

## Capítulo 3 **Análisis del CMRC**

---

### **3.1 Introducción**

Hemos visto en el capítulo anterior que los CMRC presentan, desde el punto de vista del funcionamiento de las llaves, tres modos de operación: a) cuatro llaves operando con *ZVS*, b) cuatro llaves operando con *ZCS* o c) dos llaves con *ZVS* y dos con *ZCS*. La existencia de cada uno de los modos de funcionamiento del CMRC, depende de la relación entre la frecuencia de conmutación y la frecuencia de resonancia, de la forma de onda de tensión aplicada al circuito resonante y además, de las condiciones de carga sobre el convertidor.

Como hemos señalado el modo de operación de mayor interés para nuestra aplicación como amplificador de potencia en RF, es trabajar con sus cuatro llaves en *ZVS* durante el encendido de los transistores. En este modo podemos obtener una mayor eficiencia en la amplificación de potencia por la disminución de pérdidas de conmutación y una reducción del número de componentes necesarios para su implementación. En este modo de operación podemos emplear dispositivos como llaves que naturalmente sean bidireccionales en corriente (como ser el MOSFET de potencia con su diodo en paralelo). Para poder operar el CMRC con sus cuatro llaves en *ZVS* en un rango posibles de valores de carga, es necesario conocer los límites de este modo de funcionamiento para no llevar al convertidor a operar bajo condiciones que pueden resultar destructivas. Debemos establecer cuáles son las condiciones de frecuencia de

conmutación, forma de onda de tensión y valores de carga que especifiquen los límites de operación con las cuatro llaves en *ZVS*

En este capítulo analizaremos el comportamiento del CMRC con carga SRL y PRL para determinar qué condiciones de carga, frecuencia de conmutación, características del circuito resonante y forma de onda de tensión aplicada al circuito se deben cumplir, para operar con las cuatro llaves en *ZVS* durante el encendido. Denominando *modo de operación A* del CMRC al modo de operación con las cuatro llaves en *ZVS* y *modo de operación B* al resto de los modos de operación de las llaves. El estudio del CMRC consiste en encontrar la frontera o límite entre el modo de operación *A* y *B*. Partiremos del modo de operación *A* del CMRC determinando un funcionamiento límite o crítico en función de las condiciones anteriores. Este modo crítico de funcionamiento se resumirá en gráficos que permiten visualizar cómo la variación de cada una de las condiciones de carga, frecuencia, circuito resonante y tensión, afecta a los modos de operación del CMRC. Los gráficos obtenidos para carga serie y paralelo servirán como herramienta de diseño de convertidores con carga variable como veremos en un capítulo posterior.

## **3.2 Modos de operación A y B**

En la fig. 3.1a) mostramos las dos topologías del CMRC, con carga serie (CMRC-SRL) o con carga paralelo (CMRC-PRL) en donde estudiaremos los modos de operación *A* y *B*. Como ya hemos señalado, operar en el modo *A* u operar en el modo *B*, depende de: las características del circuito resonante como ser su frecuencia de resonancia, su impedancia característica y el factor de mérito función de la carga del convertidor. También depende de la relación entre la frecuencia de conmutación a la de resonancia y del ancho del pulso de tensión (o del ciclo de trabajo  $\delta$ ) aplicado al circuito resonante. Para determinados valores de carga, frecuencia de conmutación y ciclo de trabajo se establece el límite entre el modo de operación *A* y *B* sobre el comportamiento del CMRC. Describiremos mediante la tensión  $v_{ab}$  y la corriente  $i_L$  a la entrada del circuito resonante serie o paralelo, fig. 3.1b), como podemos pasar de un modo de funcionamiento a otro modificando solamente algún parámetro y manteniendo fijos los restantes.

Supongamos que el convertidor está operando en modo A, como representamos con las formas de onda de tensión y corriente superior de la fig. 3.1b). Podemos apreciar que en el instante de aplicación del pulso de tensión ( $+V_{CC}$  o  $-V_{CC}$ ), la corriente  $i_L$  posee signo contrario al de tensión  $v_{ab}$ . Claramente apreciamos que las cuatro llaves están operando en ZVS durante el encendido. Manteniendo el valor de la resistencia de carga

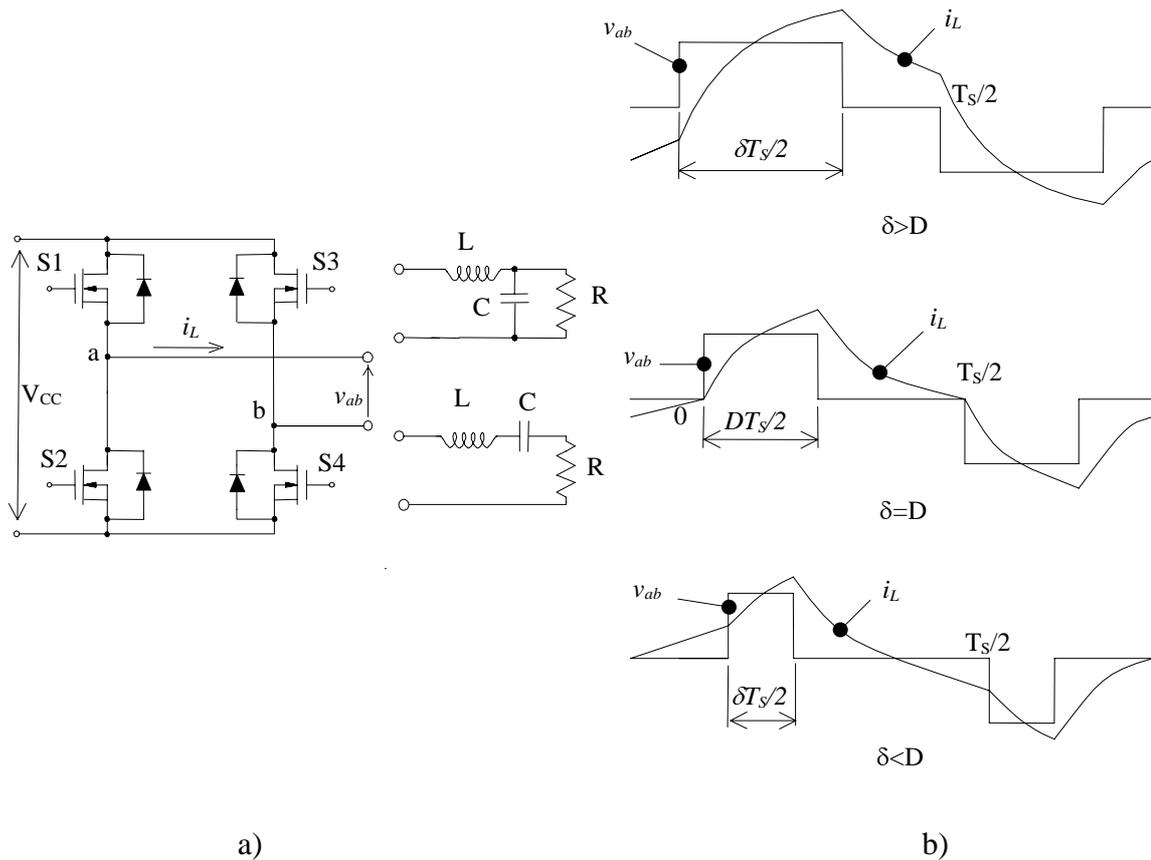


Figura 3.1: a) CMRC con PRL o SRL, b) Formas de onda (arriba: modo A, medio: modo crítico, abajo: modo B)

del circuito resonante y la relación entre  $f_s$  y  $f_r$ , reducimos el ancho del pulso  $\delta$  de la tensión  $v_{ab}$ . Conforme el ancho del pulso de tensión se reduce, la corriente  $i_L$  también se reduce en el instante de aplicación del impulso. Cuando la corriente  $i_L$  es cero en el instante en que aplicamos el pulso de tensión, estamos en presencia del modo de conducción *crítico* del convertidor, como vemos en las formas de ondas central de la fig. 3.1b). Si continuamos disminuyendo el ciclo de trabajo de la tensión  $v_{ab}$  ingresamos al modo de operación B, como vemos en las formas de onda inferior de la fig. 3.1b). Al reducir el ciclo de trabajo, aumentamos el intervalo de tiempo en que la tensión queda enclavada en cero. Podemos ver de la figura, que en este caso el intervalo de enclave de

tensión es suficiente como para que la corriente  $i_L$  cambie de signo, de modo tal que al aplicar un pulso de tensión, el signo de  $v_{ab}$  coincide con el de  $i_L$ . Esto marca claramente el apartamiento del modo de operación A del CMRC. Podríamos llegar a resultados similares si cambiamos la frecuencia de conmutación  $f_S$  respecto de la de resonancia  $f_r$  y mantenemos fijos la resistencia de carga y el ciclo de trabajo del pulso de tensión  $\delta$ . O también, como veremos más adelante, podemos establecer el límite entre ambos modos de operación dejando fijos  $f_S$  y  $\delta$ , variando el factor de mérito del circuito resonante, a través de variar la resistencia de carga. Esta última es la manera de observar el comportamiento del CMRC frente a cambios en los valores de la carga.

### 3.2.1 Modelo de un CMRC

Si describimos analíticamente las condiciones de trabajo que permitan mantener al CMRC operando en modo A, podemos a partir de éste, llegar al límite entre el modo de operación A y B. Diferentes análisis pueden realizarse, empleando plano de fase [39][40] o empleando modelos de muestreo [52][53]. Un análisis adecuado para encontrar el límite entre los dos modos de operación es el modelo *por tramos lineales e invariantes en el tiempo (LIT)* [28]. Esta puede ser la base para establecer un modelo de estructura variable que permita analizar el funcionamiento “transitorio” del CMRC.

Los modelos por tramos LIT describen analíticamente el comportamiento de un convertidor. Para cada cambio de estado de una o más llaves, se establece un nuevo circuito LIT. Cada circuito está asociado a un conjunto de variables de estado que pueden ser resueltas conociendo los valores iniciales de dichas variables y las excitaciones presentes en el circuito. Repitiendo este proceso en cada configuración y asumiendo que el valor de los estados al final de una configuración es igual al valor de los estados al comienzo de la siguiente, podemos juntar los diferentes tramos y describir el comportamiento del convertidor.

Los estados de las llaves en un convertidor resonante cambian en forma periódica, pasando por  $N$  transiciones. En cada transición una o más llaves conmutan en forma forzada o natural. Por lo tanto, por cada ciclo de conmutación se establecen  $N$  configuraciones LIT expresadas cada una de ellas, a través de la siguiente ecuación de estado

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A_i \mathbf{x}(t) + B_i \mathbf{u}_i(t) \quad (3.1)$$

donde el índice  $i$  (1, 2, ..., N) indica la  $i$ -ésima configuración (o también el  $i$ -ésimo intervalo entre dos transiciones) del  $k$ -ésimo ciclo de conmutación. La ec. (3.1) es válida durante el intervalo de tiempo que va desde  $t = t_k + T_{i,k}$  a  $t = t_k + T_{i+1,k}$ . denotando con  $T_{i,k}$  el instante de la  $i$ -ésima transición de las llaves, respecto del inicio del  $k$ -ésimo ciclo. De este modo  $T_{1,k} = 0$  indica el inicio del ciclo y  $T_{N+1,k} = t_{k+1} - t_k$ , es la duración del ciclo. Las matrices de elementos constantes  $A_i$  y  $B_i$ , están determinadas por la topología del circuito y por los valores de los componentes del circuito en la  $i$ -ésima configuración. El vector  $\mathbf{u}_i(t)$  especifica las entradas de excitación al circuito en la  $i$ -ésima transición.

Resolviendo el sistema (3.1) para el intervalo de tiempo especificado, el vector  $\mathbf{x}(t)$  toma la forma (Por simplicidad de notación obviamos el subíndice  $k$ , en  $T_{i,k}$ )

$$\mathbf{x}(t) = e^{A_i(t-t_k-T_i)}\mathbf{x}(t_k + T_i) + \int_{t_k+T_i}^t e^{A_i(t-\xi)} B_i \mathbf{u}_i(\xi) d\xi \quad (3.2)$$

La ec. (3.2) permite determinar los estados del convertidor al final del  $i$ -ésimo intervalo, conociendo el valor de los estados al inicio de la transición y las entradas durante dicho intervalo. Así el valor de  $\mathbf{x}(t_k + T_{i+1})$  es

$$\mathbf{x}(t_k + T_{i+1}) = e^{A_i(T_{i+1}-T_i)}\mathbf{x}(t_k + T_i) + \int_{T_i}^{T_{i+1}} e^{A_i(T_{i+1}-\xi)} B_i \mathbf{u}_i(\xi) .d\xi \quad (3.3)$$

Una expresión más compacta del valor del estado dado en la ec. (3.3), puede escribirse de la siguiente forma

$$\mathbf{x}(t_k + T_{i+1}) = \mathbf{f}(T_{i+1} - T_i) . \mathbf{x}(t_k + T_i) + \mathbf{g}(\mathbf{u}_i(t), T_{i+1} - T_i) \quad (3.4)$$

donde  $\mathbf{f}(T_{i+1} - T_i) = e^{A_i(T_{i+1}-T_i)}$  y  $\mathbf{g}(\mathbf{u}_i, T_{i+1} - T_i) = \int_{T_i}^{T_{i+1}} e^{A_i(T_{i+1}-\xi)} B_i \mathbf{u}_i(\xi) d\xi$

Para poder establecer los estados en la próxima transición es necesario conocer el instante en que se produce la transición, planteando condiciones forzadas. La ec. (3.5) reúne todas las condiciones forzadas dadas en diferentes instantes de transición de las llaves a través del vector  $\mathbf{T}_k$ ,

$$C(\mathbf{x}(t_k + \mathbf{T}_k), \mathbf{u}_k, \mathbf{T}_k) = 0 \quad (3.5)$$

Estas condiciones también son funciones del vector  $\mathbf{u}_k$  que contiene todos los vectores de entrada de cada transición y del vector de estados en diferentes instantes de transición  $\mathbf{x}(t_k + \mathbf{T}_k)$ . A partir de la ec. (3.5) podemos obtener los diferentes valores de  $T_i$  que permiten resolver la ec. (3.4) en cada intervalo entre transiciones.

En el caso particular de un CMRC, cuando las llaves cambian de estado sólo se modifica el valor de la fuente aplicada al circuito resonante. La topología del convertidor no cambia durante un ciclo de conmutación, por lo tanto existe una sola configuración LIT para todas las transiciones. Por lo tanto las matrices  $A_i$  y  $B_i$  quedan fijas, mientras que el vector  $\mathbf{u}_i(t)$  está formado por un único elemento y su valor depende del intervalo de transición analizado.

### 3.2.2 Descripción analítica en modo A

En esta sección analizaremos el funcionamiento del CMRC en modo de operación A observando la corriente  $i_L$  en cada transición. En la fig. 3.2 vemos las formas de onda de tensión  $v_{ab}$  y la corriente  $i_L$  a la entrada del circuito resonante en el modo de operación A, donde se indican sobre la corriente, los instantes de transición de las llaves

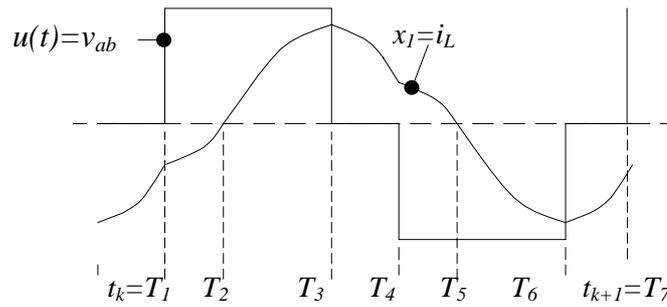


Figura 3.2: Instantes de transición en el modo de operación A en un CMRC

del convertidor.

En estado estacionario existe simetría en las formas de onda entre semiciclos de conmutación, por lo tanto analizamos el comportamiento de las variables de estado solamente en el primer semi-ciclo de conmutación. Así, podemos plantear la igualdad, con signo cambiado, entre los valores de los estados al inicio del ciclo con los valores de los estados en la mitad del ciclo

$$\mathbf{x}(t_k) = -\mathbf{x}\left(\frac{t_{k+1} + t_k}{2}\right) \quad (3.6)$$

Las componentes del vector  $\mathbf{x}(t)$  para un CMRC-SRL o PRL, son la corriente del inductor  $i_L$  y la tensión en el capacitor  $v_C$ , del circuito resonante, o sea

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix}$$

Las matrices  $A_i$  y  $B_i$  resultan de elementos constantes que dependen de la topología, y como dijimos en la sección previa, son iguales para todos los intervalos de

tiempo. Las entradas  $u_i$  entre  $t_k$  y  $\frac{(t_{k+1}+t_k)}{2}$  son  $u_1=u_2=V_{CC}$  y  $u_3=0$  y los tiempos de transición son  $T_1$ ,  $T_2$ , y  $T_3$ , entonces  $\mathbf{u}_k$  y  $\mathbf{T}_k$  toman la forma

$$\mathbf{u}_k = \begin{bmatrix} V_{CC} \\ V_{CC} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{T}_k = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix}$$

Re-escribimos (3.4) en estado estacionario, omitiendo el argumento  $k$  y siendo  $\mathbf{u}_i$  un escalar

$$\mathbf{x}(T_{i+1}) = \mathbf{f}(T_{i+1} - T_i)\mathbf{x}(T_i) + \mathbf{g}(u_i, T_{i+1} - T_i) \quad (3.7)$$

Así podemos definir los estados en cada transición, tomando los siguientes valores:

$$\mathbf{x}(T_2) = \mathbf{f}(T_2 - T_1)\mathbf{x}(T_1) + \mathbf{g}(u_1, T_2 - T_1) \quad (3.8)$$

$$\mathbf{x}(T_3) = \mathbf{f}(T_3 - T_2)\mathbf{x}(T_2) + \mathbf{g}(u_2, T_3 - T_2) \quad (3.9)$$

$$\mathbf{x}(T_4) = \mathbf{f}(T_4 - T_3)\mathbf{x}(T_3) + \mathbf{g}(u_3, T_4 - T_3) \quad (3.10)$$

Los tiempos de transición surgen de (3.5). En nuestro caso queda un conjunto de ecuaciones escalares

$$C(\mathbf{x}(t_k + \mathbf{T}_k), \mathbf{u}_k, \mathbf{T}_k) = \begin{bmatrix} T_1 \\ i_L(T_2) \\ T_3 - \delta \cdot T_S / 2 \\ T_4 - T_S / 2 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.11)$$

siendo  $T_S$  el período de conmutación. De esta manera con las ec. (3.8) a (3.11) definimos completamente el comportamiento del CMRC funcionando en el modo A, a través de los estados en cada transición y con la ayuda de la ecuación de condiciones, que permite establecer los instantes de transición en un ciclo de conmutación.

### 3.2.3 Condición límite para el modo de operación A

La condición crítica o límite de operación queda definida cuando la corriente  $i_L$  es nula en el instante en que se aplica un pulso de tensión, sobre el circuito resonante (curva central de la fig. 3.1b). Esta condición se puede ver de los resultados anteriores cuando  $T_2 = T_1$ . Si reemplazamos (3.9) en (3.10) y teniendo en cuenta que de (3.6) resulta  $\mathbf{x}(T_1) = -\mathbf{x}(T_4)$ , podemos obtener  $\mathbf{x}(T_2)$ . Simplificando la notación  $\mathbf{f}(T_{i+1} - T_i) = \mathbf{f}_i$  y  $\mathbf{g}(u_i, T_{i+1} - T_i) = \mathbf{g}_i$ , resulta:

$$\mathbf{x}(T_2) = (\mathbf{I} + \mathbf{f}_1 \mathbf{f}_3 \mathbf{f}_2)^{-1} [\mathbf{g}_1 - \mathbf{f}_1 (\mathbf{f}_3 \cdot \mathbf{g}_2 + \mathbf{g}_3)] \quad (3.12)$$

donde  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad. En  $t=T_2$  el vector de estados toma el valor

$$\mathbf{x}(T_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ V_C \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Igualando (3.12) con (3.13) se establece un conjunto de dos ecuaciones donde la primera de ellas indica la condición de modo de funcionamiento crítico del convertidor. En efecto, resolviendo la primer ecuación, encontramos un expresión para el ciclo de trabajo crítico ( $\delta = D$ ) en función del factor de mérito del circuito resonante ( $Q$ ), de la frecuencia de conmutación y de la frecuencia de resonancia. Como mencionamos en la sec. 3.2 los resultados son generales para las dos circuitos resonantes mostrados en la fig. 3.1a). A cada circuito de carga corresponden distintas funciones  $\mathbf{f}_i$  y  $\mathbf{g}_i$  como veremos en las secciones siguientes.

### 3.3 Condición límite en un CMRC-SRL

En esta sección determinaremos el límite entre el modo de operación *A* y *B* en un CMRC con carga SRL. Esta condición límite de operación establece un ciclo de trabajo crítico *D* a partir de los resultados de la sección anterior.

Representamos al CMRC-SRL mediante el circuito equivalente que mostramos en la fig.3.3, caracterizado por los siguientes parámetros:

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{frecuencia de resonancia del SRL}$$

$$Q_s = \frac{\omega_r \cdot L}{R} \quad \text{factor de mérito del circuito resonante serie}$$

$$Z_0 = \sqrt{L/C} = \omega_r L = \frac{1}{\omega_r C} \quad \text{impedancia característica del circuito}$$

Este circuito representa a todos los intervalos de un ciclo de conmutación mediante el generador  $u_i$ . Con este circuito calculamos las matrices  $\mathbf{f}_i$  y  $\mathbf{g}_i$  de (3.4) para  $u_i$

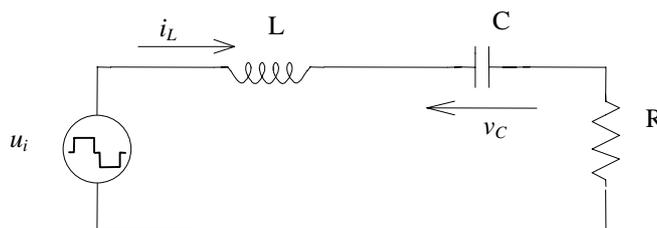


Figura 3.3: Circuito equivalente de un CMRC-SRL

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_i &= \mathbf{f}(T_{i+1} - T_i) = e^{A_i(T_{i+1}-T_i)} \\ \mathbf{g}_i &= \mathbf{g}(u_i, T_{i+1} - T_i) = \int_{T_i}^{T_{i+1}} e^{A_i(T_{i+1}-\xi)} B_i u_i(\xi) d\xi\end{aligned}\quad (3.14)$$

resultando los siguientes matrices para el  $i$ -ésimo intervalo

$$\mathbf{f}_i^{SRL} = e^{-\alpha(T_{i+1}-T_i)} \begin{bmatrix} \cos(\omega_d(T_{i+1} - T_i)) - \frac{1}{2mQ_s} \sin(\omega_d(T_{i+1} - T_i)) & \frac{-1}{mZ_0} \sin(\omega_d(T_{i+1} - T_i)) \\ \frac{Z_0}{m} \sin(\omega_d(T_{i+1} - T_i)) & \cos(\omega_d(T_{i+1} - T_i)) + \frac{1}{2mQ_s} \sin(\omega_d(T_{i+1} - T_i)) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{g}_i^{SRL} = \begin{bmatrix} \frac{u_i}{mZ_0} e^{-\alpha(T_{i+1}-T_i)} \sin(\omega_d(T_{i+1} - T_i)) \\ u_i \left\{ 1 - e^{-\alpha(T_{i+1}-T_i)} \left[ \cos(\omega_d(T_{i+1} - T_i)) + \frac{1}{2mQ_s} \sin(\omega_d(T_{i+1} - T_i)) \right] \right\} \end{bmatrix}$$

donde  $\alpha = \frac{\omega_r}{2Q_s}$  es el factor de amortiguamiento;  $\omega_d = \frac{\omega_r}{2} \sqrt{4 - \frac{1}{Q_s^2}}$  es la frecuencia de

oscilación del SRL y  $m = \frac{1}{2} \sqrt{4 - \frac{1}{Q_s^2}}$ .

Para cada uno de los instantes de transición  $T_1$  a  $T_3$ , las matrices  $\mathbf{f}_i$  y  $\mathbf{g}_i$  quedan expresados como sigue:

$$\mathbf{f}_1^{SRL} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{f}_2^{SRL} = e^{-\alpha(D\frac{T_s}{2})} \begin{bmatrix} \cos\left(\omega_d(D\frac{T_s}{2})\right) - \frac{1}{2mQ_s} \sin\left(\omega_d(D\frac{T_s}{2})\right) & \frac{-1}{mZ_0} \sin\left(\omega_d(D\frac{T_s}{2})\right) \\ \frac{Z_0}{m} \sin\left(\omega_d(D\frac{T_s}{2})\right) & \cos\left(\omega_d(D\frac{T_s}{2})\right) + \frac{1}{2mQ_s} \sin\left(\omega_d(D\frac{T_s}{2})\right) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_3^{SRL} = e^{-\alpha(D'\frac{T_s}{2})} \begin{bmatrix} \cos\left(\omega_d(D'\frac{T_s}{2})\right) - \frac{1}{2mQ_s} \sin\left(\omega_d(D'\frac{T_s}{2})\right) & \frac{-1}{mZ_0} \sin\left(\omega_d(D'\frac{T_s}{2})\right) \\ \frac{Z_0}{m} \sin\left(\omega_d(D'\frac{T_s}{2})\right) & \cos\left(\omega_d(D'\frac{T_s}{2})\right) + \frac{1}{2mQ_s} \sin\left(\omega_d(D'\frac{T_s}{2})\right) \end{bmatrix}$$

con  $D' = 1 - D$

$$\mathbf{g}_1^{SRL} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\mathbf{g}_2^{SRL} = \begin{bmatrix} \frac{V_{CC}}{mZ_0} e^{-\alpha(D\frac{T_S}{2})} \sin\left(\omega_d(D\frac{T_S}{2})\right) \\ V_{CC} \left\{ 1 - e^{-\alpha(D\frac{T_S}{2})} \left[ \cos\left(\omega_d(D\frac{T_S}{2})\right) + \frac{1}{2mQ_S} \sin\left(\omega_d(D\frac{T_S}{2})\right) \right] \right\} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{g}_3^{SRL} = \begin{bmatrix} \frac{V_{CC}}{mZ_0} e^{-\alpha(D'\frac{T_S}{2})} \sin\left(\omega_d(D'\frac{T_S}{2})\right) \\ V_{CC} \left\{ 1 - e^{-\alpha(D'\frac{T_S}{2})} \left[ \cos\left(\omega_d(D'\frac{T_S}{2})\right) + \frac{1}{2mQ_S} \sin\left(\omega_d(D'\frac{T_S}{2})\right) \right] \right\} \end{bmatrix}$$

Como  $\mathbf{f}_1^{SRL} = \mathbf{I}$  y  $\mathbf{g}_1^{SRL} = 0$ , entonces (3.12) se reduce a

$$\mathbf{x}(T_2) = (\mathbf{I} + \mathbf{f}_3 \cdot \mathbf{f}_2)^{-1} \cdot [-(\mathbf{f}_3 \cdot \mathbf{g}_2 + \mathbf{g}_3)] = \begin{bmatrix} 0 \\ V_C \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Del sistema de ecuaciones (3.15) tomamos la primera ecuación que resulta al hacer  $i_L=0$ , obteniendo

$$e^{-\frac{\eta}{2mQ_S}} \sin(D\eta) \left\{ \frac{1}{\text{tg}(D'\eta)} + \frac{1}{\text{tg}(D\eta)} \right\} + e^{-\frac{\eta}{2mQ_S}} \sin(D\eta) \sin(D'\eta) \left\{ \frac{1}{m^2} + \frac{1}{\text{tg}^2(D'\eta)} + \frac{1}{(2mQ_S)^2} \right\} = 1 \quad (3.16)$$

con  $\eta = \frac{m\pi}{\omega_n}$  y  $\omega_n = \frac{\omega_S}{\omega_r} = \frac{f_S}{f_r}$  definido como frecuencia de conmutación normalizada a la frecuencia de resonancia del circuito.

La igualdad anterior permite encontrar los valores de  $\delta$  críticos a partir de un valor de  $Q_S$  y  $\omega_n$  dados. También es útil plantear (3.16) dejando  $\delta$  fijo y observar cómo varía el factor de mérito del circuito resonante en función de  $\omega_n$ . Veremos en lo que sigue ambos gráficos de variación.

### 3.3.1 Gráfica de D en un CMRC-SRL

Despejando  $D$  de (3.16), podemos representar la variación del ciclo de trabajo crítico a través de un gráfico en función de  $\omega_n$  y  $Q_S$ . En la fig.3.4 observamos una familia de curvas de  $D$  para diferentes valores de  $Q_S$ , en un rango de  $\omega_n$  alrededor de la frecuencia de resonancia.

Cada curva marca la frontera de operación entre el modo de operación A del CMRC-SRL y el modo de funcionamiento B. Los puntos por encima de una curva son

puntos de operación en modo *A*, mientras que los puntos debajo de la curva de *D*, pertenecen al modo de operación *B*. Tomemos por ejemplo la siguiente condición de operación; forma de onda de la tensión  $v_{ab}$  cuadrada (ciclo de trabajo  $\delta=1$ ), una relación de frecuencias  $\omega_n=1.1$  y supongamos un factor de mérito  $Q_s=10$ . Indicamos dicho punto de funcionamiento con "a" sobre la fig. 3.4. Este punto de operación representa el caso de un convertidor con carga resonante serie como hemos visto en el capítulo 2. El circuito resonante posee alta selectividad y operando a una frecuencia de conmutación superior a la de resonancia, obtenemos un comportamiento inductivo de la carga donde la corriente (próxima a una senoide) queda retrasada, respecto del primer armónico de tensión de la onda cuadrada. Claramente este punto corresponde al modo *A* de funcionamiento. Supongamos ahora que comenzamos a reducir el ciclo de trabajo. En la fig. 3.4 debemos descender sobre una recta  $\omega_n=1.1$  manteniéndonos en la zona correspondiente al modo *A*. Al llegar a la curva de *D* para  $Q_s=10$  (punto "b" sobre la figura), encontramos el ciclo de trabajo crítico  $D \cong 0.25$ , que marca la frontera entre el modo de operación *A* y *B*. Si continuamos reduciendo el ciclo de trabajo, el convertidor entra en modo de operación *B*.

Podemos observar de la figura que cuanto menor es el valor de  $Q_s$ , mucho antes llegamos a la condición crítica de funcionamiento del convertidor. También apreciamos

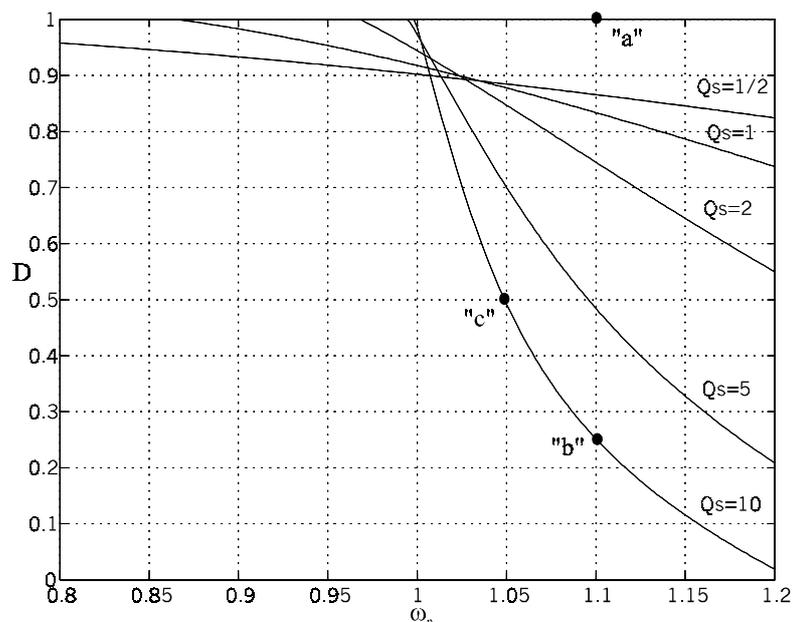


Figura 3.4: Curvas de  $D$  para valores diferentes valores de  $Q_s$

que para relaciones de frecuencias  $\omega_n < 1$  y valores de  $Q_s$  reducido ( $Q_s \leq 2$ ) es posible operar con el convertidor en modo *A*. Esto se debe a la baja selectividad del circuito

resonante por lo que la corriente  $i_L$  posee alto contenido armónico que condiciona el modo de funcionamiento del convertidor. Cuanto mayor es la selectividad del circuito resonante, el ciclo de trabajo crítico se reduce al extremo. Para  $Q_S$  infinito, la curva de  $D$  se convierte en la recta  $\omega_n=1$ .

Para selectividad baja es posible trabajar en modo *A* en un rango amplio de frecuencias por encima y por debajo de la de resonancia, pero con ciclos de trabajos cercanos a 1. Sin embargo, cuanto mayor es la selectividad del circuito resonante se requiere de frecuencias superiores a la de resonancia para permanecer en el modo de operación *A*.

### 3.3.2 Variación de $Q_S$ con $D$ constante en un CMRC-SRL

También podemos ver cómo cambia el modo de funcionamiento del convertidor, manteniendo  $\delta$  constante y variando  $\omega_n$ . Supongamos tomar la recta  $\delta=0.5$  en la fig. 3.4. Mientras  $\omega_n$  sea superior a 1.05 (punto "c"), operamos con el CMRC-SRL en modo *A* y por debajo de este valor, operamos en modo *B*. Como se puede apreciar de la figura, este paso de un modo a otro depende del valor de  $Q_S$ . En la fig. 3.5 presentamos la

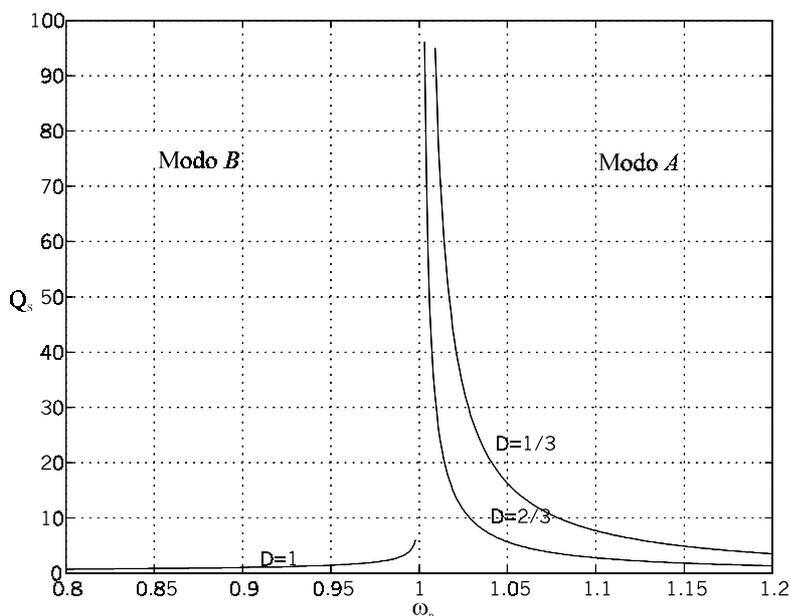


Figura 3.5: Variación de  $Q_S$  para diferentes valores de  $D$

gráfica del factor de mérito del circuito resonante en condición de funcionamiento crítico del CMRC-SRL para un ciclo de trabajo fijo, en un rango de variación de  $\omega_n$ . Podemos apreciar cómo cambia  $Q_S$  para tres valores de  $D$ , 1/3, 2/3 y 1. Los puntos de

operación sobre la derecha de las curvas, corresponden al modo de operación *A*. Mientras que los puntos sobre la izquierda corresponden al modo de operación *B*.

Observamos en la fig. 3.5 que con  $D = 1$  y para el rango de frecuencias  $\omega_n$  por debajo de la unidad, sólo es posible ingresar al modo *A* para valores muy pequeños de  $Q_S$ . Justo en  $\omega_n = 1$ , necesitamos un  $Q_S$  tendiendo a infinito para poder pasar del modo *B* al modo *A* (en realidad quedamos operando en modo crítico). Cuando  $\omega_n > 1$  claramente se ve en el gráfico que operamos en modo *A* independiente del factor de mérito. Cuando el ciclo de trabajo esté por debajo de la unidad, sólo es posible operar en modo *A* para el rango de frecuencias  $\omega_n > 1$ . El valor del factor de mérito necesario será mayor cuanto más cerca se esté de  $\omega_n = 1$ , como podemos ver de la fig. 3.5.

Para un dado diseño del circuito resonante es posible observar los valores de resistencia de carga para los cuales el convertidor opera en modo *A*. La recta vertical correspondiente a la frecuencia de conmutación nos da el rango de carga posible en modo *A*, para un dado ciclo de trabajo. También podríamos emplear esta curva para diseñar el circuito resonante de modo tal que, el convertidor opere en modo *A* para un rango de variación de carga especificada.

### 3.4 Condición límite en un CMRC-PRL

Para determinar el límite entre el modo de operación *A* y *B* en un CMRC con carga PRL procedemos como en el caso serie. Para esto debemos determinar los vectores  $\mathbf{f}_i$  y  $\mathbf{g}_i$  correspondientes a PRL y aplicar la igualdad entre las ecs. (3.12) y

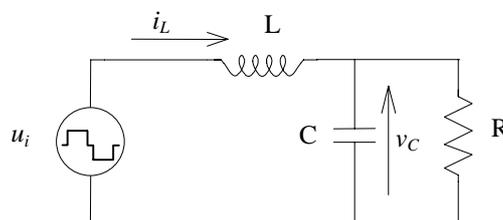


Figura 3.6: Circuito equivalente de un CMRC con carga PRL

(3.13). Empleamos el circuito equivalente mostrado en la fig. 3.6, con los siguientes parámetros característicos:

$$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{frecuencia de corte}$$

$$Q_P = \omega_c CR \quad \text{factor de mérito del circuito cargado}$$

$$Z_0 = \sqrt{L/C} = \omega_c L = \frac{1}{\omega_c C} \quad \text{impedancia característica}$$

Obtenemos las siguientes expresiones de las matrices  $\mathbf{f}_i$  y  $\mathbf{g}_i$  válidas para cualquier intervalo de tiempo entre dos transiciones consecutivas,

$$\mathbf{f}_i^{PRL} = e^{-\alpha(T_{i+1}-T_i)} \begin{bmatrix} \cos(\omega_d(T_{i+1}-T_i)) + \frac{1}{2mQ_P} \sin(\omega_d(T_{i+1}-T_i)) & -\frac{1}{mZ_0} \sin(\omega_d(T_{i+1}-T_i)) \\ \frac{Z_0}{m} \sin(\omega_d(T_{i+1}-T_i)) & \cos(\omega_d(T_{i+1}-T_i)) - \frac{1}{2mQ_P} \sin(\omega_d(T_{i+1}-T_i)) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{g}_i^{PRL} = \begin{bmatrix} u_i \left\{ \frac{\left[1 - e^{-\alpha(T_{i+1}-T_i)} \cos(\omega_d(T_{i+1}-T_i))\right]}{R} + \left\{ m \left[1 - \left(\frac{1}{2mQ_P}\right)^2\right] \right\} \frac{e^{-\alpha(T_{i+1}-T_i)}}{Z_0} \sin(\omega_d(T_{i+1}-T_i)) \right\} \\ u_i \left\{ 1 - e^{-\alpha(T_{i+1}-T_i)} \left[ \cos(\omega_d(T_{i+1}-T_i)) + \frac{1}{2mQ_P} \sin(\omega_d(T_{i+1}-T_i)) \right] \right\} \end{bmatrix}$$

siendo  $\alpha = \frac{\omega_c}{2Q_P}$  el factor de amortiguamiento;  $\omega_d = \frac{\omega_c}{2} \sqrt{4 - \frac{1}{Q_P^2}}$  la frecuencia

natural de oscilación amortiguada para  $Q_P \geq 1/2$  y  $m = \frac{1}{2} \sqrt{4 - \frac{1}{Q_P^2}}$ .

Para los instantes de transición  $T_1$ ,  $T_2$  y  $T_3$  mostrados en la fig. y teniendo presente que  $T_1=T_2$ , resulta:

$$\mathbf{f}_1^{PRL} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{f}_2^{PRL} = e^{-\alpha(D\frac{T_S}{2})} \begin{bmatrix} \cos\left(\omega_d(D\frac{T_S}{2})\right) + \frac{1}{2mQ_P} \sin\left(\omega_d(D\frac{T_S}{2})\right) & -\frac{1}{mZ_0} \sin\left(\omega_d(D\frac{T_S}{2})\right) \\ \frac{Z_0}{m} \sin\left(\omega_d(D\frac{T_S}{2})\right) & \cos\left(\omega_d(D\frac{T_S}{2})\right) - \frac{1}{2mQ_P} \sin\left(\omega_d(D\frac{T_S}{2})\right) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_3^{PRL} = e^{-\alpha(D'\frac{T_S}{2})} \begin{bmatrix} \cos\left(\omega_d(D'\frac{T_S}{2})\right) + \frac{1}{2mQ_P} \sin\left(\omega_d(D'\frac{T_S}{2})\right) & -\frac{1}{mZ_0} \sin\left(\omega_d(D'\frac{T_S}{2})\right) \\ \frac{Z_0}{m} \sin\left(\omega_d(D'\frac{T_S}{2})\right) & \cos\left(\omega_d(D'\frac{T_S}{2})\right) - \frac{1}{2mQ_P} \sin\left(\omega_d(D'\frac{T_S}{2})\right) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{g}_1^{PRL} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\mathbf{g}_2^{PRL} = \left[ \begin{array}{c} V_{CC} \left\{ \frac{\left[ 1 - e^{-\alpha(D\frac{T_S}{2})} \cos\left(\omega_d(D\frac{T_S}{2})\right) \right]}{R} + \left\{ m \left[ 1 - \left( \frac{1}{2mQ_P} \right)^2 \right] \right\} \frac{e^{-\alpha(D\frac{T_S}{2})}}{Z_0} \sin\left(\omega_d(D\frac{T_S}{2})\right) \right\} \\ V_{CC} \left\{ 1 - e^{-\alpha(D\frac{T_S}{2})} \left[ \cos\left(\omega_d(D\frac{T_S}{2})\right) + \frac{1}{2mQ_P} \sin\left(\omega_d(D\frac{T_S}{2})\right) \right] \right\} \end{array} \right]$$

$$\mathbf{g}_3^{PRL} = \left[ \begin{array}{c} V_{CC} \left\{ \frac{\left[ 1 - e^{-\alpha(D'\frac{T_S}{2})} \cos\left(\omega_d(D'\frac{T_S}{2})\right) \right]}{R} + \left\{ m \left[ 1 - \left( \frac{1}{2mQ_P} \right)^2 \right] \right\} \frac{e^{-\alpha(D'\frac{T_S}{2})}}{Z_0} \sin\left(\omega_d(D'\frac{T_S}{2})\right) \right\} \\ V_{CC} \left\{ 1 - e^{-\alpha(D'\frac{T_S}{2})} \left[ \cos\left(\omega_d(D'\frac{T_S}{2})\right) + \frac{1}{2mQ_P} \sin\left(\omega_d(D'\frac{T_S}{2})\right) \right] \right\} \end{array} \right]$$

con  $D' = 1 - D$ .

La igualdad entre (3.12) y (3.13) se reduce exactamente al sistema dado por (3.15) por ser  $\mathbf{f}_i$  y  $\mathbf{g}_i$  iguales al caso serie. Tomando la primera ecuación de este sistema nos queda

$$\frac{e^{-\frac{D}{\tau}} \sin \gamma \left[ \frac{1}{\operatorname{tg} \gamma} + \frac{1}{\operatorname{tg} \beta} \right]}{\left\{ 1 - e^{-\frac{1}{\tau}} \sin \gamma \cdot \sin \beta \left[ \frac{1}{m^2} + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \beta} - K^2 \right] \right\}} = \frac{\left\{ -1 + \mu \left[ \frac{1}{\operatorname{tg} \beta} + K \right] + e^{-\frac{D}{\tau}} \sin \gamma \left[ \frac{(1-\nu)}{\operatorname{tg} \gamma} + K(1+\nu) \right] \right\}}{\mu \cdot e^{-\frac{(1-D)}{\tau}} \sin \beta \left[ \frac{1}{m^2} + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \beta} - K^2 \right] + \nu} \quad (3.17)$$

$$\text{con } \tau = \frac{2\omega_n Q_P}{\pi}; \quad \eta = \frac{m\pi}{\omega_n}; \quad \gamma = D\eta; \quad \beta = D'\eta; \quad \mu = \frac{m(1 - e^{-D/\tau} \cos \gamma)}{Q_P}, \quad K = \frac{1}{2mQ_P};$$

$\nu = m^2(1 - K^2)$  y siendo  $\omega_n = \frac{f_S}{f_c}$  la frecuencia de conmutación normalizada a la frecuencia de corte del circuito resonante.

Resolviendo (3.17) encontramos los valores de ciclo de trabajo críticos  $D$  en función de  $\omega_n$ , para diferentes valores del factor de mérito  $Q_P$ . También podemos obtener los valores de  $Q_P$  que resultan de variar  $\omega_n$ , para ciclos de trabajo fijos, dando curvas correspondientes a diferentes valores  $D$ .

### 3.4.1 Gráfica de $D$ en un CMRC-PRL

En la fig. 3.7 representamos la variación del ciclo de trabajo crítico para un rango de variación  $\omega_n$  y diferentes valores del factor de mérito  $Q_P$  del circuito resonante.

Al igual que en el caso SRL, cada curva dada en la fig. 3.7 establece el límite entre los modos  $A$  y  $B$  de operación. Cuando operamos en puntos por encima de la curva de  $D$ , estamos operando en modo de funcionamiento  $A$ , mientras que en puntos por debajo de la curva de  $D$ , estamos operando en modo  $B$ .

Existe una diferencia sustancial en el comportamiento del CMRC-PRL cuando el factor de mérito es bajo ( $Q_P \leq 2$ ). En un CMRC-PRL  $D$  queda en función de la relación entre  $f_s$  y  $f_c$ , y no entre  $f_s$  y  $f_r$ , como en el caso SRL. Por tal motivo hay que ver cual es

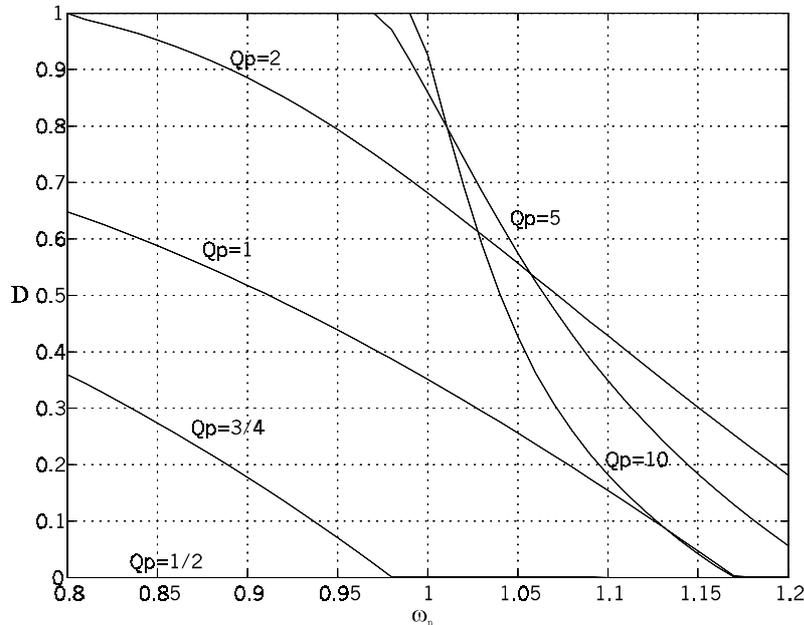


Figura 3.7: Ciclo de trabajo crítico  $D$  en un CMRC-PRL para diferentes valores de  $Q_P$  la relación entre la frecuencia de resonancia del PRL y la frecuencia de conmutación para interpretar este comportamiento.

La frecuencia de resonancia  $f_r$  es definida como la frecuencia a la cual la fase de la impedancia de entrada del circuito resonante es nula y para el PRL se expresa como:

$$f_r = f_c \sqrt{1 - \frac{1}{Q_P^2}} \quad (3.18)$$

función del factor de mérito del circuito tanque y válida para  $Q_P > 1$ , determinando  $f_r$  el límite entre una carga inductiva o una carga capacitiva. Si  $f_s$  es menor que  $f_r$  entonces el circuito presenta características capacitivas y por el contrario, si  $f_s$  es mayor a  $f_r$

entonces el circuito se comporta inductivamente. Para valores de  $Q_P$  menores que la unidad, no existe resonancia y el circuito presenta características inductivas. Esto explica por qué a medida que tomamos valores de  $Q_P$  menores a uno, más favorable es la condición de operación en el modo A, al trabajar con  $\omega_n < 1$ . Como ejemplo extremo veamos la curva para  $Q_P = 1/2$ . En el rango mostrado de  $\omega_n$  en la fig. 3.7, no hay posibilidad de ingresar en el modo de operación B. Para este valor de  $Q_P$  podemos suponer que es el resultado de un valor bajo de resistencia que casi cortocircuita al capacitor del circuito tanque, en el rango de frecuencias por debajo de la frecuencia de corte del circuito. De esta manera, la impedancia que presenta el circuito tanque al convertidor es prácticamente la inductancia. Y para frecuencias por encima de la de corte el capacitor posee muy baja impedancia reforzando las características inductivas del circuito.

### 3.4.2 Variación de $Q_P$ con $D$ constante en un CMRC-PRL

La variación de  $Q_P$  para un CMRC-PRL bajo condición crítica de funcionamiento se observa en la fig. 3.8. En ella apreciamos tres curvas límites entre el modo de operación A y el modo de operación B, correspondientes a  $D$  igual a 1,  $2/3$  y  $1/3$ . Los

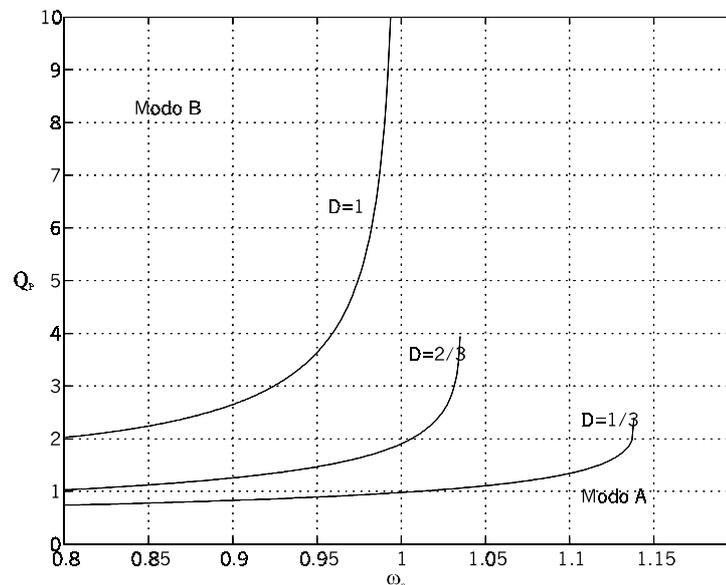


Figura 3.8: Variación de  $Q_P$  en función de  $\omega_n$  para diferentes valores de  $D$

puntos a la izquierda y por encima de dichas curvas de  $D$  constante, corresponden al modo de operación B. Mientras que los puntos de operación por debajo y hacia la derecha de las curvas, pertenecen al modo A de funcionamiento.

Observamos en la fig. 3.8 que bajo condiciones de operación crítica, el valor de  $Q_P$  va creciendo a medida que  $\omega_n$  crece. Por encima de cierto valor de  $\omega_n$ , cualquier valor de  $Q_P$  es posible para que el CMRC-PRL opere en modo A. Como ejemplo supongamos un ciclo de trabajo de  $2/3$ , para valores de  $\omega_n$  aproximadamente por encima de 1.04 cualquier valor de  $Q_P$  permite operar al CMRC-PRL en modo A.

Al igual que en el caso serie, la fig. 3.8 permite observar cual es la variación de carga posible, manteniéndose en modo de operación A, para un dado diseño del CMRC. O bien diseñar el circuito resonante (esto es diseñar el CMRC), para una dada variación de carga. En este último caso ofrece una herramienta de diseño muy valiosa, tanto para el caso serie como para el paralelo. También como veremos en el capítulo siguiente, puede emplearse la fig. 3.8 para el caso PRL (o la fig. 3.5 para el caso SRL) para diseñar circuitos resonantes equivalentes a circuitos resonantes de orden superiores y con carga variable en módulo y fase [54].