

# ANALISIS DE POGO EN UN COHETE DE COMBUSTIBLE LIQUIDO

Hernán J. Logarzo<sup>a</sup>, Ana Scarabino<sup>a</sup>

<sup>a</sup>*Grupo Fluidodinámica Computacional, GFC, Departamento de Aeronáutica, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata, 116 entre 47 y 48, La Plata, Argentina, scarabino@ing.unlp.edu.ar*

**Palabras clave:** Interacción fluido-estructura, Pogo, cohetes, combustible líquido, inestabilidades dinámicas.

**Resumen.** La interacción de vibraciones entre el sistema de propulsión y la estructura de un vehículo lanzador puede ser una fuente de inestabilidad dinámica. Desde los días del programa Gemini se han buscado formas para modelar y mitigar este fenómeno potencialmente desastroso, que fue llamado “Pogo”.

Estos vehículos alcanzan el empuje necesario a través de la combustión de combustibles sólidos o líquidos en sus motores cohete. En un vehículo con combustible líquido, las bombas impulsan a los propelentes (combustible y oxidante) a través de líneas de alimentación, desde sus tanques de almacenamiento hasta la cámara de combustión del motor. Inevitablemente, los tanques, líneas de alimentación, y el motor vibran durante el despegue y ascenso. Esta vibración hace que se genere una oscilación en el empuje, la cual se transmite a la estructura del vehículo. Por otra parte, las propias aceleraciones que experimenta la estructura a lo largo de la misión se transmiten a las líneas de propulsión. Bajo este contexto, cuando las frecuencias naturales de los 2 subsistemas mencionados (estructura y sistema de propulsión) se encuentran próximas entre sí, las oscilaciones se suceden en un sistema de lazo cerrado (estructura – propulsión). Esto representa una inestabilidad del sistema, y las oscilaciones resultantes pueden llegar a ser extremas, alcanzando picos de presiones de aceleraciones de hasta 30g.

En este trabajo se presenta la implementación y resultados de un modelo matemático para la simulación y análisis de este fenómeno. Los elementos considerados y modelados del sistema de propulsión incluyen la salida del tanque de propelente, los conductos, la cámara de combustión y un acumulador anti-pogo para cada línea de alimentación. Los modos puramente estructurales se calculan en forma independiente, considerando las masas de fluido como solidarias al volumen que ocupan (“congeladas”).

Para el análisis de acoplamiento se obtiene una matriz representativa de todos los grados de libertad del sistema, incluyendo presiones y desplazamientos del fluido en ambas líneas. Sus autovalores y autovectores generalizados brindan los modos del problema.

Se analizan las frecuencias naturales, modos y frecuencias de acoplamiento y posibilidades de amortiguación o supresión de la inestabilidad para un vehículo típico alimentado a combustible líquido con un sistema de presurización por gas inerte, y se evalúa la sensibilidad de las frecuencias de los modos acoplados a los distintos parámetros del sistema. El modelo desarrollado permite prevenir la posibilidad de aparición de inestabilidades en una etapa de diseño y diseñar sistemas pasivos o activos de mitigación del problema.

# 1 INTRODUCTION

En un vehículo con combustible líquido, las bombas (u otro sistema) impulsan a los propelentes (combustible y oxidante) a través de líneas de alimentación de sus tanques de almacenamiento a la cámara de combustión del motor. Inevitablemente, los tanques, líneas de alimentación, y el motor vibran durante el despegue y el ascenso. Esta vibración hace que se genere una oscilación en el empuje. El empuje resultante genera perturbaciones que causan vibraciones de la estructura, lo que aumenta las oscilaciones del fluido, provocando una mayor vibración. Debido a la realimentación que existe entre la estructura y el sistema de propulsión, las oscilaciones aumentan de manera progresiva hasta alcanzar aceleraciones en los componentes que sobrepasan los valores admisibles y pueden llevarlos a su fallo. Esta inestabilidad dinámica que involucra el sistema de propulsión y su interacción con la estructura del vehículo, se denomina POGO.

Las oscilaciones suelen encontrarse en el rango de 5-60 Hz. Las aceleraciones producidas pueden alcanzar valores de 17 g (valor pico) en la interfaz entre el vehículo de lanzamiento y la carga útil, y hasta 34 g en el motor. Como se ha mencionado anteriormente, las tensiones resultantes pueden sobrepasar los límites estructurales del vehículo y conducir a una falla catastrófica. Esta inestabilidad dinámica puede ocurrir cuando las frecuencias naturales del sistema de propulsión, formadas por líneas de combustible que conectan los tanques con la cámara de combustión, se acercan a las frecuencias naturales longitudinales de la estructura del vehículo. Las vibraciones axiales del sistema acoplado, se inician de forma espontánea, crecen lentamente y luego desaparecen en forma gradual. El cambio lento en las características del sistema acoplado, en función de la fase de vuelo en la que se encuentre el vehículo, puede dar a lugar a uno o más periodos de inestabilidad durante la misión, con intervalos de tiempo de hasta 30 segundos.

El proceso de realimentación puede verse de la siguiente manera; presiones aleatorias en el sistema de propulsión (principalmente en la cámara de combustión) producen vibraciones de los modos naturales del vehículo que, a su vez, causan oscilaciones en la presión. Por otro lado, vibraciones aleatorias de la estructura, producen oscilaciones en los modos propios del fluido, provocando vibraciones en la estructura debido a oscilaciones en la fuerza de empuje (Figura 1).

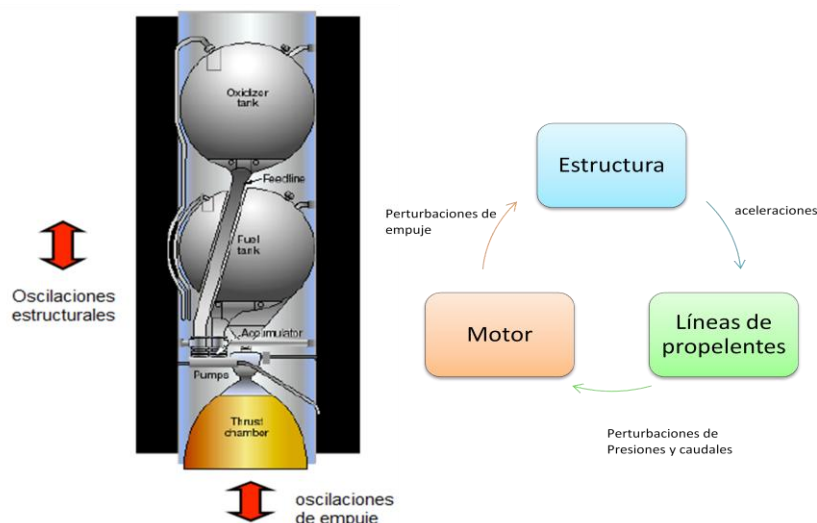


Figura 1. Lazo cerrado de interacción

Cabe destacar que es la interacción de ambos procesos lo que da a lugar al fenómeno de Pogo, y no el sistema de propulsión o los modos estructurales de forma aislada. La eliminación de esta inestabilidad ha sido alcanzada introduciendo un acumulador hidráulico (también llamado Pogo Suppressor) en uno o varios lugares adecuados. El acumulador desacopla las frecuencias críticas de resonancia de la estructura y del sistema de propulsión.

## 2 MODELO DEL SISTEMA DE PROPULSION

### 2.1 Consideraciones e hipótesis

La inestabilidad de Pogo se analiza en series de tiempo de vuelo en los que se considera un modelo matemático:

- Linealizado
- Invariante en ese tiempo

La consideración de análisis de modelo invariante en el tiempo se justifica dada la relativa baja velocidad en los cambios de las características dinámicas del sistema debido, por ejemplo, al consumo de combustible a lo largo de la misión, o variaciones en las condiciones de operación del motor.

El modelo para la estabilidad está dividido en 3 aspectos.

Primero se debe modelar y obtener los modos de vibración del vehículo completo, para varios tiempos de vuelo en donde el análisis de Pogo se llevará a cabo. Existen dos condiciones a considerar (NASA CR – 103101, 1971; Rubin, S. *et al*, 1966):

- El tanque de combustible principal del vehículo se modela hidroelásticamente considerando que no existe flujo que ingresa o sale del mismo.
- Para el modelo estructural, se considera la masa del fluido contenida en los distintos elementos.

Cada modo estructural provee las traslaciones de los elementos de propulsión, como también la presión a la salida del tanque principal, para cada forma modal. Luego los modos son las entradas para el programa de análisis de Pogo. De esta manera el sistema estructural puede ser analizado a través de un programa independiente al del cálculo de Pogo.

Por otro lado, se modela el sistema de propulsión usando elementos que representen al fluido y la dinámica de combustión en presencia de un desplazamiento estructural arbitrario. Se utilizan para esto, la técnica de elementos finitos. El modelo consta de “bloques” que representan los distintos elementos componentes del sistema: tanques, conductos compresibles e incompresibles, bombas, juntas, acumuladores, cámara de combustión. Así, el sistema de propulsión es también analizado para obtener sus propios modos naturales de vibración.

Por último, se debe calcular el sistema de autovalores y autovectores complejos para el acoplamiento de estos 2 modelos precedentes para obtener las frecuencias, el amortiguamiento y los modos asociados, del sistema completo (acoplado). Una vez completado el análisis de modos, se procede a diseñar y especificar el dispositivo para mitigar las inestabilidades que pueden producirse durante alguna de las etapas de vuelo.

Se utiliza un método de parámetros concentrados para discretizar las masas y rigideces tanto para el sistema estructural, como para el sistema de propulsión. El método permite obtener una solución numérica aproximada de las ecuaciones diferenciales que caracterizan

el comportamiento físico del problema. El conjunto de elementos finitos forma una partición del dominio también denominada discretización. Cada elemento se distingue por 2 puntos representativos llamados “nodos”. Dos nodos son adyacentes si pertenecen al mismo elemento finito; además, un nodo sobre la frontera de un elemento finito puede pertenecer a varios elementos.

De esta manera, un elemento queda definido cuando se aplican las ecuaciones diferenciales a cada uno de los nodos.

De acuerdo con estas relaciones de adyacencia o conectividad se relaciona el valor de un conjunto de variables incógnitas definidas en cada nodo y que se denominan: grados de libertad. El conjunto de relaciones entre el valor de una determinada variable entre los nodos se puede escribir en forma de sistema de ecuaciones lineales. El número de ecuaciones de dicho sistema es proporcional al número de nodos.

### 3 ELEMENTOS

El comportamiento dinámico de las perturbaciones del sistema de propulsión es modelado acoplando 6 tipos de elementos. Estos son:

- Conducto con flujo incompresible
- Conducto con flujo compresible
- Junta de fluido
- Acumulador
- Tanque
- Cámara de combustión

El modelo del sistema se crea acoplando los elementos nodo a nodo.

Cada elemento es caracterizado por un conjunto de ecuaciones lineales diferenciales hasta de segundo orden con respecto al tiempo.

Las ecuaciones constituyen las relaciones entre las variables de estado que incluyen perturbaciones de presión estática, las correspondientes al fluido (propelente) que son los desplazamientos relativos de masa  $w$  en los nodos y los desplazamientos absolutos generalizados de los modos estructurales  $q$ . Para determinar el modelo, se deben definir ciertos parámetros:

- Inertancia: cumple la función de la masa en un sistema mecánico, y proporciona los términos inerciales en la dinámica del sistema.
- Resistencia linealizada: se obtiene considerando las pérdidas en el conducto debido a la fricción con las paredes, calculadas en función de la velocidad media (Bird, R., B., 1998).
- Elasticidad: es un parámetro que depende de la velocidad de propagación de una onda de presión en el conducto. A medida que el conducto se considera menos rígido; este parámetro disminuye.

#### 3.1 Líneas de Propelentes

Las líneas de propelentes son utilizadas para conectar los tanques de combustible con el sistema de bombas. Están compuestas por conductos circulares flexibles con distintas

secciones transversales y juntas. Para describir el movimiento del fluido dentro de estos conductos, se consideran las siguientes hipótesis:

- Flujo estacionario, unidireccional y compresible.
- El perfil de velocidades es constante con el radio en una cierta sección transversal.
- Las fuerzas actuantes en el fluido son de origen viscoso e inercial actuantes en la dirección paralela a la del flujo.

Teniendo en cuenta las ecuaciones de conservación de masa y cantidad de movimiento se tiene que aplicando y considerando el modelo de parámetros concentrados (en donde la ecuación se aplica a los nodos del elemento), el modelo de ecuaciones para el método de elementos finitos (Figura 2) queda: (Bohdan, W., et al, 1993; NASA CR – 103101, 1971)

$$\begin{cases} \frac{I}{2} \ddot{w}_i + \frac{R}{2} \dot{w}_i + K_a w_i - K_a w_j - p_i + \rho \vec{H}_i \cdot \ddot{\vec{r}} = 0 \\ \frac{I}{2} \ddot{w}_j + \frac{R}{2} \dot{w}_j + K_a w_j - K_a w_i + p_j + \rho \vec{H}_j \cdot \ddot{\vec{r}} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

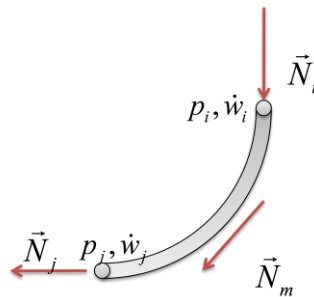


Figura 2. Modelo de conducto

El modelo definido, se ajusta a un flujo compresible unidimensional dentro de un conducto uniforme, recto. También se consideran las aceleraciones provocadas por la estructura. La aceleración a la que se encuentra sometido el conducto es  $\ddot{\vec{r}}$ .

La longitud adecuada para cada elemento “conducto” es restringida en función de la velocidad con que una onda de presión se desplaza a lo largo del conducto (velocidad del sonido) para justificar el modelo de parámetros concentrados. El criterio está dado por: (Bohdan, W., et al, 1993)

$$L \leq \frac{c}{10f}$$

Donde  $f$  es la frecuencia más alta de interés en Hz, y  $c$  es la velocidad del sonido.

La elasticidad del fluido en términos de la velocidad acústica y del volumen de fluido contenido en estado estacionario  $V_s$ , puede ser expresada mediante (Bohdan, W., et al, 1993):

$$K_a = \frac{c^2}{gV_s}$$

### Fuerza producida

Como se ha mencionado anteriormente, las perturbaciones en el flujo de combustible

resultan en fuerzas actuando en el sistema estructural (forzantes). Para obtener una expresión que pueda ser aplicada a los diferentes elementos que componen el sistema de propulsión, se considera como primer caso, al caso de conducto incompresible.

Se considera el fluido incompresible que pasa a través de un conducto curvado y de área no uniforme. La presión y el caudal se consideran uniformes en cada sección.

Realizando un balance macroscópico, la fuerza externa actuando sobre la superficie de un volumen de fluido puede ser escrita como:

$$\vec{F}_A = \frac{d\vec{P}}{dt} + \int_A \rho \vec{V}_a (\vec{V} \cdot d\vec{A}) \quad (2)$$

Aplicando ahora la ecuación (2) a la entrada y a la salida del conducto compresible (consideradas localmente como incompresible); la fuerza neta en la pared es:

$$\vec{F} = \underbrace{p_i A_i \vec{N}_i - p_j A_j \vec{N}_j}_1 - \underbrace{\dot{w}_i \frac{\vec{H}_i}{g} - \dot{w}_j \frac{\vec{H}_j}{g}}_2 + \underbrace{\frac{2\dot{W}_s}{\rho_w g A_i} \left[ (\vec{N}_i - \vec{N}_m) \dot{w}_i + (\vec{N}_m - \vec{N}_j) \dot{w}_j \right]}_3 \quad (3)$$

1. Representa la fuerza producida por la variación de presión entre entrada y salida
2. Fuerza inercial
3. Fuerza de fricción

Para el caso en estudio, los vectores en la dirección del flujo coinciden ( $N_i, N_j$  y  $N_m$ ), ( $H_i = H_j = L/2$ ) y las áreas en los nodos son iguales, (ver Figura 2).

### 3.2 Tanque

Una de las restricciones para los modos estructurales está relacionada con los tanques de combustible.

El elemento tanque describe la relación de las perturbaciones de presión en el punto  $i$  y las aceleraciones de los modos estructurales.

La ecuación que define las características del tanque a la salida es: (Bohdan, W., et al, 1993)

$$I_t \ddot{w}_i + R_t \dot{w}_i - \sum_n \beta_{ni} \ddot{q}_n + p_i = 0 \quad (4)$$

La inercancia  $I$  en el primer término, debe verse como la relación entre las perturbaciones de presiones y aceleraciones de masa (dentro del tanque) que existiría si un pistón estuviese oscilando en el nodo  $i$  y el flujo estacionario no estuviera.  $\beta$  es la presión modal por unidad de aceleración en el modo  $n$ .

#### Fuerza producida

La fuerza modal efectiva actuando en el modo estructural  $n$ , en el nodo  $i$  es:

$$Q_{ni} = \ddot{w}_i \frac{\beta_{ni}}{\rho_w} - p_i A_i \vec{N}_i \cdot \vec{\phi}_{ni}, \quad \text{con } \vec{\phi}_{ni} \text{ la componente del vector modal del modo } n \text{ en el nodo } i.$$

El primer término da cuenta del efecto de la perturbación de fluido debido al tanque, el segundo término debido a una presión ficticia actuando en el sistema estructural.

### 3.3 Acumulador

El acumulador es el dispositivo utilizado para mitigar las inestabilidades de Pogo. Contiene un volumen de gas que actúa como un resorte mecánico. El propósito del acumulador es variar las frecuencias del sistema hidráulico para reducir los acoples dinámicos entre el sistema de propulsión y los modos naturales estructurales de vibración del lanzador. El gas puede estar en contacto directo con el líquido propelente, (criogénico), o puede estar contenido dentro de algún tipo de recipiente de goma. El vehículo propuesto para el estudio posee un subsistema de N<sub>2</sub>, designado para la presurización del acumulador.

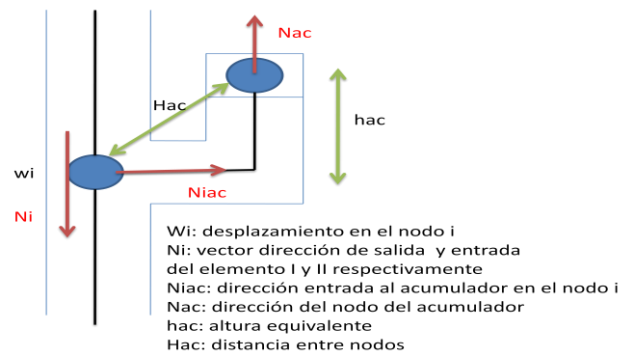


Figura 3. Modelo de acumulador

El nodo de entrada al acumulador se designa con la letra  $i$ . El nodo  $j$  se considera en el centro de la interface fluido - gas. El recipiente contenedor se considera con masa nula. Aplicando nuevamente las ecuaciones de conservación de masa y movimiento, se obtiene para el acumulador (Bohdan, W., et al, 1993; NASA CR – 103101, 1971):

$$p_{ac} - R_{ac} \dot{w}_{ac} - I \ddot{w}_{ac} - K_{ac} w_{ac} - \rho \vec{H}_{ac} \cdot \ddot{\vec{r}} = 0 \quad (5)$$

Es necesario expresar el volumen de gas  $V_s$ , en términos de las condiciones a las cuales está contenido (precarga). Teniendo en cuenta la ecuación de estado para gases perfectos y la relación adiabática existente entre el volumen y la presión (también para gases perfectos), la elasticidad del elemento acumulador esta dado por:

$$K_{ac} = \frac{\gamma P_s^2}{\rho_w P_0 V_0} \frac{T_0}{T_s} \quad (6)$$

#### Fuerza producida

La fuerza se debe al flujo considerado como incompresible entre el centro del conducto al cual se agrega el acumulador y la superficie de interface entre líquido y gas.

$$\vec{F} = p_{ac} A_i \vec{N}_{ac} - w_{ac} A_j K_{AC} \vec{N}_j - \frac{\dot{w}_{ac}}{g} \vec{H}_{AC}$$

### 3.4 Junta (divisor de caudal)

El elemento se considera ideal, es decir, sin dimensiones ni pérdidas de presión y caudal. Existen varios tipos posibles en función de las entradas y salidas. Pueden tener:

- 1 entrada y 2 salidas

- 2 entradas y 1 salida
- Combinación de ambas

Este elemento se utiliza para dividir el flujo en el lugar en donde se desee colocar el acumulador. Las condiciones que debe cumplir el elemento son:

- Las presiones en todos los nodos son las mismas
- Conservación de masa (considerado incompresible)
- No genera fuerza

En el programa se utiliza una junta con una entrada (nodo  $i$ ) y 2 salidas (nodos  $j$  y  $k$ ).

Con esta configuración, las 2 primeras condiciones se traducen en:

$$P_i = P_j = P_k$$

$$w_i = w_j + w_k$$

### 3.5 Cámara de Combustión

El elemento que representa la cámara de combustión incluye los orificios de inyección del combustible y oxidante, tratados como conductos incompresibles equivalentes, como también la cámara propiamente dicha. El flujo aguas arriba de los orificios es tratado como compresible, como cavidades de inyección (múltiples) o tubos de refrigeración. Bajo condiciones de flujo estacionario la presión de la cámara  $P_c$  es proporcional a la suma de flujos de combustible y oxidante.

El elemento “cámara de combustión” describe las perturbaciones producidas por los flujos de oxidante y combustible a través de los orificios de inyección, y su transición a perturbaciones de presión. La relación de combustión se expresa como: (Bohdan, W., et al, 1993; NASA CR-103101, 1971)

$$\tau_c \dot{p}_c + p_c = R_{co} \dot{w}_o + R_{cf} \dot{w}_f \quad (7)$$

Los coeficientes de resistencia  $R_{co}$  y  $R_{cf}$  se obtienen de la linealización de la curva  $C^*$  vs  $MR$  en el punto de operación (estacionario) del proceso de combustión: (Bohdan, W., et al, 1993; NASA CR-103101, 1971)

$$R_{co} = \left[ C_s^* + (1 + MR_s) \right] \frac{dC_s^*}{dMR_s} \cdot A_{cc} g$$

$$R_{cf} = \left[ C_s^* - MR_s (1 + MR_s) \right] \frac{dC_s^*}{dMR_s} \cdot A_{cc} g$$

El tiempo de “retraso” de la combustión  $\tau_c$ , resulta de una aproximación de baja frecuencia del tiempo requerido para que la perturbación producida por el flujo entrante se transforme en perturbación de presión.

El flujo de oxidante y combustible sale de los orificios de inyección para entrar en la cámara. Este fenómeno es descripto mediante la resistencia y la inercia de los orificios. La caída de presión a lo través de los orificios se incluye en el modelo de la cámara de combustión.

$$p_{injo} - p_c = R_{injo} \dot{w}_o + I_{injo} \ddot{w}_o \quad (8)$$



$$p_{inj} - p_c = R_{inj} \dot{w}_f + I_{inj} \ddot{w}_f \quad (9)$$

Donde “injo” e “injf” denota que son parámetros de orificios de entrada para oxidante y combustible respectivamente.

Se pueden escribir las contribuciones a las presiones de cámara debido a oxidante y combustible por separado; de esta manera la ecuación (7) queda representada por:

$$\begin{cases} p_c = p_{co} + p_{cf} \\ \tau_c \dot{p}_{co} + p_{co} = R_{co} \dot{w}_o \\ \tau_c \dot{p}_{cf} + p_{cf} = R_{cf} \dot{w}_f \end{cases} \quad (10)$$

Considerando los orificios de entrada y la dinámica de la combustión dentro de la cámara, las ecuaciones que describen el comportamiento del conjunto son (Bohdan, W., et al, 1993; NASA CR – 103101, 1971):

$$\begin{cases} I_i \ddot{w}_i + R_i \dot{w}_i - p_i + p_l + \eta p_m = 0 \\ I_j \ddot{w}_j + R_j \dot{w}_j - p_j + \eta p_l + p_m = 0 \\ R_{ci} \dot{w}_i - p_l - \tau_c \dot{p}_l = 0 \\ R_{cj} \dot{w}_j - p_m - \tau_c \dot{p}_m = 0 \\ p_k - p_l - p_m = 0 \end{cases}$$

### Fuerza producida

El empuje producido por la tobera junto con la cámara de combustión se escribe como el producto del área de garganta de la tobera  $A_{cc}$ , un coeficiente de empuje  $C_{cc}$ , y la presión de cámara  $p_k$ .

Luego el vector fuerza de perturbación es:

$$\vec{F} = -A_{cc} C_{cc} p_k \vec{N}_k;$$

Debido a que la tobera puede no estar alineada con la dirección axial del vehículo, el vector  $N_k$  describe la componente de la fuerza en esa dirección\*.

El signo menos aparece ya que la fuerza producida al vehículo tiene sentido contrario al de salida de escape de gases.

Obs: Se considera para el modelo que la dirección de la tobera coincide con la dirección axial del vehículo.

## **4 MODELO ESTRUCTURAL**

Para encontrar los modos naturales de vibración longitudinal, como también las frecuencias asociadas a tales modos; se emplea el método de la matriz dinámica para sistemas discretizados de n grados de libertad (Thomson, W.T., 1981).

Este método consiste en resolver el problema de autovalores y autovectores de la siguiente ecuación matricial:

$$[M_e] \cdot \{\ddot{q}\} + [K_e] \cdot \{q\} = \{0\} \quad (11)$$

En donde las matrices M y K son las matrices de Inercia y Rigidez, respectivamente. Estas matrices tienen dimensión  $n \times n$ , si  $n$  es el número de grados de libertad del sistema.

Del determinante de la matriz  $C(\lambda)$  se obtiene la ecuación de frecuencias, cuyas raíces son los autovalores del problema (proporcionales a las frecuencias naturales de vibración) y sus respectivos autovectores corresponden a las formas modales.

#### 4.1 Matrices de inercia y rigidez

Para un modelo de parámetros concentrados, las hipótesis que se tienen en cuenta para el conducto son:

- Modelo discretizado: masas puntuales, elementos elásticos
- No se tiene en cuenta el amortiguamiento interno

Para armar el código en Matlab, que resuelva el problema de autovalores de este sistema de  $n$  grados de libertad, se analizó cómo varían los coeficientes de la matriz de Inercia  $[M_e]$  y de la matriz de Rigidez  $[K_e]$  a medida que los grados de libertad aumentan. A este fin, se armaron sistemas de 2, 3 y 4 grados de libertad para ver el comportamiento de los coeficientes, que fueron necesarios para el desarrollo del algoritmo de resolución para el modelo estructural aislado.

### 5 MODELO DE LOS SISTEMAS DE PROPULSION Y ESTRUCTURAL ACOPLADOS

#### 5.1 Método de coordenadas generalizadas para sistemas forzados

El sistema estructural estará excitado según las fuerzas producidas por el sistema de propulsión,

$$[M_e] \{\ddot{x}\} + [K_e] \{x\} = \{F\} \quad (12)$$

Primero se resuelve la ecuación homogénea (ecuación (12) igualada a cero) y se obtienen los modos propios (libres) de vibración del sistema estructural. Si el sistema tiene  $n$  grados de libertad, existirán  $n$  modos. El modo  $n$  tendrá una frecuencia angular  $\omega_n$  y un autovector  $\phi_n$  asociado. Los autovectores normalizados se agrupan para formar la matriz modal  $[Z]$ .

El siguiente paso es proponer coordenadas generalizadas, en donde el vector  $\{x\}$  queda definido por:

$$\begin{aligned} \{x\} &= [Z] \{q\} \\ \{\ddot{x}\} &= [Z] \{\ddot{q}\}, \end{aligned}$$

Reescribiendo la ecuación (12), obtenemos:

$$[M_e][Z] \{\ddot{q}\} + [K_e][Z] \{q\} = \{F\},$$

premultiplicando por  $[Z]^T$ ;

$$[Z]^T [M_e][Z] \{\ddot{q}\} + [Z]^T [K_e][Z] \{q\} = [Z]^T \{F\}$$

en donde

$$\begin{aligned} [Z]^T [M_e][Z] &= [I] \\ [Z]^T [K_e][Z] &= \omega^2 [I] \end{aligned}$$

Por último el sistema queda:

$$[I]\{\ddot{q}\} + \omega^2 [I]\{q\} = [Z]^T \{F\}$$

El sistema queda desacoplado según el modo que se desee analizar. El miembro derecho, se puede escribir también para cada modo individualmente (por estar desacoplado). Cabe aclarar que cada componente del modo  $n$ ,  $\vec{\phi}_{ni}$ , tiene a su vez 3 componentes asociadas al sistema de referencia adoptado. Es decir:  $\vec{\phi}_{ni} = \langle \phi_{nix} \quad \phi_{niy} \quad \phi_{niz} \rangle$ ; sin embargo, se consideran en este trabajo únicamente las componentes en la dirección longitudinal del vehículo:  $x$ .

## 5.2 Solución de sistema matricial

El conjunto de ecuaciones para el sistema se puede escribir de la siguiente forma matricial de segundo orden:

$$[M]\{\ddot{v}(t)\} + [B]\{\dot{v}(t)\} + [K]\{v(t)\} = \{0\} \quad (13)$$

Las tres matrices son cuadradas y en este caso no contienen coeficientes complejos. Ninguna de ellas es simétrica o triangular, siendo todas singulares por poseer algunas filas o columnas nulas.

Haciendo una transformación de variables para llevar el sistema matricial de 2º orden a uno de 1º orden, se tiene: (Lang, 1989)

$$\left. \begin{array}{l} v_i = v_i \\ z_i = \dot{v}_i \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{v}_i = z_i \\ [M]\dot{z}_i + [B]z_i + [K]v_i = 0 \end{array} \right.$$

Despejando los vectores derivados, queda:

$$\begin{aligned} \dot{v}_i &= z_i \\ [M]\dot{z}_i &= -[B]z_i - [K]v_i \end{aligned}$$

Quedando el sistema de 1º orden como:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{v}_i \\ \dot{z}_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -K & -B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ z_i \end{Bmatrix} \quad (14)$$

Transformando la expresión (14), al plano complejo; se obtiene el problema de autovalores generalizados.

$$s \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ z_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -K & -B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ z_i \end{Bmatrix}$$

Redefiniendo las matrices y el vector;

$$\begin{aligned}
 [A]\{y(s)\} &= s[P]\{y(s)\} \\
 \text{con } \{y(s)\} &= \begin{Bmatrix} v(s) \\ sv(s) \end{Bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

Las matrices A y P son:

$$\begin{aligned}
 [A] &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ -K & B \end{bmatrix} \\
 [P] &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

donde I y 0 son las matrices Identidad y nula de orden N.

Debido a que la matriz P es singular (no puede invertirse), se recurre a un algoritmo llamado QZ para resolver el problema. El software comercial elegido para la definición del sistema, cálculo y análisis de soluciones, es el MATLAB. Dicho programa incorpora dentro de sus comandos, uno que permite calcular dichos autovalores con el algoritmo QZ.

### 5.3 Sistema de ecuaciones

A continuación se presenta un esquema del modelo completo para el sistema de propulsión, incluyendo las 2 líneas de oxidante y combustible, acumuladores, tanques; y cámara de combustión.

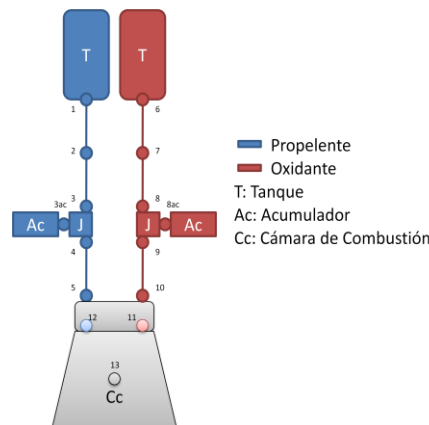


Figura 4. Esquema del sistema de propulsión completo

La ecuación matricial (13) representa el conjunto de 28 ecuaciones, de las cuales 27 son debido a los elementos de propulsión, y la restante es la ecuación de un modo estructural elegido para su análisis.

Esta última ecuación se representa como:

$$(s^2 + \omega^2)\{q_1\} - \{Q_1\} = \{0\}
 \tag{16}$$

En donde  $\omega$  representa la frecuencia angular seleccionada para el análisis de acoplamiento, y  $Q_1$ , la fuerza generalizada debida a cada uno de los elementos del sistema de propulsión.

## 5.4 Sistema de Propulsión

Considerando los nodos  $i$  y  $j$  para cada ecuación según corresponda con los del esquema, las ecuaciones de la línea de combustible (y oxidante):

Por último para tratarlo de manera más simple, se arman 3 matrices:  $[M]$ ,  $[B]$  y  $[K]$ ; matriz de inercia (o inertancia), matriz de amortiguamientos y matriz de rigidez respectivamente para cada línea de combustible y oxidante.

Teniendo en cuenta que no todos los parámetros de las matrices tienen influencia en todas las variables (desplazamientos y presiones), las matrices  $M$ ,  $B$  y  $K$  para cada línea, no necesariamente son cuadradas. Cuando se combinen las matrices de ambas líneas de combustible; la matriz resultante, sí es cuadrada.

## 5.5 Matrices completas

Al combinar el sistema de propulsión con el sistema estructural, se obtiene un número de ecuaciones igual al número de variables de estado. Estas variables de estado incluyen, como se menciono antes:

1. Los 8 desplazamientos relativos de los nodos, 2 de los orificios de entrada a la cámara de combustión y 2 de las entradas a los acumuladores.
2. Las 8 presiones en los nodos, las 3 presiones internas de cámara y las 2 presiones a la entrada de los acumuladores.
3. El desplazamiento  $q$  del modo estructural escogido para el análisis.

El número total de variables de estado esta dado por el número de nodos, cámaras de combustión y modos seleccionados, proporcionando 28 variables de estado

## 6 RESULTADOS

En la Figura 5 se observa los modelos de los sistemas equivalentes para el análisis de pogo.

Los parámetros de los tanques y de la cámara de combustión han sido propuestos y estimados, teniendo en cuenta las referencias ya que se necesita conocer con más detalle la geometría de los orificios de salida (tanque) y orificios de inyección para la cámara de combustión. También los tiempos de “permanencia” en la cámara de combustión para el oxidante y combustible fueron propuestos en función de la bibliografía. Algunos de estos parámetros son empíricos u obtenidos por medio de ensayos; entre estos se encuentra el tiempo dentro de la cámara para que el flujo de combustible se vaporice y logre una buena mezcla con el oxidante, y también la relación de mezcla.

Se han considerado las siguientes hipótesis:

1. Todos los conductos poseen la misma área transversal, ya sea para la línea de combustible como para la de oxidante.
2. Todos los nodos pertenecientes a cada elemento poseen la misma dirección de entrada y salida, coincidente con el eje longitudinal del vehículo; excepto el vector de entrada de flujo a los acumuladores, los cuales se consideran perpendicular a dicho eje.

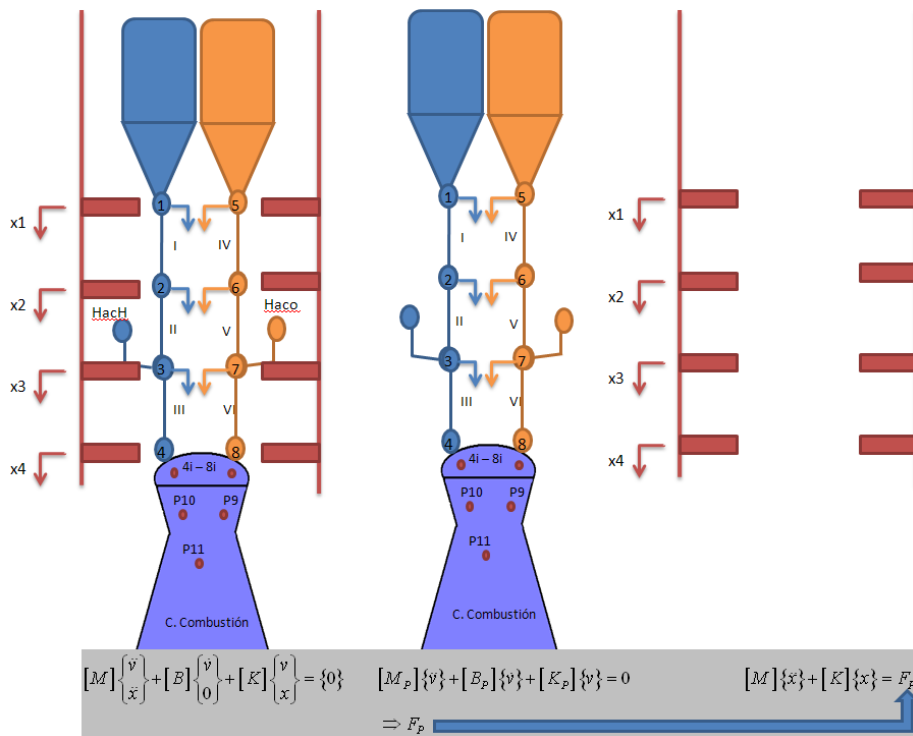


Figura 5. Modelo de sistema acoplado y subsistemas aislados

## 6.1 Casos en estudio

Teniendo en cuenta que durante el tiempo de misión, las masas del sistema varían debido a la pérdida de combustible, se analiza un caso en donde las frecuencias estructurales se acercan a las del sistema motor. Para ello es necesario primero obtener los modos naturales de los subsistemas de forma aislada. (Logarzo, 2010).

El sistema de propulsión es analizado (1) sin acumulador, (2) con acumulador. Para el caso (2) se analizan resultados para diferentes valores de elasticidad del gas contenido en los acumuladores.

Para los casos en estudio, se analizan los modos de los sistemas de propulsión y estructural (aislados), y los modos del sistema acoplado.

	Elasticidad	(1/m <sup>2</sup> )
	Combustible	Oxidante
Caso 1	7,30E+06	4,80E+06
Caso 2	3,60E+06	2,40E+06
Caso 3	7,30E+06	2,40E+06
Caso 4	3,60E+09	2,40E+09
Caso 5	2,92E+07	1,92E+07

Tabla 1. Valores de elasticidad para casos en estudio

De los 56 modos (por haber transformado el sistema de 2° orden en uno de 1°); solo algunos representan soluciones oscilatorias, en las cuales pueden existir acoplamientos llevando a la inestabilidad (POGO). En la Figura 6 se presentan una serie de graficas, en donde se ven reflejadas las variaciones en las frecuencias y factores de amortiguamiento en función de los parámetros de los acumuladores.

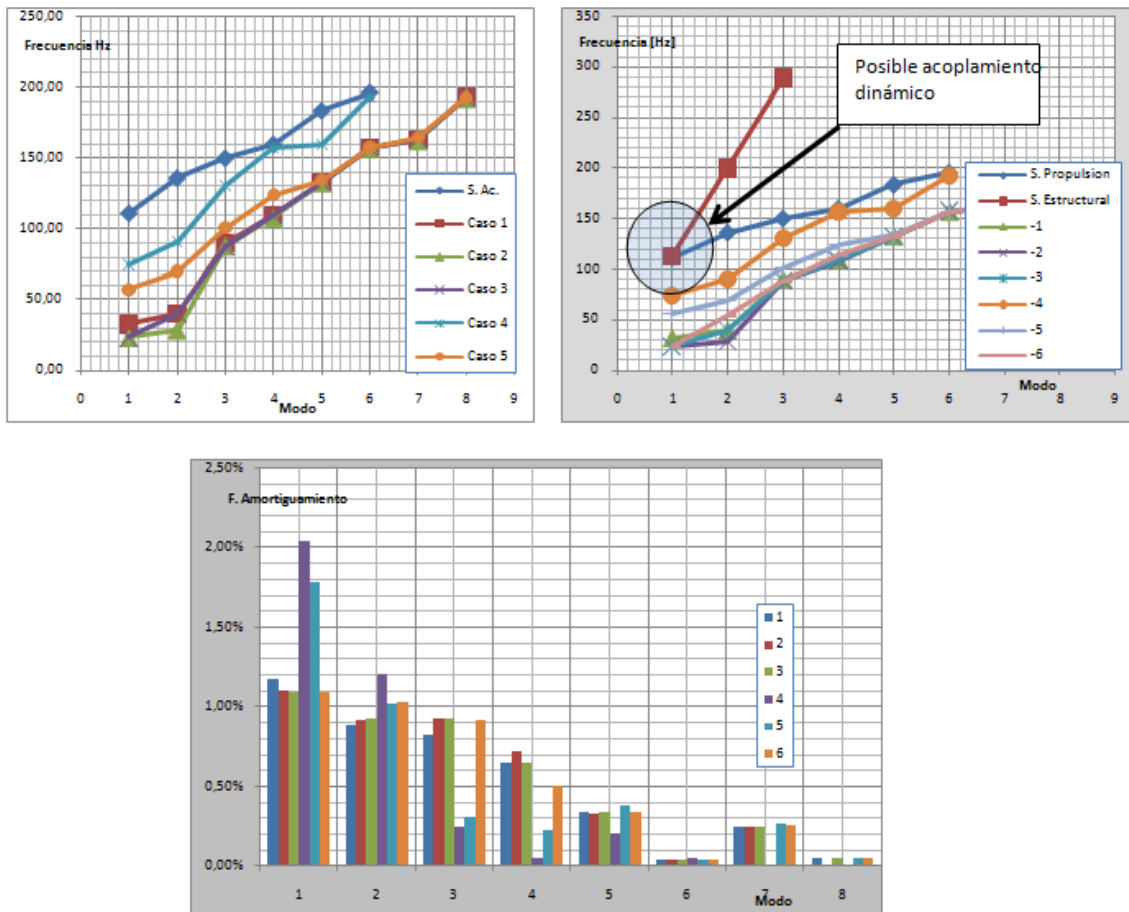


Figura 6. Modos y factores de amortiguamiento

## 6.2 Análisis de sensibilidad de parámetros

Con el fin de determinar cuáles son los parámetros más significativos a la hora del diseño, se analiza la sensibilidad de los resultados obtenidos (frecuencias, básicamente), con respecto a la variación de los parámetros que componen el modelo de elementos finitos en desarrollo. También este análisis sirve para conocer con que grado de detalle deben ser modelados cada elemento componente del sistema, como ser la cámara de combustión, de la cual no se tienen parámetros precisos.

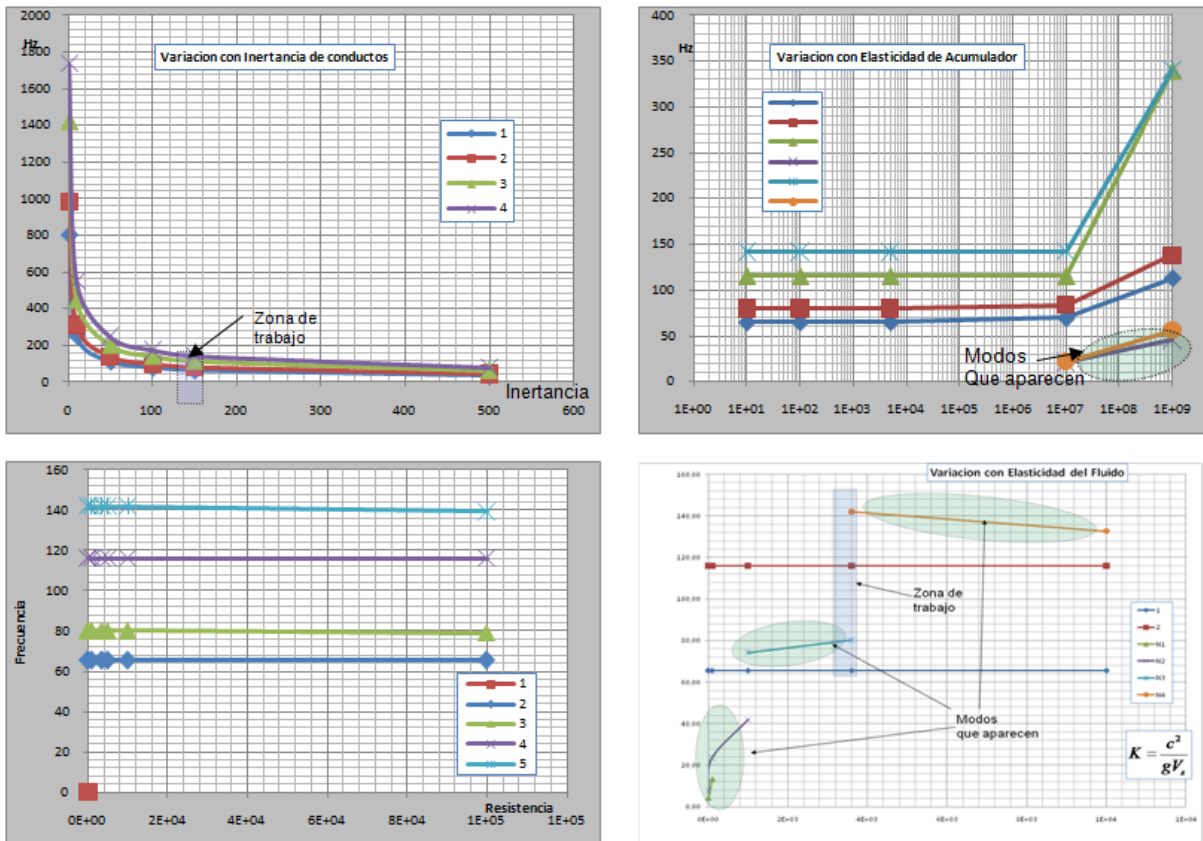


Figura 7. Sensibilidad de las frecuencias frente a variaciones en los parámetros

Debido a la variación en algunos parámetros (elasticidad de los elementos conducto), aparecen nuevos modos oscilatorios (ver Figura 7). Esto se debe a que las variaciones en los parámetros alteran las relaciones dinámicas entre las variables, llevando a situaciones de sub-amortiguamiento y así, estos nuevos modos. Con respecto a la sensibilidad de la frecuencia frente a variaciones en la elasticidad del acumulador, se observa que recién para valores elevados de la misma aparecen cambios significativos. Por lo tanto se busca analizar la dinámica propia del acumulador para obtener respuestas deseadas.

### 6.3 Diseño y caracterización del acumulador

Para caracterizar y diseñar el acumulador se considera el análisis de su propia dinámica. Como se ha visto más arriba, el acumulador se considera un dispositivo lineal caracterizado por su Inertancia, Resistencia, y Elasticidad.

La relación entre las presiones y los desplazamientos de masa, está dado por la ecuación (5);

$$p_{ac} - R_{ac} \dot{w}_{ac} - I \ddot{w}_{ac} - K_{ac} w_{ac} - \rho \vec{H}_{ac} \cdot \ddot{\vec{r}} = 0$$

Para obtener el comportamiento dinámico del acumulador frente a una entrada de presión, (dada por el gas contenido en él), se escribe la función de transferencia entre el caudal másico (salida del sistema) y la presión (entrada al sistema). Esta función proporciona qué relación existe entre la entrada y la salida (NASA CR-132452, 1974). Considerando la ecuación (5) sin tener en cuenta las aceleraciones externas, se tiene:



$$G_{ac} = \frac{\dot{w}_{ac}}{p_{ac}} = \frac{\dot{w}_{ac}}{I_{ac}\ddot{w}_{ac} + R_{ac}\dot{w}_{ac} + K_{ac}w_{ac}} \quad (17)$$

Teniendo en cuenta que la ecuación (17) representa la dinámica de un sistema de 2º orden, y escribiendo los términos para expresarlos en función de la frecuencia angular y factor de amortiguamiento se tiene:

$$\begin{cases} \omega_{ac}^2 = \frac{K_{ac}}{I_{ac}} \\ 2\zeta\omega_{ac} = \frac{R_{ac}}{I_{ac}} \end{cases} \quad (18)$$

De esta manera la función de transferencia dada por la expresión (17) queda en la forma:

$$G_{ac} = \frac{s}{I_{ac}(s^2 + 2\zeta\omega_{ac}s + \omega_{ac}^2)} \quad (19)$$

Los polos del sistema están dados por la ecuación característica (raíces) del denominador de la función de transferencia, determinan la dinámica del mismo, (respuesta lenta o rápida, muy amortiguada o poco amortiguada, estabilidad, etc.)

De esta manera se tiene que al ser un sistema de 2º orden, existirán pares de polos complejos conjugados (como se ha visto antes), con la forma: (Ogata, K., 2003)

$$\begin{aligned} s &= -\zeta\omega_{ac} \pm \omega_{ac}\sqrt{1-\zeta^2} \\ |s| &= \omega_{ac} \end{aligned} \quad (20)$$

Es necesario definir los requisitos dinámicos del acumulador para que satisfaga la condición de mitigar o disminuir las oscilaciones en los modos más críticos.

Comparando los resultados anteriores con los obtenidos para estos parámetros del acumulador, se tienen las frecuencias y el factor de amortiguamiento:

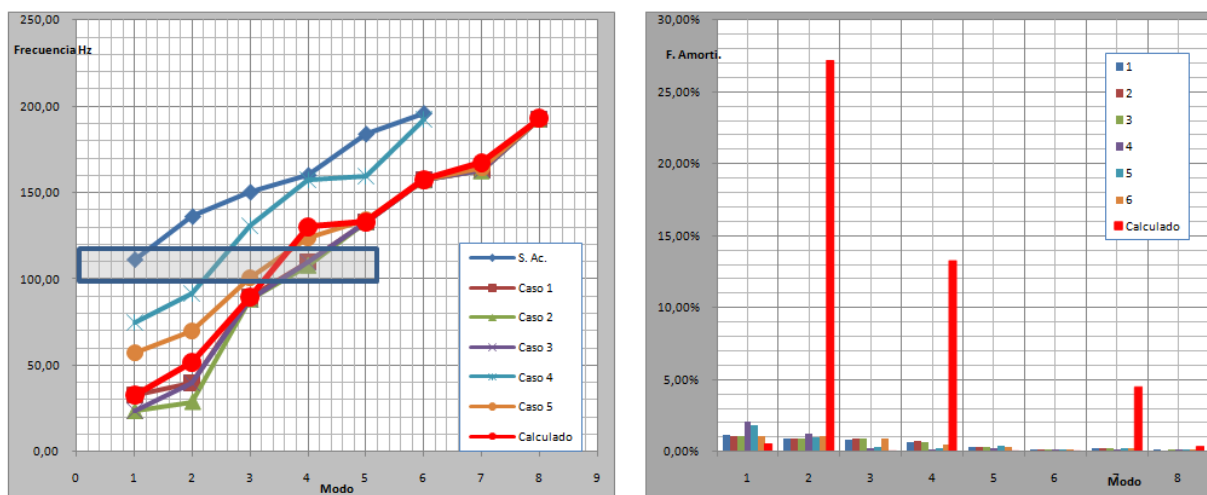


Figura 8. Cambios en la respuesta del sistema con modificaciones en los acumuladores. a) frecuencias. b) factor de amortiguamiento

En la Figura 8 se observa, que de todos los casos calculados para distintos valores de acumuladores, el que más se aleja de la frecuencia crítica (cerca a 110 Hz), es el acumulador cuyos parámetros han sido calculados a partir de consideraciones dinámicas. También es importante observar que sucede con el factor de amortiguamiento, ya que se ha logrado aumentar los márgenes de estabilidad con un factor de amortiguamiento de hasta 30 %.

### Características geométricas del acumulador

El diseño del acumulador consiste en un proceso iterativo. Los aspectos fundamentales para el diseño son:

1. Conocer la frecuencia que se desea mitigar.
2. Proponer un estado para el gas contenido, como también una geometría.
3. Proponer un factor de amortiguamiento, tal que proporcione los márgenes de estabilidad deseados.

Conociendo la frecuencia crítica para el acoplamiento  $\omega$  y una elasticidad en función de los parámetros del gas contenido y dimensiones del acumulador, se encuentra la Inertancia  $I_{ac}$ . Luego, con un factor de amortiguamiento adecuado  $\zeta$  se calcula el parámetro de disipación o resistencia  $R_{ac}$ . Por último, y debido a que  $I_{ac}$  y  $R_{ac}$ , dependen de la geometría, se comprueba que las dimensiones propuestas verifican dichos parámetros. De no verificarse, se calculan las nuevas dimensiones (volumen) y se alteran presión y temperatura a la cual el gas se encuentra dentro del recinto.

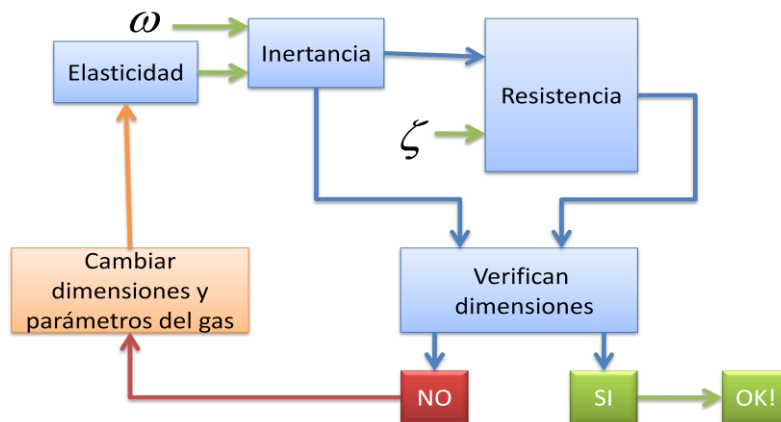


Figura 9. Diagrama de flujo del proceso de diseño de acumulador

## 7 CONCLUSIONES

Se implementó un método que permite modelar el acoplamiento estructura – sistema de propulsión para analizar la dinámica del conjunto y determinar aquellas posibles frecuencias que lleven a una inestabilidad (POGO) del vehículo. Las entradas del modelo incluyen los modos naturales del sistema estructural, como también los parámetros necesarios para describir los elementos del sistema de propulsión. El programa proporciona los autovalores (frecuencias) y autovectores (modos complejos) de los desplazamientos estructurales, flujos y presiones. El código permite resolver el sistema de ecuaciones de 2º orden aún con matrices singulares. La interacción entre la estructura y el sistema de propulsión se produce por las fuerzas de inercia, diferencias de presión, fricción en los conductos del sistema de propulsión, y por las aceleraciones externas que la estructura transmite al sistema de propulsión, de forma

realimentada.

Se obtuvieron diferentes resultados en función de la elasticidad del acumulador tanto para la variación en frecuencia como para el factor de amortiguamiento del sistema completo. Cambiando sólo la elasticidad del acumulador, por prueba y error, si bien se consiguieron variaciones en las frecuencias de acoplamiento, los factores de amortiguamiento no superaban el 4%, llevando a que el sistema tuviera muy bajos márgenes de estabilidad. Por esta razón se estudio la dinámica propia del actuador, a partir de las relaciones existentes entre los parámetros que lo caracterizan. Con este enfoque, se obtuvo la función de transferencia que existe entre la presión y el caudal dentro del acumulador, la cual junto con la frecuencia del sistema de propulsión que se buscaba mitigar, llevaron a obtener las magnitudes de inercia, resistencia y elasticidad para lograr dicho objetivo. Como era de esperarse, también se logró un aumento significativo en el factor de amortiguamiento del sistema completo, obteniéndose márgenes de estabilidad mayores.

## Trabajos Futuros

Debido a que muchos lanzadores poseen una bomba para presurizar el sistema y mantener el caudal de propelentes (combustible y oxidante), es necesario incluirla en el modelo. El modelo de la bomba puede ser resumido teniendo en cuenta dos aspectos: el primero se relaciona con la cavitación que puede existir dentro de ella (Dotson, K., 2005). Este fenómeno es de particular importancia en el estudio de POGO ya que la cavitación incorpora inestabilidades al sistema. El segundo aspecto tiene en cuenta el flujo a la salida de la bomba e incorpora aspectos de performance de la misma.

Se automatizará el programa para que, indicando la cantidad de elementos con el que se desea modelar un conducto (por ejemplo), pueda armar las ecuaciones involucradas, optimizando de esa forma los tiempos de trabajo. También se mejorará el programa para que proporcione los resultados de manera gráfica para una fácil comprensión y análisis.

Se espera también diseñar y construir un modelo físico simplificado para contrastar y validar los resultados analíticos obtenidos con resultados experimentales. Esto es importante dada la dificultad de realizar un ensayo a escala real.

## REFERENCIAS

- Bird, R.B., Stewart, W.E., Lightfoot, E.N., Fenómenos de Transporte. Editorial Reverté, S.A. 5ta reimpresión, 1998.
- Bohdan, W. Oppenheim, Rubin, S., Advanced Pogo Stability Analysis for Liquid Rockets. *Journal of Spacecraft and Rockets*. Vol. 30, N° 3, May – June 1993.
- Dotson, K., Rubin, S., Sako, B. H., Mission – Specific Pogo Stability Analysis with Correlated Pump Parameters. *Journal of Propulsion and Power*. Vol. 21, N°4, July – August 2005.
- Lang, G. F., Demystifying Complex Modes. *Journal of Sound and Vibration*. Vol. 23, N°1, 1989, pp. 36-40.
- Logarzo, H., Estudio de Inestabilidades Longitudinales en vehículos lanzadores de combustible líquido (POGO). *Trabajo Final de carrera, Departamento de Aeronáutica, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata*, 2010.
- NASA CR-103101. *Longitudinal Propulsion Coupling System*, 1971.

Ogata, K., *Ingeniería de Control Moderna*. 4ª edición. Pearson Prentice Hall. 2003.

Rubin, S., Longitudinal Instability of Liquid Rockets Due to Propulsion Feedback (POGO).  
*Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 3, N° 8, 1966, pp 1188-1195.

Rubin, S., NASA CR-132452, Passive Suppression of Pogo on the Space Shuttle, 1974.

Thomson, W.T., *Teoría de Vibraciones: aplicaciones*. Prentice Hall Hispanoamérica, S.A.  
1981.