

# Diseño del control de trayectoria de un pararrotor

Juan Francisco Martiarena<sup>1</sup>, Augusto Zumárraga<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Dpto. de Aeronáutica FI, Universidad Nacional de La Plata

juanfmartiarena@gmail.com

March 18, 2021

## Abstract

En el presente trabajo se desarrolla un sistema de control de trayectoria para un modelo linealizado de un decelerador aerodinámico de alas rotatorias (pararrotor).

Los pararrotos son dispositivos que funcionan en régimen de autorrotación, y están pensados para la realización de una variedad de tareas que pueden ir desde la recuperación de sondas espaciales hasta la entrega de cargas en sitios de difícil acceso por vía terrestre o acuática. Debido a características constructivas, utilizan palas de bajo alargamiento, con lo que se añaden singularidades aerodinámicas propias de este tipo de palas.

Luego de analizar las principales características dinámicas del dispositivo, se diseña el sistema de control de trayectoria. Para el mismo se propone un esquema de control en cascada, en donde a partir de controlar la actitud del pararrotor se controla la trayectoria de descenso. Esto hace necesario diseñar un lazo interno, donde se pone en juego la dinámica actitudinal del pararrotor, y un lazo externo para el cual se utiliza un modelo de masa puntual.

Esta hipótesis permite desacoplar el control de trayectoria en el plano horizontal mediante dos controles SISO en cada uno de los ejes ligados al cuerpo, mientras que para la actitud se analiza la implementación de un control por realimentación de estados.

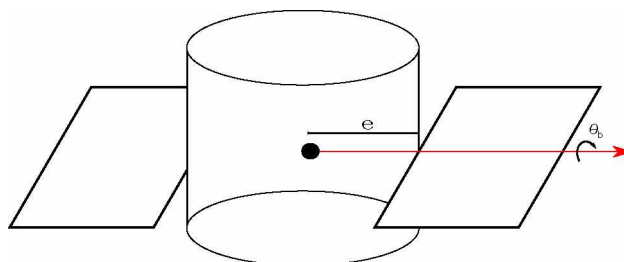
A modo de validación (o comparación) se presenta una evaluación de los aspectos dinámicos esenciales del sistema de control obtenido mediante el modelo linealizado.

## 1 Introducción

Un pararrotor es un decelerador aerodinámico de alas rotatorias, que tiene la particularidad de poseer alas de bajo alargamiento. Este factor, que obedece principalmente a cuestiones operativas, introduce un régimen aerodinámico altamente complejo.

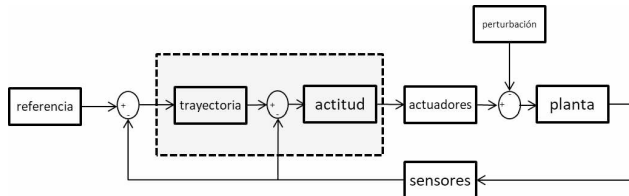
El comportamiento dinámico del mismo puede modelarse asumiendo el pararrotor como un conjunto de cuerpos rígidos articulados entre sí (el cuerpo principal y las palas) sometido a la acción de fuerzas aerodinámicas que se desarrollan a medida que se establece una corriente fluida alrededor del mismo (ver figura 1). Actúan también componentes de origen gravitatorio e inercial. La relación entre estas fuerzas y las variables cinemáticas que

describen el estado del pararrotor se establece a partir de las ecuaciones de Newton-Euler. La determinación de las variables de estado permite computar en cualquier momento la trayectoria que sigue el dispositivo. A partir de este modelo dinámico no lineal se obtiene un modelo linealizado (nominal), cuya finalidad es ser utilizado en el desarrollo de un algoritmo de control para la trayectoria.



1. Esquema del pararrotor y definición del ángulo de paso.

Para el sistema de control se propone una arquitectura en cascada. Una de las ventajas que esto presenta es que permite realimentar variables intermedias que se encuentran entre la perturbación y la salida. Esquemáticamente puede interpretarse con la ayuda de la figura 2.



2.Arquitectura de control

El control de la trayectoria en el plano horizontal puede hacerse controlando la proyección de la fuerza de tracción que genera el pararrotor sobre el mismo. Para el eje vertical, puede controlarse la velocidad de descenso  $\dot{z}_T$  por medio de la fuerza de tracción que genera el pararrotor, considerando las limitaciones que impone la autorrotación.

Se diseña el lazo de trayectoria con un modelo simple de masa puntual, sin modelar el lazo de actitud, que operará como actuador. Esto indudablemente introduce incertidumbre dinámica en el diseño, pero si se apunta a que el ancho de banda para la trayectoria sea una década menor al de actitud, esta incertidumbre resultará de alta frecuencia, sin comprometer la robustez del diseño. Para su implementación se indaga en métodos de síntesis para sistemas SISO.

Para el lazo de actitud buscamos el mayor ancho de banda que nos permite la planta, dado que este condicionará el ancho de banda del lazo de trayectoria, y con ello su exactitud y capacidad de rechazo de perturbaciones. Para el diseño del lazo de control de actitud se utiliza un esquema del tipo LQR.

## 2 Modelo dinámico del pararrotor

El régimen operativo bajo el cual se encuentra un pararrotor es el de autorrotación, entendida como la rotación de un cuerpo bajo la acción exclusiva de un par aerodinámico generado por una corriente fluida.

Para modelar las ecuaciones dinámicas del mismo [1], se define un conjunto de variables de estado, a saber:

- $u, v$  y  $w$ , son las componentes de la velocidad del centro de masas expresadas en una terna solidaria al cuerpo.
- $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ , son las componentes de la velocidad angular del pararrotor en la terna solidaria al cuerpo.
- $\Theta, \Phi$  y  $\psi$ , son los ángulos de Euler entre la terna solidaria al cuerpo y la terna tierra.

Estas variables pueden agruparse para representar vectorialmente la velocidad, la velocidad angular y la actitud del pararrotor. Así pueden construirse los vectores que se observan en la ecuación (1):

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= [u \quad v \quad w] \\ \mathbf{\Omega} &= [\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z] \\ \mathbf{\Psi} &= [\Theta \quad \Phi \quad \psi] \end{aligned} \quad (1)$$

Junto con el vector de estado  $\mathbf{x} = [\mathbf{u} \quad \mathbf{\Omega} \quad \mathbf{\Psi}]$  se define el vector de control  $\mathbf{u}_C = [\theta_0 \quad \theta_{1S} \quad \theta_{1C}]$  (ángulo de paso colectivo, de paso cíclico lateral y longitudinal respectivamente).

El modelo dinámico resulta en una función no lineal de las variables de estado (1), del vector de control  $\mathbf{u}_C$  y del tiempo. Matemáticamente puede sintetizarse en la ecuación (2):

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_C, t) \quad (2)$$

donde

$$[\mathbf{M}_{8 \times 8}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{M}_{3 \times 8}^F] \\ [\mathbf{M}_{3 \times 8}^M] \\ [\mathbf{0}_{2 \times 6}] \quad [\mathbf{M}_{2 \times 2}^{LC}] \end{bmatrix} \quad (3)$$

y:

$$\mathbf{f}_{8 \times 1} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{3 \times 1}^F \\ \mathbf{f}_{3 \times 1}^M \\ \mathbf{f}_{2 \times 1}^{LC} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Esta formulación permite describir genéricamente el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales. El efecto de las fuerzas y momentos de origen inercial aparecen en los primeros 6x8 elementos de la matriz de masas, que son los que constituyen las submatrices  $\mathbf{M}^F$  y  $\mathbf{M}^M$ . Los efectos

aerodinámicos interactúan junto a los inerciales y los gravitatorios a través de las componentes del vector  $\mathbf{f}$ .

Los elementos que constituyen la matriz (3) y el vector (4) se obtienen analíticamente en [1].

La linealización del modelo (2) se realiza alrededor de un punto de equilibrio, en el que todas las variables de estado (a excepción de la variable  $\psi$ ) se mantienen constantes. Asumiendo esta hipótesis, se linealiza el modelo de estados no lineal haciendo uso del desarrollo en series de Taylor, reteniendo solamente términos de primer orden.

Como consecuencia de esto, puede modelarse el sistema según la notación habitual para espacios de estados lineales:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (5)$$

Donde  $\mathbf{x} = [\mathbf{u} \ \boldsymbol{\Omega} \ \boldsymbol{\Psi}]'$ . Las matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  pueden representarse como se muestra en (6). En la matriz de estado se identifica una submatriz asociada a la dinámica de cuerpo rígido del pararrotor ( $\mathbf{A}_D$ ), una submatriz que establece una relación cinemática entre el vector  $\dot{\boldsymbol{\Psi}}$  con las velocidades angulares  $\boldsymbol{\Omega}$  y una submatriz que da cuenta de la proyección del efecto gravitatorio en la terna ligada al cuerpo  $\mathbf{A}_G$ . En cuanto a la matriz de control puede decirse que el vector de control opera en el cuerpo incidiendo en las ecuaciones de los estados  $\mathbf{u}$  y  $\boldsymbol{\Omega}$ .

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{D_{6 \times 6}} & \mathbf{A}_{G_{6 \times 2}} \\ \mathbf{LC}_{D_{2 \times 6}} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix}, [\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{D_{6 \times 2}} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Para una condición de vuelo como la que se muestra en la ecuación (7):

$$\beta_T = 45^\circ, w_z = 8m/s, V_H = 3m/s, \quad (7)$$

puede obtenerse un vector de control de equilibrio, promediando las fuerzas y momentos a lo largo de una vuelta [1]. En la ecuación (8) se muestra el vector resultante:

$$\mathbf{u}_C = [.09, .0914, -.088] \quad (8)$$

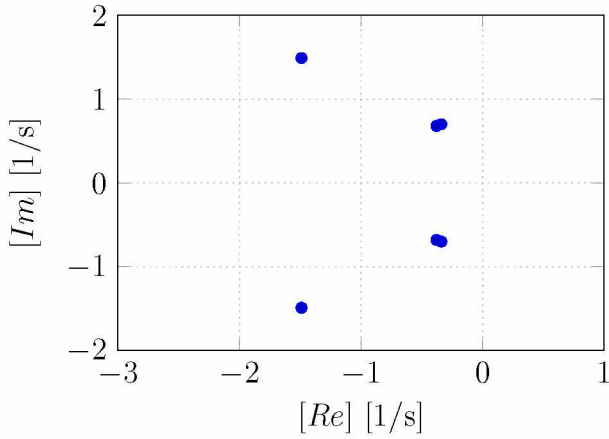
Para esta condición se tiene un sistema lineal con los autovalores y autovectores de la matriz  $\mathbf{A}$  que se muestran en 9 y 10:

$$\begin{bmatrix} \lambda_i & \omega_n & \zeta \\ \lambda_{1,2} & 0.67 & 0.55 \\ \lambda_{3,4} & 0.68 & 0.47 \\ \lambda_{5,6} & 2.1 & 0.80 \\ \lambda_{7,8} & 148 & 0.02 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0.03 & 0.00 & \mathbf{0.39} & \mathbf{0.40} \\ 0.03 & 0.00 & \mathbf{0.40} & \mathbf{0.43} \\ 0.00 & 0.05 & 0.07 & 0.03 \\ \mathbf{0.70} & 0.00 & 0.02 & 0.02 \\ \mathbf{0.70} & 0.00 & 0.01 & 0.02 \\ 0.00 & \mathbf{0.99} & \mathbf{0.81} & \mathbf{0.80} \\ 0.00 & 0.00 & 0.02 & 0.03 \\ 0.00 & 0.00 & 0.02 & 0.03 \end{bmatrix} \quad (10)$$

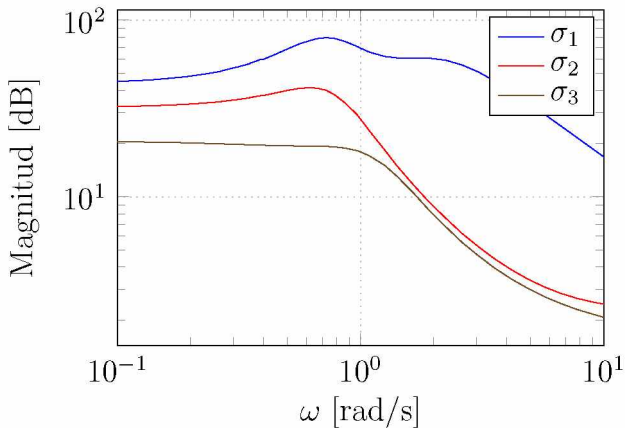
Puede observarse un par de polos complejos conjugados ( $\lambda_{7,8}$ ) en el semiplano izquierdo de bajo amortiguamiento ( $\zeta = 0.02$ ), prácticamente ubicados sobre el eje  $j\omega$ . Estos autovalores tienen un orden de magnitud superior que el resto, por lo que se analizará la posibilidad de desacoplarlos del resto del sistema. Estos modos rápidos ( $\lambda_{7,8}$ ) se encuentran asociados predominantemente con la rotación según los ejes  $x$  e  $y$ , por lo que una variación de velocidad angular en un eje se refleja con una precesión en el otro.

También hay tres pares de polos complejos conjugados en el semiplano izquierdo. Uno de ellos con amortiguamiento  $\zeta_{1,2} \cong 0.7$ , mientras los otros dos tienen un amortiguamiento menor. Al ser todas las componentes reales negativas se puede decir que el sistema es estable. Los modos de orden de magnitud unitario ( $\lambda_{5,6}$ ) se asocian con la dinámica rotacional según  $z_A$ , y los restantes pares complejos conjugados ( $\lambda_{1,2}$  y  $\lambda_{3,4}$ ) representan la dinámica lenta dominante acoplando la rotación según  $z_A$  con la dinámica lineal en el plano  $x-y$ . La figura 3 muestra la distribución de los autovalores en el plano complejo.



3. Distribución de polos y ceros en el plano complejo

Otra dimensión de análisis que puede incorporarse y que aporta resultados de interés es aquella que involucra la descomposición en valores singulares del sistema. Este análisis brinda información en cuanto a como pesan las acciones de control en las salidas. La figura 4 muestra según la frecuencia de la entrada la magnitud de la descomposición obtenida.



4. Diagrama de Bode para la descomposición en valores singulares

A partir de este análisis puede observarse que en una banda de frecuencias hasta 10 rad/s, el ángulo de paso colectivo tiene alta ganancia en la salida, mientras que el efecto de los ángulos de paso cíclico comienza a atenuarse a partir de 1 rad/s. Los valores mínimos y máximos de esta descomposición brindan una cota inferior y superior para la relación entre el error y el seguimiento de una referencia (performance).

A modo de resumen puede decirse que el modelo dinámico linealizado presenta un comportamiento estable, alrededor del punto de equilibrio indagado. Con este punto de par-

tida se exploran alternativas para la implementación de un sistema de control de la trayectoria.

### 3 Control de actitud

En este apartado se describe el diseño del lazo de control de actitud.

En base al modelo dinámico representado sintéticamente en la ecuación (5), y la hipótesis de que el vector de estado es accesible a través de un sistema de navegación integrado se diseña el control mediante realimentación de estados. Se arriba a una solución robusta y balanceada en cuanto a la exigencia para las acciones de control y la evolución que siguen las variables de estado.

Los objetivos de diseño se recuperan del apartado de análisis dinámico. Luego de varias iteraciones en el diseño de un controlador mediante técnicas de optimización de un índice de desempeño se obtiene la matriz de realimentación de estados (11). Esta matriz es de dimensión 2x8 ya que el control de actitud se ejecuta controlando los ángulos de paso cíclico ( $\theta_{1S}$  y  $\theta_{1C}$ ):

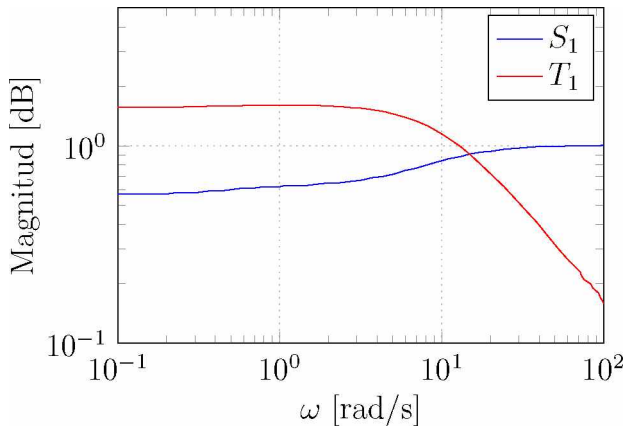
$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & -0.02 & 0 & 0.02 & -0.32 & 0 & -1.52 & 2.70 \\ 0.02 & 0 & 0 & 0.31 & 0.02 & 0 & 2.67 & 1.55 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Las matrices  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{R}$  utilizadas, que establecen a través de sus elementos el peso relativo de cada variable, son las que se muestran en (12):

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & 0 & 1 & 0 & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix} \quad (12)$$

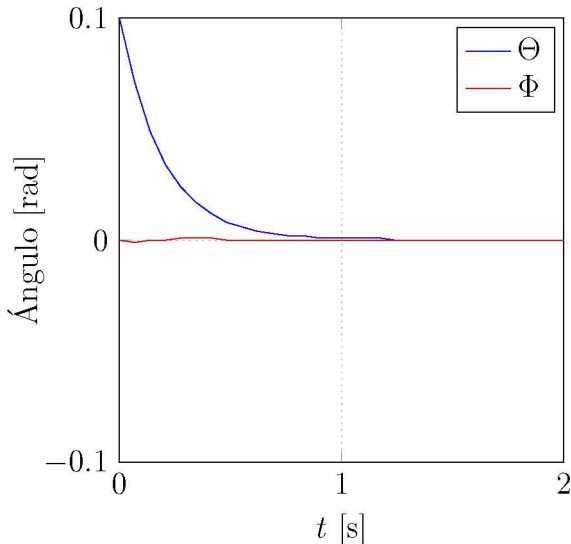
Con esta matriz se minimiza el índice de desempeño y se obtiene una nueva configuración para los polos en el lazo cerrado de actitud que se considera aceptable. El análisis de las funciones de sensibilidad y de sensibilidad complementaria dan cuenta de esto, como puede inferirse observando la figura 5, que corresponde a la referencia  $\Theta$  del control de actitud.

Allí se observa que la sensibilidad de la salida al cambio en la referencia (sensibilidad complementaria) tiene ganancia significativa en el ancho de banda deseado ( $\omega < 12 \text{ rad/s}$ ). Esto significa que en esta banda el seguimiento de referencia es satisfactorio. Por otra parte, la sensibilidad del error al cambio en la referencia tiene ganancia negativa, lo que indica que se tiene buen rechazo de perturbaciones. Un análisis similar puede realizarse para el ángulo de referencia  $\Phi$ .

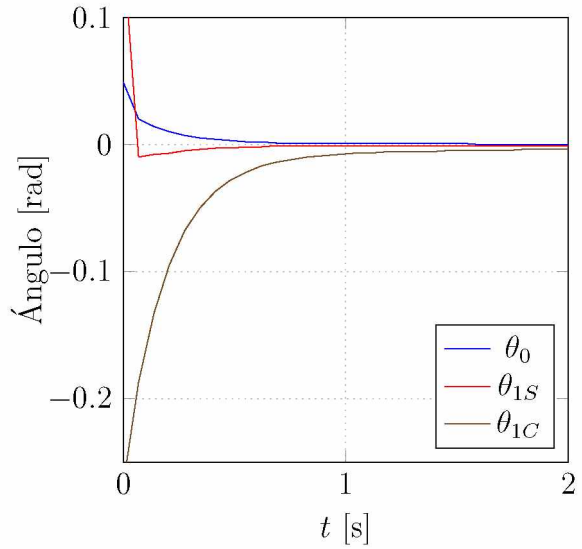


5. funciones de sensibilidad de lazo cerrado

Por último, se muestra la respuesta a condiciones iniciales obtenida para un vector de condiciones iniciales  $\mathbf{x}_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.1 \ 0]$ . En las figuras 6 y 7 se observa que el tiempo de respuesta es aceptable y las acciones de control se encuentran dentro de límites admisibles.



6. Respuesta a condiciones iniciales



7. Respuesta a condiciones iniciales

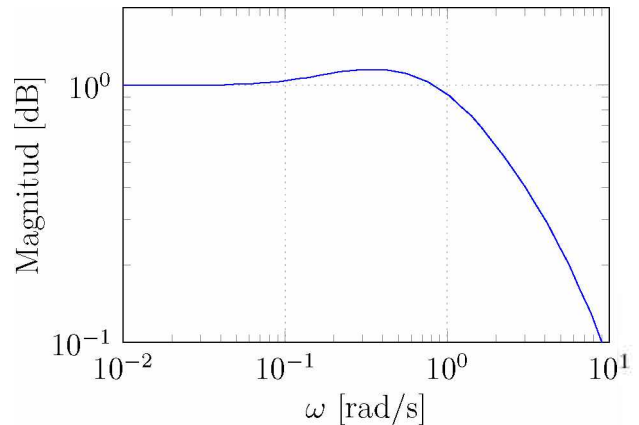
## 4 Control de trayectoria

Para el control de trayectoria (lateral y longitudinal), se diseña un compensador de manera que el lazo cerrado tenga un ancho de banda de  $\omega_{bw} = 1 \text{ rad/s}$  con error nulo en el estado estacionario. Para esto, se incorpora un integrador, se ajusta la ganancia a lazo abierto y se añaden polos y ceros para que la frecuencia de cruce a ganancia 0 dB sea a la frecuencia de ancho de banda deseada [2].

Con estos criterios, se sintetiza el compensador de la ecuación 13.

$$C(s) = 1.2 \frac{(s + 0.07)(s + 0.15)}{s(s + 10)} \quad (13)$$

El diagrama de bode del sistema compensado se muestra en la figura 8, donde puede observarse que el ancho de banda es el deseado.



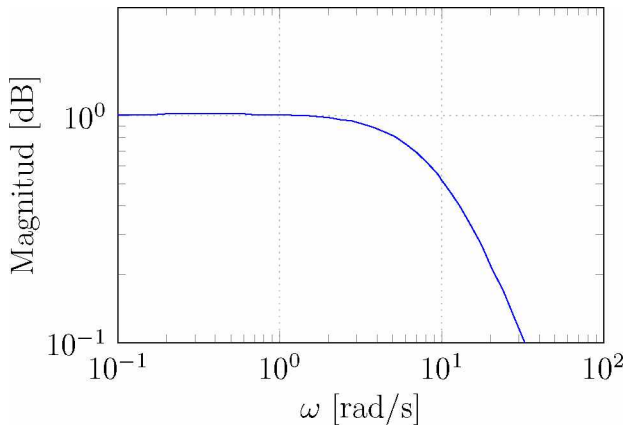
8. Diagrama de Bode para el lazo de control de trayectoria

El control de trayectoria se implementa utilizando un esquema anti-windup, de manera de evitar la integración en el lazo de control cuando la acción de control es máxima.

Para el control de velocidad se requiere que sea capaz de ejecutar la maniobra de desaceleración en la etapa final del vuelo. Se propone un ancho de banda  $\omega_{bw} = 1 \text{ rad/s}$  y se añade un integrador para eliminar el error en estado estacionario. El compensador sintetizado es el que se muestra en la ecuación 14.

$$C(s) = 12 \frac{(s + 0.1)}{s(s + 22.5)} \quad (14)$$

El diagrama de Bode del lazo de velocidad es el que se observa en la figura 9.



9. Diagrama de Bode para lazo de control de velocidad

## 5 Validación del modelo lineal

En esta sección se presentan los resultados obtenidos en distintas simulaciones para la implementación de los compensadores diseñados aplicados al modelo lineal del pararrotor. De este modo, se puede también dar cuenta de la robustez en el diseño del compensador utilizando el modelo linealizado de la dinámica del pararrotor y validarlo para su implementación en la planta. El sistema de ecuaciones (5) se resuelve haciendo uso de un paso de integración variable con una tolerancia relativa de 0,001 bajo un esquema de Runge Kutta de 5to. orden [3].

En cuanto al modelo para la perturbación, se utiliza un modelo de turbulencia de Dryden [4], siendo la expresión correspondiente para

la densidad de potencia espectral de las componentes laterales la que presenta la ecuación (15).

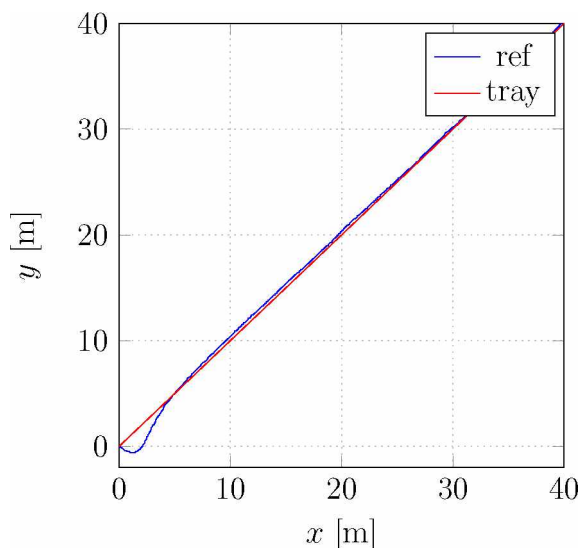
$$\Phi_{u,v}(\omega) = \frac{\sigma^2 L}{\pi U_0} \frac{1 + 3L^2(\frac{\omega}{U_0})^2}{(1 + L^2(\frac{\omega}{U_0})^2)^2} \quad (15)$$

La escala de longitud de turbulencia  $L$  para la componente lateral viene dada por la relación presentada en la ecuación 16

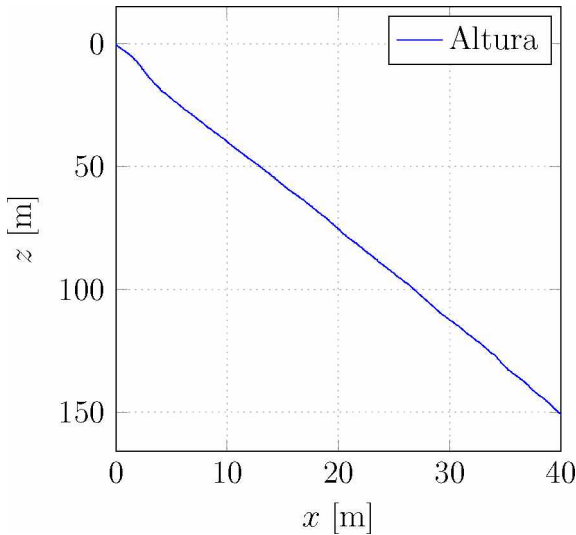
$$L_v(h) = \frac{h}{2(0.177 + 0.000823h)^{0.4}} \quad (16)$$

Donde  $h$  es la altura.

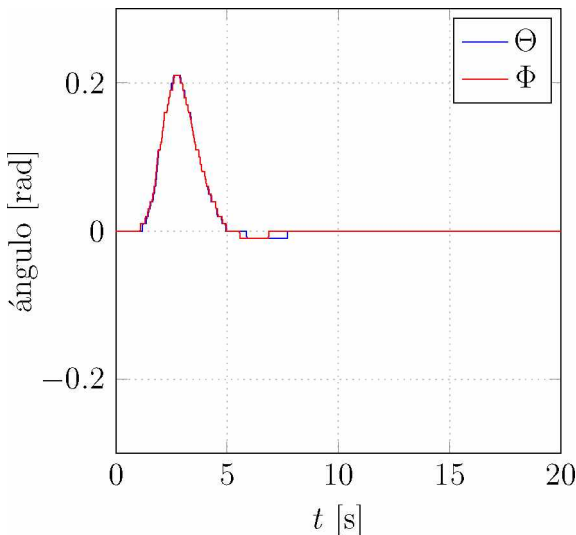
Para una condición de vuelo determinada ( $V_H = 3 \text{ m/s}$ ,  $\beta = 45^\circ$ ,  $w_T = 8 \text{ m/s}$ ) y suponiendo un modelo para la turbulencia atmosférica como el descrito previamente, se resuelve el sistema (5) añadiendo el sistema de control en cascada diseñado. Los resultados obtenidos se observan en las figuras 10, 11 y 12.



10. Evolución de la posición en el plano  $x - y$  del pararrotor



11. Evolución de la posición en el plano  $x - z$  del pararrotor



12. Evolución de los ángulos de Euler

En la figura 5, los gráficos  $x - y$  y  $x - z$  muestran un comportamiento transitorio oscilatorio, pero recupera rápidamente la trayectoria seleccionada. Este comportamiento es señalado también en el gráfico correspondiente a los ángulos de Euler. Particularmente los ángulos de Euler se encuentran limitados en su rango, aunque puede observarse que durante el transitorio inicial no hay indicios de saturación. Una vez atravesado este comportamiento inicial, se establecen alrededor de una condición de equilibrio para la condición de vuelo.

Por lo tanto, la actitud y la trayectoria resultantes se encuentran dentro de valores razonables.

## 6 Conclusiones

Por medio de la linealización del modelo de estados no lineal se ha profundizado en el análisis del comportamiento del pararrotor alrededor de condiciones de equilibrio determinadas.

Del estudio del modelo linealizado se determinó que, para la condición de equilibrio seleccionada, el sistema dinámico es estable. Además, el estudio de la descomposición en valores singulares mostró que la acción de control del paso colectivo tiene ganancia significativa en una banda de frecuencia de una década mayor que las otros dos acciones de control (cíclico lateral y longitudinal).

A partir de estos modelos lineales se desarrollaron esquemas de control para la trayectoria, implementando un esquema en cascada en el que a partir de orientar el pararrotor (actitud) se gobernara la trayectoria del mismo.

El control de actitud del pararrotor fue realizado mediante técnicas LQR, muy utilizadas para este tipo de problemas. Existen otras técnicas no analizadas en este trabajo que plantean posibles perspectivas de desarrollo de este aspecto en particular ( $H_\infty$  o modos deslizantes por citar algunas). Mediante esta técnica, se relocalizaron los polos a lazo cerrado del sistema dinámico formado por el pararrotor.

Para el control de trayectoria, se diseñó un controlador atendiendo a la respuesta en frecuencia del sistema. La implementación del mismo fue realizada mediante un esquema anti-windup, con el objetivo de anular la integración numérica del error cuando la señal de control se encuentra saturada.

El sistema diseñado fue simulado en condiciones de vuelo determinadas, con el agregado de perturbaciones atmosféricas aleatorias. A partir de los resultados obtenidos puede interpretarse que el sistema de control diseñado tiene un aceptable rechazo a las perturbaciones. También aparecen limitaciones en cuanto a las maniobras requeridas para efectuar ciertas misiones, asociadas a la linealización del modelo.

## References

- [1] J. Martiarena, *Estudio del desplazamiento lateral de un decelerador de alas rotatorias de pequeño alargamiento a través de las variaciones cíclicas del paso de las palas*. PhD thesis, Facultad de Ingeniería, 2018.
- [2] S. Skogestad and I. Postlethwaite, *Multi-variable feedback control: analysis and design*, vol. 2. Wiley New York, 2007.
- [3] J. C. Butcher, “Numerical methods for ordinary differential equations in the 20th century,” *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 125, no. 1-2, pp. 1–29, 2000.
- [4] U. DOF, *Military specifications flying qualities of piloted airplanes*, vol. 1. US DOF, 1969.