

# Apéndice B

## Teoría de Difracción

### B.1 Introducción

En el Capítulo 4 se mencionó que para tener en cuenta el efecto del plano de tierra finito en el patrón de radiación, se debe combinar la teoría geométrica de la difracción con el modelo de cavidad resonante. En este apéndice se describe brevemente dicha teoría y se muestra como aplicarla en problemas de antenas de microtiras.

### B.2 Teoría Geométrica de Difracción

La teoría de óptica geométrica, por sí sola, no es capaz de predecir el campo en regiones ocultas por un conductor. Por lo ello, se utiliza el concepto de campo difractado para complementar esta teoría.

La difracción es un fenómeno local a alta frecuencia, por lo tanto, el campo difractado es proporcional al campo incidente en el punto en que se produce la difracción multiplicado por un coeficiente, llamado *coeficiente de difracción*. Este coeficiente se encuentra determinado por las propiedades locales del campo y el contorno en el punto de difracción. Joseph Keller fue el primero en sistematizar el cálculo del campo difractado al desarrollar expresiones cerradas

para los coeficientes de difracción [33, Cap. 9]. La teoría desarrollada por Keller se conoce como *teoría geométrica de difracción* (GTD).

Una expresión del campo difractado en forma matricial es:

$$[\mathbf{E}^d] = [D][\mathbf{E}^i]A(s)e^{-jks} \quad (\text{B.1})$$

donde  $[\mathbf{E}^d]$  and  $[\mathbf{E}^i]$  son vectores columnas con las componentes de los campos difractados e incidente,  $[D]$  es una matriz cuadrada con los coeficientes de difracción,  $s$  es la distancia entre el punto de difracción y el punto de observación, y  $A$  es el factor de atenuación definido por:

$$A(s) = \begin{cases} 1/s^{1/2} & \text{para ondas planas y cilíndricas} \\ (s'/s(s'+s))^{1/2} & \text{para ondas esféricas} \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

donde  $s'$  es la distancia entre el punto de difracción y la fuente del campo incidente. En general,  $[\mathbf{E}^d]$  está definido por tres componentes y  $[D]$  por una matriz de tres por tres. Sin embargo, si se elige adecuadamente el sistema de coordenadas, los campos se pueden definir con dos componentes y la matriz  $D$  con dos coeficientes no nulos en la diagonal. Estos son sistemas de coordenadas esféricas centrados en el punto de difracción y orientados sobre el rayo incidente y difractado, como se muestra en la Figura B.1. Entonces el campo difractado es:

$$\begin{bmatrix} E_{\gamma}^d(s) \\ E_{\psi}^d(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D_{\parallel} & 0 \\ 0 & -D_{\perp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{\gamma'}^i(Q) \\ E_{\psi'}^i(Q) \end{bmatrix} A(s)e^{-jks} \quad (\text{B.3})$$

La notación  $D_{\parallel}$  y  $D_{\perp}$  se refiere a que  $E_{\gamma'}^i$  y  $E_{\psi'}^i$  son paralelos y perpendiculares respectivamente al plano que contiene el rayo incidente y el borde de difracción.

### B.3 Teoría Uniforme de Difracción

La teoría de difracción de Keller tiene algunas limitaciones, como ser, no es posible calcular el campo en regiones cercanas al borde de difracción, a los puntos focales, y a la frontera de sombra [33, Cap. 9]. En 1967, Kouyoumjian generalizó las expresiones para el cálculo de los coeficientes de difracción, permitiendo salvar las limitaciones anteriores. A esta nueva teoría se la conoce como *teoría uniforme de la difracción* (UTD). Estos coeficientes se encuentran definidos por [34]:

$$D_{\parallel, \perp} = \frac{-e^{-j\pi/4}}{n\sqrt{8\pi k} \sin \gamma}$$

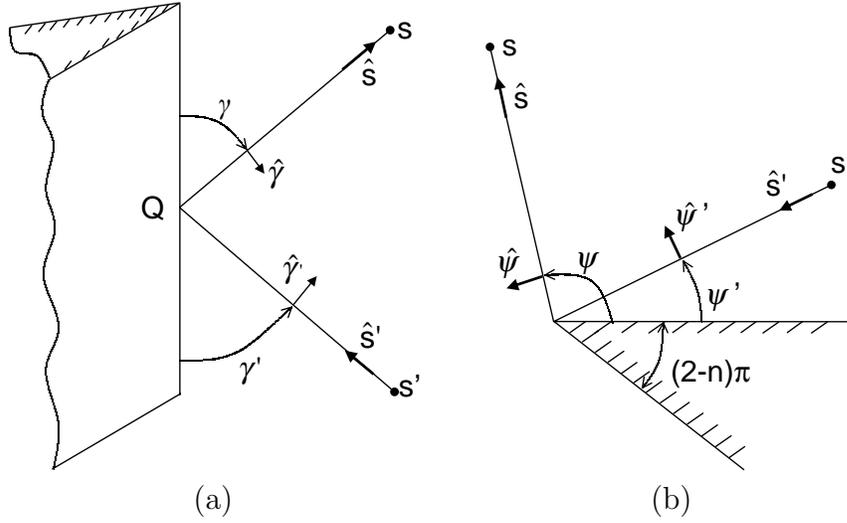


Figura B.1: Geometría del problema de difracción: a) vista lateral; b) superior.

$$\begin{aligned}
 & \times \left[ \cot \left( \frac{\pi + (\psi - \psi')}{2n} \right) F[kLa^+(\psi - \psi')] \right. \\
 & + \cot \left( \frac{\pi - (\psi - \psi')}{2n} \right) F[kLa^-(\psi - \psi')] \\
 & \mp \left\{ \cot \left( \frac{\pi + (\psi + \psi')}{2n} \right) F[kLa^+(\psi + \psi')] \right. \\
 & \left. \left. + \cot \left( \frac{\pi - (\psi + \psi')}{2n} \right) F[kLa^-(\psi + \psi')] \right\} \right] \quad (B.4)
 \end{aligned}$$

donde  $F$  es un factor definido por la integral de Fresnel:

$$F(x) = 2j|\sqrt{x}|e^{jx} \int_{|\sqrt{x}|}^{\infty} e^{-j\tau^2} d\tau \quad (B.5)$$

El argumento de esta integral depende de la función  $a^\pm$ :

$$a^\pm(\psi \pm \psi') = 2 \cos^2 \left[ \frac{2n\pi N^\pm - (\psi \pm \psi')}{2} \right] \quad (B.6)$$

en donde  $N^\pm$  son enteros que deben satisfacer lo mejor posible las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 2\pi n N^+ - (\psi \pm \psi') &= \pi \\
 2\pi n N^- - (\psi \pm \psi') &= -\pi \quad (B.7)
 \end{aligned}$$

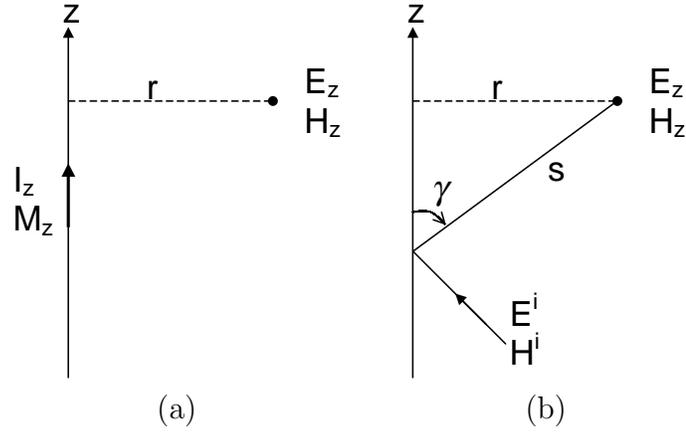


Figura B.2: Campo generado por: a) líneas de corriente; b) difracción.

Otro parámetro de los coeficientes de difracción es el parámetro de distancia  $L$ , definido por:

$$L = \begin{cases} s \sin^2 \gamma & \text{para onda plana} \\ s' s / (s' + s) & \text{para onda cilíndrica} \\ s' s \sin^2 \gamma / (s' + s) & \text{para onda esférica} \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

## B.4 Corriente Equivalente

Cuando el borde que produce la difracción es curvo o de largo finito, se debe utilizar el concepto de corriente equivalente. Es decir, se supone que en el borde existe una línea de corriente (eléctrica o magnética) que genera el campo difractado. Esta corriente se calcula a partir de los coeficientes de difracción.

Si existe una línea de corriente eléctrica  $I_z$  en la dirección de  $z$  (Figura B.2.a), el campo eléctrico que genera es:

$$E_z = \frac{-k^2 I_z}{4\omega\epsilon} H_0^2(kr) \quad (\text{B.9})$$

donde  $H_0^2$  es la función de Hankel de segundo tipo y orden cero. Si el argumento  $kr$  es grande, la función de Hankel puede ser aproximada de la siguiente forma:

$$E_z = \frac{z_0 k I_z}{2\sqrt{2\pi kr}} e^{-jkr} \quad (\text{B.10})$$

De la misma forma, si es una corriente magnética  $M_z$ , el campo es:

$$H_z = -\frac{kM_z}{2z_0\sqrt{2\pi kr}}e^{-jkr} \quad (\text{B.11})$$

Si se tiene un semiplano conductor con su borde sobre el eje  $z$ , y si sobre él incide un frente de onda electromagnético (Figura B.2.b), el campo difractado es:

$$\begin{aligned} E_z &= D_{\parallel} E_z^i \frac{e^{-jks}}{\sqrt{s}} \\ H_z &= D_{\perp} H_z^i \frac{e^{-jks}}{\sqrt{s}} \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Si el campo incide de forma normal al borde del semiplano, de (B.10), (B.11) y (B.12) se obtiene la corriente eléctrica y magnética que produciría un campo igual al campo difractado:

$$\begin{aligned} I_z &= \frac{-j}{z_0} D_{\parallel} E_z^i \sqrt{8\pi/k} e^{j\pi/4} \\ M_z &= -jz_0 D_{\perp} H_z^i \sqrt{8\pi/k} e^{j\pi/4} \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Luego, integrando estas corrientes se obtienen los potenciales magnéticos y eléctricos, como se explica en la Sección A.2. Finalmente, a partir de estos potenciales se determina el campo difractado  $\mathbf{E}^d$  y  $\mathbf{H}^d$ .

Para el caso en que el campo incidente no es normal al borde de difracción ( $\gamma \neq \pi/2$ ), se debe incluir un término que tenga en cuenta el cambio de fase debido al ángulo de incidencia:

$$\begin{aligned} I_z &= \frac{-j}{z_0} D_{\parallel} E_z^i \sqrt{8\pi/k} e^{j\pi/4} e^{jks(1-\sin\gamma)} \\ M_z &= -jz_0 D_{\perp} H_z^i \sqrt{8\pi/k} e^{j\pi/4} e^{jks(1-\sin\gamma)} \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

## B.5 Antena de Microtira

El campo total radiado por una antena de microtira es la suma vectorial del campo generado por el parche y el campo difractado en los bordes del plano de tierra:

$$\mathbf{E}^T = \mathbf{E} + \mathbf{E}^d \quad (\text{B.15})$$

donde el campo  $\mathbf{E}$  se calcula a partir de las corrientes equivalentes en el perímetro del parche, como se mostró en la Sección 2.5, y  $\mathbf{E}^d$  se encuentra a partir del método de corrientes equivalentes, descrito en la sección anterior.

El campo difractado depende de los coeficientes de difracción y del campo incidente. En el problema de una antena de microtira, el objeto que produce la difracción es un plano conductor; entonces  $n = 2$  (ver Figura B.1). Por la geomtría del problema en particular,  $\psi' = 0$ . Bajo estas condiciones se cumple que  $a^\pm(\psi \pm \psi') = 2 \cos^2(\psi/2)$ . También, en el caso de rayo rasante los coeficientes de difracción se deben multiplicar por un factor de  $1/2$ , debido para este ángulo de incidencia el campo incidente y el reflejado se confunden, generenado un campo del doble de amplitud [34]. Por lo tanto, la expresión (B.4) de los coeficientes se simplifica en:

$$\begin{aligned} D_\perp &= -\frac{e^{-j\pi/4} F[2ks' \sin^2 \gamma \cos^2(\psi/2)]}{\sqrt{8\pi k} \cos(\psi/2)} \\ D_\parallel &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Es decir, el campo difractado depende de la componente normal al plano del campo incidente. Entonces, la corriente magnética equivalente en el perímetro del parche, que permite calcular el campo difractado es:

$$M = E_\theta D_\perp \sqrt{8\pi/k} e^{j\pi/4} e^{jks(1-\sin \gamma)} \quad (\text{B.17})$$

donde  $E_\theta$  es la componente en  $\theta$  del campo electrico radiado por la antena a lo largo del borde del plano de tierra.

En las Figuras B.3 y B.4 se muestran los planos  $E$  y  $H$ , respectivamente, de las antenas descriptas en el Capítulo 4. Se debe mencionar que en el cálculo de dichos patrones de radiación, sólo se tuvo en cuenta el campo difractado de primer orden. El campo difractado de segundo orden permite reducir las discontinuidades en el campo total radiado [33]. Más información sobre el campo difractado de segundo orden puede encontrarse en [33, Cap. 9] y [36].

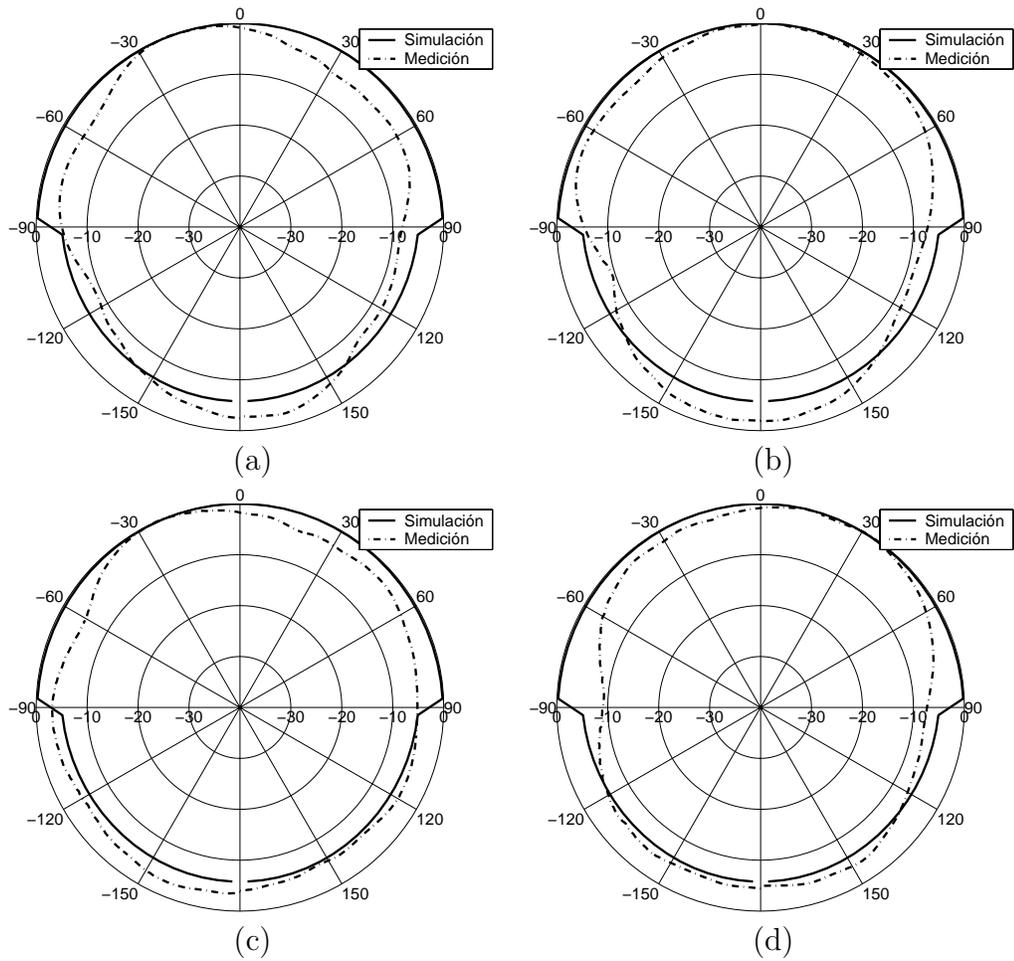


Figura B.3: Plano  $E$  del patrón de radiación de las distintas antenas: a) antena de referencia; b) antena A; c) antena B; d) antena C.

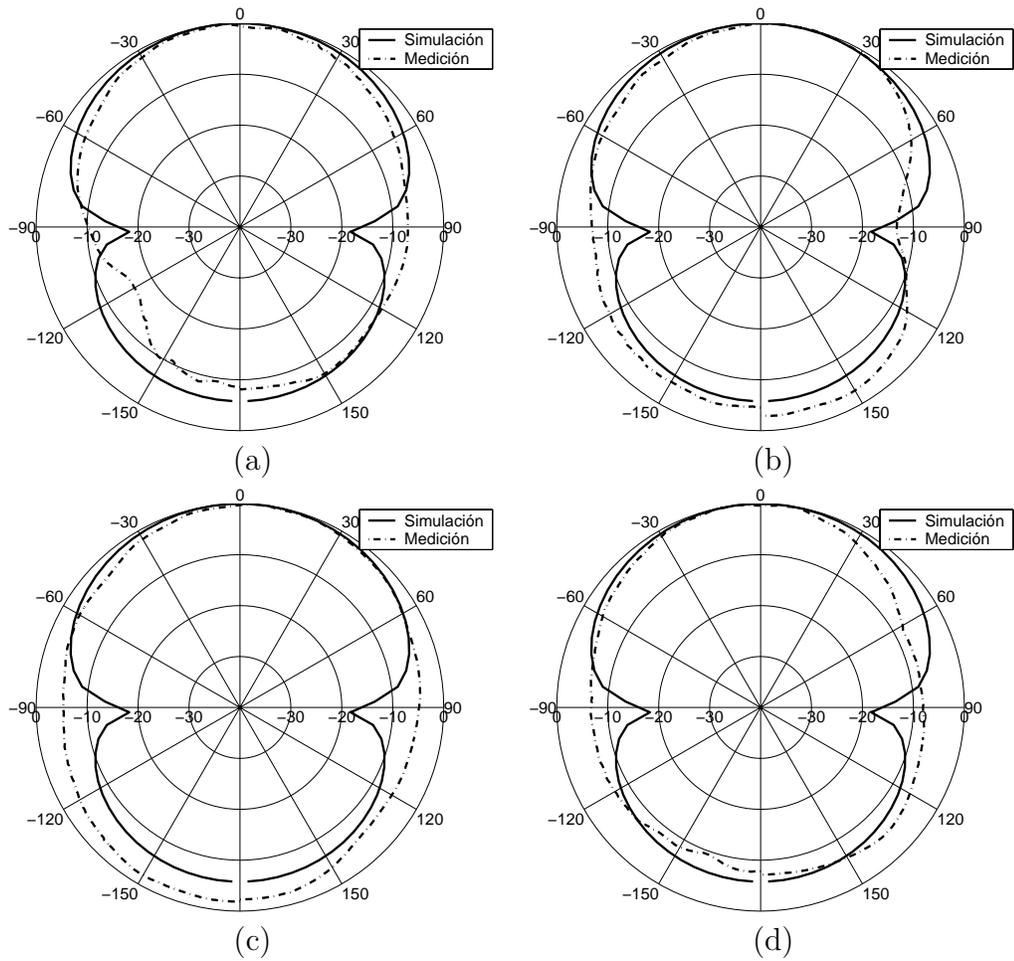


Figura B.4: Plano  $H$  del patrón de radiación de las distintas antenas: a) antena de referencia; b) antena A; c) antena B; d) antena C.