

Apéndice A

Algunos Principios del Electromagnetismo

A.1 Principio de Equivalencia (o de Huygens)

Sea un volumen V , limitado por una superficie S , que contiene las fuentes que generan el campo \mathbf{E} y \mathbf{H} en el exterior de dicho volumen. El Principio de Equivalencia establece que fuentes de corriente eléctrica y magnética superficiales definidas sobre S por:

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{n} \times \mathbf{H} \quad (\text{A.1})$$

$$\mathbf{H}_s = \mathbf{E} \times \mathbf{n} \quad (\text{A.2})$$

donde \mathbf{n} es el versor normal a la superficie, son origen de un campo externo externo a V igual al del problema original [1, Cap. 9] [24, Cap. 3].

Este principio determina cuales son las fuentes capaces de establecer el problema equivalente. Sin embargo, por medio del concepto de unicidad [1, Cap. 8] se puede deducir que sólo las componentes tangenciales de \mathbf{E} o \mathbf{H} son necesarias para determinar el campo original.

A.2 Campo Electromagnético en la Zona Lejana

Definiendo \mathbf{A} como el potencial vectorial magnético tal que cumple con $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, y reemplazando en la primer ecuación de Maxwell, se tiene que:

$$\nabla \times (\mathbf{E} + j\omega\mathbf{A}) = 0 \quad (\text{A.3})$$

Si Φ es el potencial escalar eléctrico, entonces:

$$\mathbf{E} + j\omega\mathbf{A} = -\nabla\Phi \quad (\text{A.4})$$

Con (A.4) en (2.2):

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} - k^2\mathbf{A} = \mu\mathbf{J} - j\omega\epsilon\mu\nabla\Phi \quad (\text{A.5})$$

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A} - k^2\mathbf{A} = \mu\mathbf{J} - j\omega\epsilon\mu\nabla\Phi \quad (\text{A.6})$$

Eligiendo la medida de Lorentz $\nabla \cdot \mathbf{A} = -j\omega\epsilon\mu\Phi$:

$$\nabla^2\mathbf{A} + k^2\mathbf{A} = -\mu\mathbf{J} \quad (\text{A.7})$$

La solución de esta ecuación es:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dv' \quad (\text{A.8})$$

Conocido el campo \mathbf{A} , se pueden calcular \mathbf{E} y \mathbf{H} :

$$\mathbf{E} = -j\omega\mathbf{A} + \frac{1}{j\omega\epsilon\mu} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) \quad (\text{A.9})$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \quad (\text{A.10})$$

El campo en la región lejana se obtiene reteniendo los términos dominantes ($1/r$) y despreciando los de orden superior [24, Cap. 3, p. 133]:

$$\mathbf{H} = \frac{jk}{\mu} (A_\phi \hat{\theta} - A_\theta \hat{\phi}) \quad (\text{A.11})$$

siendo $k/\mu = \omega/Z_0$. Mientras que el campo \mathbf{E} se obtiene sabiendo que en la zona de radiación se cumple:

$$E_\theta = Z_0 H_\phi \quad (\text{A.12})$$

$$E_\phi = Z_0 H_\theta \quad (\text{A.13})$$

Fuentes Eléctricas	Fuentes Magnéticas
\mathbf{E}	\mathbf{H}
\mathbf{H}	$-\mathbf{E}$
\mathbf{J}	\mathbf{M}
\mathbf{A}	\mathbf{F}
ϵ	μ
μ	ϵ

Tabla A.1: Cantidades Duales

Fuentes Eléctricas	Fuentes Magnéticas
$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega\epsilon\mathbf{E}$	$-\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{M} + j\omega\mu\mathbf{H}$
$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}$	$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon\mathbf{E}$
$\mu\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$	$-\epsilon\mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{F}$
$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')e^{-jk \mathbf{r}-\mathbf{r}' }}{ \mathbf{r}-\mathbf{r}' } dv'$	$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{\epsilon}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')e^{-jk \mathbf{r}-\mathbf{r}' }}{ \mathbf{r}-\mathbf{r}' } dv'$

Tabla A.2: Ecuaciones Duales

También es posible definir el potencial vectorial eléctrico como $\mathbf{D} = -\nabla \times \mathbf{F}$ y hallar una expresión dual a la (A.11) (ver Sección A.3). El campo en la región lejana es:

$$\mathbf{E} = j\omega z_0(-F_\phi \hat{\theta} + F_\theta \hat{\phi}) \quad (\text{A.14})$$

A.3 Dualidad

Si ecuaciones que describen distintos fenómenos tienen la misma forma matemática, entonces son llamadas *duales*. Las cantidades que ocupan la misma posición en ecuaciones duales son cantidades *duales* [24, Cap. 3].

Si se definen fuentes de carga y de corriente magnética, las ecuaciones de Maxwell se convierten en duales. Las Tablas 1 y 2 muestran dichas ecuaciones y la dualidad entre cantidades.