Superradiancia en Agujeros Negros Cargados

Cohete Superradiante de Agujero Negro

Lucas Acito

Director: Nicolás Grandi
Codirector: Pablo Pisani

Trabajo de grado presentado para el título de
Licenciado en Física

Facultad de Ciencias Exactas
Universidad Nacional de la Plata
Argentina
Marzo 2022

Un especial agradecimiento
a mis directores Nico y Pablo

Dedicado a mi familia, amigos
y especialmente a mi compañera
de vida y estudio, Valen

Superradiancia en Agujeros Negros Cargados

Cohete Superradiante de Agujero Negro

Lucas Acito[1]

Abstract

El fenómeno de superradiancia en agujeros negros consiste en la absorción de información en forma de paquetes de onda, y al mismo tiempo la emisión de energía en forma de ondas planas monocromáticas por parte del agujero negro. Se investigó este fenómeno para campos escalares con carga cuando se coloca un espejo semiesférico concéntrico a un agujero negro estático y con carga. Se considera el sistema agujero negro-espejo inmerso en un baño térmico a una temperatura distinta a la del agujero negro. En primera instancia, se resolvió la ecuación de Klein-Gordon mínimamente acoplada para un campo escalar cargado en espacio curvo, dado por la métrica de Reissner-Nordström, obteniendo la condición de superradianza en el horizonte. Luego, se cuantizó el sistema teniendo en cuenta que el baño térmico sigue la estadística de Bose-Einstein y se calculó, mediante el tensor energía-momento del campo, el empuje total producido cuando los modos escalares emitidos por un agujero negro superradiante son reflejados por el espejo semiesférico. La forma que tiene el sistema junto al empuje obtenido nos permite describir este resultado como un "cohete superradiante de agujero negro" (o simplemente cohete de agujero negro), el cual es resultado de un fenómeno clásico (superradianza) y no de un fenómeno cuántico (radiación Hawking) como se ha estudiado en la bibliografía. Por último, se analizaron numéricamente los resultados obtenidos tanto por la dispersión de un campo escalar como por el cohete de agujero negro en el baño térmico. En el caso de un campo escalar, obtenemos numéricamente las soluciones radiales que satisfacen las condiciones de contorno, luego proponiendo algunos valores para el campo incidente se observa una diferencia de comportamiento cerca del horizonte exterior del agujero negro (donde ocurre o no la superradianza). A partir de estos resultados, se determina la fuerza total del cohete de agujero negro en la cual se observa un pico para cierto valor del impulso k, donde existe una divergencia debido a la distribución de Bose-Einstein utilizada y que debe seguir siendo estudiada. Además, concluimos que la fuerza total obtenida es una primera aproximación y que para obtener un buen valor cuantitativo debe mejorarse en particular la aproximación numérica realizada sobre el índice azimutal cuántico m, ya que esta falla para ciertos valores.

[1] acitolucas@gmail.com

Índice General

1. Introducción **8**
1.1. Superradianza: Contexto Histórico . . . 8
1.2. Paradoja de Klein: Primer ejemplo de superradianza . . . 9
1.3. Superradiación en agujeros negros . . . 11
1.3.1. Agujeros negros con carga . . . 12
1.3.2. Motivación: Bomba de agujero negro cargado . . . 15

2. Dispersión de un Campo Escalar **19**
2.1. Dinámica del campo . . . 19
2.2. Condiciones de contorno . . . 22
2.2.1. Horizonte: Superradianza . . . 22
2.2.2. Infinito . . . 25
2.2.3. Espejo . . . 27

3. Cohete de Agujero Negro **34**
3.1. Cuantización del campo . . . 34
3.2. Tensor Energía-Momento . . . 36
3.3. Fuerza sobre el sistema . . . 38
3.4. Cálculo del Tensor Energía-Momento . . . 39
3.5. Cálculo de la Fuerza de Empuje . . . 43

4. Resultados Numéricos **47**
4.1. Soluciones radiales . . . 47
4.1.1. Solución en el horizonte . . . 48
4.1.2. Solución en infinito . . . 49
4.2. Matching en el espejo . . . 50
4.3. Fuerza del cohete de BH . . . 57

5. Conclusión **62**

Referencias **65**

A. Definición: $\gamma^m_{\ell\ell'}$ y $M^m_{h\ell}$ **69**

B. Valores medios entre operadores $\hat{a}^m_\ell$, $\hat{b}^m_\ell$ y $\hat{c}^m_\ell$ **74**

C. Fuerza del cohete de BH: Cambio de base **77**

D. Valores medios entre los campos incidente y dispersado **78**

E. Cálculo de la componente T_{rr} **83**

F. Cálculo de la componente $T_{r\theta}$ **89**

G. Cálculo auxiliar: Integral con Y^m_ℓ **93**

H. Desarrollo de $\mathcal{N}^m_{\ell,\ell-1}$ **95**

I. Método numérico: Soluciones en infinito **97**

J. Análisis numérico de $\gamma^m_{\ell\ell'}$ 100

K. Análisis de las aproximaciones numéricas realizadas 103

Índice de Figuras

1.3. Sistema BH-Espejo semiesférico perfecto 17
2.1. Regiones del sistema BH-Espejo 22
4.1. Modos superradiantes 48
4.2. Solución numérica en el BH sin superradianza 49
4.3. Soluciones exteriores al sistema BH-Espejo 50
4.4. Comportamiento asintótico de las soluciones exteriores al sistema BH-Espejo 51
4.5. Matriz de coeficientes $\gamma^m_{\ell\ell'}$ y $(\gamma^m - \mathbf{1})^{-1}_{\ell\ell'}$ 53
4.6. Elementos H^{-1}_ℓ a k fijo 54
4.7. Elementos H^{-1}_ℓ e I_ℓ en función de k 55
4.8. Campos superradiantes y no superradiantes 56
4.9. Distribución de partículas 58
4.10. Resultados numéricos de la fuerza de empuje obtenidos 59
I.1. Validez de las funciones en infinito 99
K.1. Análisis del cut off ℓ_max 103
K.2. Análisis de las aproximaciones realizadas en $\gamma^m_{\ell\ell'}$ 104

Índice de Tablas

4.1. Constantes que caracterizan al sistema elegidos 48
4.2. Características del campo escalar incidente elegidas 55

1. Introducción

1.1. Superradianza: Contexto Histórico

La superradiación es un proceso en el cual la radiación reflejada debido a un sistema se ve aumentada respecto a la radiación incidente inicial. Este proceso de amplificación de la radiación tiene larga historia que se remonta a los orígenes de la mecánica cuántica, cuando Klein demostró que la ecuación de Dirac permite que los electrones pueden ser transmitidos incluso en regiones clásicamente prohibidas [Klein 1929]. En 1954, Dicke introdujo el concepto de superradianza, que designa un fenómeno colectivo por el que la radiación se amplifica por la coherencia de los emisores [Dicke 1954]. En 1971, Zel'dovich demostró que la dispersión de la radiación en superficies absorbentes en rotación da lugar, en determinadas condiciones, a ondas de mayor amplitud [Zel'Dovich 1971, 1972]. Este fenómeno ahora es más bien conocido como superradianza (rotacional) y requiere que la radiación incidente, asumida monocromática de frecuencia ω, satisfaga

$$\omega < m\Omega \tag{1.1}$$

con m el número azimutal respecto a una rotación axial y Ω la velocidad angular del cuerpo. La superradianza rotacional pertenece a una mayor clase de problemas clásicos que muestra emisión de energía espontánea o debido a un estimulo, por ejemplo el efecto de Vavilov-Cherenkov, el efecto Doppler anómalo, y otros ejemplos como el "movimiento superlumínico". Cuando los efectos cuánticos fueron incorporados, se argumentaba que la superradianza rotacional se convertiría en un proceso espontáneo y que los cuerpos rotantes - incluyendo los agujeros negros (BHs) - comenzarían a frenarse debido a la emisión espontánea de fotones cuya energía satisface (1.1). Por otro lado, cuando se analiza superradianza de BH desde un punto de vista termodinámico, se llega a conclusiones similares [Bekenstein 1973b; Bekenstein y Schiffer 1998]. Desde un punto de vista histórico, los primeros estudios de la superradianza en BH cumplieron un papel fundamental en el descubrimiento de la evaporación de BH [Hawking 1975, 1988].

El interés en la superradiación en BH creció recientemente en distintas áreas, como astrofísica y física de altas energías (vía la dualidad gravedad/gauge), y aspectos fundamentales de la Relatividad General (GR). La inestabilidad superradiante puede utilizarse para restringir la masa de los grados de libertad ultraligeros [Arvanitaki, Dimopoulos et al. 2010; Arvanitaki y Dubovsky 2011; Brito, Cardoso y Pani 2013; Pani et al. 2012], con la importante aplicación en la búsqueda de materia oscura y en física más allá del Modelo Estándar. La superradianza en BH también está asociada a la existencia de nuevas soluciones asintoticamente planas de BH con pelo ("hairy BH") [Herdeiro y Radu 2014] y a transiciones de fase entre objetos negros (sin emisión) con spin o carga en un espacio-tiempo asintoticamente anti-De Sitter (AdS) [Cardoso y Dias 2004; Dias, Figueras et al. 2012; Dias, Horowitz y Santos 2011] o en mayores dimensiones [Shibata y Yoshino 2010]. Finalmente, la superradiación es fundamental para analizar la estabilidad de BHs y si ocurre un colapso gravitacional en geometrías confinadas. Por otro lado, la fuerte conexión entre recientes aplicaciones y el fenómeno original de superradiación no siempre fue reconocido plenamente. Este es el caso, por ejemplo, de los modelos holográficos de los superfluidos [Hartnoll, Herzog y Horowitz 2008] que dependen de la ruptura espontánea de la simetría de los

BHs cargados en el espacio-tiempo AdS [Gubser 2008]. En AdS global, la transición de fase asociada puede ser interpretada en términos de inestabilidad superradiante de un BH AdS de Reissner-Nordström desencadenado por un campo escalar cargado [Dias, Figueras et al. 2012; Hartnoll 2011].[2]

A partir del estudio de la inestabilidad superradiante de un BH en una geometría cerrada como motivación, se busca responder a la pregunta: ¿Qué pasaría si la geometría no fuese cerrada? En particular, se considera un agujero negro de Reissner-Nordström rodeado por un espejo semiesférico perfecto en un baño térmico de partículas y antipartículas escalares con carga. Luego, se obtiene la fuerza total sobre esta geometría que da forma a lo que se llama "cohete de agujero negro".

1.2. Paradoja de Klein: Primer ejemplo de superradianza

La paradoja de Klein [Klein 1929] es el primer ejemplo que podemos encontrar del fenómeno de superradianza. Hoy en día, esta paradoja está bien estudiada tanto para el caso bosónico como fermiónico [W. Greiner et al. 2000; Winter 1959a]. En particular, como más adelante se trabaja con un campo escalar escalar cargado, se presenta en esta sección la paradoja de Klein para el caso bosónico. En este caso, resulta que al tratar con un campo escalar cargado y la ecuación de Klein-Gordon con un potencial del tipo escalón puede producirse la creación de pares de partículas cargadas cuando el potencial lo es suficientemente fuerte [Hund 1941]. Es interesante destacar que este resultado puede verse como precursor de los resultados de la teoría de campos moderna de Schwinger [Schwinger 1951] y Hawking [Hawking 1975], quienes demostraron que la creación espontánea de pares de partículas es posible en presencia de un campo electromagnético (EM) fuerte y de un campo gravitatorio, tanto para bosones como para fermiones. De hecho, hoy se sabe que la resolución de la "antigua" paradoja de Klein es debido a la creación de pares partícula-antipartícula en la barrera de potencial [Pani et al. 2012], lo que explica la parte transmitida no amortiguada.

Se considera un campo escalar sin masa mínimamente acoplado con un campo EM generado por un potencial A_μ de dimensión (1+1), cuya ecuación de movimiento sera la ecuación de Klein-Gordon

$$(\partial_\mu - ieA_\mu)(\partial^\mu - ieA^\mu)\Phi = 0 \tag{1.2}$$

donde e es la carga del campo escalar. Para simplificar, consideremos un potencial externo $A^\mu = (A_0, 0)$, con el comportamiento asintótico

$$A_0 \to \begin{cases} 0 & \text{si } x \to -\infty \\ V & \text{si } x \to +\infty \end{cases} \tag{1.3}$$

Usando el ansatz $\Phi = e^{-i\omega t}$, la ecuación 1.2 puede separarse obteniendo la ecuación diferencial ordinaria (EDO)

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + (\omega - eA_0)^2 f = 0 \tag{1.4}$$

[2] Un estudio más detallado sobre los acontecimientos historicos de la superradianza puede encontrarse en [Brito, Cardoso y Pani 2020]

Se considera un haz de partículas proveniente desde $-\infty$ y dispersado debido al potencial con una amplitud de reflexión y transmisión $\mathcal{R}$ y $\mathcal{T}$ respectivamente. Con estas condiciones de contorno, resulta de la EDO (1.4) que la solución de la ecuación 1.2 se comporta asintóticamente como

$$\begin{cases} f(x) = \mathcal{I}e^{i\omega x} + \mathcal{R}e^{-i\omega x} & \text{cuando } x \to -\infty \\ f(x) = \mathcal{T}e^{ikx} & \text{cuando } x \to +\infty \end{cases} \tag{1.5}$$

donde

$$k = \pm(\omega - eV) \tag{1.6}$$

Para definir el signo de ω debemos ver la velocidad de grupo v_g

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \pm 1 \tag{1.7}$$

Para la parte incidente y transmitida de la onda, se requiere que la velocidad de grupo sea positiva, $v_g > 0$, tal que viajen de izquierda a derecha en la dirección x. Por lo tanto, tomamos $\omega > 0$ y el signo positivo en (1.6).

Los coeficientes de reflexión y transmisión dependen de la forma específica del potencial A_0. Sin embargo, como la EDO (1.4) es del tipo Sturm-Liouville, se sabe que las 2 soluciones linealmente independientes f_1 y f_2 satisfacen que el Wronskiano

$$W = \left[f_1 \frac{df_2}{dx} - f_2 \frac{df_1}{dx} \right]_{x=x'} \tag{1.8}$$

es conservado, donde este Wronskiano esta evaluado en x' donde se satisface la condición de contorno. Por otro lado, de la ecuación (1.4) se observa que si f es solución entonces f^* es otra solución linealmente independiente (la EDO tiene coeficientes constantes). Entonces tomando las soluciones linealmente independientes $f_1 = f$ y $f_2 = f^*$, resulta que la definición del Wronskiano coincide con la definición de la densidad de corriente de la partícula. Evaluando el Wronskiano, o equivalentemente la densidad de corriente de la partícula, y usando las soluciones (1.5) que satisfacen las condiciones de contorno (es decir en $\pm\infty$) se obtiene

$$|\mathcal{R}|^2 = |\mathcal{I}|^2 - \frac{\omega - eV}{\omega} |\mathcal{T}|^2 \tag{1.9}$$

Entonces, para

$$0 < \omega < eV \tag{1.10}$$

resulta posible obtener una amplificación superradiante de la corriente reflejada, es decir $|\mathcal{R}| > |\mathcal{I}|$ (fenómeno de superradiación).

La superradianza se puede relacionar con la creación de pares al estudiar el potencial usado en la paradoja de Klein. Para ello, se considera un modo superradiante que satisfaga la relación (1.10) y sea $\mathcal{P} \leq 1$ la probabilidad de producción espontánea de un sólo par de partícula-antipartícula. Como se trata del caso bosónico, estas partículas siguen la distribución de Bose-Einstein [Hansen y Ravndal 1981], luego el número medio de partículas $\bar{n}$ viene dado por:

$$\bar{n} = \frac{1}{\mathcal{P}^{-1} - 1} \tag{1.11}$$

Ahora, usando el procedimiento de la segunda cuantización, el número producido de pares en un dado estado en la región superradiante (1.10) es [Manogue 1988]

$$\bar{n} = \left| \frac{\omega - eV}{\omega} \right| |\mathcal{T}|^2 \tag{1.12}$$

Por lo tanto, de la definición (1.11) se ve que $\bar{n} \to \infty$ cuando $\mathcal{P} \to 1$ y $\bar{n} \to 0$ cuando $\mathcal{P} \to 0$. Luego, las ecuaciones (1.9), (1.11) y (1.12) muestran que $|\mathcal{R}|^2 \to |\mathcal{I}|^2$ cuando $\mathcal{P} \to 0$, entonces la superradianza es posible solo cuando $\mathcal{P} \neq 0$, es decir que la superradianza ocurre debido a la creación espontánea de pares.

En conclusión, la paradoja de Klein es un ejemplo de superradiación donde la radiación incidente se ve amplificada. Este fenómeno se interpreta como la existencia de una probabilidad no nula de que se creen espontáneamente un par partícula-antipartícula. Sin embargo, si bien los fenómenos de superradianza y de creación espontánea de pares en campos fuertes están relacionados, son diferentes. De hecho, la creación de pares sin superradiación puede ocurrir siempre y cuando este permitida energéticamente. Por otro lado, la superradiación es suficiente para asegurar la existencia de la creación espontánea de pares. Este resultado es bien conocido en BH, por ejemplo si bien para un BH de Schwarzschild no es posible la superradiación (como se ve en la siguiente sección), hay emisión de radiación Hawking [Hawking 1975] (esto último puede considerarse como el análogo gravitacional a la creación de pares en presencia de un campo EM fuerte). Por último, cabe destacar que en este proceso de superradianza se conserva la energía, como puede verse por ejemplo en un experimento hipotético [Winter 1959b].

1.3. Superradiación en agujeros negros

En Relatividad General clásica, un agujero negro (BH) es una región del espacio-tiempo delimitada por un horizonte de eventos al cual es posible acceder desde el exterior pero no es posible escapar desde el interior [Hawking y Ellis 2011]. Entonces, según esta descripción, la información que entra a un BH queda atrapada y ningún observador externo puede acceder a ella. Resulta intrigante entonces que exista un proceso clásico como la superradiación que nos permita extraer energía de un BH. Sin embargo, para que este proceso se lleve a cabo no puede tratarse simplemente de un BH de Schwarzschild (caracterizado únicamente por su masa M) ya que si una partícula cae al BH entonces su área aumenta o, termodinámicamente hablando, la entropía del BH aumenta [Bekenstein 1973a]. Como ya hemos mencionado en la sección 1.1, el primer tipo de BH donde se encuentra superradianza es en BH rotantes (BH de Kerr). El proceso de superradianza funciona de la misma manera que la paradoja de Klein estudiada en la sección 1.2: existe una amplificación de ondas incidentes al BH de Kerr, siempre y cuando la frecuencia ω y el número cuántico azimutal m satisfagan la condición de superradiación $\omega < m\Omega_+$, donde Ω_+ es la velocidad angular del horizonte exterior de Kerr [Bardeen, Press y Teukolsky 1972; Press y Teukolsky 1972]. En este caso, la extracción de energía y en consecuencia el decrecimiento de la masa M de un BH, necesariamente debe ser acompañado por la extracción del momento angular (y en consecuencia una disminución del spin J) del BH. De hecho, puede demostrarse [Christodoulou 1970] que el proceso análogo para partículas de este proceso – el proceso de Penrose [Penrose 1969] – es irreversible, por ende el área del BH nunca decrece [Christodoulou y Ruffini 1971]. Además, debido

a la identificación de la entropía como el área del BH [Bardeen, Carter y Hawking 1973; Bekenstein 1973a] resulta que lo que estamos extrayendo del BH es energía rotacional y no información.

El mecanismo de superradianza ocurre también en BH de Reissner-Nordström (RN) de la misma manera a como ocurre en BH de Kerr, donde ahora se ve amplificada una onda cargada (necesariamente debe estar cargada, como se ve en detalle en la sección 1.3.2) siempre y cuando la frecuencia ω y la carga q satisfagan la condición de superradianza $\omega < qh(r_+)$ donde $h(r_+)$ es el potencial en el horizonte exterior r_+ [Bekenstein 1973b]. En este caso, la extracción de energía del BH de masa M necesariamente debe estar acompañada por la extracción de carga (y en consecuencia hay una disminución de la carga Q del BH), tal que el área/entropía del BH siempre aumente.

El fenómeno de superradianza existe en geometrías de Kerr y RN donde es posible extraer energía de estos BH, entonces ahora cabe preguntarse sobre la estabilidad de estos modos superradiantes y cómo es posible usar la energía extraída del BH. Un primer enfoque sobre estas preguntas es considerar un BH (originalmente de Kerr [Zel'Dovich 1971], luego de RN [Degollado, Herdeiro y Rúnarsson 2013]) en un background que atrape los modos superradiantes en las cercanías del BH, este mecanismo funciona cualitativamente así: se coloca un BH rodeado por un espejo esférico perfecto, luego los modos superradiantes dispersados y amplificados por el BH son reflejados en el espejo retornando al BH, convirtiéndolos en una inestabilidad en este background. Este mecanismo se denomina *bomba de agujero negro* [Press y Teukolsky 1972], está bien estudiado tanto para BH de Kerr como de RN. Entonces, partiendo como motivación con la bomba de BH, una pregunta que surge es ¿qué pasaría si la configuración no fuese cerrada? Es decir, si en lugar de imponer las condiciones de contorno de un espejo esférico perfecto se usase un espejo semiesférico, luego cabría esperar que los modos superradiantes dispersados por el BH y reflejados por el espejo interactúen con el background de manera no despreciable, generando un impulso sobre el espejo. Esta configuración de BH y espejo semiesférico se llama *cohete superradiante de agujero negro* (o simplemente cohete de BH), y en particular se estudia el caso de un BH de RN. Para ello, se introduce la geometría de RN y luego se ve con más detalle la bomba de BH cargado, el cual brinda un entendimiento inicial sobre la superradiación en BH con carga.

1.3.1. Agujeros negros con carga

En el problema a resolver se considera un BH estático y cargado, el cual está caracterizado solamente por su masa M y su carga Q. La solución de la ecuación de Einstein en este caso viene dada por la métrica de Reissner-Nordström [Carroll 2014, sec 6.5]:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + sin^2\theta\, d\phi^2\right) \tag{1.13}$$

con

$$f(r) = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) \tag{1.14}$$

donde se trabaja con las unidades de Planck $c = 1$, $G = 1$ y $4\pi\epsilon_0 = 1$ (además $k_B = 1$ y $\hbar = 1$ como se usa más adelante). Esta métrica se obtiene de la misma manera como se obtiene la de Schwarzschild proponiendo una solución esféricamente

simétrica y estática, pero ahora el cuerpo no está en el vacío aislado sino que esta en un espacio inmerso en un campo eléctrico estático. Luego el $T^{\mu\nu}$ es no nulo, sino que vendrá dado por el tensor electromagnético [Hobson, Efstathiou y Lasenby 2006, sec 12]:

$$T^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi}\left(F^{\mu\rho}F^{\nu}_{\rho} - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}\right) \tag{1.15}$$

y el $F_{\mu\nu}$ es el correspondiente al de un campo eléctrico uniforme radial:

$$[F_{\mu\nu}] = E(r)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.16}$$

donde en principio $E(r)$ es una función arbitraria de la variable r que puede ser interpretada como la componente radial del campo E cuando $r \to \infty$. Resolviendo en conjunto las ecuaciones de Einstein y Maxwell (con la tetra-corriente $J^{\mu} = 0$ ya que se esta fuera de la distribución de carga) se obtiene la métrica (1.13) con las constantes M y Q, pero también se obtiene $E(r)$ que, como era de esperarse, es el campo de una carga puntual (i.e. el BH):

$$E(r) = \frac{Q}{r^2} \tag{1.17}$$

Es decir el campo de una carga puntual en un cierto marco de referencia donde se observa el BH estático (los resultados serán validos en cualquier marco de referencia usando la notación covariante). Luego, el potencial es:

$$A_{\mu} = (h(r), 0, 0, 0) \tag{1.18}$$

con

$$h(r) = -\frac{Q}{r} + \mu \tag{1.19}$$

donde el potencial químico μ aparece porque en lugar de considerar el campo en el vacío (o lo que es lo mismo, a $T = 0K$), resulta interesante considerarlo inmerso en un baño de partículas con un μ (o lo que es lo mismo, en un baño térmico con $T \neq 0$). Se trabaja el campo en el gauge de Lorenz:

$$\nabla_{\mu}A^{\mu} = 0 \tag{1.20}$$

donde la derivada covariante de un vector V^{ν} se define como [Carroll 2014, sec 3]:

$$\nabla_{\mu}V^{\nu} = \partial_{\mu}V^{\nu} + \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}V^{\lambda} \tag{1.21}$$

donde los símbolos de Christoffel $\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}$ se escriben unívocamente en términos de la métrica:

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}\left(\partial_{\mu}g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu}g_{\sigma\mu} - \partial_{\sigma}g_{\mu\nu}\right) \tag{1.22}$$

En el caso de una derivada covariante de una función escalar, como la función no depende de la base vectorial (es escalar) entonces

$$\nabla_{\mu}\phi = \partial_{\mu}\phi \tag{1.23}$$

Definiendo un vector como

$$V^\mu = \partial^\mu \phi \tag{1.24}$$

y usando la definición de la derivada covariante de un vector, se puede probar la siguiente propiedad [Carroll 2014, pág 101]:

$$\nabla^2 \phi = \nabla_\mu \nabla^\mu \phi = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\mu \left(\sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \right) \tag{1.25}$$

donde $|g|$ es el determinante de la métrica $[g_{\mu\nu}]$.

Se considera la estructura de la geometría de Reissner-Nordström, es decir la solución de las ecuaciones de campo acopladas de Einstein–Maxwell para una carga puntual localizada en el origen $r = 0$, en cuyo caso la métrica RN es válida para valores positivos de r. Calculando el invariante de Kretschmann [Gkigkitzis, Haranas y Ragos 2014],

$$K = R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{48M^2}{r^6} \left(1 + \frac{2Q^2}{rM} + \frac{7Q^4}{48r^2M^2} \right) \tag{1.26}$$

resulta que la única singularidad es en $r = 0$. Luego la métrica (1.13) en las coordenadas de Schwarzschild (t, r, θ, ϕ) tiene un horizonte de eventos cuando:

$$f(r) \equiv 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} = 0 \tag{1.27}$$

De resolver esta ecuación cuadrática se obtienen las raíces:

$$r_\pm = M \pm \left(M^2 - Q^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.28}$$

Luego hay 3 casos diferentes dependiendo de la relación entre los parámetros M y Q del BH :

- Si $M^2 < Q^2$, se obtiene que $r_\pm$ son ambos imaginarios y la métrica es regular para todos los valores de r positivos (pero aún tiene la singularidad en $r = 0$). Este caso no es considerado físicamente real ya que la singularidad $r = 0$ es una singularidad desnuda, i.e. es una singularidad que no esta rodeada por un horizonte.

- Si $M^2 > Q^2$ se tienen 2 raíces reales en $r = r_\pm$, i.e. tiene dos horizontes. Para $r > r_+$, la función $f(r)$ es positiva entonces las coordenadas t y r son tipo-tiempo y tipo-espacio respectivamente. En la región $r_- < r < r_+$, $f(r)$ se vuelve negativo y la naturaleza física de las coordenadas t y r se invierte. Luego, una partícula masiva o un fotón que penetre la superficie $r = r_+$ desde afuera deberá moverse en la dirección decreciente de r (i.e. no puede escapar como ocurre con Schwarzschild), entonces $r = r_+$ es un horizonte de eventos. Pero ahora, a diferencia de Schwarzschild, la partícula cae irreversiblemente solamente hasta $r = r_-$ porque para $r < r_-$ la función $f(r)$ es nuevamente positiva y t y r recuperan su comportamiento tipo-tiempo y tipo-espacio. En la región $r = r_-$ se puede mover "libremente" (como para $r > r_+$). Analizando la trayectoria radial de un fotón en las coordenadas avanzadas de Eddington-Finkelstein se obtiene un gráfico como se muestra en la figura 1.1, donde puede observarse que en este caso lo que queda es un agujero negro con forma de cascaron cuyos radios son los horizontes r_+ y r_-.

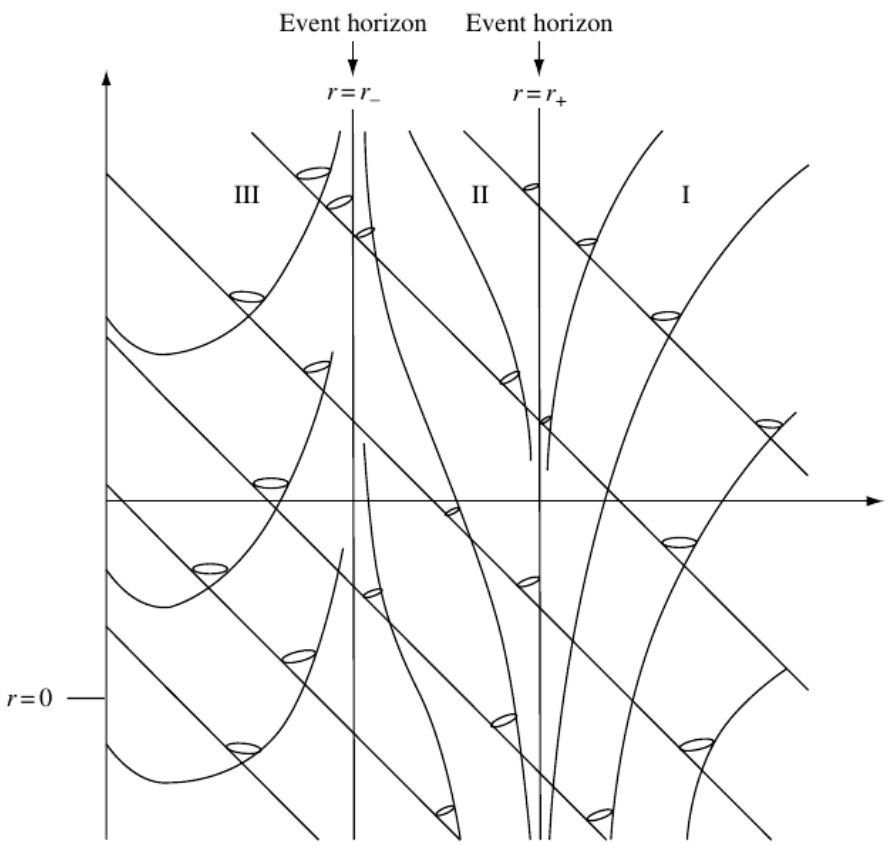


Figura 1.1: Trayectoria de un fotón en la métrica Reissner-Nordström en las coordenadas avanzadas de Eddington-Finkelstein.
Fuente: [Hobson, Efstathiou y Lasenby 2006, sec 12.7, pág 303]

- Si $M^2 = Q^2$ (llamado agujero negro de RN extremo), $f(r)$ es positivo en todos lados excepto en $r = M$ donde es igual a 0, es decir r es tipo-espacio en todos lados excepto en $r = M$ donde se vuelve nulo. Por lo tanto, hay un horizonte de eventos en $r = M$. Este caso es prácticamente el mismo que el anterior pero sin la región $r_- < r < r_+$, luego si el caso anterior es un cascarón esférico entonces este caso corresponde a una esfera hueca. Lo que es más, el cero de la función $f(r)$ en este caso es doblemente cero, es decir que es un cero de la derivada también.

1.3.2. Motivación: Bomba de agujero negro cargado

Se presenta ahora la bomba de BH con carga y algunos resultados [Degollado, Herdeiro y Rúnarsson 2013] que son introductorios para el cohete de BH (un BH cargado rodeado por un espejo semiesférico perfecto). Primero, para obtener modos superradiantes necesitamos que el campo incidente este cargado, además resulta natural que sea masivo, en vista de las partículas fundamentales conocidas. Se considera por simplicidad a este campo cargado y masivo como un campo escalar en un espacio curvo dado por la métrica de RN (1.13). El comportamiento estándar del campo es que asintóticamente en infinito decae exponencialmente, puede demostrarse que para que se cumpla esta condición se requiere que $qQ < Mm_p$ (donde m_p es la masa de la partícula bajo estudio)[Furuhashi y Nambu 2004]. Sin embargo,

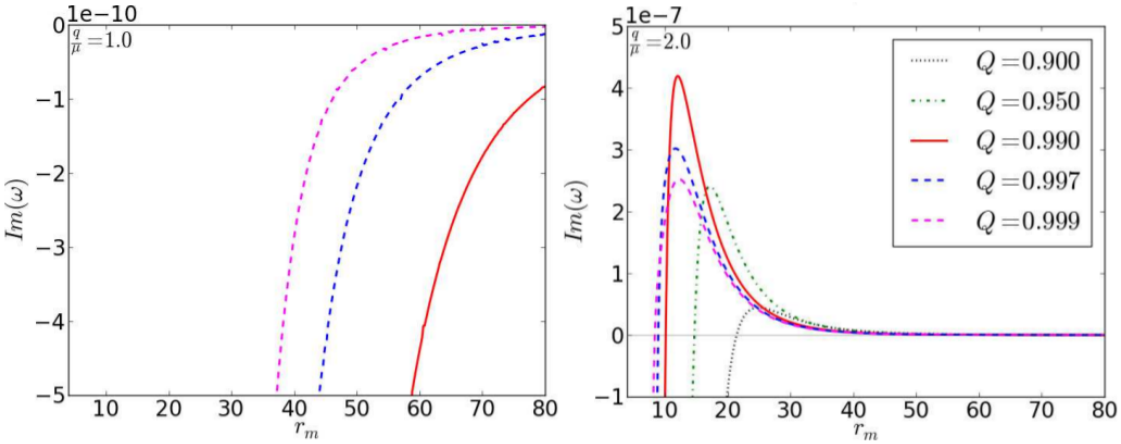


Figura 1.2: Parte imaginaria de la frecuencia versus el radio del espejo r_m para distintas relaciones entre la carga q y la masa $\mu = 0.3$ del campo escalar (en nuestra notación, llamamos m_p a la masa). Se incluye también la línea $\mathcal{I}m(\omega) = 0$ para ayudar a visualizar donde $\mathcal{I}m(\omega) > 0$.
Fuente: [Degollado, Herdeiro y Rúnarsson 2013]

en esta última referencia también se demuestra que esta condición no puede satisfacerse simultáneamente con la condición de superradiación, es decir, para los modos superradiantes.

En el párrafo anterior se presenta evidencia de que un estado no puede satisfacer la condición de contorno en infinito y en el BH (es decir superradiación) simultáneamente. Una manera de alterar la condición en infinito es colocando un espejo esférico perfecto a una distancia radial r_m tal que el campo se anule exactamente a esta distancia y a la respectiva frecuencia determinada por la posición del espejo [Cardoso, Dias et al. 2004; Dolan 2007; Press y Teukolsky 1972]. Como uno puede poner el espejo a una distancia arbitraria, el campo escalar puede tener frecuencias en el régimen superradiante. En la figura 1.2 se muestran los resultados obtenidos en [Degollado, Herdeiro y Rúnarsson 2013], puede observarse que cuando la relación $\frac{q}{m_p}$ es la unidad entonces para ninguna carga Q del BH se obtiene la condición $\mathcal{I}m(\omega) > 0$, es decir no hay modos superradiantes. A medida que aumenta esta relación, existe un valor mínimo para el radio del espejo tal que la parte imaginaria se vuelve positiva para determinado Q. Estos resultados llevan a las siguientes interpretaciones. Primero, los modos superradiantes tienen una frecuencia máxima, es decir que tendrán una longitud de onda mínima y por ende un radio mínimo del espejo a partir del cual $\mathcal{I}m(\omega) > 0$. Segundo, un análisis del área del BH de RN muestra que el crecimiento del área requiere que el cociente entre las cantidades extraídas de carga dQ y de masa dM sea mayor a la unidad. De hecho, si el área $A = 4\pi r_+^2$ aumenta una pequeña cantidad dA, entonces requiriendo que $dA > 0$ se obtiene

$$dA = \frac{\partial A}{\partial M} dM + \frac{\partial A}{\partial Q} dQ \quad \Rightarrow \quad \frac{dQ}{dM} > 1 \tag{1.29}$$

Además, resulta que para obtener la máxima amplificación del campo escalar se necesita (i) que el BH sea extremo, o al menos cerca del extremo, y (ii) el campo escalar debe ser lo más liviano posible pero con la mayor carga posible.

En resumen, del estudio de la bomba de BH cargado realizado en [Degollado, Herdeiro y Rúnarsson 2013] cabe preguntarse qué pasaría si en lugar de imponer las condiciones de contorno debido a un espejo esférico cerrado entorno al BH, se

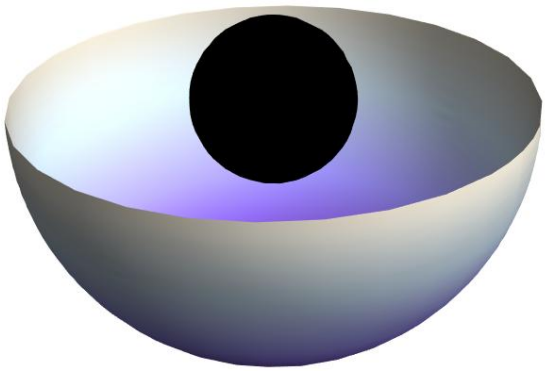


Figura 1.3: Representación gráfica del sistema BH-Espejo semiesférico perfecto con el que se trabaja, donde se considera al espejo colocado en el hemisferio inferior.

considerase un espejo semiesférico como se muestra en la figura 1.3. Se quiere estudiar como se comporta este sistema al considerar partículas cargadas con distintas energía e incidiendo en distintas direcciones, es decir, considerando tanto los modos superradiantes como los que no. Para ello, se coloca el sistema BH-espejo en un baño térmico de partículas y antipartículas con un potencial químico μ y que siguen la distribución de Bose-Einstein (BE). Para tener en cuenta el baño térmico, se tienen que cuantizar los campos de manera similar a como se hizo en la paradoja de Klein (sec. 1.2). Luego, se obtiene la fuerza neta sobre la configuración BH-espejo debido al background térmico, este resultado y la forma que tiene el sistema bajo estudio es lo que motiva el nombre de cohete de BH. Finalmente, se analiza este resultado numéricamente, donde clásicamente se obtienen resultados similares al caso de la bomba de BH para el comportamiento de los modos superradiantes y se obtiene una estimación de la fuerza de empuje de nuestro cohete de BH para ciertas características del BH y de los campos. Estos temas se abordan de la siguiente manera:

- En la sección 2 se estudia un campo escalar clásico con carga en espacio curvo (métrica de RN), se obtiene la ecuación de movimiento de este campo y se imponen las condiciones de contorno en el BH, en el espejo y en infinito obteniendo así el campo en todo el espacio para determinada onda plana incidente.

- En la sección 3 se procede con la cuantización del campo obtenido clásicamente considerando partículas incidiendo desde todas direcciones con distintas energías y que siguen la distribución BE. Luego se obtiene el tensor de energía-momento del sistema con el cual se obtiene la fuerza de empuje sobre el cohete de BH.

- En la sección 4 se analizan los resultados analíticos obtenidos tanto en el caso clásico como en el caso cuántico, obteniendo finalmente una primera estimación de la fuerza.

2. Dispersión de un Campo Escalar

El objetivo es estudiar el fenómeno de superradianza en un agujero negro con carga, como el introducido en la sección 1.3.1, e imponiendo condiciones de contorno colocando un espejo semiesférico perfecto con el BH concéntrico (de manera similar a la bomba de agujero negro estudiada en la sección 1.3.2, pero ahora el espejo en lugar de estar cerrado esta abierto). Para tener en cuenta partículas con distintas energías y amplitudes se considera este sistema de BH-espejo embebido en una en un baño térmico de partículas y antipartículas cargadas con potencial químico μ y que seguirán la estadística de Bose-Einstein (por tratarse de partículas escalares de spin 0). Luego se obtiene el empuje ejercido sobre una superficie que rodea al sistema a partir del $T^{\mu\nu}$. Tratando este problema por pasos, primero consideraremos solamente un campo escalar cargado en lugar del baño térmico, con las condiciones de contorno que impondrán el BH y el espejo perfecto, para luego usar este resultado para la cuantización del campo y considerar el baño de partículas.

2.1. Dinámica de un campo escalar cargado

Se considera un campo escalar de masa m_p y con carga e, cuya ecuación de movimiento viene dada por la ecuación de Klein-Gordon:

$$\left[\partial_\mu \partial^\mu - m_p^2\right] \Phi = 0 \tag{2.1}$$

donde nuevamente se toman las unidades de Planck $c = 1$ y $\hbar = 1$. Acoplando las interacciones electromagnéticas vía la sustitución:

$$p^\mu \to p^\mu - eA^\mu \quad , \quad \partial^\mu \to \partial^\mu - ieA^\mu \tag{2.2}$$

Se obtiene la ecuación de Klein-Gordon para un campo escalar con carga:

$$\left(\partial_\mu - ieA_\mu\right)\left(\partial^\mu - ieA^\mu\right)\Phi - m_p^2\Phi = 0 \tag{2.3}$$

Esta ecuación es relativista pero no tiene en cuenta la curvatura del espacio-tiempo. Se puede tener en cuenta la curvatura simplemente reemplazando las derivadas parciales ∂^μ por las derivadas covariantes ∇^μ:

$$g^{\mu\nu}\left(\nabla_\mu - ieA_\mu\right)\left(\nabla_\nu - ieA_\nu\right)\Phi - m_p^2\Phi = 0 \tag{2.4}$$

Esta es la ecuación de movimiento general para un campo escalar cargado de masa m_p y carga e en un espacio curvo. En este caso la métrica es de Reissner-Nordström dada por (1.13) y las ecuaciones pueden resolverse teniendo en cuenta la introducción presentada en la sección 1.3.1. Primero, usando que la métrica es diagonal,

$$g^{\mu\mu}\left(\nabla_\mu - ieA_\mu\right)\left(\nabla_\mu - ieA_\mu\right)\Phi - m_p^2\Phi = 0 \tag{2.5}$$

$$g^{\mu\mu}\left(\nabla_\mu\nabla_\mu - ieA_\mu\nabla_\mu - e^2A_\mu A_\mu\right)\Phi - ieg^{\mu\mu}\nabla_\mu(A_\mu\Phi) - m_p^2\Phi = 0 \tag{2.6}$$

$$g^{\mu\mu}\left(\nabla_\mu\nabla_\mu - ieA_\mu\nabla_\mu - e^2A_\mu A_\mu\right)\Phi - ieg^{\mu\mu}(\Phi\nabla_\mu A_\mu + A_\mu\nabla_\mu\Phi) - m_p^2\Phi = 0 \tag{2.7}$$

En el gauge de Lorenz (1.20),

$$g^{\mu\mu}\left(\nabla_\mu\nabla_\mu - i2eA_\mu\nabla_\mu - e^2A_\mu A_\mu\right)\Phi - m_p^2\Phi = 0 \tag{2.8}$$

Observando la definición del A_μ dada por (1.18), la única componente no nula es t luego

$$\left(\nabla^2 - g^{tt}i2eA_t\nabla_t - g^{tt}e^2(A_t)^2\right)\Phi - m_p^2\Phi = 0 \tag{2.9}$$

Como la derivada covariante actúa sobre una función escalar, usando la definición de la función escalar y la propiedad (1.25) (y usando de nuevo que la métrica es diagonal) se tiene

$$\left(\frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\mu\left(\sqrt{|g|}g^{\mu\mu}\partial_\mu\right) - g^{tt}ieA_t\partial_t - g^{tt}e^2(A_t)^2\right)\Phi - m_p^2\Phi = 0 \tag{2.10}$$

Para la métrica de Reissner-Nordström introducida en la sección 1.3.1, su determinante es

$$|g| = det([g_{\mu\nu}]) = -r^4\sin^2\theta \tag{2.11}$$

Enfocándose en el primer término de (2.10), desarrollando la sumatoria y viendo que la métrica sólo depende de r y θ se tiene

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\mu\left(\sqrt{|g|}g^{\mu\mu}\partial_\mu\right) = g^{tt}\partial_t^2 + \frac{1}{\sqrt{|g|}}\left(\partial_r\left(\sqrt{|g|}g^{rr}\partial_r\right) + \partial_\theta\left(\sqrt{|g|}g^{\theta\theta}\partial_\theta\right)\right) + g^{\phi\phi}\partial_\phi^2 \tag{2.12}$$

Juntando todo en (2.10) se tiene

$$\begin{aligned} 0 = \Bigg[& g^{tt}\partial_t^2 + \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_r\left(\sqrt{|g|}g^{rr}\partial_r\right) + g^{\phi\phi}\partial_\phi^2 - g^{tt}i2eA_t\partial_t - g^{tt}e^2A_t^2 - m_p^2 \\ & + \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\theta\left(\sqrt{|g|}g^{\theta\theta}\partial_\theta\right)\Bigg]\Phi \end{aligned} \tag{2.13}$$

Reemplazando por los valores de la métrica (1.13),

$$\begin{aligned} 0 = \Bigg[& -\frac{1}{f(r)}\partial_t^2 + \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2f(r)\partial_r\right) + \frac{1}{r^2}\underbrace{\left(\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta\left(\sin\theta\,\partial_\theta\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\phi^2\right)}_{\nabla_\Omega^2} \\ & + \frac{1}{f(r)}\left(i2e\,h(r)\partial_t + e^2h(r)^2\right) - m_p^2\Bigg]\Phi \end{aligned} \tag{2.14}$$

donde ya se ha llamado por simplicidad en la sección 1.3.1:

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \quad \text{y} \quad h(r) = A_t = -\frac{Q}{r} + \mu \tag{2.15}$$

Acomodando un poco, finalmente se tiene

$$\frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2f(r)\partial_r\Phi\right) + \left(\frac{1}{r^2}\nabla_\Omega^2 - \frac{1}{f(r)}\left(\partial_t - ie\,h(r)\right)^2 - m_p^2\right)\Phi = 0 \tag{2.16}$$

Esta es la ecuación de movimiento que queda por resolver ahora, que además tendrá que satisfacer ciertas condiciones de contorno impuestas por el BH y el espejo semi-esférico perfecto. Estos campos resultan ser complejos, puede verse una demostración en [Pani et al. 2012, sección 4.4] donde se reescribe la ecuación de movimiento definiendo un potencial efectivo, luego asumiendo que este potencial es real (como es el caso de un BH con carga) y usando que el background es estacionario, entonces las ecuaciones de movimiento son invariantes frente a las transformaciones $t \to -t$ y $\omega \to -\omega$; por lo tanto, existe otra solución $\bar{\Phi}$ que satisface las condiciones de contorno complejas.

Se quiere encontrar una solución de la ecuación (2.16). Primero puede observarse que la dependencia angular esta contenida solamente en ∇^2_Ω, operador cuyas autofunciones y autovalores conocemos [Weisstein 2022d]:

$$\nabla^2_\Omega Y^m_\ell(\theta,\phi) = -\ell(\ell+1)Y^m_\ell(\theta,\phi) \tag{2.17}$$

con $\ell > 0$ y $-\ell < m < \ell$, y los armónicos esféricos (las autofunciones de ∇^2_Ω) vienen dados por

$$Y^m_\ell(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}P^m_\ell(\cos\theta)e^{im\phi} \tag{2.18}$$

donde $P^m_\ell(\cos\theta)$ son los polinomios asociados de Legendre. Por otro lado, para la dependencia temporal se considera una solución exponencial con energía ω.

Proponiendo entonces una solución producto de la forma:

$$\Phi(r,\theta,\omega,t) = R_\ell(r)Y^m_\ell(\theta,\phi)e^{-i\omega t} \tag{2.19}$$

donde ya se escribe $R(r) = R_\ell(r)$ para enfatizar la dependencia de la parte radial de la solución con ℓ (además de ω). Insertando la solución propuesta (2.19) en la ecuación de movimiento (2.16), se obtiene la ecuación diferencial radial del campo:

$$\frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2 f(r)\partial_r R_\ell(r)\right) + \left(\frac{(\omega + e\,h(r))^2}{f(r)} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - m_p^2\right)R_\ell(r) = 0 \tag{2.20}$$

Puede observarse que esta ecuación homogénea es del tipo Sturm-Liouville donde, usando la notación usual, tenemos $p(r) = -r^2 f(r)$ y $q(r)$ es el paréntesis en el otro termino multiplicado por r^2. Por lo tanto, la solución general, que es combinación de la solución producto propuesta, es:

$$\Phi(r,\theta,\omega,t) = e^{-i\omega t}\sum_{\ell,m}\alpha^\omega_{\ell m}R_\ell(r)Y^m_\ell(\theta,\phi) \tag{2.21}$$

donde los coeficientes $\alpha^\omega_{\ell m}$ se obtienen de imponer las condiciones de contorno del problema, que en este caso son en el horizonte exterior r_+, en el espejo y en infinito (el espacio es asintóticamente plano).

Para implementar las condiciones de contorno se separa la solución en diferentes regiones como puede verse en la figura 2.1. Primero se obtiene una solución valida dentro la geometría BH-espejo la cual se llama $\Phi^-(\mathbf{x})$ y que satisface la condición de contorno en el horizonte r_+. Por otro lado, se obtiene una solución en la región exterior al BH-espejo la cual se llama $\Phi^+(\mathbf{x})$ y que satisface las condiciones de contorno requeridas en infinito. Luego, juntando estas soluciones en el espejo (con las condiciones de contorno necesarias para que esto ocurra) se obtiene el campo en todo el espacio.

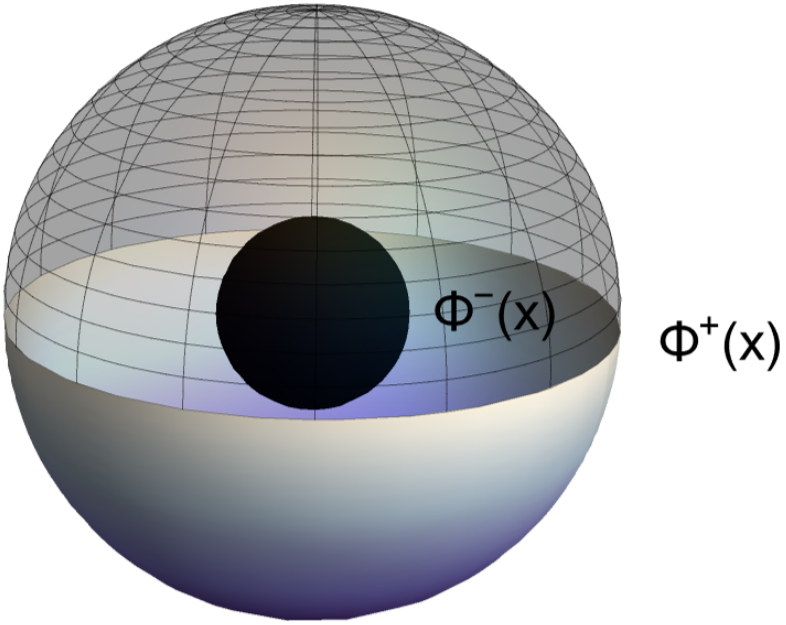


Figura 2.1: Representación gráfica del agujero negro con carga y del espejo semiesférico perfecto a estudiar (colocado solamente en el hemisferio inferior), donde se separa el campo en las regiones exteriores e interiores a esta configuración ($\Phi^+(\mathbf{x})$ y $\Phi^-(\mathbf{x})$ respectivamente).

2.2. Condiciones de contorno

2.2.1. Horizonte: Superradianza

Para saber que condiciones de contorno poner en el horizonte exterior r_+, se analiza el comportamiento de la ecuación (2.20) en este límite. Para ello, se desarrolla $f(r)$ entorno a r_+ (que es raíz de $f(r)$) a orden dominante cuando $r \to r_+$ (primero no nulo):

$$f(r) = \cancel{f(r_+)} + f'(r_+)(r - r_+) + O[(r - r_+)^2] \tag{2.22}$$

Recordando la definición (1.14) de $f(r)$, se calcula la derivada

$$f'(r_+) = \frac{2}{r_+^2}\left(r_g - \frac{q^2}{r_+}\right) = 4\pi T_{BH} \tag{2.23}$$

donde se usa la definición de la temperatura de un BH T_{BH} [EE et al. 2010]. Luego, se tiene

$$f(r) \approx 4\pi T_{BH}\,(r - r_+) \tag{2.24}$$

Similarmente, se desarrolla $h(r)$ pero en este caso el termino de orden cero no se anula y es quien domina cuando $r \to r_+$, entonces

$$h(r) = h(r_+) + O[(r - r_+)] \tag{2.25}$$

Insertando estos desarrollos en la ecuación (2.20),

$$\frac{4\pi T_{BH}}{r^2}\partial_r\left(r^2(r - r_+)\partial_r R_\ell(r)\right) + \left(\frac{(\omega + e\,h(r_+))^2}{4\pi T_{BH}\,(r - r_+)} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - m_p^2\right) R_\ell(r) = 0 \tag{2.26}$$

Como se esta en el límite de r cercano a r_+, pueden despreciarse algunos términos frente al orden dominante $(r-r_+)^{-1}$. Más aún, llamando a la frecuencia superradiante ω_s[3]:

$$\omega_s = -e\, h(r_+) \tag{2.27}$$

se tiene

$$\frac{4\pi T_{BH}}{r^2}\partial_r\left(r^2(r-r_+)\partial_r R_\ell(r)\right) + \frac{(\omega-\omega_s)^2}{4\pi T_{BH}\,(r-r_+)}R_\ell(r) = 0 \tag{2.28}$$

Desarrollando la derivada y ordenando un poco,

$$\frac{r-r_+}{r^2}(r^2(r-r_+)\partial_r^2 R_\ell(r) + 2r(r-r_+)\partial_r R_\ell(r) + r^2\partial_r R_\ell(r)) + \left(\frac{\omega-\omega_s}{4\pi T_{BH}}\right)^2 R_\ell(r) = 0 \tag{2.29}$$

$$\left(\frac{r-r_+}{r^2}[r^2(r-r_+)\partial_r^2 + (2r(r-r_+)+r^2)\partial_r] + \left(\frac{\omega-\omega_s}{4\pi T_{BH}}\right)^2\right) R_\ell(r) = 0 \tag{2.30}$$

Nuevamente, como se esta en el límite $r \to r_+$, se queda a orden dominante. Finalmente se obtiene así que la ecuación radial (2.20) cuando $r \to r_+$ toma la forma:

$$\left((r-r_+)^2\partial_r^2 + (r-r_+)\partial_r + \left(\frac{\omega-\omega_s}{4\pi T_{BH}}\right)^2\right) R_\ell(r) = 0 \tag{2.31}$$

Esta ecuación puede resolverse fácilmente. Primero, llamando por simplicidad

$$\tilde{r} = r - r_+ \qquad \text{y} \qquad \kappa = \frac{\omega-\omega_s}{4\pi T_{BH}} \tag{2.32}$$

La ecuación puede escribirse simplemente como

$$\left(\tilde{r}^2\partial_{\tilde{r}}^2 + \tilde{r}\partial_{\tilde{r}} + \kappa^2\right) R_\ell(\tilde{r}) = 0 \tag{2.33}$$

Esta es una ecuación de Euler cuya solución es de la forma $\tilde{r}^n$, donde n se obtiene reemplazando en la ecuación. Haciendo esto, se encuentra que $n = \pm i\kappa$ y que las soluciones independiente son $\tilde{r}^{\pm i\kappa}$, o lo que es lo mismo $e^{\pm i\kappa\log(\tilde{r})}$. En este último caso, se observa que las soluciones representan una onda incidente o saliente dependiendo del signo. Como sabemos que las ondas salientes no son físicamente posible (serían ondas salientes desde el interior del BH, lo cual no es posible), entonces la condición de contorno en el BH deja solamente las ondas entrantes al BH (queda el signo menos).

En conclusión, se encuentra que la solución radial (la cual se llama $u_\ell(r)$) para $r \to r_+$ toma la forma:

$$u_\ell(r) \simeq e^{-i\kappa\log(r-r_+)} \tag{2.34}$$

donde

$$\kappa = \frac{\omega-\omega_s}{4\pi T_{BH}} \tag{2.35}$$

[3]El echo de que $h(r_+)$ sea no nulo implica entonces que haya superradiación, tiene significado físico y no puede simplemente anularse este potencial en el horizonte mediante una transformación de gauge.

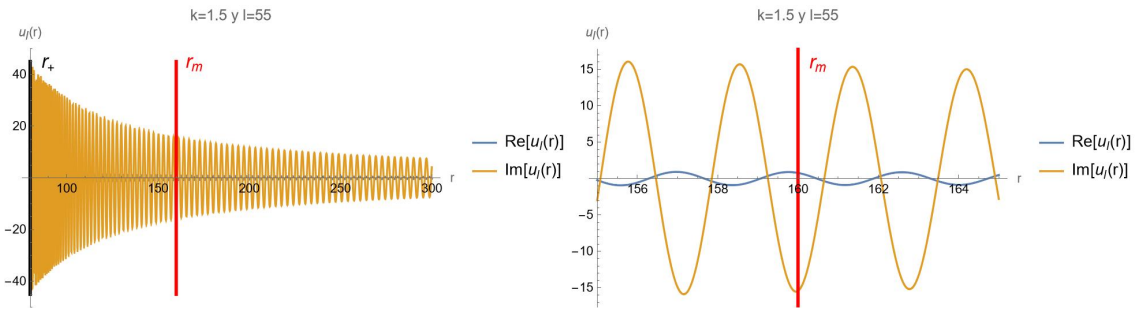


Figura 2.2: Soluciones $u_\ell(r)$ (parte real e imaginaria) de la ecuación (2.20) obtenidas numéricamente imponiendo la condición de contorno correspondiente al BH. La línea vertical negra indica donde se encuentra el horizonte exterior r_+, mientras que la línea roja indica la distancia radial r_m donde se coloca el espejo semiesférico perfecto. En el panel derecho se tiene un zoom de la región cercana a donde se coloca el espejo. Se gráfica para los valores arbitrarios $k = 1.5$ y $\ell = 55$, además, para los demás parámetros que caracterizan el sistema (detallados en la sección 4), se usan los valores de la tabla 4.1.

Teniendo en cuenta la dependencia temporal de la solución, se tiene que cerca del BH:

$$u_\ell(r,t) \simeq e^{-i\kappa \log(r-r_+)-i\omega t} \tag{2.36}$$

Recordando la definición de la velocidad de grupo,

$$v_g \equiv \frac{\partial \omega}{\partial k} \tag{2.37}$$

donde en este caso, $k = -\kappa$ (comparando la solución obtenida con la forma de una onda plana mediante la cual se define v_g). Se puede obtener v_g simplemente diferenciando la definición de κ y despejando, obteniendo

$$v_g = -4\pi T_{BH} \tag{2.38}$$

Por otro lado, la velocidad de fase se define como:

$$v_p \equiv \frac{\omega}{k} \tag{2.39}$$

De nuevo, en este caso $k = -\kappa$ por lo que la velocidad de fase será (a partir de la definición de κ)

$$v_p = \frac{4\pi T_{BH}}{\frac{\omega_s}{\omega} - 1} \tag{2.40}$$

Luego por un lado se tiene una velocidad de grupo v_g la cual siempre es negativa (ec. (2.38)) indicando que el paquete de onda (es decir "información") cae dentro del BH. Pero si $\omega_s > \omega$ entonces se tiene una velocidad de fase v_p que se vuelve positiva (ec. (2.40)) indicando que ondas planas (es decir "energía") esta siendo radiada desde el horizonte. Este es el fenómeno de superradianza introducido previamente en la sección 1.3. Efectivamente, recordando la definición de la frecuencia superradiante (2.27), puede escribirse que existen modos superradiantes cuando $\omega < eh(r_+)$ donde e es la carga de la partícula y $h(r_+)$ es el potencial evaluado en el horizonte del BH.

En conclusión, cuando se observa la solución radial $u_\ell(r)$ cerca del BH (2.34) aparecen los modos superradiantes, sin embargo para obtener la solución a medida que se aleja del BH se requieren de métodos numéricos para determinarla. En la

sección 4 se aborda el detalle de esta cuestión, un resultado de este análisis numérico se puede ver en la figura 2.2 donde se muestra la función $u_\ell(r)$ para determinados valores de k y ℓ. Finalmente, si se coloca el espejo a una distancia r_m del origen, llamando $u_\ell(r)$ a la solución radial en la región $r_+ < r < r_m$ (la cual toma la forma (2.34) cuando $r \to r_+$, es decir, cerca del BH), entonces la solución general (ec. (2.21)) en esta región puede escribirse como

$$\Phi^-(\mathbf{x}) = e^{-i\omega t} \sum_{\ell,m} a_\ell^m \frac{u_\ell(r)}{u_\ell(r_m)} Y_\ell^m(\theta,\phi) \qquad \text{si} \quad r_+ < r < r_m \tag{2.41}$$

donde se reescala $\alpha_{\ell m}^\omega = \frac{a_\ell^m}{u_\ell(r_m)}$ para simplificar al evaluar el campo en el espejo.

2.2.2. Infinito

Para conocer que condición de contorno imponer en infinito, se procede con un análisis similar al caso del horizonte pero ahora para $r \to \infty$. En este límite, se tiene $f(r) \approx 1$ (métrica asintóticamente plana) y $h(r) \approx \mu$ (no hay campo debido al BH cargado), luego la ecuación (2.20) toma la forma:

$$\left(\partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + (\omega + e\mu)^2 - m_p^2\right) R_\ell(r) = 0 \tag{2.42}$$

Esta es una ecuación de Bessel [Weisstein 2022b] cuyas soluciones son la funciones de Bessel esféricas:

$$\begin{aligned} j_\ell(kr) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{J_{\ell+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{kr}} \\ n_\ell(kr) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{Y_{\ell+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{kr}} \end{aligned} \tag{2.43}$$

con

$$k = \sqrt{(\omega + e\mu)^2 - m_p^2} \tag{2.44}$$

Además, como se esta estudiando el campo escalar en la región exterior a la configuración BH-espejo (lo que se llama $\Phi^+(\mathbf{x})$ en la figura 2.1), se tiene una componente del campo incidente $\Phi^{inc}(\mathbf{x})$ (el cual es una onda plana) y otra del campo dispersado $\Phi^{scat}(\mathbf{x})$:

$$\Phi^+(\mathbf{x}) = \Phi^{scat}(\mathbf{x}) + \Phi^{inc}(\mathbf{x}) \tag{2.45}$$

Se analiza primero la contribución del campo dispersado $\Phi^{scat}(\mathbf{x})$. En este caso se tiene una combinación de las Bessel, luego puede tomarse como solución radial a la función de Hankel esférica de primera especie [Weisstein 2022c] la cual satisface la condición de que en infinito sea una onda esférica saliente:

$$h_\ell^{(1)}(kr) = j_\ell(kr) + i\, n_\ell(kr) \simeq e^{-i\frac{\pi}{2}(\ell+1)} \frac{e^{ikr}}{kr} \quad \text{cuando } r \to \infty \tag{2.46}$$

Entonces la solución de la ecuación (2.20), la cual se llama $v_\ell(r)$, es una función que en infinito se comporta como una Hankel:

$$v_\ell(r) \simeq h_\ell^{(1)}(kr) \simeq e^{-i\frac{\pi}{2}(\ell+1)} \frac{e^{ikr}}{kr} \qquad \text{cuando } r \to \infty \tag{2.47}$$

Usando la solución general (2.21) puede escribirse el campo dispersado en la región $r_m < r$:

$$\Phi^{scat}(\mathbf{x}) = e^{-i\omega t} \sum_{\ell,m} b_\ell^m \frac{v_\ell(r)}{v_\ell(R)} Y_\ell^m(\theta,\phi) \tag{2.48}$$

donde se reescala nuevamente $\alpha_{\ell m}^{\omega} = \frac{b_\ell^m}{v_\ell(R)}$.

Por otro lado, analizando ahora la contribución de la parte incidente $\Phi^{inc}(\mathbf{x})$, se considera una onda plana incidente con momento $\vec{k} = k\,\hat{n}$ y amplitud A_k de la forma:

$$\Phi^{inc}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} A_{\vec{k}} e^{i(kr\,\hat{n}\cdot\hat{r} - \omega t)} \tag{2.49}$$

donde k viene dado por (2.44). Además, puede escribirse la onda plana de manera alternativa como un desarrollo en la base de ondas esféricas:

$$\Phi^{inc}(\mathbf{x}) = e^{-i\omega t} \sum_{\ell,m} \beta_\ell^m j_\ell(kr) Y_\ell^m(\theta,\phi) \tag{2.50}$$

donde los coeficientes β_ℓ^m vienen dados por

$$\beta_\ell^m = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}\ell}}{2\pi^2\sqrt{2\omega}} A_{\vec{k}} Y_\ell^{m*}(\check{n}) \tag{2.51}$$

Luego, se llama $w_\ell(r)$ a la solución radial de (2.20), que es una función que en infinito se comporta como una Bessel esférica [Krane 1991]:

$$w_\ell(r) \simeq j_\ell(kr) \simeq i\frac{e^{-i(kr+\ell\frac{\pi}{2})}}{2kr}\left((-1)^\ell - e^{i2kr}\right) \qquad \text{cuando } r \to \infty \tag{2.52}$$

Usando ahora la solución general (2.21), se escribe la parte incidente del campo en la región $r_m < r$:

$$\Phi^{inc}(\mathbf{x}) = e^{-i\omega t} \sum_{\ell,m} c_\ell^m \frac{w_\ell(r)}{w_\ell(r_m)} Y_\ell^m(\theta,\phi) \tag{2.53}$$

con

$$c_\ell^m = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}\ell}}{2\pi^2\sqrt{2\omega}} A_{\vec{k}} Y_\ell^{m*}(\check{n}) w_\ell(r_m) \tag{2.54}$$

En conclusión, juntando la parte dispersada e incidente ((2.48) y (2.53) respectivamente) se tiene la solución en la región $r_m < r$:

$$\begin{aligned}\Phi^+(\mathbf{x}) &= \Phi^{scat}(\mathbf{x}) + \Phi^{inc}(\mathbf{x}) \\ &= e^{-i\omega t} \sum_{\ell,m} \left(b_\ell^m \frac{v_\ell(r)}{v_\ell(r_m)} + c_\ell^m \frac{w_\ell(r)}{w_\ell(r_m)} \right) Y_\ell^m(\theta,\phi) \qquad \text{si} \quad r_m < r\end{aligned} \tag{2.55}$$

donde las funciones $v_\ell(r)$ y $w_\ell(r)$ satisfacen las condiciones de contorno dadas por (2.47) y (2.52) respectivamente. En la sección 4 puede verse como se usa este comportamiento asintótico para obtener numéricamente las soluciones $v_\ell(r)$ y $w_\ell(r)$, y en la figura 2.3 se grafican a modo de ejemplo estas funciones para determinados valores de k y ℓ. Por otro lado, se observa que las funciones (2.47) y (2.52) están relacionadas ya que en infinito se comportan como una Bessel y Hankel esféricas respectivamente, entonces en infinito se cumple:

$$w_\ell(r) \simeq \mathfrak{Re}\left[v_\ell(r)\right] \qquad \text{cuando } r \to \infty \tag{2.56}$$

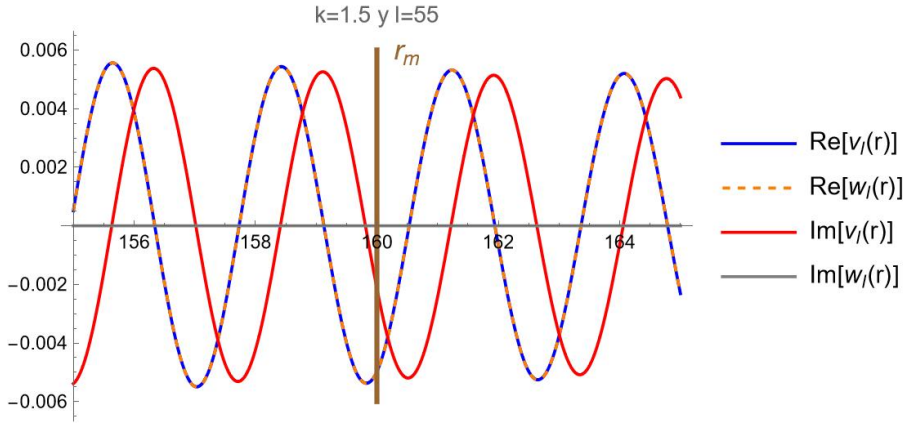


Figura 2.3: Soluciones $v_\ell(r)$ y $w_\ell(r)$ de la ecuación (2.20) (partes reales e imaginarias), obtenidas numéricamente imponiendo la condición de contorno correspondiente cuando $r \to \infty$. La línea vertical marrón indica la distancia radial r_m donde se coloca el espejo semiesférico perfecto. Se grafica en particular la zona cercana donde se encuentra el espejo, donde puede observarse como las partes reales de $v_\ell(r)$ y $w_\ell(r)$ coinciden completamente (líneas azul y naranja), además la parte imaginaria de $w_\ell(r)$ es nula, lo que se corresponde con el resultado (2.57). Para el gráfico se toman los valores arbitrarios $k = 1.5$ y $\ell = 55$, mientras que para los demás parámetros que caracterizan al sistema (detallados en la sección 4), se usan los valores de la tabla 4.1.

Sin embargo, como $v_\ell(r)$ y $w_\ell(r)$ son soluciones de la misma ecuación diferencial lineal (2.16) entonces esta relación se satisface en todo su dominio:

$$w_\ell(r) = \mathfrak{Re}\left[v_\ell(r)\right] \qquad \text{si } r_m > r \tag{2.57}$$

Entonces, se tiene por un lado la solución (2.55) en la región $r_m < r$ y la solución (2.41) en la región $r_+ < r < r_m$, lo que resta hacer es unir estas soluciones en el espejo a $r = r_m$ usando las condiciones de contorno que esto implica.

2.2.3. Espejo

Se considera ahora el espejo semiesférico perfecto de radio r_m en el hemisferio inferior al BH (el cual es concéntrico con el espejo) como puede verse en la figura 2.1. Se quiere el campo $\Phi(\mathbf{x})$ en todo el espacio, para ello se unen en el espejo las partes $\Phi^-(\mathbf{x})$ y $\Phi^+(\mathbf{x})$ ya obtenidas en (2.41) y (2.55) respectivamente. Como el espejo es perfecto, el campo escalar se anula en su superficie a $r = r_m$:

$$\Phi(r_m, \theta, \phi, t) = 0 \qquad \text{para} \quad \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \tag{2.58}$$

Además, el campo debe ser continuo en todo el espacio, por lo tanto no solo se pide continuidad en el hemisferio inferior (donde se encuentra el espejo) sino que también se pide continuidad en el hemisferio superior (donde no hay espejo). Por lo tanto, el campo debe ser continuo sobre toda la esfera de radio r_m:

$$\Phi^+(r_m, \theta, \phi, t) = \Phi^-(r_m, \theta, \phi, t) \qquad \text{sobre la esfera de radio} \quad r_m \tag{2.59}$$

Por otro lado, como el campo se anula en la superficie del espejo no es posible pedir que la derivada sea continua ya que esto implica que se anula la derivada también por lo que la solución es la trivial, es decir nula en todo el espacio[4]. Distinto ocurre en

[4]De la misma manera ocurre cuando se resuelve la ecuación en Schrödinger en un pozo de potencial infinito, se debe permitir la discontinuidad en las paredes del pozo para tener una solución no trivial [Zwiebach 2016]

el hemisferio superior (donde no hay espejo), donde la derivada si debe ser continua:

$$\frac{d}{dr}\Phi^{+}(r,\theta,\phi,t)|_{r=r_m} = \frac{d}{dr}\Phi^{-}(r,\theta,\phi,t)|_{r=r_m} \qquad \text{para} \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \tag{2.60}$$

Con estas tres condiciones de contorno se encuentra una relación entre los coeficientes a_ℓ^m, b_ℓ^m y c_ℓ^m, en particular se escriben los primeros dos en términos de los coeficientes de la onda incidente c_ℓ^m.

Entonces debido a la condición (2.59),

$$\Phi^{+}(r_m,\theta,\phi,t) = \Phi^{-}(r_m,\theta,\phi,t) \tag{2.61}$$

$$e^{-i\omega t}\sum_{\ell,m}\left(b_\ell^m \cancel{\frac{v_\ell(r_m)}{v_\ell(r_m)}} + c_\ell^m \cancel{\frac{w_\ell(r_m)}{w_\ell(r_m)}}\right) Y_\ell^m(\theta,\phi) = e^{-i\omega t}\sum_{\ell,m} a_\ell^m \cancel{\frac{u_\ell(r_m)}{u_\ell(r_m)}} Y_\ell^m(\theta,\phi) \tag{2.62}$$

$$e^{-i\omega t}\sum_{\ell,m}\left(b_\ell^m + c_\ell^m - a_\ell^m\right) Y_\ell^m(\theta,\phi) = 0 \tag{2.63}$$

Como los harmónicos esféricos son linealmente independientes, entonces

$$b_\ell^m = a_\ell^m - c_\ell^m \tag{2.64}$$

Por otro lado, se encuentra a_ℓ^m usando la condición de que se trata de un espejo perfecto (2.58),

$$\Phi^{-}(r_m,\theta,\phi,t) = e^{-i\omega t}\sum_{\ell,m} a_\ell^m \cancel{\frac{u_\ell(r_m)}{u_\ell(r_m)}} Y_\ell^m(\theta,\phi) = 0 \tag{2.65}$$

$$\sum_{\ell,m} a_\ell^m Y_\ell^m(\theta,\phi) = 0 \qquad \text{para} \quad \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \tag{2.66}$$

Además, se tiene la condición de la derivada continua (2.60)

$$\frac{d}{dr}\Phi^{+}(r,\theta,\phi,t)|_{r=r_m} = \Phi^{-}(r,\theta,\phi,t)|_{r=r_m} \tag{2.67}$$

$$e^{-i\omega t}\sum_{\ell,m}\left(b_\ell^m \frac{v_\ell'(r_m)}{v_\ell(r_m)} + c_\ell^m \frac{w_\ell'(r_m)}{w_\ell(r_m)}\right) Y_\ell^m(\theta,\phi) = e^{-i\omega t}\sum_{\ell,m} a_\ell^m \frac{u_\ell'(r_m)}{u_\ell(r_m)} Y_\ell^m(\theta,\phi) \tag{2.68}$$

$$\cancel{e^{-i\omega t}}\sum_{\ell,m}\left(b_\ell^m \frac{v_\ell'(r_m)}{v_\ell(r_m)} + c_\ell^m \frac{w_\ell'(r_m)}{w_\ell(r_m)} - a_\ell^m \frac{u_\ell'(r_m)}{u_\ell(r_m)}\right) Y_\ell^m(\theta,\phi) = 0 \tag{2.69}$$

Usando el resultado (2.64),

$$\sum_{\ell,m}\left(a_\ell^m\left(\frac{v_\ell'(r_m)}{v_\ell(r_m)} - \frac{u_\ell'(r_m)}{u_\ell(r_m)}\right) + c_\ell^m\left(\frac{w_\ell'(r_m)}{w_\ell(r_m)} - \frac{v_\ell'(r_m)}{v_\ell(r_m)}\right)\right) Y_m^\ell(\theta,\phi) = 0 \tag{2.70}$$

$$\sum_{\ell,m}\left(a_\ell^m H_\ell - c_\ell^m I_\ell\right) Y_\ell^m(\theta,\phi) = 0 \qquad \text{para} \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \tag{2.71}$$

donde para simplificar se llama

$$H_\ell = \frac{u'_\ell(r_m)}{u_\ell(r_m)} - \frac{v'_\ell(r_m)}{v_\ell(r_m)} \qquad \text{y} \qquad I_\ell = \frac{w'_\ell(r_m)}{w_\ell(r_m)} - \frac{v'_\ell(r_m)}{v_\ell(r_m)} \tag{2.72}$$

Puede observarse que estas definiciones no son otra cosa más que el Wronskiano entre las soluciones radiales divididas el producto de las mismas (como puede verificarse simplemente juntando las fracciones), todo evaluando a la distancia del espejo r_m. Por lo tanto, como las funciones u_ℓ, v_ℓ y w_ℓ son las soluciones de la ecuación de Strun-Liouville (2.20), puede cambiarse la coordenada donde se evalúan (de manera similar a como se hizo en la sección 1.2 para la paradoja de Klein) usando que $p(r) = -r^2 f(r)$ por el Wronskiano es constante. Esta herramienta no puede usarse en H_ℓ ya que u_ℓ y v_ℓ están definidas en distintos dominios y satisfacen distintas condiciones de contorno. Por otro lado, en el caso de I_ℓ, pueden llevarse las funciones dentro del Wronskiano a infinito donde conocemos su comportamiento asintótico

$$I_\ell = \frac{[r^2 f(r)(v_\ell(r)w'_\ell(r) - v'_\ell(r)w_\ell(r))]_{r=r_m}}{r_m^2 f(r_m)w_\ell(r_m)v_\ell(r_m)} = \frac{[r^2 f(r)(v_\ell(r)w'_\ell(r) - v'_\ell(r)w_\ell(r))]_{r\to\infty}}{r_m^2 f(r_m)w_\ell(r_m)v_\ell(r_m)} \tag{2.73}$$

Entonces, usando en el numerador los valores asintóticos de $v_\ell(r)$ y $w_\ell(r)$, dados por (2.47) y (2.52) respectivamente, cuyas derivadas a orden dominante cuando $r \to \infty$ son:

$$v'_\ell(r) \simeq \frac{ie^{ikr}}{r} e^{-i\frac{\pi}{2}(\ell+1)} \qquad \text{y} \qquad w'_\ell(r) \simeq \frac{e^{-i(kr+\ell\frac{\pi}{2})}\left((-1)^\ell + e^{i2kr}\right)}{2r} \tag{2.74}$$

Reemplazando todo en I_ℓ se obtiene

$$I_\ell = -\frac{i}{kr_m^2 f(r_m)} \frac{1}{w_\ell(r_m)v_\ell(r_m)} \tag{2.75}$$

Ahora bien, con un poco de paciencia (ver apéndice A), resulta que las ecuaciones (2.66) y (2.71) derivadas de las condiciones de contorno llevan al resultado:

$$\sum_{h=|m|}^{\infty} a_h^m M_{\ell h}^m = f_\ell^m \tag{2.76}$$

donde para simplificar se define:

$$M_{h\ell}^m = \begin{cases} \sum_{\ell'=|m|}^{\infty} \gamma_{h\ell'}^m H_{\ell'} \gamma_{\ell\ell'}^m & \text{si } h-\ell \text{ par} \\ 0 & \text{si } h-\ell \text{ impar} \end{cases} \tag{2.77}$$

y

$$f_\ell^m = \sum_{\ell'=|m|}^{\infty} c_{\ell'}^m I_{\ell'} \gamma_{\ell\ell'}^m \tag{2.78}$$

Además se tienen las m matrices γ^m definidas en el apéndice A como:

$$\gamma_{\ell\ell'}^m = \begin{cases} \sqrt{(2\ell+1)(2\ell'+1)\frac{(\ell-m)!(\ell'-m)!}{(\ell+m)!(\ell'+m)!}} \int_0^1 P_\ell^m(x) P_{\ell'}^m(x) & \text{si } \ell'-\ell \text{ impar} \\ 0 & \text{si } \ell'-\ell \text{ par} \end{cases} \tag{2.79}$$

con el valor particular $\gamma^m_{\ell\ell} = 1$, son simétricas en los índices inferiores ($\gamma^m_{\ell\ell'} = \gamma^m_{\ell'\ell}$) y el índice m es par ($\gamma^{-m}_{\ell\ell'} = \gamma^m_{\ell\ell'}$). Usando la definición de las $\gamma^m_{\ell\ell'}$, se escribe la definición de $M^m_{h\ell}$ (2.77) como un producto matricial (ver detalle en el apéndice A):

$$M^m_{h\ell} = \left[(\gamma^m - \mathbf{1})H^D(\gamma^m - \mathbf{1})\right]_{h\ell} = \sum_{\ell'=|m|}^{\infty} (\gamma^m_{h\ell'} - \delta_{h\ell'})H_{\ell'}(\gamma^m_{\ell'\ell} - \delta_{\ell'\ell}) \tag{2.80}$$

donde H^D es una matriz diagonal cuyos elementos diagonales son H_ℓ y $\mathbf{1}$ es la matriz identidad de la misma dimensión que γ^m. Además, debido a la simetría de $\gamma^m_{\ell\ell'}$, resulta que $M^m_{h\ell}$ también es simétrica en los índices inferiores ($M^m_{h\ell} = M^m_{\ell h}$) y es par en el índice m ($M^{-m}_{\ell\ell'} = M^m_{\ell\ell'}$), como puede verse a finales del apéndice A.

Luego, a partir de la ecuación (2.76) se obtienen los coeficientes a^m_ℓ en términos de los coeficientes c^m_ℓ. Para ello, nótese que si se fija m entonces la ecuación (2.76) puede pensarse como un producto de una matriz M^m por un vector $\vec{a}^m$ de coeficientes a^m_ℓ igualado a otro vector $\vec{f}^m$ de coeficientes f^m_ℓ:

$$M^m \vec{a}^m = \vec{f}^m \tag{2.81}$$

Se tienen entonces $2m+1$ ecuaciones de este tipo, una para cada valor posible de m. Esta ecuación puede invertirse ya que el operador M^m es no singular, esto es, si la inhomogeneidad $\vec{f}^m$ es nula (lo que corresponde a que no haya un campo incidente) entonces la única solución $\vec{a}^m$ es la trivial, es decir que no hay campo dispersado. Entonces, invirtiendo esta ecuación se tiene:

$$\vec{a}^m = (M^{-1})^m \vec{f}^m = \sum_{h=|m|}^{\infty} (M^{-1})^m f^m_h \tag{2.82}$$

esto es, escrito en componentes,

$$a^m_\ell = \sum_{h=|m|}^{\infty} (M^m_{h\ell})^{-1} \sum_{\ell'=|m|}^{\infty} c^m_{\ell'} I_{\ell'} \gamma^m_{h\ell'} = \sum_{\ell'=|m|}^{\infty} c^m_{\ell'} \left(I_{\ell'} \sum_{h=|m|}^{\infty} (M^m_{h\ell})^{-1} \gamma^m_{h\ell'} \right) \tag{2.83}$$

Llamando al último paréntesis $U^m_{\ell\ell'}$ e identificando el producto matricial (usando además que la matriz inversa de una matriz simétrica es simétrica, entonces $(M^{-1})^m_{h\ell} = (M^{-1})^m_{\ell h}$):

$$U^m_{\ell\ell'} = \sum_{h=|m|}^{\infty} (M^{-1})^m_{\ell h} \gamma^m_{h\ell'} I_{\ell'} = \left[(M^{-1})^m \gamma^m I^D\right]_{\ell\ell'} \tag{2.84}$$

donde I^D es una matriz diagonal cuyos elementos diagonales son I_ℓ. Por otro lado, usando la expresión matricial (2.80) para $M^m_{\ell h}$, la matriz inversa resulta ser

$$(M^{-1})^m_{\ell h} = \left[(\gamma^m - \mathbf{1})^{-1}(H^D)^{-1}(\gamma^m - \mathbf{1})^{-1}\right]_{\ell h} = \sum_{\ell'=|m|}^{\infty} (\gamma^m - \mathbf{1})^{-1}_{\ell\ell'} H^{-1}_{\ell'} (\gamma^m - \mathbf{1})^{-1}_{\ell' h} \tag{2.85}$$

Reemplazando en la definición de $U^m_{\ell\ell'}$ (2.84), se obtiene

$$U^m_{\ell\ell'} = \left[(\gamma^m - \mathbf{1})^{-1}(H^D)^{-1}(\gamma^m - \mathbf{1})^{-1}\gamma^m I^D\right]_{\ell\ell'} \tag{2.86}$$

o en componentes,

$$U^m_{\ell\ell'} = I_{\ell'} \sum_{h=|m|}^{\infty} \sum_{h'=|m|}^{\infty} (\gamma^m - \mathbf{1})^{-1}_{\ell h'} H^{-1}_{h'} (\gamma^m - \mathbf{1})^{-1}_{h'h} \gamma^m_{h\ell'} \tag{2.87}$$

Entonces, ahora que se tiene bien definido $U^m_{\ell\ell'}$ tal que solamente depende de las matrices de componentes γ^m y de las soluciones radiales u_ℓ, v_ℓ y w_ℓ evaluadas en el espejo (estas funciones están dentro de H_ℓ y I_ℓ, definiciones (2.72) y (2.75) respectivamente), se escriben los coeficientes a^m_ℓ correspondientes al campo dentro del espejo en términos de los coeficientes c^m_ℓ determinados por la onda plana incidente (ec. (2.54)):

$$a^m_\ell = \sum_{\ell'=|m|}^{\infty} c^m_{\ell'} U^m_{\ell\ell'} \tag{2.88}$$

Además, se obtiene una relación análoga para el coeficiente b^m_ℓ recordando la relación entre b^m_ℓ y los otros coeficientes (2.64):

$$\begin{aligned} b^m_\ell &= a^m_\ell - c^m_\ell = \sum_{\ell'=|m|}^{\infty} c^m_{\ell'} U^m_{\ell\ell'} - c^m_\ell \\ b^m_\ell &= \sum_{\ell'=|m|}^{\infty} c^m_{\ell'} \left(U^m_{\ell\ell'} - \delta_{\ell\ell'}\right) \end{aligned} \tag{2.89}$$

Puede escribirse entonces

$$b^m_\ell = \sum_{\ell'=|m|}^{\infty} c^m_{\ell'} O^m_{\ell\ell'} \tag{2.90}$$

donde se define

$$O^m_{\ell\ell'} = U^m_{\ell\ell'} - \delta_{\ell\ell'} \tag{2.91}$$

Es decir que se consigue los coeficientes a^m_ℓ y b^m_ℓ como función de los coeficientes de la onda incidente c^m_ℓ. Además, como $M^m_{\ell\ell'}$ satisface que $M^{-m}_{\ell\ell'} = M^m_{\ell\ell'}$, entonces también satisface esta propiedad $O^m_{\ell\ell'}$ y $U^m_{\ell\ell'}$:

$$O^{-m}_{\ell\ell'} = O^m_{\ell\ell'} \qquad , \qquad U^{-m}_{\ell\ell'} = U^m_{\ell\ell'} \tag{2.92}$$

En resumen, se estudia la dispersión de una onda plana incidente cuyos coeficientes c^m_ℓ vienen determinados por su amplitud y ángulo de incidencia (ec. (2.54)). Se relacionan los coeficientes del campo dispersado y dentro de la configuración BH-espejo (b^m_ℓ y a^m_ℓ respectivamente) con los parámetros iniciales del campo incidente c^m_ℓ. Por otro lado, como el sistema no es invariante frente a rotaciones (no hay rotación que deje invariante al eje z), el resultado del empuje ejercido sobre el sistema (es decir el empuje sobre el cohete BH) depende del ángulo de incidencia con respecto al eje z. Además, si difiere la amplitud también lo hace el empuje. Entonces se tiene que encontrar la manera de saber la dirección de incidencia y la amplitud del campo incidente. La manera correcta de responder esta pregunta es pensando al BH y al espejo semiesférico perfecto embebido en un background térmico de partículas escalares, el cual sería por ejemplo el fondo cósmico de radiación (CMB)[5]. Como el

[5]En realidad, el CMB son fotones, i.e. campos vectoriales, por lo que el cálculo con campos escalares es un simplificación.

baño térmico de partículas –escalares– se encuentra a una temperatura finita, eso quiere decir que hay un cierto número de partículas en cada estado (o lo que es lo mismo, para cada modo posible ya sea superradiante o no) que se relaciona con la temperatura del baño mediante la distribución de Bose-Einstein (BE). Esto resulta en partículas incidiendo desde todas las direcciones posibles y a diferentes amplitudes dada por la temperatura usada en la distribución BE. Entonces lo que se quiere hacer es escribir todo en términos de la distribución BE. Para hacer esto primero se cuantizan los campos escalares.

3. Cohete de Agujero Negro

3.1. Cuantización del campo

En la sección 2 estudia un campo escalar cargado incidiendo sobre la configuración BH-espejo (que, por su forma y por la fuerza que se quiere obtener, se llama "cohete" superradiante de agujero negro). Para calcular el empuje sobre el sistema BH-espejo se procede primero con la cuantización del campo escalar (por lo dicho al final de la sección anterior). Es decir, considerando al sistema en un baño de partículas y antipartículas a una temperatura finita T con un potencial químico μ. Como en infinito la métrica RN se vuelve plana, el campo cuántico será tal que en infinito satisfaga la definición de k en (2.44), donde despejando ω se escribe la relación de dispersión:

$$\omega = \pm\sqrt{k^2 + m_p^2} - e\mu = \pm\omega_p - e\mu \tag{3.1}$$

donde para simplificar las expresiones se llama $\omega_p = \sqrt{k^2 + m_p^2}$ (es la relación de dispersión usual de una onda plana). Se observa entonces la relación de dispersión de ondas planas más una constante, luego puede usarse la base de ondas plana multiplicada por la exponencial constante $e^{ie\mu t}$ (el cambio de signo se debe a que va el conjugado del vector base). Entonces, integrando sobre todos los momentos $\vec{k}$, el campo cuántico en infinito toma la forma [Walter Greiner y Reinhardt 1996]:

$$\hat{\Phi}(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(\frac{\hat{A}_{\vec{k}} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - (\omega_p - e\mu)t)}}{\sqrt{2(\omega_p - e\mu)}} + \frac{\hat{B}^\dagger_{\vec{k}} e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - (\omega_p + e\mu)t)}}{\sqrt{2(\omega_p + e\mu)}} \right) \tag{3.2}$$

donde μ es el potencial químico total, el cual en este caso como la única cantidad conservada es la carga (no hay conservación de las partículas en este contexto cuántico), entonces el potencial químico es el de la partícula con carga e por el potencial eléctrico (1.18). Los operadores $\hat{A}$ y $\hat{B}$ crean partículas y antipartículas respectivamente con momento $\vec{k}$. Los denominadores en los campos ha sido definidos para satisfacer automáticamente la relación de conmutación canónica:

$$[\Phi(t,\vec{x}), \dot{\Phi}^\dagger(t,\vec{y})] = [\Phi^\dagger(t,\vec{x}), \dot{\Phi}(t,\vec{y})] = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \tag{3.3}$$

y 0 cualquier otro conmutador entre estos campos. Reescribiendo los operadores $\hat{A}_{\vec{k}}$ y $\hat{B}_{\vec{k}}$ en términos de los campos Φ y $\dot{\Phi}$, puede usarse la relación de conmutación canónica y escribir una relación análoga para los operadores:

$$[\hat{A}_{\vec{k}}, \hat{A}^\dagger_{\vec{k}'}] = [\hat{B}_{\vec{k}}, \hat{B}^\dagger_{\vec{k}'}] = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') \tag{3.4}$$

y 0 cualquier otro conmutador entre estos operadores.

Asumiendo una distribución térmica isotrópica de ondas planas de temperatura T y potencial químico μ, entonces el valor de expectación cuadrático de los operadores $\hat{A}\hat{A}^\dagger$ y $\hat{B}\hat{B}^\dagger$ vienen dados por (usando el valor de expectación del número de ocupación de una gas de bosones [Pathria y Beale 2011]):

$$\begin{aligned} \langle \hat{A}^\dagger \hat{A} \rangle &= \frac{1}{e^{\frac{\omega_p - e\mu}{T}} - 1} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \\ \langle \hat{B}^\dagger \hat{B} \rangle &= \frac{1}{e^{\frac{\omega_p + e\mu}{T}} - 1} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \end{aligned} \tag{3.5}$$

donde el cambio de signo entre partículas y antipartículas ($\hat{A}^\dagger\hat{A}$ y $\hat{B}^\dagger\hat{B}$ respectivamente) se debe al corrimiento en la energía ω correspondiente a cada caso, como puede verse en la ecuación (3.2). Cualquier otro valor de expectación entre estos operadores es nulo.

Ahora bien, de la sección 2 ya esta determinada la solución en toda la región permitida en el espacio-tiempo para un campo clásico, donde se tienen los coeficientes a_ℓ^m y b_ℓ^m en términos de los coeficientes c_ℓ^m de la onda plana incidente. Por otro lado, para cuantizar el campo basta con promover los coeficientes a_ℓ^m, b_ℓ^m y c_ℓ^m a operadores. Entonces usando la relación entre estos coeficientes encontrada clásicamente, solamente resta cuantizar los coeficientes c_ℓ^m. Esto último resulta inmediato usando (2.54) donde se relacionan los coeficientes c_ℓ^m con la amplitud de la onda incidente $A_{\vec{k}}$ y la dirección de incidencia $\check{n}$:

$$c_\ell^m = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}\ell}}{2\pi^2\sqrt{2\omega}} A_{\vec{k}} Y_\ell^{m*}(\check{n}) w_\ell(r_m) \tag{2.54}$$

Entonces escribiendo esto como un operador,

$$\hat{c}_\ell^m = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}\ell}}{2\pi^2\sqrt{2(\omega_p - e\mu)}} \hat{A}_{\vec{k}} Y_\ell^{m*}(\check{n}) w_\ell(r_m) \tag{3.6}$$

donde $\hat{A}_{\vec{k}}$ es el operador de creación de partículas que ya introducido. Para diferenciar el caso de partículas y antipartículas, se escriben a los operadores de las partículas como $\hat{a}_\ell^m$, $\hat{b}_\ell^m$ y $\hat{c}_\ell^m$, y a los operadores de las antipartículas como $\hat{\tilde{a}}_\ell^m$, $\hat{\tilde{b}}_\ell^m$ y $\hat{\tilde{c}}_\ell^m$. Análogamente al caso de las partículas, ya se tienen $\hat{\tilde{a}}_\ell^m$ y $\hat{\tilde{b}}_\ell^m$ en términos de $\hat{\tilde{c}}_\ell^m$, y en consecuencia como se relacionan con la amplitud de la onda incidente $B_{\vec{k}}$ mediante:

$$\hat{\tilde{c}}_\ell^m = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}\ell}}{2\pi^2\sqrt{2(\omega_p + e\mu)}} \hat{B}_{\vec{k}} Y_\ell^{m*}(\check{n}) w_\ell(r_m) \tag{3.7}$$

Conociendo la forma del operador (3.6) y del valor esperado (3.5) del producto de operadores de creación y destrucción de partículas $\hat{A}\hat{A}^\dagger$, se encuentra inmediatamente el valor esperado del operador cuadrático $\hat{c}_\ell^m\hat{c}_\ell^{m\dagger}$ sobre todas las direcciones posibles (ver apéndice B):

$$\int d\check{n}\, d\check{n}'\ \langle \hat{c}_\ell^{m\dagger}\hat{c}_{\ell'}^{m'}\rangle = \frac{|w_\ell(r_m)|^2}{\pi(\omega_p - e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p - e\mu}{T}} - 1\right)} \frac{\delta(k-k')}{k^2}\delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'} \tag{3.8}$$

y equivalentemente se tiene una expresión para el caso de antipartículas incidiendo de todas las direcciones posibles:

$$\int d\check{n}\, d\check{n}'\ \langle \hat{\tilde{c}}_\ell^{m\dagger}\hat{\tilde{c}}_{\ell'}^{m'}\rangle = \frac{|w_\ell(r_m)|^2}{\pi(\omega_p + e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p + e\mu}{T}} - 1\right)} \frac{\delta(k-k')}{k^2}\delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'} \tag{3.9}$$

A partir de (3.8) y de los resultados clásicos (ec. (2.88) y (2.90)), pueden obtenerse de la misma manera resultados análogos para las combinaciones de $\hat{c}_\ell^m$ y $\hat{b}_\ell^m$ (demostraciones en el apéndice B):

$$\int d\check{n}\, d\check{n}'\ \langle \hat{c}_\ell^{m\dagger}\hat{b}_{\ell'}^{m'}\rangle = O_{\ell'\ell}\frac{|w_\ell(r_m)|^2}{\pi(\omega_p - e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p - e\mu}{T}} - 1\right)} \frac{\delta(k-k')}{k^2}\delta_{mm'} \tag{3.10}$$

$$\int d\check{n}\, d\check{n}'\ \langle \hat{b}_\ell^{m\dagger} \hat{c}_{\ell'}^{m'} \rangle = O^*_{\ell\ell'} \frac{|w_{\ell'}(r_m)|^2}{\pi(\omega_p - e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p - e\mu}{T}} - 1\right)} \frac{\delta(k-k')}{k^2} \delta_{m'm} \tag{3.11}$$

$$\int d\check{n}\, d\check{n}'\ \langle \hat{b}_\ell^{m\dagger} \hat{b}_{\ell'}^{m'} \rangle = \sum_{\ell''=|m|}^{\infty} O^*_{\ell\ell''} O_{\ell'\ell''} \frac{|w_{\ell''}(r_m)|^2}{\pi(\omega_p - e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p - e\mu}{T}} - 1\right)} \frac{\delta(k-k')}{k^2} \delta_{mm'} \tag{3.12}$$

Análogamente, se hallan las mismas expresiones para los operadores $\hat{\tilde{c}}_\ell^m$ y $\hat{\tilde{b}}_\ell^m$ intercambiando $\mu \to -\mu$. Estos resultados son de utilidad más adelante.

En resumen, ya se tiene la solución clásica del campo $\Phi^+(\mathbf{x})$ en la región $r_m < r$ fuera del sistema BH-espejo en (2.55) (más adelante se explica porque se esta interesado en particular en esta región), el cual puede cuantizarse promoviendo los coeficientes b y c a operadores, sumando sobre todos los momentos k posibles y agregando el término para antipartículas:

$$\hat{\Phi}^+(r,\theta,\phi,t) = \hat{\Phi}^{scat}(r,\theta,\phi,t) + \hat{\Phi}^{inc}(r,\theta,\phi,t) \qquad \text{si} \quad r_m < r \tag{3.13}$$

donde

$$\begin{aligned}\hat{\Phi}^{scat}(r,\theta,\phi,t) = \int_\infty^\infty d^3k \sum_{\ell,m} \Bigg(& e^{-i(\omega_p - e\mu)t}\, \hat{b}_\ell^m \frac{v_\ell(r)}{v_\ell(r_m)} Y_\ell^m(\theta,\phi) \\ & + e^{i(\omega_p + e\mu)t}\, \hat{\tilde{b}}_\ell^{m\dagger} \frac{v_\ell^*(r)}{v_\ell^*(r_m)} Y_\ell^{m*}(\theta,\phi) \Bigg)\end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}\hat{\Phi}^{inc}(r,\theta,\phi,t) = \int_\infty^\infty d^3k \sum_{\ell,m} \Bigg(& e^{-i(\omega_p - e\mu)t}\, \hat{c}_\ell^m \frac{w_\ell(r)}{w_\ell(r_m)} Y_\ell^m(\theta,\phi) \\ & + e^{i(\omega_p + e\mu)t}\, \hat{\tilde{c}}_\ell^{m\dagger} \frac{w_\ell^*(r)}{w_\ell^*(r_m)} Y_\ell^{m*}(\theta,\phi) \Bigg)\end{aligned} \tag{3.15}$$

Ahora se tienen todas las herramientas necesarias para estudiar la configuración BH-espejo inmerso en el baño térmico de partículas y antipartículas. Para calcular la fuerza de empuje producido por este sistema primero se necesita obtener el tensor de energía-momento.

3.2. Tensor Energía-Momento

Se esta particularmente interesado en el tensor energía-momento en infinito (como se ve en la siguiente sección), es decir que se quiere determinar el tensor energía-momento de un campo escalar complejo (o campo cargado) libre (donde no hay interacción con el BH). El Lagrangiano de un campo complejo es [Reyes y Delgado 2017]:

$$\mathcal{L} = (\partial_\alpha \hat{\Phi})(\partial^\alpha \hat{\Phi}^\dagger) - m_p^2 \hat{\Phi}\hat{\Phi}^\dagger \tag{3.16}$$

Usando el orden normal (o orden de Wick) para sacar la energía infinita de $\mathcal{L}$, se tiene

$$\mathcal{L} =: (\partial_\alpha \hat{\Phi})(\partial^\alpha \hat{\Phi}^\dagger) - m_p^2 \hat{\Phi}\hat{\Phi}^\dagger : \tag{3.17}$$

Por otro lado, el tensor de energía-momento es [Reyes y Delgado 2017]:

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \hat{\Phi})}\partial^\nu \hat{\Phi} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \hat{\Phi}^\dagger)}\partial^\nu \hat{\Phi}^\dagger - g^{\mu\nu}\mathcal{L} \tag{3.18}$$

Reemplazando con el Lagrangiano (3.17),

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu \hat{\Phi})}(:(\partial_\alpha \hat{\Phi})(\partial^\alpha \hat{\Phi}^\dagger):)\partial^\nu \hat{\Phi} + \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu \hat{\Phi}^\dagger)}(:(\partial_\alpha \hat{\Phi})(g^{\alpha\beta}\partial^\beta \hat{\Phi}^\dagger):)\partial^\nu \hat{\Phi}^\dagger \\ &\quad - g^{\mu\nu}(:(\partial_\alpha \hat{\Phi})(\partial^\alpha \hat{\Phi}^\dagger) - m_p^2 \hat{\Phi}\hat{\Phi}^\dagger:) \\ &=: \delta^\mu_\alpha \partial^\alpha \hat{\Phi}^\dagger : \partial^\nu \hat{\Phi} + : g^{\alpha\beta}\delta^\mu_\beta \partial_\alpha \hat{\Phi} : \partial^\nu \hat{\Phi}^\dagger - g^{\mu\nu}(:(\partial_\alpha \hat{\Phi})(\partial^\alpha \hat{\Phi}^\dagger) - m_p^2 \hat{\Phi}\hat{\Phi}^\dagger:) \\ &=: \partial^\mu \hat{\Phi}^\dagger : \partial^\nu \hat{\Phi} + : \partial^\mu \hat{\Phi} : \partial^\nu \hat{\Phi}^\dagger - g^{\mu\nu}(:(\partial_\alpha \hat{\Phi})(\partial^\alpha \hat{\Phi}^\dagger) - m_p^2 \hat{\Phi}\hat{\Phi}^\dagger:) \end{aligned} \tag{3.19}$$

Por supuesto, todos los campos están evaluados en el tetravector posición $\hat{\Phi}(\mathbf{x})$ pero que no se escribe explícitamente para simplificar. Sin embargo, ahora resulta útil considerarlo porque permite reescribir las derivadas como:

$$\partial_\mu \hat{\Phi}(\mathbf{x}) = \partial'_\mu \hat{\Phi}(\mathbf{x}')|_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}} \tag{3.20}$$

Entonces la última expresión del tensor energía-momento puede escribirse como

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} =: \partial^\mu \hat{\Phi}^\dagger(\mathbf{x}) : \partial^\nu \hat{\Phi}(\mathbf{x}')|_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}} + : \partial^\mu \hat{\Phi}(\mathbf{x}')|_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}} : \partial^\nu \hat{\Phi}^\dagger(\mathbf{x}) \\ - g^{\mu\nu}(:(\partial_\alpha \hat{\Phi}(\mathbf{x}')|_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}})(\partial^\alpha \hat{\Phi}^\dagger(\mathbf{x})) - m_p^2 \Phi(\mathbf{x}')|_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}} \hat{\Phi}^\dagger(\mathbf{x}):) \end{aligned} \tag{3.21}$$

El orden normal no es un operador lineal pero como ahora se trata de operadores que actúan en diferentes espacios de Fock, puede escribirse

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} =: \partial^\mu \hat{\Phi}^\dagger(\mathbf{x})\partial^\nu \hat{\Phi}(\mathbf{x}') : |_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}} + : \partial^\mu \hat{\Phi}(\mathbf{x}')\partial^\nu \hat{\Phi}^\dagger(\mathbf{x}) : |_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}} \\ - g^{\mu\nu}(:(\partial_\alpha \hat{\Phi}(\mathbf{x}')(\partial^\alpha \hat{\Phi}^\dagger(\mathbf{x})) - m_p^2 \hat{\Phi}(\mathbf{x}')\hat{\Phi}^\dagger(\mathbf{x}):)|_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}} \end{aligned} \tag{3.22}$$

Entonces, pueden separarse las derivadas que actúan sobre diferentes espacios como ∂^μ (en $\mathbf{x}$) y ∂'^μ (en $\mathbf{x}'$). Finalmente se tiene el tensor energía-momento para un campo complejo cuántico:

$$T^{\mu\nu} = \left(\partial^\mu \partial'^\nu + \partial'^\mu \partial^\nu - g^{\mu\nu}(\partial'_\alpha \partial^\alpha - m_p^2)\right)\left(:\hat{\Phi}^\dagger(\mathbf{x})\hat{\Phi}(\mathbf{x}'):\right)|_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}} \tag{3.23}$$

Sin embargo, se quiere considerar el sistema en un baño de partículas y antipartículas cargadas a una temperatura finita T y con un potencial químico μ. Luego resulta más útil tomar el valor medio del correspondiente tensor energía-momento (3.23) (dividido por 2 para evitar el doble conteo en el valor medio):

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\partial^\mu \partial'^\nu + \partial'^\mu \partial^\nu - g^{\mu\nu}(\partial'_\alpha \partial^\alpha - m_p^2)\right)\langle:\hat{\Phi}^\dagger(\mathbf{x})\hat{\Phi}(\mathbf{x}'):\rangle|_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}} \tag{3.24}$$

Por último, acoplando el campo electromagnético[6] vía la sustitución (2.2), que en este caso la sustitución queda:

$$\begin{cases} \partial_\mu \hat{\Phi}^\dagger(\mathbf{x}) \longrightarrow \partial_\mu \hat{\Phi}^\dagger(\mathbf{x}) + ieA_\mu \hat{\Phi}^\dagger(\mathbf{x}) \\ \partial'_\mu \hat{\Phi}(\mathbf{x}') \longrightarrow \partial'_\mu \hat{\Phi}(\mathbf{x}') - ieA'_\mu \hat{\Phi}(\mathbf{x}') \end{cases} \tag{3.25}$$

[6] Al principio de esta sección se dijo que es de interés el campo libre sin interacción con el BH entonces pareciera una contradicción en este punto, sin embargo mirando el A_μ (ec. (1.18)) se observa que para $r \to \infty$ (región que es de interés) el campo no es nulo sino que sobrevive el μ del baño térmico.

Con lo cual deja para el tensor de energía-momento[7]:

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left((\partial^\mu + ieA^\mu)(\partial'^\nu - ieA'^\nu) + (\partial'^\mu - ieA'^\mu)(\partial^\nu + ieA^\nu)\right.$$
$$\left. -g^{\mu\nu}((\partial'_\alpha - ieA'_\alpha)(\partial^\alpha + ieA^\alpha) - m_p^2)\right) \langle : \hat{\Phi}^\dagger(\mathbf{x})\hat{\Phi}(\mathbf{x}') : \rangle |_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}} \quad (3.26)$$

Este resultado es necesario más adelante para el cálculo del empuje sobre el sistema BH-espejo.

3.3. Fuerza sobre el sistema

Para calcular el empuje inducido por el campo radiado sobre el sistema BH-espejo,se utiliza el tensor de energía-momento $T^{\mu\nu}$. El tetramomento puede escribirse usando el teorema de Noether, el cual permite escribirlo como la carga conservada debido a una traslación espacio-temporal. Se definen las cargas locales contenidas en un volumen cerrado V del espacio-tiempo como:

$$P_V^\nu(t) = \int_V d^3x\, T^{0\nu}(t, \vec{x}) \quad (3.27)$$

Luego la derivada temporal[8] del momento quedará

$$\begin{aligned} \frac{P_V^\nu}{dt} &= \int_V d^3x\, \partial_0 T^{0\nu} = -\int_V d^3x\, \partial_i T^{i\nu} \\ \frac{P_V^\nu}{dt} &= -\int_{\partial V} dA\, n_i T^{i\nu} \end{aligned} \quad (3.28)$$

donde en la primera línea se usa que la corriente es conservada por lo que puede cambiarse la derivada temporal por la espacial, luego en la segunda línea se usa el teorema de Gauss (donde n_i es el vector normal saliente a la superficie). Entonces, para las componentes $j = 1, 2, 3$ queda la derivada temporal del momento espacial, es decir la fuerza F_V^j.

En conclusión, el flujo de cada componente espacial del tensor energía momento sobre una superficie cerrada que encierra al sistema da el cambio del momento por unidad de tiempo en la dirección correspondiente a la componente que se haya tomado. Entonces tomando una superficie infinita que encierra al sistema, el flujo de cada componente espacial de T_μ^ν da el cambio total del momento por unidad de tiempo en la correspondiente componente, es decir la fuerza total en la correspondiente dirección.

Dado el tensor de energía-momento del campo escalar (3.23), se puede obtener el empuje total sobre una esfera de radio $r \to \infty$ que encierre al sistema BH-espejo:

$$F_j = \int r^2 d\Omega\, n_r^i\, T_{ij}|_{r\to\infty} \quad (3.29)$$

[7]Puede verificarse este resultado usando la definición del tensor energía-momento como la derivada funcional de la acción (ver por ejemplo [Joglekar y Mishra 1990])

[8]La derivada temporal es la usual ya que se esta considerando que el volumen que encierra al sistema es infinito (ec. (3.31)), por lo tanto la métrica en este límite es plana, además el potencial químico en la componente 0 es constante.

donde los índices i, j representan a las coordenadas cartesianas x^i y n_r^i apunta en la dirección radial. Es conveniente escribir este resultado en coordenadas esféricas (ver apéndice C) ya que de la sección 3.2 ya se tiene escrito el $T_{\mu\nu}$ en estas coordenadas

$$F_j = \int d\Omega\, r^2(T_{rr}\partial_j r + T_{r\phi}\partial_j\phi) + T_{r\theta}\partial_j\theta|_{r\to\infty} \tag{3.30}$$

donde $\partial_j r = (\cos\phi\ \sin\theta, \sin\phi\ \sin\theta, \cos\theta)$, $\partial_j\phi = r^{-1}(-\sin\phi\ \csc\theta, \cos\phi\ \csc\theta, 0)$ y $\partial_j\theta = r^{-1}(\cos\phi\ \cos\theta, \sin\phi\ \cos\theta, -\sin\theta)$. Debido a la simetría del sistema (es invariante frente a rotaciones en el eje z) la parte espacial del tensor energía-momento en infinito no puede depender de ϕ. Luego como en (3.30) se tienen las derivadas de las coordenadas esféricas, entonces la única componente no nula es la correspondiente a la coordenada x^3 (es decir z). Por lo tanto, desarrollando el ángulo sólido e integrando en ϕ se obtiene:

$$F_j = \delta_{j3}\, 2\pi \int_0^\pi d\theta\, sin\theta\, (r^2\cos\theta\, T_{rr} - r\ \sin\theta\, T_{r\theta})|_{r\to\infty} \tag{3.31}$$

En conclusión, como es de esperarse por la simetría del problema, la fuerza de empuje inducida al sistema por el background de partículas resulta ser en la dirección z (por como se armo el sistema, ver figura 2.1). Ahora solamente resta que calcular explícitamente las componentes T_{rr} y $T_{r\theta}$ del tensor energía-momento del campo.

3.4. Cálculo del Tensor Energía-Momento

Ya se obtuvo en (3.26) el tensor de energía momento para el baño de partículas y antipartículas cargadas a una temperatura finita T con un potencial químico μ. Ahora bien, para determinar la fuerza (3.31) solamente se tienen que calcular las componentes T_{rr} y $T_{r\theta}$. Primero, como se esta interesado en la forma que el $T_{\mu\nu}$ toma cuando $r\to\infty$, entonces viendo el potencial A_μ (1.18) en este límite se tiene:

$$A_\mu = A'_\mu = (\mu, 0, 0, 0) \tag{3.32}$$

Ahora usando (3.26) se obtiene para la componente T_{rr}:

$$T_{rr} = \frac{1}{2}\left(\partial_r\partial'_r + \partial'_r\partial_r - g_{rr}(g^{\alpha\beta}(\partial'_\alpha - ieA_\alpha)(\partial_\beta + ieA_\beta) - m_p^2)\right)\langle :\hat{\Phi}^\dagger(\mathbf{x})\hat{\Phi}(\mathbf{x}'):\rangle|_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}} \tag{3.33}$$

Desarrollando la métrica dada por (1.13),

$$T_{rr} = \frac{1}{2}\Bigg(\partial_r\partial'_r + \cancel{\partial'_r\partial_r} + f(r)^{-1}\Bigg(f(r)^{-1}(\partial'_t - ie\mu)(\partial_t + ie\mu) - \cancel{f(r)\partial'_r\partial_r} - \frac{1}{r^2}\partial'_\theta\partial_\theta - \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\partial'_\phi\partial_\phi - m_p^2\Bigg)\Bigg)\langle :\hat{\Phi}^\dagger(\mathbf{x})\hat{\Phi}(\mathbf{x}'):\rangle|_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}} \tag{3.34}$$

Tomando $f(r)\simeq 1$ (en el límite $r\to\infty$),

$$T_{rr} = \frac{1}{2}\left(\partial'_t\partial_t + ie\mu(\partial'_t - \partial_t) + \partial_r\partial'_r - \frac{1}{r^2}\partial'_\theta\partial_\theta - \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\partial'_\phi\partial_\phi - m_p^2 + e^2\mu^2\right)\times \times\langle :\hat{\Phi}^\dagger(\mathbf{x})\hat{\Phi}(\mathbf{x}'):\rangle|_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}} \tag{3.35}$$

Por otro lado, para la componente $T_{r\theta}$, usando que la métrica es diagonal, inmediatamente se obtiene

$$T_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(\partial_r \partial'_\theta + \partial'_r \partial_\theta\right) \langle : \hat{\Phi}^\dagger(\mathbf{x})\hat{\Phi}(\mathbf{x}') : \rangle \,|_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}} \tag{3.36}$$

Por lo tanto, para obtener estas componentes del tensor energía-momento resta obtener el valor esperado de los campos $\langle : \hat{\Phi}^\dagger(\mathbf{x})\hat{\Phi}(\mathbf{x}') : \rangle$. Como se esta analizando el tensor en una superficie de radio infinito, se esta en la región fuera del espejo ($r_m < r$) por lo que el campo toma la forma $\Phi = \Phi^+$ dado por la ecuación (3.13). En (3.13) se observa como puede separarse el campo en dos términos, donde uno corresponde al campo incidente y el otro al campo dispersado. Entonces para el producto entre estos campos $\langle : \hat{\Phi}^\dagger(\mathbf{x})\hat{\Phi}(\mathbf{x}') : \rangle$ también puede separarse en términos:

$$\begin{aligned}
\langle : \hat{\Phi}^\dagger(\mathbf{x})\hat{\Phi}(\mathbf{x}') : \rangle \,|_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}} &= \langle : [\hat{\Phi}^{scat\dagger}(\mathbf{x}) + \hat{\Phi}^{inc\dagger}(\mathbf{x})][\hat{\Phi}^{scat}(\mathbf{x}') + \hat{\Phi}^{inc}(\mathbf{x}')] : \rangle \,|_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}} \\
&= \Big[\langle : \hat{\Phi}^{scat\dagger}(\mathbf{x})\hat{\Phi}^{scat}(\mathbf{x}') : \rangle + \langle : \hat{\Phi}^{scat\dagger}(\mathbf{x})\hat{\Phi}^{inc}(\mathbf{x}') : \rangle \\
&\quad + \langle : \hat{\Phi}^{inc\dagger}(\mathbf{x})\hat{\Phi}^{scat}(\mathbf{x}') : \rangle + \cancel{\langle : \hat{\Phi}^{inc\dagger}(\mathbf{x})\hat{\Phi}^{inc}(\mathbf{x}') : \rangle}\Big] \,|_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}}
\end{aligned} \tag{3.37}$$

donde el último término se desprecia ya que es cuadrático en los campos incidentes y se esta interesado en una superficie en infinito.

Volviendo al cálculo del tensor energía-momento, usando la misma notación que en la anterior descomposición del producto de los campos, se separa en términos el tensor donde cada parte tiene la misma forma tensorial pero aplicado a distintos campos (incidente o dispersado). Puede escribirse entonces

$$\begin{cases} T_{rr} = T_{rr}^{scat/scat} + T_{rr}^{scat/inc} + T_{rr}^{inc/scat} \\ T_{r\theta} = T_{r\theta}^{scat/scat} + T_{r\theta}^{scat/inc} + T_{r\theta}^{inc/scat} \end{cases} \tag{3.38}$$

donde ahora solamente queda por obtener cada uno de estos términos. Para hacer esto, primero se obtiene cada uno de los valores medios entre los campos (ver detalle en el apéndice D):

$$\begin{aligned}
\langle : \hat{\Phi}^{scat\dagger}(\mathbf{x})\hat{\Phi}^{scat}(\mathbf{x}') : \rangle = \int dk\, k^2 \sum_{\ell,\ell',m} \sum_{\ell''=|m|} \frac{|w_{\ell''}(r_m)|^2}{\pi} \times \\
\times \Bigg[e^{i(\omega_p - e\mu)(t-t')} \frac{v_\ell^*(r) v_{\ell'}(r')}{v_\ell^*(r_m) v_{\ell'}(r_m)} \frac{Y_\ell^{m*}(\theta,\phi) Y_{\ell'}^m(\theta',\phi') O_{\ell\ell''}^* O_{\ell'\ell''}}{(\omega_p - e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p - e\mu}{T}} - 1\right)} \\
+ e^{-i(\omega_p + e\mu)(t-t')} \frac{v_\ell(r) v_{\ell'}^*(r')}{v_\ell(r_m) v_{\ell'}^*(r_m)} \frac{Y_\ell^m(\theta,\phi) Y_{\ell'}^{m*}(\theta',\phi') O_{\ell'\ell''}^* O_{\ell\ell''}}{(\omega_p + e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p + e\mu}{T}} - 1\right)} \Bigg]
\end{aligned} \tag{3.39}$$

$$\langle : \hat{\Phi}^{scat\dagger}(\mathbf{x})\hat{\Phi}^{inc}(\mathbf{x}') : \rangle = \int dk\, k^2 \sum_{\ell,m,\ell'} \frac{|w_{\ell'}(r_m)|^2}{\pi} \times$$
$$\times \left[e^{i(\omega_p - e\mu)(t-t')} \frac{v_\ell^*(r) w_{\ell'}(r')}{v_\ell^*(r_m) w_{\ell'}(r_m)} \frac{Y_\ell^{m*}(\theta,\phi) Y_{\ell'}^m(\theta',\phi') O_{\ell\ell'}^*}{(\omega_p - e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p - e\mu}{T}} - 1\right)} \right.$$
$$\left. + e^{-i(\omega_p + e\mu)(t-t')} \frac{v_\ell(r) w_{\ell'}^*(r')}{v_\ell(r_m) w_{\ell'}^*(r_m)} \frac{Y_\ell^m(\theta,\phi) Y_{\ell'}^{m*}(\theta',\phi') O_{\ell\ell'}}{(\omega_p + e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p + e\mu}{T}} - 1\right)} \right] \tag{3.40}$$

$$\langle : \hat{\Phi}^{inc\dagger}(\mathbf{x})\hat{\Phi}^{scat}(\mathbf{x}') : \rangle = \int dk\, k^2 \sum_{\ell,m,\ell'} \frac{|w_\ell(r_m)|^2}{\pi} \times$$
$$\times \left[e^{i(\omega_p - e\mu)(t-t')} \frac{w_\ell^*(r) v_{\ell'}(r')}{w_\ell^*(r_m) v_{\ell'}(r_m)} \frac{Y_\ell^{m*}(\theta,\phi) Y_{\ell'}^m(\theta',\phi') O_{\ell'\ell}}{(\omega_p - e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p - e\mu}{T}} - 1\right)} \right.$$
$$\left. + e^{-i(\omega_p + e\mu)(t-t')} \frac{w_\ell(r) v_{\ell'}^*(r')}{w_\ell(r_m) v_{\ell'}^*(r_m)} \frac{Y_\ell^m(\theta,\phi) Y_{\ell'}^{m*}(\theta',\phi') O_{\ell'\ell}^*}{(\omega_p + e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p + e\mu}{T}} - 1\right)} \right] \tag{3.41}$$

Ahora que se tienen los valores esperados de los campos, se calculan las componentes del tensor energía-momento que son de interés. Primero se busca obtener T_{rr} dado por (3.35). Para ello se calculan cada uno de los términos en (3.38) reemplazando por los respectivos valores medios (3.39), (3.40) y (3.41). En el apéndice E se detalla este cálculo, donde se obtiene para cada una de las partes de T_{rr}:

$$T_{rr}^{scat/scat} = \int_0^\infty dk \sum_{\ell,\ell',m} \sum_{\ell''=|m|} \frac{|w_{\ell''}(r_m)|^2}{\pi} \frac{k^2}{r^2} e^{i\frac{\pi}{2}(\ell-\ell')} O_{\ell\ell''}^* O_{\ell'\ell''} \frac{Y_\ell^{m*}(\theta,\phi) Y_{\ell'}^m(\theta,\phi)}{v_\ell^*(r_m) v_{\ell'}(r_m)} \times$$
$$\times \left[\frac{1}{(\omega_p - e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p - e\mu}{T}} - 1\right)} + \frac{1}{(\omega_p + e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p + e\mu}{T}} - 1\right)} \right] \tag{3.42}$$

$$T_{rr}^{scat/inc} = \int dk \sum_{\ell,m,\ell'} \frac{|w_{\ell'}(r_m)|^2}{\pi} \frac{k^2}{2r^2} \left[\frac{e^{i\frac{\pi}{2}(\ell-\ell')}}{v_\ell^*(r_m) w_{\ell'}(r_m)} \frac{Y_\ell^{m*}(\theta,\phi) Y_{\ell'}^m(\theta,\phi) O_{\ell\ell'}^*}{(\omega_p - e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p - e\mu}{T}} - 1\right)} \right.$$
$$\left. + \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}(\ell-\ell')}}{v_\ell(r_m) w_{\ell'}^*(r_m)} \frac{Y_\ell^m(\theta,\phi) Y_{\ell'}^{m*}(\theta,\phi) O_{\ell\ell'}}{(\omega_p + e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p + e\mu}{T}} - 1\right)} \right] \tag{3.43}$$

$$T_{rr}^{inc/scat} = \int dk \sum_{\ell,m,\ell'} \frac{|w_\ell(r_m)|^2}{2\pi} \frac{k^2}{r^2} \left[\frac{e^{-i\frac{\pi}{2}(\ell'-\ell)}}{w_\ell^*(r_m) v_{\ell'}(r_m)} \frac{Y_\ell^{m*}(\theta,\phi) Y_{\ell'}^m(\theta,\phi) O_{\ell'\ell}}{(\omega_p - e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p - e\mu}{T}} - 1\right)} \right.$$
$$\left. + \frac{e^{i\frac{\pi}{2}(\ell'-\ell)}}{w_\ell(r_m) v_{\ell'}^*(r_m)} \frac{Y_\ell^m(\theta,\phi) Y_{\ell'}^{m*}(\theta,\phi) O_{\ell'\ell}^*}{(\omega_p + e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p + e\mu}{T}} - 1\right)} \right] \tag{3.44}$$

Entonces, ya se tienen las tres componentes necesarias para calcular la componente T_{rr} del tensor energía-momento según (3.38). Sin embargo, se esta más interesado en como aparece el $T_{\mu\nu}$ en la ecuación de la fuerza (3.31). Por lo tanto, se calcula $r^2 T_{rr}$ y $rT_{r\theta}$ en lugar de simplemente T_{rr} y $T_{r\theta}$. Entonces para obtener la componente $r^2 T_{rr}$ solamente resta juntar las expresiones (3.42), (3.43) y (3.44) (multiplicadas por r^2):

$$r^2 T_{rr} = r^2 T_{rr}^{scat/scat} + r^2 T_{rr}^{scat/inc} + r^2 T_{rr}^{inc/scat}$$
$$r^2 T_{rr} = \int_0^\infty dk \sum_{\ell,\ell',m} \frac{k^2}{\pi} \left\{ \sum_{\ell''=|m|} |w_{\ell''}(r_m)|^2 \, e^{i\frac{\pi}{2}(\ell-\ell')} O_{\ell\ell''}^* O_{\ell'\ell''} \frac{Y_\ell^{m*}(\theta,\phi) Y_{\ell'}^m(\theta,\phi)}{v_\ell^*(r_m) v_{\ell'}(r_m)} \times \right.$$
$$\times \left[\frac{1}{(\omega_p - e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p - e\mu}{T}} - 1\right)} + \frac{1}{(\omega_p + e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p + e\mu}{T}} - 1\right)} \right]$$
$$+ \frac{|w_{\ell'}(r_m)|^2}{2} \frac{e^{i\frac{\pi}{2}(\ell-\ell')}}{v_\ell^*(r_m) w_{\ell'}(r_m)} \frac{Y_\ell^{m*}(\theta,\phi) Y_{\ell'}^m(\theta,\phi) O_{\ell\ell'}^*}{(\omega_p - e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p - e\mu}{T}} - 1\right)}$$
$$+ \frac{|w_\ell(r_m)|^2}{2} \frac{e^{i\frac{\pi}{2}(\ell'-\ell)}}{w_\ell(r_m) v_{\ell'}^*(r_m)} \frac{Y_\ell^m(\theta,\phi) Y_{\ell'}^{m*}(\theta,\phi) O_{\ell'\ell}^*}{(\omega_p + e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p + e\mu}{T}} - 1\right)}$$
$$+ \frac{|w_\ell(r_m)|^2}{2} \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}(\ell'-\ell)}}{w_\ell^*(r_m) v_{\ell'}(r_m)} \frac{Y_\ell^{m*}(\theta,\phi) Y_{\ell'}^m(\theta,\phi) O_{\ell'\ell}}{(\omega_p - e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p - e\mu}{T}} - 1\right)}$$
$$\left. + \frac{|w_{\ell'}(r_m)|^2}{2} \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}(\ell-\ell')}}{v_\ell(r_m) w_{\ell'}^*(r_m)} \frac{Y_\ell^m(\theta,\phi) Y_{\ell'}^{m*}(\theta,\phi) O_{\ell\ell'}}{(\omega_p + e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p + e\mu}{T}} - 1\right)} \right\} \tag{3.45}$$

Afortunadamente puede simplificarse mucho esta expresión intercambiando $\ell \leftrightarrow \ell'$ en el cuarto y sexto renglón de la última igualdad, tal que se escriben todos los armónicos esféricos con los mismos índices $Y_\ell^{m*}(\theta,\phi) Y_{\ell'}^m(\theta,\phi)$ (este intercambio es posible porque se esta sumando sobre todos los valores posibles de ℓ y ℓ'):

$$r^2 T_{rr} = \int_0^\infty dk \sum_{\ell,\ell',m} \frac{k^2}{\pi} \left[\frac{1}{(\omega_p - e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p - e\mu}{T}} - 1\right)} + \frac{1}{(\omega_p + e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p + e\mu}{T}} - 1\right)} \right] \times$$
$$\times e^{i\frac{\pi}{2}(\ell-\ell')} Y_\ell^{m*}(\theta,\phi) Y_{\ell'}^m(\theta,\phi) \mathcal{N}_{\ell\ell'}^m \tag{3.46}$$

donde se define

$$\mathcal{N}^m_{\ell\ell'} = \sum_{\ell''=|m|} \frac{|w_{\ell''}(r_m)|^2}{v^*_\ell(r_m)v_{\ell'}(r_m)} O^{m*}_{\ell\ell''} O^m_{\ell'\ell''} + \frac{1}{2}\frac{|w_{\ell'}(r_m)|^2}{w_{\ell'}(r_m)v^*_\ell(r_m)} O^{m*}_{\ell\ell'} + \frac{1}{2}\frac{|w_\ell(r_m)|^2}{v_{\ell'}(r_m)w^*_\ell(r_m)} O^m_{\ell'\ell} \tag{3.47}$$

Puede observarse una propiedad interesante en la definición de $\mathcal{N}^m_{\ell\ell'}$, al intercambiar $\ell \leftrightarrow \ell'$ se obtiene el conjugado de $\mathcal{N}^m_{\ell\ell'}$, es decir, $\mathcal{N}^m_{\ell\ell'} = (\mathcal{N}^m_{\ell'\ell})^*$ (esto resulta de utilidad más adelante). Además, usando la propiedad del resultado clásico $O^{-m}_{\ell\ell'} = O^m_{\ell\ell'}$ (2.92), se observa que $\mathcal{N}^m_{\ell\ell'}$ satisface la misma propiedad $\mathcal{N}^{-m}_{\ell\ell'} = \mathcal{N}^m_{\ell\ell'}$.

Por otro lado, existe otra componente del tensor energía-momento que en principio es no nula: $T_{r\theta}$. El cálculo para esta componente es completamente análogo al realizado para obtener T_{rr}: se separa el tensor en tres términos (como puede verse en (3.38)), se usa la definición del tensor (3.36), se reemplaza por los correspondientes valores esperados de los campos (ecuaciones (3.39), (3.40) y (3.41)) y finalmente se juntan todos los términos. Al hacer esto (ver apéndice F), resulta que $T_{r\theta}$ tiene un r^{-2} al igual que T_{rr} pero la diferencia es que, según como aparece el $T_{\mu\nu}$ en la fuerza (3.31), ahora se necesita $rT_{r\theta}$. Entonces, se tiene esta otra componente en la fuerza $rT_{r\theta}$ que va como r^{-1} y en consecuencia, como se toma una superficie infinita con $r \to \infty$, se desprecia frente al término $r^2 T_{rr}$.

En conclusión, la única componente del tensor energía-momento que contribuye a la fuerza dada por (3.31) es $r^2 T_{rr}$, el cual viene dado por (3.46). Ahora se esta en condiciones de calcular la fuerza de empuje sobre el sistema BH-espejo (*aka* cohete superradiante de agujero negro).

3.5. Cálculo de la Fuerza de Empuje

Para determinar la fuerza de empuje inducida por el campo radiado sobre el sistema BH-espejo, se usa la expresión obtenida en (3.31). Como se sabe que la única dirección no nula de la fuerza es en el eje z (por la simetría del problema, discutido en la sección 3.3), entonces puede concentrarse en la fuerza en esta dirección:

$$F_3 = 2\pi \int_0^\pi d\theta\, sin\theta\, (r^2 \cos\theta\, T_{rr} - r\, \sin\theta\, T_{r\theta})|_{r\to\infty} \tag{3.48}$$

Primero, como se dijo al final de la sección anterior, nótese que el termino $rT_{r\theta}$ va como r^{-1} por lo que no contribuirá a la fuerza F_3 cuando se toma una superficie infinita con $r \to \infty$. Entonces solamente hay que computar el termino con T_{rr} usando el resultado (3.46):

$$F_3 = 2\pi \int_0^\infty dk \sum_{\ell,\ell',m} \frac{k^2}{\pi} \left[\frac{1}{(\omega_p - e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p - e\mu}{T}} - 1\right)} + \frac{1}{(\omega_p + e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p + e\mu}{T}} - 1\right)} \right] \times$$
$$\times\, e^{i\frac{\pi}{2}(\ell-\ell')} \mathcal{N}^m_{\ell\ell'} \int_0^\pi d\theta\, \sin\theta\, \cos\theta\, Y^{m*}_\ell(\theta,\phi) Y^m_{\ell'}(\theta,\phi) \tag{3.49}$$

Para continuar el cálculo, se necesita usar la integral (ver apéndice G):

$$\int_0^\pi d\theta\ \sin\theta\ \cos\theta\, Y_\ell^{m*}(\theta,\phi)Y_{\ell'}^m(\theta,\phi) = \frac{1}{2\pi}\left(\delta_{\ell,\ell'-1}\sqrt{\frac{(\ell'-m)(\ell'+m)}{(2\ell'+1)(2\ell'-1)}}\right.$$
$$\left.+\delta_{\ell-1,\ell'}\sqrt{\frac{(\ell-m)(\ell+m)}{(2\ell+1)(2\ell-1)}}\right) \tag{3.50}$$

Reemplazando todo en la fuerza (3.49), se tiene

$$F_3 = \int_0^\infty dk\,\frac{k^2}{\pi}\left[\frac{1}{(\omega_p-e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p-e\mu}{T}}-1\right)}+\frac{1}{(\omega_p+e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p+e\mu}{T}}-1\right)}\right]\times$$
$$\times\sum_{\ell,\ell',m} e^{i\frac{\pi}{2}(\ell-\ell')}\left(\delta_{\ell,\ell'-1}\sqrt{\frac{(\ell'-m)(\ell'+m)}{(2\ell'+1)(2\ell'-1)}}+\delta_{\ell-1,\ell'}\sqrt{\frac{(\ell-m)(\ell+m)}{(2\ell+1)(2\ell-1)}}\right)\mathcal{N}_{\ell\ell'}^m \tag{3.51}$$

Usando las deltas y simplificando, se obtiene

$$F_3 = -\frac{i}{\pi}\int_0^\infty dk\,k^2\left[\frac{1}{(\omega_p-e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p-e\mu}{T}}-1\right)}+\frac{1}{(\omega_p+e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p+e\mu}{T}}-1\right)}\right]\times$$
$$\times\sum_m\left(\sum_{\ell'=|m|}\sqrt{\frac{(\ell'-m)(\ell'+m)}{(2\ell'+1)(2\ell'-1)}}\mathcal{N}_{\ell'-1,\ell'}^m-\sum_{\ell=|m|}\sqrt{\frac{(\ell-m)(\ell+m)}{(2\ell+1)(2\ell-1)}}\mathcal{N}_{\ell,\ell}^m\right) \tag{3.52}$$

donde $\mathcal{N}_{\ell,\ell-1}^m$ y $\mathcal{N}_{\ell,\ell+1}^m$ vienen dados por su definición (3.47). Como en cada término se suman sobre todos los ℓ y ℓ' posibles, estos índices son mudos, por lo tanto puede tomarse simplemente $\ell'=\ell$. Luego, $\mathcal{N}_{\ell,\ell-1}^m$ resulta por su definición hermítico, obteniendo

$$F_3 = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty dk\,k^2\left[\frac{1}{(\omega_p-e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p-e\mu}{T}}-1\right)}+\frac{1}{(\omega_p+e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p+e\mu}{T}}-1\right)}\right]\times$$
$$\times\sum_m\sum_{\ell=|m|}\sqrt{\frac{(\ell-m)(\ell+m)}{(2\ell+1)(2\ell-1)}}\mathfrak{Im}\left[\mathcal{N}_{\ell,\ell-1}^m\right] \tag{3.53}$$

Analizando un poco este resultado, se obtiene una sumatoria sobre todos los valores posibles de m, es decir (por lo visto en la sección 2.2.3) $m\in\mathbb{Z}-\{0\}$. Sin embargo, se observa que el índice m es par en el sumando ya que la sumatoria en ℓ depende del valor absoluto $|m|$, la raíz resulta la misma frente al cambio $m\to -m$ y $\mathcal{N}_{\ell\ell'}^{-m}=\mathcal{N}_{\ell\ell'}^m$ (como se ve al definir (3.47)). Por lo tanto, sumar sobre el índice m para $\mathbb{Z}^+$ o para $\mathbb{Z}^-$ resulta lo mismo, entonces se toma $m>0$ y se multiplica por 2, obteniendo

finalmente la fuerza del cohete de BH:

$$F_3 = -\frac{4}{\pi}\int_0^\infty dk\, k^2 \left[\frac{1}{(\omega_p - e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p - e\mu}{T}} - 1\right)} + \frac{1}{(\omega_p + e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p + e\mu}{T}} - 1\right)}\right] \times \\ \times \sum_{m>0}\sum_{\ell=m} \sqrt{\frac{(\ell^2 - m^2)}{(4\ell^2 - 1)}}\, \mathfrak{Im}\left[\mathcal{N}^m_{\ell,\ell-1}\right] \tag{3.54}$$

donde m y $\ell \in \mathbb{Z}^+$. Para analizar numéricamente este resultado, resultara útil escribir esta última expresión en términos de las funciones radiales $u_\ell(r)$, $v_\ell(r)$ y $w_\ell(r)$ que satisfacen las condiciones de contorno y que se obtienen numéricamente. En el apéndice H se desarrolla este procedimiento, de donde resulta:

$$\mathcal{N}^m_{\ell,\ell-1} = \frac{1}{k^2 r_m^4 f(r_m)^2}\frac{1}{v^*_\ell(r_m) v_{\ell-1}(r_m)} \sum_{\ell''=|m|} \frac{\left[(M^{-1})^m \gamma^m\right]^*_{\ell\ell''}\left[(M^{-1})^m \gamma^m\right]_{\ell-1,\ell''}}{|v_{\ell''}(r_m)|^2} \\ + \frac{i}{2kr_m^2 f(r_m)}\frac{1}{v^*_\ell(r_m) v_{\ell-1}(r_m)}\left(\left[(M^{-1})^m \gamma^m\right]_{\ell-1,\ell} - \left[(M^{-1})^m \gamma^m\right]^*_{\ell,\ell-1}\right) \tag{3.55}$$

Es decir, se logra escribir $\mathcal{N}^m_{\ell,\ell-1}$ en términos únicamente de las soluciones radiales evaluadas en el espejo ($v_\ell(r_m)$ y $u_\ell(r_m)$, esta última solo se encuentra dentro de la definición de $(M^{-1})^m$) y de las γ^m que son matrices de coeficientes definidas en (2.79).

En conclusión, se estudia la configuración BH-espejo semiesférico en un baño térmico considerando así partículas y antipartículas cuantizadas incidentes desde todas direcciones y energías. A partir del tensor energía-momento de este sistema, se obtiene la fuerza total (3.54) realizada por el sistema a una esfera de radio infinita que encierra a todo el sistema. La forma de la configuración y el echo de que exista una fuerza resultante no nula, motiva el nombre de cohete superradiante de BH. En la próxima sección se analizan los resultados obtenidos analíticamente tanto de esta sección como de la anterior mediante un análisis numérico.

4. Resultados Numéricos

En esta sección se desarrolla el análisis numérico de los resultados obtenidos en las secciones previas. Se comienza con las soluciones $u_\ell(r)$, $v_\ell(r)$ y $w_\ell(r)$ de la ecuación radial (2.20), tal que la primera satisface la condición de contorno en el horizonte del BH (estudiada en la sección 2.2.1) y las últimas dos satisfacen la condición de contorno en infinito (sección 2.2.2). Luego, se obtiene numéricamente el resultado de imponer la condición de contorno en el espejo ($O_{\ell\ell'}$, definida en (2.91)), en particular, se analiza el campo resultante en todo el espacio debido a una onda plana incidente con determinado ángulo de incidencia y energía. Finalmente, se obtiene una estimación de la fuerza sobre el sistema BH-Espejo (cohete de BH) para los valores del sistema propuestos.

4.1. Soluciones radiales

En la sección 2.1 se encuentra la ecuación radial que se quiere resolver numéricamente:

$$\frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2 f(r)\partial_r R_{\ell\omega}(r)\right) + \left(\frac{(\omega + e\,h(r))^2}{f(r)} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - m_p^2\right) R_\ell(r) = 0 \tag{2.20}$$

donde $f(r)$ es el término de la métrica de RN

$$f(r) = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) \tag{1.14}$$

y $h(r)$ es el potencial

$$h(r) = -\frac{Q}{r} + \mu \tag{1.19}$$

presentadas ambas en la sección 1.3.1. Para trabajar con esta ecuación, se comienza asignando valores constantes a las variables que caracterizan al background (masa de la partícula m_p, carga de la partícula e y potencial químico del background μ) y al BH (su masa M y su carga Q que determinan su horizonte exterior r_+), como se muestra en la tabla 4.1. El criterio utilizado para la elección de estos parámetros fue primero la condición de superradiancia hallada en la sección 2.2.1,

$$\omega < \omega_s \tag{4.1}$$

donde ya se define la frecuencia superradiante

$$\omega_s = -e\,h(r_+) \tag{2.27}$$

y la relación de dispersión

$$\omega = \pm\sqrt{k^2 + m^2} - e\mu = \pm\omega_p - e\mu \tag{3.1}$$

donde para simplificar las expresiones se llama $\omega_p = \sqrt{k^2 + m^2}$ (es la relación de dispersión usual de una onda plana). En la figura 4.1 se grafican las relaciones de dispersión (línea roja y azul para partículas y antipartículas respectivamente) y la frecuencia superradiante en función de k, donde se identifican los modos superradiantes como aquellos cuya energía se encuentra dentro de la zona sombreada verde. Se observa que para los valores propuestos se tiene tanto modos superradiantes como otros que no, tanto para partículas como para antipartículas.

Primero se obtienen las soluciones numéricas de (2.20) que satisfacen la condición de contorno en el BH, y segundo en infinito.

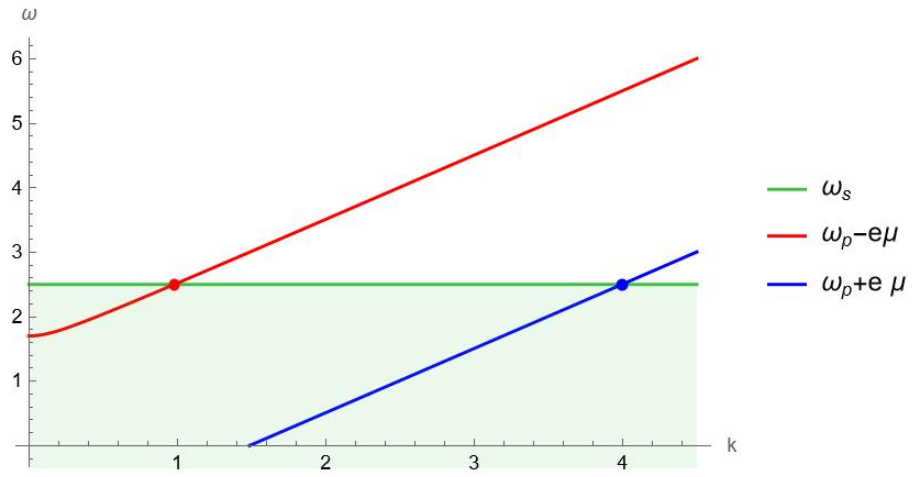


Figura 4.1: Representación gráfica de la región de superradiación donde se satisface la condición $\omega < \omega_s$ (región sombreada verde) y de las energías de las partículas y antipartículas (líneas roja y azul respectivamente) dadas por la relación de dispersión (3.1) (el signo + corresponde a partículas mientras que el signo − corresponde a antipartículas). Entonces, para valores de k tales que ω esta en la región sombreada se tienen modos superradiantes, mientras que arriba de esta región se tienen partículas incidentes que no superradian en el BH. El intervalo $k \in (0, 4.5)$ del gráfico indica los valores de k que se consideran en la determinación de la fuerza (la razón del cut off en k se ve en la figura 4.9). Los puntos rojos y azules corresponden a la intersección entre las curvas de energía y la frecuencia superradiante, estos valores son $k \approx 0.98$ y $k \approx 4$ respectivamente. Los valores utilizados para obtener este gráfico se encuentran en la tabla 4.1.

Background						BH			
r_m	T	μ	e	m_p	r_∞	M	Q	r_+	r_0
160	0.5	−1.5	1	0.2	10^4	50	40	80	80.04

Tabla 4.1: Valores de las constantes que caracterizan al sistema elegidos, donde: r_m es la distancia radial a la que se coloca el espejo, T y μ son la temperatura y el potencial químico del baño térmico, e y m_p son la carga y la masa de las partículas y antipartículas que conforman el baño térmico, r_∞ es la distancia radial que se considera como "infinito" (ya que las soluciones toman su forma asintótica), M y Q son la masa y la carga del BH, r_+ es el horizonte exterior del BH (resultante de su M y Q) y r_0 es el punto cercano al horizonte donde se encuentra la solución a partir del desarrollo de Frobenius.

4.1.1. Solución en el horizonte

Para resolver la ecuación 2.20 numéricamente se utiliza el comando *NDSolve* del Wolfram Mathematica 12.3 [Wolfram-Research 2019]. Primero se obtienen las soluciones a esta ecuación que satisfacen la condición de contorno en el horizonte exterior r_+ del BH, es decir $u_\ell(r)$. Sin embargo, hay que tener cuidado en el horizonte $r = r_+$ ya que hay una singularidad debido a que, por definición, r_+ es un raíz de $f(r)$. Esta singularidad imposibilita la resolución numérica porque se necesita un valor inicial para resolver la ecuación y, en este caso, es una singularidad. La manera de evitar esta singularidad es usando el método de Frobenius para obtener un valor de $R_\ell(r)$ en un punto cercano al horizonte. Mientras más lejos de la singularidad se este mejor, y de esto depende el orden hasta el que se tome el desarrollo de Frobenius. En este caso, se utiliza un desarrollo a orden 4. Este desarrollo deja dos soluciones linealmente independientes, para saber cual es la correcta se usa la condición de contorno en el horizonte (2.34), la cual dice que signo tomar en la raíz obtenida

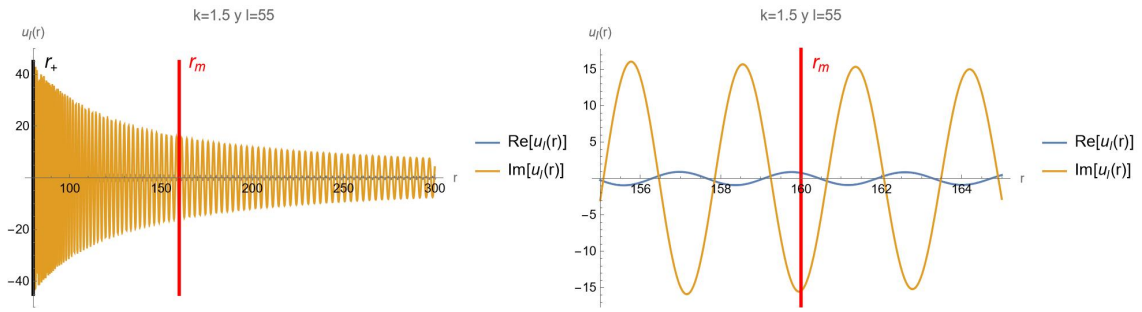


Figura 4.2: Soluciones $u_\ell(r)$ (parte real e imaginaria) de la ecuación (2.20) obtenida numéricamente usando los parámetros de la tabla 4.1 e imponiendo la condición de contorno correspondiente al BH. La línea vertical negra indica donde se encuentra el horizonte exterior r_+, mientras que la línea roja indica la distancia radial r_m donde se coloca el espejo semiesférico perfecto. En el panel derecho se tiene un zoom de la región cercana a donde se coloca el espejo. Se gráfica para un valor de $k = 1.5$ tal que no haya superradianza (como se muestra en la figura 4.1, donde se esta en el caso de partículas) y un valor arbitrario $\ell = 55$.

mediante la ecuación indicial (ya sea que haya superradiación o no). Finalmente, con este nivel de aproximación se logra evaluar $R_\ell(r_0)$ usando el desarrollo de Frobenius, donde $r_0 = r_+ + 0.04 = 80.04$ (usando los valores de la tabla 4.1) es el nuevo punto inicial para la resolución numérica. El valor de r_0 tiene un rango de validez ya que a medida que aumenta k la aproximación realizada en el desarrollo de Frobenius comienza a fallar, luego o hay que tomar un mayor orden en el desarrollo o hay que disminuir r_0 y por ende acercarse a la singularidad. En el rango de valores k en el que se trabaja ($k \in (0, 4.5)$) se verifica que el r_0 elegido es una buena aproximación para todo k.

Ahora si se obtiene la solución numérica $u_\ell(r)$ que satisface la condición de contorno en el horizonte r_+. En la figura 4.2 se encuentra la solución numérica obtenida para el valor de $k = 1.5$ (tal que no hay superradianza como se indica en la figura 4.1 para el caso de partículas) y $\ell = 55$ (este valor es arbitrario, cuando se calcule la fuerza se define un cut off en ℓ). Se observa en la figura que esta función es oscilatoria, a medida que se acerca al BH oscila cada vez más rápidamente y a medida que aleja se comporta como una onda esférica satisfaciendo también la condición en infinito.

4.1.2. Solución en infinito

El procedimiento para resolver numéricamente la ecuación (2.20) cuyas soluciones satisfacen la condición de contorno en infinito coincide en principio con el caso del BH, donde se necesita un valor inicial para empezar con el cálculo numérico. Para ello, se usa el comportamiento asintótico estudiado en la sección 2.2.2 de las funciones $w_\ell(r)$ y $v_\ell(r)$, los cuales resulta para la onda plana incidente

$$w_\ell(r) \simeq j_\ell(kr) \tag{2.52}$$

mientras que para la parte dispersada

$$v_\ell(r) \simeq h_\ell^{(1)}(kr) \tag{2.47}$$

Entonces, evaluando estas funciones en un valor de r lo suficientemente grande como para considerarlo como infinito (como se ve más adelante), se obtienen los

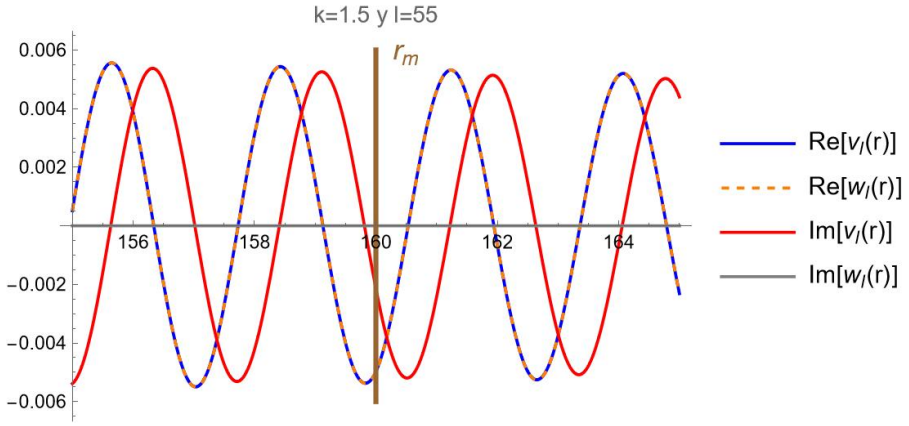


Figura 4.3: Soluciones $v_\ell(r)$ y $w_\ell(r)$ de la ecuación (2.20) (partes reales e imaginarias), obtenidas numéricamente imponiendo la condición de contorno correspondiente cuando $r \to \infty$. La línea vertical marrón indica la distancia radial r_m donde se coloca el espejo semiesférico perfecto. Se grafica en particular en la zona cercana al espejo, donde se observa que las partes reales de $v_\ell(r)$ y $w_\ell(r)$ coinciden completamente (líneas azul y naranja), además la parte imaginaria de $w_\ell(r)$ es nula, lo que se corresponde con el resultado $w_\ell(r) = \mathfrak{Re}[v_\ell(r)]$ (ec. (2.57)). Para el gráfico se toman los valores arbitrarios $k = 1.5$ y $\ell = 55$, mientras que para los demás parámetros que caracterizan al sistema se usan los valores de la tabla 4.1.

valores iniciales para la resolución numérica. Sin embargo, este procedimiento no funciona bien, el infinito no se puede poner muy lejos porque se encuentra otra singularidad numérica. Alternativamente se hace un procedimiento inverso, en lugar de imponer los valores iniciales tanto para $R_\ell(r)$ como para $R'_\ell(r)$ en un valor lejos de la geometría de RN, se imponen valores iniciales a una distancia $r = r_m$ donde se encuentra el espejo y desde ahí se integra numéricamente hasta "infinito". Sin embargo, los valores impuestos en el espejo no son los correspondientes al comportamiento asintótico (2.52) y (2.47), entonces para obtener estas funciones se ajusta a la solución numérica en "infinito" usando la Bessel (ya que $w_\ell(r)$ y $v_\ell(r)$ son Bessel esféricas o combinación de estas). Como en particular para el cálculo de la fuerza se esta interesado en los valores que toman estas funciones en el espejo, se obtienen los coeficientes de este ajuste que determinan estos valores. En el apéndice I se desarrolla este método y se analiza su validez, proponiendo un buen valor de r lo suficientemente grande (que se llama r_∞, ver tabla 4.1) tal que podemos considerar que las funciones $w_\ell(r)$ y $v_\ell(r)$ toman su forma asintótica.

A partir del método descripto en el párrafo anterior, se obtienen la soluciones numéricas $w_\ell(r)$ y $v_\ell(r)$ como puede verse en la figura 4.3, donde se toma a modo de ejemplo $k = 1.5$ y $\ell = 55$ y se grafica en la zona cercana al espejo semiesférico perfecto colocado. En este gráfico puede observase que, como se indico en la sección 2.2.2, $w_\ell(r) = \mathfrak{Re}[v_\ell(r)]$, por esta razón, en el gráfico 4.4 solamente se muestra el comportamiento asintótico de la función $v_\ell(r)$, donde se ve que coincide por el dado en (2.47).

4.2. Matching en el espejo

Habiendo obtenido las soluciones numéricas que satisfacen las condiciones de contorno en el BH r_+ y en el infinito r_∞, ahora resta proceder con las condiciones de contorno impuestas por el espejo semiesférico perfecto colocado a una distancia $r_m = 160$ estudiada en la sección 2.2.3. En dicha sección, se obtiene el resultado de

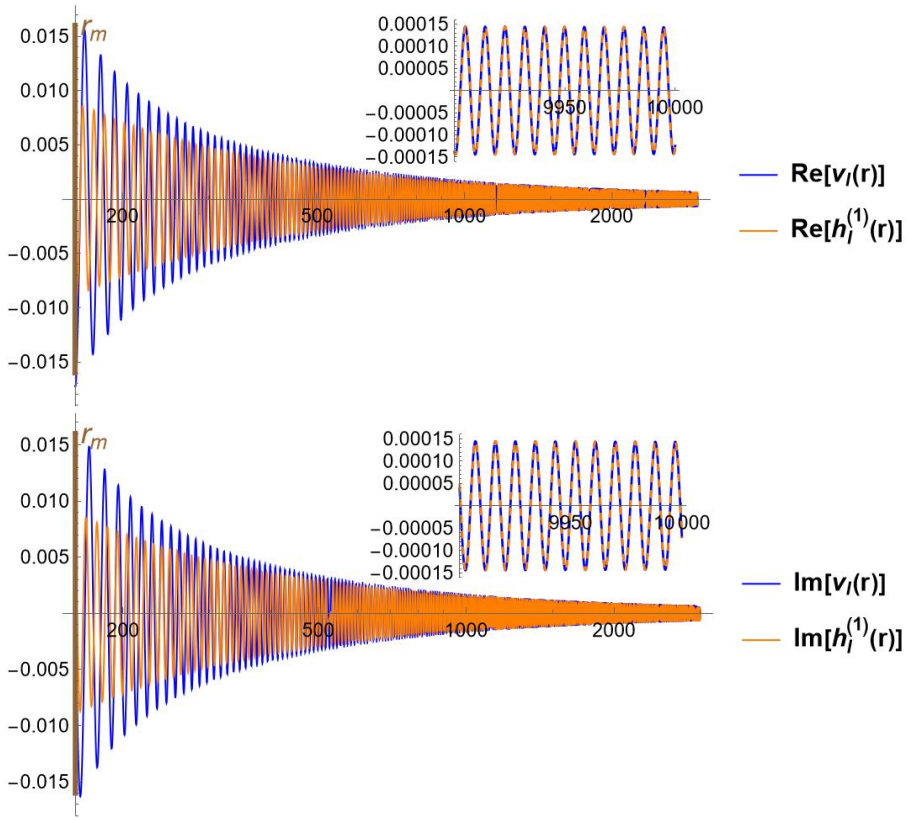


Figura 4.4: Parte real e imaginaria de la solución $v_\ell(r)$ (línea azul) y de la función de Hankel esférica de primera especie $h_\ell^{(1)}(r)$ (línea naranja). Se observa que a medida que se aleja de la posición del espejo r_m (línea vertical marrón), es decir que se aleja de la geometría de RN, efectivamente la solución se comporta como una función de Hankel satisfaciendo así la condición de contorno en infinito, como puede verse en los subgráficos. Los gráficos se encuentran en escala logarítmica, mientras que los subgráficos que hacen un acercamiento a medida que se acerca al valor r_∞ que se toma como infinito estan a escala lineal. Para el gráfico se toman los valores arbitrarios $k = 0.7$ y $\ell = 5$, mientras que para los demás parámetros que caracterizan el sistema, se usan los valores de la tabla 4.1.

la dispersión de un campo incidente en todo el espacio (fuera del BH):

$$\Phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} \Phi^-(\mathbf{x}) & \text{si} \quad r_+ < r \leq r_m \\ \Phi^+(\mathbf{x}) & \text{si} \quad r_m \leq r \end{cases} \tag{4.2}$$

donde $\Phi^+(\mathbf{x}) = \Phi^{inc}(\mathbf{x}) + \Phi^{scat}(\mathbf{x})$ y cada uno de estos campos viene dado por:

$$\begin{cases} \Phi^-(\mathbf{x}) = e^{-i\omega t} \sum_{\ell,m} a_\ell^m \dfrac{u_\ell(r)}{u_\ell(r_m)} Y_\ell^m(\theta,\phi) & (2.41) \\ \Phi^{scat}(\mathbf{x}) = e^{-i\omega t} \sum_{\ell,m} b_\ell^m \dfrac{v_\ell(r)}{v_\ell(r_m)} Y_\ell^m(\theta,\phi) & (2.48) \\ \Phi^{inc}(\mathbf{x}) = e^{-i\omega t} \sum_{\ell,m} c_\ell^m \dfrac{w_\ell(r)}{w_\ell(r_m)} Y_\ell^m(\theta,\phi) & (2.53) \end{cases}$$

En el caso de una onda incidente plana, los coeficientes c_ℓ^m en el desarrollo del campo incidente están completamente determinados por el ángulo de incidencia $\check{n}$ y

del impulso k:

$$c_\ell^m = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}\ell}}{2\pi^2\sqrt{2\omega}} A_{\vec{k}} Y_\ell^{m*}(\check{n}) w_\ell(r_m) \tag{2.54}$$

Entonces, usando los resultados de la sección 2.2.3, se obtiene el resto de los coeficientes a_ℓ^m y b_ℓ^m del campo,

$$\begin{cases} a_\ell^m = \displaystyle\sum_{\ell'=|m|}^{\infty} c_{\ell'}^m U_{\ell\ell'}^m & (2.88) \\ b_\ell^m = \displaystyle\sum_{\ell'=|m|}^{\infty} c_{\ell'}^m \left(U_{\ell\ell'}^m - \delta_{\ell\ell'}\right) & (2.90) \end{cases}$$

donde

$$U_{\ell\ell'}^m = \left[(\gamma^m - \mathbf{1})^{-1}(H^D)^{-1}(\gamma^m - \mathbf{1})^{-1}\gamma^m I^D\right]_{\ell\ell'} \tag{2.86}$$

con H^D y I^D matrices diagonal cuyos elementos vienen dados por

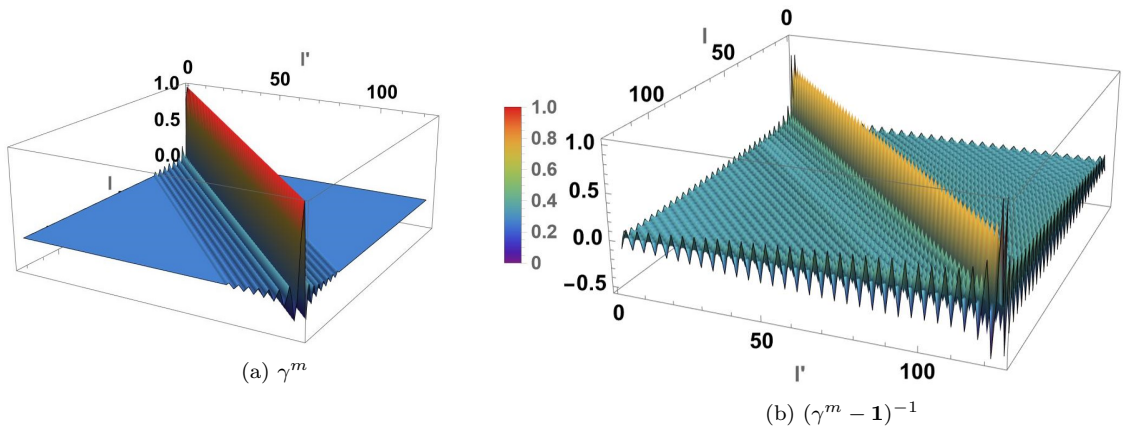
$$\begin{cases} H_\ell^{-1} = \dfrac{u_\ell(r_m)v_\ell(r_m)}{u_\ell'(r_m)v_\ell(r_m) - u_\ell(r_m)v_\ell'(r_m)} & (4.3) \\ I_\ell \quad = -\dfrac{i}{kr_m^2 f(r_m)} \dfrac{1}{w_\ell(r_m)v_\ell(r_m)} & (2.75) \end{cases}$$

donde se usa la definición 2.72 de H_ℓ para escribir su inversa. Además, se tiene que

$$\gamma_{\ell\ell'}^m = \begin{cases} \sqrt{(2\ell+1)(2\ell'+1)\frac{(\ell-m)!(\ell'-m)!}{(\ell+m)!(\ell'+m)!}} \int_0^1 P_\ell^m(x)P_{\ell'}^m(x) & \text{si } \ell'-\ell \text{ impar} \\ 0 & \text{si } \ell'-\ell \text{ par (con } \ell \neq \ell') \\ 1 & \text{si } \ell' = \ell \end{cases} \tag{2.79}$$

En resumen, una vez propuesto un ángulo de incidencia y amplitud se tienen completamente determinados los coeficientes c_ℓ^m, luego se obtienen los coeficientes a_ℓ^m y b_ℓ^m usando las matrices U^m. El comportamiento de estas matrices esta determinado simplemente por las matrices de coeficientes γ^m (y en consecuencia de $(\gamma^m - \mathbf{1})^{-1}$) y de los elementos I_ℓ y H_ℓ que, por sus definiciones, son combinación de las soluciones radiales u_ℓ^m, v_ℓ^m y w_ℓ^m evaluadas en el espejo r_m (ya obtenidas numéricamente en las secciones anteriores). Primero, observando los elementos de matriz $\gamma_{\ell\ell'}^m$ y $(\gamma^m - \mathbf{1})_{\ell\ell'}^{-1}$ resulta que pueden tomarse 2 aproximaciones: (i) $\gamma_{\ell\ell'}^m$ tiene 1 en su diagonal principal y luego disminuye de manera alternada a medida que nos alejamos de la diagonal, luego se toman solo 30 elementos de un lado y del otro de la diagonal principal y al resto se los consideran todos nulos, y (ii) se toman que los elementos $\gamma_{\ell\ell'}^m$ prácticamente no dependen de m. Estas aproximaciones se discuten en detalle en el apéndice J, luego las $\gamma_{\ell\ell'}^m$ y $(\gamma^m - \mathbf{1})_{\ell\ell'}^{-1}$ resultantes son de la forma presente en las figuras 4.5a y 4.5b respectivamente. Como ya fue mencionado, los elementos de estas matrices son coeficientes que dependen de ℓ, ℓ' y m pero no dependen de los parámetros del sistema (como los presentes en la tabla 4.1) ni de las características del campo incidente (es decir del impulso k y del ángulo de incidencia $\check{n}$)

Por otro lado, se estudian los elementos H_ℓ^{-1} e I_ℓ. Si bien se obtiene que el resultado depende tanto de H_ℓ^{-1} como de I_ℓ, primero se estudia H_ℓ^{-1} ya que la fuerza total obtenida en la sección 3.5 solo depende explícitamente de este. En la



(a) γ^m

(b) $(\gamma^m - \mathbf{1})^{-1}$

Figura 4.5: Representación gráfica de las matrices de coeficientes γ^m y $(\gamma^m - \mathbf{1})^{-1}$ con $m = 1$ (figuras 4.5a y 4.5b respectivamente). Para obtener γ^m se toman las aproximaciones discutidas en detalle en el apéndice J, luego usando esta matriz se obtiene la matriz $(\gamma^m - \mathbf{1})^{-1}$. Puede observarse que los elementos $(\gamma^m - \mathbf{1})^{-1}_{\ell\ell'}$ mantienen la paridad de $(\gamma^m - \mathbf{1})_{\ell\ell'}$, es decir que para $\ell' - \ell$ par se tienen elementos nulos.

figura 4.6 se muestra la H_ℓ^{-1} para un valor fijo en k (ya que estos elementos si dependen de k). Primero se observa la existencia de un pico para cierto valor de ℓ a k fijo, este pico puede entenderse utilizando la ecuación radial,

$$\frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2 f(r)\partial_r R_{\ell\omega}(r)\right) + \left(\frac{(\omega + e\,h(r))^2}{f(r)} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - m_p^2\right) R_\ell(r) = 0 \tag{2.20}$$

Ahora bien, puede escribirse esta ecuación como un sistema de primer orden, para ello se define

$$y_\ell(r) = r^2 f(r)\partial_r R_\ell(r) \tag{4.4}$$

Usando esta definición y la ecuación radial, podemos escribir entonces el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y_\ell'(r) = -r^2\left(\dfrac{(\omega + eh(r))^2}{f(r)} - \dfrac{\ell(\ell+1)}{r^2} - m_p^2\right) R_\ell(r) & (4.5) \\ R_\ell'(r) = \dfrac{y_\ell(r)}{r^2 f(r)} & (4.6) \end{cases}$$

Nótese que cuando el paréntesis $\left(\frac{(\omega+eh(r))^2}{f(r)} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - m^2\right)$ se anula para cierto valor de ℓ (con k y r fijo) entonces la derivada $y_\ell'(r)$ se anula, luego en este punto se tiene un mínimo de $R_\ell'(r)$. Por lo tanto, como en el denominador de H_ℓ^{-1} (definido en (4.3)) las funciones $u_\ell'(r_m)$ y $v_\ell'(r_m)$ tienen un mínimo, su inversa H_ℓ^{-1} tiene un máximo para este valor de ℓ (llamado ℓ_{pico}), definido como:

$$\frac{(\omega + eh(r_m))^2}{f(r_m)} - \frac{\ell_{pico}(\ell_{pico}+1)}{r_m^2} - m_p^2 = 0 \tag{4.7}$$

Este argumento se verifica numéricamente en la figura 4.6, donde se observa que el pico esperado se corresponde con el pico obtenido numéricamente. La existencia de este pico sirve para definir un corte en los valores de ℓ. Por otro lado, en la figura 4.6 se observa un comportamiento preocupante: la parte real de estos elementos no decae lo suficientemente rápido a medida que crece ℓ. Esto dificulta el análisis numérico

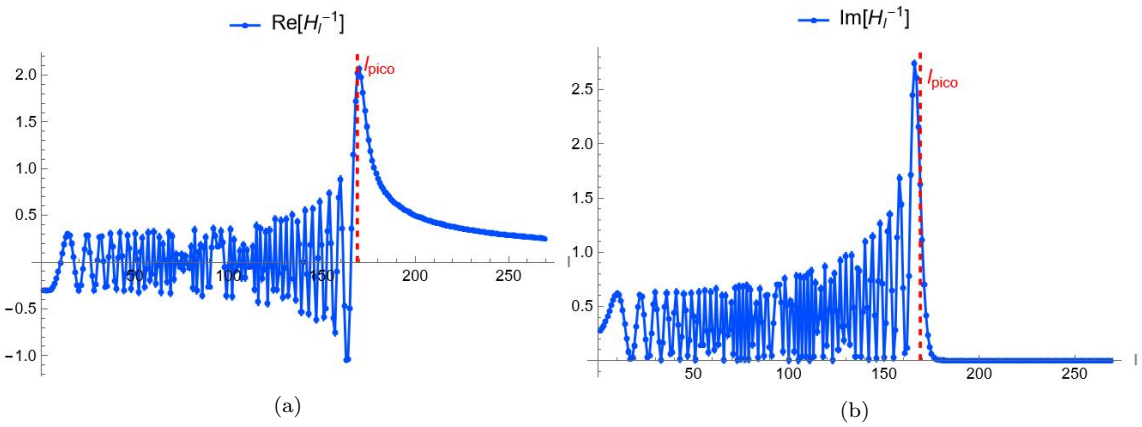


Figura 4.6: Representación gráfica de las partes reales e imaginaria de los elementos H_ℓ^{-1} tomando un valor fijo de $k = 1.2$. Además, se muestra mediante la línea vertical punteada la posición donde se espera que esté el pico por el argumento dado en 4.7, para el cual se observa que en ambos casos se corresponde con el pico obtenido numéricamente. Se observa también que la parte real (a) no decae rápidamente después de este pico, mientras que la parte imaginaria (b) si lo hace.

ya que, si bien se encuentra un argumento para hallar el pico, no parece haber un cut off claro o un dominio predominante tal que pueda cortarse la sumatoria en ℓ. Sin embargo, resulta de la siguiente sección que, al considerar el baño térmico, el resultado de la fuerza depende tanto de H_ℓ^{-1} como de I_ℓ que tiene definido el mismo pico para su parte real e imaginaria y se anula rápidamente (a diferencia de H_ℓ^{-1} que solo su parte imaginaria se anula rápidamente), por ende puede definirse un cut off en ℓ usando el argumento del párrafo anterior para identificar el pico (como se observa en la figura 4.6). Por lo tanto, para estudiar la solución clásica obtenida a partir de la dispersión de una onda plana, se usa como ℓ máximo (ℓ_{max}) el ℓ_{pico} analizado anteriormente más 10, es decir $\ell_{max} = \ell_{pico} + 10$ (se suma 10 porque, como vemos en la figura 4.6, a partir del pico en la parte imaginaria con tomar 10 valores más en ℓ alcanza para considerar que se anula luego de este ℓ_{max}).

Por último, en la figura 4.7 se muestra el comportamiento de H_ℓ^{-1} e I_ℓ en función de los valores de k usando el corte en ℓ_{max} (el cual aumenta con k). Se observa como el valor de ℓ_{pico} aumenta con k, sin embargo el razonamiento planteado para identificar teóricamente estos picos se corresponde con los picos obtenidos numéricamente.

Ahora que se comprenden las partes que conforman la solución, finalmente se estudia el resultado de incidir una onda plana sobre el sistema BH-espejo, el cual sirve para comprender el funcionamiento del cohete superradiante de BH. Para ello, se utilizan las aproximaciones previamente introducidas que son válidas tanto en este caso como también para el cálculo de la fuerza, es decir las aproximaciones realizadas sobre las matrices de elementos $\gamma^m_{\ell\ell'}$ y el cut off ℓ_{max} definido usando I_ℓ (estas aproximaciones se analizan en el apéndice K a partir de los resultados obtenidos para la fuerza). Entonces, suponiendo que incide una onda plana con las características de la tabla 4.2 se eligen los campos $\Phi_s^{inc}(\mathbf{x})$ y $\Phi_{ns}^{inc}(\mathbf{x})$ tal que superradía y no superradía respectivamente. Luego, considerando estados estacionario (sin la dependencia temporal en los campos (4.2)), se obtienen los coeficientes de los campos y en consecuencia el campo resultante en todo el espacio. En las subfiguras 4.8 se observa en particular el campo en la dirección de incidencia para los distintos valores de k elegidos, se grafican tanto las partes reales como las imaginarias del campo, como también el modulo cuadrado del campo. En las figuras se observa como se cumple

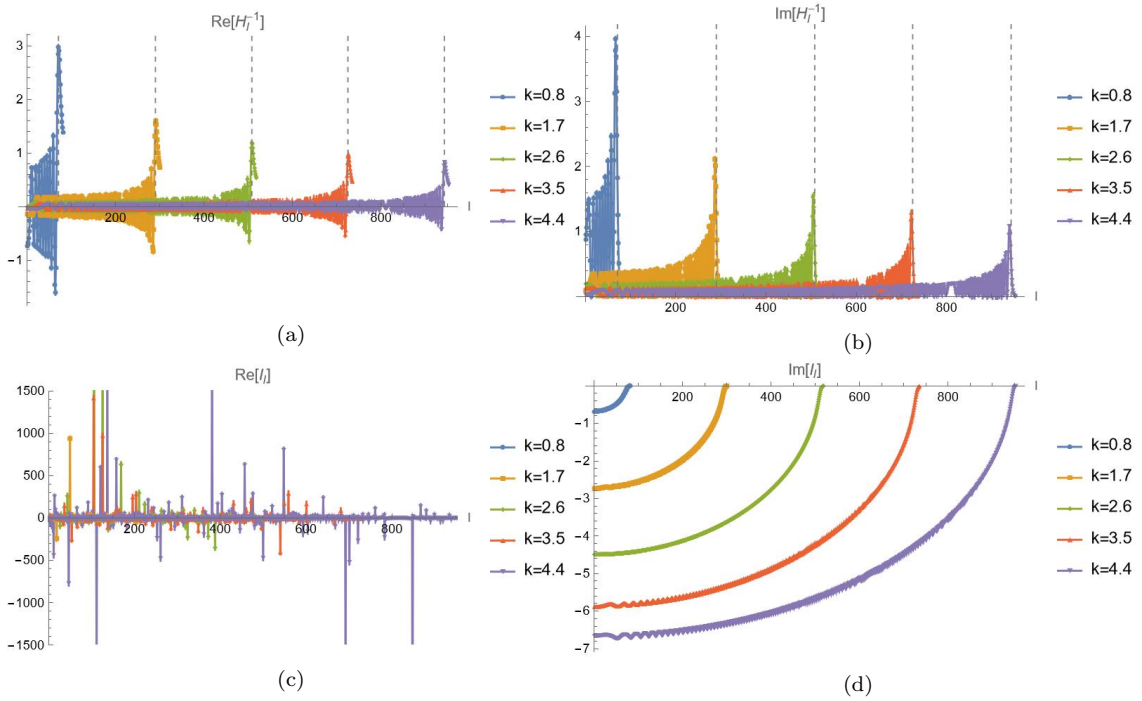
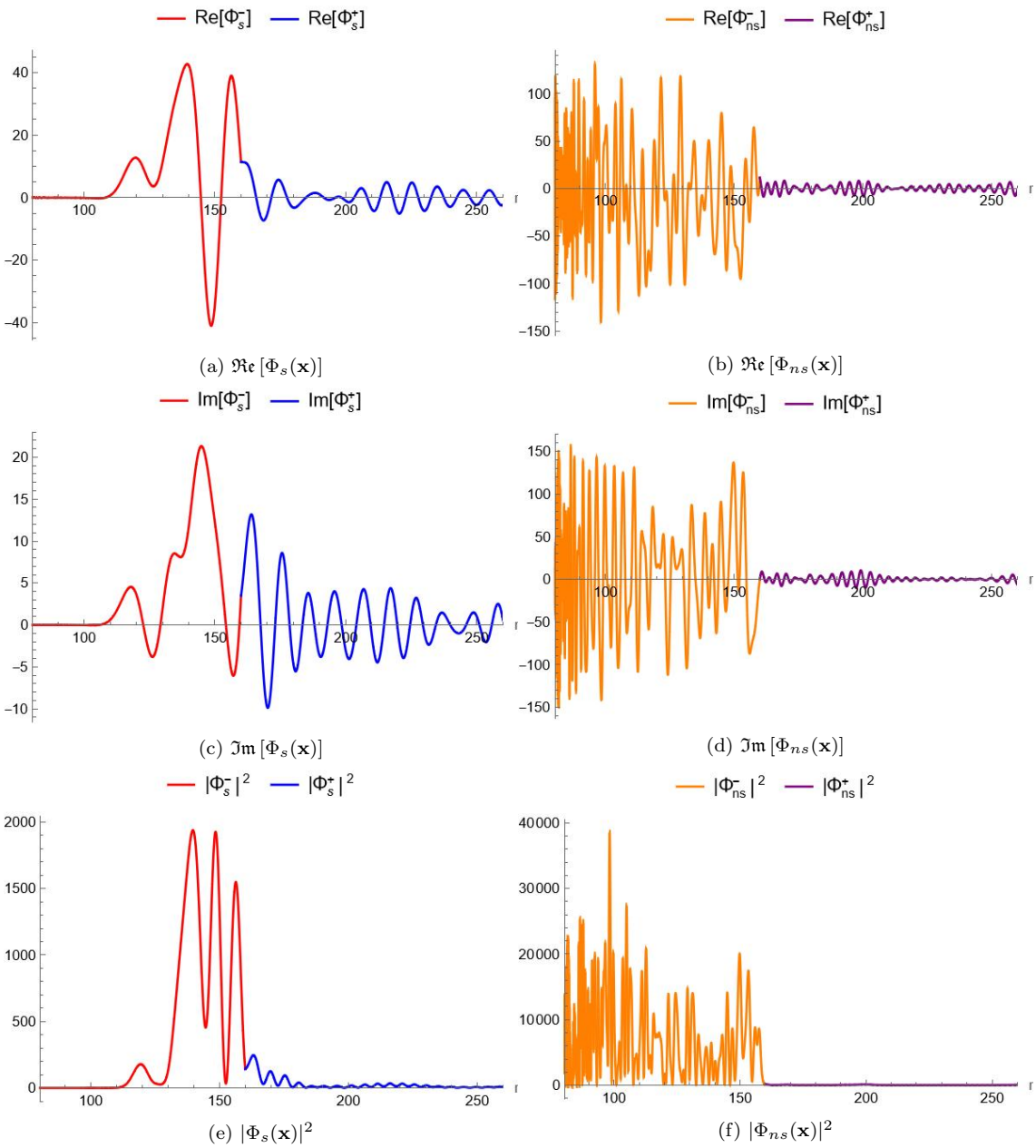


Figura 4.7: Representación gráfica de las partes reales e imaginarias de H_ℓ^{-1} e I_ℓ para distintos valores de k y usando el cut off ℓ_{max} para los distintos valores de k. Las líneas punteadas verticales en las figuras (a) y (b) indican la posición teórica del ℓ_{pico}, los cuales observamos que se corresponden con los picos obtenidos numéricamente.

	$\Phi_{ns}^{inc}(\mathbf{x})$	$\Phi_{s}^{inc}(\mathbf{x})$
$\check{n}$	$(0, \frac{\pi}{4})$	$(0, \frac{\pi}{4})$
k	0.8	1.4
$A_{\vec{k}}$	100	100

Tabla 4.2: Características elegidas para el campo incidente, donde $\check{n}$ es el ángulo de incidencia (el cual se escribe como un par ordenado (ϕ, θ)), $A_{\vec{k}}$ es la amplitud de la onda y k es el momento en el espacio de Fourier. Se eligen tomar 2 valores distintos de k tal que en un caso se trate de un campo superradiante ($\Phi_s^{inc}(\mathbf{x})$) mientras que en el otro caso no hay superradianza ($\Phi_{ns}^{inc}(\mathbf{x})$).

la condición de continuidad entre el campo Φ^+ exterior a la geometría BH-espejo y el campo Φ^- interior a la geometría hasta el punto r_0 (donde obtuvimos la solución mediante el desarrollo de Frobenius para evitar la singularidad numérica en el horizonte del BH). Sin embargo, como esta unión no es lo suficientemente suave, se observa que la condición de continuidad en las derivadas esta fallando (en particular para el campo superradiate, subfiguras 4.8a, 4.8c y 4.8e), esto puede atribuirse a una falla en las aproximaciones realizadas (como se discute en el apéndice K, aunque se debe seguir estudiando). Además, en las subfiguras 4.8e y 4.8f se observa una diferencia entre el campo superradiante y el no superradiante, y es que en el primer caso el modulo cuadrado del campo decrece rápidamente a medida que se acerca al BH acercándose a cero, mientras que este comportamiento no se observa para el campo no superradiante. Para comprender mejor este fenómeno de superradianza sería interesante graficar no solo el campo en la dirección de incidencia sino elegir un corte de la geometría tomando todos los valores posibles del ángulo θ, obteniendo así un perfil del funcionamiento del cohete superradiante de BH. Este análisis no fue realizado en este trabajo pero se llevará a cabo en el futuro.



(a) $\mathfrak{Re}\,[\Phi_s(\mathbf{x})]$ (b) $\mathfrak{Re}\,[\Phi_{ns}(\mathbf{x})]$

(c) $\mathfrak{Im}\,[\Phi_s(\mathbf{x})]$ (d) $\mathfrak{Im}\,[\Phi_{ns}(\mathbf{x})]$

(e) $|\Phi_s(\mathbf{x})|^2$ (f) $|\Phi_{ns}(\mathbf{x})|^2$

Figura 4.8: Representación gráfica de los campos $\Phi_s(\mathbf{x})$ y $\Phi_{ns}(\mathbf{x})$ obtenidos numéricamente usando para los parámetros que caracterizan al sistema los valores de la tabla 4.1, mientras que para los valores del campo incidente se toman los de la tabla 4.2 (tratándose por un lado de un campo $\Phi_s(\mathbf{x})$ que superradía y por el otro $\Phi_{ns}(\mathbf{x})$ que no superradía). Se grafican tanto las partes reales e imaginarias de estos campos como también el modulo cuadrado, donde en cada subfigura se muestra de distintos colores las partes correspondientes al campo Φ^+ exterior a la geometría BH-espejo (colores azul y violeta para Φ_s y Φ_{ns} respectivamente) y al campo Φ^- interior a la geometría (colores rojo y naranja para Φ_s y Φ_{ns} respectivamente). Puede observase como se satisface la condición de continuidad de los campos a la distancia r_m donde se coloca el espejo (donde ocurre el cambio de color), sin embargo esto no significa que en esa posición está el espejo ya que se esta graficando el campo para el ángulo de incidencia $\theta = \frac{\pi}{4}$ (medido desde el eje z) mientras que el espejo semiesférico se encuentra en $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$. No se grafica hasta el horizonte exterior r_+ del BH sino hasta el punto r_0 donde obtuvimos la solución radial mediante el desarrollo de Frobenius para evitar la singularidad numérica en el horizonte. Se observa que si bien se cumple la continuidad del campo, como esta unión no es lo suficientemente suave entonces la condición de continuidad en las derivadas esta fallando (en particular para el campo superradiate, subfiguras 4.8a, 4.8c y 4.8e). Por otro lado, en las subfiguras 4.8e y 4.8f se observa una diferencia entre Φ_s y Φ_{ns}, y es que en el primer caso el modulo cuadrado del campo decrece rápidamente a medida que se acerca al BH acercándose a cero, mientras que este comportamiento no se ve para el campo no superradiante.

4.3. Fuerza del cohete de BH

En las secciones previas se analiza numéricamente los resultados obtenidos para el caso clásico, es decir cuando una onda plana incide sobre la configuración BH-espejo. Con estas herramientas, considerando además el baño de partículas y antipartículas mediante la cuantización de los campos, se obtiene numéricamente la fuerza total sobre el cohete de BH. En la sección 3.5 se obtiene una expresión analítica para dicha fuerza en términos de las soluciones radiales y las matrices de coeficientes γ_ℓ^m:

$$F_3 = -\frac{4}{\pi}\int_0^\infty dk\, k^2 \left[\frac{1}{(\omega_p - e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p - e\mu}{T}} - 1\right)} + \frac{1}{(\omega_p + e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p + e\mu}{T}} - 1\right)}\right] \times \\ \times \sum_{m>0}\sum_{\ell=m} \sqrt{\frac{(\ell^2 - m^2)}{(4\ell^2 - 1)}}\, \mathfrak{Im}\left[\mathcal{N}^m_{\ell,\ell-1}\right] \tag{3.54}$$

donde

$$\mathcal{N}^m_{\ell,\ell-1} = \frac{1}{k^2 r_m^4 f(r_m)^2}\frac{1}{v_\ell^*(r_m) v_{\ell-1}(r_m)} \sum_{\ell''=|m|} \frac{\left[(M^{-1})^m \gamma^m\right]^*_{\ell\ell''}\left[(M^{-1})^m \gamma^m\right]_{\ell-1,\ell''}}{|v_{\ell''}(r_m)|^2} \\ + \frac{i}{2kr_m^2 f(r_m)}\frac{1}{v_\ell^*(r_m) v_{\ell-1}(r_m)}\left(\left[(M^{-1})^m\gamma^m\right]_{\ell-1,\ell} - \left[(M^{-1})^m\gamma^m\right]^*_{\ell,\ell-1}\right) \tag{3.55}$$

y

$$(M^{-1})^m_{\ell h} = \sum_{\ell'=|m|}^{\infty} (\gamma^m - \mathbf{1})^{-1}_{\ell\ell'} H^{-1}_{\ell'} (\gamma^m - \mathbf{1})^{-1}_{\ell' h} \tag{2.85}$$

Primero, se observa que en la fuerza (3.54) aparecen los términos de las distribuciones BE, es decir que la dependencia en k viene dada predominantemente por estas exponenciales. Por lo tanto, pueden usarse estas distribuciones para definir un cut off en k, para ello se elige una temperatura tal que efectivamente haya partículas en el rango de k en el que trabajamos y se observa como decae a medida que aumenta k. Eligiendo una temperatura $T = 0.5$ y usando los demás parámetros de la tabla 4.1, se obtiene un corte en $k_{max} = 4.5$. En la figura 4.9 se muestran las distribuciones de partículas y antipartículas obtenidas con estos parámetros, donde además se indica la zona sombreada donde hay superradiación tanto para partículas como para antipartículas.

Para determinar la fuerza se necesita obtener $(M^{-1})^m_{\ell h}$ definida en (2.85), donde se escribe $(M^{-1})^m_{\ell h}$ en términos de los elementos $(\gamma^m - \mathbf{1})^{-1}_{\ell\ell'}$ y $H^{-1}_{\ell'}$ (ya estudiados en la sección anterior). Entonces, usando las aproximaciones estudiadas anteriormente, I_ℓ corta el índice en ℓ_{max} (como puede verse explícitamente en el apéndice H, ec. (H.5)). Además, se cortan las $(\gamma^m_{\ell\ell'} - \mathbf{1})^{-1}_{\ell\ell'}$ a partir de la diagonal más 30 puntos, entonces la matriz $(M^{-1})^m$ en principio es de dimensión $(\ell_{max}+30)\times(\ell_{max}+30)$. Sin embargo, al proceder de esta manera surgen 2 observaciones con las que hay tener cuidado al momento de cortar la matriz $(M^{-1})^m$: (i) usando de la aproximación de las $\gamma^m_{\ell\ell'}$, si bien existen 30 puntos no nulos después de ℓ_{max} estos son tan pequeños que el determinante de M^m resulta ser aproximadamente nulo y por ende no existe su inversa $(M^{-1})^m$, por lo tanto se considera a la matriz $(M^{-1})^m$ de dimensión $\ell_{max}\times\ell_{max}$; además, (ii) resulta que como $(\gamma^m_{\ell\ell'} - \mathbf{1})_{\ell\ell'}$ tiene ceros alternados dadas

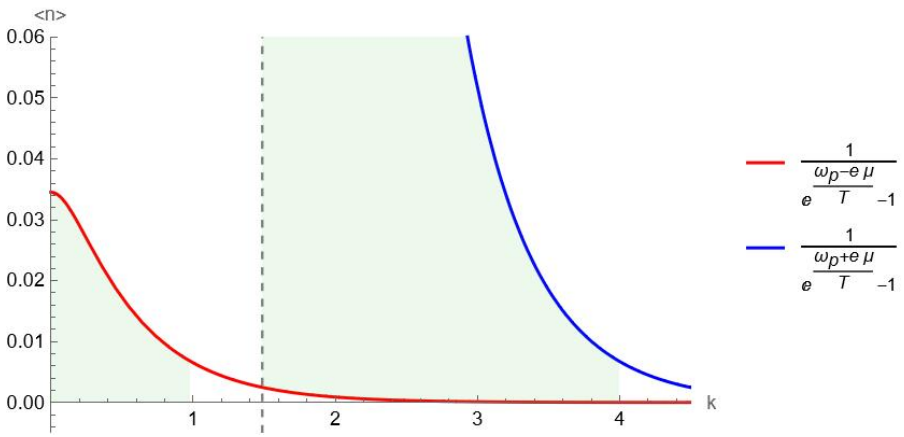


Figura 4.9: Representación gráfica de las distribuciones de BE para partículas y antipartículas (líneas roja y azul respectivamente) utilizando los parámetros que se encuentran en la tabla 4.1. Además, se indican las regiones de superradiación donde se satisface la condición $\omega < \omega_s$ (región sombreada verde). El intervalo $k \in (0, 4.5)$ del gráfico indica los valores de k que se considera en la determinación de la fuerza. El valor $k_{max} = 4.5$ se elige observando que la distribución para antipartículas a una energía igual a $6T$ es 234 veces menor que usando la energía del baño térmico T (se considera antipartículas porque es la mayor distribución).

por la relación entre sus subíndices, entonces si la dimensión donde se la corta es impar se tiene un determinante nulo y por ende no existe $(\gamma^m_{\ell\ell'} - \mathbf{1})^{-1}$, mientras que si la dimensión es par entonces si resulta invertible, luego si ℓ_{max} es impar se toma la matriz $(\ell_{max} - 1) \times (\ell_{max} - 1)$ mientras que si ℓ_{max} es par entonces se toma $\ell_{max} \times \ell_{max}$. A partir de estas observaciones, se trabajan con matrices cuadradas de dimensión ℓ^{par}_{max}, definido como:

$$\ell^{par}_{max} = \begin{cases} \ell_{max} - 1 & \text{si } \ell_{max} \text{ es impar} \\ \ell_{max} & \text{si } \ell_{max} \text{ es par} \end{cases} \tag{4.8}$$

Luego, puede trabajarse de manera matricial:

$$(M^{-1})^m = (\gamma^m - \mathbf{1})^{-1}(H^D)^{-1}(\gamma^m - \mathbf{1})^{-1} \tag{4.9}$$

donde $(\gamma^m - \mathbf{1})^{-1}$ y $(H^D)^{-1}$ son todas matrices cuadradas de dimensión ℓ^{par}_{max}. Numéricamente resulta mucho más eficiente trabajar con matrices que con la notación en componentes, reduciendo considerablemente el tiempo demorado por el cálculo numérico, por más que en algunos casos se calculan elementos que no se utilizan (por ejemplo se obtiene toda la matriz N^m aunque para obtener la fuerza solo se necesitan las componentes $N^m_{\ell,\ell-1}$). Por otro lado, usando la aproximación de que los elementos $\gamma^m_{\ell\ell'}$ no dependen de m, la dependencia en m solamente afecta la dimensión de las matrices $(\gamma^m - \mathbf{1})^{-1}$, $(H^D)^{-1}$ y I^D (ya que los subíndices siempre satisfacen que son mayores o iguales a m) y por ende se reduce de la misma manera la dimensión de $(M^{-1})^m$ a medida que aumenta m. Sin embargo, en el apéndice J puede verse que a medida que $m \approx \ell$ esta aproximación comienza a fallar, es decir que se observa como los elementos $\gamma^m_{\ell\ell'}$ comienzan a diferenciarse cuando aumenta m hasta tomar valores cercanos a ciertos valores fijos de ℓ y ℓ'. Ahora bien, en la fuerza (3.54) se observa que existe un termino $\ell^2 - m^2$ multiplicando a $N^m_{\ell,\ell-1}$, por lo tanto los términos con $m \approx \ell$ para lo cuales la aproximación comienza a fallar son los que menos contribuyen a la fuerza total. Por último, resta definir un cut off

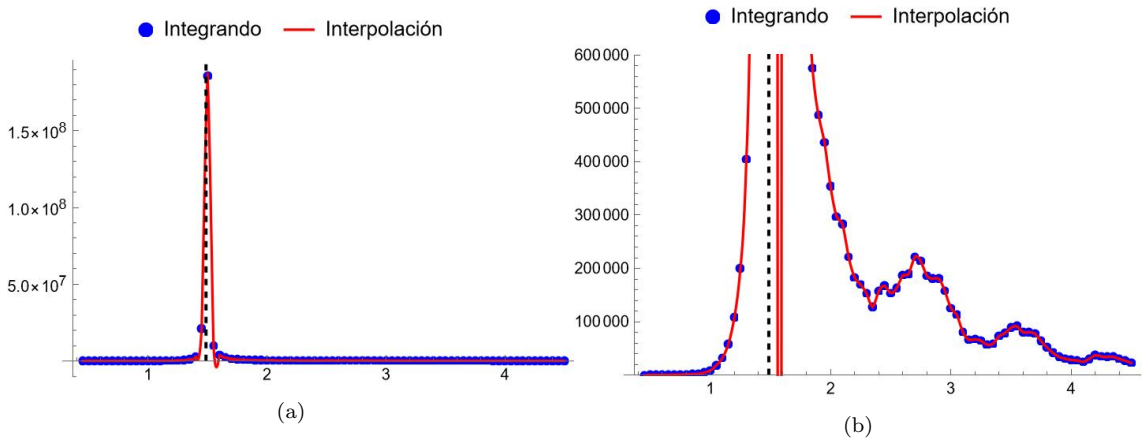


Figura 4.10: Representación gráfica del resultado numérico obtenido para la fuerza de empuje, donde los puntos azules son el integrando en la expresión para la fuerza 3.54 y la línea roja es la interpolación entre estos puntos, luego la fuerza total es la integral bajo esta curva. En la subfigura 4.10a se observa un pico en el valor de k correspondiente a la divergencia en la distribución de BE para antipartículas (ver figura 4.9). En la subfigura 4.10b se observa que este salto es continuo en lugar de ser discontinuo como se espera, sin embargo este resultado se entiende mejor a partir de la figura 4.11.

sobre los índices m ya que en la fuerza (3.54) hay también una sumatoria en m. Resulta natural usar el mismo corte ℓ_{max} encontrado a partir de I_ℓ, porque para valores de m mayores a ℓ_{max} quedan en la sumatoria en ℓ los términos mayores a ℓ_{max} (ya que $m \leq \ell$), los cuales se observan en 4.7 que decaen rápidamente a cero y en consecuencia la contribución debido a valores de m mayores a ℓ_{max} es nula. Además, teniendo en cuenta que $m \leq \ell^{par}_{max}$, se excluye el caso $m = \ell^{par}_{max}$ ya que siempre es cero debido al término $\ell^2 - m^2$ en la fuerza. En resumen, se usa como cut off $m_{max} = \ell^{par}_{max} - 1$.

Ahora se tienen todas las herramientas necesarias para proceder con el calculo numérico de la fuerza. En la figura 4.10 se representa gráficamente el resultado numérico obtenido para la fuerza de empuje, donde los puntos azules son el integrando en la expresión para la fuerza 3.54 y la línea roja es la interpolación entre estos puntos, luego la fuerza total es la integral bajo esta curva. De este resultado primero llama la atención el pico que se ve bien marcado en la subfigura 4.10a, esto se debe a la divergencia que hay en la exponencial debido a la distribución de Bose-Einstein (como se ve en la figura 4.9). Además, considerando las distribuciones de BE de la figura 4.9, se espera que esta divergencia sea discreta ya que para valores menores de k se tienen partículas[9] (superradiantes hasta cierto punto y luego no) que decrece hasta que prende el término de antipartículas. Sin embargo, se observa en la subfigura 4.10b que el salto no es discreto, sino que siempre aumenta hasta tomar el máximo valor debido a la divergencia. Este resultado puede entenderse analizando con más detalle la distribución de BE para antipartículas, como puede verse en la figura 4.11. Se observa que para k menores a la divergencia se obtiene un numero de ocupación negativo que antes no se consideraba, sin embargo en este

[9]No es posible separar la fuerza entre una contribución debido a partículas y otra debido a antipartículas, ya que dentro del integrando se tienen las soluciones radiales y sus conjugadas acopladas que mezclan las partículas y antipartículas del baño térmico. Cuando se habla de partículas y antipartículas en este contexto se refiere a los términos debido a la distribución de BE donde es posible diferenciar el signo correspondiente a cada caso.

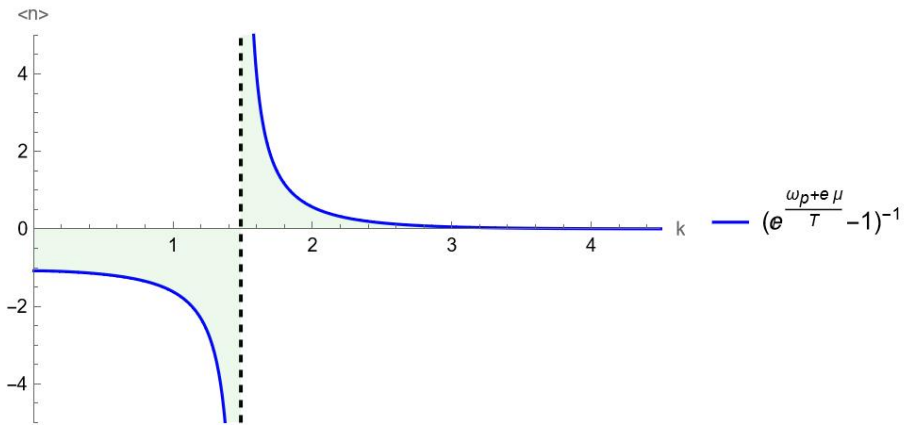


Figura 4.11: Representación gráfica de la distribución de Bose-Einstein para antipartículas (línea azul) y la región de superradiación donde se satisface la condición $\omega < \omega_s$ (región sombreada verde). Se observa que, en correspondencia con los resultados para la fuerza en la figura 4.10, además de tener un número de ocupación positivo también se están teniendo en cuenta los números de ocupación negativos, por lo tanto hay superradianza en todo el intervalo de k hasta $k \approx 4$. Además, se observa la existencia de una divergencia que se corresponde con el pico existente para el resultado de la fuerza.

contexto de campos este número negativo es posible ya que solo indica el signo de la carga neta. Por lo tanto, en el calculo de la fuerza se esta teniendo en cuenta también estas partículas que además superradían, entonces en la figura 4.10 se tiene superradianza en todo el intervalo de k hasta $k \approx 4$ (donde se observa en la figura 4.1 que ya no hay superradiación tanto para partículas como para antipartículas). Luego, para estudiar la contribución a la fuerza debido a la superradianza debería extenderse el intervalo para k tomado en este trabajo. Por otro lado, la existencia de la divergencia es algo que aún falta comprender y que se seguirá estudiando en el futuro.

Por último, en el apéndice K se estudia la validez de las aproximaciones numéricas adoptadas, las cuales pueden resumirse en tres puntos: (i) el corte utilizado en ℓ_{max} para cortar la sumatoria en ℓ, (ii) que las matrices de coeficientes $\gamma^m_{\ell\ell'}$ tienen elementos no nulos cerca de la diagonal y ceros a medida que se aleja de esta, y (iii) que los elementos $\gamma^m_{\ell\ell'}$ no dependen de m, solamente depende de m la dimensión de la matriz. De este apéndice resulta que las aproximaciones (i) y (ii) son muy buenas mientras que la aproximación (iii) falla para algunos valores de m. Por esta razón, el valor de la fuerza total obtenida de la integral bajo la curva en la figura 4.10 no resulta de interés aún. Los resultados presentados son más bien una primera aproximación de la fuerza de empuje sobre el cohete superradiante de BH (además falta recuperar las dimensiones para poder comparar el valor de la fuerza resultante).

5. Conclusión

El fenómeno de superradiancia en agujeros negros consiste en la absorción de información en forma de paquetes de onda, y al mismo tiempo la emisión de energía en forma de ondas planas monocromáticas por parte del agujero negro. Se estudia este fenómeno en una configuración de agujero negro con carga (BH) concéntrico a un espejo semiesférico perfecto que, debido a su forma y a la existencia de una fuerza total resultado de los modos superradiantes dispersados en este, se llama "cohete superradiante de BH" (o simplemente cohete de BH).

Primero, se considera la dispersión de un campo escalar cargado clásico incidiendo sobre esta configuración. Para ello, se resuelve la ecuación de Klein-Gordon mínimamente acoplada con el campo de gauge A_μ en espacio curvo, dado por la métrica de Reissner-Nordström (RN). Se obtiene el campo en toda la región del espacio-tiempo permitida a partir de las soluciones radiales que satisfacen las condiciones de contorno en el horizonte (ya sean modos superradiantes o no) y en el infinito, para luego pegar las partes del campo imponiendo las condiciones de contorno en el espejo. Se logra escribir una relación analítica entre los coeficientes del campo incidente (que se considera como una onda plana) con los coeficientes del campo dispersado y con el campo dentro de la configuración de BH-espejo, obteniendo así el campo en todo el espacio en función de las características de la onda incidente (ángulo de incidencia, amplitud e impulso) y los valores de las soluciones radiales que toman en el espejo (que luego se determinan numéricamente).

Segundo, a partir del resultado anterior para un campo clásico, se procede con la cuantización del campo considerando la configuración BH-espejo inmerso en un baño térmico de partículas y antipartículas escalares cargadas que no esta en equilibrio termodinámico con el BH. Asumiendo que las partículas siguen una distribución de Bose-Einstein (BE) y utilizando el tensor de energía-momento del sistema, se obtiene la fuerza total sobre el cohete de BH.

Tercero, se analizaron numéricamente los resultados obtenidos tanto por la dispersión de un campo escalar como por el cohete de BH en el baño térmico. En el caso de un campo escalar, primero se obtiene numéricamente las soluciones radiales que satisfacen las condiciones de contorno, luego proponiendo algunos valores para el campo incidente tal que haya o no superradiación, se obtienen estos campos en la dirección de incidencia donde se observa una diferencia de comportamiento cerca del horizonte exterior del BH (donde ocurre o no la superradianza). A partir de estos resultados numéricos y de la expresión analítica obtenida, se determina la fuerza total del cohete de BH en la cual se observa un pico para cierto valor del impulso k donde existe una divergencia debido a la distribución de BE utilizada. Si bien el comportamiento entorno al pico se puede interpretar como que se esta considerando tanto el número de ocupación positivo como el negativo (el cual indica la carga neta), resta estudiar la existencia de esta divergencia para un valor de k no nulo. Además, se concluye que para comprender mejor cómo contribuye la superradianza a la fuerza total se debe extender el intervalo de energía bajo estudio y estudiar el comportamiento de la solución con el índice azimutal cuántico m, ya que la aproximación realizada para este último caso falla para ciertos valores de m.

Cabe destacar que el dispositivo de cohete de BH estudiado es resultado del fenómeno de superradianza, el cual es un fenómeno puramente clásico. Sin bien cuando incluimos el baño térmico se consideran campos cuánticos, esto es necesario

para vincular la temperatura del baño con las partículas mediante la distribución de BE por lo que no debe confundirse la superradianza con un fenómeno cuántico. Un modelo alternativo de cohete de BH donde se utiliza la radiación de Hawking en lugar de superradianza (el cual si es un fenómeno cuántico) puede verse en [Semiz 1995].

Puede construirse un cohete superradiante de BH recurriendo a un experimento mental. Primero es necesario un BH de RN o de Kerr (no estudiado aún pero se presupone que el mismo efecto de cohete de BH ocurrirá en este caso) tal que hayan modos superradiantes. La energía extraída debido a la superradiación depende de la temperatura del BH, luego se necesita un BH pequeño ya que a menor área del BH mayor es la temperatura (aunque mientras más pequeño más rápido se evapora). Se coloca ahora el espejo semi esférico perfecto tal que el BH esté en el centro de este. Finalmente se necesita un baño térmico, para ello se coloca la configuración BH-espejo en un horno con una temperatura alta tal que sea físicamente posible y que se tenga una buena cantidad de partículas superradiantes (ya que a medida que aumenta la energía en la distribución de BE mayor cantidad de partículas se tendrán en los estados excitados). El resultado de este experimento es una fuerza sobre la configuración BH-espejo que funciona como propulsor del cohete superradiante de BH.

En cuanto a una posible aplicación astrofísica, se parte de la bomba BH en un BH astrofísico [Pani et al. 2012, sección 5.8.3] como motivación para luego complementar esta idea con el cohete de BH. En un BH astrofísico existe un disco de acreción de plasma entorno al BH del cual ondas de plasma magnetosónicas son generadas, luego estas ondas pueden entrar en la región entre el BH y el borde interior del disco de acreción (el cual se encuentra en la ISCO, *Innermost Stable Circular Orbit*). Una vez que entren en esta región, el borde interior del disco de acreción puede actuar como una barrera reflectora, luego las ondas pueden ser multiplemente reflejadas y amplificarse por la superradianza, aumentando su energía. Este incremento de la energía continuara hasta que la magnetosfera que rodea al sistema no sea capaz de soportar la presión dentro de la cavidad (bomba de BH) [Aguirre 2000; Van Putten 1999]. Ahora bien, en este modelo se supone un disco de acreción homogéneo, sin embargo es razonable considerar que el disco de acreción es inhomogéneo. Entonces, en este caso se tiene una amplificación superradiante inhomogénea que podría modelarse como un cohete superradiante, por lo tanto existirá una fuerza neta sobre el sistema BH junto al disco de acreción.

Para finalizar, se comentan algunas perspectivas a futuro de este trabajo:

- Mejorar la precisión del análisis numérico realizado, en particular estudiar la falla en la aproximación del índice azimutal cuántico m y la no continuidad de la derivada del campo superradiante en la posición del espejo.

- Obtener un gráfico de un corte del cohete de BH tomando todos los valores de θ posibles para cierta onda plana incidente en determinada dirección (y no solo el campo en la dirección de incidencia como se hizo). Se espera de esta manera obtener una mejor interpretación del fenómeno de superradiación antes de considerar muchas partículas incidiendo de todas direcciones debido al baño térmico.

- Estudiar el comportamiento obtenido a partir del resultado numérico de la fuerza, en particular la existencia del pico y extender el rango de energías bajo

estudio para considerar una mayor región sin superradianza. Además, para comparar el resultado de la fuerza superradiante, puede resultar instructivo comparar con el caso de un BH de Schwarzschild donde no hay superradianza.

- Continuar el análisis numérico de la fuerza variando distintos parámetro del sistema, por ejemplo aumentar la carga del BH hasta llegar a un BH de RN *extremo* y variar la posición del espejo semiesférico. Se analizará si el comportamiento de este sistema es el mismo que en la bomba de BH, es decir se verá si la fuerza es mayor para el caso de un BH extremo y si existe una distancia para el espejo donde la fuerza sea máxima (como ocurre en la bomba de BH).

- Recuperar las dimensiones físicas de las variables trabajadas para una posible aplicación astrofísica.

- Estudiar el caso de campos espinoriales en lugar del campo escalar considerado, ampliando así el estudio a partículas fermiónicas incidiendo sobre el cohete de BH.

Referencias

Aguirre, A. (2000). "On the Superradiance of Spin-1 Waves in an Equatorial Wedge around a Kerr Hole". En: *The Astrophysical Journal* 529.1, págs. L9-L12.

Arvanitaki, A., S. Dimopoulos et al. (2010). "String axiverse". En: *Physical Review D* 81.12, pág. 123530.

Arvanitaki, A. y S. Dubovsky (2011). "Exploring the string axiverse with precision black hole physics". En: *Physical Review D* 83.4, pág. 044026.

Bardeen, J., B. Carter y S. Hawking (1973). "The four laws of black hole mechanics". En: *Communications in mathematical physics* 31.2, págs. 161-170.

Bardeen, J., W. Press y S. Teukolsky (1972). "Rotating black holes: locally non-rotating frames, energy extraction, and scalar synchrotron radiation". En: *The Astrophysical Journal* 178, págs. 347-370.

Bekenstein, J. (1973a). "Black Holes and Entropy". En: *Phys. Rev. D* 7 (8), págs. 2333-2346.

— (1973b). "Extraction of energy and charge from a black hole". En: *Physical Review D* 7.4, pág. 949.

Bekenstein, J. y M. Schiffer (1998). "The many faces of superradiance". En: *Physical Review D* 58.6, pág. 064014.

Brito, R., V. Cardoso y P. Pani (2013). "Massive spin-2 fields on black hole spacetimes: Instability of the Schwarzschild and Kerr solutions and bounds on the graviton mass". En: *Physical Review D* 88.2, pág. 023514.

— (2020). *Superradiance*. Springer. arXiv: `1501.06570 [gr-qc]`.

Cardoso, V. y O. Dias (2004). "Small Kerr–anti-de Sitter black holes are unstable". En: *Physical Review D* 70.8, pág. 084011.

Cardoso, V., O. Dias et al. (2004). "Black-hole bomb and superradiant instabilities". En: *Physical Review D* 70.4, pág. 044039.

Carroll, S. (2014). *Spacetime and geometry*. Pearson Education Limited.

Christodoulou, D. (1970). "Reversible and irreversible transformations in black-hole physics". En: *Physical Review Letters* 25.22, pág. 1596.

Christodoulou, D. y R. Ruffini (1971). "Reversible transformations of a charged black hole". En: *Physical Review D* 4.12, pág. 3552.

Degollado, J., C. Herdeiro y H. Rúnarsson (2013). "Rapid growth of superradiant instabilities for charged black holes in a cavity". En: *Physical Review D* 88.6, pág. 063003.

Dias, O., P. Figueras et al. (2012). "Hairy black holes and solitons in global AdS 5". En: *Journal of High Energy Physics* 2012.8, págs. 1-87.

Dias, O., G. Horowitz y J. Santos (2011). "Black holes with only one Killing field". En: *Journal of High Energy Physics* 2011.7, págs. 1-43.

Dicke, R. (1954). "Coherence in spontaneous radiation processes". En: *Physical review* 93.1, pág. 99.

Dolan, S. (2007). "Instability of the massive Klein-Gordon field on the Kerr spacetime". En: *Physical Review D* 76.8, pág. 084001.

EE, C. et al. (2010). "Surface gravity and Hawking temperature from entropic force viewpoint". En: *Modern Physics Letters A* 25.33, págs. 2825-2830.

Furuhashi, H. e Y. Nambu (2004). "Instability of massive scalar fields in Kerr-Newman spacetime". En: *Progress of theoretical physics* 112.6, págs. 983-995.

Gkigkitzis, I., I. Haranas y O. Ragos (2014). "Kretschmann Invariant and Relations Between Spacetime Singularities Entropy and Information". En: *Physics International* 5.1, págs. 103-111.

Greiner, W. et al. (2000). *Relativistic quantum mechanics*. Vol. 2. Springer.

Greiner, Walter y Joachim Reinhardt (1996). *Field quantization*. Springer Science & Business Media.

Gubser, S. (2008). "Breaking an Abelian gauge symmetry near a black hole horizon". En: *Physical Review D* 78.6, pág. 065034.

Hansen, A. y F. Ravndal (1981). "Klein's paradox and its resolution". En: *Physica Scripta* 23.6, pág. 1036.

Hartnoll, S. (2011). "Horizons, holography and condensed matter". En: arXiv: 1106.4324 [hep-th].

Hartnoll, S., C. Herzog y G. Horowitz (2008). "Building an AdS/CFT superconductor". En: *Physical Review Letters* 101.

Hawking, S. (1975). "Particle creation by black holes". En: *Euclidean quantum gravity*. World Scientific, págs. 167-188.

— (1988). *A Brief History of Time. Book*.

Hawking, S. y G. Ellis (2011). "The Large Scale Structure of Space-Time". En: *Cambridge Monographs on Mathematical Physics*.

Herdeiro, C. y E. Radu (2014). "Kerr black holes with scalar hair". En: *Physical review letters* 112.22, pág. 221101.

Hobson, M., G. Efstathiou y A. Lasenby (2006). *General relativity: an introduction for physicists*. Cambridge University Press.

Hund, F. (1941). "Materieerzeugung im anschaulichen und im gequantelten Wellenbild der Materie". En: *Zeitschrift für Physik* 117.1, págs. 1-17.

Joglekar, S. y A. Mishra (1990). "Energy momentum tensor in scalar QED and the renormalization group". En: *Phys. Rev. D* 41, pág. 1931.

Klein, O. (1929). "Die Reflexion von Elektronen an einem Potentialsprung nach der relativistischen Dynamik von Dirac". En: *Zeitschrift für Physik* 53.3-4, págs. 157-165.

Krane, K. (1991). *Introductory nuclear physics*. John Wiley & Sons. Cap. 2, pág. 28.

Manogue, C. (1988). "The Klein paradox and superradiance". En: *Annals of Physics* 181.2, págs. 261-283.

Mavromatis, H. y R. Alassar (1999). "A generalized formula for the integral of three associated Legendre polynomials". En: *Applied Mathematics Letters* 12.3, págs. 101-105.

Pani, P. et al. (2012). "Black-hole bombs and photon-mass bounds". En: *Physical review letters* 109.13, pág. 131102.

Pathria, R. y P. Beale (2011). *Statistical mechanics*. Elsevier/Academic Press.

Penrose, R. (ene. de 1969). "Gravitational Collapse: the Role of General Relativity". En: *Nuovo Cimento Rivista Serie* 1, pág. 252.

Press, W. y S. Teukolsky (1972). "Floating orbits, superradiant scattering and the black-hole bomb". En: *Nature* 238.5361, págs. 211-212.

Reyes, R. y V. Delgado (2017). "Introduction to Quantum Field Theory: Quantum Electrodynamics". En.

Schwinger, J. (1951). "On gauge invariance and vacuum polarization". En: *Physical Review* 82.5, pág. 664.

Semiz, I. (1995). "Black hole as the ultimate energy source". En: *American Journal of Physics* 63.2, págs. 151-156.

Shibata, M. y H. Yoshino (2010). "Bar-mode instability of a rapidly spinning black hole in higher dimensions: Numerical simulation in general relativity". En: *Physical Review D* 81.10, pág. 104035.

Van Putten, M. (1999). "Superradiance in a torus magnetosphere around a black hole". En: *Science* 284.5411, págs. 115-118.

Weisstein, E. (2022a). "Associated Legendre Polynomial". En: *MathWorld–A Wolfram Web Resource*.

— (2022b). "Spherical Bessel Differential Equation". En: *MathWorld: A Wolfram Web Resource*.

— (2022c). "Spherical Hankel Function of the First Kind". En: *MathWorld: A Wolfram Web Resource*.

— (2022d). "Spherical Harmonic". En: *MathWorld–A Wolfram Web Resource*.

Winter, R. (1959a). "Klein paradox for the klein-gordon equation". En: *American Journal of Physics* 27.5, págs. 355-358.

— (1959b). "Klein paradox for the klein-gordon equation". En: *American Journal of Physics* 27.5, págs. 355-358.

Wolfram-Research (2019). *NDSolve*.

Zel'Dovich, Y. (1971). "Generation of Waves by a Rotating Body". En: *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters* 14, pág. 180.

— (1972). "Amplification of Cylindrical Electromagnetic Waves Reflected from a Rotating Body". En: *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters* 62, pág. 2076.

Zwiebach, B. (2016). "8.04 Quantum Physics I". En: *Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare*.

A. Definición: $\gamma^m_{\ell\ell'}$ y $M^m_{h\ell}$

En este apéndice se desarrollan las expresiones (2.66) y (2.71) derivadas de las condiciones de contorno que se deben cumplir en el espejo semiesférico perfecto. Los resultados que se obtienen a continuación son los presentados en la sección 2.2.3. Comenzando por las ecuaciones (2.66) y (2.71) que se derivan en dicha sección:

$$\begin{cases} \sum_{\ell,m} a^m_\ell Y^m_\ell(\theta,\phi) = 0 \qquad \text{para} \quad \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi & (2.66) \\ \sum_{\ell,m} \left(a^m_\ell H_\ell - c^m_\ell I_\ell\right) Y^m_\ell(\theta,\phi) = 0 \qquad \text{para} \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} & (2.71) \end{cases}$$

donde para simplificar se llama

$$H_\ell = \frac{u'_\ell(r_m)}{u_\ell(r_m)} - \frac{v'_\ell(r_m)}{v_\ell(r_m)} \qquad \text{y} \qquad I_\ell = \frac{w'_\ell(r_m)}{w_\ell(r_m)} - \frac{v'_\ell(r_m)}{v_\ell(r_m)} \tag{2.72}$$

En las ecuaciones (2.66) y (2.71) se tiene una suma de los armónicos esféricos pesados por unos coeficientes constantes[10] igual a cero. Desarrollando los armónicos esféricos por su definición (2.18) en las ecuaciones (2.66) y (2.71),

$$\begin{cases} \sum_{\ell,m} a^m_\ell \sqrt{2\ell+1\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P^m_\ell(\cos\theta) e^{im\phi} = 0 & \text{(A.1)} \\ \sum_{\ell,m} \left(a^m_\ell H_\ell - c^m_\ell I_\ell\right) \sqrt{2\ell+1\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P^m_\ell(\cos\theta) e^{im\phi} = 0 & \text{(A.2)} \end{cases}$$

Luego, multiplicando en ambas expresiones la exponencial $e^{-im'\phi}$ e integrando sobre el ángulo ϕ:

$$\begin{cases} \sum_{\ell,m} a^m_\ell \sqrt{2\ell+1\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P^m_\ell(\cos\theta) \int_0^{2\pi} d\phi\, e^{im\phi} e^{-im'\phi} = 0 & \text{(A.3)} \\ \sum_{\ell,m} \left(a^m_\ell H_\ell - c^m_\ell I_\ell\right) \sqrt{2\ell+1\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P^m_\ell(\cos\theta) \int_0^{2\pi} d\phi\, e^{im\phi} e^{-im'\phi} = 0 & \text{(A.4)} \end{cases}$$

Usando la ortonormalidad de las exponenciales complejas, las integrales en ϕ dan la delta $\delta_{mm'}$

$$\begin{cases} \sum_{\ell,m} a^m_\ell \sqrt{2\ell+1\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P^m_\ell(\cos\theta) \delta_{mm'} = 0 & \text{(A.5)} \\ \sum_{\ell,m} \left(a^m_\ell H_\ell - c^m_\ell I_\ell\right) \sqrt{2\ell+1\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P^m_\ell(\cos\theta) \delta_{mm'} = 0 & \text{(A.6)} \end{cases}$$

Ahora bien, mirando la sumatoria sobre m ($\sum_{m=-\ell}^{\ell}$), el único termino no nulo debido a la delta es el que satisface $m = m'$, para cierto ℓ que permita el valor de m'.

[10] Constantes en el sentido de que no dependen de θ ni de ϕ, pero si dependen de ℓ y m.

Entonces para valores de ℓ menores a $m = m'$, la delta es nula y puede escribirse que la sumatoria en ℓ comenzará en $\ell = |m|$:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{\ell=|m|}^{\infty} (-1)^\ell a^m_\ell \sqrt{(2\ell+1)} \sqrt{\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P^m_\ell(x) = 0 & \text{(A.7)} \\ \displaystyle\sum_{\ell=|m|}^{\infty} \left(a^m_\ell H_\ell - c^m_\ell I_\ell\right) \sqrt{(2\ell+1)} \sqrt{\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P^m_\ell(x) = 0 & \text{(A.8)} \end{cases}$$

para todo m en $\mathbb{Z}$ y con $0 < x = \cos\theta < 1$ (ya que $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ en ambos casos, donde en la primera ecuación se cambia $x \to -x$ para que estén definidos en el mismo intervalo de x, por esta razón aparece $(-1)^\ell$). Ahora se procede de manera similar que antes para integrar la componente x, es decir se multiplican ambas ecuaciones por $\sqrt{(2\ell'+1)}\sqrt{\frac{(\ell'-m)!}{(\ell'+m)!}} P^m_{\ell'}(x)$ y se integra en el dominio de x,

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{\ell=|m|}^{\infty} (-1)^\ell a^m_\ell \sqrt{(2\ell+1)(2\ell'+1)\frac{(\ell-m)!(\ell'-m)!}{(\ell+m)!(\ell'+m)!}} \int_0^1 P^m_\ell(x) P^m_{\ell'}(x) = 0 \\ \displaystyle\sum_{\ell=|m|}^{\infty} \left(a^m_\ell H_\ell - c^m_\ell I_\ell\right) \sqrt{(2\ell+1)(2\ell'+1)\frac{(\ell-m)!(\ell'-m)!}{(\ell+m)!(\ell'+m)!}} \int_0^1 P^m_\ell(x) P^m_{\ell'}(x) = 0 \end{cases}$$

(A.9)

(A.10)

Usando la ortogonalidad de los polinomios asociados de Legendre en el intervalo $(-1, 1)$ [Weisstein 2022a], se obtiene información sobre el polinomio en el intervalo $(0, 1)$:

$$\int_{-1}^{1} P^m_\ell(x) P^m_{\ell'}(x) = \frac{2}{2\ell+1}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}\delta_{\ell\ell'} = \int_0^1 P^m_\ell(x) P^m_{\ell'}(x) + \int_{-1}^{0} P^m_\ell(x) P^m_{\ell'}(x) \tag{A.11}$$

Intercambiando $x \to -x$ en la segunda integral y juntando los términos restantes:

$$\left(1 + (-1)^{\ell'-l}\right) \int_0^1 P^m_\ell(x) P^m_{\ell'}(x) = \frac{2}{2\ell+1}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}\delta_{\ell\ell'} \tag{A.12}$$

Por lo tanto, los polinomios asociados de Legendre son ortogonales en el intervalo $(0, 1)$ siempre y cuando $\ell' - \ell$ sea par. Entonces para simplificar se define:

$$\gamma^m_{\ell\ell'} = \begin{cases} \sqrt{(2\ell+1)(2\ell'+1)\frac{(\ell-m)!(\ell'-m)!}{(\ell+m)!(\ell'+m)!}} \int_0^1 P^m_\ell(x) P^m_{\ell'}(x) & \text{si } \ell' - \ell \text{ impar} \\ 0 & \text{si } \ell' - \ell \text{ par} \\ 1 & \text{si } \ell' = \ell \end{cases} \tag{A.13}$$

donde el valor particular $\gamma^m_{\ell\ell} = 1$ puede verse inmediatamente de (A.12). Luego, las ecuaciones (A.9) y (A.10) pueden reescribirse usando la definición de $\gamma^m_{\ell\ell'}$ como:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{\ell=|m|}^{\infty} (-1)^{\ell} a^m_{\ell} \gamma^m_{\ell\ell'} & \text{(A.14)} \\ \displaystyle\sum_{\ell=|m|}^{\infty} \left(a^m_{\ell} H_{\ell} - c^m_{\ell} I_{\ell}\right) \gamma^m_{\ell\ell'} & \text{(A.15)} \end{cases}$$

donde, debido a la gamma definida, los únicos términos no nulos son con $\ell' - \ell$ impar. Se quiere cambiar los índices y en lugar de sumar sobre ℓ se quiere sumar sobre $\ell' - \ell$. Para ello, primero se separan los términos $\ell' - \ell = 0$ (con $\gamma^m_{\ell\ell} = 1$) ya que estos están incluido en las sumatorias y así los únicos términos no nulos en las sumatorias son con $\ell' - \ell$ impar:

$$\begin{cases} a^m_{\ell} - \displaystyle\sum_{\substack{\ell'-\ell=|m| \\ \ell'-\ell \text{ impar}}}^{\infty} (-1)^{\ell'-\ell} a^m_{\ell'-\ell} \gamma^m_{(\ell'-\ell)\ell'} & \text{(A.16)} \\ a^m_{\ell} H_{\ell} - c^m_{\ell} I_{\ell} + \displaystyle\sum_{\substack{\ell'-\ell=|m| \\ \ell'-\ell \text{ impar}}}^{\infty} \left(a^m_{\ell'-\ell} H_{\ell'-\ell} - c^m_{\ell'-\ell} I_{\ell'-\ell}\right) \gamma^m_{(\ell'-\ell)\ell'} & \text{(A.17)} \end{cases}$$

Como inicialmente $\ell' - \ell = |m|$, cuando se separa el coeficiente $\ell = \ell'$ entonces se restringe $|m| \neq 0$, lo cual no se escribe explícitamente en la sumatoria ya que esta incluido en la condición $\ell' - \ell$ impar. Por otro lado, nótese que el termino $(-1)^{\ell'-\ell}$ de la primera ecuación se encuentra elevado en una potencia impar por lo que queda solamente un signo menos. Más aún, para simplificar la notación, puede sumarse directamente sobre ℓ' ya que $\gamma^m_{\ell\ell'}$ dejara los términos con $\ell' - \ell$ impar. En este caso, para que se satisfaga la condición $\ell' - \ell = |m|$, se toma simplemente $\ell' \geq |m|$. Juntando todo, resulta que las condiciones de contorno llevan a:

$$\begin{cases} a^m_{\ell} - \displaystyle\sum_{\substack{\ell' \geq |m| \\ \ell'-\ell \text{ impar}}}^{\infty} a^m_{\ell'} \gamma^m_{\ell\ell'} = 0 & \text{(A.18)} \\ a^m_{\ell} H_{\ell} - c^m_{\ell} I_{\ell} + \displaystyle\sum_{\substack{\ell' \geq |m| \\ \ell'-\ell \text{ impar}}}^{\infty} \left(a^m_{\ell'} H_{\ell'} - c^m_{\ell'} I_{\ell'}\right) \gamma^m_{\ell\ell'} = 0 & \text{(A.19)} \end{cases}$$

donde las ecuaciones (A.18) y (A.19) son consecuencia de la continuidad en el espejo y de la derivada respectivamente.

De la ecuación (A.18) puede escribirse el coeficiente a^m_{ℓ} en términos de la sumatoria en $\ell' - \ell$. Ahora bien, la relación entre ℓ y $|m|$ o ℓ' y $|m|$ no puede ser cualquiera. Por ejemplo, si se tienen coeficientes a^m_{ℓ} cuyos índices satisfacen que $\ell - |m|$ es par entonces $a^m_{\ell'}$ no tiene otra opción más que cumplir que $\ell' - |m|$ sea impar, ya que debe satisfacerse $\ell' - \cancel{|m|} - \ell + \cancel{|m|} = \ell' - \ell$ impar. Luego eligiendo una paridad para $\ell - |m|$ del coeficiente a^m_{ℓ} entonces el $\ell' - |m|$ del coeficiente $a^m_{\ell'}$ tiene la paridad opuesta (así siempre se satisface impar+par=impar, i.e. $\ell' - \ell$ impar). Lo

mismo ocurre en la ecuación (A.19), pero ahora puede solucionarse este problema de paridad insertando la expresión (A.18) en (A.19):

$$a^m_\ell H_\ell - c^m_\ell I_\ell + \sum_{\substack{\ell'\geq|m| \\ \ell'-\ell \text{ impar}}}^{\infty} \sum_{\substack{h\geq|m| \\ h-\ell' \text{ impar}}}^{\infty} a^m_h \gamma^m_{h\ell'} H_{\ell'} \gamma^m_{\ell\ell'} - \sum_{\substack{\ell'\geq|m| \\ \ell'-\ell \text{ impar}}}^{\infty} c^m_{\ell'} I_{\ell'} \gamma^m_{\ell\ell'} = 0 \tag{A.20}$$

Además, se observa que en la doble sumatoria (una suma con $\ell'-\ell$ impar y otra con $h-\ell'$ impar) pueden intercambiarse los índices en la segunda sumatoria por $h-\ell$, lo cual es simplemente la suma entre $\ell'-\ell$ y $h-\ell'$, es decir que es la suma de dos números impares por lo que $h-\ell$ es par:

$$a^m_\ell H_\ell - c^m_\ell I_\ell + \sum_{\substack{\ell'\geq|m| \\ \ell'-\ell \text{ impar}}}^{\infty} \sum_{\substack{h\geq|m| \\ h-\ell \text{ par}}}^{\infty} a^m_h \gamma^m_{h\ell'} H_{\ell'} \gamma^m_{\ell\ell'} - \sum_{\substack{\ell'\geq|m| \\ \ell'-\ell \text{ impar}}}^{\infty} c^m_{\ell'} I_{\ell'} \gamma^m_{\ell\ell'} = 0 \tag{A.21}$$

Reordenando un poco esta expresión, primero se vuelve a juntar el termino $c^m_\ell I_\ell$ (que corresponde a $\ell'=\ell$) con la sumatoria sobre los mismos coeficientes. Segundo, usando la definición de la gamma (A.13),se escribe la sumatoria sobre todo ℓ' en lugar de solo sobre $\ell'-\ell$ impar, partiendo de $\ell'=|m|$. De la misma manera se procede con el termino $a^m_\ell H_\ell$, obteniendo:

$$\sum_{\substack{h\geq|m| \\ h-\ell \text{ par}}}^{\infty} \sum_{\ell'=|m|}^{\infty} a^m_h \gamma^m_{h\ell'} H_{\ell'} \gamma^m_{\ell\ell'} = \sum_{\ell'=|m|}^{\infty} c^m_{\ell'} I_{\ell'} \gamma^m_{\ell\ell'} \tag{A.22}$$

Esta última expresión también puede escribirse como fue presentada en la sección 2.2.3:

$$\sum_{h=|m|}^{\infty} a^m_h M^m_{h\ell} = f^m_\ell \tag{2.76}$$

donde para simplificar se define:

$$M^m_{h\ell} = \begin{cases} \sum_{\ell'=|m|}^{\infty} \gamma^m_{h\ell'} H_{\ell'} \gamma^m_{\ell\ell'} & \text{si } h-\ell \text{ par} \\ 0 & \text{si } h-\ell \text{ impar} \end{cases} \tag{2.77}$$

y

$$f^m_\ell = \sum_{\ell'=|m|}^{\infty} c^m_{\ell'} I_{\ell'} \gamma^m_{\ell\ell'} \tag{2.78}$$

Se quiere escribir la definición de $M^m_{h\ell}$ en términos de las $\gamma^m_{\ell\ell'}$. Para ello, primero se observa que $M^m_{h\ell}$ tiene una paridad en sus índices bien definida (si $h-\ell$ es impar es cero, sino es un coeficiente), mientras que para la $\gamma^m_{\ell\ell'}$ se observa que por su definición (A.13) no tiene una paridad bien definida porque es nula cuando $\ell-\ell'$ es par excepto en el caso particular $\ell=\ell'$. Entonces lo primero que se tiene que hacer es escribir $\gamma^m_{\ell\ell'}$ de tal manera que tenga la paridad bien definida, para ello se elimina el caso especial restando la delta $\gamma^m_{\ell\ell'} - \delta_{\ell\ell'}$. Por lo tanto, los términos no nulos en $\gamma^m_{\ell\ell'} - \delta_{\ell\ell'}$ son aquellos con $\ell'-\ell$ impar. Ahora bien, los únicos términos no nulos en la sumatoria en ℓ' en (2.77) son aquellos que cumplen por un lado que $\ell'-\ell$ es impar y por otro que $\ell'-h$ es impar. Como los únicos términos no nulos son para $\ell'-\ell$ y $\ell'-h$

impares, esto implica que $h-\ell$ es par ya que es la diferencia entre las cantidades impares $\ell'-\ell$ y $\ell'-h$. Además, la cantidad no nula es justamente $\gamma^m_{\ell\ell'}$ que se tiene en la definición de $M^m_{h\ell}$ cuando $h-\ell$ es impar. Por lo tanto, $\gamma^m_{\ell\ell'}-\delta_{\ell\ell'}$ contienen la misma información sobre la paridad entre ℓ y h que $M^m_{h\ell}$, entonces puede escribirse la definición de $M^m_{h\ell}$ sin la separación entre los casos $h-\ell$ par e impar (porque está adentro de la definición de la $\gamma^m_{\ell\ell'}-\delta_{\ell\ell'}$):

$$M^m_{h\ell} = \sum_{\ell'=|m|}^{\infty} (\gamma^m_{h\ell'}-\delta_{h\ell'})H_{\ell'}(\gamma^m_{\ell\ell'}-\delta_{\ell\ell'}) \tag{A.23}$$

Además, se observa que por su definición $\gamma^m_{\ell\ell'}$ es simétrica en sus índices inferiores ($\gamma^m_{\ell\ell'} = \gamma^m_{\ell'\ell}$), entonces puede escribirse $\gamma_{\ell'\ell}$ en lugar de $\gamma_{\ell\ell'}$ (obviamente la delta también es simétrica). Entonces, escribiendo la definición de $M^m_{h\ell}$ como un producto matricial, se obtiene finalmente el resultado que se usa y se continua en la sección 2.2.3

$$M^m_{h\ell} = \left[(\gamma^m-\mathbf{1})H^D(\gamma^m-\mathbf{1})\right]_{h\ell} = \sum_{\ell'=|m|}^{\infty} (\gamma^m_{h\ell'}-\delta_{h\ell'})H_{\ell'}(\gamma^m_{\ell'\ell}-\delta_{\ell'\ell}) \tag{2.80}$$

donde H^D es una matriz diagonal cuyos elementos diagonales son H_ℓ. Además, debido a la simetría de $\gamma^m_{\ell\ell'}$, resulta que $M^m_{h\ell}$ también es simétrica en los índices inferiores ($M^m_{h\ell} = M^m_{\ell h}$).

Por otro lado, se observa también una propiedad sobre el índice m en la definición de $\gamma^m_{\ell\ell'}$ (A.13). Evaluando $\gamma^{-m}_{\ell\ell'}$:

$$\gamma^{-m}_{\ell\ell'} = \begin{cases} \sqrt{(2\ell+1)(2\ell'+1)\frac{(\ell+m)!(\ell'+m)!}{(\ell-m)!(\ell'-m)!}}\int_0^1 P^{-m}_\ell(x)P^{-m}_{\ell'}(x) & \text{si } \ell'-\ell \text{ impar} \\ 0 & \text{si } \ell'-\ell \text{ par} \end{cases} \tag{A.24}$$

Usando la propiedad de los polinomios asociados de Legendre [Weisstein 2022a]:

$$P^{-m}_\ell = (-1)^m\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}P^m_\ell \tag{A.25}$$

Reemplazando, se obtiene entonces:

$$\gamma^{-m}_{\ell\ell'} = \begin{cases} \sqrt{(2\ell+1)(2\ell'+1)\frac{(\ell-m)!(\ell'-m)!}{(\ell+m)!(\ell'+m)!}}\int_0^1 P^m_\ell(x)P^m_{\ell'}(x) & \text{si } \ell'-\ell \text{ impar} \\ 0 & \text{si } \ell'-\ell \text{ par} \end{cases} = \gamma^m_{\ell\ell'} \tag{A.26}$$

Es decir, por su definición (A.13) resulta que $\gamma^m_{\ell\ell'}$ es par en el índice m ($\gamma^{-m}_{\ell\ell'} = \gamma^m_{\ell\ell'}$). Además, se observa que $M^m_{\ell\ell'}$ tiene la misma paridad en el índice m que $\gamma^m_{\ell\ell'}$ (ya que por su definición (2.77), $M^m_{\ell\ell'}$ es producto de $\gamma^m_{\ell\ell'}$ con H_ℓ que no depende de m, y el valor inicial de ℓ en la sumatoria depende del valor absoluto $|m|$), por lo tanto también resulta que $M^{-m}_{\ell\ell'} = M^m_{\ell\ell'}$.

B. Valores medios entre operadores $\hat{a}_\ell^m$, $\hat{b}_\ell^m$ y $\hat{c}_\ell^m$

En este apéndice se demuestran las ecuaciones presentadas en la sección 3.1 (ec. (3.8), (3.10), (3.11) y (3.12)). Para ello, se parte de la definición de $\hat{c}_\ell^m$ (ec. (3.6)):

$$\hat{c}_\ell^m = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}\ell}}{2\pi^2\sqrt{2(\omega_p - e\mu)}}\hat{A}_{\vec{k}}Y_\ell^{m*}(\check{n})w_\ell(r_m) \tag{3.6}$$

y de su análogo para antipartículas:

$$\hat{\bar{c}}_\ell^m = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}\ell}}{2\pi^2\sqrt{2(\omega_p + e\mu)}}\hat{B}_{\vec{k}}Y_\ell^{m*}(\check{n})w_\ell(r_m) \tag{3.9}$$

Calculando inmediatamente el valor de expectación del operador cuadrático $\hat{c}_\ell^m\hat{c}_\ell^{m\dagger}$ sobre todas las posibles direcciones de incidencia:

$$\begin{aligned}\int d\check{n}\, d\check{n}'\ \langle\hat{c}_\ell^{m\dagger}\hat{c}_{\ell'}^{m'}\rangle = \int d\check{n}\, d\check{n}'\ &\frac{e^{i\frac{\pi}{2}(\ell'-\ell)}}{(2\pi^2)^2\sqrt{2(\omega_p - e\mu)}\sqrt{2(\omega_p' - e\mu)}}\times \\ &\times Y_\ell^m(\check{n})Y_{\ell'}^{m'*}(\check{n}')w_\ell^*(r_m)w_{\ell'}(r_m)\,\langle\hat{A}_{\vec{k}}^\dagger\hat{A}_{\vec{k}'}\rangle\end{aligned} \tag{B.1}$$

$$\begin{aligned}\int d\check{n}\, d\check{n}'\ \langle\hat{c}_\ell^{m\dagger}\hat{c}_{\ell'}^{m'}\rangle = \int d\check{n}\, d\check{n}'\ &\frac{e^{i\frac{\pi}{2}(\ell'-\ell)}}{\cancel{(2\pi)^3}\pi\sqrt{\omega_p - e\mu}\sqrt{\omega_p' - e\mu}}\times \\ &\times Y_\ell^m(\check{n})Y_{\ell'}^{m'*}(\check{n}')w_\ell^*(r_m)w_{\ell'}(r_m)\frac{\cancel{(2\pi)^3}\delta^3(\vec{k}-\vec{k}')}{e^{\frac{\omega_p - e\mu}{T}} - 1}\end{aligned} \tag{B.2}$$

O usando la delta de Dirac en coordenadas esféricas,

$$\begin{aligned}\int d\check{n}\, d\check{n}'\ \langle\hat{c}_\ell^{m\dagger}\hat{c}_{\ell'}^{m'}\rangle = \int d\check{n}\, d\check{n}'\ &\frac{e^{i\frac{\pi}{2}(\ell'-\ell)}}{\pi\sqrt{\omega_p - e\mu}\sqrt{\omega_p' - e\mu}}\times \\ &\times Y_\ell^m(\check{n})Y_{\ell'}^{m'*}(\check{n}')\frac{w_\ell^*(r_m)w_{\ell'}(r_m)}{e^{\frac{\omega_p - \mu}{T}} - 1}\frac{\delta(k-k)}{k^2}\frac{\delta(\theta-\theta')\delta(\phi-\phi')}{\sin(\theta)}\end{aligned} \tag{B.3}$$

La integral es sobre todas las direcciones posibles pero no sobre k, entonces en el integrando queda solo la dependencia angular. Además, tomando $\omega_p = \omega_p'$ ya que este será el único caso no nulo debido a la delta $\delta(k-k')$,

$$\begin{aligned}\int d\check{n}\, d\check{n}'\ \langle\hat{c}_\ell^{m\dagger}\hat{c}_{\ell'}^{m'}\rangle = &\frac{w_\ell^*(r_m)w_{\ell'}(r_m)}{\pi(\omega_p - e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p - e\mu}{T}} - 1\right)}e^{i\frac{\pi}{2}(\ell'-\ell)}\frac{\delta(k-k')}{k^2}\times \\ &\times\int d\check{n}\, d\check{n}'\, Y_\ell^m(\check{n})Y_{\ell'}^{m'*}(\check{n}')\frac{\delta(\theta-\theta')\delta(\phi-\phi')}{\sin(\theta)}\end{aligned} \tag{B.4}$$

Primero usando las deltas angulares,

$$\int d\check{n}\, d\check{n}'\ \langle\hat{c}_\ell^{m\dagger}\hat{c}_{\ell'}^{m'}\rangle = \frac{w_\ell^*(r_m)w_{\ell'}(r_m)e^{i\frac{\pi}{2}(\ell'-\ell)}}{\pi(\omega_p - e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p - e\mu}{T}} - 1\right)}\frac{\delta(k-k')}{k^2}\int d\check{n}\, Y_\ell^m(\check{n})Y_{\ell'}^{m'*}(\check{n}) \tag{B.5}$$

Usando ahora la ortonormalidad de los armónicos esféricos,

$$\int d\check{n}\, d\check{n}'\ \langle \hat{c}_\ell^{m\dagger} \hat{c}_{\ell'}^{m'} \rangle = \frac{w_\ell^*(r_m) w_{\ell'}(r_m)}{\pi(\omega_p - e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p - e\mu}{T}} - 1\right)} \frac{\delta(k-k')}{k^2} e^{i\frac{\pi}{2}(\ell'-\ell)} \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \tag{B.6}$$

Nuevamente, puede tomarse $\ell = \ell'$ en la exponencial y en la función w ya que estos serán los únicos términos no nulos debido a la delta $\delta_{\ell\ell'}$. Finalmente se obtiene:

$$\int d\check{n}\, d\check{n}'\ \langle \hat{c}_\ell^{m\dagger} \hat{c}_{\ell'}^{m'} \rangle = \frac{|w_\ell(r_m)|^2}{\pi(\omega_p - e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p - e\mu}{T}} - 1\right)} \frac{\delta(k-k')}{k^2} \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \tag{3.8}$$

Procediendo de la misma manera para antipartículas, donde en este caso se usa la definición (3.9) y se obtiene el valor de expectación del operador cuadrático considerando todas las posibles direcciones de incidencia,

$$\int d\check{n}\, d\check{n}'\ \langle \hat{\bar{c}}_\ell^{m\dagger} \hat{\bar{c}}_{\ell'}^{m'} \rangle = \frac{|w_\ell(r_m)|^2}{\pi(\omega_p + e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p + e\mu}{T}} - 1\right)} \frac{\delta(k-k')}{k^2} \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \tag{3.9}$$

Por otro lado, a partir de (3.8) y de los resultados clásicos (ec. (2.88) y (2.90)), pueden obtenerse de la misma manera resultados análogos para las combinaciones entre $\hat{c}_\ell^m$ y $\hat{b}_\ell^m$ que se presentan en la sección 3.1:

$$\begin{aligned}\int d\check{n}\, d\check{n}'\ \langle \hat{c}_\ell^{m\dagger} \hat{b}_{\ell'}^{m'} \rangle &= \int d\check{n}\, d\check{n}'\ \langle \hat{c}_\ell^{m\dagger} \sum_{\ell''=|m'|}^{\infty} \hat{c}_{\ell''}^{m'} O_{\ell'\ell''} \rangle = \sum_{\ell''=|m'|} O_{\ell'\ell''} \int d\check{n}\, d\check{n}'\ \langle \hat{c}_\ell^{m\dagger} \hat{c}_{l''}^{m'} \rangle \\ &= \sum_{\ell''=|m'|} O_{\ell'\ell''} \frac{|w_{\ell''}(r_m)|^2}{\pi(\omega_p - e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p - e\mu}{T}} - 1\right)} \frac{\delta(k-k')}{k^2} \delta_{\ell\ell''} \delta_{mm'}\end{aligned} \tag{B.7}$$

Usando la delta $\delta_{\ell'\ell''}$ se tiene entonces:

$$\int d\check{n}\, d\check{n}'\ \langle \hat{c}_\ell^{m\dagger} \hat{b}_{\ell'}^{m'} \rangle = O_{\ell'\ell} \frac{|w_\ell(r_m)|^2}{\pi(\omega_p - e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p - e\mu}{T}} - 1\right)} \frac{\delta(k-k')}{k^2} \delta_{mm'} \tag{3.10}$$

Otro resultado útil,

$$\begin{aligned}\int d\check{n}\, d\check{n}'\ \langle \hat{b}_\ell^{m\dagger} \hat{c}_{\ell'}^{m'} \rangle &= \int d\check{n}\, d\check{n}'\ \langle \sum_{\ell''=|m|}^{\infty} \hat{c}_{\ell''}^{m\dagger} O^*_{\ell\ell''} \hat{c}_{\ell'}^{m'} \rangle = \sum_{\ell''=|m|} O^*_{\ell\ell''} \int d\check{n}\, d\check{n}'\ \langle \hat{c}_{\ell''}^{m\dagger} \hat{c}_{\ell'}^{m'} \rangle \\ &= \sum_{\ell''=|m|} O^*_{\ell\ell''} \frac{|w_{\ell''}(r_m)|^2}{\pi(\omega_p - e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p - e\mu}{T}} - 1\right)} \frac{\delta(k-k')}{k^2} \delta_{\ell'\ell''} \delta_{m'm}\end{aligned} \tag{B.8}$$

Usando la delta $\delta_{\ell'\ell''}$ se tiene entonces:

$$\int d\check{n}\, d\check{n}'\ \langle \hat{b}_\ell^{m\dagger} \hat{c}_{\ell'}^{m'} \rangle = O^*_{\ell\ell'} \frac{|w_{\ell'}(r_m)|^2}{\pi(\omega_p - e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p - e\mu}{T}} - 1\right)} \frac{\delta(k-k')}{k^2} \delta_{m'm} \tag{3.11}$$

Otro resultado útil,

$$\begin{aligned}\int d\check{n}\, d\check{n}'\ \langle \hat{b}_\ell^{m\dagger}\hat{b}_{\ell'}^{m'}\rangle &= \int d\check{n}\, d\check{n}'\ \langle \sum_{\ell''=|m|}^{\infty}\sum_{\ell'''=|m'|}^{\infty} \hat{c}_{\ell''}^{\dagger} O_{\ell\ell''}^{*}\hat{c}_{\ell'''}O_{\ell'\ell'''}\rangle \\ &= \sum_{\ell''=|m|}^{\infty}\sum_{\ell'''=|m'|}^{\infty} O_{\ell\ell''}^{*}O_{\ell'\ell'''}\int d\check{n}\, d\check{n}'\ \langle \hat{c}_{\ell''}^{m\dagger}\hat{c}_{\ell'''}^{m'}\rangle \\ &= \sum_{\ell''=|m|}^{\infty}\sum_{\ell'''=|m'|}^{\infty} \frac{|w_{\ell''}(r_m)|^2 O_{\ell\ell''}^{*}O_{\ell'\ell'''}}{\pi(\omega_p - e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p - e\mu}{T}}-1\right)}\frac{\delta(k-k')}{k^2}\delta_{\ell''\ell'''}\delta_{mm'}\end{aligned} \tag{B.9}$$

Usando la delta $\delta_{\ell''\ell'''}$ se tiene entonces:

$$\int d\check{n}\, d\check{n}'\ \langle \hat{b}_\ell^{m\dagger}\hat{b}_{\ell'}^{m'}\rangle = \sum_{\ell''=|m|}^{\infty} O_{\ell\ell''}^{*}O_{\ell'\ell''}\frac{|w_{\ell''}(r_m)|^2}{\pi(\omega_p - e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p - e\mu}{T}}-1\right)}\frac{\delta(k-k')}{k^2}\delta_{mm'} \tag{3.12}$$

Análogamente se encuentran las mismas expresiones para los operadores de antipartículas $\hat{\tilde{c}}_\ell^m$ y $\hat{\tilde{b}}_\ell^m$ intercambiando $\mu \to -\mu$.

C. Fuerza del cohete de BH: Cambio de base

En este apéndice se demuestra como cambiar el tensor energía-momento escrito originalmente en coordenadas cartesianas (como puede verse en la expresión obtenida para la fuerza del cohete de BH (3.29)),

$$F_j = \int r^2 d\Omega \, n_r^i \, T_{ij}|_{r\to\infty} \tag{3.29}$$

a coordenadas esféricas (ya que en la sección 3.2 se escribe el $T_{\mu\nu}$ en estas coordenadas). Para comenzar, nótese que en el integrando se tiene un tensor $(1,0)$ (el vector n_r^i) contraído con un tensor $(0,2)$ (el T_{ij}), por lo tanto el integrando transforma globalmente como un tensor $(0,1)$ (una 1-forma). Entonces, puede escribirse el integrando en esféricas y transformarlo a cartesianas usando solo una matriz de transformación:

$$n_r^i \, T_{ij} = n_r^i \, T_{ij'} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} \tag{C.1}$$

donde las coordenadas $x^{j'}$ son las esféricas (r,θ,ϕ). Además, puede cambiarse la componente cartesiana i por la esférica i' ya que esta contraída (es un índice mudo). Al hacer esto, se pasa el vector normal n_r^i a coordenadas esféricas, el cual toma la forma $n_r^{i'} = (1,0,0)$ (donde se toma $+1$ porque el vector normal es radial, es decir saliente a la superficie), luego la única componente no nula será la radial:

$$n_r^i \, T_{ij} = T_{rj'} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} \tag{C.2}$$

Entonces solamente resta obtener la matriz de transformación, para ello resulta conveniente primero obtener la transformación inversa,

$$\left[\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\right] = \begin{pmatrix} \cos\phi \, \sin\theta & \sin\phi \, \sin\theta & \cos\theta \\ -r\sin\phi \, \sin\theta & r\cos\phi \, \sin\theta & 0 \\ r\cos\phi \, \cos\theta & r\sin\phi \, \cos\theta & r\sin\theta \end{pmatrix} \tag{C.3}$$

y luego invertir:

$$\left[\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j}\right] = \left[\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\right]^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\phi \, \sin\theta & -\frac{\sin\phi \, \csc\theta}{r} & \frac{\cos\phi \, \cos\theta}{r} \\ \sin\phi \, \sin\theta & \frac{\cos\phi \, \csc\theta}{r} & \frac{\sin\phi \cos\theta}{r} \\ \cos\theta & 0 & -\frac{\sin\theta}{r} \end{pmatrix} \tag{C.4}$$

Entonces, desarrollando explícitamente la suma resultante en el integrando, se obtiene la expresión (3.30) presentada en la sección 3.3:

$$F_j = \int d\Omega \, r^2 (T_{rr}\partial_j r + T_{r\phi}\partial_j \phi) + T_{r\theta}\partial_j \theta|_{r\to\infty} \tag{3.30}$$

donde según (C.4): $\partial_j r = (\cos\phi \sin\theta, \sin\phi \sin\theta, \cos\theta)$, $\partial_j \phi = r^{-1}(-\sin\phi \csc\theta, \cos\phi \csc\theta, 0)$ y $\partial_j \theta = r^{-1}(\cos\phi \, \cos\theta, \sin\phi \, \cos\theta, -\sin\theta)$.

D. Valores medios entre los campos incidente y dispersado

En este apéndice se obtienen los valores medios entre los campos ($\langle: \hat{\Phi}^{scat\dagger}(\mathbf{x})\hat{\Phi}^{scat}(\mathbf{x}') :\rangle$, $\langle: \hat{\Phi}^{scat\dagger}(\mathbf{x})\hat{\Phi}^{inc}(\mathbf{x}') :\rangle$ y $\langle: \hat{\Phi}^{inc\dagger}(\mathbf{x})\hat{\Phi}^{inc}(\mathbf{x}') :\rangle$), resultados requeridos en la sección 3.4 para calcular las componentes del tensor energía-momento. Para ello se usan los campos obtenidos en la sección 3.1:

$$\hat{\Phi}^{scat}(r,\theta,\phi,t) = \int_{\infty}^{\infty} d^3k \sum_{\ell,m} \Bigg(e^{-i(\omega_p - e\mu)t}\, \hat{b}_\ell^m \frac{v_\ell(r)}{v_\ell(r_m)} Y_\ell^m(\theta,\phi) + e^{i(\omega_p + e\mu)t}\, \hat{\tilde{b}}_\ell^{m\dagger} \frac{v_\ell^*(r)}{v_\ell^*(r_m)} Y_\ell^{m*}(\theta,\phi) \Bigg) \tag{3.14}$$

$$\hat{\Phi}^{inc}(r,\theta,\phi,t) = \int_{\infty}^{\infty} d^3k \sum_{\ell,m} \Bigg(e^{-i(\omega_p - e\mu)t}\, \hat{c}_\ell^m \frac{w_\ell(r)}{w_\ell(r_m)} Y_\ell^m(\theta,\phi) + e^{i(\omega_p + e\mu)t}\, \hat{\tilde{c}}_\ell^{m\dagger} \frac{w_\ell^*(r)}{w_\ell^*(r_m)} Y_\ell^{m*}(\theta,\phi) \Bigg) \tag{3.15}$$

Primero se obtiene el valor medio $\langle: \hat{\Phi}^{scat\dagger}(\mathbf{x})\hat{\Phi}^{scat}(\mathbf{x}') :\rangle$, entonces reemplazando por la expresión (3.14):

$$\begin{aligned}\langle: \hat{\Phi}^{scat\dagger}(\mathbf{x})\hat{\Phi}^{scat}(\mathbf{x}') :\rangle = \langle: \int d^3k \sum_{\ell,m} \Bigg(& e^{i(\omega_p - e\mu)t}\, \hat{b}_\ell^{m\dagger} \frac{v_\ell^*(r)}{v_\ell^*(r_m)} Y_\ell^{m*}(\theta,\phi) \\ & + e^{-i(\omega_p + e\mu)t}\, \hat{\tilde{b}}_\ell^m \frac{v_\ell(r)}{v_\ell(r_m)} Y_\ell^m(\theta,\phi) \Bigg) \\ \times \int d^3k' \sum_{\ell',m'} \Bigg(& e^{-i(\omega_p' - e\mu)t'}\, \hat{b}_{\ell'}^{m'} \frac{v_{\ell'}(r')}{v_{\ell'}(r_m)} Y_{\ell'}^{m'}(\theta',\phi') \\ & + e^{i(\omega_p' + e\mu)t'}\, \hat{\tilde{b}}_{\ell'}^{m'\dagger} \frac{v_{\ell'}^*(r')}{v_{\ell'}^*(r_m)} Y_{\ell'}^{m'*}(\theta',\phi') \Bigg) :\rangle\end{aligned} \tag{D.1}$$

Desarrollando el producto,

$$\begin{aligned}\langle: \hat{\Phi}^{scat\dagger}(\mathbf{x})\hat{\Phi}^{scat}(\mathbf{x}') :\rangle = \int d^3k\, d^3k' \sum_{\ell,m}\sum_{\ell',m'} \times \\ \times \Bigg[& e^{i((\omega_p - e\mu)t - (\omega_p' - e\mu)t')} \frac{v_\ell^*(r) v_{\ell'}(r')}{v_\ell^*(r_m) v_{\ell'}(r_m)} Y_\ell^{m*}(\theta,\phi) Y_{\ell'}^{m'}(\theta',\phi') \langle \hat{b}_\ell^{m\dagger} \hat{b}_{\ell'}^{m'} \rangle \\ & \cancel{+ e^{i((\omega_p - e\mu)t + (\omega_p' + e\mu)t')} \frac{v_\ell^*(r) v_{\ell'}^*(r')}{v_\ell^*(r_m) v_{\ell'}^*(r_m)} Y_\ell^{m*}(\theta,\phi) Y_{\ell'}^{m'*}(\theta',\phi') \langle \hat{b}_\ell^{m\dagger} \hat{\tilde{b}}_{\ell'}^{m'\dagger} \rangle} \\ & \cancel{+ e^{-i((\omega_p + e\mu)t + (\omega_p' - e\mu)t')} \frac{v_\ell(r) v_{\ell'}(r')}{v_\ell(r_m) v_{\ell'}(r_m)} Y_\ell^{m}(\theta,\phi) Y_{\ell'}^{m'}(\theta',\phi') \langle \hat{\tilde{b}}_\ell^{m} \hat{b}_{\ell'}^{m'} \rangle} \\ & + e^{-i((\omega_p + e\mu)t - (\omega_p' + e\mu)t')} \frac{v_\ell(r) v_{\ell'}^*(r')}{v_\ell(r_m) v_{\ell'}^*(r_m)} Y_\ell^{m}(\theta,\phi) Y_{\ell'}^{m'*}(\theta',\phi') \langle \hat{\tilde{b}}_{\ell'}^{m'\dagger} \hat{\tilde{b}}_\ell^{m} \rangle \Bigg]\end{aligned} \tag{D.2}$$

Como ya fue estudiado en el apéndice B, el único valor medio no nulo entre los coeficientes $\hat{b}_\ell^m$ es el $\langle \hat{b}_\ell^{m\dagger}\hat{b}_{\ell'}^{m'}\rangle$, luego los términos tachados son nulos. Además, usando coordenadas esféricas para la variable k y k' en el espacio de Fourier, puede usarse para la parte angular el valor esperado del operador $\hat{b}_\ell^m$ sobre todas las direcciones posibles obtenido en (3.12) (desarrollado en el apéndice B), evaluando así el valor medio de los campos:

$$\begin{aligned}\langle :\hat{\Phi}^{scat\dagger}(\mathbf{x})\hat{\Phi}^{scat}(\mathbf{x}'):\rangle = \int k^2\,dk\,k'^2\,dk' \sum_{\ell,m}\sum_{\ell',m'}\sum_{\ell''=|m|} \times \\ \times \Bigg[e^{i((\omega_p-e\mu)t-(\omega_p'-e\mu)t')}\frac{v_\ell^*(r)v_{\ell'}(r')}{v_\ell^*(r_m)v_{\ell'}(r_m)}Y_\ell^{m*}(\theta,\phi)Y_{\ell'}^{m'}(\theta',\phi')\times \\ \times \frac{|w_{\ell''}(r_m)|^2 O_{\ell\ell''}^* O_{\ell'\ell''}\,\delta_{mm'}}{\pi(\omega_p-e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p-e\mu}{T}}-1\right)}\frac{\delta(k-k')}{k^2} \\ + e^{-i((\omega_p+e\mu)t-(\omega_p'+e\mu)t')}\frac{v_\ell(r)v_{\ell'}^*(r')}{v_\ell(r_m)v_{\ell'}^*(r_m)}Y_\ell^{m}(\theta,\phi)Y_{\ell'}^{m'*}(\theta',\phi')\times \\ \times \frac{|w_{\ell''}(r_m)|^2 O_{\ell'\ell''}^* O_{\ell\ell''}\,\delta_{mm'}}{\pi(\omega_p+e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p+e\mu}{T}}-1\right)}\frac{\delta(k-k')}{k^2}\Bigg]\end{aligned} \tag{D.3}$$

Usando las deltas y simplificando un poco esta última expresión, se obtiene:

$$\begin{aligned}\langle :\hat{\Phi}^{scat\dagger}(\mathbf{x})\hat{\Phi}^{scat}(\mathbf{x}'):\rangle = \int dk\,k^2 \sum_{\ell,\ell',m}\sum_{\ell''=|m|}\frac{|w_{\ell''}(r_m)|^2}{\pi}\times \\ \times \Bigg[e^{i(\omega_p-e\mu)(t-t')}\frac{v_\ell^*(r)v_{\ell'}(r')}{v_\ell^*(r_m)v_{\ell'}(r_m)}\frac{Y_\ell^{m*}(\theta,\phi)Y_{\ell'}^{m}(\theta',\phi')O_{\ell\ell''}^* O_{\ell'\ell''}}{(\omega_p-e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p-e\mu}{T}}-1\right)} \\ + e^{-i(\omega_p+e\mu)(t-t')}\frac{v_\ell(r)v_{\ell'}^*(r')}{v_\ell(r_m)v_{\ell'}^*(r_m)}\frac{Y_\ell^{m}(\theta,\phi)Y_{\ell'}^{m*}(\theta',\phi')O_{\ell'\ell''}^* O_{\ell\ell''}}{(\omega_p+e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p+e\mu}{T}}-1\right)}\Bigg]\end{aligned} \tag{3.39}$$

Análogamente se obtiene ahora el valor medio $\langle :\hat{\Phi}^{scat\dagger}(\mathbf{x})\hat{\Phi}^{inc}(\mathbf{x}'):\rangle$, entonces reemplazando por la expresión (3.14) y (3.15):

$$\begin{aligned}\langle :\hat{\Phi}^{scat\dagger}(\mathbf{x})\hat{\Phi}^{inc}(\mathbf{x}'):\rangle = \langle :\int d^3k \sum_{\ell,m}\Bigg(e^{i(\omega_p-e\mu)t}\hat{b}_\ell^{m\dagger}\frac{v_\ell^*(r)}{v_\ell^*(r_m)}Y_\ell^{m*}(\theta,\phi) \\ + e^{-i(\omega_p+e\mu)t}\hat{\tilde{b}}_\ell^{m}\frac{v_\ell(r)}{v_\ell(r_m)}Y_\ell^{m}(\theta,\phi)\Bigg) \\ \times \int d^3k' \sum_{\ell',m'}\Bigg(e^{-i(\omega_p'-e\mu)t'}\hat{c}_{\ell'}^{m'}\frac{w_{\ell'}(r')}{w_{\ell'}(r_m)}Y_{\ell'}^{m'}(\theta',\phi') \\ + e^{i(\omega_p'+e\mu)t'}\hat{\tilde{c}}_{\ell'}^{m'\dagger}\frac{w_{\ell'}^*(r')}{w_{\ell'}^*(r_m)}Y_{\ell'}^{m'*}(\theta',\phi')\Bigg) :\rangle\end{aligned} \tag{D.4}$$

Desarrollando el producto,

$$\begin{aligned}\langle :\hat{\Phi}^{scat\dagger}(\mathbf{x})\hat{\Phi}^{inc}(\mathbf{x}'):\rangle = \int d^3k\, d^3k' \sum_{\ell,m}\sum_{\ell',m'} \times \\ \times \Bigg[e^{i((\omega_p-e\mu)t-(\omega_p'-e\mu)t')} \frac{v_\ell^*(r)w_{\ell'}(r')}{v_\ell^*(r_m)w_{\ell'}(r_m)} Y_\ell^{m*}(\theta,\phi)Y_{\ell'}^{m'}(\theta',\phi')\,\langle \hat{b}_\ell^{m\dagger}\hat{c}_{\ell'}^{m'}\rangle \\ \cancel{+e^{i((\omega_p-e\mu)t+(\omega_p'+e\mu)t')} \frac{v_\ell^*(r)w_{\ell'}^*(r')}{v_\ell^*(r_m)w_{\ell'}^*(r_m)} Y_\ell^{m*}(\theta,\phi)Y_{\ell'}^{m'*}(\theta',\phi')\,\langle \hat{b}_\ell^{m\dagger}\hat{\tilde{c}}_{\ell'}^{m'\dagger}\rangle} \\ \cancel{+e^{-i((\omega_p+e\mu)t+(\omega_p'-e\mu)t')} \frac{v_\ell(r)w_{\ell'}(r')}{v_\ell(r_m)w_{\ell'}(r_m)} Y_\ell^{m}(\theta,\phi)Y_{\ell'}^{m'}(\theta',\phi')\,\langle \hat{\tilde{b}}_\ell^{m}\hat{c}_{\ell'}^{m'}\rangle} \\ + e^{-i((\omega_p+e\mu)t-(\omega_p'+e\mu)t')} \frac{v_\ell(r)w_{\ell'}^*(r')}{v_\ell(r_m)w_{\ell'}^*(r_m)} Y_\ell^{m}(\theta,\phi)Y_{\ell'}^{m'*}(\theta',\phi')\,\langle \hat{\tilde{c}}_{\ell'}^{m'\dagger}\hat{\tilde{b}}_\ell^{m}\rangle \Bigg]\end{aligned} \tag{D.5}$$

El único valor medio no nulo entre los coeficientes $\hat{b}_\ell^m$ y $\hat{c}_\ell^m$ son $\langle \hat{b}_\ell^{m\dagger}\hat{c}_{\ell'}^{m'}\rangle$ y $\langle \hat{c}_\ell^{m\dagger}\hat{b}_{\ell'}^{m'}\rangle$ (ver apéndice B), luego los términos tachados son nulos. Además, usando coordenadas esféricas para la variable k y k' en el espacio de Fourier, pueden usarse para la parte angular los valores esperados entre los operadores $\hat{b}_\ell^m$ y $\hat{c}_\ell^m$ sobre todas las direcciones posibles obtenidos en (3.11) y (3.10) (desarrollado en el apéndice B), evaluando así el valor medio de los campos:

$$\begin{aligned}\langle :\hat{\Phi}^{scat\dagger}(\mathbf{x})\hat{\Phi}^{inc}(\mathbf{x}'):\rangle = \int k^2\, dk\, k'^2\, dk' \sum_{\ell,m}\sum_{\ell',m'} \times \\ \times \Bigg[e^{i((\omega_p-e\mu)t-(\omega_p'-e\mu)t')} \frac{v_\ell^*(r)w_{\ell'}(r')}{v_\ell^*(r_m)w_{\ell'}(r_m)} Y_\ell^{m*}(\theta,\phi)Y_{\ell'}^{m'}(\theta',\phi') \times \\ \times \frac{O_{\ell\ell'}^*|w_{\ell'}(r_m)|^2\delta_{m'm}}{\pi(\omega_p-e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p-e\mu}{T}}-1\right)} \frac{\delta(k-k')}{k^2} \\ + e^{-i((\omega_p+e\mu)t-(\omega_p'+e\mu)t')} \frac{v_\ell(r)w_{\ell'}^*(r')}{v_\ell(r_m)w_{\ell'}^*(r_m)} Y_\ell^{m}(\theta,\phi)Y_{\ell'}^{m'*}(\theta',\phi') \\ \times \frac{O_{\ell\ell'}|w_{\ell'}(r_m)|^2\delta_{m'm}}{\pi(\omega_p+e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p+e\mu}{T}}-1\right)} \frac{\delta(k-k')}{k^2} \Bigg]\end{aligned} \tag{D.6}$$

Usando las deltas y simplificando un poco esta última expresión, se obtiene:

$$\begin{aligned}\langle :\hat{\Phi}^{scat\dagger}(\mathbf{x})\hat{\Phi}^{inc}(\mathbf{x}'):\rangle = \int dk\, k^2 \sum_{\ell,m,\ell'} \frac{|w_{\ell'}(r_m)|^2}{\pi} \times \\ \times \Bigg[e^{i(\omega_p-e\mu)(t-t')} \frac{v_\ell^*(r)w_{\ell'}(r')}{v_\ell^*(r_m)w_{\ell'}(r_m)} \frac{Y_\ell^{m*}(\theta,\phi)Y_{\ell'}^{m}(\theta',\phi')O_{\ell\ell'}^*}{(\omega_p-e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p-e\mu}{T}}-1\right)} \\ + e^{-i(\omega_p+e\mu)(t-t')} \frac{v_\ell(r)w_{\ell'}^*(r')}{v_\ell(r_m)w_{\ell'}^*(r_m)} \frac{Y_\ell^{m}(\theta,\phi)Y_{\ell'}^{m*}(\theta',\phi')O_{\ell\ell'}}{(\omega_p+e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p+e\mu}{T}}-1\right)} \Bigg]\end{aligned} \tag{3.40}$$

Finalmente, análogamente se obtiene el valor medio $\langle : \hat{\Phi}^{inc\dagger}(\mathbf{x})\hat{\Phi}^{scat}(\mathbf{x}') : \rangle$, entonces reemplazando por la expresión (3.14) y (3.15):

$$\begin{aligned}\langle : \hat{\Phi}^{inc\dagger}(\mathbf{x})\hat{\Phi}^{scat}(\mathbf{x}') : \rangle =& \langle : \int d^3k \sum_{\ell,m} \Bigg(e^{i(\omega_p - e\mu)t} \hat{c}_\ell^{m\dagger} \frac{w_\ell^*(r)}{w_\ell^*(r_m)} Y_\ell^{m*}(\theta,\phi) \times \\ & + e^{-i(\omega_p + e\mu)t} \hat{\tilde{c}}_\ell^{m} \frac{w_\ell(r)}{w_\ell(r_m)} Y_\ell^{m}(\theta,\phi) \Bigg) \\ & \times \int d^3k' \sum_{\ell',m'} \Bigg(e^{-i(\omega_p' - e\mu)t'} \hat{b}_{\ell'}^{m'} \frac{v_{\ell'}(r')}{v_{\ell'}(r_m)} Y_{\ell'}^{m'}(\theta',\phi') \\ & + e^{i(\omega_p' + e\mu)t'} \hat{\tilde{b}}_{\ell'}^{m'\dagger} \frac{v_{\ell'}^*(r')}{v_{\ell'}^*(r_m)} Y_{\ell'}^{m'*}(\theta',\phi') \Bigg) : \rangle \end{aligned} \tag{D.7}$$

Desarrollando el producto,

$$\begin{aligned}\langle : \hat{\Phi}^{inc\dagger}(\mathbf{x})\hat{\Phi}^{scat}(\mathbf{x}') : \rangle =& \int d^3k\, d^3k' \sum_{\ell,m} \sum_{\ell',m'} \times \\ & \times \Bigg[e^{i((\omega_p - e\mu)t - (\omega_p' - e\mu)t')} \frac{w_\ell^*(r) v_{\ell'}(r')}{w_\ell^*(r_m) v_{\ell'}(r_m)} Y_\ell^{m*}(\theta,\phi) Y_{\ell'}^{m'}(\theta',\phi') \langle \hat{c}_\ell^{m\dagger} \hat{b}_{\ell'}^{m'} \rangle \\ & \cancel{+ e^{i((\omega_p - e\mu)t + (\omega_p' + e\mu)t')} \frac{w_\ell^*(r) v_{\ell'}^*(r')}{w_\ell^*(r_m) v_{\ell'}^*(r_m)} Y_\ell^{m*}(\theta,\phi) Y_{\ell'}^{m'*}(\theta',\phi') \langle \hat{c}_\ell^{m\dagger} \hat{\tilde{b}}_{\ell'}^{m'\dagger} \rangle} \\ & \cancel{+ e^{-i((\omega_p + e\mu)t + (\omega_p' - e\mu)t')} \frac{w_\ell(r) v_{\ell'}(r')}{w_\ell(r_m) v_{\ell'}(r_m)} Y_\ell^{m}(\theta,\phi) Y_{\ell'}^{m'}(\theta',\phi') \langle \hat{\tilde{c}}_\ell^{m} \hat{b}_{\ell'}^{m'} \rangle} \\ & + e^{-i((\omega_p + e\mu)t - (\omega_p' + e\mu)t')} \frac{w_\ell(r) v_{\ell'}^*(r')}{w_\ell(r_m) v_{\ell'}^*(r_m)} Y_\ell^{m}(\theta,\phi) Y_{\ell'}^{m'*}(\theta',\phi') \langle \hat{\tilde{b}}_{r_m'}^{m'\dagger} \hat{\tilde{c}}_\ell^{m} \rangle \Bigg] \end{aligned} \tag{D.8}$$

Nuevamente, los términos tachados son nulos ya que los únicos valores medios no nulos son $\langle \hat{b}_\ell^{m\dagger} \hat{c}_{\ell'}^{m'} \rangle$ y $\langle \hat{c}_\ell^{m\dagger} \hat{b}_{\ell'}^{m'} \rangle$ (ver apéndice B). Además, usando coordenadas esféricas para la variable k y k' en el espacio de Fourier, pueden usarse para la parte angular los valores esperados entre los operadores $\hat{b}_\ell^m$ y $\hat{c}_\ell^m$ sobre todas las direcciones posibles obtenidos en (3.11) y (3.10) (desarrollado en el apéndice B), evaluando

así el valor medio de los campos:

$$\begin{aligned}\langle : \hat{\Phi}^{inc\dagger}(\mathbf{x})\hat{\Phi}^{scat}(\mathbf{x}') : \rangle = \int dk\, k^2\, dk'\, k'^2 \sum_{\ell,m} \sum_{\ell',m'} \times \\ \times \Bigg[e^{i((\omega_p - e\mu)t - (\omega'_p - e\mu)t')} \frac{w^*_\ell(r) v_{\ell'}(r')}{w^*_\ell(r_m) v_{\ell'}(r_m)} Y^{m*}_\ell(\theta,\phi) Y^{m'}_{\ell'}(\theta',\phi') \times \\ \times \frac{O_{\ell'\ell} |w_\ell(r_m)|^2 \delta_{mm'}}{\pi(\omega_p - e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p - e\mu}{T}} - 1\right)} \frac{\delta(k-k')}{k^2} \\ + e^{-i((\omega_p + e\mu)t - (\omega'_p + e\mu)t')} \frac{w_\ell(r) v^*_{\ell'}(r')}{w_\ell(r_m) v^*_{\ell'}(r_m)} Y^{m}_\ell(\theta,\phi) Y^{m'*}_{\ell'}(\theta',\phi') \times \\ \times \frac{O^*_{\ell'\ell} |w_\ell(r_m)|^2 \delta_{mm'}}{\pi(\omega_p + e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p + e\mu}{T}} - 1\right)} \frac{\delta(k-k')}{k^2} \Bigg]\end{aligned} \tag{D.9}$$

Usando las deltas y simplificando un poco esta última expresión, se obtiene:

$$\begin{aligned}\langle : \hat{\Phi}^{inc\dagger}(\mathbf{x})\hat{\Phi}^{scat}(\mathbf{x}') : \rangle = \int dk\, k^2 \sum_{\ell,m,\ell'} \frac{|w_\ell(r_m)|^2}{\pi} \times \\ \times \Bigg[e^{i(\omega_p - e\mu)(t-t')} \frac{w^*_\ell(r) v_{\ell'}(r')}{w^*_\ell(r_m) v_{\ell'}(r_m)} \frac{Y^{m*}_\ell(\theta,\phi) Y^{m}_{\ell'}(\theta',\phi') O_{\ell'\ell}}{(\omega_p - e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p - e\mu}{T}} - 1\right)} \\ + e^{-i(\omega_p + e\mu)(t-t')} \frac{w_\ell(r) v^*_{\ell'}(r')}{w_\ell(r_m) v^*_{\ell'}(r_m)} \frac{Y^{m}_\ell(\theta,\phi) Y^{m*}_{\ell'}(\theta',\phi') O^*_{\ell'\ell}}{(\omega_p + e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p + e\mu}{T}} - 1\right)} \Bigg]\end{aligned} \tag{3.41}$$

E. Cálculo de la componente T_{rr}

En este apéndice se obtienen las descomposiciones de la componente T_{rr} del tensor energía-momento en las distintas contribuciones del campo ($\hat{\Phi}^{scat}$ y $\hat{\Phi}^{inc}$), como se hizo en (3.38):

$$T_{rr} = T_{rr}^{scat/scat} + T_{rr}^{scat/inc} + T_{rr}^{inc/scat} \tag{3.38}$$

donde cada una estas partes satisfacen la misma definición de T_{rr} obtenida en la sección 3.2 (ec. (3.35)):

$$T_{rr} = \frac{1}{2}\left(\partial_t'\partial_t + ie\mu(\partial_t' - \partial_t) + \partial_r\partial_r' - \frac{1}{r^2}\partial_\theta'\partial_\theta - \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\partial_\phi'\partial_\phi - m_p^2 + e^2\mu^2\right) \times \\ \times \langle : \hat{\Phi}^\dagger(\mathbf{x})\hat{\Phi}(\mathbf{x}') : \rangle |_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}} \tag{3.35}$$

Entonces, para obtener cada uno de estos términos se reemplaza por el correspondiente valor medio de los campos obtenidos en el apéndice D:

$$\langle : \hat{\Phi}^{scat\dagger}(\mathbf{x})\hat{\Phi}^{scat}(\mathbf{x}') : \rangle = \int dk\, k^2 \sum_{\ell,\ell',m} \sum_{\ell''=|m|} \frac{|w_{\ell''}(r_m)|^2}{\pi} \times \\ \times \left[e^{i(\omega_p - e\mu)(t-t')} \frac{v_\ell^*(r)v_{\ell'}(r')}{v_\ell^*(r_m)v_{\ell'}(r_m)} \frac{Y_\ell^{m*}(\theta,\phi)Y_{\ell'}^m(\theta',\phi')O_{\ell\ell''}^* O_{\ell'\ell''}}{(\omega_p - e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p - e\mu}{T}} - 1\right)} \right. \\ \left. + e^{-i(\omega_p + e\mu)(t-t')} \frac{v_\ell(r)v_{\ell'}^*(r')}{v_\ell(r_m)v_{\ell'}^*(r_m)} \frac{Y_\ell^m(\theta,\phi)Y_{\ell'}^{m*}(\theta',\phi')O_{\ell'\ell''}^* O_{\ell\ell''}}{(\omega_p + e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p + e\mu}{T}} - 1\right)} \right] \tag{3.39}$$

$$\langle : \hat{\Phi}^{scat\dagger}(\mathbf{x})\hat{\Phi}^{inc}(\mathbf{x}') : \rangle = \int dk\, k^2 \sum_{\ell,m,\ell'} \frac{|w_{\ell'}(r_m)|^2}{\pi} \times \\ \times \left[e^{i(\omega_p - e\mu)(t-t')} \frac{v_\ell^*(r)w_{\ell'}(r')}{v_\ell^*(r_m)w_{\ell'}(r_m)} \frac{Y_\ell^{m*}(\theta,\phi)Y_{\ell'}^m(\theta',\phi')O_{\ell\ell'}^*}{(\omega_p - e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p - e\mu}{T}} - 1\right)} \right. \\ \left. + e^{-i(\omega_p + e\mu)(t-t')} \frac{v_\ell(r)w_{\ell'}^*(r')}{v_\ell(r_m)w_{\ell'}^*(r_m)} \frac{Y_\ell^m(\theta,\phi)Y_{\ell'}^{m*}(\theta',\phi')O_{\ell\ell'}}{(\omega_p + e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p + e\mu}{T}} - 1\right)} \right] \tag{3.40}$$

$$\langle : \hat{\Phi}^{inc\dagger}(\mathbf{x})\hat{\Phi}^{scat}(\mathbf{x}') : \rangle = \int dk\, k^2 \sum_{\ell,m,\ell'} \frac{|w_\ell(r_m)|^2}{\pi} \times \\ \times \left[e^{i(\omega_p - e\mu)(t-t')} \frac{w_\ell^*(r)v_{\ell'}(r')}{w_\ell^*(r_m)v_{\ell'}(r_m)} \frac{Y_\ell^{m*}(\theta,\phi)Y_{\ell'}^m(\theta',\phi')O_{\ell'\ell}}{(\omega_p - e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p - e\mu}{T}} - 1\right)} \right. \\ \left. + e^{-i(\omega_p + e\mu)(t-t')} \frac{w_\ell(r)v_{\ell'}^*(r')}{w_\ell(r_m)v_{\ell'}^*(r_m)} \frac{Y_\ell^m(\theta,\phi)Y_{\ell'}^{m*}(\theta',\phi')O_{\ell'\ell}^*}{(\omega_p + e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p + e\mu}{T}} - 1\right)} \right] \tag{3.41}$$

Comenzando con el cálculo de la componente $T_{rr}^{scat/scat}$, se usa la definición (3.35) y se reemplaza por el valor medio (3.39):

$$T_{rr}^{scat/scat} = \frac{1}{2}\left(\partial_t'\partial_t + ie\mu(\partial_t' - \partial_t) + \partial_r\partial_r' - \frac{1}{r^2}\partial_\theta'\partial_\theta - \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\partial_\phi'\partial_\phi - m_p^2 + e^2\mu^2\right) \times \langle : \hat{\Phi}^{scat\dagger}(\mathbf{x})\hat{\Phi}^{scat}(\mathbf{x}') : \rangle |_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}} \quad \text{(E.1)}$$

Como se esta interesado en $r \to \infty$, la función $v_\ell(r)$ satisface la condición de contorno en infinito (estudiada en la sección 2.2.2) dada por la ecuación (2.47):

$$v_\ell(r) \simeq e^{-i\frac{\pi}{2}(\ell+1)}\frac{e^{ikr}}{kr} \quad (2.47)$$

cuya derivada a orden dominante cuando $r \to \infty$ es:

$$\partial_r v_\ell(r) \simeq \frac{ie^{ikr}}{r}e^{-i\frac{\pi}{2}(\ell+1)} = ikv_\ell(r) \quad \text{(E.2)}$$

Luego a orden dominante en esta región, se tiene para la componente $T_{rr}^{scat/scat}$:

$$\begin{aligned} T_{rr}^{scat/scat} =& \frac{1}{2}\left(\partial_t'\partial_t + ie\mu(\partial_t' - \partial_t) + \partial_r\partial_r' - m_p^2 + e^2\mu^2\right) \langle : \hat{\Phi}^{scat\dagger}(\mathbf{x})\hat{\Phi}^{scat}(\mathbf{x}') : \rangle |_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}} \\ =& \frac{1}{2}\left(\partial_t'\partial_t + ie\mu(\partial_t' - \partial_t) + k^2 - m_p^2 + e^2\mu^2\right) \langle : \hat{\Phi}^{scat\dagger}(\mathbf{x})\hat{\Phi}^{scat}(\mathbf{x}') : \rangle |_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}} \end{aligned} \quad \text{(E.3)}$$

Para la derivada restante ∂_t hay que ser un poco más cuidadoso ya que hay un cambio de signo dentro del valor medio:

$$\begin{aligned} \partial_t'\partial_t\langle : \hat{\Phi}^{scat\dagger}(\mathbf{x})\hat{\Phi}^{scat}(\mathbf{x}') : \rangle = \partial_t'\partial_t \int dk\, k^2 \sum_{\ell,\ell',m}\sum_{\ell''=|m|} \frac{|w_{\ell''}(r_m)|^2}{\pi} \times \\ \times \left[e^{i(\omega_p - e\mu)(t-t')}\frac{v_\ell^*(r)v_{\ell'}(r')}{v_\ell^*(r_m)v_{\ell'}(r_m)}\frac{Y_\ell^{m*}(\theta,\phi)Y_{\ell'}^m(\theta',\phi')O_{\ell\ell''}^*O_{\ell'\ell''}}{(\omega_p - e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p - e\mu}{T}} - 1\right)} \right. \\ \left. + e^{-i(\omega_p + e\mu)(t-t')}\frac{v_\ell(r)v_{\ell'}^*(r')}{v_\ell(r_m)v_{\ell'}^*(r_m)}\frac{Y_\ell^m(\theta,\phi)Y_{\ell'}^{m*}(\theta',\phi')O_{\ell'\ell''}^*O_{\ell\ell''}}{(\omega_p + e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p + e\mu}{T}} - 1\right)} \right] \end{aligned} \quad \text{(E.4)}$$

$$\begin{aligned} \partial_t'\partial_t\langle : \hat{\Phi}^{scat\dagger}(\mathbf{x})\hat{\Phi}^{scat}(\mathbf{x}') : \rangle = \int dk\, k^2 \sum_{\ell,\ell',m}\sum_{\ell''=|m|} \frac{|w_{\ell''}(r_m)|^2}{\pi} \times \\ \times \left[(\omega_p - e\mu)^2 e^{i(\omega_p - e\mu)(t-t')}\frac{v_\ell^*(r)v_{\ell'}(r')}{v_\ell^*(r_m)v_{\ell'}(r_m)}\frac{Y_\ell^{m*}(\theta,\phi)Y_{\ell'}^m(\theta',\phi')O_{\ell\ell''}^*O_{\ell'\ell''}}{(\omega_p - e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p - e\mu}{T}} - 1\right)} \right. \\ \left. + (\omega_p + e\mu)^2 e^{-i(\omega_p + e\mu)(t-t')}\frac{v_\ell(r)v_{\ell'}^*(r')}{v_\ell(r_m)v_{\ell'}^*(r_m)}\frac{Y_\ell^m(\theta,\phi)Y_{\ell'}^{m*}(\theta',\phi')O_{\ell'\ell''}^*O_{\ell\ell''}}{(\omega_p + e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p + e\mu}{T}} - 1\right)} \right] \end{aligned} \quad \text{(E.5)}$$

y para el otro término con derivadas temporales se tiene

$$ie\mu(\partial_t' - \partial_t)\langle : \hat{\Phi}^{scat\dagger}(\mathbf{x})\hat{\Phi}^{scat}(\mathbf{x}') : \rangle = ie\mu(\partial_t' - \partial_t)\int dk\, k^2 \sum_{\ell,\ell',m}\sum_{\ell''=|m|} \times$$
$$\times \frac{|w_{\ell''}(r_m)|^2}{\pi}\left[e^{i(\omega_p - e\mu)(t-t')}\frac{v_\ell^*(r)v_{\ell'}(r')}{v_\ell^*(r_m)v_{\ell'}(r_m)}\frac{Y_\ell^{m*}(\theta,\phi)Y_{\ell'}^m(\theta',\phi')O_{\ell\ell''}^*O_{\ell'\ell''}}{(\omega_p - e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p - e\mu}{T}} - 1\right)}\right.$$
$$\left. + e^{-i(\omega_p + e\mu)(t-t')}\frac{v_\ell(r)v_{\ell'}^*(r')}{v_\ell(r_m)v_{\ell'}^*(r_m)}\frac{Y_\ell^m(\theta,\phi)Y_{\ell'}^{m*}(\theta',\phi')O_{\ell'\ell''}^*O_{\ell\ell''}}{(\omega_p + e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p + e\mu}{T}} - 1\right)}\right] \tag{E.6}$$

$$ie\mu(\partial_t' - \partial_t)\langle : \hat{\Phi}^{scat\dagger}(\mathbf{x})\hat{\Phi}^{scat}(\mathbf{x}') : \rangle = \int dk\, k^2 \sum_{\ell,\ell',m}\sum_{\ell''=|m|} \frac{|w_{\ell''}(r_m)|^2}{\pi} \times$$
$$\times \left[2e\mu(\omega_p - e\mu)e^{i(\omega_p - e\mu)(t-t')}\frac{v_\ell^*(r)v_{\ell'}(r')}{v_\ell^*(r_m)v_{\ell'}(r_m)}\frac{Y_\ell^{m*}(\theta,\phi)Y_{\ell'}^m(\theta',\phi')O_{\ell\ell''}^*O_{\ell'\ell''}}{(\omega_p - e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p - e\mu}{T}} - 1\right)}\right.$$
$$\left. - 2e\mu(\omega_p + e\mu)e^{-i(\omega_p + e\mu)(t-t')}\frac{v_\ell(r)v_{\ell'}^*(r')}{v_\ell(r_m)v_{\ell'}^*(r_m)}\frac{Y_\ell^m(\theta,\phi)Y_{\ell'}^{m*}(\theta',\phi')O_{\ell'\ell''}^*O_{\ell\ell''}}{(\omega_p + e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p + e\mu}{T}} - 1\right)}\right] \tag{E.7}$$

Reemplazando estas expresiones en (E.3), usando el valor asintótico (2.47) de $v_\ell(r)$ y finalmente tomando $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$, se obtiene

$$T_{rr}^{scat/scat} = \int_0^\infty dk \sum_{\ell,\ell',m}\sum_{\ell''=|m|} \frac{|w_{\ell''}(r_m)|^2}{2\pi}$$
$$\left[\frac{\left((\omega_p - e\mu)^2 + 2e\mu(\omega_p - e\mu) + k^2 - m_p^2 + e^2\mu^2\right)}{(\omega_p - e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p - e\mu}{T}} - 1\right)} e^{i\frac{\pi}{2}(\ell - \ell')}O_{\ell\ell''}^*O_{\ell'\ell''} \times \right.$$
$$\times \frac{Y_\ell^{m*}(\theta,\phi)Y_{\ell'}^m(\theta,\phi)}{r^2 v_\ell^*(r_m)v_{\ell'}(r_m)}$$
$$+ \frac{\left((\omega_p + e\mu)^2 - 2e\mu(\omega_p + e\mu) + k^2 - m_p^2 + e^2\mu^2\right)}{(\omega_p + e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p + e\mu}{T}} - 1\right)} e^{-i\frac{\pi}{2}(\ell - \ell')}O_{\ell'\ell''}^*O_{\ell\ell''} \times$$
$$\left. \times \frac{Y_\ell^m(\theta,\phi)Y_{\ell'}^{m*}(\theta,\phi)}{r^2 v_\ell(r_m)v_{\ell'}^*(r_m)} \right] \tag{E.8}$$

Usando la relación de dispersión (3.1) puede simplificarse un poco más:

$$T_{rr}^{scat/scat} = \int_0^\infty dk \sum_{\ell,\ell',m} \sum_{\ell''=|m|} \frac{|w_{\ell''}(r_m)|^2}{\pi} \frac{k^2}{r^2} \left[\frac{e^{i\frac{\pi}{2}(\ell-\ell')} O^*_{\ell\ell''} O_{\ell'\ell''}}{(\omega_p - e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p - e\mu}{T}} - 1\right)} \frac{Y_\ell^{m*}(\theta,\phi) Y_{\ell'}^m(\theta,\phi)}{v_\ell^*(r_m) v_{\ell'}(r_m)} \right.$$
$$\left. + \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}(\ell-\ell')} O^*_{\ell'\ell''} O_{\ell\ell''}}{(\omega_p + e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p + e\mu}{T}} - 1\right)} \frac{Y_\ell^m(\theta,\phi) Y_{\ell'}^{m*}(\theta,\phi)}{v_\ell(r_m) v_{\ell'}^*(r_m)} \right] \tag{E.9}$$

Además, observando que puede intercambiarse $\ell \leftrightarrow \ell'$ ya que se esta sumando sobre todos los valores posibles de ℓ y ℓ' en cada término, se obtiene finalmente:

$$T_{rr}^{scat/scat} = \int_0^\infty dk \sum_{\ell,\ell',m} \sum_{\ell''=|m|} \frac{|w_{\ell''}(r_m)|^2}{\pi} \frac{k^2}{r^2} e^{i\frac{\pi}{2}(\ell-\ell')} O^*_{\ell\ell''} O_{\ell'\ell''} \frac{Y_\ell^{m*}(\theta,\phi) Y_{\ell'}^m(\theta,\phi)}{v_\ell^*(r_m) v_{\ell'}(r_m)} \times$$
$$\times \left[\frac{1}{(\omega_p - e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p - e\mu}{T}} - 1\right)} + \frac{1}{(\omega_p + e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p + e\mu}{T}} - 1\right)} \right] \tag{3.42}$$

Ahora se calcula de la misma manera la componente $T_{rr}^{scat/inc}$ de (3.38) usando la definición de T_{rr} en (3.35). Para ello, se usa el valor medio obtenido en (3.40). Además, nótese que la dependencia temporal es la misma que el caso anterior *scat/scat* (ya que la diferencia entre los distintos campos se encuentra en la parte radial), luego se tiene:

$$\begin{aligned} T_{rr}^{scat/inc} =& \frac{1}{2}\left(\partial_t'\partial_t + ie\mu(\partial_t' - \partial_t) + \partial_r\partial_r' - m_p^2 + e^2\mu^2\right) \langle : \hat{\Phi}^{scat\dagger}(\mathbf{x}) \hat{\Phi}^{inc}(\mathbf{x}') : \rangle |_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}} \\ =& \int dk\, k^2 \sum_{\ell,m,\ell'} \frac{|w_{\ell'}(r_m)|^2}{2\pi} \times \\ & \times \left[\left((\omega_p - e\mu)^2 + 2e\mu(\omega_p - e\mu) + \partial_r\partial_r' - m_p^2 + e^2\mu^2\right) e^{i(\omega_p - e\mu)(t-t')} \right. \\ & \times \frac{v_\ell^*(r) w_{\ell'}(r')}{v_\ell^*(r_m) w_{\ell'}(r_m)} \frac{Y_\ell^{m*}(\theta,\phi) Y_{\ell'}^m(\theta',\phi') O^*_{\ell\ell'}}{(\omega_p - e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p - e\mu}{T}} - 1\right)} \\ & + \left((\omega_p + e\mu)^2 - 2e\mu(\omega_p + e\mu) + \partial_r\partial_r' - m_p^2 + e^2\mu^2\right) e^{-i(\omega_p + e\mu)(t-t')} \times \\ & \left. \times \frac{v_\ell(r) w_{\ell'}^*(r')}{v_\ell(r_m) w_{\ell'}^*(r_m)} \frac{Y_\ell^m(\theta,\phi) Y_{\ell'}^{m*}(\theta',\phi') O_{\ell\ell'}}{(\omega_p + e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p + e\mu}{T}} - 1\right)} \right]_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}} \end{aligned} \tag{E.10}$$

Nuevamente se usa la forma asintótica (2.47) de $v_\ell(r)$. Además, ahora también se tiene la función $w_\ell(r)$ que satisface la condición de contorno en infinito (estudiada en la sección 2.2.2) dada por la ecuación (2.52):

$$w_\ell(r) \simeq i \frac{e^{-i(kr + \ell\frac{\pi}{2})}}{2kr} \left((-1)^\ell - e^{i2kr}\right) \tag{2.52}$$

y su derivada es

$$\partial_r w_\ell(r) \simeq \frac{e^{-i(kr+\ell\frac{\pi}{2})}\left((-1)^\ell(-i+kr)+e^{i2kr}(i+kr)\right)}{2kr^2} \tag{E.11}$$

A orden dominante para $r \to \infty$ resulta

$$\partial_r w_\ell(r) \simeq \frac{e^{-i(kr+\ell\frac{\pi}{2})}\left((-1)^\ell+e^{i2kr}\right)}{2r} \tag{E.12}$$

Luego reemplazando en $T_{rr}^{scat/inc}$ con las expresiones asintóticas (2.47), (2.52) y sus derivadas (E.2) y (E.12), se tiene

$$\begin{aligned}
T_{rr}^{scat/inc} = \int dk\, k^2 \sum_{\ell,m,\ell'} \frac{|w_{\ell'}(r_m)|^2}{2\pi} \times \\
\times \Big[\big(((\omega_p - e\mu)^2 + 2e\mu(\omega_p - e\mu) - m_p^2 + e^2\mu^2) w_{\ell'}(r') - ik\partial_r' w_{\ell'}(r')\big) \times \\
\times e^{i(\omega_p - e\mu)(t-t')} \frac{v_\ell^*(r)}{v_\ell^*(r_m) w_{\ell'}(r_m)} \frac{Y_\ell^{m*}(\theta,\phi) Y_{\ell'}^m(\theta',\phi') O_{\ell\ell'}^*}{(\omega_p - e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p - e\mu}{T}} - 1\right)} \\
+ \big(((\omega_p + e\mu)^2 - 2e\mu(\omega_p + e\mu) - m_p^2 + e^2\mu^2) w_{\ell'}^*(r') + ik\partial_r' w_{\ell'}^*(r')\big) \times \\
\times e^{-i(\omega_p + e\mu)(t-t')} \frac{v_\ell(r)}{v_\ell(r_m) w_{\ell'}^*(r_m)} \frac{Y_\ell^m(\theta,\phi) Y_{\ell'}^{m*}(\theta',\phi') O_{\ell\ell'}}{(\omega_p + e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p + e\mu}{T}} - 1\right)} \Bigg]_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}}
\end{aligned} \tag{E.13}$$

$$\begin{aligned}
T_{rr}^{scat/inc} = \int dk \sum_{\ell,m,\ell'} \frac{|w_{\ell'}(r_m)|^2}{2\pi} \frac{i}{2r'r} \times \\
\times \Bigg[\Big((-1)^{\ell'}(\omega_p^2 - m_p^2 - k^2) - e^{i2kr'}(\omega_p^2 - m_p^2 + k^2)\Big) \times \\
\times e^{i(\omega_p - e\mu)(t-t')} \frac{e^{i\frac{\pi}{2}(\ell-\ell'+1)} e^{-ik(r+r')}}{v_\ell^*(r_m) w_{\ell'}(r_m)} \frac{Y_\ell^{m*}(\theta,\phi) Y_{\ell'}^m(\theta',\phi') O_{\ell\ell'}^*}{(\omega_p - e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p - e\mu}{T}} - 1\right)} \\
- \Big((-1)^{\ell'}(\omega_p^2 - m_p^2 - k^2) - e^{-i2kr'}(\omega_p^2 - m_p^2 + k^2)\Big) \times \\
\times e^{-i(\omega_p + e\mu)(t-t')} \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}(\ell-\ell'+1)} e^{ik(r+r')}}{v_\ell(r_m) w_{\ell'}^*(r_m)} \frac{Y_\ell^m(\theta,\phi) Y_{\ell'}^{m*}(\theta',\phi') O_{\ell\ell'}}{(\omega_p + e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p + e\mu}{T}} - 1\right)} \Bigg]_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}}
\end{aligned} \tag{E.14}$$

Finalmente, tomando $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$ y usando la relación de dispersión (3.1), se obtiene:

$$\begin{aligned}
T_{rr}^{scat/inc} = \int dk \sum_{\ell,m,\ell'} \frac{|w_{\ell'}(r_m)|^2}{\pi} \frac{k^2}{2r^2} \Bigg[\frac{e^{i\frac{\pi}{2}(\ell-\ell')}}{v_\ell^*(r_m) w_{\ell'}(r_m)} \frac{Y_\ell^{m*}(\theta,\phi) Y_{\ell'}^m(\theta,\phi) O_{\ell\ell'}^*}{(\omega_p - e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p - e\mu}{T}} - 1\right)} \\
+ \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}(\ell-\ell')}}{v_\ell(r_m) w_{\ell'}^*(r_m)} \frac{Y_\ell^m(\theta,\phi) Y_{\ell'}^{m*}(\theta,\phi) O_{\ell\ell'}}{(\omega_p + e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p + e\mu}{T}} - 1\right)} \Bigg]
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Ahora se calcula de la misma manera la componente $T_{rr}^{inc/scat}$ de (3.38) usando la definición de T_{rr} en (3.35). Para ello, se usa el valor medio obtenido en (3.41). Además, nuevamente la dependencia temporal es la misma que en los casos anteriores, luego se tiene:

$$\begin{aligned}
T_{rr}^{inc/scat} =& \frac{1}{2}\left(\partial_t'\partial_t + ie\mu(\partial_t' - \partial_t) + \partial_r\partial_r' - m_p^2 + e^2\mu^2\right)\langle : \hat{\Phi}^{inc\dagger}(\mathbf{x})\hat{\Phi}^{scat}(\mathbf{x}') : \rangle\,|_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}} \\
=& \int dk\, k^2 \sum_{\ell,m,\ell'} \frac{|w_\ell(r_m)|^2}{2\pi} \times \\
& \times \Bigg[\left((\omega_p - e\mu)^2 + 2e\mu(\omega_p - e\mu) + \partial_r\partial_r' - m_p^2 + e^2\mu^2\right) e^{i(\omega_p - e\mu)(t-t')} \\
& \qquad \times \frac{w_\ell^*(r)v_{\ell'}(r')}{w_\ell^*(r_m)v_{\ell'}(r_m)} \frac{Y_\ell^{m*}(\theta,\phi)Y_{\ell'}^m(\theta',\phi')O_{\ell'\ell}}{(\omega_p - e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p - e\mu}{T}} - 1\right)} \\
& + \left((\omega_p + e\mu)^2 - 2e\mu(\omega_p + e\mu) + \partial_r\partial_r' - m_p^2 + e^2\mu^2\right) e^{-i(\omega_p + e\mu)(t-t')} \times \\
& \qquad \times \frac{w_\ell(r)v_{\ell'}^*(r')}{w_\ell(r_m)v_{\ell'}^*(r_m)} \frac{Y_\ell^m(\theta,\phi)Y_{\ell'}^{m*}(\theta',\phi')O_{\ell'\ell}^*}{(\omega_p + e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p + e\mu}{T}} - 1\right)}\Bigg]_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}}
\end{aligned} \tag{E.15}$$

Como se esta interesado cuando $r \to \infty$, usando las expresiones asintóticas (2.47) y (2.52) que $v_\ell(r)$ y $w_\ell(r)$ toman respectivamente, y sus respectivas derivadas (E.2) y (E.12):

$$\begin{aligned}
T_{rr}^{inc/scat} =& \int dk \sum_{\ell,m,\ell'} \frac{|w_\ell(r_m)|^2}{2\pi} \frac{(-i)}{2r'r} \times \\
& \times \Bigg[e^{i(\omega_p - e\mu)(t-t')}\left((-1)^\ell(\omega_p^2 - m_p^2 - k^2) - (\omega_p^2 - m_p^2 + k^2)e^{-i2kr}\right) \times \\
& \qquad \times \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}(\ell'-\ell+1)}e^{ik(r+r')}}{w_\ell^*(r_m)v_{\ell'}(r_m)} \frac{Y_\ell^{m*}(\theta,\phi)Y_{\ell'}^m(\theta',\phi')O_{\ell'\ell}}{(\omega_p - e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p - e\mu}{T}} - 1\right)} \\
& - e^{-i(\omega_p + e\mu)(t-t')}\left((-1)^l(\omega^2 - m_p^2 - k^2) - e^{i2kr}(\omega^2 - m_p^2 + k^2)\right) \times \\
& \qquad \times \frac{e^{i\frac{\pi}{2}(\ell'-\ell+1)}e^{-ik(r+r')}}{w_\ell(r_m)v_{\ell'}^*(r_m)} \frac{Y_\ell^m(\theta,\phi)Y_{\ell'}^{m*}(\theta',\phi')O_{\ell'\ell}^*}{(\omega_p + e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p + e\mu}{T}} - 1\right)}\Bigg]_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}}
\end{aligned} \tag{E.16}$$

Finalmente, tomando $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$ y usando la relación de dispersión (3.1), se obtiene:

$$\begin{aligned}
T_{rr}^{inc/scat} = \int dk \sum_{\ell,m,\ell'} \frac{|w_\ell(r_m)|^2}{2\pi} \frac{k^2}{r^2} \Bigg[& \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}(\ell'-\ell)}}{w_\ell^*(r_m)v_{\ell'}(r_m)} \frac{Y_\ell^{m*}(\theta,\phi)Y_{\ell'}^m(\theta,\phi)O_{\ell'\ell}}{(\omega_p - e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p - e\mu}{T}} - 1\right)} \\
& + \frac{e^{i\frac{\pi}{2}(\ell'-\ell)}}{w_\ell(r_m)v_{\ell'}^*(r_m)} \frac{Y_\ell^m(\theta,\phi)Y_{\ell'}^{m*}(\theta,\phi)O_{\ell'\ell}^*}{(\omega_p + e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p + e\mu}{T}} - 1\right)}\Bigg]
\end{aligned} \tag{3.44}$$

F. Cálculo de la componente $T_{r\theta}$

En este apéndice se obtiene la componente $T_{r\theta}$ del tensor energía-momento, para ello se descompone el tensor en las distintas contribuciones del campo ($\hat{\Phi}^{scat}$ y $\hat{\Phi}^{inc}$) como se hizo en (3.38). Luego, usando la definición de $T_{r\theta}$ (ec. (3.36))

$$T_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(\partial_r \partial'_\theta + \partial'_r \partial_\theta\right) \langle : \hat{\Phi}^\dagger(\mathbf{x})\hat{\Phi}(\mathbf{x}') : \rangle |_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}} \tag{3.36}$$

se reemplaza por el correspondiente valor medio de los campos obtenidos en el apéndice D:

$$\begin{aligned}\langle : \hat{\Phi}^{scat\dagger}(\mathbf{x})\hat{\Phi}^{scat}(\mathbf{x}') : \rangle = \int dk\, k^2 \sum_{\ell,\ell',m} \sum_{\ell''=|m|} \frac{|w_{\ell''}(r_m)|^2}{\pi} \times \\ \times \Bigg[e^{i(\omega_p - e\mu)(t-t')} \frac{v^*_\ell(r) v_{\ell'}(r')}{v^*_\ell(r_m) v_{\ell'}(r_m)} \frac{Y^{m*}_\ell(\theta,\phi) Y^m_{\ell'}(\theta',\phi') O^*_{\ell\ell''} O_{\ell'\ell''}}{(\omega_p - e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p - e\mu}{T}} - 1\right)} \\ + e^{-i(\omega_p + e\mu)(t-t')} \frac{v_\ell(r) v^*_{\ell'}(r')}{v_\ell(r_m) v^*_{\ell'}(r_m)} \frac{Y^m_\ell(\theta,\phi) Y^{m*}_{\ell'}(\theta',\phi') O^*_{\ell'\ell''} O_{\ell\ell''}}{(\omega_p + e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p + e\mu}{T}} - 1\right)} \Bigg]\end{aligned} \tag{3.39}$$

$$\begin{aligned}\langle : \hat{\Phi}^{scat\dagger}(\mathbf{x})\hat{\Phi}^{inc}(\mathbf{x}') : \rangle = \int dk\, k^2 \sum_{\ell,m,\ell'} \frac{|w_{\ell'}(r_m)|^2}{\pi} \times \\ \times \Bigg[e^{i(\omega_p - e\mu)(t-t')} \frac{v^*_\ell(r) w_{\ell'}(r')}{v^*_\ell(r_m) w_{\ell'}(r_m)} \frac{Y^{m*}_\ell(\theta,\phi) Y^m_{\ell'}(\theta',\phi') O^*_{\ell\ell'}}{(\omega_p - e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p - e\mu}{T}} - 1\right)} \\ + e^{-i(\omega_p + e\mu)(t-t')} \frac{v_\ell(r) w^*_{\ell'}(r')}{v_\ell(r_m) w^*_{\ell'}(r_m)} \frac{Y^m_\ell(\theta,\phi) Y^{m*}_{\ell'}(\theta',\phi') O_{\ell\ell'}}{(\omega_p + e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p + e\mu}{T}} - 1\right)} \Bigg]\end{aligned} \tag{3.40}$$

$$\begin{aligned}\langle : \hat{\Phi}^{inc\dagger}(\mathbf{x})\hat{\Phi}^{scat}(\mathbf{x}') : \rangle = \int dk\, k^2 \sum_{\ell,m,\ell'} \frac{|w_\ell(r_m)|^2}{\pi} \times \\ \times \Bigg[e^{i(\omega_p - e\mu)(t-t')} \frac{w^*_\ell(r) v_{\ell'}(r')}{w^*_\ell(r_m) v_{\ell'}(r_m)} \frac{Y^{m*}_\ell(\theta,\phi) Y^m_{\ell'}(\theta',\phi') O_{\ell'\ell}}{(\omega_p - e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p - e\mu}{T}} - 1\right)} \\ + e^{-i(\omega_p + e\mu)(t-t')} \frac{w_\ell(r) v^*_{\ell'}(r')}{w_\ell(r_m) v^*_{\ell'}(r_m)} \frac{Y^m_\ell(\theta,\phi) Y^{m*}_{\ell'}(\theta',\phi') O^*_{\ell'\ell}}{(\omega_p + e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p + e\mu}{T}} - 1\right)} \Bigg]\end{aligned} \tag{3.41}$$

Comenzando con el cálculo de la componente $T^{scat/scat}_{r\theta}$, se usa la definición (3.36)

y se reemplaza por el valor medio (3.39):

$$
\begin{aligned}
T_{r\theta}^{scat/scat} =& \frac{1}{2}\left(\partial_r\partial'_\theta + \partial'_r\partial_\theta\right)\langle : \hat{\Phi}^{scat\dagger}(\mathbf{x})\hat{\Phi}^{scat}(\mathbf{x}') : \rangle\,|_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}} \\
=& \int dk\, k^2 \sum_{\ell,\ell',m}\sum_{\ell''=|m|} \frac{|w_{\ell''}(r_m)|^2}{2\pi}\times \\
&\times\Bigg[e^{i(\omega_p-e\mu)(t-t')}\frac{\partial_r v_\ell^*(r)v_{\ell'}(r')}{v_\ell^*(r_m)v_{\ell'}(r_m)}\frac{Y_\ell^{m*}(\theta,\phi)\partial'_\theta Y_{\ell'}^m(\theta',\phi')O_{\ell\ell''}^*O_{\ell'\ell''}}{(\omega_p-e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p-e\mu}{T}}-1\right)} \\
&+ e^{-i(\omega_p+e\mu)(t-t')}\frac{\partial_r v_\ell(r)v_{\ell'}^*(r')}{v_\ell(r_m)v_{\ell'}^*(r_m)}\frac{Y_\ell^{m}(\theta,\phi)\partial'_\theta Y_{\ell'}^{m*}(\theta',\phi')O_{\ell'\ell''}^*O_{\ell\ell''}}{(\omega_p+e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p+e\mu}{T}}-1\right)} \\
&+ e^{i(\omega_p-e\mu)(t-t')}\frac{v_\ell^*(r)\partial'_r v_{\ell'}(r')}{v_\ell^*(r_m)v_{\ell'}(r_m)}\frac{\partial_\theta Y_\ell^{m*}(\theta,\phi)Y_{\ell'}^{m}(\theta',\phi')O_{\ell\ell''}^*O_{\ell'\ell''}}{(\omega_p-e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p-e\mu}{T}}-1\right)} \\
&+ e^{-i(\omega_p+e\mu)(t-t')}\frac{v_\ell(r)\partial'_r v_{\ell'}^*(r')}{v_\ell(r_m)v_{\ell'}^*(r_m)}\frac{\partial_\theta Y_\ell^{m}(\theta,\phi)Y_{\ell'}^{m*}(\theta',\phi')O_{\ell'\ell''}^*O_{\ell\ell''}}{(\omega_p+e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p+e\mu}{T}}-1\right)}\Bigg]_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}}
\end{aligned}
\tag{F.1}
$$

En la región $r\to\infty$, $v_\ell(r)$ toma la forma (2.47):

$$
v_\ell(r) \simeq e^{-i\frac{\pi}{2}(\ell+1)}\frac{e^{ikr}}{kr} \tag{2.47}
$$

y su derivada (E.2):

$$
\partial_r v_\ell(r) \simeq \frac{ie^{ikr}}{r}e^{-i\frac{\pi}{2}(\ell+1)} = ikv_\ell(r) \tag{E.2}
$$

Luego, reemplazando y además tomando $\mathbf{x}'=\mathbf{x}$ se obtiene:

$$
\begin{aligned}
T_{r\theta}^{scat/scat} =& \int dk \sum_{\ell,\ell',m}\sum_{\ell''=|m|}\frac{|w_{\ell''}(r_m)|^2}{2\pi}\frac{ik}{r^2}\times \\
&\times\Bigg[e^{i\frac{\pi}{2}(\ell-\ell')}\frac{O_{\ell\ell''}^*O_{\ell'\ell''}}{v_\ell^*(r_m)v_{\ell'}(r_m)}\left(\frac{Y_{\ell'}^m(\theta,\phi)\partial_\theta Y_\ell^{m*}(\theta,\phi)-Y_\ell^{m*}(\theta,\phi)\partial_\theta Y_{\ell'}^m(\theta,\phi)}{(\omega_p-e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p-e\mu}{T}}-1\right)}\right) \\
&+ e^{-i\frac{\pi}{2}(\ell-\ell')}\frac{O_{\ell'\ell''}^*O_{\ell\ell''}}{v_\ell(r_m)v_{\ell'}^*(r_m)}\left(\frac{Y_\ell^m(\theta,\phi)\partial_\theta Y_{\ell'}^{m*}(\theta,\phi)-Y_{\ell'}^{m*}(\theta,\phi)\partial_\theta Y_\ell^m(\theta,\phi)}{(\omega_p+e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p+e\mu}{T}}-1\right)}\right)\Bigg]
\end{aligned}
\tag{F.2}
$$

Análogamente se obtiene la componente $T_{r\theta}^{scat/inc}$. Usando la definición (3.36) y

reemplazando por el valor medio (3.40):

$$
\begin{aligned}
T_{r\theta}^{scat/inc} =& \frac{1}{2}\left(\partial_r\partial'_\theta + \partial'_r\partial_\theta\right)\langle : \hat{\Phi}^{scat\dagger}(\mathbf{x})\hat{\Phi}^{inc}(\mathbf{x}') : \rangle\,|_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}} \\
=& \int dk\, k^2 \sum_{\ell,m,\ell'} \frac{|w_{\ell'}(r_m)|^2}{2\pi} \times \\
&\times \Bigg[e^{i(\omega_p - e\mu)(t-t')} \frac{\partial_r v_\ell^*(r) w_{\ell'}(r')}{v_\ell^*(r_m) w_{\ell'}(r_m)} \frac{Y_\ell^{m*}(\theta,\phi)\partial'_\theta Y_{\ell'}^m(\theta',\phi') O_{\ell\ell'}^*}{(\omega_p - e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p - e\mu}{T}} - 1\right)} \\
&+ e^{i(\omega_p - e\mu)(t-t')} \frac{v_\ell^*(r)\partial'_r w_{\ell'}(r')}{v_\ell^*(r_m) w_{\ell'}(r_m)} \frac{\partial_\theta Y_\ell^{m*}(\theta,\phi) Y_{\ell'}^m(\theta',\phi') O_{\ell\ell'}^*}{(\omega_p - e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p - e\mu}{T}} - 1\right)} \\
&+ e^{-i(\omega_p + e\mu)(t-t')} \frac{\partial_r v_\ell(r) w_{\ell'}^*(r')}{v_\ell(R) w_{\ell'}^*(r_m)} \frac{Y_\ell^m(\theta,\phi)\partial'_\theta Y_{\ell'}^{m*}(\theta',\phi') O_{\ell\ell'}}{(\omega_p + e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p + e\mu}{T}} - 1\right)} \\
&+ e^{-i(\omega_p + e\mu)(t-t')} \frac{v_\ell(r)\partial'_r w_{\ell'}^*(r')}{v_\ell(r_m) w_{\ell'}^*(r_m)} \frac{\partial_\theta Y_\ell^m(\theta,\phi) Y_{\ell'}^{m*}(\theta',\phi') O_{\ell\ell'}}{(\omega_p + e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p + e\mu}{T}} - 1\right)} \Bigg]_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}}
\end{aligned}
\tag{F.3}
$$

En la región $r \to \infty$, además $v_\ell(r)$ y su derivada que toman la forma (2.47) y (E.2) respectivamente, se tiene $w_\ell(r)$ que toma la forma (2.52):

$$
w_\ell(r) \simeq i\frac{e^{-i(kr+\ell\frac{\pi}{2})}}{2kr}\left((-1)^\ell - e^{i2kr}\right) \tag{2.52}
$$

y su derivada (E.12):

$$
\partial_r w_\ell(r) \simeq \frac{e^{-i(kr+\ell\frac{\pi}{2})}\left((-1)^\ell + e^{i2kr}\right)}{2r} \tag{E.12}
$$

Luego, reemplazando y además tomando $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$ se obtiene:

$$
\begin{aligned}
T_{r\theta}^{scat/inc} =& \int dk \sum_{\ell,m,\ell'} \frac{|w_{\ell'}(r_m)|^2}{\pi} \frac{k}{4r^2} \times \\
&\times \Bigg[\frac{e^{i\frac{\pi}{2}(\ell-\ell'+1)}\left((-1)^{\ell'} e^{-i2kr} - 1\right)}{v_\ell^*(r_m) w_{\ell'}(r_m)} \frac{Y_\ell^{m*}(\theta,\phi)\partial_\theta Y_{\ell'}^m(\theta,\phi) O_{\ell\ell'}^*}{(\omega_p - e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p - e\mu}{T}} - 1\right)} \\
&+ \frac{e^{i\frac{\pi}{2}(\ell-\ell'+1)}\left((-1)^{\ell'} e^{-i2kr} + 1\right)}{v_\ell^*(r_m) w_{\ell'}(r_m)} \frac{\partial_\theta Y_\ell^{m*}(\theta,\phi) Y_{\ell'}^m(\theta,\phi) O_{\ell\ell'}^*}{(\omega_p - e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p - e\mu}{T}} - 1\right)} \\
&+ \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}(\ell-\ell'+1)}\left((-1)^{\ell'} e^{i2kr} - 1\right)}{v_\ell(r_m) w_{\ell'}^*(r_m)} \frac{Y_\ell^m(\theta,\phi)\partial_\theta Y_{\ell'}^{m*}(\theta,\phi) O_{\ell\ell'}}{(\omega_p + e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p + e\mu}{T}} - 1\right)} \\
&+ \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}(\ell-\ell'+1)}\left((-1)^{\ell'} e^{i2kr} + 1\right)}{v_\ell(r_m) w_{\ell'}^*(r_m)} \frac{\partial_\theta Y_\ell^m(\theta,\phi) Y_{\ell'}^{m*}(\theta,\phi) O_{\ell\ell'}}{(\omega_p + e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p + e\mu}{T}} - 1\right)} \Bigg]
\end{aligned}
\tag{F.4}
$$

Finalmente se obtiene la componente $T_{r\theta}^{inc/scat}$. Usando la definición (3.36) y

reemplazando por el valor medio (3.41):

$$
\begin{aligned}
T_{r\theta}^{inc/scat} =& \frac{1}{2}\left(\partial_r\partial'_\theta + \partial'_r\partial_\theta\right)\langle : \hat{\Phi}^{inc\dagger}(\mathbf{x})\hat{\Phi}^{scat}(\mathbf{x}') : \rangle\,|_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}} \\
=& \int dk\, k^2 \sum_{\ell,m,\ell'} \frac{|w_\ell(r_m)|^2}{2\pi} \times \\
&\times \Bigg[e^{i(\omega_p - e\mu)(t-t')} \frac{\partial_r w_\ell^*(r) v_{\ell'}(r')}{w_\ell^*(r_m) v_{\ell'}(r_m)} \frac{Y_\ell^{m*}(\theta,\phi)\partial'_\theta Y_{\ell'}^m(\theta',\phi') O_{\ell'\ell}}{(\omega_p - e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p - e\mu}{T}} - 1\right)} \\
&+ e^{i(\omega_p - e\mu)(t-t')} \frac{w_\ell^*(r)\partial'_r v_{\ell'}(r')}{w_\ell^*(r_m) v_{\ell'}(r_m)} \frac{\partial_\theta Y_\ell^{m*}(\theta,\phi) Y_{\ell'}^m(\theta',\phi') O_{\ell'\ell}}{(\omega_p - e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p - e\mu}{T}} - 1\right)} \\
&+ e^{-i(\omega_p - e\mu)(t-t')} \frac{\partial_r w_\ell(r) v_{\ell'}^*(r')}{w_\ell(r_m) v_{\ell'}^*(r_m)} \frac{Y_\ell^m(\theta,\phi)\partial'_\theta Y_{\ell'}^{m*}(\theta',\phi') O_{\ell'\ell}^*}{(\omega_p + e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p + e\mu}{T}} - 1\right)} \\
&+ e^{-i(\omega_p - e\mu)(t-t')} \frac{w_\ell(r)\partial'_r v_{\ell'}^*(r')}{w_\ell(r_m) v_{\ell'}^*(r_m)} \frac{\partial_\theta Y_\ell^m(\theta,\phi) Y_{\ell'}^{m*}(\theta',\phi') O_{\ell'\ell}^*}{(\omega_p + e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p + e\mu}{T}} + 1\right)} \Bigg]_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}}
\end{aligned}
\tag{F.5}
$$

En la región $r \to \infty$, $v_\ell(r)$ y $w_\ell(r)$ toman respectivamente la forma (2.47) y (2.52) (y sus derivadas (E.2) y (E.12) respectivamente). Luego, reemplazando y además tomando $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$ se obtiene:

$$
\begin{aligned}
T_{r\theta}^{inc/scat} =& \int dk \sum_{\ell,m,\ell'} \frac{|w_\ell(r_m)|^2}{\pi} \frac{k}{4r^2} \times \\
&\times \Bigg[e^{-i\frac{\pi}{2}(\ell'-\ell+1)} \frac{\left((-1)^\ell e^{i2kr} + 1\right)}{w_\ell^*(r_m) v_{\ell'}(r_m)} \frac{Y_\ell^{m*}(\theta,\phi)\partial_\theta Y_{\ell'}^m(\theta,\phi) O_{\ell'\ell}}{(\omega_p - e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p - e\mu}{T}} - 1\right)} \\
&+ e^{-i\frac{\pi}{2}(\ell'-\ell+1)} \frac{\left((-1)^\ell e^{i2kr} - 1\right)}{w_\ell^*(r_m) v_{\ell'}(r_m)} \frac{\partial_\theta Y_\ell^{m*}(\theta,\phi) Y_{\ell'}^m(\theta,\phi) O_{\ell'\ell}}{(\omega_p - e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p - e\mu}{T}} - 1\right)} \\
&+ e^{i\frac{\pi}{2}(\ell'-\ell+1)} \frac{\left((-1)^\ell e^{-2ikr} + 1\right)}{w_\ell(r_m) v_{\ell'}^*(r_m)} \frac{Y_\ell^m(\theta,\phi)\partial_\theta Y_{\ell'}^{m*}(\theta,\phi) O_{\ell'\ell}^*}{(\omega_p + e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p + e\mu}{T}} - 1\right)} \\
&+ e^{i\frac{\pi}{2}(\ell'-\ell+1)} \frac{\left((-1)^\ell e^{-i2kr} - 1\right)}{w_\ell(r_m) v_{\ell'}^*(r_m)} \frac{\partial_\theta Y_\ell^m(\theta,\phi) Y_{\ell'}^{m*}(\theta,\phi) O_{\ell'\ell}^*}{(\omega_p + e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p + e\mu}{T}} - 1\right)} \Bigg]
\end{aligned}
\tag{F.6}
$$

Entonces, ya se tienen las tres contribuciones del tensor $T_{r\theta}$, sumando ahora las expresiones (F.2), (F.4) y (F.6) se obtiene la componente buscada. Sin embargo, por como aparece el $T_{\mu\nu}$ en la fuerza (3.31), se necesita la componente $rT_{r\theta}$. Entonces, nótese que $T_{r\theta}$ tiene un r^{-2}, por lo tanto $rT_{r\theta}$ va como r^{-1}. En consecuencia, como se esta tomando una superficie infinita con $r \to \infty$, la componente $rT_{r\theta}$ se anula en infinito.

G. Cálculo auxiliar: Integral con Y_ℓ^m

En este apéndice se demuestra la integral (3.50) presentada como resultado en la sección 3.5. Primero, reemplazando los armónicos esféricos por su definición (2.18) en términos de los polinomios asociados de Legendre:

$$\int_0^\pi d\theta \sin\theta \cos\theta Y_\ell^{m*}(\theta,\phi) Y_{\ell'}^m(\theta,\phi) = \int_0^\pi d\theta \sin\theta \cos\theta \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_\ell^m(\cos\theta) \times$$
$$\times \cancel{e^{-im\phi}} \sqrt{\frac{2\ell'+1}{4\pi}\frac{(\ell'-m)!}{(\ell'+m)!}} P_{\ell'}^m(\cos\theta) \cancel{e^{im\phi}} \quad \text{(G.1)}$$

$$\int_0^\pi d\theta\ \sin\theta\ \cos\theta\, Y_\ell^{m*}(\theta,\phi) Y_{\ell'}^m(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} \sqrt{\frac{2\ell'+1}{4\pi}\frac{(\ell'-m)!}{(\ell'+m)!}} \times$$
$$\times \int_0^\pi d\theta\ \sin\theta\ \cos\theta\, P_\ell^m(\cos\theta) P_{\ell'}^m(\cos\theta) \quad \text{(G.2)}$$

La integral restante con los polinomios asociados de Legendre puede calcularse haciendo el cambio de variables $x = \cos\theta$:

$$\int_{-1}^1 dx\, x\, P_\ell^m(x) P_{\ell'}^m(x) \quad \text{(G.3)}$$

Usando la relación de recurrencia (ver por ejemplo [Weisstein 2022a]):

$$x P_{\ell'}^m(x) = \frac{(\ell'-m+1)}{(2\ell'+1)} P_{\ell'+1}^m(x) + \frac{(\ell'+m)}{(2\ell'+1)} P_{\ell'-1}^m(x) \quad \text{(G.4)}$$

Reemplazando en la integral, se obtiene:

$$\int_{-1}^1 dx\, P_\ell^m(x) x P_{\ell'}^m(x) = \int_{-1}^1 dx P_\ell^m(x) \left(\frac{(\ell'-m+1)}{(2\ell'+1)} P_{\ell'+1}^m(x) + \frac{(\ell'+m)}{(2\ell'+1)} P_{\ell'-1}^m(x) \right) \quad \text{(G.5)}$$

Usando la ortogonalidad de los polinomios asociados de Legendre (ver [Weisstein 2022a]):

$$\int_{-1}^1 dx\, P_\ell^m(x) P_{\ell'}^m(x) = \frac{2}{2\ell+1}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}\delta_{\ell\ell'} \quad \text{(G.6)}$$

La integral de los polinomios queda:

$$\int_{-1}^1 dx\, x\, P_\ell^m(x) P_{\ell'}^m(x) = \frac{(\ell'-m+1)}{(2\ell'+1)} \frac{2}{2\ell+1}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}\delta_{\ell\ell'+1}$$
$$+ \frac{(\ell'+m)}{(2\ell'+1)} \frac{2}{2\ell+1}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}\delta_{\ell\ell'-1} \quad \text{(G.7)}$$

Juntando todo en (G.2) se obtiene la integral deseada:

$$\int_0^\pi d\theta\ \sin\theta\ \cos\theta\, Y_\ell^{m*}(\theta,\phi) Y_{\ell'}^m(\theta,\phi) = \frac{1}{4\pi} \sqrt{(2\ell+1)\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} \sqrt{(2\ell'+1)\frac{(\ell'-m)!}{(\ell'+m)!}}$$
$$\times \left(\frac{(\ell'-m+1)}{(2\ell'+1)} \frac{2}{2\ell+1}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}\delta_{\ell\ell'+1} \right.$$
$$\left. + \frac{(\ell'+m)}{(2\ell'+1)} \frac{2}{2\ell+1}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}\delta_{\ell\ell'-1} \right) \quad \text{(G.8)}$$

Esta expresión puede simplificarse, primero distribuyendo en los términos,

$$\frac{1}{2\pi}\sqrt{(2\ell'+1)\frac{(\ell'-m)!}{(\ell'+m)!}}\frac{(\ell'-m+1)}{(2\ell'+1)}\sqrt{\frac{1}{2\ell+1}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}}\delta_{\ell,\ell'+1} + \frac{1}{2\pi}\sqrt{(2\ell'+1)\frac{(\ell'-m)!}{(\ell'+m)!}}\frac{(\ell'+m)}{(2\ell'+1)}\sqrt{\frac{1}{2\ell+1}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}}\delta_{\ell,\ell'-1} \tag{G.9}$$

Usando las deltas para escribir en cada término sólo ℓ o ℓ' (para ello se cambia la primera delta $\delta_{\ell,\ell'+1}$ por $\delta_{\ell-1,\ell'}$),

$$\frac{1}{2\pi}\sqrt{(2(\ell-1)+1)\frac{(\ell-1-m)!}{(\ell-1+m)!}}\frac{(\ell-1-m+1)}{(2(\ell-1)+1)}\sqrt{\frac{1}{2\ell+1}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}}\delta_{\ell-1,\ell'} + \frac{1}{2\pi}\sqrt{(2\ell'+1)\frac{(\ell'-m)!}{(\ell'+m)!}}\frac{(\ell'+m)}{(2\ell'+1)}\sqrt{\frac{1}{2(\ell'-1)+1}\frac{(\ell'-1+m)!}{(\ell'-1-m)!}}\delta_{\ell,\ell'-1} \tag{G.10}$$

Simplificando ahora si los términos restantes entre sí queda:

$$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{(\ell+m)(\ell-m)}{(2\ell+1)(2\ell-1)}}\delta_{\ell-1,\ell'} + \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{(\ell'+m)(\ell'-m)}{(2\ell'+1)(2\ell'-1)}}\delta_{\ell,\ell'-1} \tag{G.11}$$

Volviendo a la ecuación (G.8) y reemplazando por este último resultado, se obtiene como resultado la ecuación (3.50) utilizada en la sección 3.5:

$$\int_0^\pi d\theta\ \sin\theta\ \cos\theta\, Y_\ell^{m*}(\theta,\phi)Y_{\ell'}^m(\theta,\phi) = \frac{1}{2\pi}\left(\delta_{\ell,\ell'-1}\sqrt{\frac{(\ell'-m)(\ell'+m)}{(2\ell'+1)(2\ell'-1)}} + \delta_{\ell-1,\ell'}\sqrt{\frac{(\ell-m)(\ell+m)}{(2\ell+1)(2\ell-1)}}\right) \tag{3.50}$$

H. Desarrollo de $\mathcal{N}^m_{\ell,\ell-1}$

En este apéndice se desarrolla el término $N_{\ell\ell'}$ obtenido en la sección 3.4 para lograr escribir este resultado en términos de las soluciones radiales $u_\ell(r)$, $v_\ell(r)$ y $w_\ell(r)$ de la ecuación (2.20) (presentadas en la sección 2). Entonces, partiendo de la definición de $N_{\ell\ell'}$:

$$\mathcal{N}^m_{\ell\ell'} = \sum_{\ell''=|m|} \frac{|w_{\ell''}(r_m)|^2}{v^*_\ell(r_m)v_{\ell'}(r_m)} O^{m*}_{\ell\ell''}O^m_{\ell'\ell''} + \frac{1}{2}\frac{|w_{\ell'}(r_m)|^2}{w_{\ell'}(r_m)v^*_\ell(r_m)} O^{m*}_{\ell\ell'} + \frac{1}{2}\frac{|w_\ell(r_m)|^2}{v_{\ell'}(r_m)w^*_\ell(r_m)} O^m_{\ell'\ell} \tag{3.47}$$

donde en (2.91) se define $O^m_{\ell\ell'}$ como:

$$O^m_{\ell\ell'} = U^m_{\ell\ell'} - \delta_{\ell\ell'} \tag{2.91}$$

Ahora bien, en lugar de trabajar con el índice libre ℓ', como ya se obtuvo el resultado de la fuerza donde solamente se necesita $\mathcal{N}^m_{\ell,\ell-1}$ (ver (3.54)), se evalúa solamente esta componente. Además, reemplazando en la definición de $N_{\ell\ell'}$ a $O^m_{\ell\ell'}$ por $U^m_{\ell\ell'}$:

$$\mathcal{N}^m_{\ell,\ell-1} = \sum_{\ell''=|m|} \frac{|w_{\ell''}(r_m)|^2}{v^*_\ell(r_m)v_{\ell-1}(r_m)} (U^{m*}_{\ell\ell''} - \delta_{\ell\ell''})(U^m_{\ell-1,\ell''} - \delta_{\ell-1,\ell''}) + \frac{1}{2}\frac{|w_{\ell-1}(r_m)|^2}{w_{\ell-1}(r_m)v^*_\ell(r_m)} U^{m*}_{\ell,\ell-1} + \frac{1}{2}\frac{|w_\ell(r_m)|^2}{v_{\ell-1}(r_m)w^*_\ell(r_m)} U^m_{\ell-1,\ell} \tag{H.1}$$

Desarrollando el producto entre los términos con las deltas,

$$\mathcal{N}^m_{\ell,\ell-1} = \sum_{\ell''=|m|} \frac{|w_{\ell''}(r_m)|^2}{v^*_\ell(r_m)v_{\ell-1}(r_m)} (U^{m*}_{\ell\ell''}U^m_{\ell-1,\ell''} - \delta_{\ell\ell''}U^m_{\ell-1,\ell''} - U^{m*}_{\ell\ell''}\delta_{\ell-1,\ell''} + \delta_{\ell\ell''}\delta_{\ell-1,\ell''}) + \frac{1}{2}\frac{|w_{\ell-1}(r_m)|^2}{w_{\ell-1}(r_m)v^*_\ell(r_m)} U^{m*}_{\ell,\ell-1} + \frac{1}{2}\frac{|w_\ell(r_m)|^2}{v_{\ell-1}(r_m)w^*_\ell(r_m)} U^m_{\ell-1,\ell} \tag{H.2}$$

Usando las deltas,

$$\mathcal{N}^m_{\ell,\ell-1} = \sum_{\ell''=|m|} \frac{|w_{\ell''}(r_m)|^2}{v^*_\ell(r_m)v_{\ell-1}(r_m)} (U^{m*}_{\ell\ell''}U^m_{\ell-1,\ell''}) - \frac{|w_\ell(r_m)|^2}{v^*_\ell(r_m)v_{\ell-1}(r_m)} U^m_{\ell-1,\ell} - \frac{|w_{\ell-1}(r_m)|^2}{v^*_\ell(r_m)v_{\ell-1}(r_m)} U^{m*}_{\ell,\ell-1} + \frac{1}{2}\frac{|w_{\ell-1}(r_m)|^2}{w_{\ell-1}(r_m)v^*_\ell(r_m)} U^{m*}_{\ell,\ell-1} + \frac{1}{2}\frac{|w_\ell(r_m)|^2}{v_{\ell-1}(r_m)w^*_\ell(r_m)} U^m_{\ell-1,\ell} \tag{H.3}$$

Agrupando los términos con índices iguales de U^m,

$$\mathcal{N}^m_{\ell,\ell-1} = \sum_{\ell''=|m|} \frac{|w_{\ell''}(r_m)|^2}{v^*_\ell(r_m)v_{\ell-1}(r_m)} U^{m*}_{\ell\ell''}U^m_{\ell-1,\ell''} + \frac{|w_\ell(r_m)|^2}{v_{\ell-1}(r_m)} U^m_{\ell-1,\ell}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{w^*_\ell(r_m)} - \frac{1}{v^*_\ell(r_m)}\right) + U^{m*}_{\ell,\ell-1}\frac{|w_{\ell-1}(r_m)|^2}{v^*_\ell(r_m)}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{w_{\ell-1}(r_m)} - \frac{1}{v_{\ell-1}(r_m)}\right) \tag{H.4}$$

Introduciendo ahora la definición de $U^m_{\ell\ell'}$ obtenida en la sección 2.2.3,

$$U^m_{\ell\ell'} = \sum_{h=|m|}^{\infty} (M^{-1})^m_{\ell h}\gamma^m_{h\ell'} I_{\ell'} = \left[(M^{-1})^m\gamma^m\right]_{\ell\ell'} I_{\ell'} \tag{2.84}$$

donde para simplificar la notación se usa la última igualdad. Además, se tiene el resultado (2.75) permite escribir I_ℓ de manera conveniente:

$$I_\ell = -\frac{i}{kr_m^2 f(r_m)} \frac{1}{w_\ell(r_m)v_\ell(r_m)} \tag{2.75}$$

Entonces, volviendo a la ecuación (H.4), reemplazando primero U^m por su definición (2.84),

$$\begin{aligned}\mathcal{N}^m_{\ell,\ell-1} = \sum_{\ell''=|m|} & \frac{|w_{\ell''}(r_m)|^2 |I_{\ell''}|^2}{v_\ell^*(r_m)v_{\ell-1}(r_m)} \left[(M^{-1})^m\gamma^m\right]^*_{\ell\ell''} \left[(M^{-1})^m\gamma^m\right]_{\ell-1,\ell''} \\ & + \frac{|w_\ell(r_m)|^2}{v_{\ell-1}(r_m)} I_\ell \left[(M^{-1})^m\gamma^m\right]_{\ell-1,\ell} \left(\frac{1}{2}\frac{1}{w_\ell^*(r_m)} - \frac{1}{v_\ell^*(r_m)}\right) \\ & + I^*_{\ell-1} \left[(M^{-1})^m\gamma^m\right]^*_{\ell,\ell-1} \frac{|w_{\ell-1}(r_m)|^2}{v_\ell^*(r_m)} \left(\frac{1}{2}\frac{1}{w_{\ell-1}(r_m)} - \frac{1}{v_{\ell-1}(r_m)}\right)\end{aligned} \tag{H.5}$$

Reemplazando I_ℓ por el resultado (2.75),

$$\begin{aligned}\mathcal{N}^m_{\ell,\ell-1} = & \frac{1}{k^2 r_m^4 f(r_m)^2} \frac{1}{v_\ell^*(r_m)v_{\ell-1}(r_m)} \sum_{\ell''=|m|} \frac{\left[(M^{-1})^m\gamma^m\right]^*_{\ell\ell''} \left[(M^{-1})^m\gamma^m\right]_{\ell-1,\ell''}}{|v_{\ell''}(r_m)|^2} \\ & - \frac{i}{kr_m^2 f(r_m)} \left(\left[(M^{-1})^m\gamma^m\right]_{\ell-1,\ell} \frac{w_\ell^*(r_m)}{v_\ell(r_m)v_{\ell-1}(r_m)} \left(\frac{1}{2}\frac{1}{w_\ell^*(r_m)} - \frac{1}{v_\ell^*(r_m)}\right) \right. \\ & \left. - \left[(M^{-1})^m\gamma^m\right]^*_{\ell,\ell-1} \frac{w_{\ell-1}(r_m)}{v_\ell^*(r_m)v_{\ell-1}^*(r_m)} \left(\frac{1}{2}\frac{1}{w_{\ell-1}(r_m)} - \frac{1}{v_{\ell-1}(r_m)}\right)\right)\end{aligned} \tag{H.6}$$

Juntando las fracciones entre paréntesis, puede escribirse:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}^m_{\ell,\ell-1} = & \frac{1}{k^2 r_m^4 f(r_m)^2} \frac{1}{v_\ell^*(r_m)v_{\ell-1}(r_m)} \sum_{\ell''=|m|} \frac{\left[(M^{-1})^m\gamma^m\right]^*_{\ell\ell''} \left[(M^{-1})^m\gamma^m\right]_{\ell-1,\ell''}}{|v_{\ell''}(r_m)|^2} \\ & - \frac{i}{kr_m^2 f(r_m)} \left(\left[(M^{-1})^m\gamma^m\right]_{\ell-1,\ell} \frac{1}{|v_\ell(r_m)|^2 v_{\ell-1}(r_m)} \left(\frac{v_\ell^*(r_m) - 2w_\ell^*(r_m)}{2}\right) \right. \\ & \left. \left[(M^{-1})^m\gamma^m\right]^*_{\ell,\ell-1} \frac{1}{v_\ell^*(r_m)|v_{\ell-1}(r_m)|^2} \left(\frac{v_{\ell-1}(r_m) - 2w_{\ell-1}(r_m)}{2}\right)\right)\end{aligned} \tag{H.7}$$

Ahora bien, de la sección 2.2.2 se sabe que $w_\ell(r)$ es la parte real de $v_\ell(r)$ (ec. (2.57)), resulta entonces que $v_\ell(r_m) - 2w_\ell(r_m) = -v_\ell^*(r_m)$. Luego, reemplazando en los paréntesis y agrupando los términos restantes se obtiene finalmente:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}^m_{\ell,\ell-1} = & \frac{1}{k^2 r_m^4 f(r_m)^2} \frac{1}{v_\ell^*(r_m)v_{\ell-1}(r_m)} \sum_{\ell''=|m|} \frac{\left[(M^{-1})^m\gamma^m\right]^*_{\ell\ell''} \left[(M^{-1})^m\gamma^m\right]_{\ell-1,\ell''}}{|v_{\ell''}(r_m)|^2} \\ & + \frac{i}{2kr_m^2 f(r_m)} \frac{1}{v_\ell^*(r_m)v_{\ell-1}(r_m)} \left(\left[(M^{-1})^m\gamma^m\right]_{\ell-1,\ell} - \left[(M^{-1})^m\gamma^m\right]^*_{\ell,\ell-1} \right)\end{aligned} \tag{3.55}$$

En resumen, se logra escribir $\mathcal{N}^m_{\ell,\ell-1}$ (del cual depende el resultado final de la fuerza obtenido en la sección 3.5) en términos únicamente de las soluciones radiales evaluadas en el espejo ($v_\ell(r_m)$ y $u_\ell(r_m)$, esta última solo se encuentra dentro de la definición de $(M^{-1})^m$ dada por (2.85)) y de las γ^m que son matrices de coeficientes constantes. Se continua el análisis de la fuerza usando el resultado 3.55 en la sección 3.5.

I. Método numérico: Soluciones en infinito

En este apéndice se desarrolla el método presentado en la sección 4.1.2 para obtener numéricamente las soluciones $w_\ell(r)$ y $v_\ell(r)$ que satisfacen la condición de contorno en infinito. Sea cierta combinación $d_\ell(r) = a_1 v_\ell(r) + b_1 w_\ell(r)$ tal que se satisface en la posición del espejo $r = r_m$:

$$d'_\ell(r_m) = \alpha_1 \qquad \text{y} \qquad d_\ell(r_m) = \beta_1 \tag{I.1}$$

Mientras que otra combinación $g_\ell(r) = a_2 v_\ell(r) + b_2 w_\ell(r)$ satisface

$$g'_\ell(r_m) = \alpha_2 \qquad \text{y} \qquad g_\ell(r_m) = \beta_2 \tag{I.2}$$

donde α_1, β_1, α_2 y β_2 son constantes. Las funciones $d_\ell(r)$ y $g_\ell(r)$ son soluciones numéricas de la ecuación (2.20), obtenidas utilizando los anteriores valores iniciales α_i y β_i que toman en $r = r_m$ para comenzar la resolución numérica. Pueden escribirse las condiciones iniciales en el espejo de manera matricial usando las combinaciones anteriormente definidas. En el primer caso se tiene:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v'_\ell(r) & w'_\ell(r) \\ v_\ell(r) & w_\ell(r) \end{pmatrix}_{r=rm} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \tag{I.3}$$

en tanto para el segundo caso se tiene:

$$\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v'_\ell(r) & w'_\ell(r) \\ v_\ell(r) & w_\ell(r) \end{pmatrix}_{r=rm} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \tag{I.4}$$

o bien juntando estas 2 condiciones,

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v'_\ell(r) & w'_\ell(r) \\ v_\ell(r) & w_\ell(r) \end{pmatrix}_{r=rm} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & a_2 \end{pmatrix} \tag{I.5}$$

Despejando las soluciones evaluadas en el espejo,

$$\begin{pmatrix} v'_\ell(r) & w'_\ell(r) \\ v_\ell(r) & w_\ell(r) \end{pmatrix}_{r=rm} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & a_2 \end{pmatrix}^{-1} \tag{I.6}$$

Entonces, dadas las soluciones numéricas $d_\ell(r)$ y $g_\ell(r)$ obtenidas a partir de las condiciones iniciales α_1, β_1, α_2 y β_2 impuestas, se ajustan en una región lejana las funciones $w_\ell(r)$ y $v_\ell(r)$ donde se comportan como Bessels esféricas. Con este ajuste se obtienen los parámetros a_1, b_1, a_2 y b_2 los cuales, junto a las condiciones iniciales impuestas, determinan completamente las funciones $w_\ell(r_m)$ y $v_\ell(r_m)$ y sus derivadas en el mismo punto. Se observa que las condiciones iniciales impuestas pueden tomar cualquier valor siempre y cuando se satisfaga que los pares (α_1, β_1) y (α_2, β_2) sean linealmente independientes y se verifique que en "infinito" se ajusten las Bessels esféricas. En este caso, las condiciones iniciales impuestas son:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{I.7}$$

En caso de querer escribir las funciones $w_\ell(r)$ y $v_\ell(r)$ en todo su dominio, teniendo ya los valores de los ajustes de las combinaciones $d_\ell(r)$ y $g_\ell(r)$, se despejan de estas

combinaciones las funciones deseadas:

$$\begin{cases} w_\ell(r) = \dfrac{b_2 d_\ell(r) - b_1 g_\ell(r)}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \\ v_\ell(r) = \dfrac{g_\ell(r)}{b_2} - \dfrac{a_2}{b_2}\left(\dfrac{b_2 d_\ell(r) - b_1 g_\ell(r)}{a_1 b_2 - a_2 b_1}\right) \end{cases} \tag{I.8}$$

Para completar este método se necesita atribuir el "infinito" a un valor de r los suficiente grande (llamado r_∞). Para ello, se considera que este valor debe ser tal que la métrica es aproximadamente plana (es decir $f(r) \approx 1$, ec. (1.14)) y el campo de gauge debido al BH cargado se apaga (es decir $h(r) \approx \mu$, ec. (1.19)). Proponiendo para este valor $r_\infty = 10^4$ resulta:

$$f(r_\infty) \approx 0.990016 \qquad \text{y} \qquad \frac{h(r_\infty)}{\mu} \approx 1.00533 \tag{I.9}$$

Si este valor elegido es correcto, entonces en un entorno a este punto, por ejemplo $r \in (r_\infty - 20, r_\infty)$, las funciones $w_\ell(r)$ y $v_\ell(r)$ toman su forma asintótica estudiada en la sección (2.2.2):

$$\begin{cases} w_\ell(r) \simeq j_\ell(kr) & (2.52) \\ v_\ell(r) \simeq h_\ell^{(1)}(kr) & (2.47) \end{cases}$$

donde $j_\ell(kr)$ es la función de Bessel esférica y $h_\ell^{(1)}(kr)$ es la función de Hankel esférica de primera especie. Entonces, se resuelve numéricamente la ecuación radial (2.20) imponiendo las condiciones iniciales mostradas en (I.7), es decir se obtiene numéricamente $d_\ell(r)$ y $g_\ell(r)$, luego se llevan estas soluciones hasta el intervalo $r \in (r_\infty - 50, r_\infty)$ donde se ajustan las combinaciones $a_i h_\ell^{(1)}(kr) + b_i j_\ell(kr)$ con $i = 1, 2$. En la figura I.1 se muestran distintos gráficos obtenidos para distintos valores de k y fijando el ℓ en un valor arbitrario. Puede observarse en esta figura que el valor de r_∞ propuesto es un buen valor ya que por ejemplo para $k = 1.5$ se obtiene un ajuste muy bueno con un $R^2 = 0.989$, indicando que las soluciones numéricas en este punto efectivamente se comportan como una combinación de Bessels esféricas (figuras I.1a y I.1c). Sin embargo, al aumentar el k a $k = 4.5$ (el cual es el máximo k con el que se trabaja, como puede verse en la sección 4.3) se observa que el ajuste ya no es tan bueno, obteniendo un $R^2 = 0.741$ (figuras I.1c y I.1d). Este último ajuste pareciera indicar que el r_∞ no es lo suficientemente grande, luego si se aumenta el valor de $r_\infty = 10^4$ a $r_\infty = 2 \times 10^4$ se obtiene un mejor ajuste con un $R^2 = 0.929$ (figuras I.1e y I.1f). Sin embargo, se elige $r_\infty = 10^4$ y se considera que el ajuste obtenido para $k = 4.5$ es aceptable, ya que al tomar un r_∞ mayor surgen complicaciones con la capacidad de la computadora utilizada que imposibilitan la finalización del cálculo numérico.

En conclusión, con el método explicado en este apéndice se obtienen los valores que toman las funciones $w_\ell(r)$ y $v_\ell(r)$ en el espejo a una distancia r_m, estos valores son los necesarios para la determinación de la fuerza a partir del resultado (3.54). Además, se pueden construir las funciones en todo su dominio usando (I.8), lo cual resulta útil para analizar su comportamiento y obtener un resultado del caso clásico estudiado en la sección 2, es decir la dispersión de una onda plana incidente. Por último, se propone un valor $r_\infty = 10^4$ el cual es lo suficientemente grande como para que efectivamente las funciones $w_\ell(r)$ y $v_\ell(r)$ tomen su forma asintótica que se

necesita ajustar. Los resultados obtenidos a partir de este método son presentados en la sección 4.1.2.

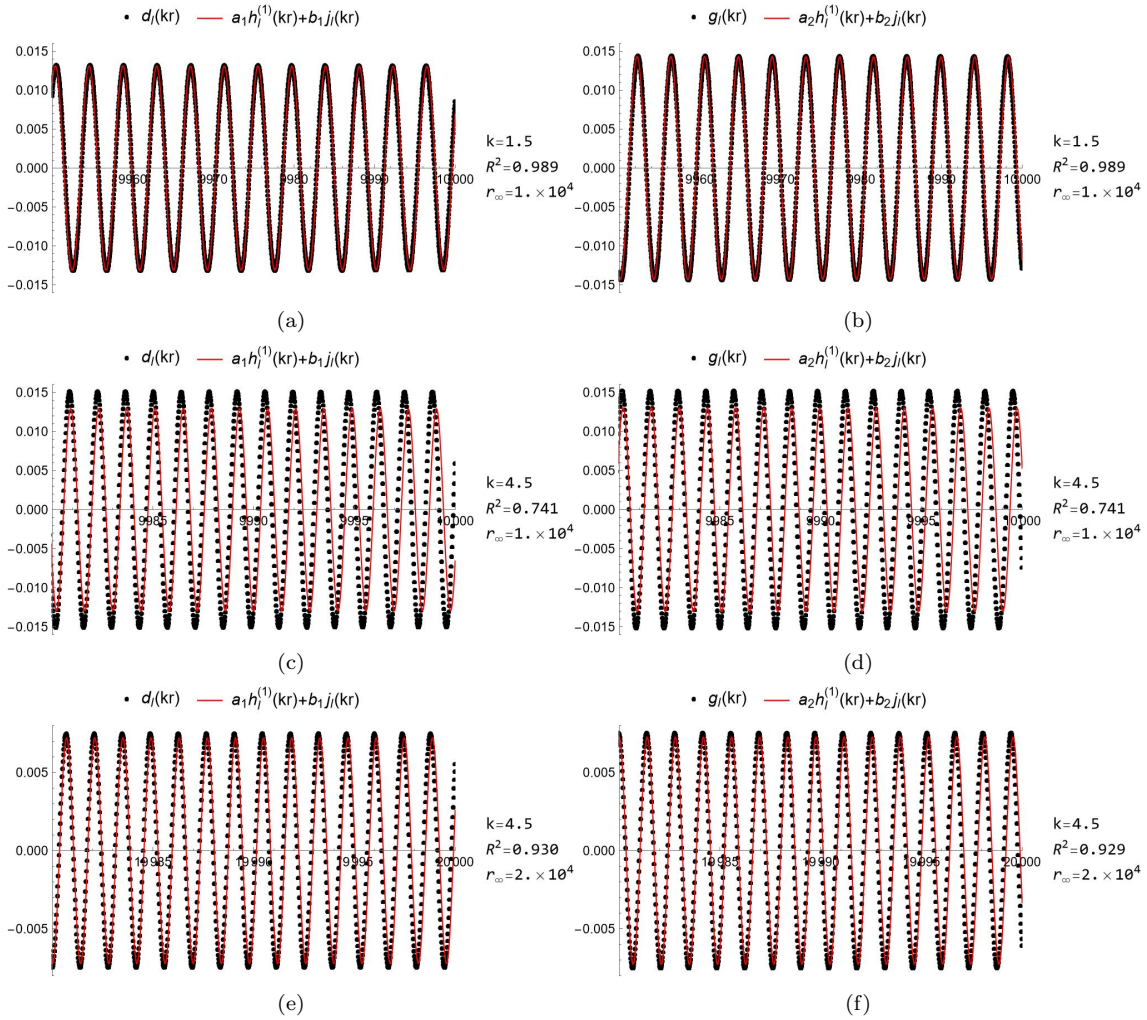


Figura I.1: Representación gráfica de las soluciones numéricas $d_\ell(r)$ y $g_\ell(r)$ obtenidas mediante las condiciones iniciales impuestas en (I.7) (puntos negros) con el respectivo ajuste (línea roja) propuesto por la combinación $a_i h_\ell^{(1)}(kr) + b_i j_\ell(kr)$ con $i = 1, 2$ (usando los parámetros de la tabla 4.1). Se muestran únicamente la parte real ya que como se imponen condiciones iniciales reales entonces la parte imaginaria queda nula. En todos los casos se usa un valor arbitrario $\ell = 5$ y el ajuste se toma siempre sobre el mismo intervalo $r \in (r_\infty - 50, r_\infty)$ (donde r_∞ es el valor que se elige como "infinito"), sin embargo se muestran los gráficos en distintos intervalos para una ayuda visual. En las figuras I.1a y I.1b se observa que el ajuste realizado sobre las soluciones numéricas es muy bueno arrojando un valor de R^2 muy cercano a 1. Por otro lado, al aumentar el valor de k dejando fijo el valor de r_∞, como se observa en los gráficos I.1c y I.1d, el ajuste ya no es tan bueno arrojando un valor de $R^2 = 0.74$. Por último, se observa que es posible arreglar este último ajuste alejando el infinito, es decir si en lugar de tomar $r_\infty = 10^4$ se tomase $r_\infty = 2 \times 10^4$, como puede verse en las figuras I.1e y I.1f, obteniendo nuevamente un buen ajuste con un R^2 cercano a 1.

J. Análisis numérico de $\gamma^m_{\ell\ell'}$

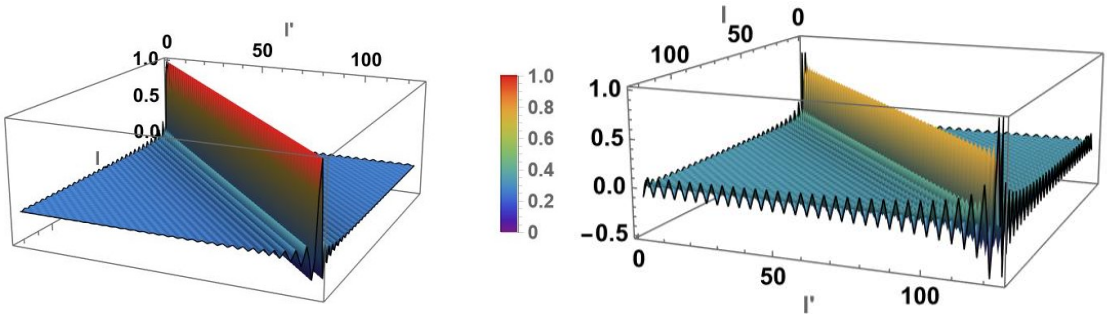
En este apéndice se estudia la forma de las matrices γ^m y las aproximaciones presentadas en la sección 4.2. Los elementos de estas matrices vienen dados por

$$\gamma^m_{\ell\ell'} = \begin{cases} \sqrt{(2\ell+1)(2\ell'+1)\frac{(\ell-m)!(\ell'-m)!}{(\ell+m)!(\ell'+m)!}}\int_0^1 P^m_\ell(x)P^m_{\ell'}(x) & \text{si } \ell'-\ell \text{ impar} \\ 0 & \text{si } \ell'-\ell \text{ par (con } \ell \neq \ell') \\ 1 & \text{si } \ell'=\ell \end{cases} \tag{2.79}$$

Además, se esta interesado en la definición restándole la identidad $(\gamma^m - \mathbf{1})$, la cual tiene la paridad entre sus índices bien definida:

$$(\gamma^m - \mathbf{1})_{\ell\ell'} = \begin{cases} \sqrt{(2\ell+1)(2\ell'+1)\frac{(\ell-m)!(\ell'-m)!}{(\ell+m)!(\ell'+m)!}}\int_0^1 P^m_\ell(x)P^m_{\ell'}(x) & \text{si } \ell'-\ell \text{ impar} \\ 0 & \text{si } \ell'-\ell \text{ par} \end{cases} \tag{J.1}$$

En particular, como se ve en la sección 4.2, se necesita la inversa de esta última matriz. En la figura J.1a puede observarse la forma que tiene la matriz γ^m a m fijo. Usando esta matriz, se obtiene la matriz $(\gamma^m - \mathbf{1})^{-1}$, como puede verse en la figura J.1b. En el caso de la γ^m se observa que tiene el valor máximo en la diagonal principal (igual a 1) y luego disminuye de manera alternada a medida que se aleja de la diagonal. De manera similar se tiene para la matriz $(\gamma^m - \mathbf{1})^{-1}$, excepto que el valor máximo no se encuentra exactamente en la diagonal sino en los elementos contiguos. Además, en este último caso se observa que la matriz mantiene la paridad entre los índices de cada elemento de matriz.

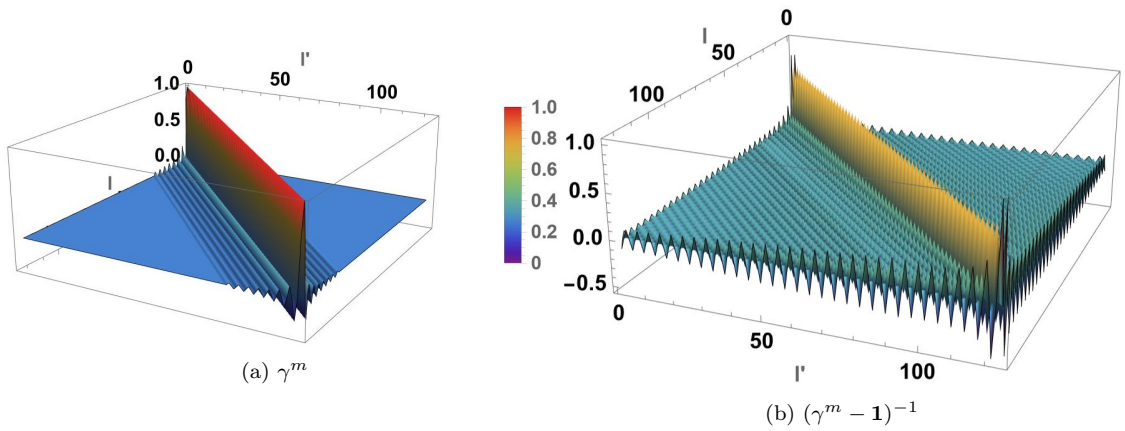


(a) γ^m

(b) $(\gamma^m - \mathbf{1})^{-1}$

Figura J.1: Representación gráfica de las matrices de coeficientes γ^m y $(\gamma^m - \mathbf{1})^{-1}$ con $m = 1$ (figuras J.1a y J.1b respectivamente). Puede observarse que los elementos $\gamma^m_{\ell\ell'}$ están concentrados en la diagonal principal y luego decaen rápidamente a medida que se aleja de la diagonal. De manera similar se observa para $(\gamma^m - \mathbf{1})^{-1}$ excepto que el valor máximo no se encuentra exactamente en la diagonal sino en los elementos contiguos y que el decrecimiento a medida que se aleja de la diagonal no es tan rápido como ocurre con $\gamma^m_{\ell\ell'}$. Además, se observa que $(\gamma^m - \mathbf{1})^{-1}_{\ell\ell'}$ mantiene que sus elementos con $\ell' - \ell$ par son nulos.

Las observaciones del párrafo anterior sugieren una primera aproximación en las γ^m para simplificar el cálculo numérico: se calculan los elementos de la diagonal principal y hasta 30 puntos de cada lado de la diagonal, mientras que el resto se toma igual a cero. En la figura J.2a se muestra la γ^m obtenida bajo esta aproximación,



(a) γ^m

(b) $(\gamma^m - \mathbf{1})^{-1}$

Figura J.2: Representación gráfica de las matrices de coeficientes γ^m y $(\gamma^m - \mathbf{1})^{-1}$ con $m = 1$ (figuras J.2a y J.2b respectivamente). Para obtener γ^m se calculan los elementos de la diagonal principal y hasta 30 puntos de cada lado de la diagonal, mientras que el resto se toma igual a cero. Luego, usando esta matriz se obtiene la matriz $(\gamma^m - \mathbf{1})^{-1}$, donde se observa que se sigue manteniendo que para $\ell' - \ell$ par los elementos son nulos.

$\gamma^m_{1002,1005}$					
$m = 1$	$m = 144$	$m = 287$	$m = 430$	$m = 572$	$m = 716$
-0.21189	-0.21253	-0.211861	-0.212595	-0.211737	-0.212852
$m = 859$	$m = 967$	$m = 977$	$m = 987$	$m = 997$	$m = 1002$
-0.211027	-0.207868	-0.206311	-0.202956	-0.190364	-0.325856

Tabla J.1: Valores de $\gamma^m_{\ell\ell'}$ fijando $\ell = 1002$ y $\ell' = 1005$ y variando el m. Se observa que estos valores coinciden para distintos m excepto cuando m se acerca a los valores de ℓ y ℓ'.

además se muestra en la figura J.2b la matriz $(\gamma^m - \mathbf{1})^{-1}$ obtenida a partir de dicha aproximación.

Por otro lado, usando la anterior aproximación, se analiza el comportamiento de la $\gamma^m_{\ell\ell'}$ en función del índice m. Para ello, se fija el índice ℓ en un valor arbitrario mientras se varía el índice ℓ', luego se procede de la misma manera variando el índice m. El resultado de este procedimiento se encuentra en la figura J.3, donde se observa que los puntos cercanos al pico correspondiente a la diagonal prácticamente coinciden (no coinciden completamente aunque la variación es tan pequeña que se le atribuye al error numérico de las integrales en $\gamma^m_{\ell\ell'}$). También se observa como el inicio de esta matriz se va moviendo a medida que aumenta m ya que las sumatorias en ℓ y ℓ' comienzan en m, por lo tanto, la dimensión de $\gamma^m_{\ell\ell'}$ depende de m. Estas observaciones llevan a una segunda aproximación sobre $\gamma^m_{\ell\ell'}$: se consideran que las matrices $\gamma^m_{\ell\ell'}$ son independientes de m, en el sentido de que si $m' \neq m$ y ℓ y ℓ' son mayores que m y m' entonces $\gamma^m_{\ell\ell'} \approx \gamma^{m'}_{\ell\ell'}$. Por lo tanto, puede simplemente calcularse $\gamma^m_{\ell\ell'}$ con $m = 1$ y para valores distintos de m se modifica el valor inicial de ℓ y ℓ'. Por último, en la tabla J.1 se analiza un poco más esta aproximación, donde ahora se fija el valor de ℓ y ℓ' tal que estemos cerca del pico $\ell = \ell'$, luego se varía m. En esta tabla puede observarse que a medida que el valor de m se aproxima a los valores fijos de ℓ y ℓ', comienza a apreciarse una diferencia entre los valores de $\gamma^m_{\ell\ell'}$. Sin embargo, del cálculo numérico de la fuerza (sección 4.3) resulta que la fuerza tiene un termino con $\ell^2 - m^2$, por lo tanto los términos con $m \approx \ell$ son los que menos contribuyen.

En resumen, para simplificar el trabajo numérico necesario para determinar $\gamma^m_{\ell\ell'}$ se

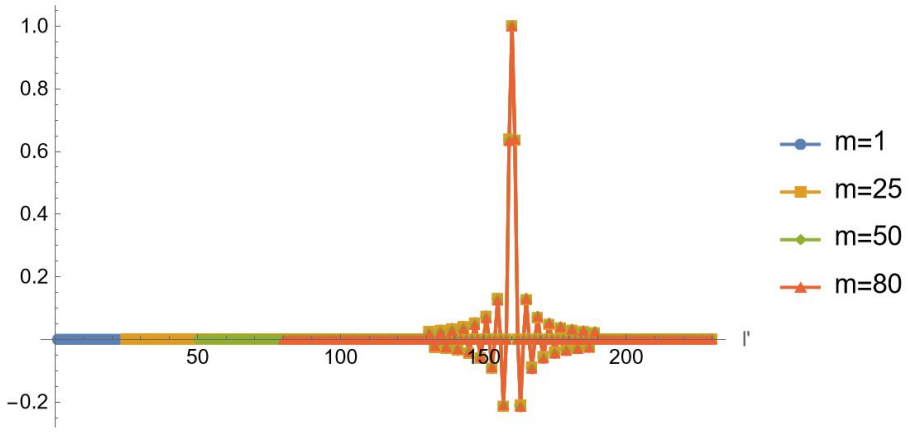


Figura J.3: Comportamiento de la fila con $\ell = 160$ de la matriz de coeficientes $\gamma^m_{\ell\ell'}$ barriendo en ℓ' para distintos valores de m. En el gráfico no se pueden distinguir todos los puntos ya que coinciden dentro del error numérico. Se observa que a medida que aumenta m también lo hace el valor inicial de $\gamma^m_{\ell\ell'}$, esto es porque se sigue manteniendo que $m < \ell', \ell$, luego se observa que la dependencia de $\gamma^m_{\ell\ell'}$ con m es únicamente en su dimensión.

realizan 2 aproximaciones: (i) solo se calculan los elementos de la diagonal principal y hasta 30 puntos de cada lado de la diagonal, mientras que el resto se toma igual a cero, y (ii) los elementos $\gamma^m_{\ell\ell'}$ no dependen de m (la dependencia con m solamente aparece en la dimensión de las matrices de coeficientes γ^m). Estas aproximaciones se utilizan en la sección 4.2 para estudiar la dispersión clásica de una onda plana incidente, como también en la sección 4.3 para analizar el valor de la fuerza del cohete de BH. En esta última sección, se ponen a prueba estas aproximaciones verificando la bondad de las mismas.

K. Análisis de las aproximaciones numéricas realizadas

En este apéndice se discuten las aproximaciones realizadas para obtener el resultado numérico de la fuerza en la sección 4.3. Partiendo de la expresión para fuerza obtenida en la sección 3.5:

$$F_3 = -\frac{4}{\pi}\int_0^\infty dk\, k^2 \left[\frac{1}{(\omega_p - e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p - e\mu}{T}} - 1\right)} + \frac{1}{(\omega_p + e\mu)\left(e^{\frac{\omega_p + e\mu}{T}} - 1\right)}\right] \times \\ \times \sum_{m>0}\sum_{\ell=m}\sqrt{\frac{(\ell^2 - m^2)}{(4\ell^2 - 1)}}\,\mathfrak{Im}\left[\mathcal{N}^m_{\ell,\ell-1}\right] \tag{3.54}$$

Las aproximaciones numéricas realizadas para la determinación de la fuerza pueden resumirse en 3 puntos: (i) el corte utilizado en ℓ_{max} para cortar la sumatoria en ℓ, (ii) las matrices de coeficientes $\gamma^m_{\ell\ell'}$ tiene elementos no nulos cerca de la diagonal y ceros a medida que se aleja, y (iii) los elementos $\gamma^m_{\ell\ell'}$ no dependen de m, solamente depende de m la dimensión de la matriz. Comenzando con la primera aproximación, en la cual se propone un corte en el índice ℓ que viene dado por I_ℓ ya que, como se ve en la sección 4.2, este tiene un pico ℓ_{pico} y luego decae muy rápidamente (ver figura 4.7), entonces se toma como corte $\ell_{max} = \ell_{pico} + 10$ (recordando que siempre se toma este valor si es par y el valor anterior si es impar). Para analizar este corte, se obtiene numéricamente el valor de la fuerza de empuje para un k fijo ($k = 1.2$) tomando distintos máximos de ℓ. Para dicho valor de k, se espera que $\ell_{max} = 178$ (usando el argumento de la sección 4.2 para predecir teóricamente el ℓ_{pico}), luego se toman como máximos de ℓ: 120, 150, 178, 208 y 238. El resultado de este procedimiento se muestra en la figura K.1, donde se observa que el integrando en la fuerza aumenta con ℓ_{max} hasta $\ell_{max} = 178$ (ya que si se toman menos términos se esta dejando fuera de la suma términos que contribuyen al total), mientras que si se pasa este valor de ℓ_{max} entonces el integrando no varía (la diferencia apreciable en la figura se le atribuye al error numérico), es decir que no hace falta tomar más ℓ en las sumatorias.

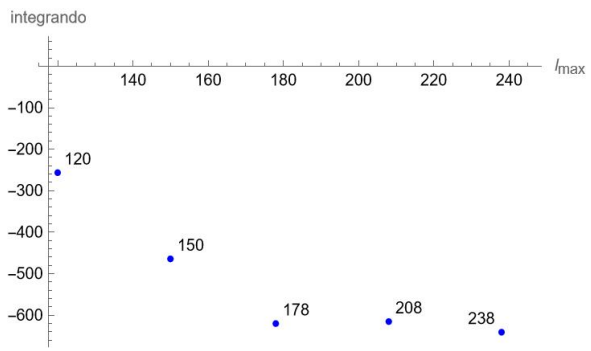


Figura K.1: Representación gráfica del valor que toman las sumatorias en m y ℓ en el integrando de la fuerza (3.54) usando los distintos valores de ℓ_{max} que se indican en la figura como corte de las sumatorias (tanto de ℓ como de m). Se observa como los valores se estabilizan en $\ell_{max=178}$, esto es de esperarse ya que este es el valor teórico que se usa como corte, luego si se toman más ℓ entonces no contribuyen al total y si se toman menos entonces se dejan afuera términos que si contribuyen al total.

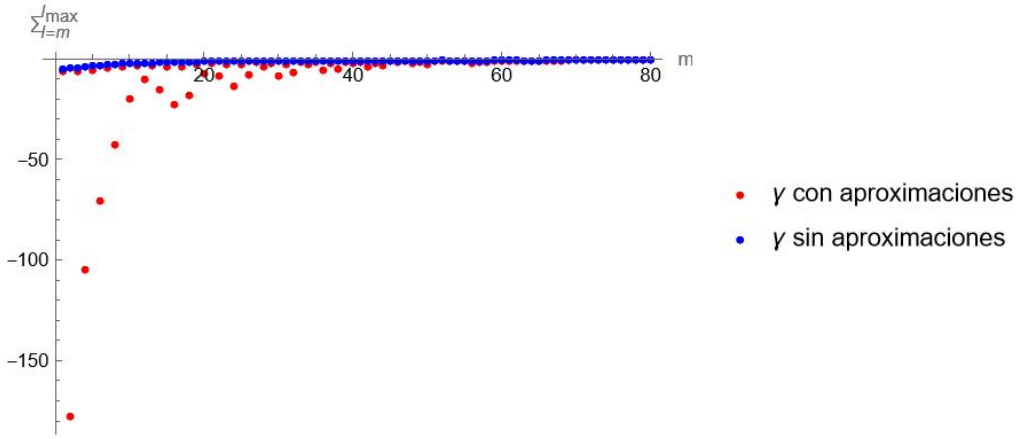


Figura K.2: Representación gráfica de la sumatoria en ℓ partiendo en $\ell = m$ hasta $\ell_{max}(\sum_{\ell=m}^{\ell_{max}})$, usando los elementos de matriz $\gamma^m_{\ell\ell'}$ con aproximaciones (puntos rojos) y sin aproximaciones (puntos azules), es decir, sin tomar como cero a los elementos lejanos a la diagonal principal de $\gamma^m_{\ell\ell'}$ ni tomando que es independiente de m. De esta figura se concluye que la aproximación de tomar los elementos nulos lejos de la diagonal es una buena aproximación, mientras que aproximar a los elementos $\gamma^m_{\ell\ell'}$ como independientes de m es valida para todo m impar pero para m par solo vale para m grande.

Por otro lado, se analiza ahora como varía el resultado de la fuerza usando las aproximaciones (ii) y (iii) en la matriz de coeficientes $\gamma^m_{\ell\ell'}$. Para ello, se fija $k = 0.8$ y se calcula numéricamente cada término en la sumatoria en m, es decir sumando sobre todo ℓ partiendo en $\ell = m$ hasta ℓ_{max} (que ya sabe que es un buen corte). En la figura K.2 se muestra el resultado obtenido de hacer el anterior procedimiento usando por un lado la $\gamma^m_{\ell\ell'}$ con las aproximaciones (puntos rojos) y por otro una $\gamma^m_{\ell\ell'}$ sin aproximaciones (puntos azules), es decir que se calculan todos los elementos de $\gamma^m_{\ell\ell'}$ fuera de la diagonal (mientras que en la aproximación se toman nulos) y para distintos valores de m (mientras que en la aproximación se toman independientes de m). De esta figura, primero se concluye que tomar como cero a medida que se aleja de la diagonal es una buena aproximación, ya que en caso contrario debería apreciarse una mayor diferencia en todos los puntos (esto también se verifica usando solo esta aproximación observando que reproduce los mismos resultados). Segundo, la aproximación de que $\gamma^m_{\ell\ell'}$ es independiente de m es buena para m grande pero mala para m pequeño. Además, llama la atención como esta aproximación falla en particular para m par, mientras que para todo m impar funciona bien.

En conclusión, de las tres aproximaciones necesarias para hacer el cálculo numérico de la fuerza se observa que solo dos son buenas aproximaciones, mientras que suponer que los elementos de matriz $\gamma^m_{\ell\ell'}$ es independiente de m no es una buena aproximación. Resta seguir estudiando este último caso, donde además la aproximación falla en particular para m par. Para entender mejor el comportamiento de la solución con m, podría estudiarse una solución analítica de $\gamma^m_{\ell\ell'}$ cuyos coeficientes son integrales de polinomios asociados de Legendre. Para ello, puede escribirse por ejemplo el producto de los polinomios como un desarrollo en serie de otro polinomio de Legendre e integrar ahora solo este polinomio, luego pueden obtenerse los coeficientes del desarrollo que vienen dados por los 3-j símbolos de Wigner (los cuales son proporcionales a los coeficientes de Clebsh-Gordan) [Mavromatis y Alassar 1999].