UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

FACULTAD DE INGENIERIA
Departamento de Electrotecnia

Electromagnetismo Computacional Aplicado al Diseño de Antenas de Microtira

Martín Hurtado

MAGISTER EN INGENIERIA
Octubre 2001

Director: Hugo E. Lorente
Co-director: Carlos H. Muravchik

Resumen

En este trabajo de tesis se desarrollan algoritmos de computadora que permiten analizar y diseñar antenas de microtira de forma arbitraria. Para ello, se emplea el método de los elementos finitos, el de los elementos de contorno y el de reciprocidad dual, combinados con el modelo de cavidad resonante para antenas de microtira. Estos algoritmos se utilizan para analizar una antena de geometría novedosa que consiste en un parche cuadrado con una ranura excéntrica en su interior. Los resultados de las simulaciones se comparan con resultados experimentales, obtenidos de la medición de varios prototipos de antenas.

Abstract

In this thesis, we develop computer code to analyze and design microstrip antennas of arbitrary shape. The finite element method, the boundary element method and the dual reciprocity method are combined with the cavity model to compute a numerical solution. Then, a novel microstrip antenna, which consist of a square patch with an eccentric slot, is studied with those algorithm. Computer simulation results are compared with experimental data.

Índice General

1 Introducción **1**

1.1 Antecedentes 1

1.1.1 Electromagnetismo Computacional 1

1.1.2 Antenas de Microtira 2

1.2 Objetivos de la Tesis 2

1.3 Organización de la Tesis 3

2 Antenas de Microtira **4**

2.1 Introducción 4

2.2 Modelo de Cavidad Resonante 5

2.3 Ecuaciones del Campo 6

2.4 Solución Analítica 7

2.5 Campo Radiado 9

2.6 Impedancia de Entrada y Frecuencia de Resonancia 11

2.7 Ancho de Banda y Eficiencia 13

2.8 Antenas de geometría simple 14

2.8.1 Parche Rectangular 14

2.8.2 Parche Circular 15

2.8.3 Parche Triangular 17

2.9 Resultados 18

2.10 Resumen 21

3 Métodos Numéricos 24

3.1 Introducción 24

3.2 Ecuación Diferencial 24

3.3 Método de los Elementos Finitos 25

3.3.1 Formulación 26

3.3.2 Discretización 26

3.3.3 Ensamblado de Matrices 29

3.4 Método de los Elementos de Contorno 31

3.4.1 Identidades de Green 32

3.4.2 Solución Fundamental 32

3.4.3 Formulación 33

3.4.4 Discretización 35

3.4.5 Ensamblado de matrices 36

3.5 Método de Reciprocidad Dual 39

3.5.1 Formulación 39

3.5.2 Discretización 42

3.5.3 Ensamblado de matrices 44

3.6 Resultados numéricos 45

3.7 Resumen 49

4 Antena Cuadrada con Ranura Excéntrica 50

4.1 Introducción 50

4.2 Antenas No Convencionales 50

4.3 Geometría de la Antena Propuesta 51

4.4 Analisis y Simulación 52

4.4.1 Fórmula para el Campo de Borde 53

4.4.2 Frecuencia de Resonancia 55

4.4.3 Impedancia de Entrada 56

4.4.4 Patrón de Radiación 57

4.4.5 Ancho de Banda, Directividad y Eficiencia 58

4.5 Resultados experimentales 59

4.6 Resumen 62

5 Conclusiones 63

5.1 Resumen 63

5.2 Conclusiones 64

5.3 Trabajo Futuro 65

A Algunos Principios del Electromagnetismo 66

A.1 Principio de Equivalencia (o de Huygens) 66

A.2 Campo Electromagético en la Zona Lejana 67

A.3 Dualidad 68

B Teoría de Difracción 69

B.1 Introducción 69

B.2 Teoría Geométrica de Difracción 69

B.3 Teoría Uniforme de Difracción 70

B.4 Corriente Equivalente 72

B.5 Antena de Microtira 73

C Código Fuente 77

C.1 Introducción 77

C.2 Rutinas de FEM 77

C.3 Rutinas de BEM 80

C.4 Rutinas de DRM 85

C.5 Rutinas Varias 89

D Símbolos **99**

Índice de Figuras

2.1 Geometría de una antena de microtira de forma arbitraria. . . . 5

2.2 Principio de Equivalencia aplicado a una antena de microtira. . 9

2.3 Geometría de una antena de microtira de forma rectangular. . . 15

2.4 Geometría de una antena de microtira de forma circular. 16

2.5 Geometría de una antena de microtira de forma triangular. . . . 18

2.6 Impedancia de entrada a la frecuencia de resonancia en función de la posición del punto de alimentación: a) parche rectangular ($x_0 = a/2$); b) circular ($x_0 = 0$); c) triangular ($x_0 = 0$). 19

2.7 Impedancia de entrada en función de la frecuencia: a) parche rectangular ($x_0 = a/2$, $y_0 = 0.3b$); b) circular ($x_0 = 0$, $y_0 = -0.26a$); c) triangular ($x_0 = 0$, $y_0 = -0.11a$). 20

2.8 Patrón de radiación a la frecuencia de resonancia: a) parche rectangular; b) circular; c) triangular. 22

3.1 Geometría del problema. 25

3.2 Método de los elementos finitos: a) subdivisión del dominio Ω en elementos triangulares; b) elemento triangular. 27

3.3 Método de los elementos finitos: a) notación local de los vértices de ; b) vértices con notación global. 29

3.4 Ampliación de la frontera con un semicírculo centrado en $\mathbf{r}_i$ y de radio ϵ. 33

3.5 Método de los elementos de contorno: a) subdivisión de la frontera Γ en elementos; b) definición de un elemento. 35

3.6 Problema con tres elementos: a) nodos numerados localmente; b) nodos numerados globalmente. 36

3.7 Elemento Γ_j: a) en un sistema de coordenadas global; b) en uno local. 38

3.8 Método de Reciprocidad Dual: nodos internos y sobre la frontera. 41

3.9 Número de onda en el dieléctrico correspondiente al menor modo de resonancia: a) parche rectangular; b) circular; c) triangular. . 45

3.10 Frecuencia de resonancia correspondiente al menor modo de resonancia: a) parche rectangular; b) circular; c) triangular. 47

3.11 Impedancia de entrada a la frecuencia de resonancia: a) parche rectangular; b) circular; c) triangular. 48

4.1 Geometría de la antena propuesta. 51

4.2 Pérdida de retorno^2 de una antena diseñada con distintas fórmulas para las dimensiones efectivas: a) fórmulas de parches rectangulares; b) fórmulas de un anillo circular. 53

4.3 Frecuencia de resonancia de la antena propuesta para ranuras de distintos tamaños y posiciones. 55

4.4 Distribución del campo eléctrico bajo el parche en el modo (0,1), a lo largo del eje y ($x = 0$). 56

4.5 Impedancia de entrada a la frecuencia de resonancia en función de la posición del punto de alimentación a lo largo del eje y ($x_0 = 0$). 57

4.6 Planos E y H del patrón de radiación: a) modelo de cavidad resonante, b) modelo de cavidad resonante + GTD. 58

4.7 Diagrama de Smith de las distintas antenas: a) antena de referencia; b) antena A; c) antena B; d) antena C. 60

4.8 Patrón de radiación de las distintas antenas: a) antena de referencia; b) antena A; c) antena B; d) antena C. 61

B.1 Geometría del problema de difracción: a) vista lateral; b) superior. 71

B.2 Campo generado por: a) líneas de corriente; b) difracción. . . . 72

B.3 Plano E del patrón de radiación de las distintas antenas: a) antena de referencia; b) antena A; c) antena B; d) antena C. . . 75

B.4 Plano H del patrón de radiación de las distintas antenas: a) antena de referencia; b) antena A; c) antena B; d) antena C. . . 76

Índice de Tablas

2.1 Propiedades de las distintas antenas simuladas. 21

3.1 Parámetro α de la función $K/Nodos^{\alpha}$ que se ajusta a las curvas de error de los distintos tipos de antenas, para: a) número de onda; b) frecuencia de resonancia. 46

4.1 Dimensiones de las antenas construidas (a, x_0 y y_0 en mm, b, c y Δ son proporcionales a a). 52

4.2 Características de las antenas (halladas numéricamente). 58

4.3 Características de las antenas (halladas experimentalmente). . . 59

A.1 Cantidades Duales 68

A.2 Ecuaciones Duales 68

Capítulo 1

Introducción

1.1 Antecedentes

1.1.1 Electromagnetismo Computacional

Los problemas de electromagnetismo se describen matemáticamente por medio de las ecuaciones de Maxwell. La solución de dichas ecuaciones se encuentra sujeta a condiciones de borde impuestas por la geometría de cada problema en particular [1, 2]. La búsqueda de soluciones analíticas es una tarea complicada, y sólo es posible hallarlas cuando la geometría que define el problema es simple.

Con la aparición de las computadoras y la disminución del costo de cómputo, los métodos numéricos se han convertido en una herramienta fundamental para la resolución de problemas de electromagnetismo [3]. Sin embargo, no existe una técnica que pueda aplicarse en general, sino que cada problema debe ser contemplado en forma particular y estudiado hasta hallar una o varias formulaciones cuyos resultados sean compatibles con la solución analítica, si es que ésta es conocida, o validados por medio de mediciones. Por ello, con el transcurso del tiempo se han desarrollado una gran variedad de métodos numéricos: método de las diferencias finitas en el dominio del tiempo (FDTD), método de los momentos (MoM), método de la ecuación integral de borde (BIEM), método de los elementos finitos (FEM), método de los elementos de contorno (BEM), etc. [4].

1.1.2 Antenas de Microtira

La antena de microtira surge de la idea de utilizar circuitos impresos no sólo como líneas de transmisión sino también como elememtos radiantes. Esta idea comenzó a ser estudiada unos 40 años atrás; sin embargo, la popularidad de este tipo de antena continúa creciendo debido a sus excelentes características: es una antena simple, liviana y compacta, mecánicamente robusta, fácil de construir y de integrar con otros dispositivos [5].

Las teorías existentes sólo permiten estudiar y diseñar antenas de microtira convencionales como son las de forma rectangular y circular, debido a la dificultad del problema de considerar formas complicadas. Sin embargo, un problema de interés actual consiste en la búsqueda de nuevas formas que permitan modificar o acentuar ciertas propiedades, como por ejemplo, disminuir la frecuencia de resonancia para un dado tamaño de antena [6, 7, 8, 9, 10, 11]. Para ello, es necesario emplear métodos numéricos capaces de analizar antenas de geometría no convencional.

1.2 Objetivos de la Tesis

El objetivo de esta tesis consiste en desarrollar algoritmos de computadora que permitan analizar y diseñar antenas de microtira de forma arbitraria. Para ello se emplean los métodos de los *elementos finitos* [12, 13, 14], los *elementos de contorno* [15, 16, 17] y una variante de este último, conocida como *método de reciprocidad dual* (DRM) [15, 16]. El comportamiento de los diferentes métodos es estudiado, en particular para el cálculo de la frecuencia de resonancia e impedancia de entrada de la antena.

Con las herramientas computacionales desarrolladas, se analiza una antena de geometría novedosa que consiste en un parche cuadrado con una ranura excéntrica en su interior [18, 19, 20]. Esta antena se caracteriza por tener una frecuencia de resonancia menor que la de una antena cuadrada simple. Más aún, el valor de dicha frecuencia se controla con el tamaño de la ranura. Otra particularidad importante, es que es posible encontrar un punto de alimentación con la impedancia adecuada (50Ω) si se ubica correctamente la ranura.

1.3 Organización de la Tesis

Este trabajo se encuentra organizado de la siguiente manera. En el Capítulo 2 se describe la antena de microtira, y se la estudia utilizando el modelo de *cavidad resonante*. Se muestra cómo calcular las principales caraterísticas de las antenas (patrón de radiación, impedancia de entrada, frecuencia de resonancia, directividad, eficiencia y ancho de banda) a partir de este modelo.

En el Capítulo 3 se utilizan los métodos FEM, BEM y DRM para simular una antena de microtira de forma genérica, y se realiza un estudio comparativo de los mismos.

Parte de la tarea consistió en analizar una antena de geometría novedosa utilizando los algoritmos numéricos desarrollados durante el trabajo de tesis. En el Capítulo 4 se muestran los resultados de las simulaciones; y las mismas se comparan con los resultados experimentales, obtenidos de la medición de varios prototipos de antenas.

Finalmente, en el Capítulo 5 se presentan las conclusiones de la tesis y se realizan sugerencias para futuros trabajos de investigación en el tema.

Capítulo 2

Antenas de Microtira

2.1 Introducción

La antena de microtira es un dispositivo, que en su forma más simple, consiste en un parche conductor separado de un plano de tierra por una lámina delgada (espesor $t \ll \lambda$) de material dieléctrico, como se muestra en la Figura 2.1. La forma del parche puede ser arbitraria, pero debido a la dificultad del diseño generalmente se utilizan formas simples como rectángulos o círculos. Al excitar el parche se establece un campo debajo de éste y en su borde. Este último al extenderse al espacio libre, por encima del dieléctrico, se propaga. Este tipo de antena puede alimentarse por medio de una línea de microtira o con un cable coaxil a través del plano de tierra [5].

En este capítulo se analiza la antena de microtira por un método tradicional conocido como modelo de *cavidad resonante*. A partir de este modelo se determinan analíticamente las principales propiedades de las antenas: patrón de radiación, impedancia de entrada, frecuencia de resonancia, ancho de banda, directividad y eficiencia. Finalmente, se estudian algunas antenas de forma simple.

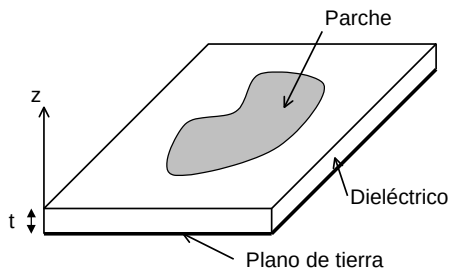


Figura 2.1: Geometría de una antena de microtira de forma arbitraria.

2.2 Modelo de Cavidad Resonante

Una forma simple y relativamente exacta de estudiar las antenas de microtira es por medio del modelo de cavidad resonante [21, 22]. Dicho modelo se basa en considerar la región definida entre el plano de tierra y el parche como una cavidad resonante. Se asume que la distribución del campo electromagnético bajo el parche es escencialmente la misma que en la cavidad. Luego, a partir del campo se pueden determinar las propiedades de la antena.

En el análisis de una antena de microtira de sustrato dieléctrico delgado ($t \ll \lambda$), se pueden realizar las siguientes aproximaciones:

i. En la región definida entre el parche y el plano de tierra, el campo eléctrico sólo tiene componente en z, mientras que el magnético tiene en x e y.

ii. En la misma región, el campo eléctrico y magnético son independientes de la variable z.

iii. La componente de la corriente eléctrica normal al borde del parche es despreciable en todo punto de dicho borde, lo que implica que la componente del campo magnético tangencial al borde es despreciable.

Como resultado de *i)-iii)*, una antena de microtira puede ser considerada una cavidad resonante definida por paredes magnéticas laterales y eléctricas superior e inferior. La distribución del campo electromagnético en la cavidad, y por lo consecuente en la antena, se obtiene resolviendo las ecuaciones derivadas a partir de las leyes de Maxwell.

Obviamente, una cavidad cerrada no irradia potencia, por lo cual su impedancia de entrada será reactiva. Para tener en cuenta el efecto de radiación y la potencia disipada en los materiales, este modelo propone incrementar las pérdidas en el dieléctrico (ver Sección 2.6).

En el perímetro de la antena el campo eléctrico no se encuentra confinado bajo el parche metálico, sino que se extiende hacia los laterales. Este campo es denominado campo de borde. Debido al mismo, la antena de microtira se comporta como si fuese de dimensiones algo mayores. Un punto débil de este modelo es que no tiene en cuenta el campo de borde, lo cual se soluciona extendiendo las dimensiones físicas de la antena. Para calcular las dimensiones efectivas se utilizan fórmulas que provienen del diseño de resonadores y líneas de microtiras [23, Cap. 3].

2.3 Ecuaciones del Campo

A partir del modelo descripto en la sección anterior, se estableció que una antena de microtira puede ser aproximada por una cavidad resonante. Por lo cual, el siguiente problema consiste en determinar el campo eléctrico $\mathbf{E}$ y magnético $\mathbf{H}$ en el interior de la cavidad a partir de una distribución de corriente $\mathbf{J}$ impresa por una fuente. Partiendo de las ecuaciones de Maxwell (en un sistema de unidades *mksc*) para campos armónicos:

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \tag{2.1}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega\epsilon\mathbf{E} \tag{2.2}$$

donde ω es la frecuencia angular, ϵ y μ son la permitividad y permeabilidad del dieléctrico, respectivamente. Calculando el rotor de (2.1):

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{H} \tag{2.3}$$

Con (2.2) en (2.3):

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{J} + \omega^2\epsilon\mu\mathbf{E} \tag{2.4}$$

Haciendo uso de la identidad $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2\mathbf{F}$, se encuentra la ecuación de onda del campo eléctrico:

$$\nabla^2\mathbf{E} + k^2\mathbf{E} - \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E}) = j\omega\mu\mathbf{J} \tag{2.5}$$

siendo $k = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$ la constante de propagación en el dieléctrico. Para una antena de microtira alimentada con un cable coaxil, la densidad de corriente impresa por la fuente puede ser modelizada por:

$$\mathbf{J} = I\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r_0})\widehat{z} \tag{2.6}$$

donde I es la corriente entregada por la fuente, $\mathbf{r}_0$ es el vector que indica la posición del punto de alimentación y $\widehat{z}$ el versor en la dirección de z. Si se hacen valer las aproximaciones *i)-ii)* del modelo teórico dadas en la sección anterior, el campo eléctrico es $\mathbf{E} = E_z(x, y)\widehat{z}$. Por lo cual, $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = 0$ y la ecuación vectorial (2.5) se simplifica a una ecuación escalar:

$$(\nabla_t^2 + k^2)E_z = j\omega\mu J_z \text{ en } \Omega \tag{2.7}$$

donde ∇_t^2 es la parte transversal del operador Laplaciano.

Además de satisfacer la ecuación anterior, el campo eléctrico bajo el parche se encuentra sujeto a las condiciones de frontera impuestas por la geometría del problema. Dado que se trata de una cavidad de paredes eléctricas y magnéticas, las condiciones de borde que definen el campo en su interior son: a) $\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0$ en la cara superior e inferior, y b) $\mathbf{H} \times \mathbf{n} = 0$ en las caras laterales. Para comprender mejor esta última condición, se desarrolla (2.1) en componentes rectangulares:

$$\begin{aligned} H_x &= \tfrac{-1}{j\omega\mu}\tfrac{\partial E_z}{\partial y} \\ H_y &= \tfrac{1}{j\omega\mu}\tfrac{\partial E_z}{\partial x} \end{aligned} \tag{2.8}$$

Por lo que la condición b) implica que $\partial E_z/\partial n = 0$ en la cara lateral de la cavidad, es decir, a lo largo del perímetro del parche.

Por lo tanto, resolviendo la ecuación (2.7) se determina el campo eléctrico bajo el parche. El campo magnético se puede calcular a partir de (2.8). Luego, como se mencionó anteriormente, una vez conocida la distribución del campo, es posible determinar otras propiedades de la antena.

2.4 Solución Analítica

En la sección anterior se mostró que el campo eléctrico bajo el parche debe cumplir con la ecuación diferencial de Helmholtz (ecuación 2.7). La solución

de dicho problema se puede escribir por medio de una descomposición en los distintos modos de resonancia de la cavidad, es decir, en términos de los autovalores k_m y autofunciones ψ_m del siguiente problema:

$$\begin{aligned} (\nabla_t^2 + k_m^2)\psi_m &= 0 \text{ en } \Omega \\ \tfrac{\partial \psi_m}{\partial n} &= 0 \text{ en } \Gamma \end{aligned} \tag{2.9}$$

donde Ω es la región definida por el parche y Γ la curva que lo rodea. Entonces E_z se puede escribir como:

$$E_z = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \psi_m \tag{2.10}$$

siendo c_m coeficientes a determinar. Con (2.10) en (2.7):

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m (\nabla_t^2 + k^2)\psi_m = j\omega\mu J_z \tag{2.11}$$

Sumando y restando el término $k_m^2\psi_m$ en (2.11), y reordenando los términos:

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m [(\nabla_t^2 + k_m^2)\psi_m + (k^2 - k_m^2)\psi_m] = j\omega\mu J_z \tag{2.12}$$

Por (2.9):

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m (k^2 - k_m^2)\psi_m = j\omega\mu J_z \tag{2.13}$$

Multiplicando la expresión anterior por ψ_n^*, donde * es el símbolo de conjugado, e integrando en el dominio Ω:

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m (k^2 - k_m^2)\langle \psi_m, \psi_n \rangle = j\omega\mu \langle J_z, \psi_n \rangle \tag{2.14}$$

donde $\langle , \rangle$ es la operación de producto interno de funciones, es decir, $\langle \psi_m, \psi_n \rangle = \int \psi_m \psi_n^* d\Omega$. Dado que las autofunciones de la ecuación (2.9) forman un conjunto ortogonal completo, entonces $\langle \psi_m, \psi_n \rangle = 0$ si $m \neq n$; y la expresión (2.14) se reduce a:

$$c_m (k^2 - k_m^2)\langle \psi_m, \psi_m \rangle = j\omega\mu \langle J_z, \psi_m \rangle \tag{2.15}$$

Entonces los coeficientes de (2.10) son:

$$c_m = \frac{j\omega\mu \langle J_z, \psi_m \rangle}{(k^2 - k_m^2)\langle \psi_m, \psi_m \rangle} \tag{2.16}$$

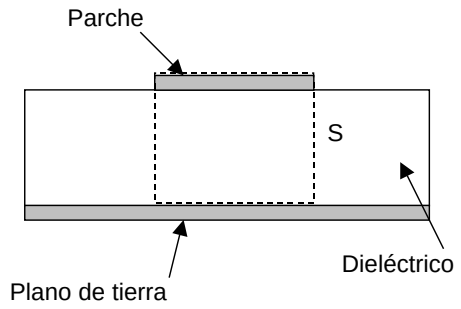


Figura 2.2: Principio de Equivalencia aplicado a una antena de microtira.

Por lo tanto, el campo eléctrico bajo el parche de una antena de microtira puede ser expresado en términos de los modos de resonancia ψ_m de la cavidad:

$$E_z = j\omega\mu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\langle J_z, \psi_m \rangle}{(k^2 - k_m^2)\langle \psi_m, \psi_m \rangle} \psi_m \tag{2.17}$$

En la práctica, la solución (2.17) es una serie truncada. La cantidad de términos a considerar resulta de una relación de compromiso entre exactitud y tiempo de cómputo [23, Sec. 9.3].

Una notación muy común para escribir este tipo de soluciones es por medio de la función de Green. Se dice que E_z es la convolución de la función de Green $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ con la fuente J_z:

$$E_z(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') J_z(\mathbf{r}')\, d\Omega \tag{2.18}$$

Siendo la función de Green para este problema:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = j\omega\mu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\psi_m(\mathbf{r})\psi_m^*(\mathbf{r}')}{(k^2 - k_m^2)\langle \psi_m, \psi_m \rangle} \tag{2.19}$$

2.5 Campo Radiado

Una vez conocida la distribución del campo bajo el parche de la antena, se puede determinar el campo radiado. Dicho campo se calcula a partir del campo en la superficie de la cavidad. Aplicando el *principio de equivalencia*

(ver Apéndice A.1) sobre la superficie S exterior a la cavidad (ver Figura 2.2), las fuentes equivalentes que originan el campo lejano son:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_e &= \mathbf{n} \times \mathbf{H} \\ \mathbf{M}_e &= \mathbf{E} \times \mathbf{n} \end{aligned} \tag{2.20}$$

donde $\mathbf{J}_e$ y $\mathbf{M}_e$ son densidades superficiales de corriente eléctrica y magnética, y $\mathbf{n}$ es el versor normal a la superficie S. Sin embargo, como la componente tangencial del campo eléctrico a las caras superior e inferior es nula, al igual que la componente tangencial del campo magnético a las caras laterales, sólo la componente E_z contribuye con las fuentes equivalentes:

$$\mathbf{M}_e = 2E_z\widehat{z} \times \mathbf{n} \tag{2.21}$$

donde el factor 2 tiene en cuenta la fuente imagen generada por el plano de tierra. El campo lejano en el punto $\mathbf{r}$ se calcula a partir del potencial vectorial eléctrico:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{\epsilon_0}{4\pi}\int_S \frac{\mathbf{M}_e(\mathbf{r}')e^{-jk_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,ds' \tag{2.22}$$

con $\mathbf{r}' \in S$, siendo S la superficie lateral que rodea el parche. Para simplificar el cálculo de (2.22) se pueden realizar las siguientes aproximaciones: a) siendo $t \ll \lambda \ll |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$, el argumento de la integral se considera independiente de z'; b) siendo $\mathbf{r} \gg \mathbf{r}'_{\mathbf{max}}$ se cumple que $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \simeq r - \mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'/r$, siendo r el módulo del vector posición $\mathbf{r}$. Entonces (2.22) es:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) \simeq \frac{\epsilon_0 t e^{-jk_0 r}}{4\pi r}\int_\Gamma \mathbf{M}(\mathbf{r}')e^{jk_0\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'/r}\,dl' \tag{2.23}$$

Teniendo en cuenta (2.21), y que $\mathbf{t} = \widehat{z} \times \mathbf{n}$ es el versor tangente al perímetro del parche:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{\epsilon_0 t e^{-jk_0 r}}{2\pi r}\int_\Gamma E_z(\mathbf{r}')e^{jk_0\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'/r}\mathbf{t}(\mathbf{r}')\,dl' \tag{2.24}$$

Desarrollando en componentes rectangulares:

$$\begin{aligned} F_x(\mathbf{r}) &= \tfrac{\epsilon_0 t e^{-jk_0 r}}{2\pi r}\textstyle\int_\Gamma E_z(\mathbf{r}')e^{jk_0\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'/r}t_x(\mathbf{r}')\,dl' \\ F_y(\mathbf{r}) &= \tfrac{\epsilon_0 t e^{-jk_0 r}}{2\pi r}\textstyle\int_\Gamma E_z(\mathbf{r}')e^{jk_0\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'/r}t_y(\mathbf{r}')\,dl' \end{aligned} \tag{2.25}$$

Luego, el campo eléctrico en la zona lejana es (ver Apéndice A.2):

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= j\omega Z_0(-F_\phi\widehat{\theta} + F_\theta\widehat{\phi}) \\ &= j\omega Z_0(F_x\sin\phi - F_y\cos\phi)\widehat{\theta} \\ &\quad + j\omega Z_0(F_x\cos\phi + F_y\sin\phi)\cos\theta\widehat{\phi} \end{aligned} \tag{2.26}$$

donde el símbolo ^ representa al versor en la dirección de la variable. El campo magnético se obtiene a partir del eléctrico, dado que en la región de campo lejano se cumple que $\mathbf{H} = \mathbf{E}/Z_0 \times \widehat{r}$, donde Z_0 es la impedancia intrínseca del medio.

A partir de las componentes del campo es posible determinar la intensidad de radiación. Esta cantidad indica la potencia radiada por unidad de ángulo sólido:

$$\begin{aligned} U(\theta,\phi) &= \frac{dP_r}{d\Omega} \\ &= \frac{r^2}{2}\mathrm{Re}(\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*)\cdot\widehat{r} \\ &= \frac{r^2}{2Z_0}(|E_\theta|^2+|E_\phi|^2) \end{aligned} \tag{2.27}$$

Otros parámetros importantes de una antena son la directividad y la ganancia:

$$D(\theta,\phi) = \frac{4\pi}{P_r}U(\theta,\phi) \tag{2.28}$$

$$\begin{aligned} G(\theta,\phi) &= \frac{4\pi}{P_i}U(\theta,\phi) \\ &= \frac{P_r}{P_i}D(\theta,\phi) \end{aligned} \tag{2.29}$$

donde P_r y P_i son la potencia radiada y de entrada, respectivamente. Dichas potencias se calcularán en la siguiente sección.

2.6 Impedancia de Entrada y Frecuencia de Resonancia

Al modelar la antena de microtira por medio de una cavidad cerrada no existe potencia radiada, por lo cual la impedancia de entrada resulta puramente reactiva (suponiendo que los materiales no tienen pérdidas). Una forma de solucionar este problema consiste en definir un factor de pérdida efectivo $\mathrm{tg}\,\delta_{ef}$, de forma tal que se le asignan todas las pérdidas al dieléctrico.

En una cavidad resonante, el factor de pérdida se relaciona con el factor de mérito Q por $\mathrm{tg}\,\delta = 1/Q$ [24, Sec. 2.8]. Entonces se puede definir $\mathrm{tg}\,\delta_{ef} =$

$1/Q = P/(2\omega W_e)$, donde W_e es el valor medio temporal de la energía almacenada en el campo eléctrico bajo el parche de la antena, y $P = P_r + P_d + P_c + P_s$ son las pérdidas debido a la potencia radiada P_r, a la disipada en el dieléctrico P_d, a la disipada en las paredes metálicas P_c y a la potencia que se propaga por el dieléctrico P_s. En antenas con dielétrico delgado se puede despreciar el último término. Es decir, que se debe calcular el factor de mérito de la antena, definido por:

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_r} + \frac{1}{Q_d} + \frac{1}{Q_c} \tag{2.30}$$

Se puede obtener una buena aproximación a Q a partir de la distribución del campo bajo el parche y en la región lejana, utilizando $\operatorname{tg}\delta$ en vez de $\operatorname{tg}\delta_{ef}$ [22]. Comenzando por calcular la energía almacenada en el campo eléctrico:

$$W_e = \frac{\epsilon}{4}\int_\Omega |\mathbf{E}|^2\, ds \tag{2.31}$$

Para calcular Q_r se debe determinar la potencia radiada a partir del campo lejano:

$$P_r = \frac{r^2}{2Z_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{pi/2}(|E_\theta|^2 + |E_\phi|^2)\sin\theta\, d\theta d\phi \tag{2.32}$$

El término debido a las pérdidas en el dieléctrico es simplemente:

$$Q_d = \frac{2\omega W_e}{P_d} = \frac{2\omega\frac{\epsilon}{4}\int_\Omega |\mathbf{E}|^2\, ds}{\frac{\omega\epsilon'}{2}\int_\Omega |\mathbf{E}|^2\, ds} = \frac{\epsilon}{\epsilon'} = \frac{1}{\operatorname{tg}\delta} \tag{2.33}$$

donde ϵ' es la permitividad relacionada a la corriente de conducción, es decir, a las pérdidas del dieléctrico. La potencia disipada en las paredes metálicas se calcula utilizando las mismas aproximaciones que en las guías de onda [24, Sec. 2.8]:

$$P_c = 2\frac{\mathcal{R}}{2}\int_\Omega |\mathbf{H}|^2\, ds \tag{2.34}$$

donde $\mathcal{R} = (\mu\omega/2\sigma)^{0.5}$ es la resistencia de superficie de un metal de conductividad σ. Además, en una cavidad resonante se cumple que la energía almacenada en el campo eléctrico W_e es igual a la almacenada en el campo magnético W_m, y estas energías son:

$$\begin{aligned} W_e &= \tfrac{\epsilon t}{4}\textstyle\int_\Omega |\mathbf{E}|^2\, ds \\ W_m &= \tfrac{\mu t}{4}\textstyle\int_\Omega |\mathbf{H}|^2\, ds \end{aligned} \tag{2.35}$$

Entonces:

$$\int_\Omega |\mathbf{H}|^2\, ds = \frac{4W_e}{\mu t} \tag{2.36}$$

Con (2.34) y (2.36) se tiene que el término debido a las pérdidas en el conductor es:

$$Q_c = \frac{2\omega W_e}{\mathcal{R}\frac{4W_e}{\mu t}} = t\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} \tag{2.37}$$

Una vez hallado el factor de pérdida efectivo $\operatorname{tg}\delta_{ef}$, la impedancia de entrada de la antena se calcula por medio de la relación entre la tensión V y la corriente I en el punto de alimentación:

$$Z_i = \frac{V}{I} = \frac{-tE_z(\mathbf{r}_0)}{I} \tag{2.38}$$

donde $E_z(\mathbf{r}_0)$ es el campo eléctrico en el punto de alimentación calculado a partir de (2.17) utilizando la constante de propagación efectiva $k_{ef} = k[\epsilon_r(1 - j\tan\delta_{ef})]^{1/2}$.

La expresión (2.38) permite calcular la impedancia de entrada de una antena de microtira al ser excitada a una dada frecuencia. Si el valor de la impedancia es puramente resistivo, la frecuencia se denomina frecuencia de resonancia f_r.

Finalmente, se encuentra pendiente de la sección anterior el cálculo de la potencia de entrada:

$$P_i = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(IV^*) = \frac{|V|^2}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{Z_i}\right) \tag{2.39}$$

donde Re representa la parte real de una cierta cantidad.

2.7 Ancho de Banda y Eficiencia

El ancho de banda (BW) de un dispositivo puede definirse de varias formas, siendo f_r/Q la más usual. Sin embargo, para antenas es más conveniente definirlo como el rango de frecuencias en donde la relación de onda estacionaria (SWR) se mantiene por debajo de cierto valor, comúnmente 2:

$$BW = \frac{SWR - 1}{Q\sqrt{SWR}}100\% \tag{2.40}$$

donde Q es el factor de mérito de la antena.

La eficiencia de radiación de la antena es la relación de la potencia radiada a la potencia de entrada:

$$\eta = \frac{P_r}{P_i} = \frac{P_r}{P_r + P_d + P_c} \tag{2.41}$$

Las potencias mencionadas en esta ecuación pueden calcularse a partir de las expresiones (2.32), (2.33) y (2.37) dadas en la sección anterior.

2.8 Antenas de geometría simple

Si la antena de microtira tiene una geometría regular, se pueden calcular los autovalores y autofunciones de la ecuación escalar de Helmholtz. Esto permite hallar en forma analítica las propiedades de estas antenas. En esta sección se emplean las fórmulas presentadas anteriormente para caracterizar algunas antenas simples, como son la de forma rectangular, circular y triangular.

2.8.1 Parche Rectangular

La antena de forma rectangular es probablemente la más popular de las antenas de microtira. Su geometría se define por las dimensiones a y b, y por la ubicación del punto de alimentación (x_0, y_0), ver Figura 2.3.

Desarrollando la ecuación (2.9) en componentes rectangulares y aplicando el método de separación de variables, se encuentra que las autofunciones y los autovalores del problema son:

$$\begin{aligned} \psi_{mn}(x,y) &= \cos(m\pi x/a)\cos(n\pi y/b) \\ k_{mn}^2 &= (m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2 \end{aligned} \tag{2.42}$$

donde $m, n = 0, 1, 2...$. Siendo la fuente con que se excita la antena una línea coaxil: $J_z = I\delta(x - x_0)\delta(y - y_0)$; operando se encuentra que el campo eléctrico bajo el parche es:

$$E_z(x,y) = \frac{j\omega\mu I}{ab} \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\chi_{mn}\psi_{mn}(x_0,y_0)\psi_{mn}(x,y)}{(k^2 - k_{mn}^2)} \tag{2.43}$$

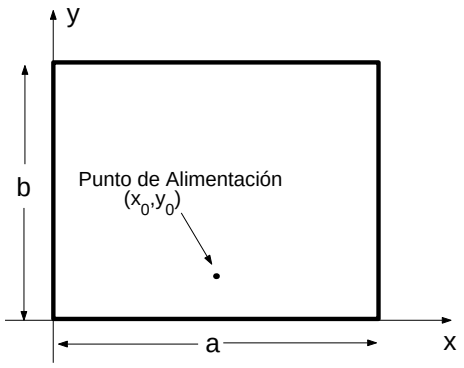


Figura 2.3: Geometría de una antena de microtira de forma rectangular.

$$\text{donde } \chi_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{si } m, n = 0 \\ 2 & \text{si } m \text{ o } n = 0 \\ 4 & \text{si } m \text{ y } n \neq 0 \end{cases}$$

Para tener en cuenta el campo de borde en el perímetro del parche, se utiliza la siguiente fórmula empírica para el cálculo de las dimensiones efectivas de la antena [23, Cap. 3]:

$$\begin{aligned} a_{ef} &= a + t/2 \\ b_{ef} &= b + t/2 \end{aligned} \tag{2.44}$$

Para calcular las dimensiones efectivas también se pueden utilizar fórmulas análiticas obtenidas a partir del trabajo de Wheeler [25], quien en 1964 calculó la capacidad de una línea de microtira utilizando el método de transformaciones conformes. Sin embargo, se verificó que, al menos para los problemas tratados en esta tesis, las magnitudes a y b deben ser extendidas en una magnitud del orden de t. Por lo tanto, el error cometido es del mismo orden que al utilizar las correcciones (2.44).

2.8.2 Parche Circular

Otra de las antenas más utilizadas es la de forma circular. En la Figura 2.4 se muestra su geometría y ubicación del punto de alimentación.

Debido a la simetría cilíndrica del problema es posible hallar en forma

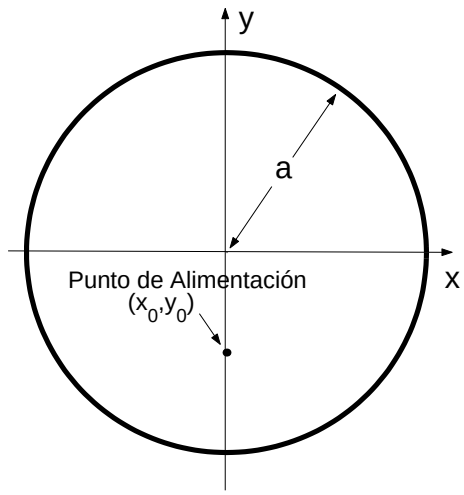


Figura 2.4: Geometría de una antena de microtira de forma circular.

analítica las autofunciones y autovalores del problema:

$$\begin{aligned} \psi_{mn}(x,y) &= [A_{mn}\sin(m\phi) + B_{mn}\cos(m\phi)]\, J_m(k_{mn}\rho) \\ k_{mn} &= \tfrac{x'_{mn}}{a} \\ J'_m(x'_{mn}) &= 0 \end{aligned} \tag{2.45}$$

donde J_m es la función de Bessel de primer tipo, con $m = 0, 1, 2...$ y $n = 1, 2....$ Al excitar la antena con una línea coaxil, es decir, con una fuente $J_z = I\delta(r - r_0)\delta(\phi - \phi_0)/r$ el campo eléctrico bajo el parche es:

$$E_z(r,\phi) = \frac{j\omega\mu I}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi_m k_{mn}^2 J_m(k_{mn}r_0)J_m(k_{mn}r)\cos[m(\phi-\phi_0)]}{(k^2-k_{mn}^2)(x'^2_{mn}-m^2)J_m^2(x'_{mn})} \tag{2.46}$$

donde $\chi_m = \begin{cases} 1 & \text{si } m = 0 \\ 2 & \text{si } m = 1 \end{cases}$

El efecto del campo de borde se tiene en cuenta aumentando el radio del parche. El radio efectivo se calcula a partir de la siguiente fórmula [23, Cap. 3]:

$$a_{ef} = a\left[1 + \frac{2t}{\pi a\epsilon_r}\left(1.7726 + \ln\frac{\pi a}{2t}\right)\right]^{0.5} \tag{2.47}$$

Esta expresión fue obtenida por Kirchhoff en 1877 al calcular la capacidad de un capacitor circular con dieléctrico de $\epsilon_r = 1$, utilizando el método de transformaciones conformes para tener en cuenta el campo de borde. Luego, en 1977 fue generalizada por Shen para $\epsilon_r \neq 1$ [26].

2.8.3 Parche Triangular

La antena con forma de triángulo equilátero (Figura 2.5) es una antena poco utilizada, pero debido a su geometría simple es posible estudiarla analíticamente. De igual manera que en los casos anteriores, aplicando el método de separación de variables se pueden encontrar los autovalores y autovectores de la ecuación diferencial que la representa; y a partir de éstos describir el campo eléctrico bajo el parche [23, Cap. 9]:

$$E_z(x,y) = \frac{j4\omega\mu I}{a^2\sqrt{27}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{T_1(x_0,y_0)T_1(x,y) + T_2(x_0,y_0)T_2(x,y)}{(k^2 - k_{mn}^2)} \tag{2.48}$$

donde:

$$k_{mn} = \frac{4\pi}{3a}\sqrt{m^2 + n^2 + mn} \tag{2.49}$$

$$\begin{aligned} T_1(x,y) &= (-1)^l \cos\left(\frac{2\pi l x}{a\sqrt{3}}\right) \cos\left[\frac{2\pi(m-n)y}{3a}\right] \cdots \\ &+(-1)^m \cos\left(\frac{2\pi m x}{a\sqrt{3}}\right) \cos\left[\frac{2\pi(n-l)y}{3a}\right] \cdots \\ &+(-1)^n \cos\left(\frac{2\pi n x}{a\sqrt{3}}\right) \cos\left[\frac{2\pi(l-m)y}{3a}\right] \cdots \end{aligned} \tag{2.50}$$

$$\begin{aligned} T_2(x,y) &= (-1)^l \cos\left(\frac{2\pi l x}{a\sqrt{3}}\right) \sin\left[\frac{2\pi(m-n)y}{3a}\right] \\ &+(-1)^m \cos\left(\frac{2\pi m x}{a\sqrt{3}}\right) \sin\left[\frac{2\pi(n-l)y}{3a}\right] \\ &+(-1)^n \cos\left(\frac{2\pi n x}{a\sqrt{3}}\right) \sin\left[\frac{2\pi(l-m)y}{3a}\right] \end{aligned} \tag{2.51}$$

$$l = -m - n \tag{2.52}$$

Nuevamente, para incorporar el efecto del campo de borde, la longitud del lado a del parche deben ser reemplazada por su valor efectivo:

$$a_{ef} = a + t\epsilon_r^{-0.5} \tag{2.53}$$

expresión semiempírica propuesta por J. Helszajn y D. S. James en [27].

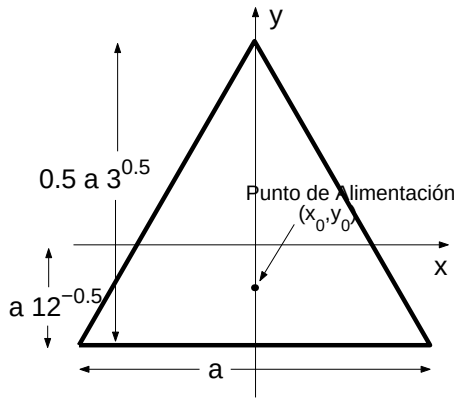


Figura 2.5: Geometría de una antena de microtira de forma triangular.

2.9 Resultados

En esta sección se emplean las fórmulas desarrolladas anteriormente para simular algunas antenas: a) parche rectangular de lados $a = 114.3mm$ y $b = 76.2mm$, b) circular de radio $a = 67mm$, y c) triangular de lado $a = 10mm$. Para su simulación, se suponen construídas sobre un sustrato de espesor $t = 1.6mm$, permitividad relativa $\epsilon_r = 2.62$ y tangente de pérdida $\tan\delta = 0.001$. Dichas antenas fueron eligidas como ejemplo, pues se encuentran analizadas y medidas en [21, 22] y [23, Cap. 3]. Los resultados obtenidos se utilizarán en el próximo capítulo para evaluar el desempeño de los métodos numéricos.

Modo de Resonancia

Comúnmente, la antena de microtira se utiliza a la frecuencia correspondiente al modo de resonancia de menor orden. Para la antena rectangular propuesta el modo de menor orden es el (0,1), lo cual significa que campo eléctrico bajo el parche es aproximadamente constante a lo largo del eje x y varía en un semiciclo a lo largo del eje y. Para la antena circular y triangular los modos de menor orden son (1,1) y (0,1), respectivamente.

Impedancia de Entrada

El valor de la impedancia de entrada varía con la posición del punto de alimentación, siguiendo las variaciones del campo campo eléctrico bajo el parche,

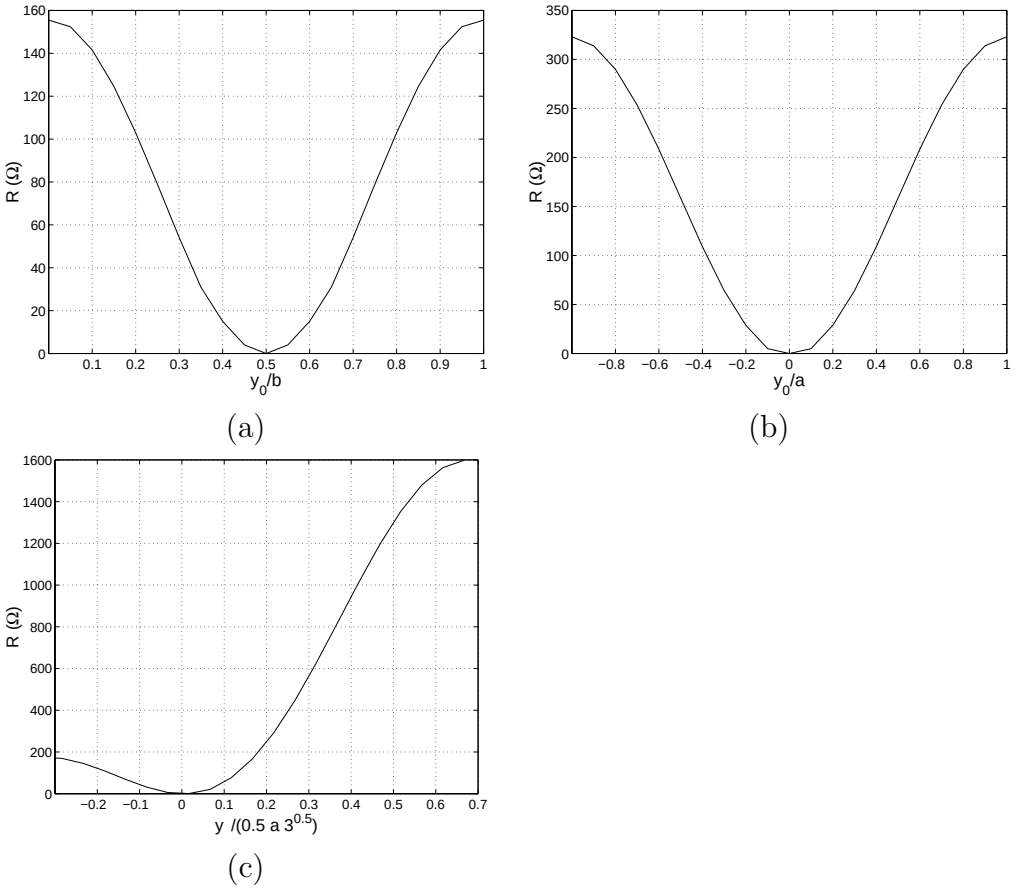


Figura 2.6: Impedancia de entrada a la frecuencia de resonancia en función de la posición del punto de alimentación: a) parche rectangular ($x_0 = a/2$); b) circular ($x_0 = 0$); c) triangular ($x_0 = 0$).

según lo expresa (2.38). A la frecuencia de resonancia correspondiente al modo más bajo, la resistencia de entrada R_i es elevada cerca del borde y decrece a medida que el punto de alimenta se desplaza hacia el interior (ver Figura 2.6). Eligiendo correctamente la posición del punto de alimentación, es posible adaptar la antena con la línea de trasmisión.

En la Figura 2.7 se muestra la impedancia de entrada en función de la frecuencia. La frecuencia de resonancia de la antena es algo mayor que la frecuencia del modo de resonancia de la cavidad (ver Tabla 2.1). Esto se debe a la contribución de los modos no resonantes, lo cual se aprecia a partir de la ecuación (2.17). Por ejemplo, si el campo bajo el parche se aproxima sólo por el modo dominante la frecuencia de resonancia coincide con la del modo

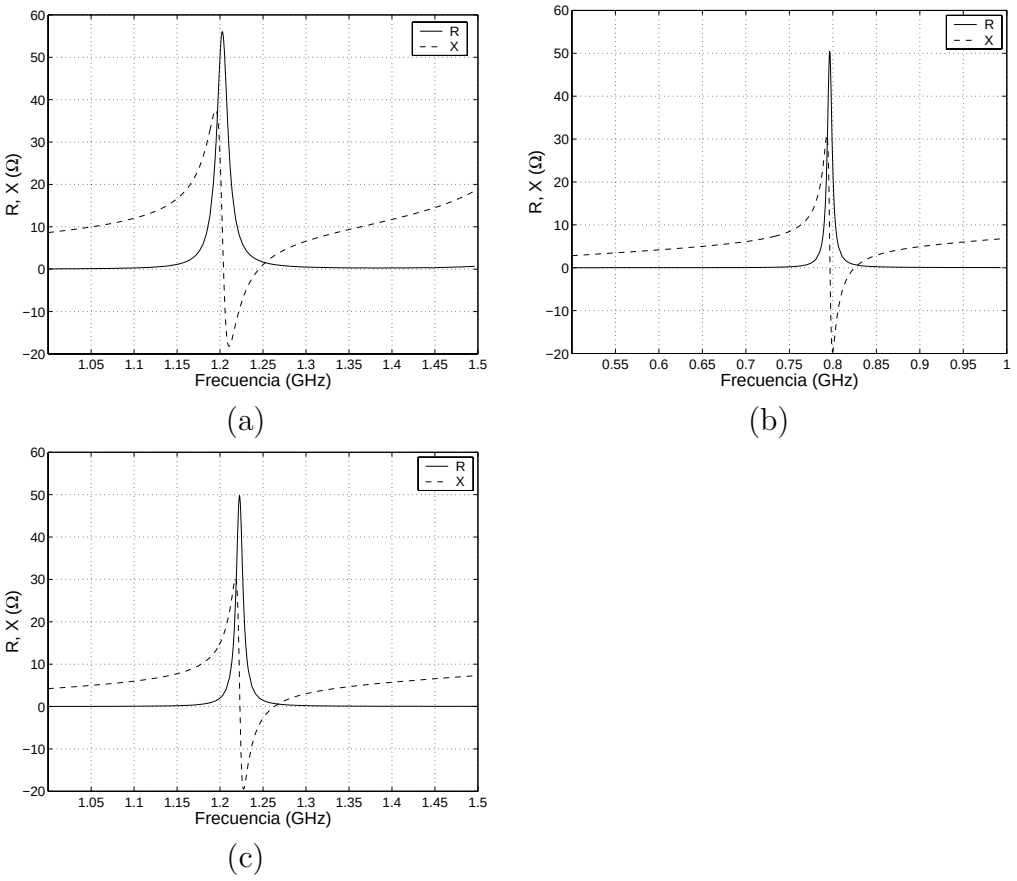


Figura 2.7: Impedancia de entrada en función de la frecuencia: a) parche rectangular ($x_0 = a/2$, $y_0 = 0.3b$); b) circular ($x_0 = 0$, $y_0 = -0.26a$); c) triangular ($x_0 = 0$, $y_0 = -0.11a$).

excitado; si se toman los primeros nueve modos, la frecuencia de resonancia aumenta un 0.05%; y al tomar los primeros 1600 modos el aumento es de un 0.1%.

Ancho de Banda

La antena de microtira es básicamente una cavidad resonante con un factor de mérito Q elevado. Por lo cual, tiene un ancho de banda angosto, del orden del 1% como se muestra en la Tabla 2.1. Esto mismo puede verificarse al observar el comportamiento de la impedancia de entrada en función de la frecuencia, mostrado en la Figura 2.7.

Tabla 2.1: Propiedades de las distintas antenas simuladas.

Parche	Rectangular	Circular	Triangular
Modo	$(0,1)$	$(1,1)$	$(0,1)$
f_{mn} (MHz)	1,202.7	796.4	1,222.7
f_r (MHz)	1,204.1	796.8	1,223.2
BW (%)	0.9	0.6	0.5
D (dBi)	7.3	7.0	6.9
η (%)	83.1	69.8	71.2

Directividad y Eficiencia

A partir del modelo de cavidad resonante es posible calcular otros parámetros importantes como la directividad y la eficiencia. En la Tabla 2.1 se muestran los valores correspondientes a las distintas antenas simuladas.

El modelo utilizado considera el plano de tierra infinito. En la práctica, la directividad de las antenas es menor que la calculada, debido a que el plano de tierra de dimensiones finitas permite que parte de la energía se irradie hacia atrás.

Patrón de Radiación

Cada modo de resonancia tiene un patrón de radiación característico. Los modos de resonancia bajos suelen tener un haz ancho en la dirección normal al plano de tierra.

La antena rectangular y circular tienen sólo una componente por plano principal del patrón de radiación. En cambio, en el parche triangular ambas componentes se encuentran presentes en el plano $\phi = 0°$.

2.10 Resumen

En este capítulo se presentó el modelo de cavidad resonante, por medio del cual se pueden calcular analíticamente las propiedades de antenas de microtira con

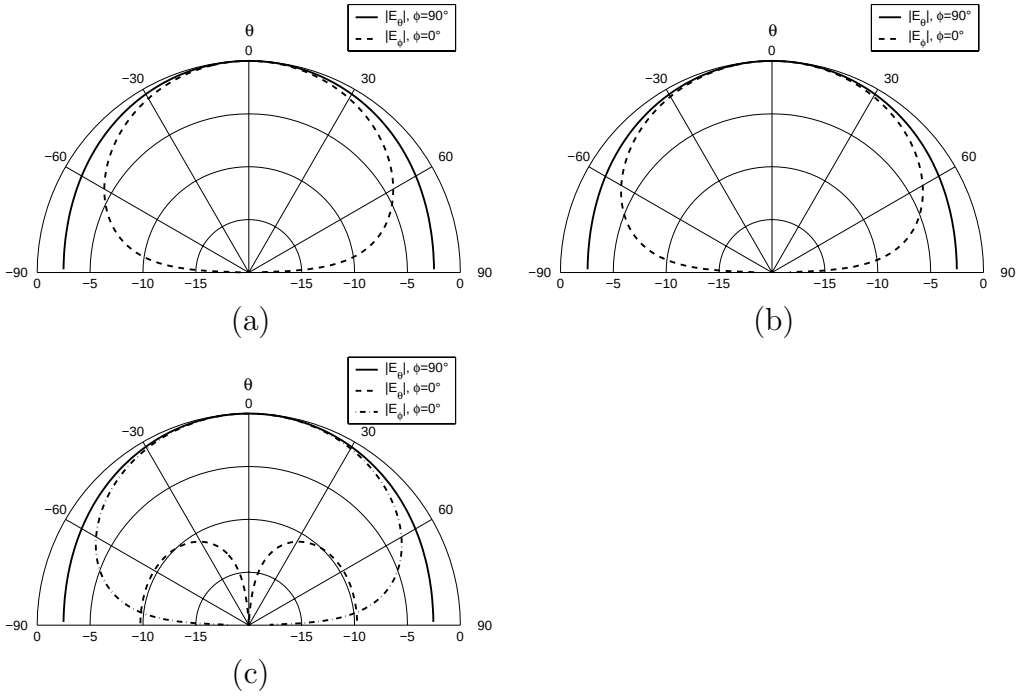


Figura 2.8: Patrón de radiación a la frecuencia de resonancia: a) parche rectangular; b) circular; c) triangular.

sustratos delgados y geometría regular. A modo de ejemplo se caracterizaron tres tipos de antenas: una de forma rectangular, otra circular y una triangular. Los resultados obtenidos son aceptables comparados con las mediciones mostradas en [21], [22], [23, Cap. 3]: el error relativo cometido en el cálculo de la frecuencia de resonancia y la impedancia de entrada es del orden del 1% y 10%, respectivamente.

Capítulo 3

Métodos Numéricos

3.1 Introducción

En el capítulo anterior se mostró que una antena de microtira con sustrato delgado puede ser estudiada por medio del modelo de cavidad resonante. Este modelo resume todo el problema en una ecuación diferencial de segundo orden. Cuando la forma de la antena es simple, es posible hallar una solución analítica de la ecuación en términos de los autovalores y autofunciones del problema. De lo contrario, es necesario utilizar métodos numéricos.

En este capítulo se aplican los métodos FEM, BEM y DRM para resolver numéricamente la ecuación antes mencionada. Se muestra como a partir de estos métodos se obtiene un sistema lineal de ecuaciones que contiene la solución aproximada del problema. Luego, para estudiar el comportamiento de los métodos, se simulan las antena descriptas en el capítulo anterior.

3.2 Ecuación Diferencial

A partir del modelo de cavidad resonante se establece que el campo eléctrico bajo el parche conductor de una antena de microtira satisface la ecuación de

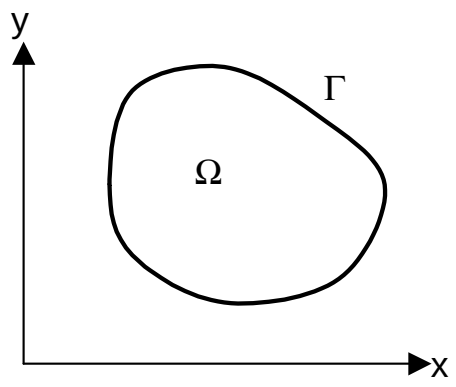


Figura 3.1: Geometría del problema.

Helmholtz no homogénea:

$$\begin{aligned} (\nabla^2 + k^2)u - b = 0 \ \text{ en } \Omega \\ \tfrac{\partial u}{\partial n} = 0 \ \text{ en } \Gamma \end{aligned} \tag{3.1}$$

siendo $k = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$, $u = E_z$ la componente en z del campo eléctrico y $b = j\omega\mu J_z$. Ω es el dominio donde se cumple la ecuación diferencial y Γ el contorno de dicho dominio (ver Figura 3.1). Para una antena de microtira alimentada con un cable coaxil, la densidad de corriente impresa por la fuente puede ser modelizada por:

$$J_z(\mathbf{r}) = I\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \tag{3.2}$$

donde $\mathbf{r}_0$ es el vector que indica la posición del punto de alimentación.

La ecuación (3.1) muestra la forma fuerte de la ecuación diferencial, pues la incognita aparece dentro de un operador diferencial de segundo orden. Para hallar la solución numérica es conveniente convertirla en la forma débil, en la cual la ecuación diferencial se lleva a una ecuación integral y se reduce el orden de la derivada de la incógnita.

3.3 Método de los Elementos Finitos

La esencia del método de los elementos finitos consiste en subdividir el dominio Ω del problema en *elementos*. Dentro de cada elemento, la solución es aproximada por funciones de forma conocida. De esta forma, se genera un sistema

lineal de ecuaciones, de donde se puede obtener la solución aproximada del problema.

3.3.1 Formulación

La ecuación (3.1) debe ser escrita en una forma más adecuada para ser tratada numéricamente; ésta es su forma débil. Para hallarla, se aplica el método de los residuos ponderados, es decir, (3.1) se multiplica por una función de peso v y se integra sobre el dominio Ω:

$$\int_\Omega \left(\nabla^2 u + k^2 u - b\right) v \, d\Omega = 0 \tag{3.3}$$

A partir de la identidad $\boldsymbol{\nabla} \cdot (a\mathbf{B}) = \boldsymbol{\nabla} a \cdot \mathbf{B} + a \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B}$ se tiene que:

$$v\nabla^2 u = v\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} u) = \boldsymbol{\nabla} \cdot (v\boldsymbol{\nabla} u) - \boldsymbol{\nabla} v \cdot \boldsymbol{\nabla} u \tag{3.4}$$

Entonces:

$$\int_\Omega \left[\boldsymbol{\nabla} \cdot (v\boldsymbol{\nabla} u) - \boldsymbol{\nabla} v \cdot \boldsymbol{\nabla} u + k^2 uv - bv\right] d\Omega = 0 \tag{3.5}$$

Utilizando el Teorema de Gauss:

$$\int_\Gamma v\boldsymbol{\nabla} u \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma + \int_\Omega \left[-\boldsymbol{\nabla} v \cdot \boldsymbol{\nabla} u + k^2 uv - bv\right] d\Omega = 0 \tag{3.6}$$

donde $\mathbf{n}$ es el versor normal a la curva Γ. Pero $\boldsymbol{\nabla} u \cdot \mathbf{n} = \partial u / \partial n = 0$, por la condición de frontera definida en (3.1). Por lo tanto la formulación débil del problema es:

$$\int_\Omega \left[-\boldsymbol{\nabla} v \cdot \boldsymbol{\nabla} u + k^2 uv - bv\right] d\Omega = 0 \tag{3.7}$$

3.3.2 Discretización

Para hallar una solución aproximada por el método de elementos finitos, el dominio del problema debe ser subdividido en elementos (por ejemplo triángulos, ver Figura 3.2.a). En cada uno de ellos, la solución se aproxima por una función de forma conocida, y luego se ajusta para que sea continua en la frontera entre elementos.

Dentro de cada elemento, se asume que la solución se puede aproximar adecuadamente por una función lineal como:

$$u(x, y) = a + bx + cy \tag{3.8}$$

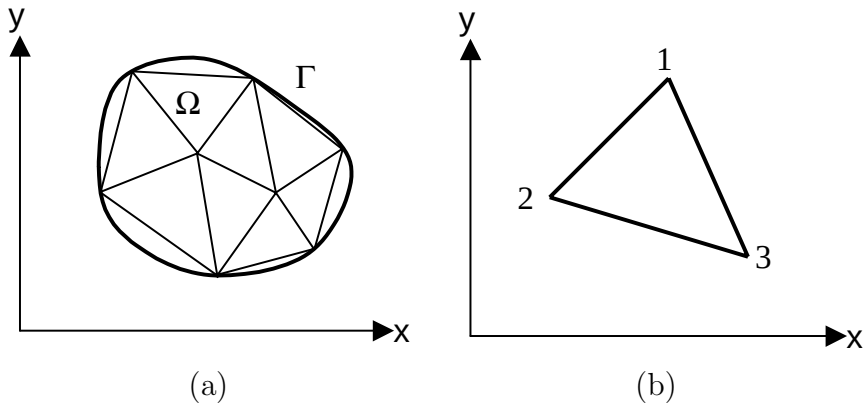


Figura 3.2: Método de los elementos finitos: a) subdivisión del dominio Ω en elementos triangulares; b) elemento triangular.

De esta forma la solución verdadera se reemplaza por una función lineal por tramos, que debe ser continua en todo el dominio. En cada uno de los vértices de un elemento (ver Figura 3.2.b), la solución puede expresarse en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

Para cada elemento del dominio, los coeficientes a, b y c pueden ser determinados resolviendo el sistema anterior. Entonces, la función (3.8) puede escribirse como:

$$\begin{aligned} u &= \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^{3} u_i \alpha_i(x,y) \end{aligned} \tag{3.10}$$

donde la función α_i es:

$$\alpha_i(x,y) = \frac{1}{2A}\left[(x_j y_k - x_k y_j) + (y_j - y_k)x + (x_k - x_j)y\right] \tag{3.11}$$

siendo cíclicos los índices i, j y k: $i = 1, j = 2, k = 3$; $i = 2, j = 3, k = 1$; $i = 3, j = 1, k = 2$. El valor A representa el área del elemento:

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \tag{3.12}$$

Las funciones α anteriores tienen la propiedad de valer uno en uno de los vértices y cero en los otros, es decir:

$$\alpha_i(x_j, y_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \tag{3.13}$$

Procediendo según el Método de Galerkin [12, Cap. 4], se eligen como funciones de peso a las mismas funciones de interpolación: $v = \alpha_j$, siendo $j = 1, 2, 3$. Entonces la ecuación (3.7) aplicada a cada elemento se convierte en:

$$\sum_{i=1}^{3} u_i \int_{\Delta e} \left[-\boldsymbol{\nabla}\alpha_i \cdot \boldsymbol{\nabla}\alpha_j + k^2 \alpha_i \alpha_j \right] d\Omega - \int_{\Delta e} b\alpha_j \, d\Omega = 0 \tag{3.14}$$

En notación matricial:

$$(k^2 T_e - S_e)U_e - B_e = 0 \tag{3.15}$$

Donde los elementos de la matriz T_e son:

$$[T_e]_{ij} = \int_{\Delta e} \alpha_i \alpha_j \, d\Omega \tag{3.16}$$

Esta matriz ha sido calculada en [12, Cap. 4] y es:

$$[T_e]_{ij} = \frac{A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

Los elementos de la matriz S_e son:

$$[S_e]_{ij} = \int_{\Delta e} \boldsymbol{\nabla}\alpha_i \boldsymbol{\nabla}\alpha_j \, d\Omega \tag{3.18}$$

Siendo $\boldsymbol{\nabla}\alpha_i = [(y_j - y_k)\widehat{x} + (x_k - x_j)\widehat{y}]/2A$, entonces:

$$S_e = \frac{1}{4A} \begin{bmatrix} 0 & y_2 - y_3 & x_3 - x_2 \\ 0 & y_3 - y_1 & x_1 - x_3 \\ 0 & y_1 - y_2 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & y_2 - y_3 & x_3 - x_2 \\ 0 & y_3 - y_1 & x_1 - x_3 \\ 0 & y_1 - y_2 & x_2 - x_1 \end{bmatrix}^T \tag{3.19}$$

Por último, los elementos de la matriz B_e son:

$$\begin{aligned} [G_e]_{ij} &= j\omega\mu I \int_{\Delta e} \alpha_j(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \, d\Omega \\ &= \begin{cases} j\omega\mu I \alpha_j(\mathbf{r}_0) & \text{si } \mathbf{r}_0 \in \Delta_e \\ 0 & \text{si } \mathbf{r}_0 \notin \Delta_e \end{cases} \end{aligned} \tag{3.20}$$

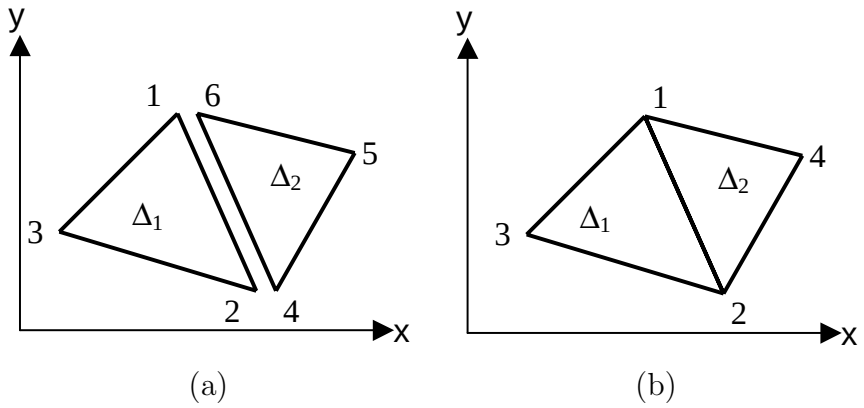


Figura 3.3: Método de los elementos finitos: a) notación local de los vértices de ; b) vértices con notación global.

3.3.3 Ensamblado de Matrices

Las matrices desarrolladas en la sección anterior se evaluan localmente en cada elemento. Para hallar la solución, éstas deben ser reensambladas en una matriz global. Durante este proceso se debe imponer la condición de continuidad de la solución en la frontera entre elementos.

Por simplicidad, se considera un problema con dos elementos (ver Figura 3.3). Con tres incógnitas por elemento, el vector incógnita es:

$$U_l = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \end{bmatrix}^T \tag{3.21}$$

donde el subíndice l indica que se utiliza la notación local, en la cual los elementos se encuentran aislados (Figura 3.3.a). De esta forma, las ecuaciones (3.15) correspondientes a cada elemento pueden agruparse en una sola:

$$\left(k^2 \begin{bmatrix} T_1 & \\ & T_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} S_1 & \\ & S_2 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = 0 \tag{3.22}$$

$$(k^2 T_l - S_l)U_l - B_l = 0 \tag{3.23}$$

Donde:

$$T_l = \begin{bmatrix} T_1 & \\ & T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & & & \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & & & \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & & & \\ & & & t_{44} & t_{45} & t_{46} \\ & & & t_{54} & t_{55} & t_{56} \\ & & & t_{64} & t_{65} & t_{66} \end{bmatrix} \tag{3.24}$$

Los elementos omitido en las matrices anteriores representan valores nulos. Las matrices G_l y S_l tienen la misma estructura que U_l y T_l, respectivamente.

Una vez que las matrices correspondientes a cada elemento son reagrupadas en una sola matriz, se debe imponer la condición de continuidad de la solución. Esto se logra forzando a que la solución en los nodos comunes de distintos elementos sea la misma. En el ejemplo de dos elementos: $u_1 = u_6$ y $u_2 = u_4$. La condición impuesta permite relacionar los nodos locales y globales por medio de la matriz C:

$$U_l = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & 1 & & & \\ & & & 1 & \\ 1 & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = CU_g \tag{3.25}$$

donde el subíndice g indica que se utiliza la notación global, en la cual los elementos se encuentran relacionados entre sí (ver Figura 3.3.b). Multiplicando (3.23) por C^T y con (3.25):

$$C^T(k^2T_l - S_l)CU_g - C^TB_l = 0 \tag{3.26}$$

$$(k^2T_g - S_g)U_g - B_g = 0 \tag{3.27}$$

En donde

$$T_g = C^TT_lC = \begin{bmatrix} t_{11} + t_{66} & t_{12} + t_{64} & t_{13} & t_{65} \\ t_{21} + t_{46} & t_{22} + t_{44} & t_{23} & t_{45} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & \\ t_{56} & t_{54} & & t_{55} \end{bmatrix} \tag{3.28}$$

$$B_g = C^TB_l = \begin{bmatrix} b_1 + b_6 \\ b_2 + b_4 \\ b_3 \\ b_5 \end{bmatrix} \tag{3.29}$$

La matriz S_g tiene la misma forma que T_g. En la práctica, el procedimiento es más sencillo: los nodos se numeran sólo en forma global; a medida que se calculan los elementos de las matrices T_e, S_e y B_e se los almacena en las matrices T_g, S_g y B_g en la posición dada por la numeración global.

Por lo tanto, se muestra que utilizando FEM se puede transformar la ecuación diferencial (3.1) en el sistema lineal de ecuaciones dado por (3.27). Al resolver este sistema, se obtiene el vector U_g, el cual contiene los valores de la solución en los nodos de cada elementos. Y a partir de (3.10) se puede calcular la solución en el interior de cada elemento.

Cabe destacar que existen distintas variantes del método, como por ejemplo usar otras funciones de peso, otras aproximaciones de la solución (constante en cada elemento, o de segundo orden), etc. Sin embargo, todas llevan a formular un sistema lineal de ecuaciones cuya solución permite construir la aproximación de la solución de la ecuación diferencial.

3.4 Método de los Elementos de Contorno

El método de los elementos de contorno (BEM) surge como una alternativa al de los elementos finitos (FEM), prometiendo una mayor exactitud y posiblemente, una menor carga computacional a expensas de fundamentos matemáticos más complejos. Esta última propiedad se logra porque BEM sólo requiere discretizar el contorno Γ del problema, en vez de Ω como en FEM. Esto facilita la tarea de mallado y reduce el número de nodos.

Este método propone utilizar ecuaciones integrales de contorno, que pueden ser halladas aplicando las identidades de Green y la solución fundamental del problema. Discretizando la frontera en elementos y asignando una función de forma conocida a la solución dentro de cada elemento, se obtiene un sistema lineal que contiene la solución aproximada del problema.

3.4.1 Identidades de Green

Sean ϕ y ψ dos campos escalares definidos en Ω, entonces se cumple la siguiente identidad:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\phi \boldsymbol{\nabla} \psi) = \boldsymbol{\nabla} \phi \cdot \boldsymbol{\nabla} \psi + \phi \nabla^2 \psi \tag{3.30}$$

Integrando sobre la región Ω y aplicando el Teorema de la Divergencia, se encuentra la primera identidad de Green:

$$\int_\Gamma \phi \boldsymbol{\nabla} \psi \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = \int_\Omega (\boldsymbol{\nabla} \phi \cdot \boldsymbol{\nabla} \psi + \phi \nabla^2 \psi) \, d\Omega \tag{3.31}$$

donde $\mathbf{n}$ es el vector normal a Γ. Intercambiando ϕ y ψ en la expresión anterior y restando a (3.31) se encuentra la segunda identidad de Green:

$$\int_\Gamma (\phi \boldsymbol{\nabla} \psi - \psi \boldsymbol{\nabla} \phi) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = \int_\Omega (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) \, d\Omega \tag{3.32}$$

Sumando y restando $k^2 \phi \psi$ al miembro de la derecha de (3.32), se tiene una generalización de la segunda identidad de Green:

$$\int_\Gamma (\phi \boldsymbol{\nabla} \psi - \psi \boldsymbol{\nabla} \phi) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = \int_\Omega [\phi(\nabla^2 \psi + k^2 \psi) - \psi(\nabla^2 \phi + k^2 \phi)] \, d\Omega \tag{3.33}$$

3.4.2 Solución Fundamental

La solución de una ecuación diferencial definida sobre una región sin fronteras, para una fuente puntual de amplitud unitaria, se llama solución fundamental del problema, o también es conocida como función de Green para el espacio libre. En sistemas representados por ecuaciones diferenciales ordinarias lineales es la conocida respuesta impulsional.

Para la ecuación de Helmholtz definida sobre un dominio homogéneo e isotrópico, esta solución debe satisfacer la siguiente ecuación:

$$(\nabla^2 + k^2) w(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) = -\delta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|) \tag{3.34}$$

donde δ representa a la función delta de Dirac, $\mathbf{r}_i$ el punto de colocación y $\mathbf{r}$ el de observación. En problemas bidimensionales la solución es [15, Cap. 2]:

$$w(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) = \frac{j}{4} H_0^1(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|) \tag{3.35}$$

donde H_0^1 representa la función de Hankel de primer tipo y orden cero.

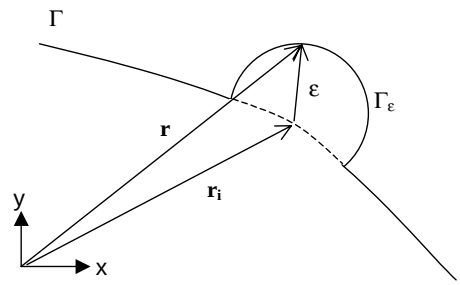


Figura 3.4: Ampliación de la frontera con un semicírculo centrado en $\mathbf{r}_i$ y de radio ϵ.

3.4.3 Formulación

La ecuación integral se encuentra haciendo $\phi = u$ y $\psi = w$ en (3.33), y con las ecuaciones (3.1) y (3.34) se tiene:

$$\begin{aligned}\int_\Gamma [u(\mathbf{r})\boldsymbol{\nabla} w(\mathbf{r},\mathbf{r}_i) - w(\mathbf{r},\mathbf{r}_i)\boldsymbol{\nabla} u(\mathbf{r})]\cdot\mathbf{n}\,d\Gamma &= \cdots \\ &= \int_\Omega [-u(\mathbf{r})\delta(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|) - w(\mathbf{r},\mathbf{r}_i)b(\mathbf{r})]\,d\Omega \end{aligned} \tag{3.36}$$

donde $\boldsymbol{\nabla} u(\mathbf{r})\cdot\mathbf{n} = \partial u/\partial n = 0$, por la condición de frontera definida en (3.1). Resolviendo la integral sobre Ω, se tiene:

$$\int_\Gamma u(\mathbf{r})\boldsymbol{\nabla} w(\mathbf{r},\mathbf{r}_i)\cdot\mathbf{n}\,d\Gamma + u(\mathbf{r}_i) + \gamma w(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}_i) = 0 \tag{3.37}$$

donde $\gamma = j\omega\mu_0 I$. Dicha ecuación se cumple para todo $\mathbf{r}_i \in \Omega$.

Si $\mathbf{r}_i \in \Gamma$, la integral de (3.37) es singular. Para analizar esta sigularidad, se incluye el punto $\mathbf{r}_i$ dentro del dominio del problema. Para ello se expande la frontera con un semicírculo centrado en $\mathbf{r}_i$ y de radio $\epsilon = |\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|$ (ver Figura 3.4); luego se hace tender a cero el radio. Entonces:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\Gamma_\epsilon} u(\mathbf{r})\boldsymbol{\nabla} w(\mathbf{r},\mathbf{r}_i)\cdot\mathbf{n}\,d\Gamma + \int_\Gamma u(\mathbf{r})\boldsymbol{\nabla} w(\mathbf{r},\mathbf{r}_i)\cdot\mathbf{n}\,d\Gamma + u(\mathbf{r}_i) + \gamma_0 w(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}_i) = 0 \tag{3.38}$$

Sobre el semicírculo $\mathbf{n} = (\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)/|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|$ entonces:

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\Gamma_\epsilon} u(\mathbf{r})\boldsymbol{\nabla} w(\mathbf{r},\mathbf{r}_i)\cdot\mathbf{n}\,d\Gamma &= \frac{j}{4}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\Gamma_\epsilon} u(\mathbf{r})\frac{\partial H_0^1(k\epsilon)}{\partial\epsilon}\,d\Gamma \\ &= \frac{-jk}{4}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\Gamma_\epsilon} u(\mathbf{r})H_1^1(k\epsilon)\,d\Gamma \end{aligned} \tag{3.39}$$

Para un ϵ lo suficientemente pequeño el argumento de la integral se considera constante, entonces:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\Gamma_\epsilon} u(\mathbf{r})\boldsymbol{\nabla} w(\mathbf{r},\mathbf{r}_i)\cdot\mathbf{n}\,d\Gamma = \frac{-jku(\mathbf{r}_i)}{4}\lim_{\epsilon\to 0} H_1^1(k\epsilon)\int_{\Gamma_\epsilon} d\Gamma \tag{3.40}$$

donde:

$$H_1^1(x) = J_1^1(x) + jN_1^1(x) \tag{3.41}$$

$$\int_{\Gamma_\epsilon} d\Gamma = (2\pi-\theta)\epsilon \tag{3.42}$$

siendo θ el ángulo interior definido por Γ en $\mathbf{r}_i$; para una curva suave $\theta=\pi$. Y sabiendo que:

$$\lim_{\epsilon\to 0} J_1^1(x) = 0 \tag{3.43}$$

$$\lim_{\epsilon\to 0} N_1^1(x) = \frac{-2}{x\pi} \tag{3.44}$$

Entonces:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\Gamma_\epsilon} u(\mathbf{r})\boldsymbol{\nabla} w(\mathbf{r},\mathbf{r}_i)\cdot\mathbf{n}\,d\Gamma = \frac{u(\mathbf{r}_i)(\theta-2\pi)}{2\pi} \tag{3.45}$$

Por lo tanto, para $\mathbf{r}_i\in\Gamma$ la expresión (3.37) es:

$$\int_{\Gamma} u(\mathbf{r})\boldsymbol{\nabla} w(\mathbf{r},\mathbf{r}_i)\cdot\mathbf{n}\,d\Gamma + \frac{\theta}{2\pi}u(\mathbf{r}_i) + \gamma_0 w(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}_i) = 0 \tag{3.46}$$

En forma general, se expresa (3.37) y (3.46) como:

$$\int_{\Gamma} u(\mathbf{r})\boldsymbol{\nabla} w(\mathbf{r},\mathbf{r}_i)\cdot\mathbf{n}\,d\Gamma + c_i u(\mathbf{r}_i) + \gamma_0 w(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}_i) = 0 \tag{3.47}$$

donde:

$$c_i = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{r}_i\in\Omega \\ \theta/2\pi & \text{si } \mathbf{r}_i\in\Gamma \end{cases} \tag{3.48}$$

La expresión (3.47) es la ecuación integral que utiliza el método de los elementos de contorno para hallar la solución aproximada de (3.1). Es importante destacar que hasta este punto no se ha realizado ningún tipo de aproximación. Otra cuestión importante de la expresión (3.47) es que solamente involucra una integral sobre el contorno Γ, en lugar de una integral sobre Ω, utilizada por FEM en la sección anterior.

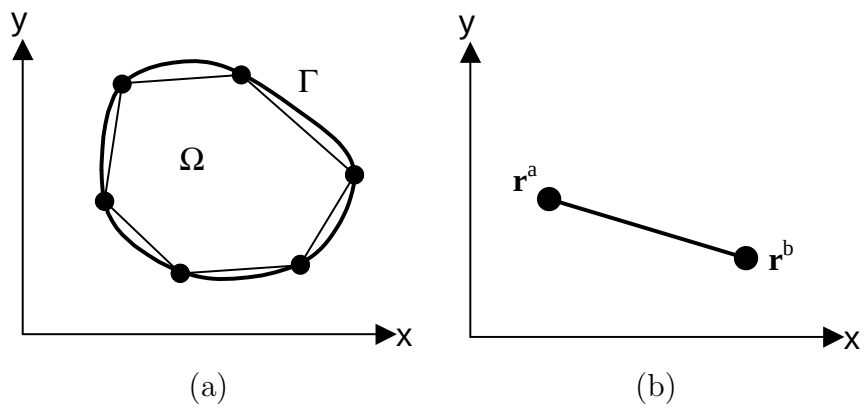


Figura 3.5: Método de los elementos de contorno: a) subdivisión de la frontera Γ en elementos; b) definición de un elemento.

3.4.4 Discretización

Para discretizar la ecuación integral, el contorno se divide en N elementos, (ver Figura 3.5.a). La ecuación (3.47) puede escribirse como:

$$\sum_{j=1}^{N} \int_{\Gamma_j} u(\mathbf{r}) \boldsymbol{\nabla} w(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma + c_i u(\mathbf{r}_i) + \gamma w(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_i) = 0 \tag{3.49}$$

Se asume que dentro de cada elemento la solución se puede aproximar adecuadamente por una función lineal. Esta última se define en términos de los valores nodales y funciones interpolantes lineales:

$$u(\xi) = u^a \phi^a(\xi) + u^b \phi^b(\xi) \tag{3.50}$$

donde ξ es una variable local tal que vale ξ^a en el extremo $\mathbf{r}^a$ y ξ^b en el extremo $\mathbf{r}^b$ (ver Figura 3.5.b); las funciones interpolantes se definen como:

$$\begin{aligned} \phi^a &= \frac{\xi^b - \xi}{\xi^b - \xi^a} \\ \phi^b &= \frac{\xi - \xi^a}{\xi^b - \xi^a} \end{aligned} \tag{3.51}$$

Entonces, para el j-ésimo elemento la integral de (3.49) es:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_j} u(\mathbf{r}) \boldsymbol{\nabla} w(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma &= \int_{\Gamma_j} \frac{\partial w}{\partial n} \begin{bmatrix} \phi^a & \phi^b \end{bmatrix} d\Gamma \begin{bmatrix} u_j^a \\ u_j^b \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} h_{ij}^a & h_{ij}^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_j^a \\ u_j^b \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.52}$$

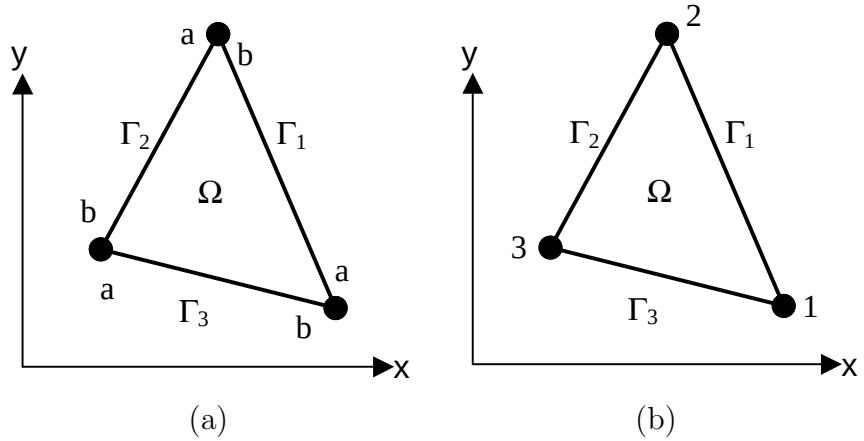


Figura 3.6: Problema con tres elementos: a) nodos numerados localmente; b) nodos numerados globalmente.

3.4.5 Ensamblado de matrices

Para hallar la solución aproximada del problema se debe construir un sistema lineal de N ecuaciones con igual cantidad de incógnitas (valor de u sobre los N nodos del problema, ver Figura 3.5.a). Para ello, se debe resolver la ecuación (3.49) para $\mathbf{r}_i$ igual a cada uno de los nodos del problema. Durante este proceso se impone la condición de continuidad de la solución en la frontera entre elementos.

Por simplicidad, se considera un problema con tres elementos (ver Figura 3.6). En notación matricial, el sistema es:

$$\begin{bmatrix} c_1 & & \\ & c_2 & \\ & & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} w_{01} \\ w_{02} \\ w_{03} \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} h_{11}^a & h_{11}^b & h_{12}^a & h_{12}^b & h_{13}^a & h_{13}^b \\ h_{21}^a & h_{21}^b & h_{22}^a & h_{22}^b & h_{23}^a & h_{23}^b \\ h_{31}^a & h_{31}^b & h_{32}^a & h_{32}^b & h_{33}^a & h_{33}^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^a \\ u_1^b \\ u_2^a \\ u_2^b \\ u_3^a \\ u_3^b \end{bmatrix} = 0 \tag{3.53}$$

donde $w_{0i} = w(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_i)$. Los elementos omitidos en las matrices anteriores representan valores nulos. La condición de continuidad se logra forzando a que

la solución en los nodos comunes a distintos elementos sea la misma, es decir, que $u_1 = u_1^a = u_3^b$, $u_2 = u_1^b = u_2^a$ y $u_3 = u_2^b = u_3^a$. Esta relación se puede escribir en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} u_1^a \\ u_1^b \\ u_2^a \\ u_2^b \\ u_3^a \\ u_3^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & 1 & & \\ & & & 1 \\ & & & 1 \\ 1 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \tag{3.54}$$

Entonces:

$$(C + H)U + G = 0 \tag{3.55}$$

donde:

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \tag{3.56}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_1 & & \\ & c_2 & \\ & & c_3 \end{bmatrix} \tag{3.57}$$

$$G = \gamma \begin{bmatrix} w_{01} \\ w_{02} \\ w_{03} \end{bmatrix} \tag{3.58}$$

$$\begin{aligned} H &= \begin{bmatrix} h_{11}^a & h_{11}^b & h_{12}^a & h_{12}^b & h_{13}^a & h_{13}^b \\ h_{21}^a & h_{21}^b & h_{22}^a & h_{22}^b & h_{23}^a & h_{23}^b \\ h_{31}^a & h_{31}^b & h_{32}^a & h_{32}^b & h_{33}^a & h_{33}^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & 1 & & \\ & & & 1 \\ & & & 1 \\ 1 & & & \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} h_{11}^a + h_{13}^b & h_{12}^a + h_{11}^b & h_{13}^a + h_{12}^b \\ h_{21}^a + h_{23}^b & h_{22}^a + h_{21}^b & h_{23}^a + h_{22}^b \\ h_{31}^a + h_{33}^b & h_{32}^a + h_{31}^b & h_{33}^a + h_{32}^b \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.59}$$

A medida que se calculan los valores de h_{ij}^a y h_{ij}^b se los almacena en la matriz H, en la posición dada por la numeración global de los nodos.

Por lo tanto, resolviendo (3.55) se encuentran los valores de la solución en los nodos; y a partir de (3.47) se calculan en el interior de Ω.

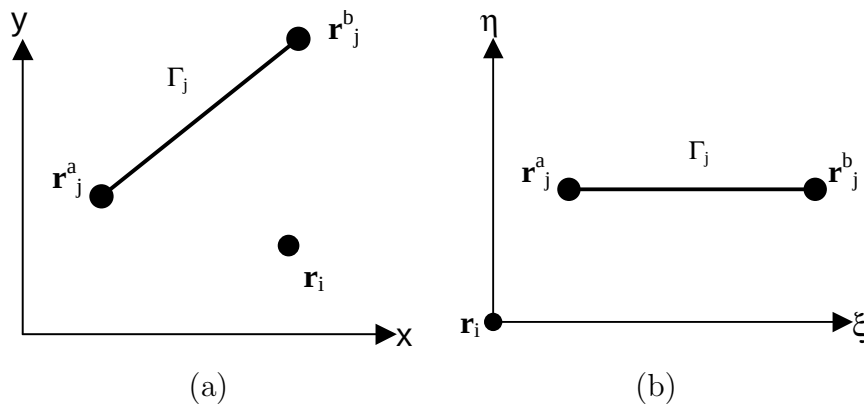


Figura 3.7: Elemento Γ_j: a) en un sistema de coordenadas global; b) en uno local.

Evaluación de las integrales

Las integrales h^a_{ij} y h^b_{ij} pueden ser calculadas numéricamente (por ejemplo, por el método de Gauss). Sin embargo, cuando el punto de colocación $\mathbf{r}_i$ pertenece al elemento Γ_j, el argumento de las integrales contiene una singularidad; por lo cual la integral se debe resolver analíticamente.

Sea el elemento Γ_j siendo $j = 1, ...N$, cuyos extremos son $\mathbf{r}^a_j$ y $\mathbf{r}^b_j$ (ver Figura 3.7.a). A partir de (3.52), los elementos de la matriz H son:

$$\begin{aligned} h^a_{ij} &= \int_{\Gamma_j} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nabla} w(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) \phi^a(\mathbf{r})\, d\Gamma \\ h^b_{ij} &= \int_{\Gamma_j} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nabla} w(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) \phi^b(\mathbf{r})\, d\Gamma \end{aligned} \tag{3.60}$$

Para simplificar los cálculos, es conveniente resolver las integrales anteriores en un sistema de coordenadas local. Para lo cual se realizan las siguientes transformaciones:

1. Rotación

$$\begin{cases} x' = \frac{x(x^b_j - x^a_j) + y(y^b_j - y^a_j)}{L_j} \\ y' = \frac{x(y^b_j - y^a_j) + y(x^b_j - x^a_j)}{L_j} \end{cases} \tag{3.61}$$

2. Traslación

$$\begin{cases} \xi = x' - x_i \\ \eta = y' - y_i \end{cases} \tag{3.62}$$

donde L_j es la longitud del elemento. En este sistema de referencia local se cumple (ver Figura 3.7.b):

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_i &= 0 \\ \mathbf{r}_j^a &= \xi^a \widehat{\xi} + \eta_0 \widehat{\eta} \\ \mathbf{r}_j^b &= \xi^b \widehat{\xi} + \eta_0 \widehat{\eta} \\ \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nabla}() &= -\partial/\partial\eta \\ w(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) &= jH_0^1(k\sqrt{\xi^2+\eta^2})/4 \\ d\Gamma &= d\xi \end{aligned} \tag{3.63}$$

Por lo tanto:

$$h_{ij}^a = \frac{jk\eta_0}{4L_j} \int_{\xi^a}^{\xi^b} \frac{H_1^1(k\sqrt{\xi^2+\eta^2})(\xi^b - \xi)}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\, d\xi \tag{3.64}$$

$$h_{ij}^b = \frac{jk\eta_0}{4L_j} \int_{\xi^a}^{\xi^b} \frac{H_1^1(k\sqrt{\xi^2+\eta^2})(\xi - \xi^a)}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\, d\xi \tag{3.65}$$

Dichas integrales pueden calcularse numéricamente por el método de Gauss. Excepto para el caso particular en que $\mathbf{r}_i$, $\mathbf{r}_j^a$ y $\mathbf{r}_j^b$ son colineales, pues las integrales se anulan debido a que:

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nabla} w = -\frac{j}{4} \frac{\partial H_0^1(k\xi)}{\partial \eta} = 0 \tag{3.66}$$

3.5 Método de Reciprocidad Dual

Este método es una variante de BEM y consiste en escribir la ecuación (3.1) como una de Poisson; luego la nueva ecuación es llevada a su forma débil y discretizada. Esta nueva formulación requiere la utilización de nodos internos al dominio, además de los nodos ubicados sobre la frontera.

3.5.1 Formulación

La ecuación de Helmholtz (3.1) se puede escribir como una ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 u = b + b_0 \tag{3.67}$$

donde $b_0 = -k^2 u$. La solución fundamental w de esta ecuación debe satisfacer:

$$\nabla^2 w(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) = -\delta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|) \tag{3.68}$$

Para problemas bidimensionales la solución fundamental w es [15, Cap. 2]:

$$w(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) = -\frac{1}{2\pi} \ln(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|) \tag{3.69}$$

La ecuación integral que del método DRM se encuentra tomando $\phi = u$ y $\psi = w$ en (3.32), reemplazando con las ecuaciones (3.67) y (3.68) se tiene:

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_\Gamma \left[u(\mathbf{r})\boldsymbol{\nabla} w(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) - w(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i)\boldsymbol{\nabla} u(\mathbf{r})\right] \cdot \mathbf{n}\, d\Gamma = \\ &= \textstyle\int_\Omega \left\{-u(\mathbf{r})\delta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|) - w(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i)\left[b(\mathbf{r}) + b_0(\mathbf{r})\right]\right\} d\Omega \end{aligned} \tag{3.70}$$

donde $\boldsymbol{\nabla} u(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} = \partial u / \partial n = 0$, por la condición de frontera definida en (3.1). Resolviendo dos de las tres integrales sobre Ω, se tiene que para $\mathbf{r}_i \in \Omega$:

$$\int_\Gamma u(\mathbf{r})\boldsymbol{\nabla} w(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{n}\, d\Gamma + \int_\Omega w(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) b_0(\mathbf{r})\, d\Omega + u(\mathbf{r}_i) + \gamma w(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_i) = 0 \tag{3.71}$$

Si $\mathbf{r}_i \in \Gamma$, la integral de (3.71) es singular. Nuevamente, para analizar la sigularidad se utiliza un semicírculo centrado en $\mathbf{r}_i$ y de radio $\epsilon = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|$ para expandir la frontera. Sobre esta curva se tiene que:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\Gamma_\epsilon} u(\mathbf{r})\boldsymbol{\nabla} w(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{n}\, d\Gamma &= -\frac{1}{2\pi} \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\Gamma_\epsilon} u(\mathbf{r}) \frac{\partial \ln(\epsilon)}{\partial \epsilon}\, d\Gamma \\ &= -\frac{1}{2\pi} \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{u(\mathbf{r})}{\epsilon}\, d\Gamma \end{aligned} \tag{3.72}$$

Para un ϵ lo suficientemente pequeño el argumento de la integral se considera constante, entonces:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\Gamma_\epsilon} u(\mathbf{r})\boldsymbol{\nabla} w(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{n}\, d\Gamma = \frac{u(\mathbf{r}_i)(\theta - 2\pi)}{2\pi} \tag{3.73}$$

Por lo tanto:

$$\int_\Gamma u(\mathbf{r})\boldsymbol{\nabla} w(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{n}\, d\Gamma + \int_\Omega w(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) b_0(\mathbf{r})\, d\Omega + c_i u(\mathbf{r}_i) + \gamma w(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_i) = 0 \tag{3.74}$$

donde:

$$c_i = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{r}_i \in \Omega \\ \theta/2\pi & \text{si } \mathbf{r}_i \in \Gamma \end{cases} \tag{3.75}$$

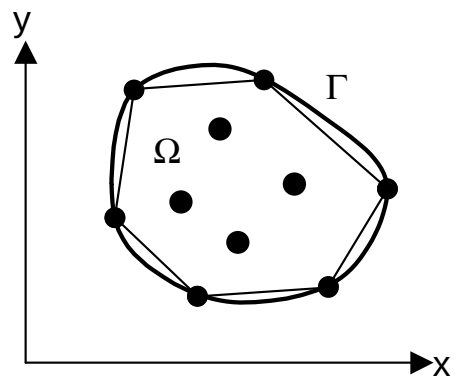


Figura 3.8: Método de Reciprocidad Dual: nodos internos y sobre la frontera.

Sin embargo, el segundo término de la expresión (3.74) es una integral sobre el dominio Ω. Pero para aplicar el método de los elementos de contorno es necesario transformar dicha integral en integrales equivalentes sobre el contorno. DRM propone, para ello, expandir la función b_0 en una serie de funciones f, tales que permitan aplicar la segunda identidad de Green para realizar la transformación de integral de dominio a integral de contorno.

Teniendo en cuenta lo propuesto anteriormente, la función b_0 se representa como una combinación de funciones f:

$$b_0(\mathbf{r}) = \sum_{m=1}^{M} \alpha_m f(\mathbf{r}, \mathbf{r}_m) \tag{3.76}$$

donde M es la cantidad total de nodos igual a la suma de los N nodos de la frontera más los L internos (ver Figura 3.8), $\mathbf{r}_m$ el vector que representa la posición de cada nodo, α_m son coeficientes a determinar; para poder utilizar la segunda identidad de Green, f son funciones que deben cumplir con la siguiente condición:

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{r}_m) = \nabla_r^2 \widehat{u}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_m) \tag{3.77}$$

donde $\widehat{u}$ también es una función a establecer. Una posible elección de las funciones f y $\widehat{u}$ que cumplen con la condición (3.77), sugerida por los autores del método [15, Sec. 2.18], es:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r}, \mathbf{r}_m &= 1 + |\mathbf{r} - \mathbf{r}_m| \\ \widehat{u}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_m) &= |\mathbf{r} - \mathbf{r}_m|^2/4 + |\mathbf{r} - \mathbf{r}_m|^3/9 \end{aligned} \tag{3.78}$$

A partir de (3.76) y (3.77), la integral sobre el dominio Ω de (3.74) se puede

escribir como:

$$\begin{aligned}\int_\Omega w(\mathbf{r},\mathbf{r}_i)b_0(\mathbf{r})\,d\Omega &= \sum_{m=1}^{M}\alpha_m\int_\Omega w(\mathbf{r},\mathbf{r}_i)f(\mathbf{r},\mathbf{r}_m)\,d\Omega \\ &= \sum_{m=1}^{M}\alpha_m\int_\Omega w(\mathbf{r},\mathbf{r}_i)\nabla_r^2\widehat{u}(\mathbf{r},\mathbf{r}_m)\,d\Omega \qquad (3.79)\end{aligned}$$

Utilizando la segunda identidad de Green, se tiene que:

$$\begin{aligned}\int_\Omega w(\mathbf{r},\mathbf{r}_i)\nabla_r^2\widehat{u}(\mathbf{r},\mathbf{r}_m)\,d\Omega &= -\widehat{u}(\mathbf{r}_i,\mathbf{r}_m)+\int_\Gamma w(\mathbf{r},\mathbf{r}_i)\boldsymbol{\nabla}_r\widehat{u}(\mathbf{r},\mathbf{r}_m)\cdot\mathbf{n}\,d\Gamma \\ &\quad -\int_\Gamma \widehat{u}(\mathbf{r},\mathbf{r}_m)\boldsymbol{\nabla}_r w(\mathbf{r},\mathbf{r}_i)\cdot\mathbf{n}\,d\Gamma \qquad (3.80)\end{aligned}$$

Nuevamente, es necesario tener en cuenta el caso en que $\mathbf{r}_i \in \Gamma$. Por lo cual, (3.80) es:

$$\begin{aligned}\int_\Omega w(\mathbf{r},\mathbf{r}_i)\nabla_r^2\widehat{u}(\mathbf{r},\mathbf{r}_m)\,d\Omega &= -c_i\widehat{u}(\mathbf{r}_i,\mathbf{r}_m)+\int_\Gamma w(\mathbf{r},\mathbf{r}_i)\boldsymbol{\nabla}_r\widehat{u}(\mathbf{r},\mathbf{r}_m)\cdot\mathbf{n}\,d\Gamma \\ &\quad -\int_\Gamma \widehat{u}(\mathbf{r},\mathbf{r}_m)\boldsymbol{\nabla}_r w(\mathbf{r},\mathbf{r}_i)\cdot\mathbf{n}\,d\Gamma \qquad (3.81)\end{aligned}$$

Por lo tanto, (3.74) es:

$$\begin{aligned}-c_i u(\mathbf{r}_i) &= \gamma w(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}_i)+\int_\Gamma u(\mathbf{r})\boldsymbol{\nabla}_r w(\mathbf{r},\mathbf{r}_i)\cdot\mathbf{n}\,d\Gamma-\sum_{m=1}^{M}\alpha_m c_i\widehat{u}(\mathbf{r}_i,\mathbf{r}_m) \\ &\quad +\sum_{m=1}^{M}\alpha_m\int_\Gamma w(\mathbf{r},\mathbf{r}_i)\boldsymbol{\nabla}_r\widehat{u}(\mathbf{r},\mathbf{r}_m)\cdot\mathbf{n}\,d\Gamma- \\ &\quad -\sum_{m=1}^{M}\alpha_m\int_\Gamma \widehat{u}(\mathbf{r},\mathbf{r}_m)\boldsymbol{\nabla}_r w(\mathbf{r},\mathbf{r}_i)\cdot\mathbf{n}\,d\Gamma \qquad (3.82)\end{aligned}$$

3.5.2 Discretización

Una vez hallada la ecuación integral de contorno, se procede a discretizar la frontera del problema en N elementos, y considerando además $L = M - N$ nodos internos, la ecuación (3.82) es:

$$\begin{aligned}-c_i u(\mathbf{r}_i) &= \gamma w(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}_i)+\sum_{j=1}^{N}\int_{\Gamma_j} u(\mathbf{r})\frac{\partial w(\mathbf{r},\mathbf{r}_i)}{\partial n}\,d\Gamma \\ &\quad -\sum_{m=1}^{M}\alpha_m c_i\widehat{u}(\mathbf{r}_i,\mathbf{r}_m)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \sum_{m=1}^{M} \alpha_m \sum_{j=1}^{N} \int_{\Gamma_j} w(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) \widehat{q}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_m)\, d\Gamma \\
&- \sum_{m=1}^{M} \alpha_m \sum_{j=1}^{N} \int_{\Gamma_j} \widehat{u}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_m) \frac{\partial w(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i)}{\partial n}\, d\Gamma
\end{aligned} \tag{3.83}
$$

donde $\widehat{q} = \partial \widehat{u}/\partial n = \boldsymbol{\nabla} \widehat{u} \cdot \mathbf{n}$ y $\mathbf{r}_i$ $(i = 1, \cdots M)$ es el vector posición de los puntos de colocación. Las integrales en cuyo argumento se encuentra la función solución u, se calculan aproximado u por una función lineal definida por la expresión (3.50). En [15, Sec. 2.18], los autores del método proponen calcular la integrales que contienen las funciones $\widehat{u}$ y $\widehat{q}$ de la misma forma, es decir, aproximando dichas funciones por funciones lineales de la forma de (3.50). Esta última aproximación permite simplificar el cálculo de las integrales, y en particular para el problema que se trata en este trabajo, se ha verificado que no introduce errores significativos; por ejemplo al comparar la solución de DRM y BEM para el calculo de la frecuencia de resonancia (ver Figura 3.10), se observa que la diferencia de los errores cometidos por los métodos es del orden del 20% para discretizaciones de 200 nodos y alcanza el 1% para 400 nodos. Entonces, volviendo a la expresión (3.83), para el j-ésimo elemento las integrales se pueden escribir como:

$$
\begin{aligned}
\int_{\Gamma_j} u(\mathbf{r}) \frac{\partial w(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i)}{\partial n}\, d\Gamma &= \begin{bmatrix} h_{ij}^a & h_{ij}^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_j^a \\ u_j^b \end{bmatrix} \\
\int_{\Gamma_j} w(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) \frac{\partial \widehat{u}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_m)}{\partial n}\, d\Gamma &= \begin{bmatrix} g_{ij}^a & g_{ij}^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{q}_{jm}^a \\ \widehat{q}_{jm}^b \end{bmatrix} \\
\int_{\Gamma_j} \widehat{u}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_m) \frac{\partial w(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i)}{\partial n}\, d\Gamma &= \begin{bmatrix} h_{ij}^a & h_{ij}^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{u}_{jm}^a \\ \widehat{u}_{jm}^b \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.84}
$$

donde las cantidades h se definen en (3.60), mientras que las g son:

$$
\begin{aligned}
g_{ij}^a &= \int_{\Gamma_j} w(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) \phi^a(\mathbf{r})\, d\Gamma \\
g_{ij}^b &= \int_{\Gamma_j} w(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) \phi^b(\mathbf{r})\, d\Gamma
\end{aligned} \tag{3.85}
$$

Estas cantidades pueden calcularse resolviendo numéricamente la integral, como se mencionó en la Sección 3.4.5. Pero para el caso en que $\mathbf{r}_i$ coincide con alguno de los extremos del elemento, el argumento de las integrales contiene una singularidad. Por lo cual, la integral se debe resolver analíticamente. Para estos casos, repitiendo los pasos de la Sección 3.4.5, se puede mostrar que las integrales h son nulas debido a que $\nabla \omega \cdot \mathbf{n} = 0$; mientras que las g son:

- $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_j^a$:
  $g_{ij}^a = L_j(2.5 - \ln L_j)/4\pi$
  $g_{ij}^b = L_j(1 - 2\ln L_j)/8\pi$

- $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_j^b$:
  $g_{ij}^a = L_j(1 - 2\ln L_j)/8\pi$
  $g_{ij}^b = L_j(2.5 - \ln L_j)/4\pi$

donde L_j es la longitud del elemento.

3.5.3 Ensamblado de matrices

Resolviendo la ecuación (3.83) para cada uno de los puntos de colocación $\mathbf{r}_i$ $(i = 1, \cdots M)$ se obtiene un sistema lineal de M ecuaciones con igual cantidad de incógnitas, que en forma matricial es:

$$(C + [H, \Phi])U + B = \left[(C + [H, \Phi])\widehat{U} - G\widehat{Q}\right] A \tag{3.86}$$

C es una matriz diagonal con los M coeficientes c_i. B es un vector de $M \times 1$ definido en (3.58). La matriz G de $M \times 2N$ almacena las cantidades g definidas en (3.85). La matriz H de $M \times N$, que contiene las cantidades h, se debe ensamblar imponiento la condición de continuidad de la solución, como se mostró en la Sección 3.4.5. Esta última matriz se rellena con $M \times L$ ceros contenidos en Φ. Y el vector A de $M \times 1$ contiene los coeficientes de la expresión (3.76); que también se lo puede expresar como:

$$A = -k^2 F^{-1} U \tag{3.87}$$

donde F es una matriz cuyos elementos corresponden a los valores $f(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}_n)$ para $m, n = 1, \cdots M$. Llamando $H' = C + [H, \Phi]$, la ecuación (3.86) puede escribirse como:

$$\left[k^2(G\widehat{U} - H'\widehat{U})F^{-1} - H'\right] U - B = 0 \tag{3.88}$$

Por lo tanto, resolviendo (3.88) se encuentran el valor de la solución u en nodos internos y de la frontera.

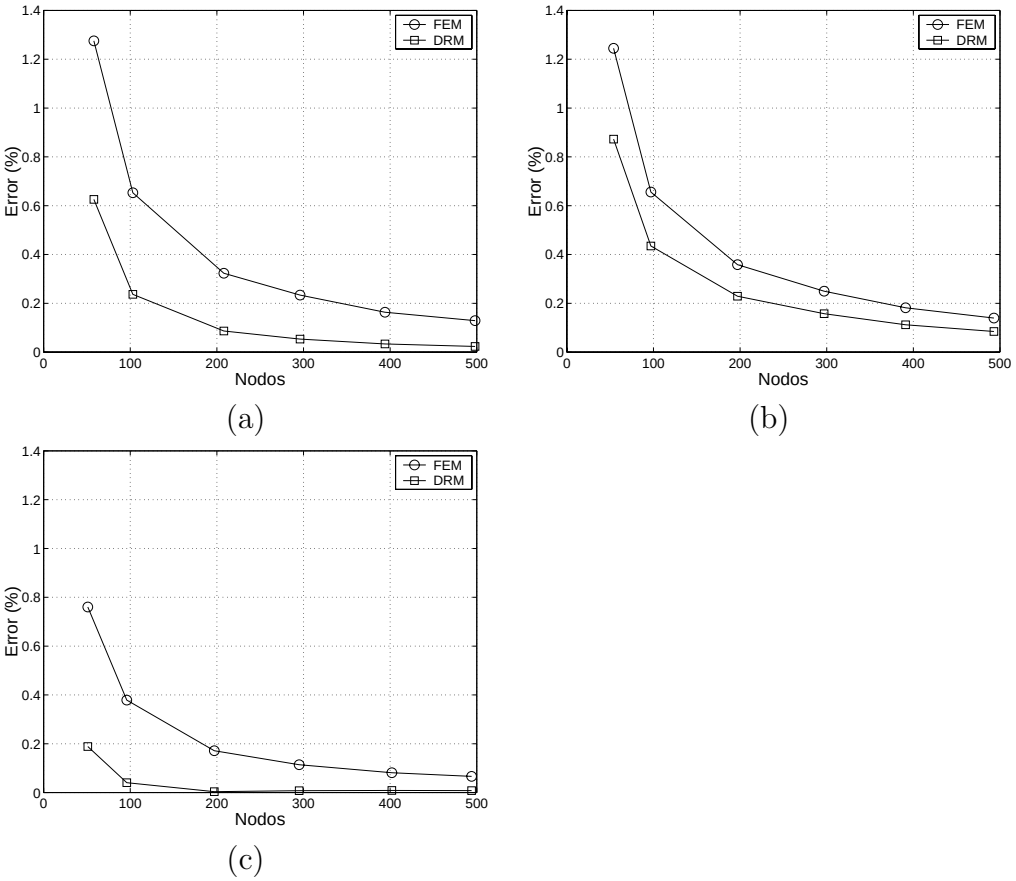


Figura 3.9: Número de onda en el dieléctrico correspondiente al menor modo de resonancia: a) parche rectangular; b) circular; c) triangular.

3.6 Resultados numéricos

Parte del trabajo de tesis consistió en desarrollar algoritmos de computadoras para implementar los métodos numéricos descriptos anteriormente. Como se expresó en el capítulo introductorio, estas herramientas de cálculo se utilizarán para analizar antenas de geometría no convencionales, teniendo especial interés en poder calcular frecuencia de resonancia e impedancia de entrada. Para validar estos algoritmos se calcula el número de onda k, la frecuencia de resonancia f_r y la impedancia de entrada Z_i de las antenas descriptas en el Capítulo 2. Estos resultados se comparan con las soluciones analíticas.

Repasando las expresiones (3.27), (3.55) y (3.88), se observa que sólo FEM

Tabla 3.1: Parámetro α de la función $K/Nodos^{\alpha}$ que se ajusta a las curvas de error de los distintos tipos de antenas, para: a) número de onda; b) frecuencia de resonancia.

Parche	FEM	DRM
□	1.05	1.50
○	0.96	1.02
△	1.07	1.39

(a)

Parche	FEM	BEM	DRM
□	1.12	2.85	3.15
○	1.01	0.93	1.10
△	1.05	0.88	1.48

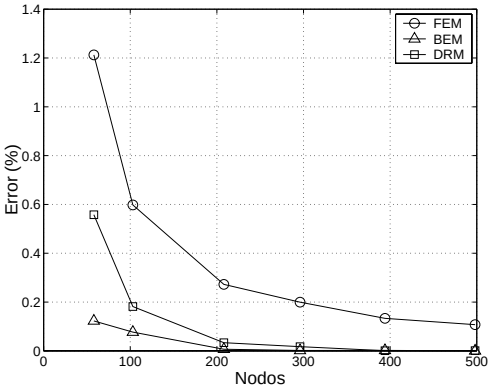
(b)

y DRM permiten establecer un problema de autovalores a partir del cual determinar número de onda k. Los valores de k correspondientes al menor modo de resonancia hallados a partir de (2.42), (2.45) y (2.49) para las antenas de forma rectangular, circular y triangular, respectivamente, se comparan con los valores numéricos calculados para distintas discretizaciones (cantidades de nodos). La Figura 3.9 muestra como el error relativo disminuye al aumentar la cantidad de nodos. También se observa que el error cometido por DRM se encuentra siempre por debajo de FEM.

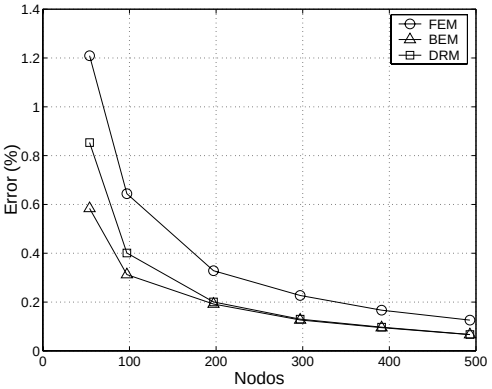
La Figura 3.10 muestra el error relativo cometido por los distintos métodos en el cálculo de la frecuencia de resonancia f_r. Se ve que dicho error se mantiene por debajo del 1%. Los valores de error de FEM se mantienen por encima del 0.1% para las distintas discretizaciones resueltas; sin embargo, el error de BEM y DRM se encuentra por debajo del 0.1% para discretizaciones de más de 300 nodos.

Para estudiar el comportamiento del error cometido por cada método en el cálculo del número de onda y frecuencia de resonancia, se ajusta una función de la forma $K/Nodos^{\alpha}$ a las distintas curvas de las Figuas 3.9 y 3.10. Linealizando la curva con la función logaritmo: $\log e = \log K - \alpha \log Nodos$, los parámetros K y α se encuentran por cuadrados mínimos. En la Tabla 3.1 se muestran los valores de α para cada antena y método numérico. En todos los casos, el mayor α corresponde a DRM. Esto significa que de los tres métodos estudiados, DRM es para el cual, el error decrece más rápido al aumentar la cantidad de nodos de la discretización.

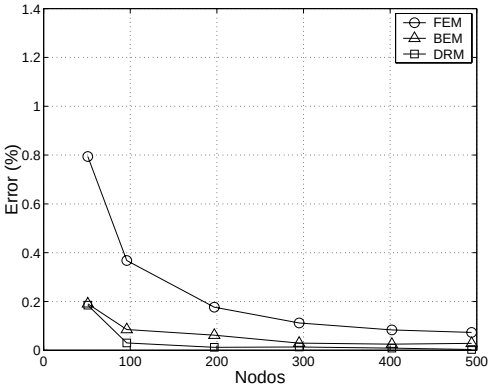
Es interesante resaltar que las curvas de error de BEM y DRM en las Figuras 3.9 y 3.10 se encuentran por debajo de las de FEM. Esto permite verificar



(a)



(b)



(c)

Figura 3.10: Frecuencia de resonancia correspondiente al menor modo de resonancia: a) parche rectangular; b) circular; c) triangular.

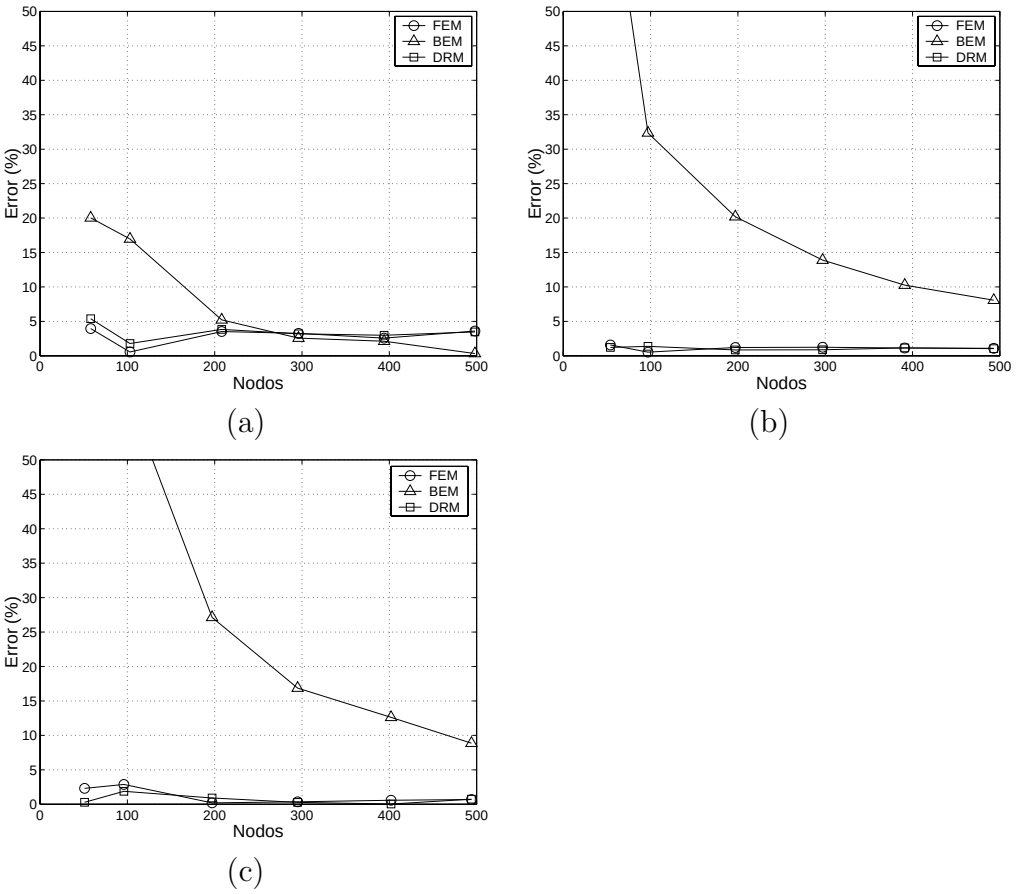


Figura 3.11: Impedancia de entrada a la frecuencia de resonancia: a) parche rectangular; b) circular; c) triangular.

lo expuesto anteriormente, al presentar los métodos de contorno (Sección 3.4), esto es, que los métodos de elementos de contorno son más exactos que FEM a expensas de fundamentos matemáticos más complejos, aunque ciertamente, no imposibles de tratar.

La Figura 3.11 muestra el error relativo para el cálculo de la impedancia de entrada Z_i. Se observa que FEM Y DRM se mantienen aproximadamente constantes, por debajo del 5% de error. Por otro lado, BEM comete un error que es del 50%, decreciendo hasta llegar al 10% cuando se tienen 500 nodos. Estos valores llaman la atención, y las siguientes especulaciones intentan explicar la diferencia del comportamiento de BEM frente a los otros dos métodos. Primero, se debe recordar que Z_i depende de la distribución del

campo eléctrico bajo el parche (ver expresión 2.38). Por otro lado, se mostró que mientras FEM y DRM utilizan información del interior del dominio (elementos y nodos internos respectivamente), BEM sólo emplea nodos sobre la frontera. Probablemente, esta falta de información en el interior del dominio genere el aumento del error en BEM, necesitando este método mayor cantidad de nodos para mejorar la solución.

Por último, es interesante recordar que al final del Capítulo 2 se mencionó, que el error inherente al modelo de cavidad resonante es del orden del 1% y el 10% para el cálculo de la frecuencia de resonancia e impedancia de entrada, respectivamente. Para discretizaciones de 400 nodos, los errores cometidos por lo distintos métodos son de un orden de magnitud menor (con excepción de BEM en el cálculo de Z_i). Por lo cual, se puede decir que 400 es un número adecuado de nodos, pues los errores numéricos se pueden despreciar frente a los propios del modelo.

3.7 Resumen

En este capítulo se mostraron tres formas distintas de hallar una solución numérica a la ecuación diferencial que describe el problema de las antenas de microtira. Para estudiar el comportamiento de los métodos numéricos, se simulan las antenas descriptas en el Capítulo 2 para distintas discretizaciones. Se observa que al aumentar la cantidad de nodos, la solución numérica mejora rápidamente. De todos los métodos estudiados, DRM parece tener mejor desempeño que BEM y FEM. También se determina que 400 es un número adecuado de nodos, ya que con esta discretización los errores nuéricos son despreciables frente a los del modelo.

Capítulo 4

Antena Cuadrada con Ranura Excéntrica

4.1 Introducción

En este capítulo se analiza una antena de geometría novedosa utilizando los algoritmos numéricos desarrollados durante el trabajo de tesis. Esta antena consiste en un parche cuadrado con una ranura en su interior. Se muestra que su frecuencia de resonancia disminuye, respecto de una antena convencional cuadrada, al introducir la ranura; y que es posible hallar un punto de alimentación de 50Ω ubicando adecuadamente la ranura. Los resultados numéricos se comparan con los experimentales obtenidos de la medición de varios prototipos de antenas.

4.2 Antenas No Convencionales

Un tema actual consiste en el desarrollo de antenas compactas, o su problema equivalente de reducir la frecuencia de resonancia para una dada dimensión de la antena. La menor frecuencia de resonancia para una antena convencional cuadrada es $c/2a\sqrt{\epsilon_r}$, donde c es la velocidad de la luz en el vacío, a la dimensión del parche y ϵ_r la permitividad relativa del dieléctrico. Una forma

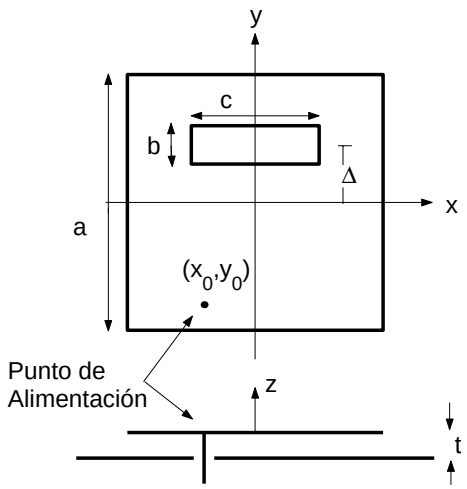


Figura 4.1: Geometría de la antena propuesta.

de reducir la frecuencia es empleando materiales de alta permitividad. Otra, consiste en utilizar parches de forma no convencionales que incrementen el largo eléctrico de la antena. Con el propósito de satisfacer este objetivo, varios autores han propuesto antenas de diversos formatos [6, 7, 8, 9, 10].

Una antena no convencional es la de forma de anillo cuadrado, estudiada recientemente por Bafrooei y Shafai [11]. Esta antena tiene la particularidad de que su frecuencia de resonancia disminuye al aumentar el lado interno del anillo. Sin embargo, al mismo tiempo la impedancia de entrada crece velozmente haciendo difícil alimentar la antena con una línea de 50Ω.

4.3 Geometría de la Antena Propuesta

La antena propuesta, que se analiza utilizando los métodos numéricos desarrollados en el capítulo anterior, consiste en un parche cuadrado con una ranura excéntrica en su interior (ver Figura 4.1), alimentada con una línea coaxil [18, 19, 20]. Sus propiedades se analizan con la ayuda de las simulaciones numéricas y se verifican con la construcción de antenas con ranuras de diferente tamaño y posición (ver Tabla 4.1). Los resultados se comparan con los de una antena cuadrada convencional, que se considera como referencia.

Tabla 4.1: Dimensiones de las antenas construidas (a, x_0 y y_0 en mm, b, c y Δ son proporcionales a a).

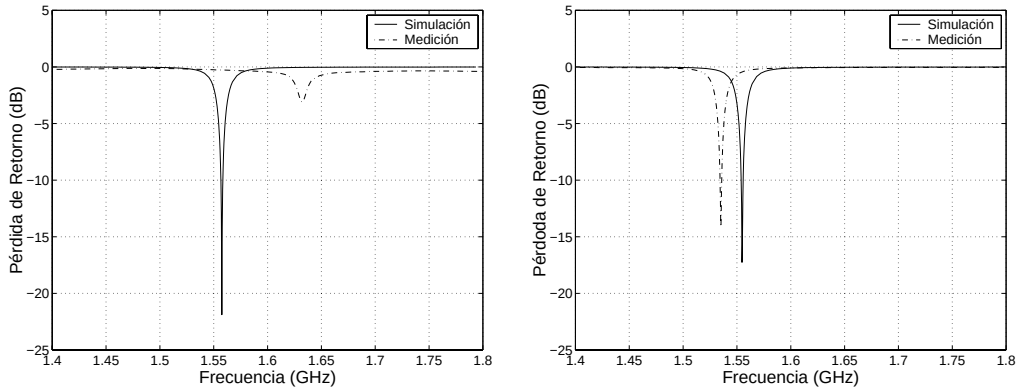
	a	b	c	Δ	x_0	y_0
Referencia	27.0	0.0	0.0	0.0	0.0	2.95
Antena A	27.0	$0.3a$	$0.5a$	$0.23a$	0.0	0.7
Antena B	27.0	$0.3a$	$0.6a$	$0.26a$	0.0	1.8
Antena C	27.0	$0.3a$	$0.7a$	$0.29a$	0.0	2.9

Todas las antenas se construyeron utilizando un sustrato[1] de permitividad relativa $\epsilon_r = 10.2$, factor de pérdida $\mathrm{tg}\,\delta = 0.0023$ y espesor $t = 1.27mm$. El tamaño del plano de tierra y sustrato es de $50 \times 50mm$.

4.4 Analisis y Simulación

La antena propuesta consiste en un parche cuadrado con una ranura en su interior. En esta sección, se analiza numéricamente el efecto del tamaño y posición de la ranura en las propiedades de esta antena. Para las simulaciones se emplea el algoritmo de DRM, dado que en el capítulo anterior mostró un mejor desempeño en el cálculo de la frecuencia de resonancia e impedancia de entrada. Para las discretizaciones se utilizan aproximadamente 400 nodos, entre internos y sobre la frontera. Una mayor cantidad de nodos aumenta considerablemente el tiempo de cómputo, sin mejorar los resultados; por ejemplo, si duplica la cantidad de nodos el tiempo de cómputo es siete veces mayor, y la variación de los resultados es del orden del 0.2% y 2% para el cálculo de la frecuencia de resonancia e impedancia de entrada, respectivamente. Como se mencionó al final del Capítulo 2 y como se verá más adelante, al comparar los resultados de las mediciones con las simulaciones, los errores generados por las aproximaciones del modelo de cavidad resonante (ver Sección 2.2 y 2.3) son de un orden mayor que los del método numérico.

[1]El sustrato consiste en un compuesto de Politetrafluoruroetileno (PTFE) y cerámica, llamado RT/duroid 6010, de Rogers Corp. (*http://www.rogers-corp.com*).



(a) (b)

Figura 4.2: Pérdida de retorno[2] de una antena diseñada con distintas fórmulas para las dimensiones efectivas: a) fórmulas de parches rectangulares; b) fórmulas de un anillo circular.

4.4.1 Fórmula para el Campo de Borde

La principal desventaja del modelo de cavidad resonante es que no contempla el campo de borde (ver Sección 2.2). Este problema se soluciona extendiendo las dimensiones físicas de la antena. Sin embargo, es difícil estimar las dimensiones efectivas para antenas de geometría arbitraria. En [28] sugieren que parches arbitrarios pueden ser razonablemente bien aproximados utilizando fórmulas de parches regulares.

En un primer intento, se utilizaron las fórmulas de un parche rectangular (ver Sección 2.8.1) para calcular las dimensiones efectivas de la antena propuesta. Sin embargo, como se muestra a continuación, no se obtuvieron buenos resultados. La Figura 4.2.a muestra la pérdida de retorno[2] simulada y medida de una antena con ranura diseñada utilizando las fórmulas (2.44). Se observa que la frecuencia de resonancia calculada y medida difieren en un 5%. Peor aún, en la antena construida existe una alta desadaptación con la línea de alimentación de 50Ω.

Una figura que se aproxima mejor a la geometría de la antena propuesta, despreciando la posición de la ranura, es el anillo circular. Para ello se utilizan

[2]Pérdida de Retorno es el cociente entre las amplitudes de la onda reflejada e incidente en la unión de la línea de trasmisión y la carga, u otra discontinuidad. Es una medida de desadaptación entre la impedancia de la línea y la carga: $10\log[(Z_L - Z_C)/(Z_L + Z_C)]$.

los radios internos r^i y externos r^e de un anillo de igual área que la antena a estudiar:

$$\begin{aligned} r^i &= \sqrt{bc/\pi} \\ r^e &= \sqrt{a^2/\pi} \end{aligned} \tag{4.1}$$

Para incorporar el efecto del campo de borde, en una antena con forma de anillo circular, además de extender sus dimensiones, se debe modificar la permitividad relativa del dieléctrico [23, Cap. 3]. La permitividad efectiva es:

$$\epsilon_e = \frac{1}{2}(\epsilon_r + 1) + \frac{1}{2}(\epsilon_r - 1)\left(1 + \frac{10t}{W}\right)^{-1/2} \tag{4.2}$$

donde $W = r^e - r^i$. Las dimensiones efectivas del anillo son:

$$\begin{aligned} r_e^i &= r^i - (W_e - W)/2 \\ r_e^e &= r^e + (W_e - W)/2 \end{aligned} \tag{4.3}$$

donde:

$$\begin{aligned} W_e &= W + (W_0 - W)/[1 + (f/f_p)^2] \\ W_0 &= 120\pi t/z_0\sqrt{\epsilon_e} \\ f_p &= z_0/2\mu_0 t \end{aligned} \tag{4.4}$$

μ_0 es la permitividad del vacio y z_0 es la impedancia característica cuasi-estática de una línea de microtiras de ancho W. Para líneas anchas ($W/t > 2$) [29]:

$$z_0 = \frac{377}{\sqrt{\epsilon_e}}\left\{\frac{W}{t} + 0.883 + \frac{\epsilon_e + 1}{\pi\epsilon_e}\left[1.451 + \ln(0.94 + W/2t)\right] + 0.165\frac{\epsilon_e - 1}{\epsilon_e^2}\right\}^{-1} \tag{4.5}$$

Por lo tanto, repitiendo lo sugerido en [28], las dimensiones efectiva de la antena cuadrada con una ranura en su interior son:

$$\begin{aligned} a_e &= a(r_e^e/r^e) \\ b_e &= b(r_e^i/r^i) \\ c_e &= c(r_e^i/r^i) \end{aligned} \tag{4.6}$$

En la Figura 4.2.b se puede observar que al utilizar estas fórmulas para el cálculo de las dimensiones efectivas, la diferencia entre la frecuencia de resonancia medida y calculada se reduce a un 1%, y la pérdida de retorno sólo difiere en 3dB.

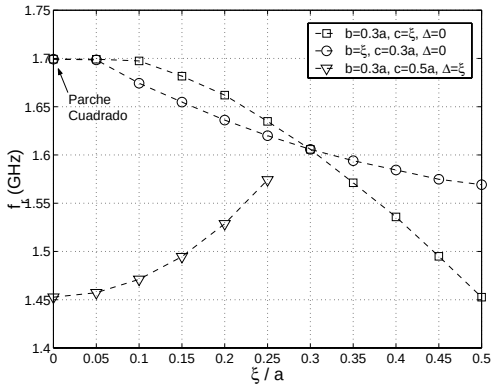


Figura 4.3: Frecuencia de resonancia de la antena propuesta para ranuras de distintos tamaños y posiciones.

4.4.2 Frecuencia de Resonancia

Para estudiar el comportamiento de la frecuencia de resonancia, las simulaciones se realizan para el modo de resonancia (0,1), es decir, para cuando el campo eléctrico bajo el parche es aproximadamente constante a lo largo del eje x y varia en un semiciclo a lo largo del eje y.

La frecuencia de resonancia calculada de una antena cuadrada convencional de lado $a = 27mm$ es $1700MHz$. Al introducir una ranura en el parche, la frecuencia de resonancia disminuye. El valor de la frecuencia decrece a medida que el tamaño de la ranura aumenta. La Figura 4.3 muestra que dicho efecto es más pronunciado cuando la ranura está orientada de forma transversal al gradiente del campo eléctrico que cuando se encuentra paralela a dicho gradiente.

También es interesante estudiar el efecto de la posición de la ranura. En la Figura 4.3 se observa que para una dada ranura, la frecuencia de resonancia disminuye a medida que se la desplaza en el sentido de y. Pero siempre manteniéndose menor que la de la antena de parche cuadrado.

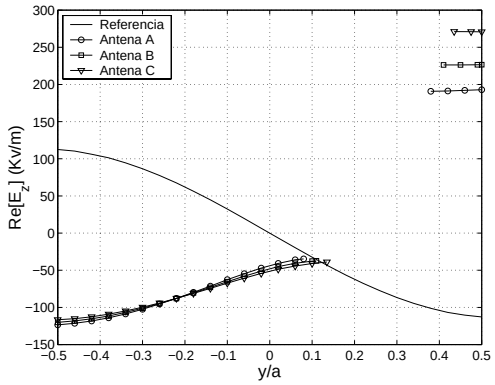


Figura 4.4: Distribución del campo eléctrico bajo el parche en el modo (0,1), a lo largo del eje y ($x = 0$).

4.4.3 Impedancia de Entrada

La impedancia de entrada de una antena de microtira es $Z_i = -tE_z(x_0, y_0)/I$ (ver Sección 2.6), donde $E_z(x_0, y_0)$ es el campo eléctrico bajo el parche en el punto de alimentación, I es la corriente entregada por la fuente y t es el espesor del dieléctrico. El valor de la impedancia de entrada cambia con la posición del punto de alimentación, siguiendo la distribución del campo eléctrico bajo el parche. En la Figura 4.4 se muestra la distribución del campo para el modo (0,1); por lo cual se observa que Z_i es elevada cerca de los bordes superior e inferior, y decrece a medida que el punto de alimentación se mueve hacia el centro. Por ejemplo, para la antena cuadrada (antena de referencia) la impedancia vale aproximadamente de 500Ω en el borde y alcanza los 50Ω cerca del centro.

En antenas donde el sector central del parche ha sido removido, la distribución del campo es interrumpida y la región donde el campo es de baja amplitud no es accesible. Lo cual explica la elevada impedancia de entrada reportada en [11] para antenas con forma de anillos cuadrados. En cambio, en la antena propuesta la ranura se ubica fuera del centro, por lo cual es posible obtener impedancias del orden de los 50Ω (ver Figura 4.5).

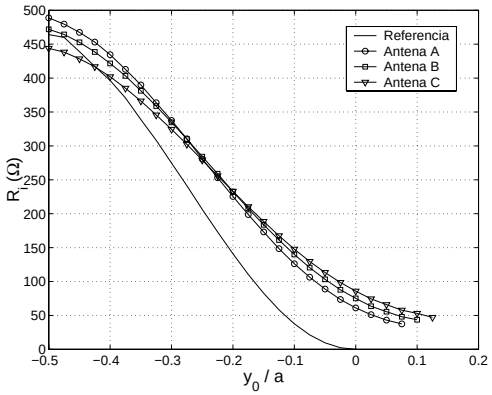


Figura 4.5: Impedancia de entrada a la frecuencia de resonancia en función de la posición del punto de alimentación a lo largo del eje y ($x_0 = 0$).

4.4.4 Patrón de Radiación

A partir del modelo de cavidad resonante también se puede calcular el patrón de radiación de una antena de microtira. Debido a que este modelo asume que el plano de tierra es infinito el campo radiado se encuentra en el hemisferio superior, tal como se muestra en la Figura 4.6.a para los planos E ($|E_\theta|$ para $\phi = 90°$) y H ($|E_\phi|$ para $\phi = 0°$) de la antena de referencia y las antenas A, B y C (la descripción de estas antenas se encuentra en la Tabla 4.1). El cálculo del patrón de radiación se puede mejorar teniendo en cuenta el campo difractado en los bordes del plano de tierra. Esto se logra combinando el modelo de cavidad resonante con la teoría geométrica de difracción (GTD). En la Figura 4.6.b se observa que la GTD permite determinar la existencia de lóbulos posterios. En el Apéndice B se muestra en forma detallada como obtener dichos patrones de radiación a partir de la GTD.

Se puede observar que en ambos gráficos que el patrón de la antena propuesta es el mismo que el de una antena cuadrada convencional. Esto se debe a que el patrón de radiación depende de la distribución del campo en el perímetro del parche.

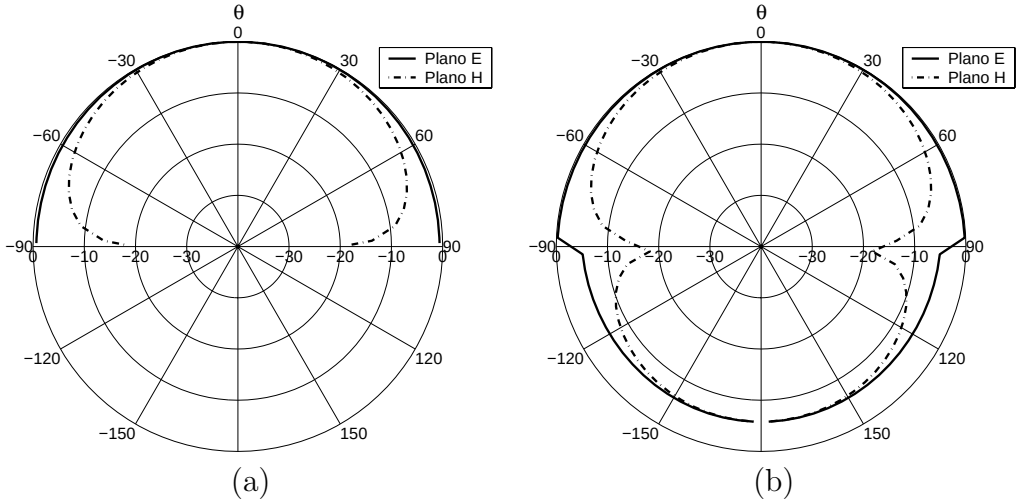


Figura 4.6: Planos E y H del patrón de radiación: a) modelo de cavidad resonante, b) modelo de cavidad resonante + GTD.

Tabla 4.2: Características de las antenas (halladas numéricamente).

	f_r	R_i	BW	D	η	G
Referencia	$1700MHz$	44.8Ω	0.5%	$5.4dBi$	50.4%	$2.4dBi$
Antena A	$1555MHz$	50.8Ω	0.4%	$5.4dBi$	37.0%	$1.1dBi$
Antena B	$1518MHz$	50.7Ω	0.4%	$5.4dBi$	32.8%	$0.6dBi$
Antena C	$1480MHz$	51.5Ω	0.4%	$5.4dBi$	28.4%	$-0.1dBi$

4.4.5 Ancho de Banda, Directividad y Eficiencia

Otros parámetros importantes de una antena son el ancho de banda, la directividad y la eficiencia. La Tabla 4.2 resume estos valores para las antenas propuestas y la de referencia. Se observa que la existencia de la ranura tiene un efecto despreciable en el ancho de banda y directividad. Sin embargo, la eficiencia disminuye apreciablemente al aumentar el tamaño de la ranura, es decir, al reducir la frecuencia de resonancia. Esta es una desventaja común en antenas de microtira pequeñas, producida por el aumento de las pérdidas en el conductor [8].

Tabla 4.3: Características de las antenas (halladas experimentalmente).

	f_r	R_i	BW	G
Referencia	$1688MHz$	34.3Ω	0.5%	$1.5dBi$
Antena A	$1535MHz$	46.1Ω	0.4%	$1.3dBi$
Antena B	$1494MHz$	25.5Ω	0.2%	$-0.9dBi$
Antena C	$1457MHz$	24.9Ω	0.1%	$-1.4dBi$

4.5 Resultados experimentales

Para verificar los resultados hallados numéricamente, antenas de lado $a = 27mm$ con ranuras de diferente tamaño y posición fueron construidas y medidas: la antena A con $b = 0.3a$, $c = 0.5a$, $\Delta = 0.23a$; la antena B con $b = 0.3a$, $c = 0.6a$, $\Delta = 0.26a$; y la antena C con $b = 0.3a$, $c = 0.7a$, $\Delta = 0.29a$. También fue construida una antena cuadrada convencional del mismo tamaño, como antena de referencia. En todas las antenas el sustrato tiene permitividad relativa $\epsilon_r = 10.2$, factor de pérdida $\operatorname{tg}\delta = 0.0023$ y espesor $t = 1.27mm$. El tamaño del plano de tierra y sustrato es de $50 \times 50mm$. En dichas antenas se determinó experimentalmente el comportamiento de la impedancia de entrada en función de la frecuencia, el patrón de radiación y la ganancia.

La Figura 4.7 muestra la variación de la impedancia de entrada en función de la frecuencia, calculada y medida, para las distintas antenas. A partir del valor nulo de reactancia se determina la frecuencia de resonancia. Los resultados numéricos y experimentales concuerdan aceptablemente, siendo el error menor del 2% para todos los casos. Por otro lado, la impedancia de entrada medida a la frecuencia de resonancia es menor que la calculada. Esto implica que el punto de alimentación de 50Ω existe, pero se encuentra ubicado levemente hacia afuera respecto de la posición y_0 calculada. Debe tenerse presente que cerca del centro de la antena, R_i varía unos $10\Omega/mm$ (ver Figura 4.5), por lo cual pequeños errores en el cálculo de la posición del punto de alimentación producen grandes errores en la impedancia de entrada.

A partir del comportamiento de Z_i en función de la frecuencia, también se puede determinar el ancho de banda (para $SWR < 2$). Los valores obtenidos (ver Tabla 4.3) confirman lo predicho por las simulaciones, estas antenas tienen un ancho de banda del orden del 0.5%. En las antenas B y C el ancho de

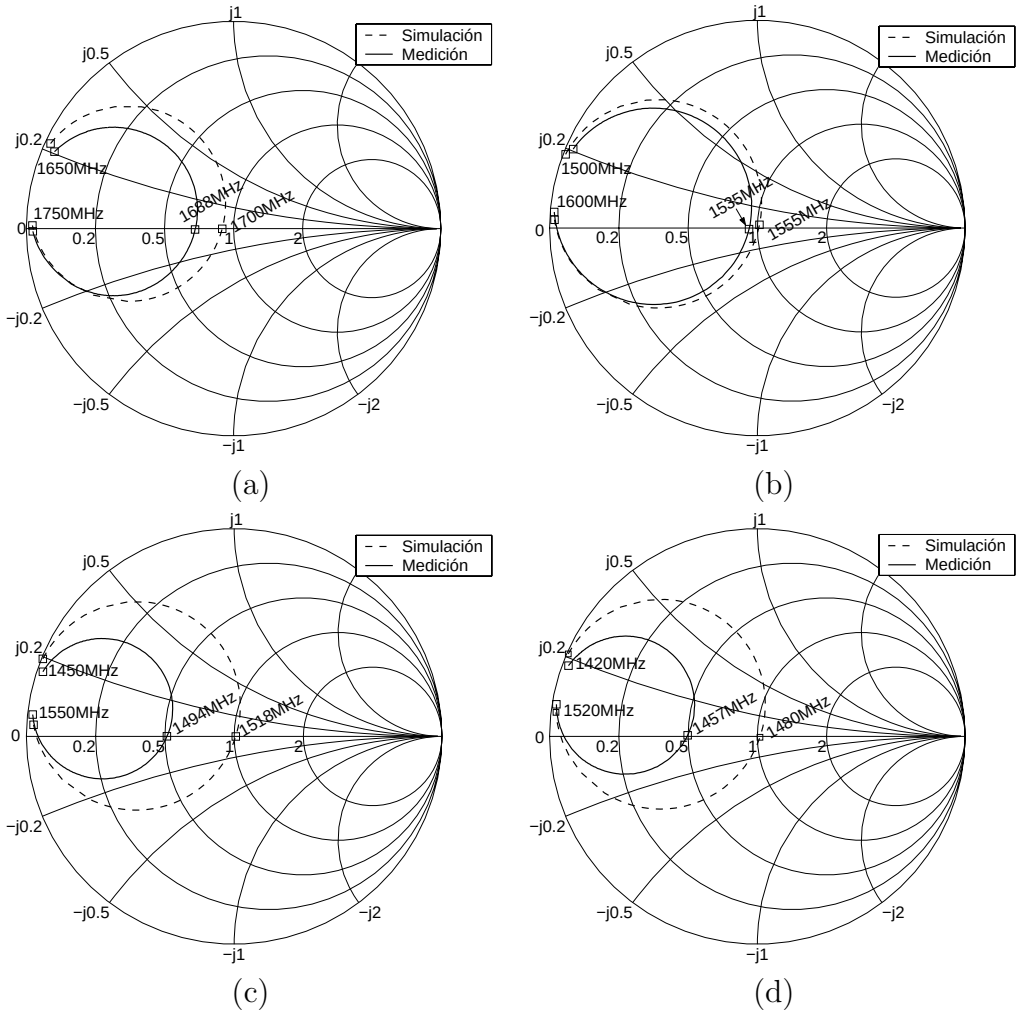


Figura 4.7: Diagrama de Smith de las distintas antenas: a) antena de referencia; b) antena A; c) antena B; d) antena C.

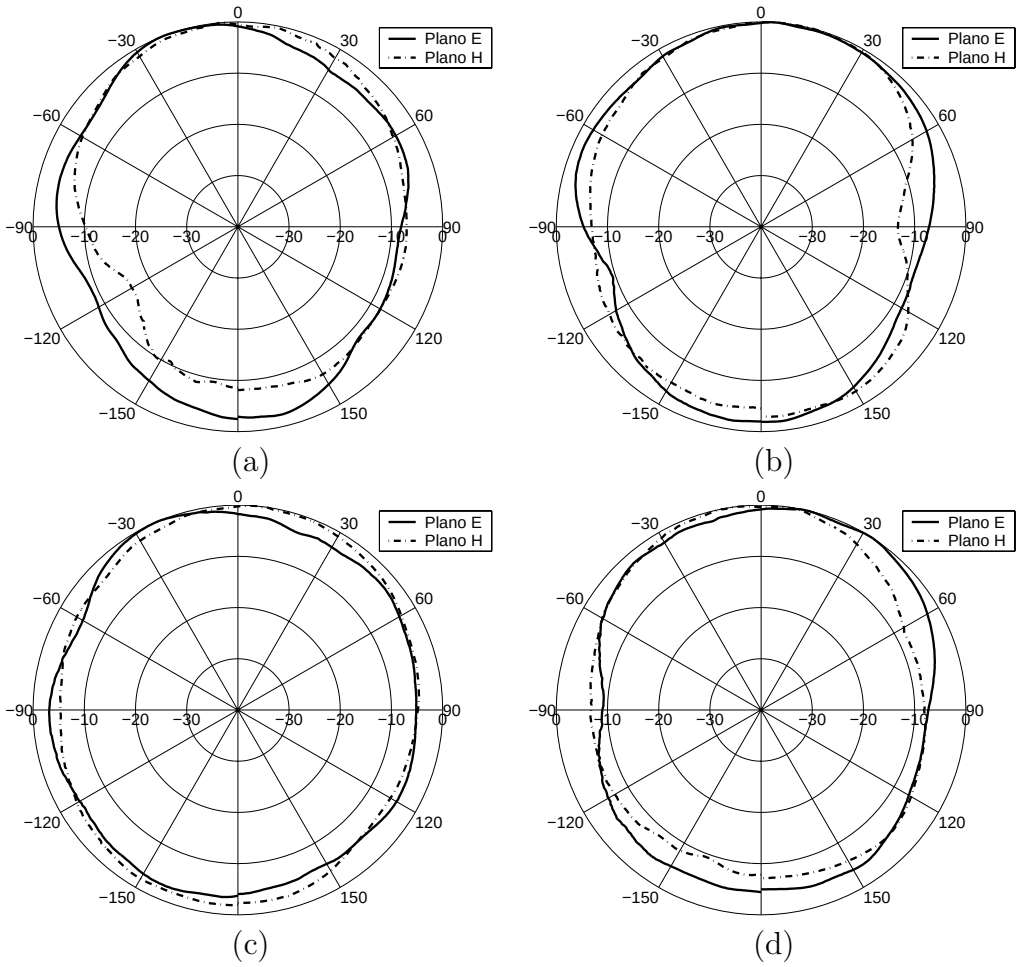


Figura 4.8: Patrón de radiación de las distintas antenas: a) antena de referencia; b) antena A; c) antena B; d) antena C.

banda medido es menor que el calculado, pero esto se debe principalmente a la desadaptación que existe entre la antena y la línea de alimentación.

Las diferencias entre valores numéricos y experimentales se originan en el cálculo de las dimensiones efectivas de las antenas. Se observa que los errores más importantes se encuentran en las antenas B y C. En estas antenas la ranura fue desplazada del centro una distancia significativa, por lo cual se pierde la semejanza con un anillo circular. Por otro lado, se han descartado los errores de contrucción como fuente de error. En efecto, las imperfecciones en la construción de las antenas son del orden de los $50\mu m$. Estas variaciones de las

dimensiones generan modificaciones en la frecuencias de resonancia e impedancia de entrada del orden del 0.1%. Por lo tanto, pueden ser despreciadas frente a los errores introducidos por el modelo.

La Figura 4.8 muestra los planos E y H del patrón de radiación, medidos para las distintas antenas. Al igual que en las simulaciones, se observa que los patrones son semejantes entre ellos, siendo mínimo el efecto de la ranura. Se puede observar la existencia un lóbulo posterior debido a las dimensiones pequeñas del plano de tierra con respecto a la longitud de onda, tal como se predijo en las simulaciones al combinar el modelo de cavidad resonante con GTD.

Por último, en la Tabla 4.3 se pueden observar los valores de la ganancia medida por el método de extrapolación [30]. Se observa que para la antena de referencia y las antenas B y C los valores medidos son menores que los obtenidos por medio de la simulación. Esto se debe a que en estas antenas la desadaptación entre la línea de alimentación y la impedancia de entrada es importante.

4.6 Resumen

En este capítulo, se utilizó el método DRM para analizar y diseñar una antena de microtira de forma cuadrada con una ranura excéntrica en su interior. Se mostró que se puede reducir la frecuencia de resonancia al aumentar el tamaño de la ranura, y que es posible hallar un punto de alimentación de 50Ω ubicando adecuadamente la ranura. Los resultados de las simulaciones fueron verificados experimentalmente por medio de la construcción de varios prototipos de antenas.

Capítulo 5

Conclusiones

5.1 Resumen

En la presente tesis se ha estudiado la aplicación de métodos numéricos en el análisis y diseño de antenas de microtira de forma arbitraria.

Como punto de partida, se describe un modelo simple, conocido como modelo de cavidad resonante, que permite estudiar antenas de sustrato delgado. Por medio de una serie de aproximaciones, las ecuaciones de campo electromagnético se reducen en una ecuación escalar de Helmholtz y su correspondiente condición de borde. La solución de dicha ecuación permite hallar la distribución del campo bajo el parche conductor de la antena. Luego, a partir de este campo se pueden determinar las propiedades de la antena: patrón de radiación, impedancia de entrada, frecuencia de resonancia, ancho de banda, directividad y eficiencia.

Cuando la antena es de forma regular, se puede hallar la solución analítica de la ecuación de Helmholtz en términos de los autovalores y autofuciones del problema. Sin embargo, cuando la geometría es complicada, se debe recurrir a métodos numéricos.

La ecuación de Helmholtz se resuelve por tres métodos numéricos distintos: FEM, BEM y DRM. En todos los casos, la ecuación diferencial primero debe ser escrita en su forma débil, es decir, como una ecuación integral. Discretizan-

do el dominio de las integrales en elementos y asignando funciones de forma conocida a la solución dentro de cada elemento, se puede construir un sistema lineal de ecuaciones que contiene la solución aproximada del problema. Sin embargo, estos métodos difieren en la ecuación integral y discretización utilizada. Para estudiar el desempeño de los métodos, se calcula el número de onda, frecuencia de resonancia e impedancia de entrada para varias antenas simples y distintas discretizaciones; estos resultados se comparan con las soluciones analíticas correspondientes.

Finalmente, utilizando el método DRM se analiza una antena de microtira de forma cuadrada con una variante, descripta en [18, 19, 20], que consiste en una ranura excéntrica en el interior del parche. Los resultados predichos por las simulaciones se verifican midiendo varias antenas construidas.

5.2 Conclusiones

A lo largo del trabajo de esta tesis, se han desarrollado herramientas computacionales basadas en los métodos FEM, BEM y DRM que permiten simular antenas de microtiras. Se muestra que DRM parece tener un mejor desempeño que los métodos FEM y BEM, pues para una cantidad adecuada de nodos es menor el error cometido.

Parte del trabajo de tesis consistió en utilizar las herramientas desarrolladas para simular una antena de microtira de forma novedosa y no convencional. Los resultados numéricos son validados experimentalmente. La frecuencia de resonancia se determina con un error menor que el 2%. Sin embargo, el error cometido en el cálculo de la impedancia de entrada es más importante. Se muestra que la diferencia entre estos valores numéricos y experimentales se originan en el cálculo de las dimensiones efectivas de la antena. Se descarta que los errores de construcción sean fuente de error, pues sus efectos son despreciables frente a los errores cometidos por el modelo. Tanto en la simulación como en la medición se determina que la ranura no tiene efecto apreciable sobre el patrón de radiación. Finalmente, se utiliza la teoría de difracción para simular el efecto de los bordes del plano de tierra en el campo de radiado; las simulaciones permiten obtener aproximación de los lóbulos posteriores del patrón de radiación.

Por lo tanto, se puede concluir que los métodos numéricos estudiados, en

combinación con el modelo de cavidad resonante, permiten realizar un analisis de antenas de microtira de forma arbitraria, a pesar de los errores mencionados.

5.3 Trabajo Futuro

En esta tesis se han presentado métodos numéricos para resolver la ecuación diferencial escalar obtenida a partir del modelo de cavidad resonante. Pero debido a las aproximaciones realizadas, este modelo tiene algunas desventajas:

- No tiene en cuenta el campo de borde y las fórmulas empíricas utilizadas para el cálculo de las dimensiones efectivas introducen errores significativos.
- Considera que el plano de tierra es infinito.
- No permite simular elementos parásitos o arreglos de antenas.

Para salvar estas limitaciones y mejorar la exactitud de los resultados, el problema de campos electromagnéticos debe ser resuelto sin hacer simplificaciones o aproximaciones de ningún tipo. Una forma de describir este tipo de problemas tridimensionales es utilizando la ecuación integral de Stratton-Chu [1, Cap. 8]:

$$\begin{aligned}\theta(\mathbf{r}')\mathbf{E}(\mathbf{r}') &= \int_V [j\omega\mu G_0\mathbf{J} + \epsilon^{-1}\rho\boldsymbol{\nabla}G_0]\,dv \\ &\quad + \oint_S [G_0(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E})\times\mathbf{n} - \boldsymbol{\nabla}G_0\times(\mathbf{E}\times\mathbf{n}) - (\mathbf{E}\cdot\mathbf{n})\boldsymbol{\nabla}G_0]\,ds\end{aligned}$$

donde G_0 es la función escalar de Green para el espacio libre, V es un volumen limitado por la superficie S, $\mathbf{n}$ es el versor normal a la superficie. El factor θ vale 1 si $\mathbf{r}' \in V$ o $1/2$ si $\mathbf{r}' \in S$. Nuevamente, no es posible hallar fácilmente una solución analítica de dicha ecuación integral. Por lo tanto, se deben utilizar métodos numéricos para encontrar una solución aproximada. Para futuros trabajos se se propone la utilización de BEM y métodos de discretización sin mallas [31, 32].

Apéndice A

Algunos Principios del Electromagnetismo

A.1 Principio de Equivalencia (o de Huygens)

Sea un volumen V, limitado por una superficie S, que contiene las fuentes que generan el campo $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ en el exterior de dicho volumen. El Principio de Equivalencia establece que fuentes de corriente eléctrica y magnética superficiales definidas sobre S por:

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{n} \times \mathbf{H} \tag{A.1}$$

$$\mathbf{H}_s = \mathbf{E} \times \mathbf{n} \tag{A.2}$$

donde $\mathbf{n}$ es el versor normal a la superficie, son origen de un campo externo externo a V igual al del problema original [1, Cap. 9] [24, Cap. 3].

Este principio determina cuales son las fuentes capaces de establecer el problema equivalente. Sin embargo, por medio del concepto de unicidad [1, Cap. 8] se puede se puede deducir que sólo las componentes tangenciales de $\mathbf{E}$ o $\mathbf{H}$ son necesarias para determinar el campo original.

A.2 Campo Electromagético en la Zona Lejana

Definiendo $\mathbf{A}$ como el potencial vectorial magnético tal que cumple con $\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}$, y reemplazando en la primer ecuación de Maxwell, se tiene que:

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{E} + j\omega\mathbf{A}) = 0 \tag{A.3}$$

Si Φ es el potencial escalar eléctrico, entonces:

$$\mathbf{E} + j\omega\mathbf{A} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi \tag{A.4}$$

Con (A.4) en (2.2):

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} - k^2\mathbf{A} = \mu\mathbf{J} - j\omega\epsilon\mu\boldsymbol{\nabla}\Phi \tag{A.5}$$

$$\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A} - k^2\mathbf{A} = \mu\mathbf{J} - j\omega\epsilon\mu\boldsymbol{\nabla}\Phi \tag{A.6}$$

Eligiendo la medida de Lorentz $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A} = -j\omega\epsilon\mu\Phi$:

$$\nabla^2\mathbf{A} + k^2\mathbf{A} = -\mu\mathbf{J} \tag{A.7}$$

La solución de esta ecuación es:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dv' \tag{A.8}$$

Conocido el campo $\mathbf{A}$, se pueden calcular $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{E} = -j\omega\mathbf{A} + \frac{1}{j\omega\epsilon\mu}\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A}) \tag{A.9}$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} \tag{A.10}$$

El campo en la región lejana se obtiene reteniendo los términos dominantes $(1/r)$ y despreciando los de orden superior [24, Cap. 3, p. 133]:

$$\mathbf{H} = \frac{jk}{\mu}(A_\phi\widehat{\theta} - A_\theta\widehat{\phi}) \tag{A.11}$$

siendo $k/\mu = \omega/Z_0$. Mientras que el campo $\mathbf{E}$ se obtiene sabiendo que en la zona de radiación se cumple:

$$E_\theta = Z_0 H_\phi \tag{A.12}$$

$$E_\phi = Z_0 H_\theta \tag{A.13}$$

Fuentes Eléctricas	Fuentes Magnéticas
$\mathbf{E}$	$\mathbf{H}$
$\mathbf{H}$	$-\mathbf{E}$
$\mathbf{J}$	$\mathbf{M}$
$\mathbf{A}$	$\mathbf{F}$
ϵ	μ
μ	ϵ

Tabla A.1: Cantidades Duales

Fuentes Eléctricas	Fuentes Magnéticas
$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega\epsilon\mathbf{E}$	$-\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = \mathbf{M} + j\omega\mu\mathbf{H}$
$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}$	$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon\mathbf{E}$
$\mu\mathbf{H} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}$	$-\epsilon\mathbf{E} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}$
$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')e^{-jk\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert}}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert}\,dv'$	$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{\epsilon}{4\pi}\int_V \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')e^{-jk\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert}}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert}\,dv'$

Tabla A.2: Ecuaciones Duales

También es posible definir el potencial vectorial eléctrico como $\mathbf{D} = -\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F}$ y hallar una expresión dual a la (A.11) (ver Sección A.3). El campo en la región lejana es:

$$\mathbf{E} = j\omega z_0(-F_\phi\widehat{\theta} + F_\theta\widehat{\phi}) \tag{A.14}$$

A.3 Dualidad

Si ecuaciones que describen distintos fenómenos tienen la misma forma matemática, entonces son llamadas *duales*. Las cantidades que ocupan la misma posición en ecuaciones duales son cantidades *duales* [24, Cap. 3].

Si se definen fuentes de carga y de corriente magnética, las ecuaciones de Maxwell se convierten en duales. Las Tablas 1 y 2 muestran dichas ecuaciones y la dualidad entre cantidades.

Apéndice B

Teoría de Difracción

B.1 Introducción

En el Capítulo 4 se mencionó que para tener en cuenta el efecto del plano de tierra finito en el patrón de radiación, se debe combinar la teoría geométrica de la diffracción con el modelo de cavidad resonante. En este apéndice se describe brevemente dicha teoría y se muestra como aplicarla en problemas de antenas de microtiras.

B.2 Teoría Geométrica de Difracción

La teoría de óptica geometríca, por sí sola, no es capaz de predecir el campo en regiones ocultas por un conductor. Por lo ello, se utiliza el concepto de campo difractado para complementar esta teoría.

La difracción es un fenómeno local a alta frecuencia, por lo tanto, el campo difractado es proporcional al campo incidente en el punto en que se produce la difracción multiplicado por un coeficiente, llamado *coeficiente de difracción*. Este coeficiente se encuentra determinado por las propiedades locales del campo y el contorno en el punto de difracción. Joseph Keller fue el primero en sistematizar el cálculo del campo difractado al desarrollar expresiones cerradas

para los coeficientes de difracción [33, Cap. 9]. La teoría desarrollada por Keller se conoce como *teoría geométrica de difracción* (GTD).

Una expresión del campo difractado en forma matricial es:

$$[\mathbf{E}^d] = [D][\mathbf{E}^i]A(s)e^{-jks} \tag{B.1}$$

donde $[\mathbf{E}^d]$ and $[\mathbf{E}^i]$ son vectores columnas con las componentes de los campos difractados e incidente, $[D]$ es una matriz cuadrada con los coeficientes de difracción, s es la distancia entre el punto de difracción y el punto de observación, y A es el factor de atenuación definido por:

$$A(s) = \begin{cases} 1/s^{1/2} & \text{para ondas planas y cilíndricas} \\ (s'/s(s'+s))^{1/2} & \text{para ondas esféricas} \end{cases} \tag{B.2}$$

donde s' es la distancia entre el punto de difracción y la fuente del campo incidente. En general, $[\mathbf{E}^d]$ está definido por tres componentes y $[D]$ por una matriz de tres por tres. Sin embargo, si se elige adecuadamente el sistema de coordenadas, los campos se pueden definir con dos componentes y la matriz D con dos coeficientes no nulos en la diagonal. Estos son sistemas de coordenadas esféricas centrados en el punto de difracción y orientados sobre el rayo incidente y difractado, como se muestra en la Figura B.1. Entonces el campo difractado es:

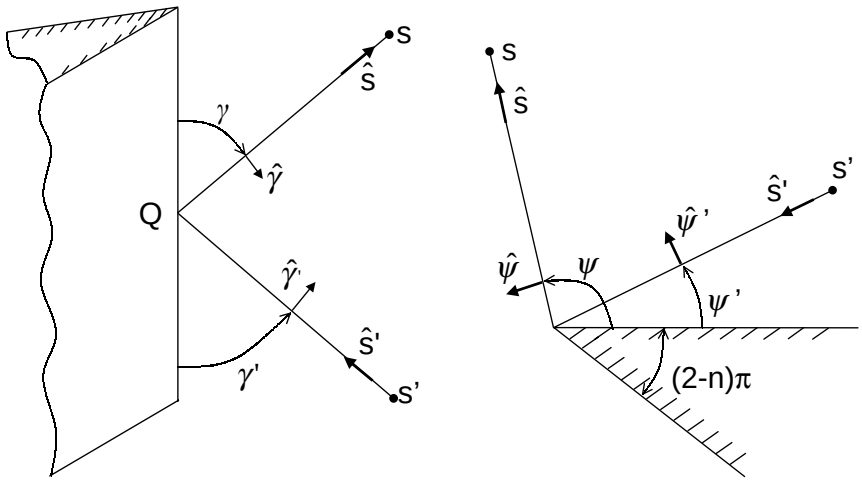
$$\begin{bmatrix} E^d_\gamma(s) \\ E^d_\psi(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D_\parallel & 0 \\ 0 & -D_\perp \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E^i_{\gamma'}(Q) \\ E^i_{\psi'}(Q) \end{bmatrix} A(s)e^{-jks} \tag{B.3}$$

La notación $D_\parallel$ y $D_\perp$ se refiere a que $E^i_{\gamma'}$ y $E^i_{\psi'}$ son paralelos y perpendiculares respectivamente al plano que contiene el rayo incidente y el borde de difracción.

B.3 Teoría Uniforme de Difracción

La teoría de difracción de Keller tiene algunas limitaciones, como ser, no es posible calcular el campo en regiones cercanas al borde de difracción, a los puntos focales, y a la frontera de sombra [33, Cap. 9]. En 1967, Kouyoumjian generalizó las expresiones para el cálculo de los coeficientes de difracción, permitiendo salvar las limitaciones anteriores. A esta nueva teoría se la conoce como *teoría uniforme de la difracción* (UTD). Estos coeficientes se encuentran definidos por [34]:

$$D_{\parallel,\perp} = \frac{-e^{-j\pi/4}}{n\sqrt{8\pi k}\sin\gamma}$$



(a) (b)

Figura B.1: Geometría del problema de difracción: a) vista lateral; b) superior.

$$
\begin{aligned}
&\times \left[\cot\left(\frac{\pi+(\psi-\psi')}{2n}\right) F[kLa^{+}(\psi-\psi')]\right. \\
&+\cot\left(\frac{\pi-(\psi-\psi')}{2n}\right) F[kLa^{-}(\psi-\psi')] \\
&\mp\left\{\cot\left(\frac{\pi+(\psi+\psi')}{2n}\right) F[kLa^{+}(\psi+\psi')]\right. \\
&\left.\left.+\cot\left(\frac{\pi-(\psi+\psi')}{2n}\right) F[kLa^{-}(\psi+\psi')]\right\}\right]
\end{aligned} \tag{B.4}
$$

donde F es un factor definido por la integral de Fresnel:

$$
F(x) = 2j|\sqrt{x}|e^{jx}\int_{|\sqrt{x}|}^{\infty} e^{-j\tau^2}d\tau \tag{B.5}
$$

El argumento de esta integral depende de la función $a^{\pm}$:

$$
a^{\pm}(\psi\pm\psi') = 2\cos^2\left[\frac{2n\pi N^{\pm}-(\psi\pm\psi')}{2}\right] \tag{B.6}
$$

en donde $N^{\pm}$ son enteros que deben satizfacer lo mejor posible las siguientes ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
2\pi n N^{+}-(\psi\pm\psi') &= \pi \\
2\pi n N^{-}-(\psi\pm\psi') &= -\pi
\end{aligned} \tag{B.7}
$$

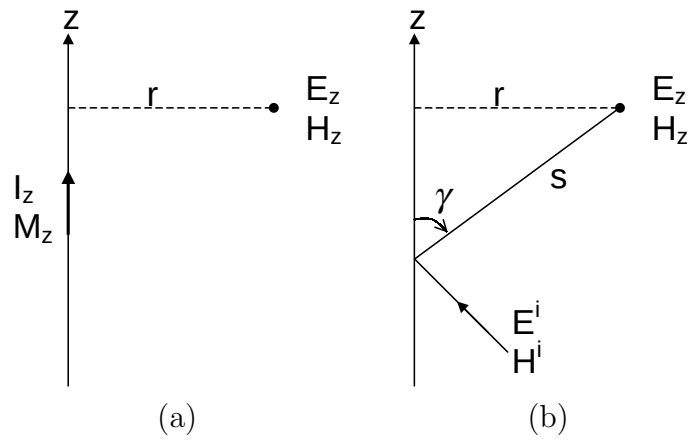


Figura B.2: Campo generado por: a) líneas de corriente; b) difracción.

Otro parámetro de los coeficientes de difracción es el parámetro de distancia L, definido por:

$$L = \begin{cases} s\sin^2\gamma & \text{para onda plana} \\ s's/(s'+s) & \text{para onda cilíndrica} \\ s's\sin^2/(s'+s) & \text{para onda esférica} \end{cases} \tag{B.8}$$

B.4 Corriente Equivalente

Cuando el borde que produce la difracción es curvo o de largo finito, se debe utilizar el concepto de corriente equivalente. Es decir, se supone que en el borde existe una línea de corriente (eléctrica o magnética) que genera el campo difractado. Esta corriente se calcula a partir de los coeficientes de difracción.

Si existe una línea de corriente eléctrica I_z en la dirección de z (Figura B.2.a), el campo eléctrico que genera es:

$$E_z = \frac{-k^2 I_z}{4\omega\epsilon} H_0^2(kr) \tag{B.9}$$

donde H_0^2 es la función de Hankel de segundo tipo y orden cero. Si el argumento kr es grande, la función de Hankel puede ser aproximada de la siguiente forma:

$$E_z = \frac{z_0 k I_z}{2\sqrt{2\pi kr}} e^{-jkr} \tag{B.10}$$

De la misma forma, si es una corriente magnética M_z, el campo es:

$$H_z = -\frac{kM_z}{2z_0\sqrt{2\pi kr}}e^{-jkr} \tag{B.11}$$

Si se tiene un semiplano conductor con su borde sobre el eje z, y si sobre él incide un frente de onda electromágnetico (Figura B.2.b), el campo difractado es:

$$\begin{aligned} E_z &= D_{\parallel}E_z^i\frac{e^{-jks}}{\sqrt{s}} \\ H_z &= D_{\perp}H_z^i\frac{e^{-jks}}{\sqrt{s}} \end{aligned} \tag{B.12}$$

Si el campo incide de forma normal al borde del semiplano, de (B.10), (B.11) y (B.12) se obtiene la corriente eléctrica y magética que produciría un campo igual al campo difractado:

$$\begin{aligned} I_z &= \frac{-j}{z_0}D_{\parallel}E_z^i\sqrt{8\pi/k}e^{j\pi/4} \\ M_z &= -jz_0D_{\perp}H_z^i\sqrt{8\pi/k}e^{j\pi/4} \end{aligned} \tag{B.13}$$

Luego, integrando estas corrientes se obtienen los potenciales magnéticos y eléctricos, como se explica en la Sección A.2. Finalmente, a partir de estos potenciales se determina el campo difractado $\mathbf{E}^d$ y $\mathbf{H}^d$.

Para el caso en que el campo incidente no es normal al borde de difracción ($\gamma \neq \pi/2$), se debe incluir un término que tenga en cuenta el cambio de fase debido al ángulo de incidencia:

$$\begin{aligned} I_z &= \frac{-j}{z_0}D_{\parallel}E_z^i\sqrt{8\pi/k}e^{j\pi/4}e^{jks(1-\sin\gamma)} \\ M_z &= -jz_0D_{\perp}H_z^i\sqrt{8\pi/k}e^{j\pi/4}e^{jks(1-\sin\gamma)} \end{aligned} \tag{B.14}$$

B.5 Antena de Microtira

El campo total radiado por una antena de microtira es la suma vectorial del campo generado por el parche y el campo difractado en los bordes del plano de tierra:

$$\mathbf{E}^T = \mathbf{E} + \mathbf{E}^d \tag{B.15}$$

donde el campo $\mathbf{E}$ se calcula a partir de las corrientes equivalentes en el perímetro del parche, como se mostró en la Sección 2.5, y $\mathbf{E}^d$ se encuentra a partir del método de corrientes equivalentes, descripto en la sección anterior.

El campo difractado depende de los coeficientes de difracción y del campo incidente. En el problema de una antena de microtira, el objeto que produce la difracción es un plano conductor; entonces $n = 2$ (ver Figura B.1). Por la geomtría del problema en particular, $\psi' = 0$. Bajo estas condiciones se cumple que $a^{\pm}(\psi \pm \psi') = 2\cos^2(\psi/2)$. También, en el caso de rayo rasante los coeficientes de difracción se deben multiplicar por un factor de 1/2, debido para este ángulo de incidencia el campo incidente y el reflejado de confunden, generenado un campo del doble de amplitud [34]. Por lo tanto, la expresión (B.4) de los coeficientes se simplifica en:

$$\begin{aligned} D\perp &= -\frac{e^{-j\pi/4}}{\sqrt{8\pi k}}\frac{F[2ks'\sin^2\gamma\cos^2(\psi/2)]}{\cos(\psi/2)} \\ D\| &= 0 \end{aligned} \tag{B.16}$$

Es decir, el campo difractado depende de la componente normal al plano del campo incidente. Entonces, la corriente magnética equivalente en el perímetro del parche, que permite calcular el campo difractado es:

$$M = E_\theta D_\perp \sqrt{8\pi/k}e^{j\pi/4}e^{jks(1-\sin\gamma)} \tag{B.17}$$

donde E_θ es la componente en θ del campo electrico radiado por la antena a lo largo del borde del plano de tierra.

En las Figuras B.3 y B.4 se muestran los planos E y H, respectivamente, de las antenas descriptas en el Capítulo 4. Se debe mencionar que en el cálculo de dichos patrones de radiación, sólo se tuvo en cuenta el campo difractado de primer orden. El campo difractado de segundo orden permite reducir las discontinuidades en el campo total radiado [33]. Más información sobre elcampo difractado de segundo orden puede encontrarse en [33, Cap. 9] y [36].

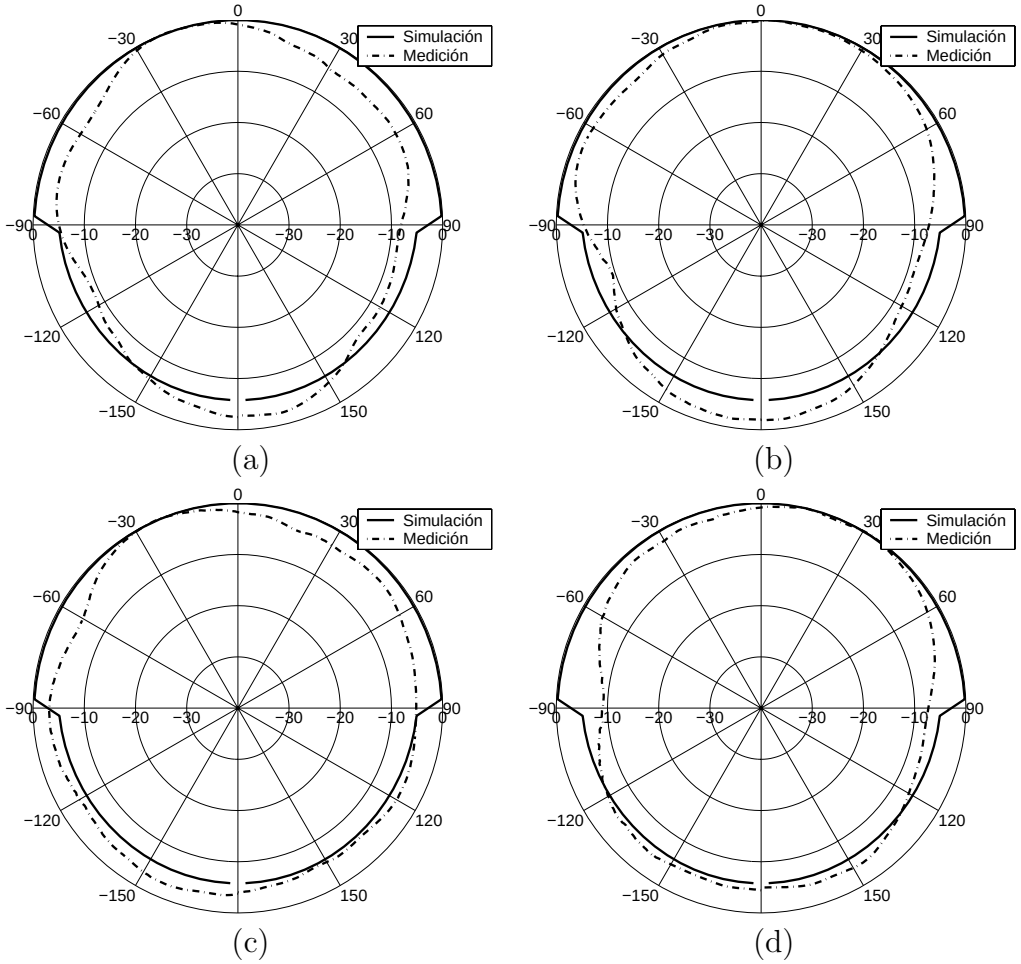


Figura B.3: Plano E del patrón de radiación de las distintas antenas: a) antena de referencia; b) antena A; c) antena B; d) antena C.

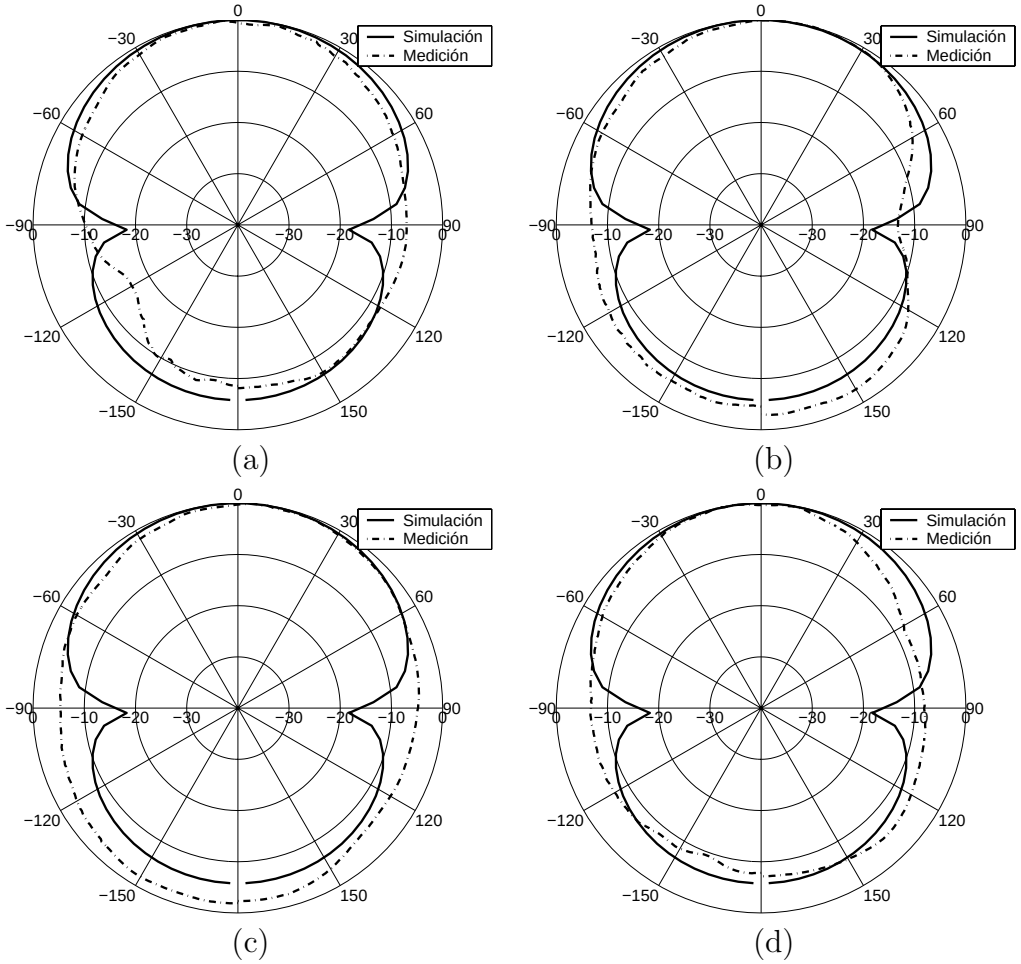


Figura B.4: Plano H del patrón de radiación de las distintas antenas: a) antena de referencia; b) antena A; c) antena B; d) antena C.

Apéndice C

Código Fuente

C.1 Introducción

En este apéndice se listan las rutinas desarrolladas durante el trabajo de tesis. Estas rutinas, que funcionan bajo el software MATLAB, permiten calcular las distintas propiedades de antenas de microtira por los métodos numéricos descriptos en el Capítulo 3.

Se debe mencionar que el software MATLAB cuenta con una libreria, llamada *partial differential equation* (PDE), con funciones que permiten resolver ecuaciones diferenciales en forma numérica. De esta librería, se utilizaron las funciones que permiten generar el mallado (o discretización) sobre una geometría plana utilizando el algoritmo de Delaunay [37].

C.2 Rutinas de FEM

HELM

Esta rutina calcula la componente E_z bajo el parche metálico de una antena de microtira. La geometría del problema se encuentra descripta en las matrices `p`, `t` y `e` calculadas con el PDE toolbox de MATLAB.

```
function U=helm(r,e,ro,f,epr)

% HELM00 resuelve por el mtodo de Elementos Finitos la ecuacin
% de Helmholtz en 2D: div(p*grad(u)) + k^2*u = g
% utilizando elementos lineales (triangulares con integracin analtica).
% p=1
% g=-j w uo Io delta(r-ro)
%
% Argumentos de entrada
% Matriz con posiciones nodales: r=(x,y) [m] -> columna
% Matriz con nodos por elementos: e
% Punto de alimentacin: ro=(xo,yo) [m]
% Frecuencia: f [Hz]
% Permitividad relativa: epr
%
% Argumento de salida
% Vector columna con los valores nodales de u,
%
% Material homogeneo dentro del dominio
% Cond. de Borde de Newmann: du/dn=0
%
% Geometra: centrada en el origen de sistema de coordenadas
%
% Uso: U=helm(p',t(1:3,:)',ro,f,epr);

% Medio
% Permitividad [F/m]
ep=8.854e-12*epr;
% Permeabilidad [Hy/m]
mu=4*pi*1e-7;
% Cte de prop. [1/m^2]
k2=(2*pi*f)^2*mu*ep;

% Nodos: un nodo por fila, columnas 1 y 2 son las coord. x, y
% Cantidad de nodos
N=size(r,1);

% Elementos: un elemento por fila, columnas 1 a 3 nmero
% de nodos que lo forman
% Cantidad de nodos por elemento K=3;

% Construcin de matrices y clculo de la solucin segn el problema
T=sparse(N,N);
S=sparse(N,N);
G=sparse(N,1);

% Ecuacin de Helmholtz no homognea
% Construccin de las matrices T y S globales
for jj=1:size(e,1)
```

```
   x1=r(e(jj,1),1);
   y1=r(e(jj,1),2);
   x2=r(e(jj,2),1);
   y2=r(e(jj,2),2);
   x3=r(e(jj,3),1);
   y3=r(e(jj,3),2);
   A=.5*det([1 x1 y1; 1 x2 y2; 1 x3 y3]);
   Se=[0 y2-y3 x3-x2; 0 y3-y1 x1-x3; 0 y1-y2 x2-x1];
   Se=.25*Se*Se'/A;
   Te=A*[2 1 1; 1 2 1; 1 1 2]/12;
T=T+sparse((ones(3,1)*e(jj,:))',ones(3,1)*e(jj,:),Te,N,N);
S=S+sparse((ones(3,1)*e(jj,:))',ones(3,1)*e(jj,:),Se,N,N);
end

% Construccin de la matriz G global
jj=0;
A=0;
A123=1;
while (abs(A-A123)>1e-15)
   jj=jj+1;
   x1=r(e(jj,1),1);
   y1=r(e(jj,1),2);
   x2=r(e(jj,2),1);
   y2=r(e(jj,2),2);
   x3=r(e(jj,3),1);
   y3=r(e(jj,3),2);
   A=det([1 x1 y1; 1 x2 y2; 1 x3 y3]);
   A123=abs(det([1 ro(1) ro(2); 1 x2 y2; 1 x3 y3])) + ...
        abs(det([1 x1 y1; 1 ro(1) ro(2); 1 x3 y3])) + ...
        abs(det([1 x1 y1; 1 x2 y2; 1 ro(1) ro(2)]));
end

Ge=[1 ro(1) ro(2)]*inv([1 x1 y1; 1 x2 y2; 1 x3 y3]);
G=G+sparse(e(jj,:)',ones(3,1),Ge,N,1);

% Solucin del sistema (k2 T - S) U = G
U=full((k2*T-S)\G);
U=j*2*pi*f*mu*U;
```

ZFEM

Esta rutina calcula la impedancia de entrada de una antena de microtira a partir de su factor de mérito.

```
function Z=zfem(r,e,ro,f,epr,t)
```

```
% ZFEM calcula la impedancia de entrada de una antena de microtira
% con el metodo de los elementos finitos.
%
% Argumentos de entrada
% Matriz con posiciones nodales: r=(x,y) [m] -> columna
% Matriz con nodos por elementos: e
% Punto de alimentacin: ro=(xo,yo) [m]
% Frecuencia: f [Hz]
% Permitividad relativa: epr
% Espesor del dielctrico: t [m]
%
% Argumento de salida
% Impedancia de entrada: Z
%
% Uso: Z=zfem(p',t(1:3,:)',ro,f,epr*(1-j/Q),alt)
%

% Calculo del campo Ez
U=helm(r,e,ro,f,epr);

% Busqueda del elemento donde esta ro
jj=0;
A=0;
A123=1;
while (abs(A-A123)>1e-15)
   jj=jj+1;
   x1=r(e(jj,1),1);
   y1=r(e(jj,1),2);
   x2=r(e(jj,2),1);
   y2=r(e(jj,2),2);
   x3=r(e(jj,3),1);
   y3=r(e(jj,3),2);
   A=det([1 x1 y1; 1 x2 y2; 1 x3 y3]);
   A123=abs(det([1 ro(1) ro(2); 1 x2 y2; 1 x3 y3])) + ...
        abs(det([1 x1 y1; 1 ro(1) ro(2); 1 x3 y3])) + ...
        abs(det([1 x1 y1; 1 x2 y2; 1 ro(1) ro(2)]));
end

% Impedancia
Z=-t*[1 ro(1) ro(2)]*inv([1 x1 y1; 1 x2 y2; 1 x3 y3])*U(e(jj,:));
```

C.3 Rutinas de BEM

HELM

Esta rutina calcula la componente E_z bajo el parche metálico de una antena de microtira. La geometría del problema se encuentra descripta en las matrices `p`, `t` y `e` calculadas con el PDE toolbox de MATLAB.

```
function U=helm(r,e,ro,f,epr)

% HELM resuelve por el mtodo de Elementos de Borde la
% ecuacin de Helmholtz en 2D:
% div(p*grad(u)) + k^2*u = g
% utilizando elementos lineales.
% p=1
% g=-j w uo Io delta(r-ro)
%
% Argumentos de entrada
% Matriz con posiciones nodales: r [m]
% Nodos q' forman cada elemento: e
% Posicin de la fuente: ro [m]
% Frecuencia: f [Hz]
% Permitibidad relativa del medio: epr
%
% Argumento de salida
% Vector columna con los valores nodales de u, incluidos
% los prescriptos por condiciones de borde: U
%
% Material homogeneo dentro del dominio
% Cond. de Borde de Newmann: du/dn=0
%
% Uso: U=helm(p',e(1:2,:)',ro,f,epr);

% Medio
% Permitividad [F/m]
ep=8.854e-12*epr;
% Permeabilidad [Hy/m]
mu=4*pi*1e-7;
% Cte de prop. [1/m^2]
k=2*pi*f*sqrt(mu*ep);

% Nodos: M total de nodos, N en el permetro y L interiores
M=size(r,1);
N=size(e,1);
% L=M-N;

% Nodos en el contorno y en el interior
c=e(:,1);
int=[1:size(r,1)]';
int(c)=zeros(size(c,1),1);
int=int(int~=zeros(size(r,1),1));
```

```
% Matrices
R=sqrt( (r(:,1)-ro(1)).^2+(r(:,2)-ro(2)).^2 );
Gf = besselj(0,k*R)+j*bessely(0,k*R) ;

% Largos y angulos de los segmentos
L=sqrt( (r(e(:,2),1)-r(e(:,1),1)).^2 + (r(e(:,2),2)-r(e(:,1),2)).^2 );
tx=( r(e(:,2),1)-r(e(:,1),1) )./L;
ty=( r(e(:,2),2)-r(e(:,1),2) )./L;

% Integracin numrica: Gauss
alpha=[5;8;5]/9;
chi=[-sqrt(.6),0,sqrt(.6)];

H=zeros(M,M);
for jj=1:N
  ri = [ tx(jj)*r(:,1)+ty(jj)*r(:,2) , -ty(jj)*r(:,1)+tx(jj)*r(:,2) ];
  a=ones(M,1) *  [ tx(jj)*r(e(jj,1),1)+ty(jj)*r(e(jj,1),2) , ...
                  -ty(jj)*r(e(jj,1),1)+tx(jj)*r(e(jj,1),2) ] - ri;
  b=ones(M,1) *  [ tx(jj)*r(e(jj,2),1)+ty(jj)*r(e(jj,2),2) , ...
                  -ty(jj)*r(e(jj,2),1)+tx(jj)*r(e(jj,2),2) ] - ri;
  [FA,FB]=argumen(k,a,b,chi);
  % Matriz H: columnas ordenadas por nodos
  H(:,e(jj,1))= H(:,e(jj,1)) + FA*alpha;
  H(:,e(jj,2))= H(:,e(jj,2)) + FB*alpha;
  % Calculo de los ci ordenados por nodos. OJO!
  ii=find(e(jj,1)==e(:,2));
  H(e(jj,1),e(jj,1))= H(e(jj,1),e(jj,1)) + ...
                    (pi+atan2( ri(e(ii,2),2)-ri(e(ii,1),2) , ...
                               ri(e(ii,2),1)-ri(e(ii,1),1) ))/(2*pi);
end
H=H(:,c);

% Solucin
U=zeros(M,1);
% Permetro
U(c,1) = .5*pi*f*mu*( H(c,:) \ Gf(c,1) ) ;
% Nodos del interior
U(int,1) = -H(int,:) * U(c,1) + .5*pi*f*mu*Gf(int,1) ;
```

ZBEM

Esta rutina calcula la impedancia de entrada de una antena de microtira a partir de su factor de mérito.

```
function Z=zbem(r,t,e,ro,f,epr,alt)
```

```
% ZBEM calcula de la impedancia de entrada de una antena de microtira.
%
% Argumento de entrada
% Nodos: r
% Nodos en cada tringulo: t
% Nodos en cada elemento de borde: e
% Pto de alimentacin: ro
% Frecuencia: f
% Permitividad del dielctrico: epr
% Espesor del dielctrico: alt
%
% Argumento de salida
% Impedancia de entrada: Z
%
% Uso: Z=zbem(p',t(1:3,:)',e(1:2,:)',ro,f,epr*(1-j/Q),alt);

% calculo del campo Ez
U=helm(r,e,ro,f,epr);

% Busqueda del elemento donde esta ro
jj=0;
A=0;
A123=1;
while (abs(A-A123)>1e-15)
   jj=jj+1;
   x1=r(t(jj,1),1);
   y1=r(t(jj,1),2);
   x2=r(t(jj,2),1);
   y2=r(t(jj,2),2);
   x3=r(t(jj,3),1);
   y3=r(t(jj,3),2);
   A=det([1 x1 y1; 1 x2 y2; 1 x3 y3]);
   A123=abs(det([1 ro(1) ro(2); 1 x2 y2; 1 x3 y3])) + ...
        abs(det([1 x1 y1; 1 ro(1) ro(2); 1 x3 y3])) + ...
        abs(det([1 x1 y1; 1 x2 y2; 1 ro(1) ro(2)]));
end

% Impedancia
Z=-alt*[1 ro(1) ro(2)]*inv([1 x1 y1; 1 x2 y2; 1 x3 y3])*U(t(jj,:));
```

ARGUMEN

Rutina auxiliar llamada por la función `helm` de BEM.

```
function [ya,yb]=argumen(k,a,b,x)
```

```
% ARGUMEN es la solucin analtica de las integrales involucradas en BEM
% para elementos de 1er orden.
%
% Variables de entrada
% k: Cte de prop.
% a: coord en el sistema local del nodo A
% b: coord en el sistema local del nodo B
% x: ptos de evaluacin
%
% Variable de salida
% [ya,yb]
% ya=argumento de la integral de [ PHIa dw/dn ]
% yb=argumento de la integral de [ PHIb dw/dn ]
%


% Defino las matrices de salidas
ya=zeros(size(a,1),3);
yb=zeros(size(a,1),3);

% Busco los casos en que ri, ra y rb no son colineales
% Para esos casos el resultado no es nulo y debe calcularse
ind=find( abs(a(:,2))>1e-12 | abs(b(:,2))>1e-12 );

% Defino las siguientes variables para simplificar la notacin
po=a(ind,2)*ones(size(x));
sb=b(ind,1)*ones(size(x));
sa=a(ind,1)*ones(size(x));
x=ones(size(sa,1),1)*x;
x= .5*(sb-sa).*x + .5*(sb+sa);
r=sqrt(x.^2+po.^2);

ya(ind,:)= .125*k*po.* ...
           ( j*besselj(1,k*r)-bessely(1,k*r) ).*(sb-x)./r;
yb(ind,:)= .125*k*po.* ...
           ( j*besselj(1,k*r)-bessely(1,k*r) ).*(x-sa)./r;
```

MTLB2BEM

La matriz `e` contiene la información de que nodos se encuentran sobre el perímetro del parche. Para ser utilizada por estos algoritmos, debe ser reordenada utilizando esta función.

```
function ep=mtlb2bem(e)

% MTLB2BEM convierte la matriz de bordes e a un formato utilizable
```

```
% por los algoritmos de BEM.
%
% Argumento de entrada
% e: matriz de Bordes calculada por la funcin initmesh
%
% Argumento de salida
% ep: nueva matriz de Bordes
%
% Uso: e=mtlb(e);
%
% Informacin extra:
% e es una matriz de 7 por N, donde N es la cantidad de segmentos
% que contienen los bordes de la geometria del problema. Las filas
% almacenan la siguiente informacin:
% 1-2: pto inicial y final del segmento
% 3-4: parametro inicial y final del segmento ?!
% 5: numero de borde al que pertenece el segmento
% 6-7: numero de subdominio a izquierda y derecha (0 indica exterior)
%
% En BEM es necesario recorrer todos los segmentos en un mismo sentido (el
% dado por el de la regla de la mano derecha). Por lo cual, todos los
% elementos de la fila 6 deben ser distintos de cero y los de la 7
% igual a cero.

% Segmentos que no cumplen la prop anterior
ind=find(e(6,:)==0);

% Matriz de borde modificada
ep=e;
ep([1 2 6 7],ind)=ep([2 1 7 6],ind);
```

C.4 Rutinas de DRM

HELM

Esta rutina calcula la componente E_z bajo el parche metálico de una antena de microtira. La geometría del problema se encuentra descripta en las matrices `p`, `t` y `e` calculadas con el PDE toolbox de MATLAB. Luego, para calcular la impedancia de entrada se utiliza la función `zbem` de la sección anterior.

```
function U=helm(r,e,ro,f,epr)

% HELM resuelve por el mtodo de Elementos de Borde la
```

```
% ecuacin de Helmholtz en 2D: div(p*grad(u)) + k^2*u = g
% utilizando elementos lineales (triangulares con integracin
% analtica).
% p=1
% g=-j w uo Io delta(r-ro)
%
% Argumentos de entrada
% Matriz con posiciones nodales: r [m]
% Nodos q' forman cada elemento: e
% Posicin de la fuente: ro=(xo,yo) [m]
% Frecuencia: f [Hz]
% Permitibidad relativa del medio: epr
%
% Argumento de salida
% Vector columna con los valores nodales de u, incluidos los
% prescriptos por condiciones de borde: U
%
% Material homogeneo dentro del dominio
% Cond. de Borde de Newmann: du/dn=0
%
% Geometra: centrada en el origen de sistema de coordenadas
%
% Uso: U=helm(p',e(1:2,:)',ro,f,epr);

% Medio
% Permitividad [F/m]
ep=8.854e-12*epr;
% Permeabilidad [Hy/m]
mu=4*pi*1e-7;
% Cte de prop. [1/m^2]
k2=(2*pi*f)^2*mu*ep;

% Clculo de las matrices H y G
[H,G]=hgmat0(r,e);

% Clculo de las matrices F, Uc y Qc
[F,Uc,Qc]=fuqmat0(r,e);

% Clculo de la fuente
Gf=log( (ro(1)-r(:,1)).^2 + (ro(2)-r(:,2)).^2 ) ;

% Armar la ecuacin
% Solucin
U= j*.5*f*mu*(( H + k2*(H*Uc-G*Qc)*inv(F) ) \ Gf) ;
```

HGMAT0

Rutina auxiliar llamada por la función `helm` de DRM.

```
function [H,G]=hgmat0(r,e)

% Clculo de las matrices H y G generadas por el mtodo
% de Reciprocidad Dual aplicado a la ecuacin de Helmholtz.
% Los elementos son de 1er orden.
%
% Argumentos de entrada
% r: coord de los nodos
% e: nodos q' forman un elemento
%
% Argumento de salida
% Matriz H de MxM
% Matriz G de Mx2N

% Nodos:
M=size(r,1);
N=size(e,1);
LL=M-N;

% Nodos en el contorno y en el interior
cont=e(:,1);
int=[1:size(r,1)]';
int(cont)=zeros(size(e,1),1);
int=int(int~=zeros(size(r,1),1));

% Largos y angulos de los segmentos
L=sqrt( (r(e(:,2),1)-r(e(:,1),1)).^2 + (r(e(:,2),2)-r(e(:,1),2)).^2 );
tx=( r(e(:,2),1)-r(e(:,1),1) )./L;
ty=( r(e(:,2),2)-r(e(:,1),2) )./L;

% Matrices
G=zeros(M,2*N);
H=zeros(M,M);
for jj=1:N
  ri = [ tx(jj)*r(:,1)+ty(jj)*r(:,2) , -ty(jj)*r(:,1)+tx(jj)*r(:,2) ];
  a=ones(M,1) *  [ tx(jj)*r(e(jj,1),1)+ty(jj)*r(e(jj,1),2) , ...
                  -ty(jj)*r(e(jj,1),1)+tx(jj)*r(e(jj,1),2) ] - ri;
  b=ones(M,1) *  [ tx(jj)*r(e(jj,2),1)+ty(jj)*r(e(jj,2),2) , ...
                  -ty(jj)*r(e(jj,2),1)+tx(jj)*r(e(jj,2),2) ] - ri;
  I=isol(a,b);
  % Matriz G: columnas ordenadas por elementos
  G(:,2*jj-1)=-( b(:,1).*I(:,1)-I(:,2) ) ./ (2*pi*( b(:,1)-a(:,1) ));
  G(:,2*jj)=  -( I(:,2)-a(:,1).*I(:,1) ) ./ (2*pi*( b(:,1)-a(:,1) ));
  % Matriz H: columnas ordenadas por nodos
  H(:,e(jj,1))= H(:,e(jj,1)) + ...
                ( b(:,1).*I(:,3)-I(:,4) ) ./ (2*pi*( b(:,1)-a(:,1) ));
```

```
  H(:,e(jj,2))= H(:,e(jj,2)) + ...
                ( I(:,4)-a(:,1).*I(:,3) ) ./ (2*pi*( b(:,1)-a(:,1) ));
  % Calculo de los ci ordenados por nodos. OJO!
  ii=find(e(jj,1)==e(:,2));
  H(e(jj,1),e(jj,1))= H(e(jj,1),e(jj,1)) + ...
                    (pi+atan2( ri(e(ii,2),2)-ri(e(ii,1),2) , ...
                               ri(e(ii,2),1)-ri(e(ii,1),1) ))/(2*pi);
end

H(int,int)=eye(LL);
```

FUQMAT0

Rutina auxiliar llamada por la función `helm` de DRM.

```
function [F,Uc,Qc]=fuqmat0(r,e)

% Clculo de las matrices F, Ucap y Qcap generadas por
% el mtodo de Reciprocidad Dual aplicado a la ecuacin
% de Helmholtz. Los elementos son de 1er orden.
%
% Argumentos de entrada
% r: coord de los nodos
% e: nodos q' forman un elemento
%
% Argumento de salida
% Matriz F de MxM
% Matriz Uc de MxM
% Matriz Qc de 2NxM

% Nodos:
M=size(r,1);
N=size(e,1);

% Matrices auxiliares
dx= (r(:,1)*ones(1,M))-(r(:,1)*ones(1,M))' ;
dy= (r(:,2)*ones(1,M))-(r(:,2)*ones(1,M))' ;

% Matriz F y Uc
F= dx.^2 + dy.^2;
Uc= F/4 + F.^1.5/9 ;
F=1+sqrt(F);

% Largos y angulos de los segmentos
L=sqrt( (r(e(:,2),1)-r(e(:,1),1)).^2 + (r(e(:,2),2)-r(e(:,1),2)).^2 );
tx=( r(e(:,2),1)-r(e(:,1),1) )./L;
```

```
ty=( r(e(:,2),2)-r(e(:,1),2) )./L;

% Matriz Qc
Qc=zeros(2*N,M);
for jj=1:N
  ri = [ tx(jj)*r(:,1)+ty(jj)*r(:,2) , -ty(jj)*r(:,1)+tx(jj)*r(:,2) ]';
  a= [ tx(jj)*r(e(jj,1),1)+ty(jj)*r(e(jj,1),2) ; ...
      -ty(jj)*r(e(jj,1),1)+tx(jj)*r(e(jj,1),2) ] *ones(1,M);
  b= [ tx(jj)*r(e(jj,2),1)+ty(jj)*r(e(jj,2),2) ; ...
      -ty(jj)*r(e(jj,2),1)+tx(jj)*r(e(jj,2),2) ] *ones(1,M);
  Qc(2*jj-1,:)= -(a(2,:)-ri(2,:)).* ...
                 (.5 + sqrt( (ri(1,:)-a(1,:)).^2+(ri(2,:)-a(2,:)).^2 )/3) ;
  Qc(2*jj,:)=   -(b(2,:)-ri(2,:)).* ...
                 (.5 + sqrt( (ri(1,:)-b(1,:)).^2+(ri(2,:)-b(2,:)).^2 )/3) ;
end
```

C.5 Rutinas Varias

A continuación se listan algunas funciones que son comunes a los distintos métodos numéricos, pues sólo dependen de la geometría de la antena y de la distribución del campo eléctrico bajo el parche.

FCALID

Rutina para calcular el factor de mérito de la antena.

```
function Q=fcalid(r,t,e,E,f,epr,alt,tgd,sigma)

% FCALID calcula el factor de calidad o factor de
% mrito Q de la antena.
%
% Sistema de Unidades mskc
%
% Argumentos de entrada
% Matriz con posiciones nodales: r=(x,y) [m] -> columna
% Nodos q' forman cada elemento triangular: t
% Nodos q' forman cada elemento de borde: e
% Valor de Ez en los nodos: E
% Frecuencia: f
% Permitibidad relativa del dielctrico: epr
% Espesor del dielctrico: alt
% Perdidas del dielctrico: tgd
```

```
% Conductividad del parche: sigma  [mho/m]
%
% Argumentos de salida
% Factor de calidad: Q
%
% Uso: Q=fcalid(p',t(1:3,:)',e(1:2,:)',E,f,epr,alt,tgd,sigma);
%

% Permeabilidad del vacio [Hy/m]
muo=4*pi*1e-7;
% Permitividad del vacio [F/m]
epo=8.854e-12;
% Permitividad del dielctrico [F/m]
ep=epo*epr;
% Permeabilidad del vacio y dielctrico [Hy/m]
muo=4*pi*1e-7;
% Conductividad del parch (cobre) [mho/m]
% sigma=57e6;
% Cte de prop. en el vacio [1/m]
k=2*pi*f*sqrt(muo*epo);

% Cant de segmentos
N=size(e,1);

% Ptos de observacin
delta=45/5;
rho=200;
[phi,theta]=meshgrid([0:delta:360]*pi/180,[0:delta:90]*pi/180);
[aux,px]=meshgrid( [1:N] , rho*sin(theta(:)).*cos(phi(:)) );
[aux,py]=meshgrid( [1:N] , rho*sin(theta(:)).*sin(phi(:)) );
[aux,pz]=meshgrid( [1:N] , rho*cos(theta(:)) );

% Cant de ptos
M=size(px,1);

% Datos del perimetro de la patch
% (el indice a y b se refieren al nodo inicial y final de un segmento)
[Eca,aux]=meshgrid(E(e(:,1)),[1:M]);
[Ecb,aux]=meshgrid(E(e(:,2)),[1:M]);
[rxa,aux]=meshgrid(r(e(:,1),1),[1:M]);
[rxb,aux]=meshgrid(r(e(:,2),1),[1:M]);
[rya,aux]=meshgrid(r(e(:,1),2),[1:M]);
[ryb,aux]=meshgrid(r(e(:,2),2),[1:M]);
clear aux
L=sqrt( (rxb(1,:)-rxa(1,:)).^2 + (ryb(1,:)-rya(1,:)).^2);
tx=(rxb(1,:)-rxa(1,:))./L;
ty=(ryb(1,:)-rya(1,:))./L;

% Argumento de la integral de pot. vectorial electrico
```

```
Fa=2*Eca.*exp(-j*k*(rho-(px.*rxa+py.*rya)/rho))/rho;
Fb=2*Ecb.*exp(-j*k*(rho-(px.*rxb+py.*ryb)/rho))/rho;

% Pot. vectorial electrico
Fx=zeros(M,1);
Fy=zeros(M,1);
for ii=1:N
  Fx=Fx+.5*tx(ii)*L(ii)*( Fa(:,ii) + Fb(:,ii) );
  Fy=Fy+.5*ty(ii)*L(ii)*( Fa(:,ii) + Fb(:,ii) );
end

% Intesidad de radiacin
U=zeros(size(theta));
U(:) = sqrt(muo/epo) * .125*(f*epo*alt*rho)^2 * ( ...
       abs(Fx.*sin(phi(:))-Fy.*cos(phi(:))).^2 + ...
       abs((Fx.*cos(phi(:))+Fy.*sin(phi(:))).*cos(theta(:))).^2 ...
       );

% Potencia radiada: integral de U en una semiesfera
U=U.*sin(theta);
chi=[1 1; 1 1]/4;
Pr=0;
for ii=1:size(U,1)-1
   for jj=1:size(U,2)-1
Pr=Pr+sum(sum(U(ii:ii+1,jj:jj+1).*chi));
end
end
Pr=Pr*(delta*pi/180)^2;

% Energia almacenada en campo electrico
E=abs(E).^2;
We=0;
ww=[1 1 1]/3;
hh=[4 1 1; 1 4 1; 1 1 4]/6;
for ii=1:size(t,1)
   x1=r(t(ii,1),1);
   y1=r(t(ii,1),2);
   x2=r(t(ii,2),1);
   y2=r(t(ii,2),2);
   x3=r(t(ii,3),1);
   y3=r(t(ii,3),2);
   e1=E(t(ii,1));
   e2=E(t(ii,2));
   e3=E(t(ii,3));
   We=We+.5*((x2-x1)*(y3-y1)-(x3-x1)*(y2-y1))*ww*hh*[e1; e2; e3];
end
We=.25*ep*alt*We;

% Factor de mrito de la antena 1/Q=1/Qr+1/Qd+1/Qc
```

```
Q=1/( Pr/(4*pi*f*We) + tgd + 1/(alt*sqrt(pi*f*muo*sigma)) );
```

EFIELD

Rutina para calcular el campo eléctrico radiado en los planos principales de la antena.

```
function [theta,Et,Ep]=efield(r,e,E,f)

% EFIELD calcula las componentes del campo elctrico en la zona
% de campo lejano. Se calculan los planos principales del patrn:
% phi=0 y phi=90
%
% Sistema de Unidades mskc
%
% Argumentos de entrada
% Matriz con posiciones nodales: r=(x,y) [m]
% Nodos q' forman cada elemento de borde: e
% Valor de Ez en los nodos: E
% Frecuencia: f
%
% Argumentos de salida
% Angulo de elevacin: theta
% Componentes del campo electrico: Et Componente en theta
%                                  Ep Componente en phi
% (1er columna PHI=0, 2da columna PHI=90)
%
% Uso: [ang,Et,Ep]=efied(p',e(1:2,:)',E,f);

% Permeabilidad del vacio [Hy/m]
muo=4*pi*1e-7;
% Permitividad del vacio [F/m]
epo=8.854e-12;
% Cte de prop. en el vacio [1/m]
k=2*pi*f*sqrt(muo*epo);

% Cant de segmentos
N=size(e,1);

% Ptos de observacin
rho=200;
[phi,theta]=meshgrid([0 90]*pi/180,[-89:1:89]*pi/180);
[aux,px]=meshgrid( [1:N] , rho*sin(theta(:)).*cos(phi(:)) );
[aux,py]=meshgrid( [1:N] , rho*sin(theta(:)).*sin(phi(:)) );
[aux,pz]=meshgrid( [1:N] , rho*cos(theta(:)) );
```

```
% Cant de ptos
M=size(px,1);

% Datos del perimetro de la patch
% (el indice a y b se refieren al nodo inicial y final de un segmento)
[Eca,aux]=meshgrid(E(e(:,1)),[1:M]);
[Ecb,aux]=meshgrid(E(e(:,2)),[1:M]);
[rxa,aux]=meshgrid(r(e(:,1),1),[1:M]);
[rxb,aux]=meshgrid(r(e(:,2),1),[1:M]);
[rya,aux]=meshgrid(r(e(:,1),2),[1:M]);
[ryb,aux]=meshgrid(r(e(:,2),2),[1:M]);
clear aux
L=sqrt( (rxb(1,:)-rxa(1,:)).^2 + (ryb(1,:)-rya(1,:)).^2);
tx=(rxb(1,:)-rxa(1,:))./L;
ty=(ryb(1,:)-rya(1,:))./L;

% Argumento de la integral de pot. vectorial electrico
Fa=2*Eca.*exp(-j*k*(rho-(px.*rxa+py.*rya)/rho))/rho;
Fb=2*Ecb.*exp(-j*k*(rho-(px.*rxb+py.*ryb)/rho))/rho;

% Pot. vectorial electrico
Fx=zeros(M,1);
Fy=zeros(M,1);
for ii=1:N
  Fx=Fx+.5*tx(ii)*L(ii)*( Fa(:,ii) + Fb(:,ii) );
  Fy=Fy+.5*ty(ii)*L(ii)*( Fa(:,ii) + Fb(:,ii) );
end

% Componentes del campo electrico en los planos principales
Et=zeros(size(theta));
Ep=zeros(size(theta));
Et(:) = abs(Fx.*sin(phi(:))-Fy.*cos(phi(:)));
Ep(:) = abs((Fx.*cos(phi(:))+Fy.*sin(phi(:))).*cos(theta(:)));
```

DEF

Rutina para calcular la directividad y la eficiencia de la antena.

```
function [D,ef]=def(r,t,e,E,f,epr,alt,tgd,sigma)

% DEF calcula la directividad y efeciencia de una antena de
% microtira.
%
% Sistema de Unidades mskc
%
% Argumentos de entrada
```

```
% Matriz con posiciones nodales: r=(x,y)
% Nodos q' forman cada elemento triangular: t
% Nodos q' forman cada elemento de borde: e
% Valor de Ez en los nodos: E
% Frecuencia: f
% Permitibidad relativa del dielctrico: epr
% Espesor del dielctrico: alt
% Perdidas del dielctrico: tgd
% Conductividad del parche: sigma [mho/m]
%
% Argumentos de salida
% Directividad: D [dBi]
% Eficiencia: ef [%]
%
% Uso: [D,ef]=def(p',t(1:3,:)',e(1:2,:)',E,f,epr,alt,tgd,sigma);

% Permeabilidad del vacio [Hy/m]
muo=4*pi*1e-7;
% Permitividad del vacio [F/m]
epo=8.854e-12;
% Permitividad del dielctrico [F/m]
ep=epo*epr;
% Permeabilidad del vacio y dielctrico [Hy/m]
muo=4*pi*1e-7;
% Conductividad del parch (cobre) [mho/m]
% sigma=57e6;
% Cte de prop. en el vacio [1/m]
k=2*pi*f*sqrt(muo*epo);

% Cant de segmentos
N=size(e,1);

% Ptos de observacin
delta=45/5;
rho=200;
[phi,theta]=meshgrid([0:delta:360]*pi/180,[0:delta:90]*pi/180);
[aux,px]=meshgrid( [1:N] , rho*sin(theta(:)).*cos(phi(:)) );
[aux,py]=meshgrid( [1:N] , rho*sin(theta(:)).*sin(phi(:)) );
[aux,pz]=meshgrid( [1:N] , rho*cos(theta(:)) );

% Cant de ptos
M=size(px,1);

% Datos del perimetro de la patch
% (el indice a y b se refieren al nodo inicial y final de un segmento)
[Eca,aux]=meshgrid(E(e(:,1)),[1:M]);
[Ecb,aux]=meshgrid(E(e(:,2)),[1:M]);
[rxa,aux]=meshgrid(r(e(:,1),1),[1:M]);
[rxb,aux]=meshgrid(r(e(:,2),1),[1:M]);
```

```
[rya,aux]=meshgrid(r(e(:,1),2),[1:M]);
[ryb,aux]=meshgrid(r(e(:,2),2),[1:M]);
clear aux
L=sqrt( (rxb(1,:)-rxa(1,:)).^2 + (ryb(1,:)-rya(1,:)).^2);
tx=(rxb(1,:)-rxa(1,:))./L;
ty=(ryb(1,:)-rya(1,:))./L;

% Argumento de la integral de pot. vectorial electrico
Fa=2*Eca.*exp(-j*k*(rho-(px.*rxa+py.*rya)/rho))/rho;
Fb=2*Ecb.*exp(-j*k*(rho-(px.*rxb+py.*ryb)/rho))/rho;

% Pot. vectorial electrico
Fx=zeros(M,1);
Fy=zeros(M,1);
for ii=1:N
  Fx=Fx+.5*tx(ii)*L(ii)*( Fa(:,ii) + Fb(:,ii) );
  Fy=Fy+.5*ty(ii)*L(ii)*( Fa(:,ii) + Fb(:,ii) );
end

% Intesidad de radiacin
U=zeros(size(theta));
U(:) = sqrt(muo/epo) * (.5*f*epo*alt*rho)^2 * ( ...
       abs(Fx.*sin(phi(:))-Fy.*cos(phi(:))).^2 + ...
       abs((Fx.*cos(phi(:))+Fy.*sin(phi(:))).*cos(theta(:))).^2 ...
       );

%%%
```

```
   y1=r(t(ii,1),2);
   x2=r(t(ii,2),1);
   y2=r(t(ii,2),2);
   x3=r(t(ii,3),1);
   y3=r(t(ii,3),2);
   e1=E(t(ii,1));
   e2=E(t(ii,2));
   e3=E(t(ii,3));
   We=We+.5*((x2-x1)*(y3-y1)-(x3-x1)*(y2-y1))*ww*hh*[e1; e2; e3];
end
We=.5*ep*alt*We;

%Directividad [dBi]
D=10*log10(4*pi*Uo/Pr);

% Eficiencia [%]
ef=100*Pr/(Pr + 4*pi*f*We*tgd + 4*pi*f*We/(alt*sqrt(pi*f*muo*sigma)));
```

FULLPAT

Rutina para graficar el patrón de radiación de una antena en un digrama polar con amplitudes en *db*.

```
function Hd=fullpat(theta,rho)

% FULLPAT grafica el patron de radiacion de la antena de microtira
% para theta desde -pi a pi.
%
% Entrada
% theta: angulo en radianes
% rho: modulo en veces
% Nota: cada columna es un juego de datos
%
% Salida
% Grafico con el patron de radiacion en coordenadas polares
% Hd: handles de los datos graficados (para usar con 'legend')
%
% Uso: Hd=halfpat(theta,rho);

% Cantidad de juegos de datos
C=size(rho,2);

% Rho en dB
M=max(max(rho));
rho=10*log10(rho/M);
```

```
% Minimo rho en dB
m=min(min(rho));

% Escala
K=ceil(-m/10);
scl=K*(-1)*[0 2.5 5 7.5 10];
%scl=2*(-1)*[0 2.5 5 7.5 10];

% Grafico
rho=rho-scl(5);
rho=rho/max(max(rho));
x=rho.*sin(theta);
y=rho.*cos(theta);

% Cuadricula del grafico
figure;
axis([-1 1 -1 1]);
hold on
phi=[-pi:pi/50:pi];
plot(sin(phi),cos(phi),'k')
plot(.75*sin(phi),.75*cos(phi),'k')
plot(.5*sin(phi),.5*cos(phi),'k')
plot(.25*sin(phi),.25*cos(phi),'k')
a=.5; b=sqrt(3)/2;
grx=[-1 -b -a  0  b  a  ; ...
      1  b  a  0 -b -a ];
gry=[ 0 -a -b -1 -a -b  ; ...
      0  a  b  1  a  b ];
plot(grx,gry,'k')
font=14;
set(gca,'fontsize',font);
text(-1,0,num2str(scl(1)),'HorizontalAlignment','center', ...
'VerticalAlignment','top','fontsize',font);
text(-.75,0,num2str(scl(2)),'HorizontalAlignment','center', ...
'VerticalAlignment','top','fontsize',font);
text(-.5,0,num2str(scl(3)),'HorizontalAlignment','center', ...
'VerticalAlignment','top','fontsize',font);
text(-.25,0,num2str(scl(4)),'HorizontalAlignment','center', ...
'VerticalAlignment','top','fontsize',font);
text(.25,0,num2str(scl(4)),'HorizontalAlignment','center', ...
'VerticalAlignment','top','fontsize',font);
text(.5,0,num2str(scl(3)),'HorizontalAlignment','center', ...
'VerticalAlignment','top','fontsize',font);
text(.75,0,num2str(scl(2)),'HorizontalAlignment','center', ...
'VerticalAlignment','top','fontsize',font);
text(1,0,num2str(scl(1)),'HorizontalAlignment','center', ...
'VerticalAlignment','top','fontsize',font);
text(0,1,'0','HorizontalAlignment','center', ...
```

```
'VerticalAlignment','bottom','fontsize',font);
text(a,b,'30','HorizontalAlignment','left', ...
'VerticalAlignment','bottom','fontsize',font);
text(-a,b,'-30','HorizontalAlignment','right', ...
'VerticalAlignment','bottom','fontsize',font);
text(b,a,'60','HorizontalAlignment','left', ...
'VerticalAlignment','bottom','fontsize',font);
text(-b,a,'-60','HorizontalAlignment','right', ...
'VerticalAlignment','bottom','fontsize',font);
text(1,0,'90','HorizontalAlignment','left','fontsize',font);
text(-1,0,'-90','HorizontalAlignment','right','fontsize',font);
text(b,-a,'120','HorizontalAlignment','left', ...
'VerticalAlignment','top','fontsize',font);
text(-b,-a,'-120','HorizontalAlignment','right', ...
'VerticalAlignment','top','fontsize',font);
text(a,-b,'150','HorizontalAlignment','left', ...
'VerticalAlignment','top','fontsize',font);
text(-a,-b,'-150','HorizontalAlignment','right', ...
'VerticalAlignment','top','fontsize',font);


% Datos
Hd=plot(x,y);
hold off
axis equal
axis off
```

Apéndice D

Símbolos

A continuación se listan los principales símbolos y abreviaturas utilizados a lo largo de la tesis. Debido a que se ha preferido respetar la nomenclatura utilizada en la bibliografía clásica, muchas de las abreviaturas corresponden a palabras o frases en inglés.

$\mathbf{A}$	Potencial vectorial magnético
BEM	Método de los Elementos de Contorno
BW	Ancho de banda
$\mathbf{D}$	Vector densidad de flujo eléctrico
D	Directividad
DRM	Método de Reciprocidad Dual
$\mathbf{E}$	Vector campo eléctrico
$\mathbf{F}$	Potencial vectorial eléctrico
f_r	Frecuencia de resonancia
FEM	Método de los Elementos Finitos
G	Ganancia
$\mathbf{H}$	Vector campo magnético
I	Corriente
$\mathbf{J}$	Densidad de corriente eléctrica
k	Constante de propagación o número de onda
k_m	Autovalores de la ecuación de Helmholtz
P_c	Potencia disipada en un material conductor
P_d	Potencia disipada en el dieléctrico
P_i	Potencia de entrada
P_r	Potencia radiada

Q	Factor de mérito
$\mathbf{M}$	Densidad de corriente magnética
$\mathbf{n}$	Versor normal a una superficie
$\mathbf{r}$	Vector posición
R_i	Impedancia de entrada a la frecuencia de resonancia
$\mathcal{R}$	Resistencia de superficie de un conductor
SWR	Relación de onda estacionaria
t	Espesor del dieléctrico en una antena de microtira
$\tan\delta$	Factor de pérdidas del dieléctrico
V	Tensión
W	Ancho de una línea de microtira
W_e	Valor medio temporal de la energía almacenada en el campo eléctrico
W_e	Valor medio temporal de la energía almacenada en el campo magnético
x, y, z	Coordenadas rectangulares
z_0	Impedancia característica cuasi-estática de una línea de microtira
Z_0	Impedancia intrínseca del medio
Z_i	Impedancia de entrada
ϵ	Permitividad del dieléctrico
ϵ_r	Permitividad relativa del dieléctrico
ϵ'	Permitividad relacionada a la corriente de conducción
η	Eficiencia de radiación
λ	Longitud de onda
μ_0	Permeabilidad del vacio
μ	Permeabilidad del dieléctrico
ω	Frecuencia angular
Φ	Potencial escalar eléctrico
ψ_m	Autofunciones de la ecuación de Helmholtz
ρ	Densidad de carga eléctrica
σ	Conductividad
θ, ϕ, r	Coordenadas esféricas
$\widehat{\ }$	Símbolo que representa al versor en la dirección de

Bibliografía

[1] J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill, New York, 1941.

[2] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, J. Wiley, 2nd. Edition, 1975.

[3] R. Coccioli, T. Itoh, G. Pelosi and P. P. Silvester, "Finite Element Method in Microwaves: A Selected Bibliography," *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, Vol. 38, No. 6, pp. 34-47, Dec. 1996.

[4] W. X. Zhang, "A Review of Computational Electromagnetics in China," *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, Vol. 39, No. 3, pp. 44-50, Jun. 1997.

[5] K. R. Carver and J. W. Mink, "Microstrip Antenna Technology," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 29, No. 1, pp. 2-24, Jan. 1981.

[6] V. Palamisamy and R. Garg, "Rectangular Ring and H-Shaped Microstrip Antenna - Alternatives to Rectangular Patch Antenna," *Electronics Letters*, vol. 21, pp. 874-876, Sep. 1985.

[7] J. George, C. K. Aanandan, P. Mohanan and K. G. Nair, "Analysis of a New Compact Microstrip Antenna," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 46, No. 11, pp. 1712-1717, Nov. 1998.

[8] H. Y. Wang and M. Lancaster, "Aperture Coupled Thin Film Superconducting Meander Antennas," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 47, No. 5, pp. 829-836, May 1999.

[9] W. S. Chen, C. K. Wu and K. L. Wong, "Square Ring Microstrip Antenna with a Cross Strip for Compact Circular Polarization Operation," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 47, No. 10, pp. 1566-1567, Oct. 1999.

[10] D. Sign, C. Kalialakis, P. Gadner and P. S. Hall, "Small H-Shaped Antennas for MMIC Aplications," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 48, No. 7, pp. 1134-1141, Jul. 2000.

[11] P. Bafrooei and L. Shafai, "Characteristics of Single and Double Layer Microstrip Ring Antennas," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 47, No. 10, pp. 1633-1639, Oct. 1999.

[12] P. P. Silvester and R. L. Ferrari, *Finite Elements for Electrical Engineers*, Cambridge University Press, 1990.

[13] P. P. Silvester and G. Pelosi (Editores), *Finite Elements for Wave Electromagnetics*, IEEE Press, 1994.

[14] J. L. Volakis, T. Ozdemir and J. Gong, "Hybrid Finite Element Methodologies for Antennas and Scattering," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 45, No. 3, pp. 493-507, Mar. 1997.

[15] C. A. Brebbia and J. Domínguez, *Boundary Elements: An Introductory Course*, McGraw Hill, 1992.

[16] H. Power and L. C. Wrobel, *Boundary Integral Methods in Fluid Mechanics*, Computational Mechanics Publications, 1995.

[17] M. S. Ingber and R. H. Ott, "An Application of the Boundary Element Method to the Magnetic Field Integral Ecuation," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol 39, No. 5, pp 606-611, May 1991.

[18] M. Hurtado, H. Lorente y C. Muravchik, "Analisis y Simulación de una Antena de Microtiras Cuadrada con una Ranura," *XVII Congreso Argentino de Control Automático*, Buenos Aires, Argentina, Sept. 2000, pp. 383-387.

[19] M. Hurtado, H. Lorente and C. Muravchik, "Analysis and Measurement of a Slotted Square Microstrip Antenna," *First IEEE South American Workshop on Circuit and Systems*, Bahía Blanca, Argentina, Nov. 2000, pp. 88-91.

[20] M. Hurtado, H. Lorente and C. Muravchik, "Analysis of a Square Microstrip Antenna with an Eccentric Slot," *IEEE APS/URSI International Symposium*, Boston, Jul. 2001.

[21] Y. T. Lo, D. Solomon and W. F. Richards, "Theory and Experiment on Microstrip Antennas," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 27, No. 3, pp. 137-145, Mar. 1979.

[22] W. F. Richards, Y. T. Lo and D. D. Harrison, "An Improved Theory for Microstrip Antennas and Applications," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 29, No. 1, pp. 38-46, Jan. 1981.

[23] J. M. James and P. S. Hall (Editores), *Handbook of Microstrip Antennas*, Peter Peregrinus Ltd., London, 1989.

[24] R. F. Harrington, *Time Harmonic Electromagnetic Fields*, McGraw-Hill, New York, 1961.

[25] H. A. Wheeler, "Transmission Line Properties of Parallel Wide Strips by Conformal Mapping Approximation," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 12, pp. 280-289, 1964.

[26] L. C. Shen, S. A. Long, M. R. Allerging and M. D. Walton, "Resonant Frequency of a Circular Disc, Printed Circuit Antenna," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 25, No. 2, pp. 595-596, July 1977.

[27] J. Helszajn and D. S. James, "Planar Triangular Resonators with Magnetic Walls," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 26, No. 2, pp. 95-100, Feb. 1978.

[28] V. Palamisamy and R. Garg, "Analysis of Arbitrarily Shaped Microstrip Patch Antennas Using Segmentation Technique and Cavity Model," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 34, pp. 1208-1213, Oct. 1986.

[29] K. C. Gupta, R. Garg and I. J. Bahl, *Microstrip Lines and Slotlines*, Artech House, New York, 1979.

[30] A. C. Newell, C. F. Stubenrauch and R. C. Baird, "Calibration of microwave antenna gain standard", *Proceedings of the IEEE*, vol. 74, no. 1, pp. 129-132, Mar. 1986.

[31] T. Belytschko, Y. Y. Lu and L. Gu, "Element-Free Galerkin Methods," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 37, pp. 229-256, 1994.

[32] T. Zhu, J. Zhang and S. N. Atluri, "A Meshless Local Boundary Integral Equation Method for Solving Nonlinear Problems," *Computational Mechanics*, vol 22, pp. 174-186, 1998.

[33] W. L. Stutzman and G. A. Thiele, *Antenna Theory and Design*, John Wiley & Sons, New York, 1981.

[34] R. G. Kouyoumjian and P. H. Pathak, "A Uniform Geometrical Theory of Diffraction for an Edge in a Perfectly Conducting Surface," *Proceedings IEEE*, vol. 62, pp. 1448-1461, Nov. 1974.

[35] C. E. Ryan and L. Peters, "Evaluation of Edge Diffracted Fields Including Equivalent Currents for the Caustic Regions," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 17, pp. 292-299, May 1969.

[36] C. R. Cockrell and F. B. Beck, "Note on the Use of Slope Diffraction Coefficients for Aperture Antennas on Finite Ground Plane," *NASA Technial Memorandum 110192*, August 1995.

[37] J. F. Lee and R. D. Edlinger, "Automatic Mesh Generation Using a Modified Delaunay Tessellation," *IEEE Magazine on Antennas and Propagation*, vol. 39, No 1, pp. 34-45, Feb. 1997.