho(r) + P(r))U_{\alpha}U_{\beta} - P(r)g_{\alpha\beta}(r) \quad (2.9)$$

donde  $\rho(r)$  y  $P(r)$  son la densidad de energía y la presión medidos por un observador en reposo con el fluido y vienen dadas por las ecuaciones 2.2 y 2.3. La tetravelocidad de un observador esta representada por  $U^{\alpha}$  y su normalización es la de un vector tipo tiempo  $U^{\alpha}U_{\alpha} = 1$  por lo tanto, para un observador en reposo con el fluido  $U^{\alpha} = (U^0, 0, 0, 0)$  tendremos  $U_0 = e^{\nu/2}$ , y las componentes no nulas del tensor energía-momento quedan

$$\begin{cases} T_{00} = \rho(r)e^{\nu(r)} \\ T_{11} = P(r)e^{\lambda(r)} \\ T_{22} = P(r)r^2 \\ T_{33} = P(r)r^2 \sin^2(\theta) \end{cases}$$

Se tienen tres componentes independientes de las ecuaciones de Einstein. La ecuación con  $\alpha = \beta = 0$  sólo relaciona  $\rho(r)$  con  $\lambda(r)$

$$\frac{e^{-\lambda}}{r^2} [1 - r\lambda' - e^{\lambda}] = -8\pi G_N \rho(r) \quad (2.10)$$

se puede reescribir el lado izquierdo de la ecuación como la derivada de un producto

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} [r(1 - e^{-\lambda})] = 8\pi G_N \rho(r) \quad (2.11)$$

es conveniente reemplazar  $\lambda(r)$  por una nueva función  $M(r)$  definida como

$$M(r) = \frac{r - re^{-\lambda}}{2G_N} \quad , \text{o equivalentemente} \quad e^\lambda = \left[ 1 - \frac{2G_N M(r)}{r} \right]^{-1} \quad (2.12)$$

por lo tanto la ecuación 2.11 se reduce a

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \quad (2.13)$$

La solución a la ecuación de Einstein en el vacío  $R_{\alpha\beta} = 0$ , conocida como solución de Schwarzschild, se da en una región del espacio-tiempo donde no hay componentes de energía que aporten a la curvatura del espacio-tiempo  $T_{\alpha\beta} = 0$ . La métrica de esta solución viene dada por

$$ds^2 = \left( 1 - \frac{2G_N M}{r} \right) dt^2 - \left( 1 - \frac{2G_N M}{r} \right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 \quad (2.14)$$

donde  $G_N$  es la constante de gravitación universal y  $M$  es la masa total central de la configuración responsable de la curvatura del espacio-tiempo.

En analogía con esta solución de Schwarzschild, la propuesta de la ecuación 2.12 se percibe como una generalización de la componente  $g_{11}(r)$  del caso Schwarzschild, por lo tanto es posible pensar a  $M(r)$  como la masa acumulada a un cierto radio  $r$ .

La ecuación de Einstein con  $\alpha = \beta = 1$  corresponde a

$$\frac{1}{r^2} [-r\nu' + e^\lambda - 1] = -8\pi G_N P(r)e^{\lambda(r)} \quad (2.15)$$

reemplazando por la función de masa acumulada 2.12 y despejando para  $\nu'(r)$  la ecuación se simplifica a

$$\frac{d\nu(r)}{dr} = \frac{2(4\pi G_N r^3 P(r) + G_N M(r))}{r(r - 2G_N M(r))} \quad (2.16)$$

Para derivar las ecuaciones diferenciales para los parámetros del modelo (ecuaciones 2.1), se hace uso de las ecuaciones de Tolman y de Klein. Además, debido a la invariancia temporal de la distribución se tiene otra cantidad conservada a lo

largo de una geodésica, la energía de la partícula de prueba. Respectivamente se tiene

$$e^{\nu(r)/2}T(r) = \text{constante} \quad (2.17)$$

$$e^{\nu(r)/2}(\mu(r) + mc^2) = \text{constante} \quad (2.18)$$

$$e^{\nu(r)/2}(\epsilon_c + mc^2) = \text{constante} \quad (2.19)$$

Se comienza buscando una ecuación par el parámetro de degeneración  $\theta(r)$ . Derivando con respecto a  $r$  las ecuaciones de Tolman y de Klein se tiene

$$\begin{aligned} e^{\nu(r)/2} \left( \frac{\nu'(r)}{2} T(r) + T'(r) \right) &= 0 \\ e^{\nu(r)/2} \left( \frac{\nu'(r)}{2} (\mu(r) + mc^2) + \mu'(r) \right) &= 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

con lo cual es posible despejar de la primera ecuación  $T'(r)$  y de la segunda ecuación  $\mu'(r)$ , y se obtiene

$$T'(r) = -\frac{\nu'(r)}{2} T(r) \quad (2.21)$$

$$\mu'(r) = -\frac{\nu'(r)}{2} (\mu(r) + mc^2) \quad (2.22)$$

usando el parámetro de degeneración del sistema  $\theta(r)$  (ec. 2.1) y derivando con respecto a  $r$  se tiene

$$\theta'(r) = \frac{d}{dr} \left( \frac{\mu(r)}{kT(r)} \right) = \frac{\mu'(r)}{kT(r)} - \frac{\mu(r)T'(r)}{kT^2(r)} = \frac{\mu'(r)}{kT(r)} - \theta(r) \frac{T'(r)}{T(r)} \quad (2.23)$$

usando las ecuaciones 2.21, 2.22 y 2.23 se simplifica  $\theta'(r)$

$$\theta'(r) = -\frac{\nu'(r)}{2} \left( \frac{\mu(r)}{kT(r)} + \frac{mc^2}{kT(r)} \right) + \theta(r) \frac{\nu'(r)}{2} \quad (2.24)$$

reemplazando por el parámetro de temperatura  $\beta(r)$  queda

$$\frac{d\theta(r)}{dr} = -\frac{\nu'(r)}{2} \frac{1}{\beta(r)} \quad (2.25)$$

Usando la ecuación de Tolman (2.6), multiplicandola por  $k/mc^2$ , y como la relación se cumple para cualquier radio se puede determinar la constante evaluando en  $r = 0$  y se obtiene

$$e^{\nu(r)/2}\beta(r) = e^{\nu_0/2}\beta_0 \quad \text{o equivalentemente} \quad \frac{\beta_0}{\beta(r)} = e^{(\nu(r)-\nu_0)/2} \quad (2.26)$$

donde  $\nu_0 = \nu(r = 0)$  y  $\beta_0 = \beta(r = 0)$ . La ecuación de Klein se puede expresar como

$$e^{\nu_0/2} (e^{(\nu(r)-\nu_0)/2}(\mu(r) + mc^2) - (\mu_0 + mc^2)) = 0 \quad (2.27)$$

con  $\mu_0 = \mu(r = 0)$ . Reemplazando por la ecuación 2.26 se tiene

$$\frac{\beta_0}{\beta(r)}(\mu(r) + mc^2) - (\mu_0 + mc^2) = 0 \quad (2.28)$$

y se puede reescribir como

$$\frac{1}{\beta(r)} = \frac{1}{\beta_0} (1 - \beta_0(\theta(r) - \theta_0)) \quad (2.29)$$

donde  $\theta_0 = \theta(r = 0)$ .

Finalmente, se obtiene una ecuación para el parámetro de degeneración si se reemplaza esta última ecuación y la ecuación 2.16 en la ecuación 2.25

$$\frac{d\theta(r)}{dr} = -\frac{1 - \beta_0(\theta - \theta_0)}{\beta_0} \frac{4\pi G_N r^3 P + G_N M}{r(r - 2G_N M)} \quad (2.30)$$

Haciendo un análisis similar se puede obtener una ecuación para el parámetro de corte  $W(r)$  en términos del parámetro de degeneración  $\theta(r)$ . Usando la ecuación 2.26 y la conservación de la energía dada por 2.19, se puede escribir

$$\frac{\beta_0}{\beta(r)}(\epsilon_c + mc^2) = \epsilon_0 + mc^2 \quad (2.31)$$

y usando 2.1 se tiene

$$\frac{\beta_0}{\beta(r)} = 1 + W_0\beta_0 - \beta_0 W(r) \quad (2.32)$$

Finalmente, haciendo uso nuevamente de la ecuación 2.29 y despejando para  $W(r)$  se obtiene

$$W(r) = \theta(r) + W_0 - \theta_0 \quad (2.33)$$

Se resumen las ecuaciones diferenciales del modelo RAR extendido en el siguiente cuadro

$$\begin{aligned}
 \frac{dM(r)}{dr} &= 4\pi r^2 \rho(r) \\
 \frac{d\nu(r)}{dr} &= \frac{2(4\pi G_N r^3 P(r) + G_N M(r))}{r(r - 2G_N M(r))} \\
 \frac{d\theta(r)}{dr} &= -\frac{1 - \beta_0(\theta - \theta_0)}{\beta_0} \frac{4\pi G_N r^3 P + G_N M}{r(r - 2G_N M)} \\
 \beta(r) &= \beta_0 e^{(\nu_0 - \nu(r))/2} \\
 W(r) &= \theta(r) + W_0 - \theta_0
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

## 2.1. Soluciones numéricas del modelo

El conjunto de ecuaciones 2.34 forma un sistema de ecuaciones diferenciales, cuya solución representa el conjunto de parámetros del modelo. Una vez resuelto, se obtiene la masa acumulada a cierto radio  $r$  de la configuración de fermiones  $M(r)$ , la métrica de este espacio-tiempo (2.8) queda completamente determinada, y los parámetros de temperatura, degeneración y energía cinética de corte (2.1) quedan determinados.

Para resolver numéricamente el sistema de ecuaciones RAR, se adimensionalizan las ecuaciones y parámetros. Comenzando por la FD (2.4) se puede reescribir de forma

$$f_c(\epsilon \leq \epsilon_c, r) = \frac{1 - e^{(\epsilon - \epsilon_c)/kT(r)}}{e^{(\epsilon - \mu)/kT(r)} + 1} \implies f_c(\epsilon \leq \epsilon_c, r) = \frac{1 - e^{(\epsilon - \epsilon_c)/\beta(r)}}{e^{(\epsilon - \alpha(r))/\beta(r)} + 1}$$

donde  $\alpha(r)$ ,  $\beta(r)$  y  $\epsilon_c(r)$  corresponden al potencial químico, parámetro de temperatura y energía de corte dados por

$$\beta(r) = \frac{kT(r)}{mc^2} \quad ; \quad \alpha(r) = \frac{\mu(r) + mc^2}{mc^2} \quad ; \quad \epsilon_c(r) = \frac{\epsilon_c(r) + mc^2}{mc^2}$$

Esta función distribución se usa para calcular la densidad y la presión del fluido de MO confinado en un volumen finito  $V$ , las cuales son convenientes integrar en el espacio de energías relativistas  $\epsilon$  (en unidades de  $mc^2$ ) y son equivalentes a las

ecuaciones 2.2 y 2.3

$$\begin{aligned}\rho(r) &= \frac{m}{V} \int_1^{\varepsilon_c} \varepsilon f(\varepsilon) g(\varepsilon) d\varepsilon \\ P(r) &= \frac{1}{3V} \int_1^{\varepsilon_c} p v f(\varepsilon) g(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{m c^2}{3V} \int_1^{\varepsilon_c} \frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon} f(\varepsilon) g(\varepsilon) d\varepsilon\end{aligned}\quad (2.35)$$

donde la densidad de estados  $g(\varepsilon)$  para partículas de spin  $s$  viene dada por

$$g(\varepsilon) = (2s + 1) \frac{4\pi V m^3 c^3}{h^3} \varepsilon \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \quad (2.36)$$

Las EE adimensionales se calculan utilizando el método de integración de Simpson con la función `scipy.integrate.simpson` (Scipy-Documentation [s.f.\(a\)](#)) de la librería de *Python*

$$\begin{aligned}\frac{\rho(r)}{\varrho} &= \int_1^{\varepsilon_c} \varepsilon f(\varepsilon) \varepsilon^2 \sqrt{\varepsilon^2 - 1} d\varepsilon \\ \frac{P(r)}{\varrho c^2} &= \frac{1}{3} \int_1^{\varepsilon_c} f(\varepsilon) \left(\sqrt{\varepsilon^2 - 1}\right)^3 d\varepsilon\end{aligned}\quad (2.37)$$

Se utilizan tres parámetros de escala: masa  $M$ , densidad  $\varrho$  y radio  $R$

$$M = 4\pi R^3 \varrho \quad ; \quad R^2 = \frac{c^2}{8\pi G_N \varrho} \quad ; \quad \varrho = (2s + 1) \frac{4\pi m^4 c^3}{h^3}$$

donde también se cumple  $1 = 2G_N M / R c^2$ .

Para optimizar el cálculo numérico se consideran los logaritmos del radio y la masa de la distribución, ya que éstos cubren varios ordenes de magnitud. También es conveniente definir una función de compacidad  $\psi(r)$  y su logaritmo

$$\xi = \ln(r/R) \quad ; \quad \psi(r) = \frac{M(r)}{M} \frac{R}{r} \quad ; \quad z = \ln(\psi(r)) \quad (2.38)$$

Tomando las ecuaciones del modelo RAR para la métrica (2.16) y la masa (2.13) y recuperando unidades ( $c \neq 1$ ), se pueden reescribir como

$$\begin{aligned}\frac{d\nu(r)}{dr} &= \frac{2 \left( \frac{4\pi G_N r^3 P(r)}{c^4} + \frac{G_N M(r)}{c^2} \right)}{r^2 \left( 1 - \frac{2G_N M(r)}{r c^2} \right)} \\ \frac{d\nu}{d(r/R)} &= \frac{R^2}{r^2} \left( \frac{r^3 P(r)}{R^3 \varrho c^2} + \frac{M(r)}{M} \right) \left( 1 - \frac{R M(r)}{r M} \right)^{-1} \\ \frac{r}{R} \frac{d\nu}{d(r/R)} &= \left( \frac{r^2 P(r)}{R^2 \varrho c^2} + \frac{M(r) R}{M r} \right) (1 - \psi(r))^{-1}\end{aligned}$$



$$\boxed{\frac{d\nu}{d\xi} = \left( e^{2\xi} \frac{P}{\varrho c^2} + e^z \right) (1 - e^z)^{-1}} \quad (2.39)$$

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \quad \rightarrow \quad \frac{d(M(r)/M)}{d(r/R)} = \frac{r^2 \rho(r)}{R^2 \varrho}$$

el lado izquierdo de la ecuación queda

$$\frac{d(M(r)/M)}{d(r/R)} = \left( \frac{r}{R} \frac{R}{r} \right) \frac{d(M(r)/M)}{d(r/R)} = \frac{1}{r} \frac{d(M(r)R/M)}{d\xi} = \frac{d\psi(r)}{d\xi} - \frac{M(r)R}{M} \frac{d(1/r)}{d\xi}$$

$$\frac{d\psi(r)}{d\xi} - \frac{M(r)R}{M} \frac{d(1/r)}{d\xi} = \frac{r^2 \rho(r)}{R^2 \varrho} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{r\psi(r)} \frac{d\psi(r)}{d\xi} - \frac{d(1/r)}{d\xi} = \frac{r\rho(r)}{R^2 \varrho \psi(r)}$$

$$\boxed{\frac{dz}{d\xi} = e^{(2\xi-z)} \frac{\rho(r)}{\varrho} - 1} \quad (2.40)$$

### Condiciones de Contorno

Para resolver este sistema de ecuaciones se necesita dar *a priori* las condiciones de contorno, estas son los valores de los parámetros del modelo en  $r \simeq 0$  (ya que  $r = 0$  no se puede manejar numéricamente)  $(\beta_0, \theta_0, W_0)$  y el valor de la masa de los fermiones. Además se tienen las relaciones

$$\alpha_0 = 1 + \beta_0 \theta_0 \quad ; \quad \varepsilon_0 = 1 + \beta_0 W_0 \quad (2.41)$$

El conjunto de parámetros de contorno se optimiza de manera de obtener el mejor ajuste en tres condiciones de borde para la Vía Láctea. Éstas corresponden a una condición para la masa acumulada en el radio del núcleo de la configuración  $M_c(r_c)$  (Becerra-Vergara et al. 2020) y dos condiciones para el halo de la galaxia, tomadas de Sofue 2013 para  $r = 12$  kpc, y de Gibbons et al. 2014 para  $r = 40$  kpc (ver tabla 2.1 y figura 2.2).

Usando la herramienta *solve\_ivp* de la librería *scipy.integrate* de *Python* (Scipy-Documentation [s.f.\(b\)](#)), se puede resolver este problema de valor inicial que usa el método de Runge-Kutta de orden 8.

Como las ecuaciones esenciales (2.39,2.40) no dependen explícitamente del valor

Radio [ $kpc$ ]	Masa acumulada [ $M_\odot$ ]
$r_c$	$3,5 \times 10^6$
12	$3,6 \times 10^{10}$
40	$2,3 \times 10^{11}$

Tabla 2.1: Condiciones de borde para la función de masa acumulada.

$\nu_0$ , este se puede determinar después de los cálculos, aplicando condiciones de contorno adecuadas. Debido a que la única solución con simetría esférica en vacío sólo puede ser la solución de Schwarzschild, las métricas 2.14 y 2.8 deben ser iguales en el radio límite de la configuración RAR,  $r_b$ . De esta condición se obtiene

$$e^{\nu_0} = \left( \frac{\beta(r_b)}{\beta_0} \right)^2 \left( 1 - \frac{2G_N M(r_b)}{r_b c^2} \right) \quad (2.42)$$

Las distribuciones RAR tienen un comportamiento de núcleo denso - halo diluido que se manifiesta en los perfiles de densidad y la curva de rotación circular calculadas respectivamente como

$$\rho(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{dM(r)}{dr} \quad (2.43)$$

$$v(r) = \sqrt{\frac{G_N M(r)}{r - \frac{2G_N M(r)}{c^2}}} \quad (2.44)$$

Estas curvas están representadas en la figura 2.3 y tienen en general tres regímenes físicos distintos:

- Un núcleo esférico de radio  $r_c$  definido por el primer máximo de la curva de rotación circular, de densidad casi constante en un régimen cuántico de degeneración de Fermi, donde los valores del parámetro de degeneración son muy positivos (ver figura 2.1).
- Una región intermedia con un pronunciado descenso de la densidad donde todavía los efectos cuánticos son importantes (ver la transición del parámetro de degeneración a valores negativos), seguido por un plateau extendido hasta alcanzar un valor  $r_h$  de escala del halo definido como el segundo máximo local de la curva de velocidad circular.

$mc^2[keV]$	$\theta_0$	$W_0$	$\beta_0$	$r_c[kpc]$
48	37,1	65,2	$1,0 \times 10^{-5}$	$6,0 \times 10^{-7}$
56	37,7	66,2	$1,2 \times 10^{-5}$	$4,2 \times 10^{-7}$
118	39,7	69,5	$8,0 \times 10^{-5}$	$5,8 \times 10^{-8}$
345	48,4	78,9	$5,1 \times 10^{-3}$	$1,3 \times 10^{-9}$

Tabla 2.2: Parámetros iniciales en  $r = 0$  para valores seleccionados de masas de los fermiones, y sus valores del radio del core  $r_c$ .

- La parte más externa corresponde a densidad Boltzmanniana con efectos relativistas despreciables (ver los valores muy negativos del parámetro de degeneración), mostrando un comportamiento  $\rho \propto r^{-2}$  debido al cutoff, que corresponde a un halo con condiciones de borde tales que  $\rho(r_b) \approx 0$  cuando la energía de escape  $\epsilon_c(r_b) \approx 0$ .

Existe un rango de valores de la energía de los fermiones que va desde  $mc^2 = 48-345$  keV, con sus correspondientes valores iniciales de los parámetros ( $\beta_0, \theta_0, W_0$ ) que permite explicar el halo de materia oscura de la galaxia, y a su vez, provee una alternativa al objeto compacto central Sgr A\* tradicionalmente asumido como un Agujero Negro de Schwarzschild.

Como se puede observar en la figura 2.3, cuanto mayor es la energía de los fermiones, más compacto es el núcleo degenerado. Para las configuraciones RAR, se busca que el núcleo compacto en su totalidad juegue el papel del objeto central en cualquier sistema ligado gravitacionalmente. Es por esto que el límite inferior de energía de los fermiones viene dado por la dinámica del cúmulo de estrellas S que orbitan alrededor de Sgr A\*. En particular, el radio del core para  $mc^2 = 48$  keV queda justo por dentro del periastro de la estrella S2 ( $r_c = r_{p(S2)} = 6 \times 10^{-4}$ pc).

El límite superior dado por  $mc^2 = 345$  keV corresponde a la última configuración estable antes de alcanzar una masa crítica para el colapso gravitacional, el cuál viene dado por el límite de Oppenheimer-Volkoff

$$M_c^{cri} \propto \frac{M_{pl}^3}{m^2} \quad (2.45)$$

con  $M_{pl}$  la masa de Planck. Este valor crítico fue tomado de (Argüelles, Ruffini et al. 2014).

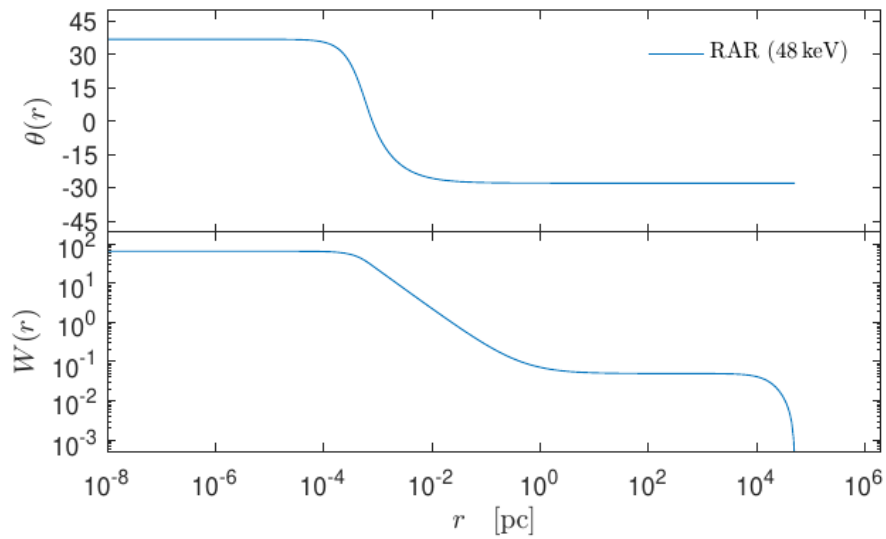


Figura 2.1: En el panel superior se muestra el parámetro de degeneración  $\theta$  como función de la distancia radial, para  $mc^2 = 48$  keV. Se pueden ver los tres comportamientos del modelo a lo largo de la galaxia: el núcleo degenerado con valores muy positivos de  $\theta$ , la transición de valores positivos a negativos donde todavía hay efectos cuánticos, y la región de valores muy negativos que corresponde al régimen Boltzmanniano.

El panel inferior corresponde al parámetro de corte  $W$  como función de la distancia radial y se puede apreciar el borde de la galaxia donde  $\epsilon_c \approx 0$ .

Fuente: Argüelles, Krut et al. [2018](#)

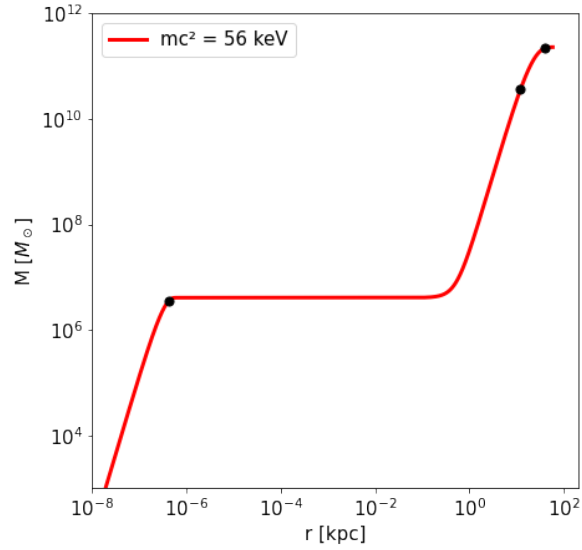


Figura 2.2: Masa acumulada del sistema como función del radio de la galaxia correspondiente a  $mc^2 = 56$  keV. Los puntos corresponden a las tres condiciones de borde a ajustar por el modelo, correspondientes a la tabla 2.1. El primer punto corresponde a la masa y radio del core de la configuración con valores  $M_c = 3,5 \times 10^6 M_\odot$  y  $r_c = 4,2 \times 10^{-7}$  kpc.

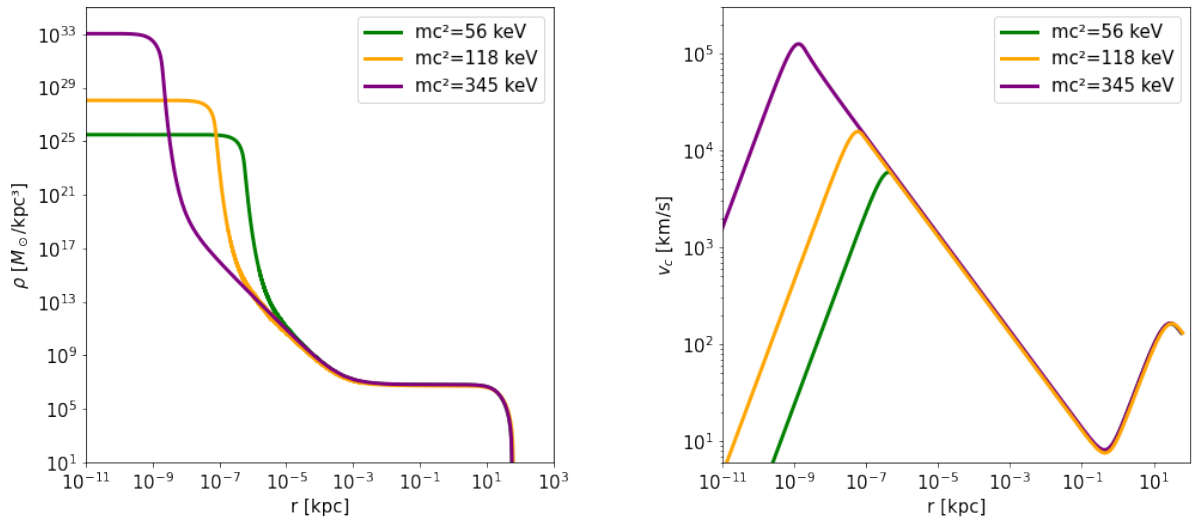


Figura 2.3: El panel izquierdo muestra el perfil de densidad de masa para distintas configuraciones de energías de los fermiones con  $mc^2 = 56, 118, 345$  keV, y las correspondientes velocidades circulares en el panel derecho.



### 3. Geodésicas en espacios con simetría esférica

En este capítulo se estudian las geodésicas de partículas masivas y no masivas en un espacio-tiempo con métrica estática y con simetría esférica. Además, se realiza un análisis de estabilidad de órbitas estudiando la energía potencial en Relatividad General para este tipo de métricas.

De forma general se puede escribir el intervalo espacio-temporal (tomando unidades naturales  $c = 1$ ) en coordenadas esféricas como

$$ds^2 = g_{00}(r)dt^2 - g_{11}(r)dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2(\theta)d\phi^2 \quad (3.1)$$

La ecuación de movimiento para una partícula de prueba en espacio curvo que sólo esta sujeta a la interacción gravitatoria, viene dada por la ecuación de la geodésica

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0 \quad (3.2)$$

donde  $x^\mu = (t, r, \theta, \phi)$  corresponde al tetravector posición de la partícula,  $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$  son los símbolos de Christoffel,  $\lambda$  es algún parámetro afín de la trayectoria y los índices  $\mu, \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$ .

Se tienen cuatro ecuaciones de movimiento (EM), una para cada valor de  $\mu$ . Calculando las componentes de los Christoffel se obtiene

$$0 = \frac{d^2t}{d\lambda^2} + \frac{g'_{00}(r)}{g_{00}(r)} \frac{dt}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} \quad (3.3)$$

$$0 = \frac{d^2r}{d\lambda^2} + \frac{g'_{00}(r)}{2g_{11}(r)} \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 + \frac{g'_{11}(r)}{2g_{11}(r)} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - \frac{r}{g_{11}(r)} \left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^2 - r \frac{\sin^2(\theta)}{g_{11}(r)} \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 \quad (3.4)$$

$$0 = \frac{d^2\theta}{d\lambda^2} + \frac{2}{r} \frac{d\theta}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} - \sin(\theta)\cos(\theta) \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 \quad (3.5)$$

$$0 = \frac{d^2\phi}{d\lambda^2} + \frac{2}{r} \frac{d\phi}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} + 2\cot(\theta) \frac{d\theta}{d\lambda} \frac{d\phi}{d\lambda} \quad (3.6)$$

donde las cantidades primadas corresponden a derivadas con respecto a la coordenada radial.

El sistema de ecuaciones se simplifica mucho al considerar las simetrías de este espacio-tiempo. Se tienen tres *Killing Vectors*  $K^\mu$  debido a la simetría esférica, y un cuarto debido a la invarianza ante traslaciones temporales.

Cada uno de los *Killing Vectors* lleva a una constante de movimiento para la partícula libre, y satisfacen la ecuación

$$K_\mu p^\mu = \text{constante} \quad (3.7)$$

donde  $p^\mu$  es el tetravector impulso de la partícula. Por lo tanto se tienen cuatro cantidades conservadas a lo largo de la geodésica, las cuales llevan a la conservación de la energía de la partícula debido a la invarianza temporal, y a la conservación de las componentes espaciales del momento angular debido a la invarianza rotacional. Dos de los *Killing Vectors* espaciales fijan la dirección del vector momento angular, lo que implica que la partícula sólo se mueve sobre un plano. Éste es posible elegir sin pérdida de generalidad tomando la coordenada  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

Los restantes dos vectores corresponden respectivamente a la energía y al módulo del momento angular

$$K^\mu = (1, 0, 0, 0) \quad ; \quad R^\mu = (0, 0, 0, 1) \quad (3.8)$$

Por lo tanto usando la ecuación 3.7 se obtienen dos constantes de movimiento denominadas  $E$  y  $L$

$$E = K_\mu p^\mu = g_{\mu\nu} K^\nu \frac{dx^\mu}{d\lambda} = g_{00}(r) \frac{dt}{d\lambda} \quad (3.9)$$

$$-L = R_\mu p^\mu = g_{\mu\nu} R^\nu \frac{dx^\mu}{d\lambda} = -r^2 \frac{d\phi}{d\lambda} \quad (3.10)$$

Es conveniente la elección del parámetro afín de la forma  $\lambda = m\tau$  para partículas masivas, donde  $m$  es la masa de la partícula y  $\tau$  su tiempo propio, de manera que  $E$  y  $L$  son la energía y momento angular de la partícula por unidad de masa. En el caso de partículas no masivas, conviene elegir el parámetro afín de manera que el tetravector velocidad e impulso coincidan  $p^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$ .

Además de éstas, se tiene otra constante de movimiento que surge de una integral primera de la ecuación de la geodésica 3.2

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = \epsilon \quad \left\{ \begin{array}{l} \epsilon = 1 \quad , \text{partículas masivas} \\ \epsilon = 0 \quad , \text{partículas no masivas} \end{array} \right. \quad (3.11)$$

escribiendo explícitamente la suma queda

$$\epsilon = g_{00}(r) \left( \frac{dt}{d\lambda} \right)^2 - g_{11}(r) \left( \frac{dr}{d\lambda} \right)^2 - r^2 \left( \frac{d\phi}{d\lambda} \right)^2 \quad (3.12)$$



El sistema de ecuaciones de movimiento 3.3-3.6 junto con 3.12 se reduce a

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dt}{d\lambda} = \frac{E}{g_{00}(r)} \end{array} \right. \quad (3.13)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2r}{d\lambda^2} = \frac{1}{2g_{11}(r)} \left[ -g'_{00}(r) \left( \frac{dt}{d\lambda} \right)^2 - g'_{11}(r) \left( \frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + 2r \left( \frac{d\phi}{d\lambda} \right)^2 \right] \end{array} \right. \quad (3.14)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{L}{r^2} \end{array} \right. \quad (3.15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon = g_{00}(r) \left( \frac{dt}{d\lambda} \right)^2 - g_{11}(r) \left( \frac{dr}{d\lambda} \right)^2 - r^2 \left( \frac{d\phi}{d\lambda} \right)^2 \end{array} \right. \quad (3.16)$$

### 3.1. Comportamiento radial y análisis de estabilidad

Reemplazando las ecuaciones 3.13 y 3.15 en 3.16 se obtiene

$$\epsilon = \frac{E^2}{g_{00}(r)} - g_{11}(r) \left( \frac{dr}{d\lambda} \right)^2 - \frac{L^2}{r^2} \quad (3.17)$$

y despejando la energía

$$E^2 = g_{00}(r)\epsilon + g_{00}(r)\frac{L^2}{r^2} + g_{00}(r)g_{11}(r) \left( \frac{dr}{d\lambda} \right)^2 \quad (3.18)$$

$$E^2 = g_{00}(r) \left( \epsilon + \frac{L^2}{r^2} \right) + g_{00}(r)g_{11}(r) \left( \frac{dr}{d\lambda} \right)^2 \quad (3.19)$$

La ecuación anterior sólo depende de  $r$  y de su derivada, y puede identificarse con la ecuación en la mecánica clásica de la energía por unidad de masa de una partícula bajo un potencial central, con energía potencial efectiva dada por el término

$$\mathcal{U}_{eff}^2(r) = g_{00}(r) \left( \epsilon + \frac{L^2}{r^2} \right) \quad (3.20)$$

Esta interpretación se clarifica si se aplica el Teorema de Birkhoff, considerando que a partir del borde de la configuración en  $r \geq r_b$ , la métrica solución (3.1) tiene

que ser igual a la solución de vacío de Schwarzschild dada por la ecuación 2.14. En este caso se cumple que  $g_{11}(r) = g_{00}^{-1}(r)$ , y la ecuación 3.19 queda

$$E^2 = \left(1 - \frac{2G_N M}{r}\right) \left(\epsilon + \frac{L^2}{r^2}\right) + \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 \quad (3.21)$$

Para  $r$  grandes, el potencial se reduce al potencial Newtoniano más una constante aditiva  $\mathcal{U}_{eff}(r) \rightarrow 1/2 - G_N M/r + L^2/2r^2$ , por lo tanto el miembro izquierdo de la ecuación anterior corresponde a la energía total de la partícula por unidad de masa, mientras que el lado derecho de la ecuación corresponde al potencial efectivo más la energía cinética por unidad de masa.

Con el uso de la función potencial se puede realizar un análisis cualitativo del movimiento y analizar la estabilidad de órbitas de partículas de prueba, de manera similar al problema del potencial central con la formulación Lagrangiana en mecánica clásica.

### 3.1.1. Caso Schwarzschild

Primero se estudió el potencial efectivo para una geometría de Schwarzschild al que se reserva la letra  $\mathcal{V}_{eff}(r)$  y viene dado por

$$\mathcal{V}_{eff}(r) = \sqrt{\left(1 - \frac{2G_N M}{r}\right) \left(\epsilon + \frac{L^2}{r^2}\right)} \quad (3.22)$$

En la figura 3.1 se encuentran representados potenciales para partículas masivas y no masivas, para distintos valores de momento angular fijo de la partícula.

El comportamiento de las órbitas puede ser evaluado al comparar los valores de  $E$  y  $\mathcal{V}_{eff}$ . El comportamiento general de la partícula será moverse bajo la acción de este potencial, hasta que alcance un *punto de retorno*  $r_{ret}$ , donde  $\mathcal{V}_{eff}(r_{ret}) = E$  y a partir del cual, empezará a moverse en sentido opuesto de  $r$ .

También puede ocurrir que no haya un punto de retorno a alcanzar, y la partícula continuará su movimiento en el mismo sentido creciente/decreciente de  $r$ . En otros casos el movimiento de la partícula será circular con  $r_0 = constante$ , esto ocurre para valores radiales donde se alcanza un valor máximo o mínimo de la función potencial  $\frac{d\mathcal{V}_{eff}(r_0)}{dr} = 0$ . Derivando 3.22 con respecto a  $r$

$$\frac{d\mathcal{V}_{eff}}{dr} = \frac{1}{2} \mathcal{V}_{eff}^{-1} \frac{d\mathcal{V}_{eff}^2}{dr} = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{d\mathcal{V}_{eff}^2}{dr} = 0 \quad (3.23)$$

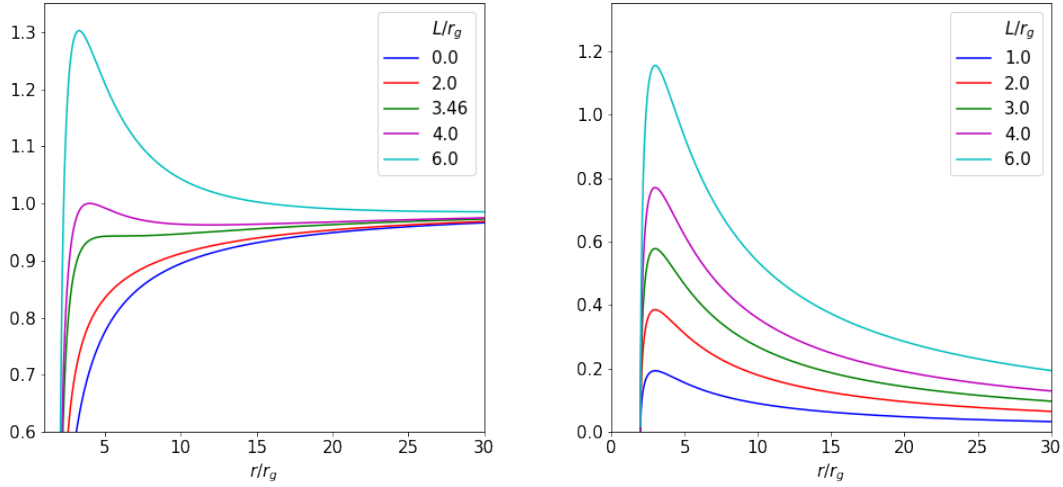


Figura 3.1: Potencial efectivo  $\mathcal{V}_{eff}(r)$  para distintos valores de momento angular orbital con una masa central de  $M = 4,075 \times 10^6 M_\odot$ . El panel izquierdo corresponde a partículas masivas, donde  $\epsilon = 1$ . Para curvas con  $L/r_g \geq 3,46$  existen dos órbitas circulares correspondientes al mínimo y al máximo del potencial, y éstas coinciden para  $L/r_g = 3,46$  (ISCO a  $r/r_g = 6$ ). El panel derecho corresponde a partículas sin masa donde  $\epsilon = 0$  y siempre existe máximo de potencial (Esfera de fotones a  $r/r_g = 3$ ) para cualquier valor de  $L$ .

$$\frac{d\mathcal{V}_{eff}^2}{dr} = \frac{2G_N M}{r^2} \left( \epsilon + \frac{L^2}{r^2} \right) - \left( 1 - \frac{2G_N M}{r} \right) \frac{2L^2}{r^3} = 0 \quad (3.24)$$

$$\epsilon \frac{G_N M}{r^2} - \frac{L^2}{r^3} + \frac{3G_N M L^2}{r^4} = 0 \quad (3.25)$$

$$\epsilon G_N M r^2 + 3G_N M L^2 - r L^2 = 0 \quad (3.26)$$

Las órbitas circulares serán estables para mínimos del potencial, esto es cuando  $d^2\mathcal{V}_{eff}(r_c)/dr^2 > 0$ , e inestables para máximos del potencial correspondientes a  $d^2\mathcal{V}_{eff}(r_c)/dr^2 < 0$ . Esto significa que una pequeña perturbación en el valor de la energía de la partícula implicará que el movimiento vuelva a ser circular para órbitas estables, mientras que no ocurrirá lo mismo para órbitas inestables.

Para el caso de partículas sin masa ( $\epsilon = 0$ ), usando la ecuación 3.26 se obtiene un único valor de  $r$  para órbita circular independiente del valor de  $L$ , y

expresándolo en términos del radio gravitacional  $r_g = \frac{G_N M}{c^2}$  se obtiene

$$r_0 = 3r_g \quad (3.27)$$

Ésta es la llamada *Esfera de fotones* y significa que un fotón puede siempre orbitar a ese radio, pero una pequeña perturbación causará que viaje inevitablemente a  $r = 0$  ó a  $r = \infty$ . Para partículas no masivas siempre hay una barrera de potencial (excepto para  $L = 0$  donde el potencial se anula idénticamente) y para un fotón viajando desde  $r = \infty$  la órbita tendrá un punto de máximo acercamiento hasta alcanzar el punto de retorno, y el fotón volverá a escapar a infinito. Sin embargo, fotones suficientemente energéticos (en comparación con su momento angular) serán capaces de pasar la barrera y serán capturados por el cuerpo masivo central en un movimiento espiral hasta el centro  $r = 0$ .

Para el caso de partículas masivas, nuevamente se tienen distintos regímenes dependiendo del valor del momento angular. Los valores de los radios de las órbitas circulares quedan dados por soluciones cuadráticas de la ecuación 3.26

$$r_0 = \frac{L^2 \pm \sqrt{L^4 - 12G_N^2 M^2 L^2}}{2G_N M} \quad (3.28)$$

Se presentan dos órbitas circulares por cada  $L$ , una estable y una inestable. A medida que decrece  $L$ , los dos valores de  $r_0$  se van acercando hasta coincidir cuando el discriminante de la ecuación se anula, resultando

$$r_{ISCO} = 6r_g \quad \text{para} \quad L_{ISCO} = \sqrt{12}r_g \quad (3.29)$$

y no hay soluciones para  $L < L_{ISCO}$ . Por lo tanto el valor  $r = r_{ISCO}$  corresponde al mínimo valor posible para una órbita circular (ISCO por sus siglas en inglés *Innermost Stable Circular Orbit*).

Además, puede haber órbitas no ligadas donde las partículas viajan desde infinito llegan al punto de retorno y vuelven a infinito; y órbitas ligadas donde la partícula oscila entre dos valores de  $r$  (órbitas elípticas). Análogamente, pueden existir órbitas donde las partículas viajan desde infinito y continúan hasta la singularidad  $r = 0$ , lo cual puede ocurrir si las partículas son suficientemente energéticas para pasar la barrera, o si  $L < L_{ISCO}$  donde directamente no hay barrera (ver figura 3.1).

### 3.1.2. Caso RAR

Una vez entendido el caso Schwarzschild, se procedió a estudiar los pozos de potenciales para las configuraciones RAR dados por la ecuación 3.20 para distintos valores de momento angular.

Al tratarse de soluciones semi-analíticas, no se puede encontrar una expresión análoga a 3.26 para determinar los puntos críticos de la función potencial.

Por lo tanto, se calcularon numéricamente, se calcularon los valores de  $r$  para las órbitas estables con la función *fmin* de la librería *scipy.optimize* de *Python*, que aproxima el mínimo de una función usando el método de Nelder-Mead (Scipy-Documentation s.f.(c)).

En la figura 3.2 están representados los potenciales para soluciones con energía de los fermiones de 56 keV, 345 keV y los valores mínimos correspondientes a cada curva. Se encuentra que para cada curva, existe una única órbita circular estable (mínimo del potencial) pero ninguna órbita circular inestable (máximo del potencial) a diferencia del caso Schwarzschild.

Las configuraciones RAR, al tratarse de soluciones regulares-no singulares, se asemejan más a las barreras de potencial en el problema kepleriano, que siempre presentan una barrera infinita provocando una dispersión de la partícula de prueba incidente, sin importar cuán energética sea.

Para el caso de partículas sin masa representado en la figura 3.3, a diferencia del caso Schwarzschild, la función potencial es siempre decreciente por ende no se tienen órbitas circulares ni una *Esfera de fotones*. Las partículas no masivas simplemente serán deflectadas al pasar por el centro dispersor.

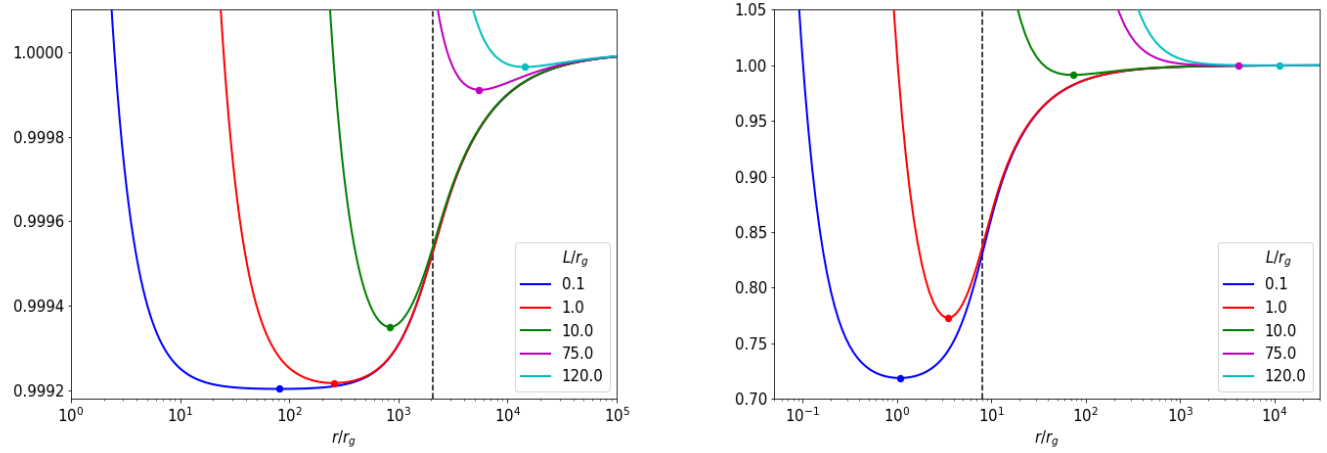


Figura 3.2: Potenciales efectivos RAR de partículas masivas para distintos valores de momento angular orbital. El panel izquierdo corresponde a la solución de  $mc^2 = 56$  keV y el derecho a  $mc^2 = 345$  keV. Dado un valor de  $L/r_g$  corresponde un único mínimo de la función potencial marcado con puntos de color correspondiente a cada curva. Las líneas punteadas verticales indican los radios del core a  $r_c = 2194r_g$  para  $mc^2 = 56$  keV y  $r_c = 8r_g$  para  $mc^2 = 345$  keV.

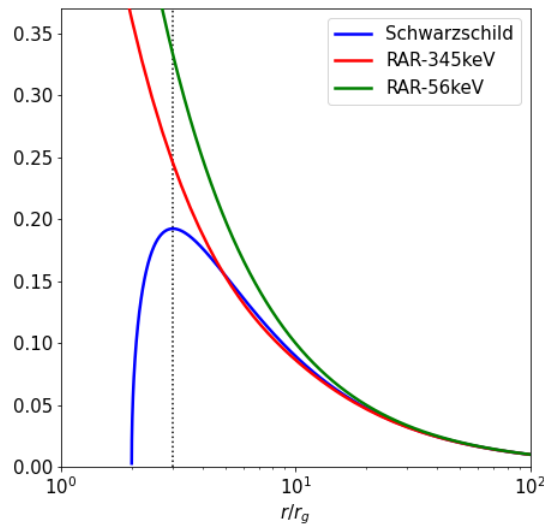


Figura 3.3: Potenciales efectivos RAR dados por 3.20 para partículas de prueba sin masa ( $\epsilon = 0$ ) para  $mc^2 = 56, 345$  keV, y un potencial Schwarzschild dado por 3.22 ( $\epsilon = 0$ ) para una masa central de  $M = 4,075 \times 10^6 M_\odot$ . Los valores de momento angular para las tres curvas corresponden a  $L/r_g = 1$ . La línea punteada vertical indica la *Esfera de fotones* en  $r = 3r_g$ .

### 3.2. Constantes de movimiento para órbitas acotadas

En el caso de partículas masivas en órbitas circulares o elípticas, se puede encontrar en términos de los parámetros orbitales y de la métrica las cantidades conservadas determinadas en la sección anterior. Éstas son la energía por unidad de masa y el momento angular por unidad de masa dados por 3.9 y 3.10.

En los casos donde la partícula de prueba alcanza alguno de los puntos de retorno  $r_{ret}$  (éstos son el periastro  $r_p$  y el apoastro  $r_a$  para órbitas elípticas; o en el caso de órbita circular, se tiene el radio circular  $r_0$ ) se cumple la condición de velocidad radial nula. Esto implica que el último término en 3.19 se anule. Con la elección del parámetro afín como su tiempo propio  $\lambda = m\tau$  se obtiene

$$\frac{dr_{ret}}{d\tau} = 0 \quad \longrightarrow \quad E^2 = g_{00}(r_{ret}) \left( 1 + \frac{L^2}{r_{ret}^2} \right) \quad (3.30)$$

donde la energía total de la partícula es puramente energía potencial gravitatoria, y toma el mismo valor en  $r_p$  y  $r_a$  para órbitas elípticas.

En el caso de órbitas elípticas, si se iguala la ecuación 3.30 en los puntos de retorno se puede obtener una ecuación para el momento angular

$$L^2 = \frac{g_{00}(r_a) - g_{00}(r_p)}{\frac{g_{00}(r_p)}{r_p^2} - \frac{g_{00}(r_a)}{r_a^2}} \quad (3.31)$$

y sustituyendo en 3.30 se obtiene una ecuación para la energía

$$E^2 = \frac{g_{00}(r_a)g_{00}(r_p)(r_a^2 - r_p^2)}{r_a^2g_{00}(r_p) - r_p^2g_{00}(r_a)} \quad (3.32)$$

En el caso de órbitas circulares se puede calcular el momento angular mediante la condición de mínimo del potencial

$$\left. \frac{d\mathcal{U}_{eff}(r)}{dr} \right|_{r_0} = 0 \quad ; \quad \mathcal{U}_{eff}(r) = \sqrt{g_{00}(r) \left( 1 + \frac{L^2}{r^2} \right)} \quad (3.33)$$

y se obtiene

$$L_c^2 = \frac{r_0^3 g'_{00}(r_0)}{2g_{00}(r_0) - r_0 g'_{00}(r_0)} \quad (3.34)$$

y reemplazando en 3.30 se determina la energía

$$E_c^2 = g_{00}(r_0) \left( 1 + \frac{r_0 g'_{00}(r_0)}{2g_{00}(r_0) - r_0 g'_{00}(r_0)} \right) \quad (3.35)$$

### 3.3. Precesión del periastro

La precesión del periastro refleja el hecho de que las órbitas acotadas no circulares en RG son elipses que no son perfectamente cerradas, y precesan describiendo un patrón del tipo roseta. Esto se debe a que la Relatividad General introduce una pequeña alteración en el período orbital, provocando una precesión.

Para obtener la forma de la órbita de una partícula de prueba masiva, es necesario encontrar una expresión para la coordenada radial en función de la coordenada angular  $\phi$ . Usando la ecuación 3.19 con  $\epsilon = 1$ , el tiempo propio como parámetro afín y usando que

$$\frac{dr}{d\tau} = \frac{dr}{d\phi} \frac{d\phi}{d\tau} \quad (3.36)$$

se obtiene

$$E^2 = g_{00}(r) \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right) + g_{00}(r)g_{11}(r) \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 \frac{L^2}{r^4} \quad (3.37)$$

Luego despejando  $dr/d\phi$  y reagrupando

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \frac{r^4 \left[E^2 - g_{00}(r) \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right)\right]}{g_{00}(r)g_{11}(r)L^2} \quad (3.38)$$

tal que

$$d\phi = \frac{L(g_{00}(r)g_{11}(r))^{1/2}}{r^2 \left[E^2 - g_{00}(r) \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right)\right]^{1/2}} dr \quad (3.39)$$

Por lo tanto, para un intervalo finito, el ángulo barrido por el radio vector desde  $r_p$  hasta  $r_a$  está dado por

$$\phi(r_a) - \phi(r_p) = \int_{r_p}^{r_a} \frac{L(g_{00}(r)g_{11}(r))^{1/2}}{r^2 \left[E^2 - g_{00}(r) \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right)\right]^{1/2}} dr \quad (3.40)$$

donde  $E$  y  $L$  vienen dados por 3.32 y 3.31.

Por la simetría de la órbita, el ángulo barrido en un período completo es dos veces  $|\phi(r_a) - \phi(r_p)|$ , y si la órbita fuese perfectamente cerrada el ángulo total barrido sería  $2\pi$ . Por lo tanto, el ángulo de precesión en cada revolución viene dado por

$$\Delta\phi = 2|\phi(r_a) - \phi(r_p)| - 2\pi \quad (3.41)$$



- Para el caso Schwarzschild donde  $g_{00}(r)$  y  $g_{11}(r)$  vienen dados por 2.14, siguiendo el análisis hecho en Weinberg 1972, se puede usar la expansión de Robertson para  $g_{00}(r)$  y  $g_{11}(r)$  que es un desarrollo en serie de potencias del parámetro  $G_N M/r$ . De esta manera, se encuentra el ángulo de precesión en términos de dos elementos orbitales, la excentricidad  $e$  y el semieje mayor  $a$  de la órbita

$$\Delta\phi = 6\pi \frac{G_N M}{a(1 - e^2)c^2} \quad (3.42)$$

Este ángulo tiene la particularidad de ser siempre positivo, por lo tanto la partícula precesa en el sentido del movimiento, sentido directo.

- Para el caso RAR es necesario resolver numéricamente la integral 3.40, la cual presenta divergencias en el integrando en los valores extremos  $r_p$  y  $r_a$  dificultando el cálculo.

Alternativamente a la resolución de esta integral, se puede calcular este ángulo de precesión resolviendo numéricamente las ecuaciones de movimiento 3.13-3.16 para una partícula masiva ( $\epsilon = 1$ ) cuya energía y momento angular vienen dados por 3.32 y 3.31, y usando el tiempo propio como parámetro afín.

Primero se llevó este sistema de ecuaciones a uno equivalente de 3 ecuaciones de primer orden. Introduciendo 3.13, 3.14 y 3.16 en 3.15 se obtuvo una ecuación de segundo orden para  $r$

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} = \frac{1}{2g_{11}(r)} \left[ \frac{g'_{11}(r)}{g_{11}(r)} + \frac{L^2}{r^2} \left( \frac{2}{r} + \frac{g'_{11}(r)}{g_{11}(r)} \right) - \frac{E^2}{g_{00}(r)} \left( \frac{g'_{00}(r)}{g_{00}(r)} + \frac{g'_{11}(r)}{g_{11}(r)} \right) \right] \quad (3.43)$$

y usando la definición de velocidad radial  $v = \frac{dr}{d\tau}$ , el sistema de ecuaciones se transformó en uno de primer orden

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\tau} = v \\ \frac{d\phi}{d\tau} = \frac{L}{r^2} \\ \frac{dv}{d\tau} = \frac{1}{2g_{11}(r)} \left[ \frac{g'_{11}(r)}{g_{11}(r)} + \frac{L^2}{r^2} \left( \frac{2}{r} + \frac{g'_{11}(r)}{g_{11}(r)} \right) - \frac{E^2}{g_{00}(r)} \left( \frac{g'_{00}(r)}{g_{00}(r)} + \frac{g'_{11}(r)}{g_{11}(r)} \right) \right] \end{cases} \quad (3.44)$$

este sistema queda completo al especificar tres condiciones iniciales para el problema  $[r_0, \phi_0, v_0]$ .

Usando la herramienta `solve_ivp` de la librería `scipy.integrate` de `Python` (Scipy-Documentation [s.f.\(b\)](#)), se puede resolver este problema de valor inicial que usa el método de Runge-Kutta de orden 8.

Así se obtuvo la solución de la geodésica, esto es, las funciones  $r(\tau)$ ,  $v(\tau)$  y  $\phi(\tau)$ . Para encontrar el ángulo de precesión, se buscan dos mínimos consecutivos de la función  $r(\tau)$  que corresponden a dos pasajes por el periastro. Numéricamente, estos valores mínimos de  $r(\tau)$  corresponden a dos valores del argumento de un arreglo vectorial, por lo tanto estos mismos valores del argumento se corresponden en el arreglo vectorial de  $\phi(\tau)$  y así se puede vincular los valores del ángulo azimutal en los pasajes por el periastro.

Finalmente, se obtiene el valor de la precesión a través de

$$\Delta\phi = |\phi(\tau_1) - \phi(\tau_2)| - 2\pi \quad (3.45)$$

### 3.4. Tercera Ley de Kepler en Relatividad General

En mecánica clásica, la tercera ley de Kepler relaciona el período orbital ( $T$ ) de una partícula de prueba en una cónica cerrada, con el semieje mayor de la órbita ( $a$ ). La relación viene dada por

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G_N M} = \text{constante} \quad (3.46)$$

donde  $M$  constituye la masa total encerrada dentro de la órbita y  $G_N$  es la constante de gravitación universal.

Se puede generalizar esta relación el marco de RG para partículas orbitando alrededor de un objeto central muy masivo y a distancias a las cuales la curvatura del espacio-tiempo no puede ser ignorada.

Haciendo uso de la ecuación de la geodésica derivada en la sección 3 para la coordenada radial que viene dada por [3.14](#)

$$\frac{d^2 r}{d\lambda^2} = \frac{1}{2g_{11}(r)} \left[ -g'_{00}(r) \left( \frac{dt}{d\lambda} \right)^2 - g'_{11}(r) \left( \frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + 2r \left( \frac{d\phi}{d\lambda} \right)^2 \right]$$

(recordando que  $c = 1$ ) para el caso de órbitas circulares con radio  $r_0$ , se simplifica la ecuación al anularse los términos de velocidad y aceleración radial  $\dot{r}_0 = \ddot{r}_0 = 0$ , obteniendo

$$g'_{00}(r_0) \left( \frac{dt}{d\lambda} \right)^2 = 2r_0 \left( \frac{d\phi}{d\lambda} \right)^2 \quad (3.47)$$

lo cual se simplifica a

$$\left(\frac{d\phi}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = \frac{g'_{00}(r_0)}{2r_0} \quad (3.48)$$

El término  $\frac{d\phi}{dt}$  corresponde a la velocidad angular  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , y se obtiene finalmente

$$\boxed{T^2 = \frac{8\pi^2 r_0}{g'_{00}(r_0)}} \quad (3.49)$$

En el caso de un espacio de Schwarzschild se tiene

$$g_{00}(r) = 1 - \frac{2G_N M}{r} \quad ; \quad g'_{00}(r) = \frac{2G_N M}{r^2} \quad (3.50)$$

y por lo tanto, se obtiene un resultado idéntico al caso clásico

$$\frac{T^2}{r_0^3} = \frac{4\pi^2}{G_N M} \quad (3.51)$$

Para otras métricas como en el caso RAR, la generalización de la Tercera Ley de Kepler, viene dada por la relación 3.49.



## 4. Cúmulo de estrellas S

El objeto compacto *Sagitario A\** en el centro de nuestra galaxia está rodeado por un pequeño cúmulo estelar, conocido como *S-Cluster*. El cúmulo fue estudiado por primera vez por el grupo alemán del instituto Max Planck de física Extraterrestre (Eckart et al. 1996) y luego por el grupo norteamericano de la Universidad de California (Ghez et al. 1998).

Debido a la naturaleza de las partículas de materia oscura que no interactúan electromagnéticamente con el medio, sólo a través de la interacción gravitatoria, es necesario inferirla de manera indirecta. Lo mismo ocurre con el paradigma de agujero negro al presentar este un horizonte de eventos, una manera indirecta de inferirlo es estudiando la materia bariónica ordinaria a su alrededor.

El cúmulo S contiene las estrellas más cercanas al centro galáctico (dentro del segundo de arco de distancia angular), y es por esto que son estudiadas como partículas de prueba para testear el potencial gravitatorio en el cual se mueven.

Un acontecimiento a destacar es el Premio Nobel de Física 2020, galardonado a Roger Penrose por su aporte a la teoría de RG y Agujeros Negros, y a Andrea Ghez y Reinhard Genzel por detectar un objeto compacto y muy masivo en el centro galáctico y proporcionar fuertes restricciones a la naturaleza de Sgr A\* infiriendo su masa central y posición, utilizando las estrellas del cúmulo S.

Estas estrellas constituyen un excelente objeto de investigación, ya que la dinámica de otros objetos como nubes de gas resulta más complicado de estudiar al no estar sujetas sólo a fuerzas gravitatorias. Por ejemplo al estudiar la postulada nube de gas G2, hace falta invocar una fuerza de frenado debido a la acreción de parte del objeto hacia el cuerpo central, en el paradigma de agujero negro (Gillissen et al. 2019). Sin embargo, este fenómeno también ha sido estudiado en el marco del modelo RAR donde aparece de manera natural el frenado de G2 al pasar por su periastro. Esto se debe a que, a diferencia del caso AN, G2 se mueve en el campo gravitatorio producido por un perfil de masa variable, y desde su periastro hasta su apoastro, cruza una región en la que la densidad de MO cae drásticamente (Becerra-Vergara et al. 2020).

El monitoreo de las estrellas del cúmulo ya supera los 25 años de imágenes, y además se cuenta con 13 años de datos espectroscópicos. Una cuestión todavía abierta es cómo se formó este cúmulo estelar, ya que por las grandes fuerzas tidales, estas estrellas se encuentran en una región no propicia para la formación estelar.

Debido a la gran densidad de polvo del disco galáctico en la dirección de Sgr A\*, la banda del espectro en la que conviene estudiar estas estrellas es la llamada

banda-K, en el infrarrojo cercano ( $2\mu m$ ). Algunos de los instrumentos usados son los dos Telescopios Keck de 10 metros en Hawaii y el interferómetro VLTI de cuatro telescopios de 8 metros en Chile.

La población de este cúmulo estelar viene dada por 35 estrellas de tipo temprano, identificadas espectroscópicamente con la línea del Bromo Br- $\gamma$ : (S1, S2, S4-S9, S11-S14, S18-S20, S22, S26, S31, S33, S37, S52, S54, S65-S67, S71, S72, S83, S86, S87, S92, S93, S95-S97); por 21 estrellas de tipo tardío identificadas con la banda CO: (S10, S17, S21, S24, S25, S27, S30, S32, S34, S35, S38, S45, S68, S70, S73, S76, S84, S85, S88, S89, S111).

Sus características espectrales sugieren que se trata de un cúmulo de estrellas jóvenes  $< 10$  Myr. Sin embargo, hay varias estrellas identificadas de las cuales no se conoce su tipo espectral (Gillessen et al. 2009).

Actualmente el número de órbitas conocidas supera las 40. Ocho de ellas, pertenecen a estrellas con orientaciones en sentido horario que son compatibles con el disco galáctico y se apartan de este entre  $9^\circ$  y  $21^\circ$  (Bartko et al. 2009). Además, presentan un rango de excentricidades no muy grandes, que van desde  $0,13 < e < 0,36$ . Estas son: S66, S67, S83, S87, S96, S97, S91 y R44. El resto de las estrellas que pertenecen al cúmulo tienen órbitas que están orientadas de manera aleatoria (Gillessen et al. 2017).

Seleccionando 17 estrellas, Gillessen et al. 2017 realizaron un ajuste *multi-star* para restringir la masa y distancia al centro galáctico, obteniendo

$$\begin{aligned} M &= 4,28 \times 10^6 M_\odot \\ R_0 &= 8,32 \text{ kpc} \end{aligned} \tag{4.1}$$

## 4.1. Estrella S2

La estrella S2 es considerada la más importante del cúmulo debido a sus propiedades físicas. Al ser la más brillante ( $m_K \sim 14$ ), se tiene un espectro de líneas bien conocidas de las cuales se pudo inferir una información dinámica completa. Sus características espectrales son las de una estrella joven enana de secuencia principal del tipo B, con masa  $\sim 15M_\odot$  y con una velocidad orbital inferida de  $220 \pm 40$  km/s (Ghez et al. 2003).

Su período orbital es de aproximadamente 16 años, y es la estrella más brillante para la cual se puede determinar la órbita, por lo tanto está menos propensa a errores por confusión con las estrellas de campo.

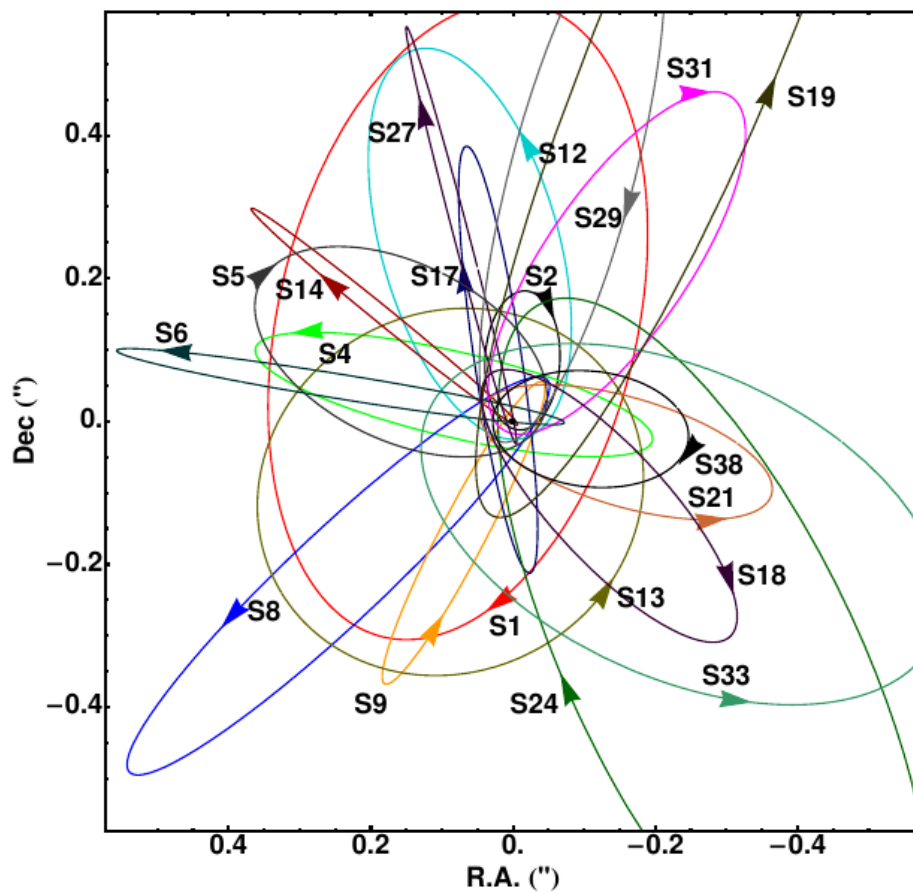


Figura 4.1: Órbitas en el plano del cielo de algunas de las estrellas del cúmulo S.  
Fuente: Gillessen et al. 2009

$a(^{\prime\prime})$	e	$i(^{\circ})$	$\Omega(^{\circ})$	$\omega(^{\circ})$	T(yr)	$m_K(mag)$	$v_p(km/s)$
0.1255	0.8839	134.18	226.94	65.51	16.0	14	7582 (0.025c)

Tabla 4.1: Parámetros orbitales de S2.  
Fuente: Gillessen et al. 2017

Con los parámetros orbitales dados en la tabla 4.1 y la distancia al centro galáctico  $R_0$  dado en 4.1, se obtienen las distancias mínima y máxima de la órbita elíptica de S2, periastro y apoastro respectivamente

$$\begin{aligned} r_p &= a(1 - e) = 0,6 \text{ mpc} \\ r_a &= a(1 + e) = 9,5 \text{ mpc} \end{aligned} \quad (4.2)$$

gracias a estos resultados es posible calcular la energía y momento angular orbital dados en la sección anterior por 3.32 y 3.31. Como éstos son modelo dependientes (dependen explícitamente de la métrica  $g_{00}(r)$ ), se obtienen valores ligeramente distintos para el momento angular y la energía al usar distintos modelos RAR y el modelo de agujero negro de Schwarzschild (ver figura 4.2).

Para estudiar la precesión de la estrella S2, se utiliza el sistema de ecuaciones de la geodésica desarrolladas en la sección anterior (3.44). Las condiciones iniciales apropiadas se eligen de manera que la estrella comience en el apoastro, esto es  $[r(\tau_0), \phi(\tau_0), v(\tau_0)] = [r_a, \pi, 0]$ , y se integra para un tiempo suficientemente largo, de manera que asegurar que la partícula recorre más de dos órbitas. Denotando dos tiempos consecutivos de pasaje por el periastro como  $\tau_1$  y  $\tau_2$ , la precesión viene dada por 3.45

$$\Delta\phi = |\phi(\tau_1) - \phi(\tau_2)| - 2\pi$$

En la figura 4.3 se representan geodésicas en el plano real de la órbita de S2 para dos modelos RAR de  $mc^2 = 56 \text{ keV}$ ,  $mc^2 = 118 \text{ keV}$  y para un agujero negro de Schwarzschild con masa central de  $M = 4,075 \times 10^6 M_{\odot}$ .

En el caso de soluciones RAR, el ángulo de precesión depende fuertemente de la masa de los fermiones incrementándose de manera no lineal desde soluciones negativas hacia las positivas, o sea desde precesión retrógrada hacia prógrada (Argüelles et al. 2022). Dado que el núcleo cuántico de MO está rodeado por una distribución extendida de materia, hay dos efectos que compiten en el modelo RAR. La precesión en sentido directo causada por el potencial gravitatorio del núcleo de MO dentro de la órbita de la partícula de prueba y la precesión retrógrada causada por el potencial gravitatorio generado por la materia extendida entre



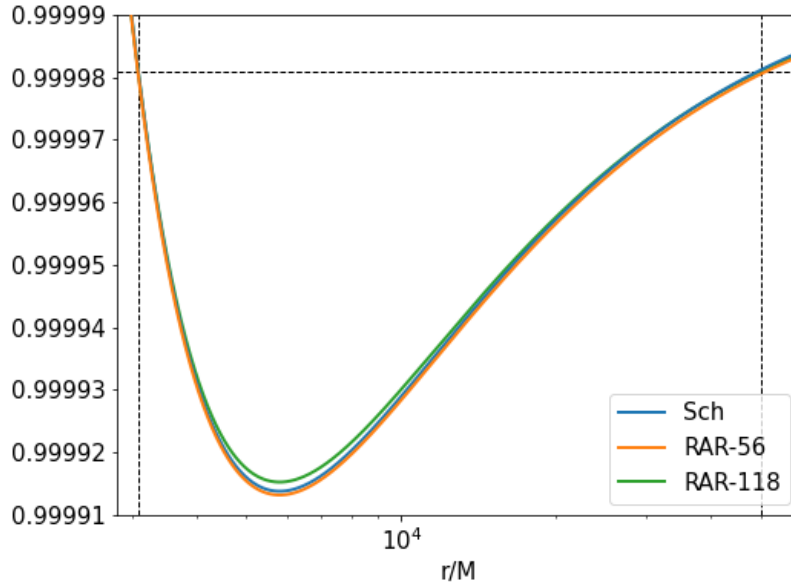


Figura 4.2: Potenciales efectivos para momentos angulares de la estrella S2 calculados con 3.31 y 4.2 para una solución de Schwarzschild con masa central de  $M = 4,075 \times 10^6 M_\odot$  que da un  $L/r_g = 76,1783$ . Dos soluciones RAR para masa de los fermiones de  $mc^2 = 56$  keV con  $L/r_g = 76,1469$ , y  $mc^2 = 118$  keV con  $L/r_g = 75,2528$ . Imponiendo una órbita acotada dentro de los valores de periastro y apoastro (líneas punteadas verticales), que corresponden a  $r_p/r_g = 3078,01$  y  $r_a/r_g = 50047,9$  implican un único valor de la energía (línea punteada horizontal).

el periastro  $r_p$  y el apoastro  $r_a$ , dada por

$$\Delta M_{MO} = \int_{r_p}^{r_a} 4\pi r^2 \rho(r) dr$$

Esta combinación de efectos tiene como resultado tres posibilidades:

(i) Precesión directa ( $\Delta\phi > 0$ ) donde el efecto debido a la componente de masa extendida no alcanza a compensar el efecto del núcleo compacto. (ii) No hay precesión ( $\Delta\phi = 0$ ), cuando los dos efectos se equilibran completamente. (iii) Precesión retrograda ( $\Delta\phi < 0$ ) cuando la fracción de masa  $\frac{\Delta M_{MO}}{M_c}$  entre el periastro y apoastro de la partícula es lo suficientemente grande. Esto sucede cuando la masa de los fermiones es chica, por lo tanto la extensión del núcleo es grande, y consecuentemente la fracción de masa  $\frac{\Delta M_{MO}}{M_c}$  es grande (Argüelles et al. 2022).

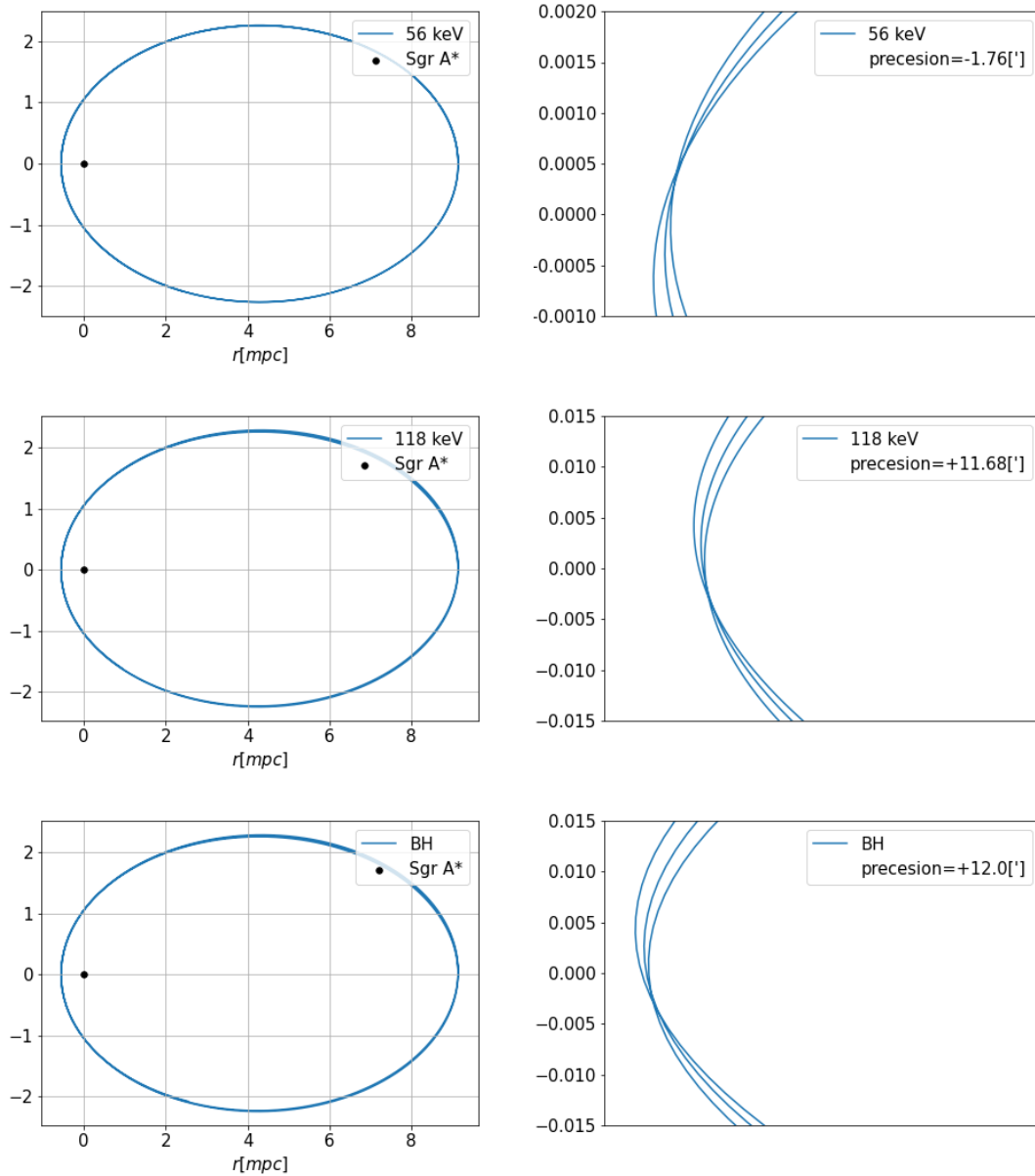


Figura 4.3: Geodésicas en el plano real de la órbita de la estrella S2 para dos modelos RAR de  $mc^2 = 56$  keV en la primera fila (precesión retrógrada),  $mc^2 = 118$  keV en la segunda fila (precesión directa) y una solución de Schwarzschild con  $M = 4,075 \times 10^6 M_\odot$  en la última fila (precesión directa). La columna derecha corresponde a gráficos donde se ve ampliado el punto de pasaje por el periastró y los respectivos ángulos de precesión por revolución.

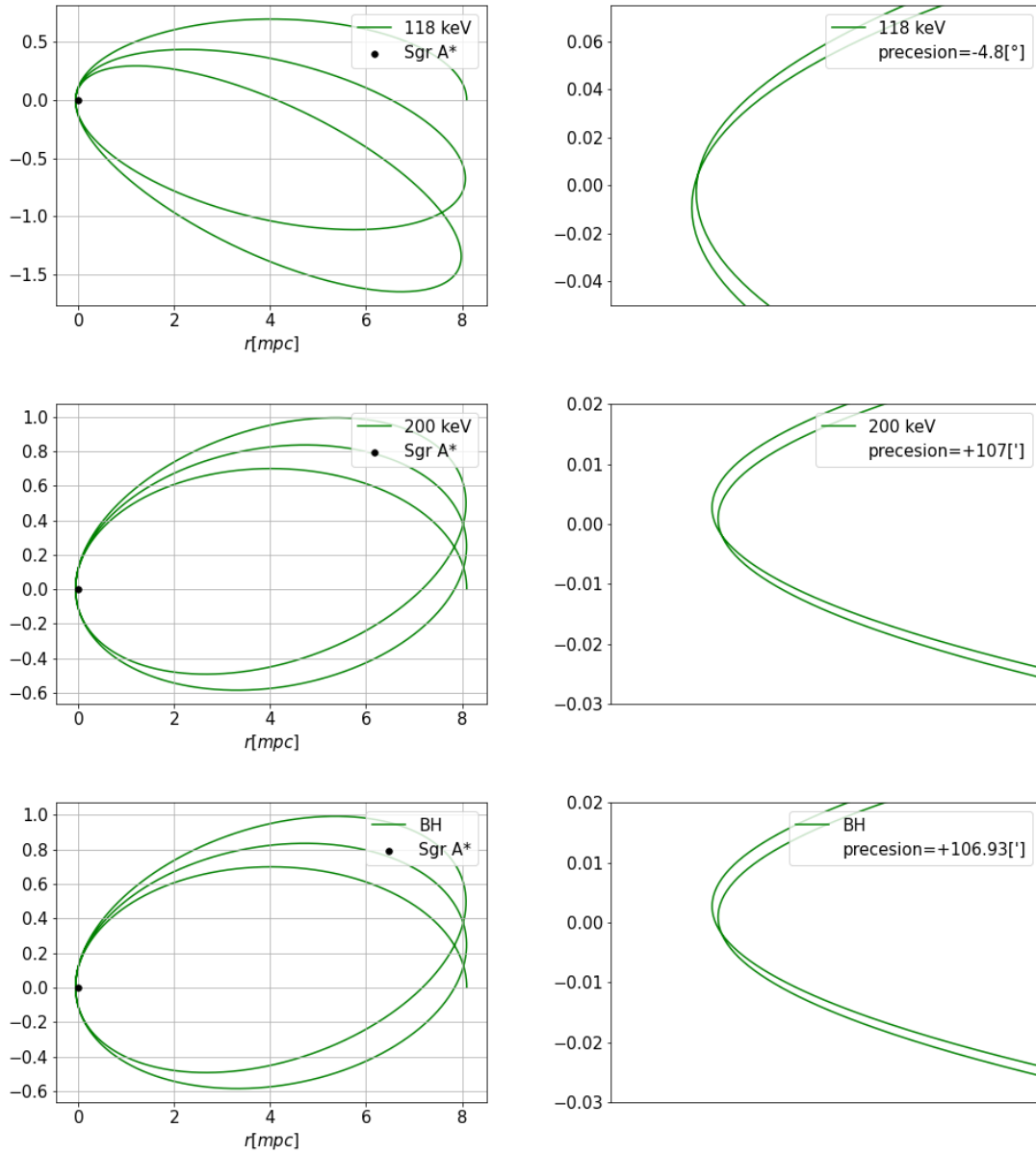


Figura 4.4: Geodésicas en el plano real de la órbita de la estrella S4714 para dos modelos RAR de  $mc^2 = 118$  keV en la primera fila (precesión retrógrada),  $mc^2 = 200$  keV en la segunda fila (precesión directa) y una solución de Schwarzschild con  $M = 4,075 \times 10^6 M_\odot$  en la última fila (precesión directa). La columna derecha corresponde a gráficos donde se ve ampliado el punto de pasaje por el periastró y los respectivos ángulos de precesión por revolución.

$a(^{\prime\prime})$	e	$i(^{\circ})$	$\Omega(^{\circ})$	$\omega(^{\circ})$	T(yr)	$m_K(mag)$	$v_p(km/s)$
0.1008	0.985	127.70	129.28	357.25	12.0	17.7	23928 (0.08c)

Tabla 4.2: Parámetros orbitales de S4714.  
Fuente: Peißker et al. 2020

## 4.2. Estrella S4714

Recientemente se han identificado un grupo de estrellas débiles, con períodos orbitales menores al de la estrella S2 y órbitas aún más excéntricas (Peißker et al. 2020).

De las cinco estrellas S4711, S4712, S4713, S4714 y S4715, la más destacada es S4714 con un período orbital de  $\sim 12$  yr y una excentricidad de  $e = 0,985$ . Estas estrellas son buenas candidatas para testear la Relatividad General en el centro de nuestra galaxia, ya que tienen períodos orbitales muy cortos a comparación con otras estrellas del cúmulo S, por ejemplo S4711 es la estrella con el período orbital más corto registrado  $\sim 7,6$  yr (Peißker et al. 2020). Además son estrellas débiles que sólo son visibles durante un período acotado de tiempo ( $\sim 4$  yr en el caso de S4714), ya que se mezclan con otras estrellas del cúmulo.

De la misma manera que para S2, se calcula el ángulo de precesión para la estrella S4714 para distintas soluciones RAR de  $mc^2 = 118$  keV,  $mc^2 = 200$  keV y el modelo de AN con  $M = 4,075 \times 10^6 M_{\odot}$ . Las condiciones iniciales para el cálculo numérico son tales que la partícula de prueba comience en el apoastro  $[r(\tau_0), \phi(\tau_0), v(\tau_0)] = [r_a, \pi, 0]$ . En la figura 4.4 se calcularon órbitas para dos configuraciones RAR de  $mc^2 = 118, 200$  keV y también para el modelo de AN de Schwarzschild con una masa central de  $M = 4,075 \times 10^6 M_{\odot}$ .

Una condición necesaria para las soluciones RAR, es que el núcleo degenerado de MO se encuentre totalmente contenido dentro de las órbitas estelares del cúmulo S, de manera de poder explicar su dinámica. Considerando la estrella S2 la cota mínima para la energía de los fermiones es  $mc^2 = 48$  keV, de manera que el radio del núcleo queda contenido dentro del periaastro de S2 ( $r_c < r_p$ ). Con la detección de este nuevo grupo de estrellas débiles S4711-S4715, de las cuales dos de ellas tienen periastrós más chicos que el de S2, el rango de energía de los fermiones de MO se reduce aún más. Cuanto más grande la energía de los fermiones, más compacto es el núcleo de MO. La estrella de menor periaastro del cúmulo S actualmente es S4714 con  $r_p = 0,06$  mpc, y consecuentemente la compacidad del núcleo RAR de MO queda comprendido entre energías de los fermiones de  $mc^2 = 118$  keV con  $r_c = 0,059$  mpc hasta  $mc^2 = 345$  keV con  $r_c = 0,0013$  mpc.

### 4.3. Hotspots

Además del monitoreo constante de estrellas en el centro galáctico, se cuenta con observaciones de *llamaradas* (*flares* en inglés) de la radiofuente Sgr A\*. Estos eventos (denominados “*hotspots*” por Gravity-Collaboration 2018) se creen de origen no térmico, posiblemente de partículas aceleradas en regiones turbulentas, choques o en eventos de reconexión magnética de un disco de acreción caliente y magnetizado.

Una de las cuestiones más interesantes de estos *hotspots*, es que se detectaron muy cerca de la ISCO. Los distintos modelos que se han utilizado para ajustar órbitas circulares van desde  $r_0 \sim 7 - 20r_g$  y con períodos orbitales de  $T \sim 40 - 65$  min (Gravity-Collaboration 2018; Gravity-Collaboration 2020; Matsumoto et al. 2020). En contraste con las estrellas del cúmulo S, con periastrós  $r_p \gtrsim 10^2 r_g$  y períodos  $T \sim \text{yr}$ , estos eventos pueden llegar a ser mejores objetos de estudio para testear la naturaleza de Sgr A\*.

En 2018 se registró con el instrumento GRAVITY del Telescopio VLT, el movimiento del centro del flujo del *hotspot* y se ajustó su trayectoria con una órbita circular Kepleriana. Se encontró que el mejor ajuste tiene un radio circular de  $r_0 = 7r_g$  con un período de  $T \simeq 40$  min (ver figura 4.5a, Gravity-Collaboration 2018). Sin embargo, este ajuste queda completamente dentro de las ubicaciones observadas de los *hotspots*. El problema de ajustar estas órbitas keplerianas es que el radio circular en un espacio-tiempo de Schwarzschild, está relacionado con el período de la órbita mediante la generalización de la tercera ley de Kepler, que coincide con la de la mecánica newtoniana dadas en 3.49, 3.51. Para poder reproducir el período observado de  $T \simeq 40$  min, haciendo uso de 3.51

$$\frac{T^2}{r_0^3} = \frac{4\pi^2}{G_N M}$$

el radio circular tiene que ser  $r_0 = 7r_g$  (con masa central  $M = 4,15 \times 10^6 M_\odot$ ), que es menor que la dispersión de los *hotspots* observados en el cielo (ver figura 4.5b, Matsumoto et al. 2020).

Una generalización de las órbitas keplerianas son las geodésicas, que sólo tienen en cuenta la interacción gravitatoria.

Para el caso de soluciones RAR, se ajustó el período de  $T \simeq 40$  min para energías de los fermiones de  $mc^2 = 300, 345$  keV usando la generalización de la tercera ley de Kepler (ec. 3.49)

$$T^2 = \frac{8\pi^2 r_0}{g'_{00}(r_0)}$$

$r_0[r_g]$	$T[min]$	$M[M_\odot]$	$mc^2[keV]$
6	134	$2,2 \times 10^5$	300
7	142	$3,4 \times 10^5$	300
12.5	160	$1,5 \times 10^6$	300
6	40.5	$2,7 \times 10^6$	345
7	44	$3,4 \times 10^6$	345
12.5	82.5	$5,2 \times 10^6$	345
7	40	$4,15 \times 10^6$	BH

Tabla 4.3: Períodos de órbitas circulares ajustados con la Tercera Ley de Kepler en RG (3.49) donde  $M$  corresponde a la masa total encerrada dentro de la órbita. Se calculó para dos soluciones RAR de  $mc^2 = 300, 345$  keV dando como único valor de *input* el radio circular  $r_0$ . La última fila corresponde a la solución de Schwarzschild con valores de *input* la masa central del AN y el período observado de los *hotspots*.

Los resultados vienen dados en la tabla 4.3. Utilizando este observable, la solución de MO comparable con el caso de AN de Schwarzschild es la de compacidad crítica con  $mc^2 = 345$  keV. Los resultados para el caso RAR predicen un radio circular y una cantidad de masa central menores que los ajustados por Gravity-Collaboration 2018 para el período observado de  $T \simeq 40$  min. Estas geodésicas se encuentran dentro del núcleo de MO, con radio  $r_c = 8r_g$ . Tanto el modelo RAR como el modelo de AN de Schwarzschild, presentan problemas para describir estos *hotspots*.

Otros modelos han sido propuestos por Matsumoto et al. 2020, donde consideraron modelos cinemáticos de origen puramente gravitatorio, como el de órbitas circulares keplerianas y geodésicas marginalmente ligadas ( $E = 1$ ) al AN obteniendo resultados similares, donde el mejor ajuste también se encuentra interior a las observaciones de los *hotspots*. Además utilizaron modelos de origen magnetohidrodinámicos, obteniendo mejores resultados. Estos modelos de patrones ajustan un radio circular de  $r_0 = 12,5r_g$  y velocidad de rotación de  $\simeq 0,76 c$ , donde la trayectoria sí pasa por los puntos observados. Este movimiento super-kepleriano podría ser el movimiento patrón de una perturbación magnetohidrodinámica en un gas fuertemente magnetizado.

Lamentablemente, los datos observacionales de 2018 (Gravity-Collaboration 2018) tienen barras de error considerables, y con los modelos estudiados se obtienen radios orbitales más chicos y períodos más grandes, que los que corresponderían al tamaño observado en el plano del cielo. Para mejorar estos ajustes orbitales, se podrían combinar múltiples *hotspots* observados con la misma precisión astrométrica, a distintos tiempos como si pertenecieran al mismo fenómeno

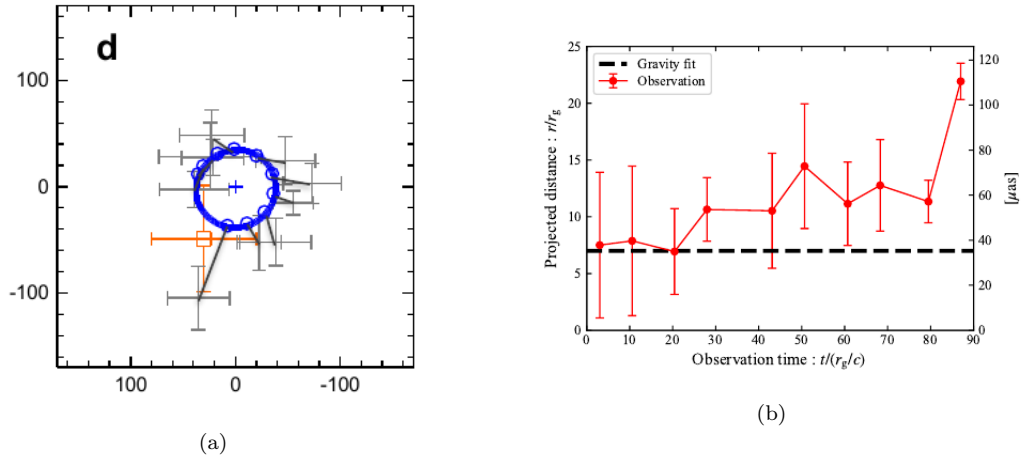


Figura 4.5: Panel izquierdo: Órbita proyectada en el plano del cielo de los *hotspots* registrados el 22 de Julio de 2018. La curva azul representa el mejor ajuste de una órbita circular kepleriana con  $r_0 = 7,02r_g$  ( $M = 4,14 \times 10^6 M_\odot$ ) y con una inclinación de  $i = 160^\circ$ . El cuadrado naranja corresponde a la posición astrométrica del centro de masa calculado con la órbita de la estrella S2. Fuente: Gravity-Collaboration 2018

Panel derecho: Distancias proyectadas de las ubicaciones de los *hotspots* hasta el mejor ajuste dado en (a). Es evidente que muchas de las observaciones están por fuera de la órbita circular kepleriana a  $r_0 = 7r_g$ .

Fuente: Matsumoto et al. 2020

orbitando Sgr A\* y así restringir las incertezas de los parámetros orbitales. Otro camino para mejorar las observaciones es aumentar la precisión astrométrica de las mediciones de cada uno de los *hotspot* con futuras observaciones (Gravity-Collaboration 2020).





## 5. Energía de ligadura gravitacional

Existen distintos tipos de energía de ligadura (Binding Energy) que corresponden a diferentes escalas de distancia y escalas energéticas. Se define la energía de ligadura gravitacional como la energía mínima que debe ganar un cuerpo en un estado ligado gravitacionalmente para pasar a estar en un estado libre, o sea a no estar bajo la influencia de un potencial gravitatorio.

Se realizó el estudio de esta energía de ligadura gravitacional en el caso de discos de acreción orbitando alrededor de un cuerpo central masivo y compacto. El gas que conforma el disco de acreción se acomoda en órbitas circulares alrededor del objeto central. Sin embargo, las velocidades angulares de órbitas adyacentes son diferentes, lo que genera una fuerza viscosa y que el gas lentamente pierda momento angular transfiriéndolo desde las partes más internas del disco hacia las regiones exteriores. Debido a esta fricción, el gas se calienta y emite el grueso de la radiación en rayos X. Eventualmente, cuando el gas ha perdido suficiente momento angular como para no poder seguir en una órbita circular estable, entra rápidamente en un movimiento espiral hacia el objeto central.

La acreción es un proceso que puede ser considerablemente más eficiente como fuente de energía cósmica que muchos otros mecanismos comúnmente considerados en astrofísica, por ejemplo la fusión nuclear de Hidrógeno en Helio con una eficiencia de  $\epsilon_{nuc} = 0,007$ .

Se realizó una estimación de la eficiencia de la radiación de energía en un disco de acreción. Ésta viene dada por la fracción de la diferencia de energía de una partícula de prueba cuando se mueve desde infinito (donde su energía es la energía en reposo), hasta una órbita circular cuya energía viene dada por la ecuación 3.35, dividido su energía en infinito

$$\epsilon = \frac{mc^2 - E_c}{mc^2} \quad (5.1)$$

Esta eficiencia de energía gravitacional representa la fracción de energía en reposo que una partícula de prueba en un disco de acreción es capaz de convertir en energía radiada.

- ⊛ En el caso de un agujero negro de Schwarzschild, la eficiencia máxima se alcanza en la órbita circular más interna (ISCO) en  $r_{ISCO} = 6r_g$  (con  $r_g = G_N M/c^2$  y  $M = 4,075 \times 10^6 M_\odot$ ), donde su energía vale  $E_{ISCO} = \sqrt{\frac{8}{9}} mc^2$ . Esto ocurre porque en las órbitas circulares como el potencial efectivo  $\mathcal{V}_{eff}(r)$

coincide con la energía  $E_c$ , y se encuentran en el mínimo de la curva potencial, entonces la órbita circular menos energética (más ligada gravitacionalmente) ocurre en la ISCO, incrementando la diferencia con la energía en reposo de la partícula (ver figura 3.1).

Por lo tanto, la máxima fracción de energía en reposo que es convertida en calor viene dada por

$$\epsilon_{Sch} = \frac{mc^2 - \sqrt{\frac{8}{9}}mc^2}{mc^2} = 1 - \sqrt{\frac{8}{9}} = 5,7 \times 10^{-2} \quad (5.2)$$

Una partícula de prueba en la ISCO puede convertir el 5,7% de su energía en reposo, en energía radiada. En la figura 5.1a se representa la energía de ligadura gravitacional para órbitas circulares en una geometría de Schwarzschild en función del radio, calculada con 5.1. Se puede ver como el máximo de energía de ligadura se da en la última órbita circular en  $r_{ISCO}$ .

- ⊗ Para el caso de un agujero negro de Kerr (el cuál se caracteriza por su masa  $M$  y un parámetro de rotación relacionado con el momento angular  $J$ ,  $a = \frac{J}{Mc}$ ), esta energía de ligadura es significativamente mayor. La máxima eficiencia se da para un AN de Kerr *extremo* cuando  $a_{max} = \frac{G_N M}{c^2}$  para la órbita circular más interna y co-rotante con el AN, a un radio  $r = \frac{G_N M}{c^2}$  y cuya energía vale  $E_c = 1/\sqrt{3}mc^2$ . Por lo tanto, la fracción de energía en reposo que es convertida en calor viene dada por

$$\epsilon_{Kerr} = \frac{mc^2 - \frac{1}{\sqrt{3}}mc^2}{mc^2} = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} = 4,23 \times 10^{-1} \quad (5.3)$$

Un disco de acreción girando en el mismo sentido que la rotación del AN en la ISCO ( $r_{ISCO} = r_g$ ), puede convertir casi la mitad de su energía en reposo en radiación (42,3%).

Sin embargo, para un AN de Kerr astrofísico realista, el proceso de acreción está limitado por la propia radiación del gas, que se lleva momento angular. Por lo tanto, se tiene como valor del parámetro de rotación uno muy próximo al valor extremo  $a = 0,998a_{max}$ , lo cual lleva a una eficiencia máxima de  $\epsilon_K = 3,2 \times 10^{-1}$  (32%) (Hobson et al. 2006).

- ⊗ Para soluciones RAR, el cálculo de la eficiencia de energía radiada dado por 5.1 se encuentra en función de las soluciones numéricas de las componente de la métrica  $g_{00}(r)$  y su derivada  $g'_{00}(r)$ .

Para estas configuraciones, la máxima eficiencia de energía radiada se da para radios circulares interiores al radio del núcleo llamados  $r_{min}$  y para los cuales satura el valor de la energía de ligadura, que dependerá de la energía de los fermiones. Esto es posible ya que se modela a toda la distribución de MO fermionica como transparente, es decir que existen geodésicas permitidas dentro y fuera del núcleo de MO tanto para partículas masivas como para no masivas.

Este radio interior se calculó buscando el valor para el cual el error relativo en la energía de ligadura en  $r_0 = 0$  es menor al 1% (ver figura 5.1)

$$\frac{|E_b(r_0) - E_b(r_{min})|}{E_b(r_0)} \leq 0,01 \quad (5.4)$$

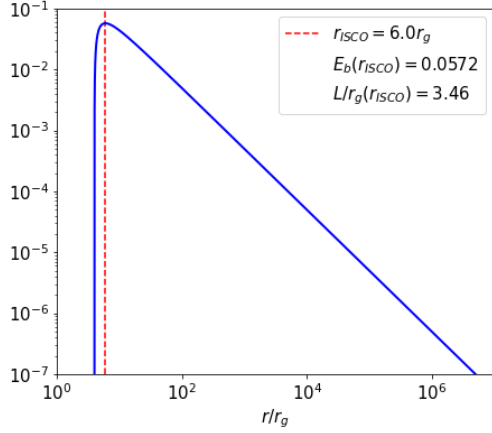
En las figuras 5.1b, 5.1c y 5.1d se observa la energía de ligadura para tres configuraciones RAR de  $mc^2 = 56, 118, 345$  keV respectivamente. Esta función  $E_b(r_0)$  resulta monótonamente decreciente, lo que es de esperar ya que al analizar la figura 3.2 de potenciales efectivos  $\mathcal{U}_{eff}(r)$  para distintos valores de momento angular, se ve como los mínimos de las curvas potenciales (correspondientes a las órbitas circulares para las cuales calculamos la  $E_b(r_0)$ ), son cada vez más pronunciados y centrados en radios más internos, hasta saturar en el valor de  $L/r_g = 0$ . Por lo tanto la diferencia en energía en reposo menos energía potencial se vuelve mayor a radios pequeños.

El rango en eficiencia máxima para soluciones RAR, comprende desde un  $\epsilon = 8 \times 10^{-4}$  (0,08%) para  $mc^2 = 56$  keV, hasta  $\epsilon = 2,85 \times 10^{-1}$  (28,5%) para  $mc^2 = 345$  keV de energía gravitacional convertida en radiación al acretar el gas.

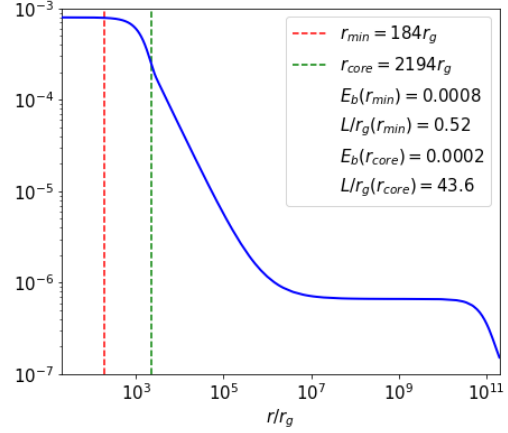
Estos resultados son comparables con las eficiencias de acreción sobre estrellas compactas, que vienen dadas por (Shapiro et al. 1983)

$$\begin{aligned} \epsilon_{WD} &\sim 10^{-4} && \text{para Enanas Blancas} \\ \epsilon_{NS} &\sim 10^{-1} && \text{para Estrellas de Neutrones} \end{aligned} \quad (5.5)$$

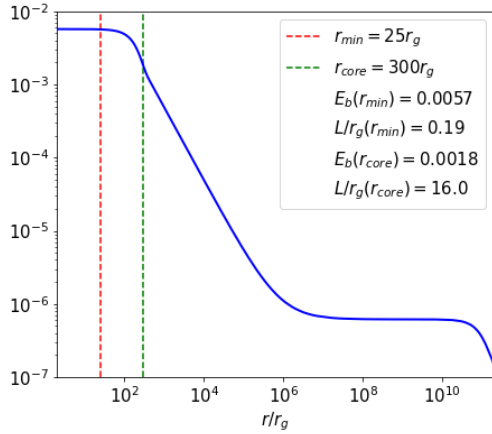
Estas eficiencias resultan del mismo orden para la acreción sobre la configuración RAR de  $mc^2 = 56$  keV y sobre estrellas Enanas Blancas, mientras que para el caso RAR crítico de  $mc^2 = 345$  keV las eficiencias son del mismo orden de magnitud en los casos de acreción sobre Estrellas de Neutrones y sobre un AN de Kerr astrofísico.



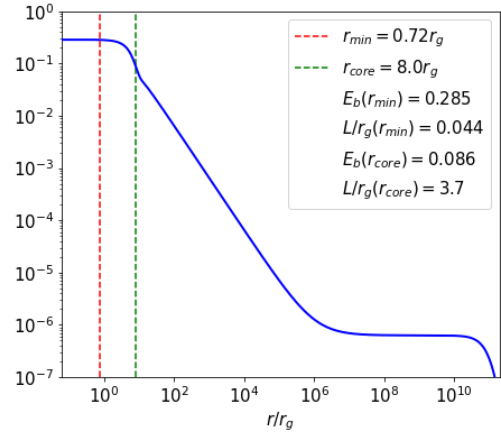
(a) Schwarzschild BH con  $M = 4,075 \times 10^6 M_\odot$



(b) Configuración RAR con  $mc^2 = 56$  keV



(c) Configuración RAR con  $mc^2 = 118$  keV



(d) Configuración RAR con  $mc^2 = 345$  keV

Figura 5.1: Energía de ligadura gravitacional para un agujero negro de Schwarzschild con  $M = 4,075 \times 10^6 M_\odot$  en el panel (a). La máxima eficiencia de conversión de energía gravitacional en radiación viene dada para la *ISCO* marcada con una línea vertical roja, donde  $r_g$  corresponde al radio gravitacional dado por  $r_g = \frac{G_N M}{c^2}$ . Los paneles (b), (c) y (d) corresponden a la energía de ligadura para tres soluciones RAR con energías de  $mc^2 = 56, 118, 345$  keV respectivamente. En cada una de las leyendas aparecen los valores de los radios del núcleo en línea punteada verde y los valores de los radios mínimos donde la energía de ligadura satura en su valor máximo en línea punteada roja. Además se encuentran los valores de las eficiencias máximas dadas en  $r_{min}$  y las eficiencias en el radio del núcleo en  $r_{core}$ , con los respectivos valores de los momentos angulares adimensionales para órbitas circulares en esos radios, calculadas con 5.1



## 6. Conclusiones

En este trabajo de Tesis se estudió la dinámica de estrellas del cúmulo S con el objetivo de poder diferenciar entre distintos modelos propuestos para el centro galáctico. Las órbitas de estas estrellas proporcionan la medida más directa de la cantidad de materia concentrada en el miliparsec central de nuestra galaxia, actualmente estimada en  $M \simeq 4 \times 10^6 M_\odot$  (Gillessen et al. 2017).

El primer objetivo alcanzado fue aprender a utilizar el lenguaje de programación *Python* con el fin de poder analizar y manipular el código numérico del modelo RAR extendido. Se continuó con el estudio de la energía potencial efectiva en Relatividad General para métricas generales con simetría esférica y estática. Se realizó una comparación entre el caso de agujero negro de Schwarzschild y el caso RAR, donde las principales diferencias vienen dadas por: (i) una barrera infinita de potencial en el caso no singular a radios  $r \rightarrow 0$ , en contraste con barrera finita para el caso de AN. En este último, aquellas partículas suficientemente energéticas pueden pasar la barrera, e inevitablemente continuar hacia la singularidad  $r = 0$ . (ii) Potenciales efectivos de partículas masivas en el caso Schwarzschild con momentos angulares mayores que el valor crítico  $L/r_g > L_{ISCO}/r_g = \sqrt{12}$  siempre presentan dos órbitas circulares, una estable y otra inestable, mientras que en potenciales RAR sólo hay órbitas circulares estables para cualquier valor de momento angular. Es decir, no existe el concepto de ISCO. (iii) Para el caso de partículas sin masa, siempre existe una órbita circular inestable en  $r = 3r_g$  llamada *Esfera de fotones* en el caso de AN, mientras que para RAR solo hay barrera infinita de potencial que decrece más rápidamente cuanto más energéticos son los fermiones. Por lo tanto un fotón, sin importar cuán energético sea, siempre será dispersado al pasar por el centro de la configuración, mientras que caerá a la singularidad en el caso de AN cuando  $r < 3r_g$ .

Como segundo objetivo, se analizaron geodésicas de partículas de prueba moviéndose bajo la influencia de estos potenciales gravitatorios. Una vez obtenidas numéricamente las trayectorias en el plano real de la órbita, se calculó la precesión de dos estrellas del cúmulo, S2 y S4714. Debido a que las soluciones RAR son distribuciones extendidas de materia, siempre habrá una componente que aporta a la precesión retrógrada dependiendo cuál sea la fracción de masa extendida entre periastro y apoastro de la estrella  $\Delta M_{MO}/M_c$ . Los valores del ángulo de precesión serán negativos o positivos dependiendo de la competencia entre los efectos de la masa diluida y el núcleo compacto de MO.

Cuanto menos energético son los fermiones de MO, mayor es la fracción de masa extendida generando precesión retrógrada. A medida que aumenta la energía de los fermiones, la precesión tiene un crecimiento no lineal (pasando de retrógrada

a prógrada) hasta su máximo valor en el caso crítico de  $mc^2 = 345$  keV, donde el ángulo de precesión tiende a igualarse al caso de AN de Schwarzschild.

Actualmente, no es posible descartar alguno de los dos modelos estudiados en este trabajo. Se espera que observaciones más precisas de estos pasajes por el periastro o apoastro, como fue recientemente mostrado para el caso de S2 (Argüelles et al. 2022), puedan arrojar luz sobre la naturaleza de Sgr A\*.

Así mismo, se ajustaron geodésicas circulares en geometrías Schwarzschild y RAR a los denominados *hotspots*, donde ambos modelos ajustan radios circulares más internos a los datos para un período observado de  $T \simeq 40$  min, existiendo así una incompatibilidad entre estos modelos y los datos. Distintos modelos que tienen en cuenta otras fuerzas además de la gravitatoria han sido estudiados por Matsumoto et al. 2020 y pueden resolver el problema de ajustar simultáneamente el radio y el período de la órbita, evidenciando la necesidad de consideraciones magnetohidrodinámicas.

Otra aplicación de interés para la energía potencial efectiva, fue el cálculo de la energía de ligadura gravitacional. Éste, se llevó a cabo para órbitas circulares de partículas de prueba bajo potenciales RAR, donde la eficiencia máxima siempre se da dentro del radio del núcleo compacto y va desde  $\epsilon_{max} = 0,08\% - 28,5\%$  de conversión de energía en reposo de la partícula en energía radiada. Se comparó con la literatura para casos de discos de acreción sobre ANs de Schwarzschild y de Kerr, y también para discos de acreción sobre estrellas compactas originados por la estrella compañera en un sistema binario. El cálculo de la eficiencia máxima para el caso RAR de  $mc^2 = 56$  keV resulta del mismo orden de magnitud que la eficiencia máxima para estrellas Enanas Blancas. En cambio, la eficiencia máxima para el caso RAR crítico de  $mc^2 = 345$  keV es comparable con la eficiencia de acreción sobre Estrellas de Neutrones, y sobre un AN de Kerr astrofísico que constituyen los más energéticos con  $\epsilon_{RAR} = 28,5\%$  y  $\epsilon_{Kerr} = 32\%$ .

Se espera, en un futuro cercano, la llegada de nuevas observaciones y mejor calidad de datos astrométricos, sobretodo a distancias claves del centro galáctico como  $r_{ISCO} \leq 6r_g$ . Con éstos, se podrán aplicar restricciones más fuertes a los modelos aquí estudiados y se podrá lograr una mejor comprensión sobre la naturaleza compacta de Sgr A\*.

## 6.1. Perspectivas a futuro

Para continuar este trabajo se pretende estudiar las proyecciones de las órbitas estudiadas en el plano del cielo, ya que éstas son necesarias para poder contrastar directamente con las observaciones.

Otro objetivo a alcanzar es completar el estudio y análisis de geodésicas nulas. Una vez obtenidas numéricamente las trayectorias de fotones en las cercanías de Sgr A\* con distintos parámetros de impacto, se pueden calcular los ángulos de deflexión y analizar si emergen patrones del tipo *Anillo de Einstein* bajo métricas RAR y comparar estos resultados con el caso AN de Schwarzschild.

Una diferencia importante es que soluciones RAR no presentan una *Esfera de Fotones*, por lo tanto no es posible formar un análogo a la *sombra* del AN.

Dentro de los próximos años, el Telescopio Event Horizon (EHT) podrá resolver a escalas de  $r \sim 3r_g$  y observar si aparece la predicha *sombra* o no.

Se busca extender este trabajo investigando el proceso de acreción de material bariónico alrededor de núcleos compactos de MO, desarrollando modelos de discos de acreción partiendo del modelo de disco delgado de Shakura y SanyaeV (Shakura et al. 1973).





## Referencias

- Argüelles, C. R. et al. (mar. de 2022). “What does lie at the Milky Way centre? Insights from the S2-star orbit precession”. En: *MNRAS* 511.1, págs. L35-L39.
- Argüelles, C. R., M. Díaz et al. (2021). “On the formation and stability of fermionic dark matter haloes in a cosmological framework”. En: *MNRAS* 502.3, págs. 4227-4246.
- Argüelles, C. R., A. Krut et al. (sep. de 2018). “Novel constraints on fermionic dark matter from galactic observables I: The Milky Way”. En: *Physics of the Dark Universe* 21, 82, págs. 82-89.
- (mar. de 2019). “Novel constraints on fermionic dark matter from galactic observables II: Galaxy scaling relations”. En: *Physics of the Dark Universe* 24, 100278, pág. 100278.
- Argüelles, C. R., R. Ruffini y B. Fraga (sep. de 2014). “Critical configurations for a system of semidegenerate fermions”. En: *Journal of the Korean Physical Society* 65.6, págs. 809-813.
- Bartko, H. et al. (jun. de 2009). “Evidence for warped disks of young stars in the Galactic Center”. En: *The Astrophysical Journal* 697.2, págs. 1741-1763.
- Becerra-Vergara, E. A. et al. (sep. de 2020). “Geodesic motion of S2 and G2 as a test of the fermionic dark matter nature of our galactic core”. En: *Astronomy & Astrophysics* 641, A34, A34.
- Binney, J y S Tremaine (2008). *Galactic Dynamics 2nd ed.* Princeton University Press).
- Boyarsky, A. et al. (2009). “Realistic Sterile Neutrino Dark Matter with keV Mass does not Contradict Cosmological Bounds”. En: *Physical Review Letters* 102.20, pág. 201304.
- Bullock, J. S. y M. Boylan-Kolchin (2017). “Small-scale challenges to the  $\Lambda$  CDM paradigm”. En: *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* 55, págs. 343-387.
- Burkert, Andreas (1995). “The structure of dark matter halos in dwarf galaxies”. En: *The Astrophysical Journal Letters* 447.1, pág. L25.
- Chavanis, P. H. et al. (mar. de 2015). “Models of dark matter halos based on statistical mechanics: The classical King model”. En: *Physical Review D* 91.6, 063531, pág. 063531.
- Chavanis, Pierre-Henri (nov. de 1998). “On the “coarse-grained” evolution of collisionless stellar systems”. En: *MNRAS* 300.4, págs. 981-991.
- Drlica-Wagner, A. et al. (nov. de 2015). “Eight Ultra-faint Galaxy Candidates Discovered in Year Two of the Dark Energy Survey”. En: *The Astrophysical Journal* 813.2, 109, pág. 109.
- Eckart, A. y R. Genzel (1996). “Observations of stellar proper motions near the Galactic Centre”. En: *Nature* 383.6599, págs. 415-417.

- Gao, J. G., M. Merafina y R. Ruffini (ago. de 1990). “The semidegenerate configurations of a selfgravitating system of fermions”. En: *Astronomy & Astrophysics* 235.1-2, págs. 1-7.
- Ghez, A. et al. (1998). “High proper-motion stars in the vicinity of Sagittarius A\*: Evidence for a supermassive black hole at the center of our galaxy”. En: *The Astrophysical Journal* 509.2, pág. 678.
- (2003). “The first measurement of spectral lines in a short-period star bound to the galaxy’s central black hole: a paradox of youth”. En: *The Astrophysical Journal Letters* 586.2, pág. L127.
- Ghigna, S. et al. (oct. de 1998). “Dark matter haloes within clusters”. En: *MNRAS* 300.1, págs. 146-162.
- Gibbons, S. L. J., V. Belokurov y N. W. Evans (dic. de 2014). “‘Skinny Milky Way please’, says Sagittarius”. En: *MNRAS* 445.4, págs. 3788-3802.
- Gillessen, S. et al. (2009). “The Orbit Of The Star S2 Arouns Sgr A\* From Very Large Telescope And Keck Data”. En: *The Astrophysical Journal* 707.2, pág. L114.
- (2019). “Detection of a Drag Force in G2’s Orbit: Measuring the Density of the Accretion Flow onto Sgr A\* at 1000 Schwarzschild Radii”. En: *The Astrophysical Journal* 871.1, pág. 126.
- Gillessen, S. et al. (mar. de 2017). “An Update on Monitoring Stellar Orbits in the Galactic Center”. En: *The Astrophysical Journal* 837.1, 30, pág. 30.
- Gravity-Collaboration (2018). “Detection of orbital motions near the last stable circular orbit of the massive black hole SgrA\*”. En: *Astronomy & Astrophysics* 618, pág. L10.
- (2020). “Modeling the orbital motion of Sgr A\*’s near-infrared flares”. En: *Astronomy & Astrophysics* 635, A143.
- Hobson, M. P., G. Efstathlou y A. N. Lasenby (2006). *General Relativity. An Introduction for Physicists*. Cambridge University Press.
- Hunt, J. (2019). *Advanced Guide to Python 3 Programming*. Springer.
- J.Tollerud, E. et al. (2008). “Hundreds of Milky Way Satellites? Luminosity Bias in the Satellite Luminosity Function”. En: *The Astrophysical Journal* 688.1, pág. 277.
- King, Ivan R (1966). “The structure of star clusters. III. Some simple dynamical models”. En: *The Astronomical Journal* 71, pág. 64.
- Klein, O (jul. de 1949). “On the thermodynamical equilibrium of fluids in gravitational fields”. En: *Reviews of Modern Physics* 21.3, págs. 531-533.
- Klypin, A. et al. (1999). “Where Are the Missing Galactic Satellites?” En: *The Astrophysical Journal* 522.1, pág. 82.
- Lifshitz, L.D. Landau & E. M. (1994). *The classical theory of fields*. Fourth revised english edition Volume 2. Butterworth-Heinemann.

- Lynden-Bell, Donald (ene. de 1967). “Statistical mechanics of violent relaxation in stellar systems”. En: *MNRAS*, pág. 163.
- Matsumoto, T., Chi-Ho Chan y T. Piran (2020). “The origin of hotspots around Sgr A\*: orbital or pattern motion?” En: *MNRAS* 497.2, págs. 2385-2392.
- Moore, B. et al. (1999). “Dark Matter Substructure within Galactic Halos”. En: *The Astrophysical Journal* 524.1, pág. L19.
- Moore, Ben (ago. de 1994). “Evidence against dissipation-less dark matter from observations of galaxy haloes”. En: *Nature* 370.6491, págs. 629-631.
- Naray, R. Kuzio de et al. (abr. de 2008). “Mass Models for Low Surface Brightness Galaxies with High-Resolution Optical Velocity Fields”. En: *The Astrophysical Journal* 676.2, págs. 920-943.
- Navarro, J. et al. (2010). “The diversity and similarity of simulated cold dark matter haloes”. En: *MNRAS* 402.1, págs. 21-34.
- Oh, Se-Heon et al. (2015). “High-resolution mass models of dwarf galaxies from LITTLE THINGS”. En: *The Astronomical Journal* 149.6, pág. 180.
- Peißker, F. et al. (2020). “S62 and S4711: Indications of a Population of Faint Fast-moving Stars inside the S2 Orbit—S4711 on a 7.6 yr Orbit around Sgr A\*”. En: *The Astrophysical Journal* 899.1, pág. 50.
- Planck-Collaboration (sep. de 2016). “Planck 2015 results XIII. Cosmological parameters”. En: *Astronomy & Astrophysics* 594, A13, A13.
- Ruffini, R., C. R. Argüelles y J. A. Rueda (jul. de 2015). “On the core-halo distribution of dark matter in galaxies”. En: *MNRAS* 451.1, págs. 622-628.
- Ruffini, R. y S. Bonazzola (1969). “Systems of Self-Gravitating Particles in General Relativity and the Concept of an Equation of State”. En: *Physical Review Journals Archive* 187.5, pág. 1767.
- Scipy-Documentation (s.f.[a]). *scipy.integrate.simpson*.  
— (s.f.[b]). *scipy.integrate.solve\_ivp*.  
— (s.f.[c]). *scipy.optimize.fmin*.
- Seljak, U., A. Slosar y P. McDonald (2006). “Cosmological parameters from combining the Lyman- $\alpha$  forest with CMB, galaxy clustering and SN constraints”. En: *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2006.10, pág. 014.
- Shakura, N. I. y R. A. Sunyaev (1973). “Reprint of 1973A&A....24..337S. Black holes in binary systems. Observational appearance”. En: *Astrophysics Data System* 500, págs. 33-51.
- Shao, S. et al. (2013). “The phase-space density of fermionic dark matter haloes”. En: *MNRAS* 430.3, págs. 2346-2357.
- Shapiro, S. L. y S. A. Teukolsky (1983). *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars. The physics of Compact Objects*. John Wiley & Sons, Inc.
- Sofue, Yoshiaki (dic. de 2013). “Rotation Curve and Mass Distribution in the Galactic Center —From Black Hole to Entire Galaxy”. En: *Publications of the Astronomical Society of Japan* 65, 118, pág. 118.

- Springel, V. et al. (2005). "Simulations of the formation, evolution and clustering of galaxies and quasars". En: *Nature* 435.7042, págs. 629-636.
- Tolman, Richard C. (abr. de 1930). "On the weight of heat and thermal equilibrium in general relativity". En: *Physical Review* 35.8, págs. 904-924.
- Weinberg, Steven (1972). *Gravitation and Cosmology: principles and applications of the General theory of Relativity*. John Wiley & Sons Inc.
- Zwicky, F. (ene. de 1933). "Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln (*Alemán*), [The Redshift of Extragalactic Nebulae]". En: *Helvetica Physica Acta* 6, págs. 110-127.