

UN METODO AUTOMATICO PARA EL CALCULO DE EFECTOS GRAVIMETRICOS
VERTICALES DE CILINDROS DE EJE VERTICAL Y SECCION CIRCULAR,
EN PUNTOS EXTERIORES A SU EJE

Antonio Introcaso y Eduardo Huerta
Facultad de Ciencias Exactas e
Ingeniería - Universidad Nacional
de Rosario

RESUMEN

Se propone un método automático para el cálculo de efectos gravimétricos verticales de cilindros de eje vertical y sección circular, en puntos exteriores a su eje, utilizando una microcomputadora Texas TI-59 y su base impresora PC-100 A.

Resolviendo analíticamente dos de las tres integrales de la expresión g_z dada en coordenadas rectangulares y la restante numéricamente, es posible, acotando el error, obtener una precisión prefijada. Se destacan tanto el automatismo del método como la rápida acotación del error de integración numérica.

ABSTRACT

An automatic method of calculating vertical gravimetric effects of cylinders with vertical axis and circular section at points external to their axis is herein proposed using a Texas TI-59 microcomputer and a PC-100 A printer.

If we solve two of the three integrals of the given expression g_z in rectangular coordinates analytically, and the remaining third numerically, a prefixed precision will be obtained setting the error tolerance boundaries. Both the automatism of the method as well as the rapid setting of error tolerance boundaries in the numerical integration are evident.

INTRODUCCION

Las dificultades que plantea el cálculo de efectos gravimétricos verticales de un cilindro recto en puntos exteriores a él, han originado distintas contribuciones para la solución de este problema. Así Parasnis D.S. (1961) ha dado g_z en términos de un desarrollo en serie de polinomios de Legendre. La solución de Parasnis no es adecuada para $h=0$ (h : profundidad del tope del cilindro) y para pequeños valores de h . Nabighian M.N. (1962) dedujo una expresión exacta y general a partir de integrales elípticas completas de primera y segunda clase y de la función Lambda de Neumann. Nagy D. (1965) preparó un esquema de computación para generar la función Lambda usando la expresión derivada por Nabighian. Singh S.K. (1977) obtuvo, para un disco circular de pequeño espesor Δz una solución exacta tomando integrales transformadas de la ecuación de Poisson, luego tomando derivadas respecto a z y finalmente utilizando tablas.

En 1975, Introcaso A.- Huerta E. propusieron, dentro de un trabajo más general, resolver este problema utilizando una expresión en coordenadas rectangulares, a partir de:

$$g_z = G \delta \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_{z_1}^{z_2} \frac{z \, dy \, dx \, dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (1)$$

Con G : constante de gravitación universal: $\frac{20}{3} \cdot 10^{-8}$ c.g.s.

δ : densidad

Resolviendo analíticamente las dos primeras integrales en z y x entre límites finitos x_1, x_2, z_1, z_2 , se tiene:

$$g_z = 2 G \delta \int_0^R V(y) dy \quad (2)$$

Con:

$$V(y) = \ln \frac{x_2 + \sqrt{x_2^2 + y^2 + h_1^2} (x_1 + \sqrt{x_1^2 + y^2 + h_2^2})}{x_1 + \sqrt{x_1^2 + y^2 + h_1^2} (x_2 + \sqrt{x_2^2 + y^2 + h_2^2})} \quad (3)$$

Expresión correspondiente a una placa vertical rectangular paralela al plano (x, z) . Fig. 1.

Siendo:

$$x_1 = \overline{OP} - \sqrt{R^2 - y^2} \quad ; \quad x_2 = \overline{OP} + \sqrt{R^2 - y^2}$$

Donde : \overline{OP} : Distancia horizontal del punto P al eje del cilindro
 R : Radio del cilindro
 h_1 : Profundidad del techo del cilindro
 h_2 : Profundidad del fondo del cilindro
 δ : Densidad

El valor g_z se obtiene finalmente a partir de la integración numérica de (2). En el mencionado trabajo se calcularon los errores provocados por las integraciones numéricas en función del número de placas utilizadas. La aparición relativamente reciente de microcomputadoras de adecuada potencia de cálculo, determinó que retomáramos el estudio, automatizando el cálculo para el caso de un perfil que pasa por la vertical del eje del cilindro, y logrando las precisiones requeridas en base a la elección de una adecuada tolerancia para el error de integración.

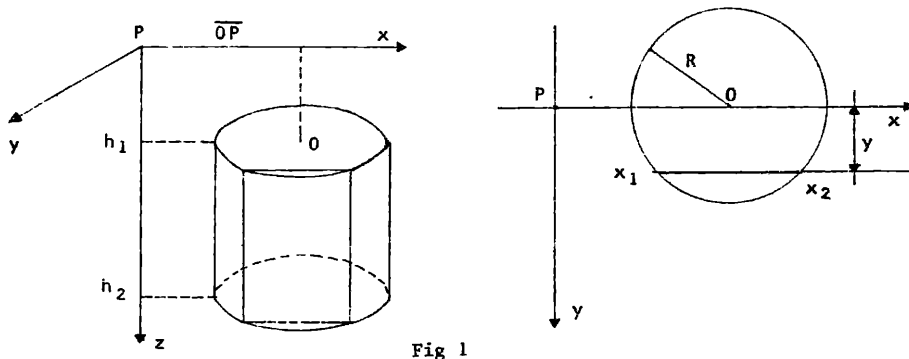


Fig 1

PROCEDIMIENTO SEGUIDO

El cálculo de la integral (2) se realiza aplicando el método de Poncelet (Ver, por ejemplo Rey Pastor et all., 1952, pág. 766).

Tenemos así: $g_z = 2G \delta H \left(2I - \frac{E' - E}{4} \right)$

Donde: $C_p = 2G \delta \frac{H}{4} |E' - E|$ (4), es la cota de error de integración del método.

$H = \frac{R}{n}$; n: números de subintervalos de integración (par)

$E = V(0) + V(R)$

$E = V(H) + V(R-H)$

$I = V(H) + V(3H) + V(5H) + \dots + V(n-1)H$

Se preparó un programa para la calculadora Texas TI-59 y su base

impresora PC-100 A.

Con ello se logra la automatización total de la secuencia de cálculo que a continuación se describe:

Se fija un número de subintervalos de integración (n), se calcula la cota de error correspondiente y se la compara con una tolerancia prefijada (T). Si la cota de error es mayor que la tolerancia se define un nuevo número de subintervalos n' tal que $n' > n$ y se vuelve a calcular la cota de error. El proceso se repite hasta que la cota de error sea inferior o igual a la tolerancia, entonces se calcula la integral y se imprime el resultado, junto al número de subintervalos de integración y al valor de \overline{OP} correspondiente al punto considerado.

La expresión (3) presenta una discontinuidad para $y = 0$; cuando $\overline{OP} \leq R$ y $h_1 = 0$ se presenta este caso, g_z se calcula como suma de un número finito de términos obtenidos cada uno de ellos por integración numérica de acuerdo a:

$$g_z = \int_H^R V(y) dy + \int_{H'}^H V(y) dy + \int_{H''}^{H'} V(y) dy + \dots \quad (5)$$

Donde: $H = \frac{R}{n+1}$, $H' = \frac{H}{n'+1}$, $H'' = \frac{H'}{n''+1}$...

Dada la rápida convergencia de la serie (5), g_z se obtiene como suma de un número pequeño de términos de la misma.

Una vez calculada la integral para un punto se disminuye \overline{OP} en un escalón $\Delta \overline{OP}$ prefijado y se repite el procedimiento.

Se debe destacar que la utilización de la cota de error (4) presenta una significativa ventaja en el control de precisión de la integración numérica, dado que se necesitan calcular solo cuatro valores de la función a integrar.

La Tabla 1 permite comparar los resultados obtenidos con el método propuesto para una tolerancia $T = 0.005$ mlg., con los publicados por Nagy D. (1965, pág. 11).

El cálculo se realizó para un cilindro de radio $R = 0.1$ km., $h = 0$, $h_2 = 0.1$ km. y densidad 1 gr/cm^3 .

N°	OP	g_z (MGal) (1)	g_z (MGal) (2)	n
1	0	2.45496	2.455	116
2	0.025	2.41164	2.411	116
3	0.050	2.26854	2.268	116
4	0.075	1.97229	1.973	112
5	0.100	1.24811	1.248	56
6	0.125	0.57363	0.574	8
7	0.150	0.33152	0.331	8
8	0.175	0.20817	0.208	8
9	0.200	0.13867	0.138	4
10	0.225	0.09676	0.096	4
11	0.250	0.07010	0.069	4
12	0.275	0.05238	0.052	4
13	0.300	0.04015	0.040	4
14	0.325	0.03145	0.031	4
15	0.350	0.02509	0.025	4
16	0.375	0.02034	0.020	4
17	0.400	0.01672	0.017	4
18	0.425	0.01391	0.014	4
19	0.450	0.01170	0.012	4
20	0.475	0.00993	0.010	4
21	0.500	0.00850	0.008	4

TABLA I (1) Valores de Nagy D. 1965

(2) Valores obtenidos por el método aquí propuesto.

El número de placas requerido por el método para el cálculo del efecto gravimétrico g_z en el mismo punto, aumenta al disminuir la tolerancia. Asimismo, el número de placas necesarias, para una tolerancia fija, disminuye al alejarnos del eje del cilindro. Las figuras 2 y 3 muestran estas variaciones para los casos particulares en ellas indicados.

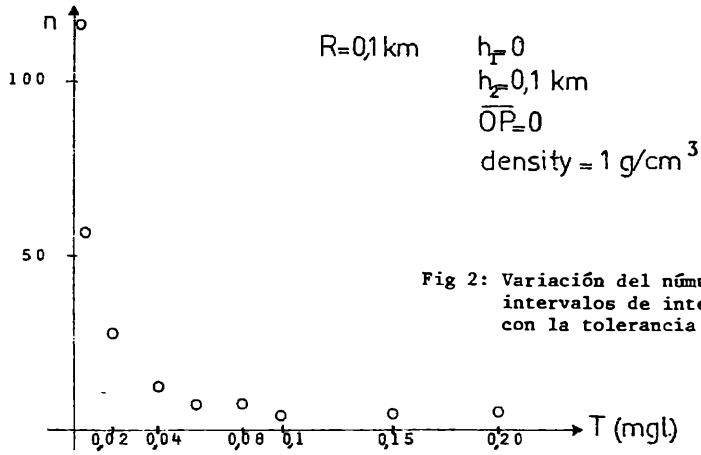


Fig 2: Variación del número de sub-intervalos de integración con la tolerancia T

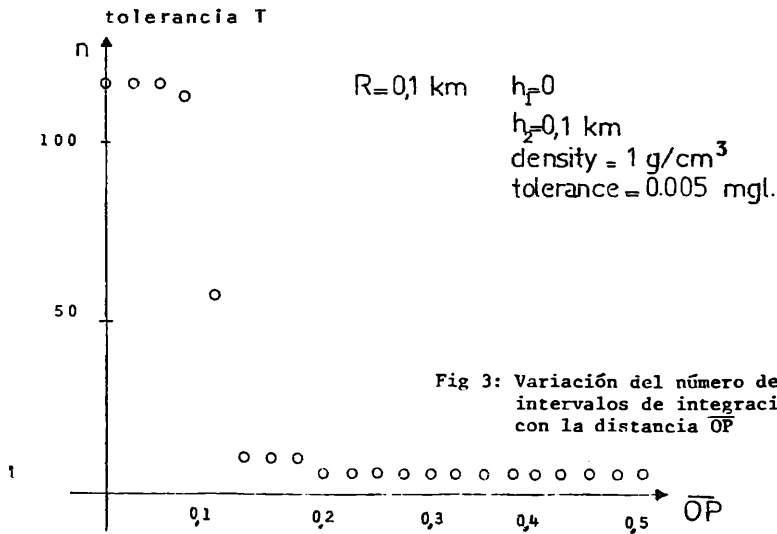


Fig 3: Variación del número de sub-intervalos de integración con la distancia \overline{OP}

La tabla II permite comparar los resultados obtenidos con el método propuesto, para una tolerancia $T=0.005$ mg., con los calculados a partir de las relaciones $\Delta g/\Delta g_{max}$ publicadas por Nabighian M.N. (1962, pág.51) redondeados al milésimo de miligal. El cálculo se realizó para un cilindro de radio $R=0.1$ Km., $h_1=0$, $h_2=y$ y densidad: 1 gr/cm^3

OP (Km)	g_z (mg)	g_z (mg)	n
	(1)	(2)	
0	4.188	4.190	96
1/190	4.186	4.186	96
1/90	4.176	4.176	96
3/170	4.156	4.156	96
1/40	4.123	4.123	96
1/30	4.070	4.070	96
3/70	3.989	3.990	96
7/130	3.866	3.867	96
2/30	3.675	3.676	96
9/110	3.359	3.359	96
1/10	2.667	2.667	28
11/90	1.915	1.914	24
3/20	1.491	1.490	24
13/70	1.174	1.172	20
7/30	0.920	0.919	20
3/10	0.708	0.707	16
4/10	0.528	0.527	16
17/30	0.371	0.370	12
9/10	0.233	0.232	8
19/10	0.110	0.110	8

TABLA II

(1) Valores de Nabighian M.N. 1962

(2) Valores obtenidos por el método aquí propuesto.

VENTAJAS DE ESTE PROCEDIMIENTO

Es posible realizar un cálculo del efecto gravimétrico correspondiente a un cilindro vertical, aproximándolo mediante paralelepípedos de sección rectangular incluidos en la sección circular o exteriores a ella, como se ilustra en las figuras 4a y 4b.

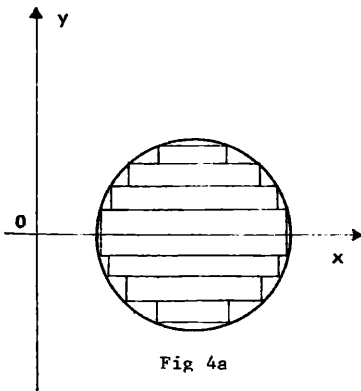


Fig 4a

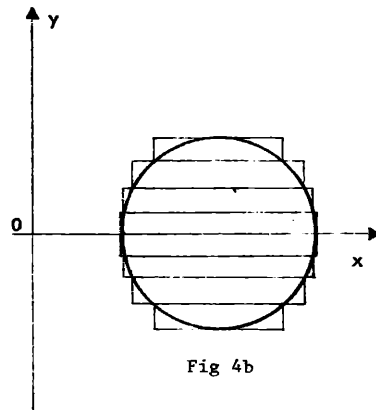


Fig 4b

En el primer caso (Fig. 4a) el efecto gravimétrico g_z obtenido como sumatoria de efectos de paralelepípedos rectangulares contenidos dentro del cilindro, y que llamaremos g_{zi} , contendrá un error por defecto, mientras que en el segundo caso, (Fig. 4b), el efecto gravimétrico que llamaremos g_{ze} , contendrá un error por exceso. Tomando la semisuma $\frac{g_{zi}+g_{ze}}{2}$ para aproximar el verdadero g_z ; la semidiferencia $\frac{g_{ze}-g_{zi}}{2}$ proporciona una acotación del error cometido.

Sin embargo este procedimiento necesita el cálculo del efecto total de los paralelepípedos rectangulares para recién decidir si es o no compatible con el grado de precisión exigido.

Esto naturalmente incrementa considerablemente el tiempo de cálculo respecto al método propuesto.

CONCLUSIONES

El procedimiento propuesto para el cálculo de g_z originado por un cilindro circular recto en puntos exteriores a su eje, permite

obtener resultados con un grado de precisión prefijado por acotación del error de integración. Asimismo el uso de las cómodas y accesibles calculadoras programables, de gran utilidad para el geofísico, permiten automatizar el cálculo de un perfil que pasa por la vertical del eje del cilindro a partir de un conjunto de datos iniciales.

Cabe señalar que a pesar de que existen métodos de integración numérica más potentes que el de Poncelet, éste presenta la gran ventaja de su notable sencillez operativa.

Además, la rapidez que esto supone relega, por el considerable mayor tiempo de cálculo, al método basado en la utilización de paralelepípedos rectangulares para obtener el efecto gravimétrico vertical g_z , siempre que se quiera acotar el error.

BIBLIOGRAFIA

- Introcaso A. - Huerta E. 1975 - Cálculo rápido de efectos gravimétricos por medio de placas y varillas verticales. II Congreso Ibero Americano de Geología Económica. Tomo VI. pp. 147-155 - Buenos Aires.
- Nabighian M.N. 1962 - The gravitational attraction of a right vertical circular cylinder at points external to it. Geophys. Pura and Appl. v. 53 pp. 45-51.
- Nagy D. 1965 - The evaluation of Heuman's Lambda Function and its application to calculate the gravitational effect of a Right circular cylinder. Pura and Applied Geophysics. Vol. 62 pp. 5-12.
- Parasnis D.S. 1961 - Exact expressions for the gravitational attraction of a circular lamina at all points of space and a right circular vertical cylinder at points external to it. Geoph. Prosp. Vol. 9 pp. 382-398.
- Rey Pastor J. Pi Calleja P. Trejo C. 1952 - Análisis Matemático. Vol. I - Ed. Kapelusz - Buenos Aires - 817 p.
- Shri Krishna Singh - 1977 - Gravitational attraction of a circular disc. Geophysics Vol. 42 - pp. 111-113.