TEORIA
Biblioteca de la Universidad Nacional de La Plata

VII

CRISIS Y RECONSTRUCCION DE LAS CIENCIAS EXACTAS

POR
GERMAN MARK — JUAN HAHN
JUAN THIRRING — JORGE NÖBELING
CARLOS MENGER

PRÓLOGO DE JULIO R. CASTIÑEIRAS
TRADUCCIÓN DE NAJMEN GRINFELD

LA PLATA
REPÚBLICA ARGENTINA
1936

TEORÍA

BIBLIOTECA DE OBRAS TRADUCIDAS DE AUTORES NO LATINOS
SOBRE CIENCIA Y FILOSOFÍA CONTEMPORANEAS

VOLUMENES PUBLICADOS

I.—*Filosofía de la sociedad y de la historia,* por Alfredo Vierkandt, con prólogo de Ricardo Levene (1934).

II. y III.—*Teoría del desarrollo biológico,* por Luis Bertalanffy, con prólogo de Max Mirabén (1934).

IV y V.—*La sociedad primitiva,* por Luis E. Morgan, con prólogo de Alfredo L. Palacios (1935).

VI.—*Fundamentos pedagógicos del siglo XX. La enseñanza pública en Prusia,* por Otto Boelitz y Jorge Grunwald, con prólogo de Adolfo Korn Villafañe (1935).

VII.—*Crisis y reconstrucción de las ciencias exactas,* por Germán Mark, Juan Thirring, Juan Hahn, Jorge Nöbeling y Carlos Menger, con prólogo de Julio R. Castiñeiras (1936).

EN PRENSA:

VIII.—*La ley causal y sus límites,* por Felipe Franck.

CRISIS Y RECONSTRUCCION
DE LAS CIENCIAS EXACTAS

La Plata, enero 11 de 1933.

Atenta la nota del profesor de la Universidad de Berlín, doctor Max Dessoir, autorizando la traducción y publicación del trabajo de Alfredo Vierkandt "Filosofía de la Sociedad y de la Historia", y asignando el valor que le corresponde a la función de la Universidad para hacer traducir y difundir en los centros de estudios las más altas expresiones de la teoría o ciencia pura,

El Consejo Superior,

ORDENA:

1º Iniciar con el citado trabajo del profesor Vierkandt la publicación de una *Biblioteca de obras traducidas de autores no latinos*, que versarán sobre los problemas de ciencia y la filosofía contemporáneas y que se llamará TEORIA.

2º Comuníquese, tómese razón, publíquese y archívese.

RICARDO LEVENE.

S. M. AMARAL,

Secretario General y del Consejo Superior.

TEORIA
Biblioteca de la Universidad Nacional de La Plata

VII

CRISIS Y RECONSTRUCCION DE LAS CIENCIAS EXACTAS

I. - La crisis de la física clásica por obra del experimento, por *Germán Mark.*

II. - La transformación del sistema conceptual de la física, por *Juan Thirring.*

III. - La crisis de la intuición, por *Juan Hahn.*

IV. - La cuarta dimensión y el espacio curvo, por *Jorge Nöbeling.*

V. - La nueva lógica, por *Carlos Menger*

Prólogo de Julio R. Castiñeiras
Traducción de Najmen Grinfeld

LA PLATA
REPÚBLICA ARGENTINA
1936

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

Presidente
INGENIERO JULIO R. CASTIÑEIRAS

Vicepresidente
DOCTOR HÉCTOR DASSO

Secretario general
ABOGADO BERNARDO ROCHA

MIEMBROS DEL CONSEJO SUPERIOR

Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación: Decano, Doctor Alfredo D. Calcagno; delegado, profesor Francisco Romero.

Facultad de Agronomía: Decano, ingeniero agrónomo Santiago Boaglio; delegado, ingeniero agrónomo Santos Soriano.

Facultad de Medicina Veterinaria: Decano, doctor Carlos J. B. Teobaldo; delegado, doctor Agustín Pardo.

Facultad de Ciencias Jurídicas y Sociales: Decano, doctor Eduardo F. Giuffra; delegado, doctor Juan Carlos Rébora.

Facultad de Química y Farmacia: Decano, doctor Enrique V. Zappi; delegado, doctor Antonio G. Pepe.

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas: Decano, doctor Hilario Magliano; delegado, ingeniero Enrique Humet.

Facultad de Ciencias Médicas: Decano, doctor Héctor Dasso; delegado, doctor Orestes E. Adorni.

Instituto del Observatorio Astronómico. (Escuela superior de ciencias astronómicas y conexas) : Director, ingeniero Félix Aguilar.

Instituto del Museo. (Escuela de Ciencias naturales) : Director, doctor Joaquín Frengüelli; delegado, profesor Milciades A. Vignati.

Escuela Superior de Bellas Artes: Interventor, doctor Juan E. Cassani.

Representantes de los estudiantes: Señores Ezequiel Ortega y Eusebio Zubasti.

Biblioteca Central de la Universidad: Director, Alberto Palcos.

PROLOGO

Con el título general de "Crisis y reconstrucción de las ciencias exactas" contiene esta publicación cinco conferencias de índole científico filosófica, que se refieren a los descubrimientos modernos en el campo de la física y a cuestiones relativas a la intuición, a la teoría de la relatividad, a la geometría de n *dimensiones, noción de la cuadratura del espacio, crisis y evolución de la lógica, etc.*

La primera conferencia de Herman Mark trata de "La crisis de la física clásica por obra del experimento", tema cuya importancia ha dado origen a numerosas publicaciones y conferencias de los hombres de ciencia a partir del 14 de diciembre de 1900, en que Max Planck, profesor de la Universidad de Berlín lanzó su famosa teoría de los cuanta, en una conferencia dada en la sociedad alemana de física de la misma ciudad.

Analiza Herman Mark la transformación operada en los conceptos de espacio y tiempo según la manera de ver clásica — juicios sintéticos a priori, según Kant — principalmente por los resultados de la experiencia iniciada por Michelson en el año 1881, proseguida por Morley y Miller en 1904 y 1905 y posteriormente por Miller — de 1921 a 1926 — en el observatorio norteamericano *de Mount Wilson, Tommarchek en 1924 y Kennedy en 1926. Dichas experiencias demostraron la imposibilidad de probar la existencia del movimiento uniforme de un cuerpo en el éter, supuesto inmóvil, y dieron origen a las llamadas fórmulas de transformación de Lorentz, a la hipótesis de la contracción de los cuerpos de Fitzgerald y a la teoría especial de la relatividad enunciada por Einstein en el año 1905.*

Se detiene particularmente Mark en su conferencia en el estudio del fenómeno de la radiación del cuerpo absolutamente negro, que dió origen a una revolución en la física. Bien sabido es que la intensidad de radiación de frecuencia ν *en el cuerpo negro es función de la temperatura absoluta y de la frecuencia y que, por mediciones experimentales se había llegado a obtener para distintas temperaturas las curvas de intensidades de radiación, sin haberse podido determinar la ecuación de las curvas. Las ecuaciones de Wien y de Rayleigh, obtenidas con la mecánica estadística y electrodinámica clásica, dieron resultados distintos a los encontrados experimentalmente por Lummer y Pringsheim para pequeñas y grandes frecuencias respectivamente. La contradicción fué eliminada en forma genial por Max Planck con su hipótesis de los cuanta (1900) según la cual la radiación del cuerpo negro no era continua sino múltiple de una energía elemental llamada* cuanta de energía *proporcional a la frecuencia, obteniéndose con la ayuda de la teoría de la relatividad (1905) la fórmula que da la intensidad de la radiación en función de la temperatura y frecuencia, fórmula que arroja resultados concordantes con los de la* *experiencia. Esta fórmula permitió, aplicando los conceptos de densidad espacial de radiación y los dos principios fundamentales de la termodinámica, establecer teóricamente la fórmula de la radiación integral del cuerpo negro, y de otros cuerpos — combinándola con las leyes de Kirchhoff — ya obtenida experimentalmente por Stefan (1870) y Boltzmann. La comprobación experimental en la radiación de la hipótesis de los cuanta, inicia una era revolucionaria de la física al comenzar el siglo actual. Esta revolución avanza en forma sorprendente en este momento.*

Continúa Mark con el fenómeno fotoeléctrico cuya explicación se tuvo a raíz de la hipótesis de Einstein (1905), quien consideró la luz homogénea como la emisión de fotones o corpúsculos similares — hasta cierto punto — a los de la teoría de la emisión de Newton, portadores de energía proporcional a la frecuencia.

En forma sintética se refiere al efecto Compton, a la difracción de los rayos X, a la mecánica de De Broglie, a la dualidad de la luz y a las mecánicas ondulatoria y cuántica, respectivamente, de Schrödinger y Heisenberg, temas que son expuestos con más detalle más adelante.

La segunda conferencia de Hans Thirring tiene por título: "La transformación del sistema conceptual de la física". Analiza Thirring, el modo de operar de la física como filosofía natural o ciencia de la naturaleza con ejemplos sencillos, pero de profundo concepto, llegando a la conclusión de que ella — ciencia eminentemente humana y de rasgos antropomórficos — trata de establecer relaciones entre ciertos conceptos primitivos o básicos *elementales con el objeto de explicar los fenómenos naturales para lo cual es necesario crear, a su vez, otros conceptos derivados, cada vez más complicados, de significado incomprensible para los profanos.*

Estudia rápidamente las consecuencias del descubrimiento de los rayos Röntgen (1895) y de los cuerpos radioactivos, sales de uranio por Becqueral y radio por los esposos Curie (1898) sobre las teorías relativas a la constitución de la materia.

En forma sencilla considera la teoría especial de la relatividad, tratada someramente en la conferencia de Mark, explicando el significado del espacio o mundo de Minkowski, definiendo los conceptos suceso, intervalo entre sucesos *o espacio - temporal y el carácter de* invariante *— análogo al de distancia entre dos puntos que trata la geometría euclídea de dos y tres dimensiones — de dicho intervalo para toda transformación lineal de las coordenadas que lo determinan. Esboza, también, una explicación sobre el significado de la curvatura del espacio según la teoría de la relatividad.*

No nos parece muy clara y ordenada, especialmente para las personas que no han profundizado estos estudios, la forma en que el conferenciante trata el modelo de Bohr sobre la constitución del átomo de hidrógeno y su relación con los rayos espectrales y la teoría de los cuanta, para ocuparse después de los isótopos y de la mecánica de De Broglie, la mecánica ondulatoria de Schrödinger (1925) y la cuántica de Heisenberg (1925).

El modelo de Bohr, requiere una explicación más profunda sobre la característica de las órbitas estacionarias *circulares, las relaciones entre los radios de las mismas, la relación entre la emisión de fotones y los pasos de una órbita a otra, los estados de excitación y de ionización de los átomos, la relación con las series espectrales, la corrección por la posición real del centro de gravedad, la introducción de las órbitas elípticas y la aplicación de la teoría de la relatividad por Sommerfeld para estudiar el movimiento de los electrones, etc., etc. La mención de los isótopos en una conferencia de vulgarización científica requiere una exposición previa sobre la constitución del núcleo de los átomos.*

Pasa rápidamente el conferenciante por la teoría corpuscular ondulatoria de los fenómenos materiales establecida por De Broglie con el intento de explicar el dualismo corpuscular-ondulatorio de los fenómenos luminosos que vincula a longitud de onda material con la constante h *de Planck y la cantidad de movimiento (1924).*

Nos parece muy bien explicada la relación de indeterminación de Heisenberg que se traduce por una desigualdad, cuyo límite determina el grado de exactitud que puede esperarse para el producto de la cantidad de movimiento de una partícula por la coordenada correspondiente y las consideraciones finales sobre la imposibilidad de establecer el sujeto del predicado vibra.

En la tercera conferencia de Hans Hahn, intitulada "La crisis de la intuición", se trata el tema con gran claridad y su lectura ha de ser de mucha utilidad para los que no conocen bien la matemática. Analiza Hahn primeramente los conceptos establecidos por Kant en su "Crítica de la razón pura" y la conmoción que produjo en *los de espacio y tiempo, considerados por este filósofo como juicios sintéticos a priori e independientes entre sí, la teoría de la relatividad y el descubrimiento, en el campo de la geometría, de curvas que carecen de tangente en todos sus puntos, atribuído al matemático alemán Weierstrass en 1861.*

Para ello expone primero en forma elemental y clara, con ejemplos sencillos, el concepto de derivada *considerándola como velocidad en un punto en la cinemática y como pendiente en un punto en la geometría analítica y hace conocer el objeto del cálculo diferencial e integral, ideado casi simultáneamente por Leibnitz y Newton. Después de dar ejemplos de curvas sin tangentes, como las de Weierstrars, toma otros mecánicos que, como los primeros, demuestran los resultados falsos a que lleva la intuición pura.*

Demuestra también cómo la noción intuitiva de que las líneas son engendradas por el movimiento de un punto, es falsa con los ejemplos dados por el matemático italiano Peano, quien demostró que también las superficies pueden considerarse engendradas por el movimiento de un punto.

Fija Hahn el concepto de conexión local, analiza la noción de conjuntos uni y pluridimensionales e insiste sobre la crisis de la intuición que da proposiciones que parecen seguras, siendo, por lo contrario, falsas, para llegar a la conclusión de que "todo nuevo concepto matemático que se introduzca debe ser definido en forma puramente lógica y que toda demostración matemática debe llevarse a cabo con medios puramente lógicos".

Agrega: la intuición no es — como quería Kant — un medio de conocimiento puro y apriorístico. Engéndrase con la fuerza de la costumbre que, a su vez, tiene por madre a la pereza mental.

La cuarta conferencia, de Georg Nobelin tiene por título "La cuarta dimensión y el espacio curvo" y trata un tema ya estudiado por otros autores, especialmente por Henry Poincaré en su libro "La Ciencia y la hipótesis".

Empieza por definir el espacio euclídeo bidimensional para seguir al polidimensional caracterizados por la invariante distancia entre dos puntos, cuando se efectúa una transformación lineal de las coordenadas. Considera Nobelin esta cuestión bajo el punto de vista de la geometría analítica pura, sin vincular los problemas de posición con los cambios de estado físico. Considerando el espacio tetradimensional, p. ej., lo define como una construcción lógica independiente de toda experiencia y a la geometría euclídea correspondiente, como sistema de consecuencia lógica de ciertas definiciones: hiperplanos, caracterizados por una ecuación lineal de cuatro coordenadas variables que definen la posición variable del punto; planos, que tienen por ecuación la que resulta de la anulación de una de las coordenadas en la ecuación del hiperplano; rectas y puntos, determinados por dos y tres planos respectivamente.

Demuestra que la geometría es simplemente un sistema de consecuencias lógicas que se obtiene previa definición de ciertos entes (p. ej. puntos, rectas y planos) y de ciertos axiomas sin contradicción. Depende de la naturaleza de estos axiomas el carácter de la geometría, que, *puede ser independiente de toda experiencia. Variando solamente en la geometría de Euclides el llamado axioma de las paralelas, p. ej. se obtienen las geometrías que los sabios húngaro Bolyai y ruso Lobatchefski establecieron a principios de este siglo, geometrías que reciben el nombre de noeuclídeas. Lobatchefski, p. ej., sustituye el postulado de las paralelas de Euclides por uno contrario: por un punto se puede trazar varias paralelas a una recta dada. En las geometrías no euclídeas la suma de los ángulos de un triángulo es diferente de 180°, mayor en la geometría elíptica y menor en la geometría hiperbólica o de Bolyai-Lobatchefski.*

Aborda Nobelin la geometría diferencial de las superficies, considerando la fórmula general que da la distancia entre dos puntos infinitamente próximos en una superficie y dando los valores particulares que toman los llamados potenciales, sin entrar a considerar las relaciones que deben existir entre éstos y las derivadas parciales cruzadas para representar una superficie determinada, porque eso conduciría a fórmulas más complicadas cuyo desarrollo lo sitúa fuera del objeto de la conferencia.

Define Nobelin las líneas geodésicas, las superficies lisas, la curvatura del espacio, la geometría de Riemann para el espacio de curvatura constante y las seis potenciales que con las coordenadas en este espacio permiten establecer sus relaciones métricas; es decir calcular distancias, ángulos, superficies, volúmenes de cuerpos, etc.

Analiza Nobelin las relaciones de la teoría de la relatividad general con una geometría de Riemann para el espacio tetradimensional (espacio tiempo) curvo, en el cual *las líneas geodésicas son las trayectorias de los rayos luminosos y los potenciales dependen de las masas que se encuentran en el espacio y termina aclarando qué debe entenderse por atribuir a nuestro espacio la cualidad de ser cerrado, es decir ilimitado y finito.*

La quinta conferencia de Karl Menger sobre el tema "La nueva lógica" es la más extensa y, por esto mismo, estudia el tema con gran profundidad. Constituye una síntesis interesantísima de la evolución de la lógica desde su fundación, atribuída a Aristóteles, hasta nuestros días. Analiza rápidamente la transformación de la lógica, desde la formación aristotélica de los silogismos, las ampliaciones en la Edad media y los principios fundamentales de identidad, contradicción y tercero excluso.

Analiza las ideas de Leibnitz y Kant y señala el carácter de la crisis que experimentó la lógica como consecuencia del progreso en el conocimiento matemático, dando origen a la llamada logística que emprendió la reconstrucción de la lógica. Estudia las diferentes fases de esta reconstrucción mediante los cálculos llamados de clases, de proposiciones y de funciones, que no alteran sustancialmente la lógica antigua y la ampliación fundamental que la altera. de estudiar relaciones entre las proposiciones y clases de clases, clases de clases de clases, etc., conceptos que tienen netamente su origen en la matemática.

Estudia Menger la profunda crisis sufrida por la logística, a principios del siglo actual, al descubrirse numerosas paradojas, como consecuencia de sus estudios, dando ejemplos claros de ellas, y las establecidas por el célebre *matemático italiano Burali Forti y por Bertrand Rusell en 1901.*

Analiza el procedimiento formalista o metalógico de Hilbert para descubrir paradojas, enunciando claramente los conceptos y métodos de la metateoría en general, que aplicada a la lógica recibe el nombre de metalógica y estudia las lógicas polivalentes de Lukasiewicz y Post.

Al considerar el problema cardinal que se presenta a la matemática y la lógica, que consiste en demostrar la falta de contradicciones valiéndose de una parte de ellas estudia extremadamente, el descubrimiento del célebre matemático vienés Kurt Gödel quien demostró la imposibilidad de probar dicha falta de contradicciones, es decir, solucionó el problema en sentido negativo valiéndose de la teoría de los números naturales. Se detiene especialmente en otras cuestiones estudiadas por Gödel y sobre el rol del intuicionismo matemático y su posición con respecto a la matemática clásica, terminando su conferencia sobre el goce estético de la matemática, vedado, desgraciadamente, a la mayoría de las personas, pero comparable según el conferenciante al goce estético musical.

La exposición sintética y comentada del contenido de este libro, que edita la Universidad nacional de La Plata, formando parte de su colección "Teoría", revela su importancia y valor no sólo para los que cultivan los estudios físico matemáticos sino, también, para los que poseyendo un conocimiento general sobre los problemas de la física y matemática moderna, que a la luz de los nuevos descubrimientos experimentales aparecen estrecha-

mente vinculados, desean profundizar las relaciones entre los mismos con el criterio de la filosofía científica. Una información bibliográfica, moderna y bien seleccionada, acompaña a cada una de las conferencias escritas, a la cual se hace referencia al tratar cada cuestión de importancia.

JULIO R. CASTIÑEIRAS.

CRISIS Y RECONSTRUCCION DE LAS CIENCIAS EXACTAS

PALABRAS PRELIMINARES

El interés creciente que círculos cada vez más amplios demuestran por las ciencias exactas, tiene su raíz principalmente en el anhelo de encontrar un campo científico en que no se hagan sentir los fenómenos críticos que aquejan a otros campos. Y esta corriente de simpatía hacia la lógica, las matemáticas y la física sería probablemente aún más intensa, si no fuera por la falsa creencia en boga de que los resultados de las ciencias exactas son inaccesibles a la comprensión del común de los hombres.

Sin embargo, si hemos de decir verdad, las ciencias exactas distan muchísimo de hallarse a cubierto del riesgo mentado. Precisamente en los últimos decenios todas ellas — desde la física teórica hasta la lógica — han sido sacudidas por fuertes crisis. A muchas de las cosas que antes pasaban por exactas sólo podemos atribuirles hoy en día un valor aproximativo o estadístico; muchas cosas que antes eran tenidas por de carácter apriorístico, esto es, independientes de toda experiencia, se ha venido a reconocer que necesitan de prueba empírica o han sido calificadas de hipótesis convencionales; en muchos casos en que antes se buscaba lo cierto e indudable, nos contentamos hoy con lo verosímil; muchas cosas que antes se procuraba explicar, se ha visto hoy que sólo son susceptibles de descripción; muchas cosas que se consideraban como evidentes o fundadas en la intuición, se ha descubierto que son falsas, o ciertas tan sólo bajo determinados presupuestos; más: en muchas de las cosas que se creían demostradas no podemos ver ahora sino la transformación de ciertas premisas en ciertas proposiciones, y tanto estas premisas como las reglas aplicadas para transformarlas cabe modificarlas.

Por dicha los trabajos de reconstrucción ya se han iniciado con éxito en todos los sectores. Cierto que en más de un punto hemos debido rebajar nuestras pretensiones. Frecuentemente nos vemos reducidos a no salirnos de la esfera de lo aproximativo, lo estadístico, lo convencional y probable, conocidos como lo convencional y probable; de la esfera en que rigen la prueba empírica y la descripción, o en que se pasa de unas proposiciones a otras por mera transformación. Y sin embargo, en esfera tan limitada hay terreno suficiente para levantar, en lugar de los derruídos palacios, edificios más sencillos sin duda que estos últimos, pero asentados sobre cimientos más firmes.

Nuestros métodos experimentales han logrado un alto grado de precisión, con lo cual han aumentado extraordinariamente el alcance y la exactitud de nuestras descripciones. Observaciones y descubrimientos de toda índole han hecho que se formen nuevos y gigantescos campos de investigación. Las relaciones impensadas que se han llegado a descubrir entre los conceptos antiguos, han conducido a conceptos nuevos y a nuevos sistemas conceptuales. Las argumentaciones matemáticas han alcanzado pleno rigor lógico: más allá de la intuición se han desarrollado, por vía puramente deductiva, sistemas matemáticos completamente nuevos, que es dable aplicar a menudo en la física. Y, finalmente, por primera vez desde tiempos remotísimos, se han obtenido nuevas y esenciales luces sobre el mecanismo mismo de la deducción. No hay campo de las ciencias exactas en que los esfuerzos reconstructivos no se hayan visto coronados de éxito.

No negaremos, claro está, que más de una cuestión de detalle se le haya de escapar al profano. El prodigioso ensanchamiento experimentado en nuestros días por los diversos campos objeto de la labor científica, no consiente que siquiera al hombre de ciencia le sean corrientes, uno por uno, los pormenores de todas las ramas de la que él cultiva. Pero los problemas capitales — punto de partida del investigador — y lo esencial de las más importantes soluciones teóricas, eso sí que puede comprenderlo cualquiera; y, hasta cierto punto, a cualquiera puede resultarle interesante, siempre que se le expliquen estas cosas con claridad. Si a pesar de lo que afirmamos, abundan tanto los que se consideran, equivocadamente, en absoluto incapaces de llegar a entender algo de los resultados de las ciencias exactas, débese ello, sobre todo, a lo mal que se les han enseñado los primeros elementos de dichas ciencias. Por eso en los días que corremos no era empresa inútil poner en contacto más íntimo con la investigación de las ciencias exactas a gentes cuya actividad intelectual se desenvuelve en zonas diferentes. Y tarea que se imponía realizar también, por ser muchos los que, extraviados, han caído en un escepticismo absoluto en cuanto al valor de la ciencia.

Con este propósito se pronunciaron las cinco conferencias que siguen.

LA CRISIS DE LA FISICA CLASICA POR OBRA DEL EXPERIMENTO

Por GERMAN MARK

En los últimos cuarenta años se ha ampliado y profundizado con extraordinaria rapidez nuestro conocimiento de los hechos en la física y en la química. Hemos descubierto grandes territorios completamente nuevos, como la radioactividad, los rayos X, los rayos corpusculares, etc.; y en los territorios ya cultivados hemos logrado una precisión insospechada en las medidas. En la óptica y en la espectroscopía, en la determinación de los pesos atómicos y en la analítica ha sido dado determinar con seguridad efectos que nadie hubiera podido pensar antes en observar. Pero este rápido progreso del arte de experimentar tenía en su contra el que no viniese acompañado de una clara discriminación de los nuevos hechos descubiertos. Estos últimos se presentaban un poco confundidos; de ahí que la física teórica tuviese que aplicarse a la ardua tarea de seleccionarlos, ordenarlos y establecer conexiones entre ellos. No tardaron, sin embargo, en darse cuenta los físicos de que estos últimos resultados experimentales era imposible exponerlos, en forma satisfactoria y unitaria, con los conceptos bien fundados e internamente coherentes de la física clásica. Había que transformar las teorías para adaptarlas en lo posible a los nuevos hechos.

Pero a fin de poner de relieve como es debido las dificultades suscitadas por cada una de dichas experiencias básicas, es preciso reseñar primero muy a la ligera el estado de la física clásica en la época en que empezaron a realizarse. Eso nos servirá para poner en plena luz sus fundamentos y peculiaridades.

La mecánica de Newton y la electrodinámica de Maxwell-Hertz fueron apropiadas por mucho tiempo para dar cuenta, con gran aproximación en los cálculos, de los fenómenos naturales accesibles a nuestra observación, desde el movimiento de las estrellas en la esfera celeste hasta el de los electrones en los tubos en que se ha hecho el vacío. Considerémoslas por tal motivo aquí a título de teorías representativas de la física clásica.

He aquí sus características particularmente salientes:

1º El espacio y el tiempo se consideran en ellas como formas separadas de la intuición dadas a priori, en el sentido kantiano.

2º Frente a la materia se halla el campo, portadores una y otro de los fenómenos. Hay partículas pequeñísimas de materia y electricidad — los electrones, los iones, los átomos y las moléculas — cuyas cargas constituyen la fuente de las líneas de fuerza del campo, y cuyos movimientos se rigen por las leyes de la mecánica. Está también el campo electromagnético, portador de todos los fenómenos magnéticos y ópticos, sometido a las ecuaciones diferenciales de Maxwell-Hertz.

3º Las ecuaciones fundamentales de la mecánica y de la electrodinámica pueden aplicarse sin modificación alguna a los fenómenos de dimensiones atómicas.

Así, por ejemplo, el modelo molecular de una fuente luminosa puede construirse y calcularse de acuerdo con las leyes básicas susomentadas, descubiertas y verificadas en el campo macroscópico.

A estos tres principios, particularmente característicos de la física clásica, cabría agregar aún toda una serie de proposiciones tan importantes y generales como ellos. Pero dado el objeto que nos guía en la conferencia de hoy, hemos destacado justamente estos tres, porque el examen de ellos da ocasión, mejor que el de cualesquiera otros, de mostrar cómo el creciente aumento de nuestro material experimental va abriendo brechas cada vez más grandes y profundas en el edificio de la física clásica.

El alcance y eficiencia de los tres principios mentados se consideraban tan grandes, que por los años de 1890 se miraba a la física como una ciencia punto menos que perfecta.

En tal concepto la tenía el holandés H. A. Lorentz, en quien puede verse uno de los más eminentes representantes de la física clásica. "Por el año 1895 la física era para mí una ciencia perfecta; por eso su estudio no ofrecía mayor interés", se expresó en una excursión que realizaron los asistentes al gran congreso de física de 1928, reunido en Como en homenaje a Alejandro Volta. Precisamente por aquel entonces había logrado Lorentz interpretar cuantitativamente, con ayuda de la teoría electrónica, el efecto de Zeemann; y por el mismo tiempo había incorporado, valiéndose de una genial hipótesis ad hoc, al edificio de la física clásica el experimento de Michelson, sobre el que volveremos a continuación en detalle. De este modo todos los fenómenos de que se tenía conocimiento cierto a la sazón quedaban enmarcados, en forma unitaria, dentro del sistema conceptual y las ecuaciones de las teorías clásicas. La empiria y la teoría se daban la mano de una manera muy satisfactoria.

Y sin embargo, justamente en los últimos años del siglo pasado se colocó la piedra fundamental de los nuevos métodos experimentales: los rayos X, los catódicos, etc., llamados a demostrar que en física no cabe separar con una línea tan simple y clara el espacio del tiempo, la materia del campo. Un experimento que desde hacía años daba bastante que hacer a la física clásica, y que obligó a introducir una modificación muy esencial en el primer principio citado más arriba, era el de Michelson, que trataba de demostrar la existencia del éter. Pasamos a ocuparnos de él, entrando así en el tema principal de este primer informe.

Este experimento tenía por objeto someter a prueba una consecuencia teórica de la electrodinámica clásica. Según ésta, en efecto, los fenómenos electromagnéticos y ópticos se realizan en el éter inmóvil, postulado por ella. De ser así, debería soplar un viento "etéreo" por sobre la superficie de la tierra, en dirección contraria al del movimiento de ésta, al atravesar el universo el éter; y los efectos de este viento deberían poder observarse en los fenómenos ópticos. La física clásica se inclinaba a creer que la velocidad de la propagación de la luz se modifica, bajo la acción del éter, en sentido paralelo y perpendicular al del movimiento de la tierra.

A. A. Michelson, investigador norteamericano, emprendió en 1881, con ayuda del interferómetro, aparato de alta precisión construído por él, experiencias destinadas a comprobar la existencia de tal viento "etéreo". El experimento, en que se apuraron todos los recursos experimentales de que se disponía en aquella época, no reveló el menor rastro del efecto esperado, contradiciendo así las exigencias de la electrodinámica clásica. Y tampoco fué más feliz el resultado al repetirse, seis años más tarde, la experiencia por Michelson y Morley. Lo único que se logró fué acentuar aún más, por la mayor precisión de las medidas, su carácter negativo.

Las experiencias negativas nunca satisfacen al experimentador, pues siempre le queda la duda de que haciéndolas con más esmero, o de otro modo, el efecto esperado no dejaría de producirse. En el experimento de Michelson, empero, el límite del error sólo alcanzó a un centésimo del corrimiento esperado de las rayas de manera que en este caso también el resultado negativo podía considerarse como seguro.

H. A. Lorentz se esforzó, mediante una hipótesis genial inventada ad hoc, de obviar las dificultades que le planteaba a la teoría clásica el resultado negativo del experimento de Michelson. Sin embargo, él mismo se daba perfecta cuenta que su solución no habría de ser acogida como del todo satisfactoria. Sólo Einstein, en 1905, halló una salida inesperada de estas dificultades con ayuda de la *Teoría de la relatividad especial,* de que se hablará en la siguiente conferencia del presente ciclo ([1]). Aquí consignaremos tan sólo que gracias a las ideas, de amplia repercusión, de Einstein, el interés por el experimento de Michelson se acrecentó y renovó.

En los años siguientes a la formulación de la teoría de Einstein, se lo repitió varias veces, cada vez con mayor precisión en las medidas. Por primera vez lo repitieron Morley y Miller en 1904 y 1905, quienes confirmaron nuevamente el resultado negativo. Con todo eso, en 1926 pareció como si realizando el experimento bajo circunstancias particularmente propicias cupiera que el resultado fuese también positivo. En efecto, desde 1921 hasta 1926, Miller repitió el experimento en el laboratorio del observatorio astronómico de Mount Wilson a 1800 metros sobre el nivel del mar, obteniendo efectos positivos. Dada la gran importancia del problema, Kennedy y Tommaschek en los años siguientes — el primero en 1926 y el segundo en 1924 —, volvieron a repetir el experimento de Michelson, tanto en laboratorios situados al nivel del mar como en laboratorios a 1800 metros sobre dicho nivel, utilizando fuentes luminosas terrestres y luz estelar.

Lo que se desprende sin lugar a dudas de todas las experiencias llevadas a cabo hasta la fecha, es que con los métodos experimentales modernos no hay modo de verificar un influjo del éter sobre los fenómenos ópticos.

Y si es que éste existe, no concuerda cuantitativamente con los postulados de la electrodinámica clásica. Verdad que no queda aclarado en todos sus pormenores a qué se deben los resultados divergentes arrojados por las experiencias de Miller. Pero eso no es de extrañar. A menudo no resulta cosa fácil, al repetir un experimento, descubrir con absoluta seguridad las fuentes del error de los que han realizado antes el mismo experimento, o dar sin asomo de duda con las ilusiones padecidas por ellos.

Para los principios de la física clásica el resultado negativo del experimento de Michelson entraña la renuncia inevitable — como se expondrá en la siguiente conferencia — a concebir el espacio y el tiempo como formas separadas de la intuición dadas a priori (Primer principio de la física clásica). Sin embargo, la teoría de la relatividad no deja de presentar muchos puntos y muy íntimos de contacto con la teoría del campo de la física clásica, por lo cual, de ser esta teoría la única que se hubiese forjado en los últimos tiempos, no se justificaría el título general de nuestro ciclo *Crisis de las ciencias exactas*, elegido por nosotros por conceptuarlo el más apropiado para caracterizar el estado actual de la física. La justificación se halla en otros resultados experimentales que no en los que sirven de apoyo a la teoría relativista; resultados que han producido en los conceptos físicos una modificación mucho más radical que aquélla. Pasamos a discurrir sobre ellos a renglón seguido.

A fines del siglo pasado el interés de la física experimental gravitaba en forma muy señalada hacia el problema de la radiación del llamado *cuerpo negro*. Designase con este nombre a una substancia que tiene la propiedad de absorber y de volver a emitir la energía radiante que incide sobre ella, pero no de reflejarla ni de difundirla. Combinando diversos principios de la electrodinámica, se obtuvieron determinadas leyes para las propiedades de estos rayos negros. Estas leyes permitieron trazar la curva de la intensidad de la radiación, considerada como *función de la longitud de onda y de la temperatura.*

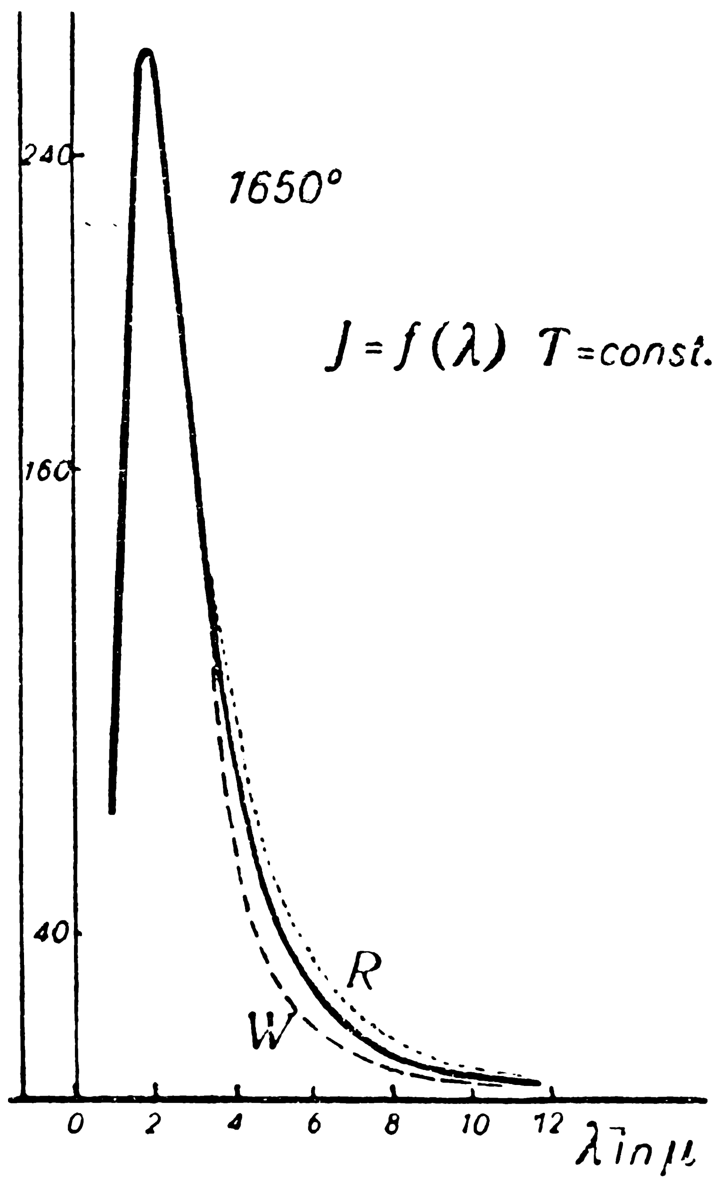


Fig. 1.
Distribución de la energía en el espectro del radiador negro, según Lummer y Pringsheim.

El método más indicado para efectuar las experiencias era, según se pudo verificarlo, utilizar un recinto evacuado provisto de un pequeño agujero sometido a la acción del calor, el cual va emitiendo un espectro, continuo, cuya intensidad cabe medir con relativa facilidad. Dicha intensidad tratábase, en primer término, de expresarla en función de la longitud de onda y de la temperatura, es decir, determinar la función:

$$I = F\ (\lambda,\ T)$$

y, en segundo término, de calcularla mediante las leyes de la termodinámica y de la electrodinámica.

En 1897 los físicos alemanes Lummer y Pringsheim hallaron para la distribución de la energía del cuerpo negro, en las mediciones que efectuaron para el efecto, los valores reproducidos en la Fig. 1. ([2])

Estos valores concuerdan en parte con las leyes del límite que Jeans y W. Wien, trabajando independientemente el uno del otro, sentaron combinando los principios de la termodinámica y de la electrodinámica. (*)

Sin embargo, la concordancia cesa entre los 4 y 12 μ de longitud de onda *W* y *R*. Cierto que las divergencias que aparecen en dicho intervalo no son grandes, y probablemente no hubieran sido apreciadas con exactitud por físicos menos duchos en el arte de la experimentación que Lummer y Pringsheim. Estos últimos, en cambio, les atribuyeron importancia suma. Negaron toda posibilidad de poder explicarlas en el terreno de la física clásica, no cejando en su posición ni aun cuando, poco tiempo después de sus mediciones, Planck deducía con mayor rigor la ley del límite, de Wien, y Paschen efectuaba experiencias que al parecer armonizaban con las leyes del límite de la física clásica. Y nuevas mediciones, realizadas en condiciones más favorables los llevaron a persistir resueltamente en su afirmación: la experiencia contradice los postulados de las

(*) Son las leyes a que nos referíamos líneas más arriba.

leyes de la física clásica, y no será modificando los resultados experimentales como se salvará la contradicción: lo que se ha de modificar son los fundamentos teóricos mismos. Así le fueron creando la base a la teoría de los *quanta,* ideada por Planck en 1900, la cual, colocándose en franca oposición con la física clásica, admite que la absorción y emisión de los rayos se efectúa de manera discontinua; esto es, que las leyes de la electrodinámica descubiertas y corroboradas en el campo macroscópico, no conservan su validez en el campo microscópico, y que, por tanto, tienen que ser reemplazadas en éste por otras nuevas. Tesis esta última en abierta contradicción con lo que hemos llamado el tercer principio de la física clásica.

Como tanto en el caso del problemático influjo del éter sobre los fenómenos ópticos, que apuntamos más arriba, como en el de absorción de la energía radiante, de que vamos tratando, lo único que puede orientar las teorías en uno u otro sentido es el experimento, se ha acudido reiteradamente a él, procurando en cada nueva repetición que el grado de exactitud fuera en constante aumento. Rubens, Kurlbaum, Paschen y, por último, Warburg, han estudiado, en condiciones experimentales cada vez mejores, la distribución de la energía del espectro calorífico del *cuerpo negro,* y demostrado cómo armonizan los datos experimentales con los postulados de la teoría de Planck.

Una prueba aun más directa de la insuficiencia de los puntos de vista clásicos para penetrar en la naturaleza de la absorción y emisión de la energía radiante la proporcionaron las experiencias llevadas a cabo en los primeros años del siglo en curso por un nutrido núcleo de distinguidos investigadores alemanes sobre los *efectos fotoeléctricos*.

Una de las cosas que más se estudiaba por ese entonces, era cómo cabe provocar el desprendimiento de electrones de la materia mediante el influjo de la luz. Después de los primeros experimentos cualitativos de H. Hertz, se dedicaron con especial ahinco a elaborar, en lo tocante a su terminación cuantitativa, los hechos que caen dentro de este campo, Hallwachs, Lenard, Pohl, Pringsheim, y otros. Que la luz, en su calidad de energía ondulatoria, pudiera actuar sobre la materia, provocar la oscilación de los electrones que se encuentran en ella y, bajo determinadas circunstancias, desprenderlos del complejo atómico, no contradecía desde luego los puntos de vista clásicos. Lo malo que de éstos se sigue como consecuencia necesaria que la energía cinética de los electrones desprendidos de una parte de la superficie de un cuerpo sometida a la acción de los rayos luminosos es proporcional a la intensidad de la luz incidente. Y esto sí que no se verificó en los experimentos, que dieron un resultado completamente diferente. Investigando los efectos fotoeléctricos en función de la longitud de onda y de la intensidad de la luz incidente, no cabe observar al principio, y ni aun con iluminación intensiva, hasta una determinada frecuencia crítica, absolutamente ninguna emisión de electrones. En la figura 2 se ha señalado la energía cinética de los electrones desprendidos por segundo y por unidad de superficie sobre el eje de las ordenadas, y la frecuencia de la luz empleada, sobre el de las abscisas. Se echa fácilmente de ver que en el intervalo de frecuencia comprendido entre 0 y 1,6 no tiene lugar ningún desprendimiento de electrones. Pero cuando ν llega a valer 1,6, éste se inicia de repente. Y la energía cinética de los electrones desprendidos resulta estrictamente proporcional a la frecuencia de la luz incidente. En el primer intervalo el efecto es en absoluto independiente de la intensidad; en el siguiente segundo el número de los electrones desprendidos aumenta proporcionalmente a la intensidad de la luz incidente.

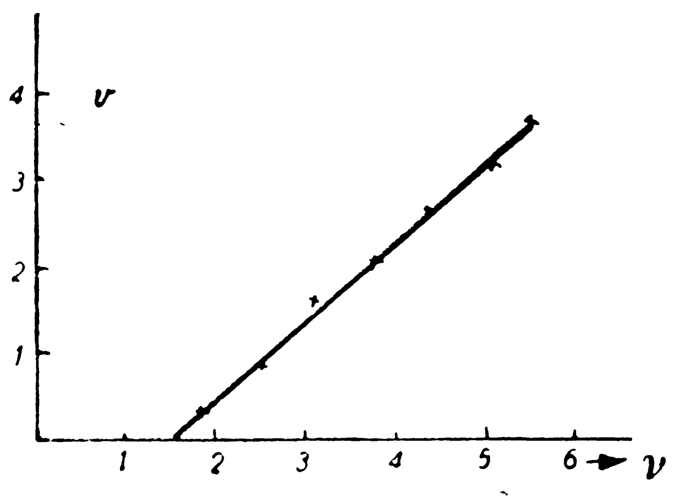


Fig. 2.
La energía cinética V de los fotoelectrones como función de la frecuencia de la luz incidente.

Estudiando la figura 2, a uno se le ocurre que al desprenderse un electrón del complejo atómico, ha de concentrarse en el contorno inmediato al átomo una energía completamente sui géneris, dependiente tan sólo de la frecuencia de la luz incidente. Einstein, en su teoría de los fenómenos fotoeléctricos, ha adoptado precisamente esta hipótesis como punto de partida de sus reflexiones. Los electrones se desprenden de la materia — afirma — sólo en el caso de que la frecuencia de la luz empleada multiplicada por la constante de Planck sea mayor que el grado de cohesión A de aquéllos en el átomo. El límite fotoeléctrico — el punto de inflexión de la curva de la Fig. 2 — se halla en el sitio para el que se verifica:

$$h\nu = A.$$

Contrariamente a lo postulado por la teoría ondulatoria — la distribución proporcional de la energía en el campo ondulatorio —, el estudio de los efectos fotoeléctricos demuestra que la energía se concentra en partes completamente determinadas del espacio. Pareciera que hubiese dos especies de acción recíproca entre el campo ondulatorio y la materia:

1º Una *débil,* por la cual experimentan un movimiento oscilatorio los electrones de *todos* los átomos sometidos al influjo de la luz, y emiten, de acuerdo con el esquema de la teoría de la radiación, ondas esféricas secundarias, las cuales se reunen para formar las ondas secundarias, características de los fenómenos de difracción e interferencia (Teoría clásica de la acción recíproca).

2º Otra *intensiva,* por la cual la energía luminosa obra como si estuviera concentrada en un solo punto, siendo escaso el número de los átomos que absorben la radiación y emiten simultáneamente un fotoelectrón.

A consecuencia de estas observaciones sobre la acción intensiva de la energía luminosa, la teoría ondulatoria de la luz pasa por entero a segundo plano. Se ve obligada a cederle su puesto a la de los cuanta, que renueva, sutilizándola y profundizándola, la teoría corpuscular de la luz de Newton.

Los fenómenos fotoeléctricos conducen, pues, a aplicar dos puntos de vista diversos en el problema de la acción recíproca, entre la energía radiante y la materia, según que se trate de dar cuenta de la *dispersión, difracción* e *interferencia* de la luz, o de los procesos de *absorción* de la misma y de *emisión* de electrones. Para los fenómenos del primer tipo da la pauta la teoría clásica; para los del segundo, la de los cuanta.

Fundándose en el crecido número de fenómenos de interferencia y difracción conocidos, pudo en un principio incurrirse en el error de estimar en más de lo justo la amplitud de la esfera en que tiene aplicación la teoría clásica, y no ver en el fotoefecto nada más que una excepción, de no muy excesiva importancia. No tardó, empero, en observarse un segundo fenómeno, que ponía de manifiesto cómo también en ciertos procesos de dispersión desempeña papel relevante el carácter corpuscular de los rayos luminosos.

Bañando con rayos X cuerpos cristalizados, se observan fenómenos de interferencia como en la dispersión de la luz. Ese efecto fué descubierto en 1912 por el gran físico alemán M. v. Laue, y ha llegado a convertirse en uno de los experimentos más importantes de la física moderna. La longitud de onda o, respectivamente, la frecuencia de la luz con que se bañan los cuerpos cristalizados concuerdan, como en la óptica normal, con las de los rayos primarios, puesto que, según las leyes de la física clásica, al provocar artificialmente la oscilación de los electrones, la frecuencia no puede modificarse. Por tanto, a fin de explicar esta parte de la física de los rayos X, lo mismo que para los fenómenos de interferencia óptica, no tenemos para qué salirnos en lo más mínimo de la teoría ondulatoria de los rayos X. No hay ninguna razón para sospechar en este campo la existencia de efectos cuánticos.

No obstante, hacia 1920 le llamó la atención a A. H. Compton, que cuando se baña con rayos X un cuerpo por muy breve tiempo no logran atravesarlo. Probablemente, pues, y contraviniendo los postulados de la electrodinámica, en este breve espacio de tiempo, se produce un cambio en la frecuencia.

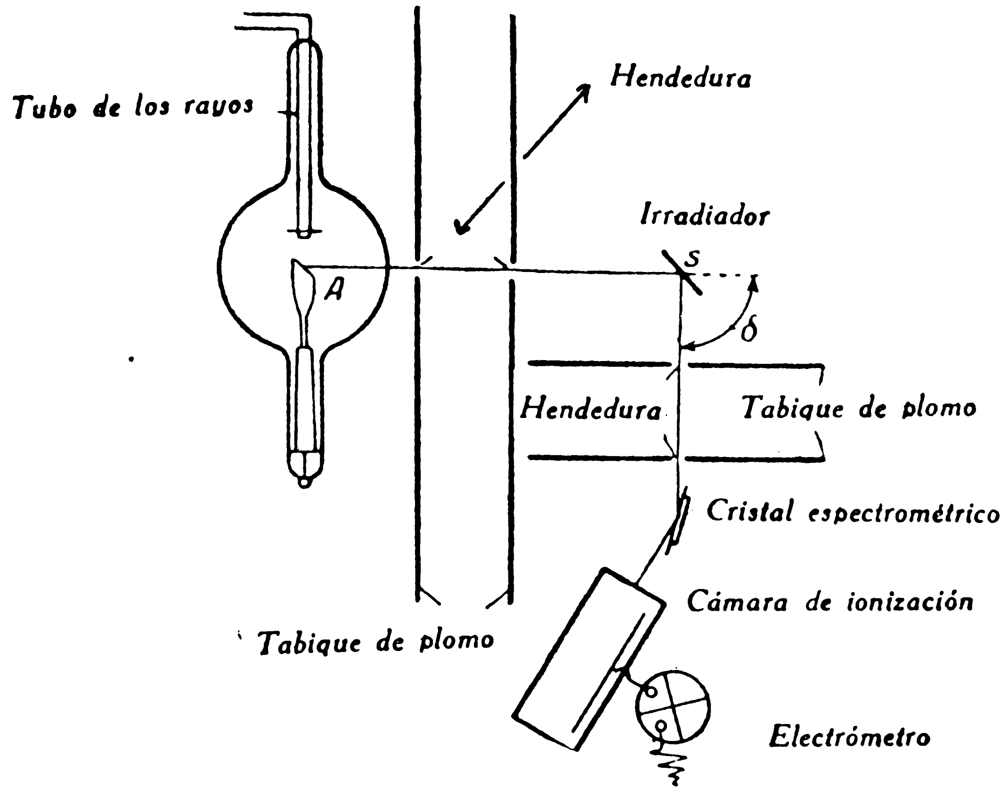


Fig. 3.
Esquema del modo de disponer la experiencia para investigar el efecto de Compton.

Compton se percató desde el primer momento que sus observaciones, de índole puramente cualitativa, no autorizaban a hacer ninguna especie de afirmaciones terminantes. Las conclusiones de amplio alcance sólo podrían sacarse después, cuando se lograse determinar cuantitativamente el cambio sufrido por la longitud de onda de los rayos con que se bañan los cuerpos. Para obtener esta determinación cuantitativa hubo de acudirse al estudio espectroscópico de los rayos, llevado a efecto mediante el aparato reproducido esquemáticamente en la figura 3. ([3])

Del anticátodo A de un tubo de rayos X parten rayos de una longitud de onda perfectamente determinada, se los conduce paralelamente por un sistema de diafragmas y se los hace incidir sobre un cuerpo irradiador S. Los rayos irradiados por este último según el ángulo δ van a parar a un espectrógrafo de rayos X, donde se estudia su longitud de onda.

De atenernos a la electrodinámica clásica, habría que esperar — lo hemos subrayado ya — que los rayos incidentes tengan igual longitud de onda que los primarios. Compton, sin embargo, halló que la radiación incidente presenta al lado de esta frecuencia otra, netamente separada de ella, y que la distancia entre ambas líneas — no desplazadas o desplazadas — depende del ángulo que forme la línea de observación del segundo espectrógrafo con el rayo incidente. La figura 4 reproduce una fotografía de este interesante e importante efecto.

Este efecto contradice nuevamente la teoría ondulatoria de la luz, y muestra que no es posible seguir manteniendo en pie los dos tipos de explicación diferentes que expusimos páginas atrás: el clásico para los fenómenos de dispersión de la luz y el de los cuanta para los de absorción de la misma. Se dan también procesos de dispersión en que resulta inaplicable la teoría ondulatoria. En cambio, el efecto observado podía explicarse perfectamente por la hipótesis de los *cuanta,* como lo pusieron en plena evidencia A. H. Compton mismo y Debye, cada uno de ellos investigando por su cuenta.

Con este descubrimiento el campo de aplicación de la teoría clásica volvía a estrecharse de nuevo. Para dar cuenta de ciertos procesos de difusión nos veíamos precisados a acogernos a la teoría de los cuanta.

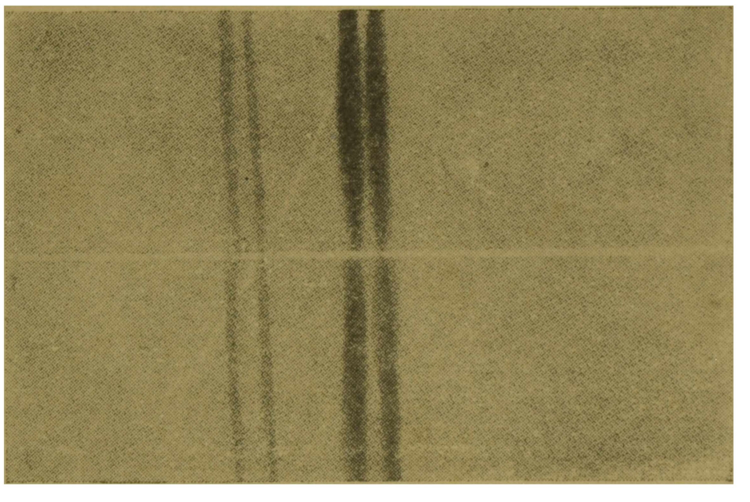


Fig. 4.
Líneas no desplazadas (arriba) y desplazadas (abajo) en el efecto de Compton

Algunos años más tarde, y en un campo que deriva igualmente de la física de los rayos X, se comprobó que no cabe en absoluto separar con una línea divisoria clara los átomos difusores de los absorbentes, y que, antes bien, existe un estrecho parentesco entre los procesos ondulatorios de difusión y los corpusculares de absorción.

Ya hicimos notar que al incidir rayos X en sustancias cristalizadas sólidas, se producen fenómenos de interferencia muy marcados. Nos referimos a las rayas del espectro. La figura 5 podrá dar una idea de lo pronunciadas y fuertes que son. Este carácter tan pronunciado del fenómeno de interferencia nos pone en estado de precisar cuántos de los átomos sometidos a la acción de los rayos toman parte en el proceso de difusión. *Todos* los átomos del objeto sometido a la acción de los rayos contribuyen — según se demuestra — a la difusión coherente y, por consiguiente, al fenómeno de interferencia ([4]).

Lo mismo que la luz visible, también los rayos X presentan un *índice de refracción* determinado; índice que no por pequeño deja de poder medirse con toda exactitud, gracias al alto grado de precisión que han alcanzado los modernos métodos de la espectroscopia de los rayos X, sobre todo por obra de Siegbahn. Y, al

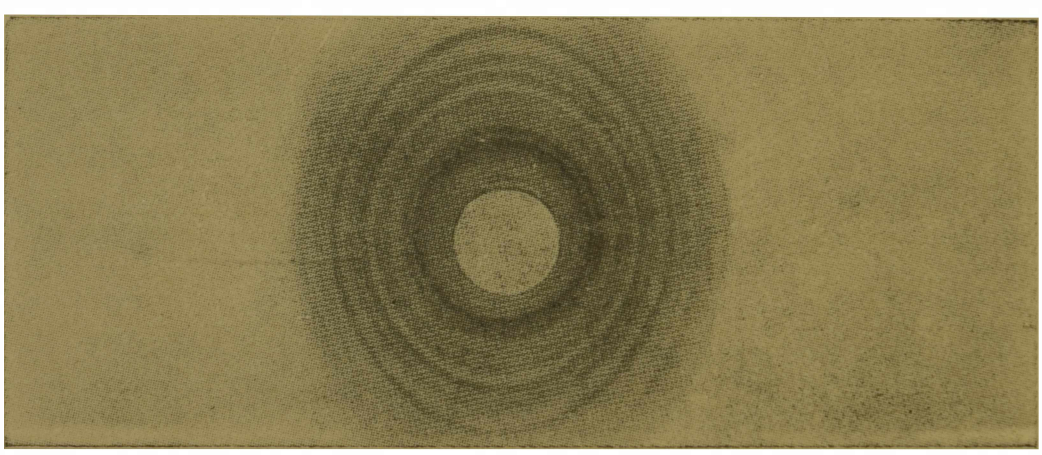


Fig. 5.
Diagramas de difracción de los rayos X en un polvo cristalino.

igual que lo que ocurre con la luz visible, el índice de refracción de los rayos X es una función determinada de la longitud de onda: cuanto más grande es la longitud de onda, tanto más pronunciada es, generalmente, la refracción.

Todos los fenómenos de difracción e interferencia guardan estrechísima conexión con tal índice, el cual puede determinarse también experimentalmente, si la medición se efectúa por la situación de los puntos de interferencia, siempre que las medidas se hagan con la suficiente exactitud.

Si la frecuencia del rayo incidente se aproxima a 1,6, queremos decir, al punto en que, de acuerdo con la figura 2, el cuerpo absorbe de repente los rayos y empieza a emitir fotoelectrones, el índice de refracción presenta anomalías parecidas a las que suelen observarse en la luz visible. No obstante, mientras que de estas últimas cabe dar cabal razón sin necesidad de traspasar los linderos de la teoría ondulatoria, en el caso de los rayos X tropezamos con el escollo — ya lo hicimos notar más arriba — de que los procesos de absorción son aquí de índole *cuántica.*

Con ser pocos los átomos que absorben los rayos, y con estar regulada seguramente en ellos esta absorción por un mecanismo *cuántico,* no deja, con todo, de influir aquélla en los fenómenos de dispersión admitidos por la teoría clásica; dispersión que tiene lugar no solamente en los pocos átomos que absorben los rayos, sino, como lo patentiza el pronunciado carácter de los fenómenos de interferencia, en *todos* los átomos.

Quiere decir entonces que los procesos de dispersión, estudiados por la teoría clásica, y los de absorción, objeto de la teoría de los *cuanta,* no son independientes entre sí; antes por el contrario, media entre ellos estrechísimo lazo de parentesco. A despecho de la aparente diversidad de sus naturalezas, ejercen manifiestamente mutuo influjo los unos sobre los otros. Esta mutua penetración se deja advertir especialmente en los fenómenos de dispersión anómala. Verdad que por ser estos efectos levísimos no resulta tarea fácil el medirlos exactamente. Muchas y fatigosas son las experiencias que ha habido que hacer para lograr un conocimiento seguro acerca de este influjo mutuo, entre las cuales merecen destacarse como dignas de confianza, por el cuidado que se ha puesto en su realización, las efectuadas por Larsson, en el laboratorio Siegbahn de Upsala.

El estudio de los efectos de la dispersión ha conducido a forjar una nueva teoría acerca de la estructura del átomo, la cual en manos de los investigadores alemanes Heisenberg y Schrödinger se ha convertido en estos últimos años en una mecánica racional de los *cuanta.* Sobre ella les informará también el Sr. Thirring en la segunda conferencia. Digamos tan sólo aquí que la observación de los hechos hubo de llevar irresistiblemente al ánimo de los hombres de ciencias la convicción de que para lograr el conocimiento acabado de un átomo no basta atenerse a su estado presente, antes hay que prolongar la investigación a la de todos sus estados posibles. Como que estos estados posibles — virtuales —, sin embargo de no haberse asomado para nada en el área de lo real, deciden absolutamente del modo de ser actual del átomo de referencia.

En suma, las numerosas experiencias efectuadas a objeto de decidirse por una u otra de las concepciones en pugna: la óptica clásica y la de los *cuanta*, han ido cavando un abismo cada vez más hondo entre ambas, Los procesos de dispersión, que estudia la primera, y los de admisión y dispersión, que estudia la segunda, no cabe reducirlos a una misma raíz, si bien entre ambas especies de fenómenos median conexiones estrechísimas. Todas las tentativas hechas para borrar este dualismo y dejar triunfante una u otra de las concepciones en litigio han resultado estériles.

Pero mientras los hombres de ciencia citados se afanaban empeñosamente de este modo en salvar el dualismo surgido en el campo de los fenómenos de radiación, he aquí que el francés L. De Broglie concibe el atrevido pensamiento de encararlo como indesarraigable, como algo esencial y dado por la naturaleza misma, y que es preciso trasladarlo al seno mismo de la materia. Las experiencias descritas más arriba nos imponen la convicción de que no hay movimiento ondulatorio en que no se acuse un cierto carácter corpuscular. De Broglie, inversamente, postulaba que toda partícula en movimiento tiene su tanto de naturaleza ondulatoria. En consecuencia, se esforzó en precisar con mayor rigor las relaciones entre el campo ondulatorio y los corpúsculos. Mientras que antes de De Broglie era costumbre arraigada estudiar las pequeñas partículas errantes dentro de la mecánica corpuscular, nuestro autor, y más tarde Schrödinger, idearon para el caso una mecánica ondulatoria. De ser justo este punto de vista, el contraste que establece la teoría clásica entre campo y materia quedaría borrado definitivamente. A uno y otra habría que encararlos tanto con el criterio corpuscular como con el ondulatorio.

La corroboración experimental de las ideas de De Broglie no se hizo esperar mucho tiempo. Ya en 1926 los físicos Davisson y Germer lograron observar, en los laboratorios de la Bell Telephon Co., fenómenos típicos de refracción e interferencia en corpúsculos en movimiento. Comprobaron que los electrones provenientes de superficies cristalinas se dispersaban preferentemente en determinadas direcciones; y que, por tanto, se produce aquí un efecto parecido al predicho por v. Laue para los rayos X (efecto que descubriera el mismo v. Laue trabajando conjuntamente con Friedrich y Knipping). La fotografía de la figura 6, tomada por R. Wierl, muestra cómo tiene lugar la difracción en los electrones en rápido movimiento de una lámina de cobre. Vense muy claramente en esta figura numerosos anillos de interferencia de nítido dibujo. Por estos anillos puede calcularse tan bien como por las radiografías las dimensiones de las mallas del material que se emplea para las experiencias. Dado lo intenso y pronunciado de estos fenómenos de interferencia — en cuanto a eso nada dejan que desear —, queda fuera de toda duda el carácter ondu-

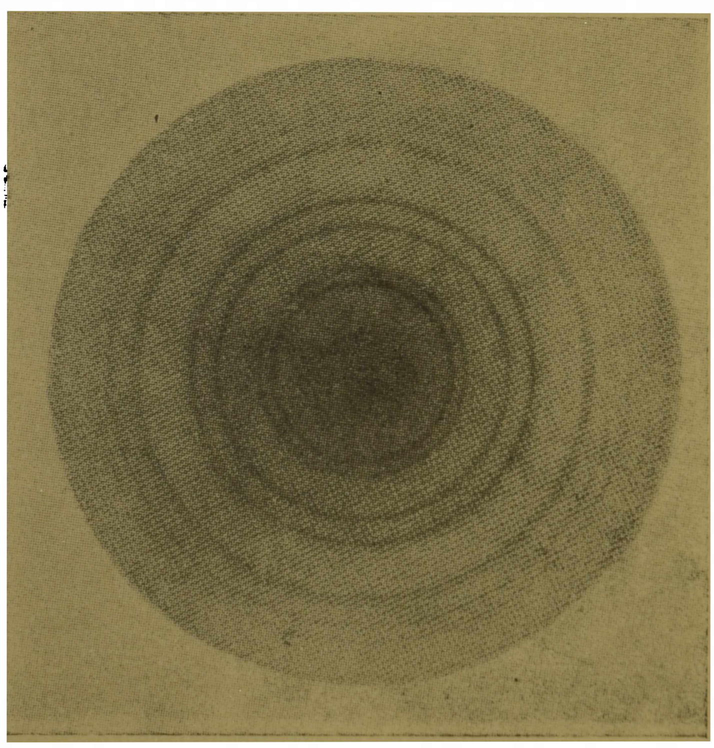


Fig. 6.

latorio de los electrones sometidos a un rápido movimiento [5].

Tal es el más reciente de los pasos hacia adelante dados por la física experimental en estos últimos años. Y no se ha dejado por cierto de elaborarlo en las más variadas direcciones. Se ha venido a comprobar que no sólo los electrones susceptibles de rápido movimiento tienen carácter ondulatorio, sino también los iones y hasta los átomos y moléculas. Utilizando para el estudio de la acción recíproca cristales, y hasta simples mallas de vidrio o de metal rajadas, los iones, átomos y moléculas dan lugar a fenómenos de interferencia.

Merced a estas investigaciones, que a veces ofrecen graves dificultades, llevadas a cabo sobre todo por Kirchner, Rupp, Thomson, Trillat y sus colaboradores, así como O. Stern, se le ha abierto definitivamente camino a la teoría ondulatoria para que pueda penetrar en el seno de la mecánica corpuscular. Merced a ellas también el dualismo que Einstein introdujera en la óptica, se ha extendido a la mecánica de los puntos de masa en movimiento.

Para terminar, resumamos en dos palabras lo que hemos ido exponiendo a lo largo de nuestra disertación.

Los conceptos y sistemas de ecuaciones forjados por la física clásica para interpretar cuantitativamente los resultados de las experiencias no hallan aplicación en una serie de casos que han dado como fruto las recientes observaciones. El experimento de Michelson, y otros por el mismo orden que no hemos mencionado, entran holgadamente en el marco de la teoría de la relatividad restringida y en el de la general, estrechamente enlazada a la primera. Sin duda que para alcanzar tal resultado ha habido que luchar de recio y por largo tiempo; pero a la hora presente ya podemos dar la lucha por terminada. No ocurre, por desgracia, lo mismo con las experiencias tendientes a poner al descubierto la estructura de la materia o la de la radiación, y que han mostrado el carácter doble de todos los fenómenos de propagación de energía. Ni aun hoy hemos llegado a reducirlas a un sistema claro y al abrigo de contradicciones.

Pero sobre los esfuerzos hechos por la física teórica en esta dirección, así como sobre los conceptos y métodos de cálculo que, en su constante afán por acercarse más a los hechos, ha ido excogitando a raíz de cada nuevo descubrimiento, va a informarles a Vds. en la siguiente conferencia el Sr. Thirring, a quien cedo la palabra.

BIBLIOGRAFIA

(1) Cfr., p. e., H. THIRRING: *Die idee der Relativitätstheorie*, 2ª ed., Berlín, Julius Springer, 1922. Para una bibliografía más extensa cfr. la lista del apéndice a la 2ª conferencia.

(2) Para mayores detalles remitimos al lector a los trabajos originales de estos físicos, así como a las siguientes obras: F. REICHE, *Quantentheorie*, Springer, 1921; y sobre todo M. PLANCK, *Theorie der Wärmestrahlung*, Barth, Leipzig. Ver también MÜLLER-POUILLET, *Lehrbuch der Physik*, 2º tomo, Vieweg, Leipzig.

(3) Una exposición más detallada puede leerse en los *Ergebnissen der exakten Naturwissenschaften*, t. 5, p. 267, 1926.

(4) Una exposición más a fondo en MÜLLER-POUILLET, *Lehrbuch der Physik*, t. II, o en el *Handbuch der Physik* (Springer), t. 22, así como en el *Handbuch der Experimentalphysik*. AVG., t. 24.

(5) Para una exposición más a fondo v., p. ej., los *Fortschritte der Physik, Chemie und physikalischen Chemie* editados por A. Eucken, t. 21, p. 183, 1932.

LA TRANSFORMACION DEL SISTEMA CONCEPTUAL DE LA FISICA

Por JUAN THIRRING

En los últimos decenios la física ha ido sacando a luz el rico material de nuevos hechos — en parte inesperados — acerca de los cuales les ha informado a Vds. el Sr. Mark en la primera conferencia de este ciclo. Lo que nos proponemos indagar en la de hoy, es qué modificaciones ha sido preciso introducir en el sistema conceptual de la física, a fin de capacitarlo para dar razón de estos nuevos hechos. Verdad que por ser tema éste de tan vastas proporciones tendremos que circunscribirnos a una exposición llena de lagunas. Lo que, en el mejor de los casos, podré ofrecerles a Vds. será como un esquema salido de manos de hábil dibujante: cuatro trazos que señalen los rasgos más pronunciados del asunto. Los matices habrán de perderse por fuerza.

Unas palabras ante todo sobre el significado de *sistema conceptual de la física.*

Damos este nombre al conjunto de los términos de que hace uso la física teórica: fuerza, impulso, velocidad, temperatura, entropía, energía del campo, superficie ondulatoria, cociente de refracción, inducción, etc. Vocabulario éste tan imprescindible para el físico para describir exactamente los fenómenos del campo de su especialidad, como lo son para nosotros las palabras del idioma común para hablar sobre cualquier asunto de la vida diaria.

Y si vamos al caso, el objeto último de la física no consiste sino en llegar a establecer relaciones entre estos diversos conceptos. Así, por ejemplo, la ley fundamental de la mecánica — la de Galileo-Newton — cabe expresarla del modo siguiente: El producto de la masa de un cuerpo por su aceleración es igual a la fuerza que actúa sobre él. Y el principio de conservación de la energía de la mecánica: La suma de las energía cinética y potencial es constante en un sistema aislado, etc. Por consiguiente, lo que se llama leyes naturales, no son más que fórmulas que expresan el enlace de los diversos conceptos físicos. Y es deber del físico elegir tales fórmulas de manera que traduzcan lo más correcta y exactamente posible los fenómenos, y a la vez que sean las más simples. Por lo demás, al elegir los conceptos que intervienen en tal descripción el físico no se ve obligado a sujetarse a alguna regla que le sea prescripta de antemano. Y digamos más: hasta está en su derecho de forjárselos como se le antoje. Si la experiencia confirma sus conceptos y las leyes formuladas con su ayuda, unos y otras se incorporarán al acervo de los conocimientos seguros. En caso contrario, ya se encargará el tiempo de ir desarraigándolos paulatinamente del campo científico.

Este amplísimo margen de libertad de que goza la física en la elección de sus sistemas conceptuales trae consigo la siguiente notable situación, que habría que tener más presente de lo que en realidad se tiene. La física — que se ocupa de los fenómenos de la naturaleza inanimada; de las interacciones de la fuerza, la materia, la radiación, etc., — es, por su objeto, una especie de ciencia universal. En igualdad de circunstancias un mismo fenómeno físico debe verificarse, no sólo en América como en Europa, sino también, en cualquiera de los más remotos astros que pueblan el universo y exactamente de la misma manera que en la Tierra. Pero esta universalidad, esta validez cósmica, se refiere a los fenómenos naturales, y no a la ciencia de ellos; a los objetos que estudia la física, y no a ésta como cuerpo de doctrinas.

La física como cuerpo de doctrinas es ciencia eminentemente humana, de rasgos antropomórficos. Cabe perfectamente en lo posible que su validez no se extienda a todo el universo. Si hay otros planetas habitables fuera de la tierra — hipótesis bastante plausible, dadas los 10^{23}, más o menos, de estrellas fijas diseminadas en el universo —, y hay en ellos seres vivos cuyo desarrollo espiritual sea parecido al del hombre, es probable que cada uno de estos mundos se haya forjado su propia física, muy distinta de la nuestra. Tan distinta que ni imaginarla podemos, ya que nunca lograremos desprendernos del todo de las nociones primordiales que se nos van inculcando desde la infancia, y que acaban por tomar firme arraigo en nuestro espíritu. A lo sumo, de las ramas más alejadas del tronco primitivo de nuestras ideas podrán ir brotando nuevos conceptos. Pero no serán esas modificaciones en la periferia de nuestra física las que nos acerquen a la de los supuestos habitantes de otros planetas. Esta puede muy bien discrepar de la forjada por nosotros por los fundamentos mismos sobre los que se la ha levantado.

Siendo así, se equivocan un poco los que creen que la labor del físico consiste en indagar las leyes, al modo como la del geógrafo en explorar tierras desconocidas. No se dan cuenta que no es lo mismo. Porque las tierras que va a explorar el geógrafo, digamos, por ejemplo, las que rodean el polo antártico, ya están allí, desde siempre, independientemente de la voluntad del hombre, con su constitución determinada y fija — prescindamos de los cambios que puede sufrir su clima —, la cual se revelará por modo inequívoco al hombre de ciencia no bien logre penetrar hasta ellas. Las leyes naturales, en cambio, no están dadas y fijadas de una vez por todas: es el físico quien las crea. Lo único que nos muestra de una manera inequívoca la naturaleza son los fenómenos, y hacia éstos se endereza la labor investigadora del físico experimental, quien, desentendiéndose enteramente de las cuestiones de teoría, se limita a estudiar cómo transcurren ciertos fenómenos físicos bajo determinadas condiciones experimentales. Diferente es el proceder del teórico. Hay en su labor, sin duda, su parte de pura observación; pero hay, asimismo, otra cosa que habría que comparar más bien con lo que hacen el inventor, el poeta o el compositor. Su fantasía despliega su actividad cuando se ve precisado a forjar hipótesis sobre el mecanismo interno — inaccesible a la observación directa — de los fenómenos (piénsese, por ejemplo, en el modelo del átomo de Bohr). Y por otro lado, va creando o inventando los conceptos con cuyo auxilio es dable describir los fenómenos naturales: en otros términos, va acuñando los vocablos en que han de formularse las leyes que presiden aquéllos.

Recordaré a título de ejemplo que en tiempos de Faraday y Maxwell al lado de los conceptos, perfectamente inteligibles, de la energía eléctrica y magnética del campo se habían introducido otros de orden más abstracto, como ser: desplazamiento eléctrico, inducción magnética, tensiones de Maxwell, que, sin embargo, para los físicos de hoy, han llegado a constituir una ayuda muy necesaria, como que sobre ellos versan las ecuaciones diferenciales de Maxwell acerca del campo electromagnético. Sin estos nuevos conceptos *nosotros* nos veríamos en grandes apuros para describir los fenómenos electromagnéticos. Subrayo expresamente *nosotros*. La física de los habitantes de uno de los planetas del sistema de Sirio podría pasarse perfectamente sin tales conceptos.

La física teórica es, pues, fruto exclusivo del espíritu humano; y fruto accidental, en igual sentido que lo es todo el mundo de los seres vivos de nuestro planeta. Pues también el sistema conceptual de la física teórica — lo recalca reiteradamente Mach — se ha ido formando por una especie de selección natural. La ciencia va adoptando los conceptos que resultan útiles; los demás van a parar al gran canasto de los papeles de desperdicio, y con el andar del tiempo van cayendo en el olvido. Claro está que no hay seguridad alguna que semejante selección acierte siempre con lo justo. Es muy posible que pase ante más de una idea buena sin prestarle atención. Puede, asimismo, que muchos conceptos los vayamos arrastrando con nosotros sólo por rutina como conservamos en nuestras casas muebles fuera de uso, porque estamos acostumbrados a tenerlos siempre ante los ojos.

En resumidas cuentas, el tino en la selección queda librado al buen instinto que ha de poseer todo científico. Y de los conceptos y teorías elegidos se mantendrán en pie por largo tiempo los que realmente se presten para describir los fenómenos naturales.

Pero sea como quiera, aciértese o no en la elección de los conceptos, el sistema integrado por éstos últimos se halla en constante evolución. A medida que se va ensanchando la esfera de nuestros conocimientos sobre los fenómenos naturales, deben ir poniéndose al servicio de la teoría nuevos conceptos cada vez más amplios. Más amplios y, también, más abstractos; puesto que la experiencia enseña que la complicación de las teorías marcha de la mano con el creciente grado de abstracción de los conceptos. Estos tienden a hacerse cada vez menos intuitivos.

En los comienzos de la física teórica, en los tiempos de Galileo y Newton, hacíase uso preponderantemente de conceptos derivados de la intuición y percepción sensitiva inmediatas. Citemos tan sólo los conceptos de: velocidad, inercia, fuerza, masa, peso, trabajo, temperatura, y otros por el mismo estilo. Conceptos éstos a los que puede asignarles, sin más, un sentido aún el hombre ajeno a las especulaciones del físico. Pero con la marcha ascendente del grado de sutileza de los métodos matemáticos de la física se fué viendo la conveniencia de acudir a otros conceptos derivados de los conceptos básicos elementales por operaciones matemáticas: producto de abstracción, pues. En el cuadro adjunto agrupamos algunos ejemplos, tomados al azar, de conceptos físicos pertenecientes a los dominios parciales de la mecánica, electricidad y la teoría del calor. Arriba están los conceptos básicos elementales y yendo hacia abajo los derivados por una abstracción ulterior de los mismos. A los términos por encima de la línea aun el profano podrá darles algún sentido; pero los colocados debajo de ella, les resultarán vacíos de significación aun a muchos que siendo cultísimos en otras materias no tengan igual versación en la física.

MECÁNICA	ELECTRICIDAD	TEORÍA DEL CALOR
Velocidad	Carga	Temperatura
Masa	Energía del campo	Cantidad de calor
Fuerza	Tensión	Calor específico
Densidad	Corriente	Volumen específico
Energía	Resistencia	Presión
Momento de inercia	Anticonductibilidad	Politropismo
Tensor tensoral	Operador de resistencia	Adiabatismo
Función de Lagrange	Potencial vectorial	Coeficiente termodinámico
Función de Hamilton	Vector de radiación	Entropía
Integral de la acción	Tensiones de Maxwell	Energía libre
Variable canónica	Impulso del campo	Potenciales de la materia

Tal ramificación y sutilización del sistema conceptual de la física, que se ha cumplido gracias a que progresivamente ha ido abandonándose el terreno de la empiria y remontándose a abstracciones cada vez más altas, no tiene nada que ver con la crisis de que venimos hablando. En las demás ciencias no ha dejado de verificarse idéntico proceso. En las matemáticas, en las otras ramas de las ciencias naturales fuera de la física, en la biología y no menos en las ciencias del espíritu — la filosofía, el derecho, la sociología — el sistema conceptual se va ampliando y sutilizando de más o menos igual manera.

A cada una de estas ciencias cabría compararla con un arbolillo que siempre estuviese produciendo nuevas yemas y ramas: con su crecimiento váse así complicando más y más su ramazón. Y tampoco faltan en el árbol de nuestro símil las ramas secas: son los conceptos e hipótesis reconocidos como inútiles: a golpes se los separa del tronco y se los echa en el olvido.

El crecimiento orgánico del sistema conceptual de una ciencia es un fenómeno por entero normal, y que se prosigue aun en tiempos no críticos. Pero lo notable en el desarrollo de la física en los últimos decenios, es que el arbolillo se ha revestido de repente de formas raras, y que ya no continúa creciendo conforme a la misma línea de antes: apartándose de ésta ha orientado su crecimiento por una nueva vía.

El desenvolvimiento de la física por este nuevo camino se abre, en cuanto toca a la física experimental, hacia el año noventa y tantos del siglo pasado. Alrededor de 1895 — como ya lo señaló el Sr. Mark en la conferencia anterior — los físicos hallábanse firmemente persuadidos de que, en lo esencial, su ciencia ya había alcanzado el término de su perfección. Difícilmente quedaba aún a sus ojos algo de importancia capital por aprender. Solamente para los retoques de pormenor dejaban el campo abierto. Pero la realidad no es una novela. En la realidad, harto a menudo, cuando ya creemos tocar el feliz desenlace, sobreviene de repente algún contratiempo con el que no contábamos y que nos agua el contenido final. Esto mismo hubo de acontecerles a nuestros físicos. En el momento en que ya se consideraban al fin de la carrera, las cosas tomaron de súbito un giro por entero inesperado. Surgieron nuevas e imprevistas complicaciones. Una fuerte ansiedad invadió a los hombres de ciencia por las cuestiones embarazosas que se veían llamados a resolver. Y lo peor que ni aun hoy vemos ninguna perspectiva de salida de este estado de cosas.

La hora decisiva para los destinos de la física suena en 1895, como que en este año se realiza, por C. W. Röntgen, de Würzburg, el memorable descubrimiento de los rayos X. Las radiaciones secundarias producidas por los rayos catódicos son capaces de atravesar los cuerpos opacos y de iluminar una pantalla fluorescente colocada detrás de ellos. Lo que este descubrimiento ha significado para la medicina, huelga decirlo. Para la física ha sido algo más que un descubrimiento de valor decisivo. Instaura en ella — gracias al impulso que imprime a la investigación física ulterior — una época completamente nueva. En efecto, el descubrimiento de Röntgen despierta el interés del físico por las substancias cuyas radiaciones provocan la fluorescencia en los cuerpos en que penetran.

El físico francés Becquerel, de París, encuentra que las sales de urano emiten, en forma enteramente espontánea, radiaciones de ese tipo. Y continuando estrictamente las experiencias de aquel, los esposos Curie llegan a descubrir en 1898 esa substancia prodigiosa que es el radio. Las ulteriores conquistas en este terreno se las debemos a los ingleses, en primera línea a Rutherford. Este último y Soddy ponen en claro la composición del átomo.

Las experiencias efectuadas con rayos radioactivos lo llevan a Rutherford a su concepción del modelo nuclear del átomo. Apoyado en éste y en la hipótesis de los *cuanta*, de Planck, Bohr se lanza a descifrar los misterios del espectro, empresa en que el éxito le sonríe. Entretanto, Laue descubre las interferencias de los rayos X, aportando así nuevo material empírico en que habría de ejercitarse la sagacidad de los teóricos. Se muestra, especialmente por Sommerfeld, que estos espectros producidos por los rayos X se ajustan a maravilla a las leyes espectrales formuladas por Bohr. A partir de entonces, es decir, desde más o menos 1913, empieza la lluvia de observaciones, especulaciones, teorías, experimentos, etc., desencadenada por la llamada teoría de los *cuanta;* impetuosa corriente que van alimentando con sus continuos aportes los físicos y, en parte, los químicos. Y paralelamente a esta corriente se desarrolla la teoría de la relatividad, que asoma a la vida en 1905, y a la que 10 años más tarde su mismo creador, Einstein, ya le coloca en cierto modo su broche final, al formular la teoría de la relatividad general.

Resumamos. Sea cual fuere el valor de estos descubrimientos y teorías, lo cierto es que lo que llevamos corrido desde 1895 acá, ha sido para los físicos — como, por lo demás, también para los químicos y técnicos — una época fecundísima en sorpresas y sugestiones. Nos ha ido trayendo descubrimiento tras descubrimiento, a cual más pasmoso. Y ni aún hoy es posible prever cuándo llegará a agotarse su vitalidad.

Juzgados tan sólo por el grado de novedad revolucionaria que encierran, y sin contraernos al campo especial de la física, los descubrimientos hechos en el período de investigación comprendido por los 3 ó 4 últimos decenios, pueden dividirse quizás en tres clases. Pero antes de entrar a tratar de ellos, subrayemos un fenómeno notable.

De los nuevos descubrimientos los que más abiertamente parecen contradecir los dogmas de la llamada física clásica, tan abiertamente que hasta al profano le salta a la vista la contradicción, resultan ser — si nos atenemos en ellos a nada más que a los conceptos que les sirven de base — de lo menos revolucionarios que imaginar quepa; a un análisis más detenido se revelan más bien como de todo punto inocuos. Contemplada desde este aspecto, la teoría de la relatividad especial y general, que el profano considera a menudo como el colmo del absurdo y el término último a que pueda atreverse en su temeridad el pensamiento, tiene que descender algunos peldaños de la reputación de revolucionaria que se le ha ido labrando. En verdad, nada más que a medias lo es. En cambio, muchos de los fenómenos de cuya consideración parte la física de los *cuanta*, no obstante su apariencia por entero insignificante y salirse apenas de la esfera de lo observable, han obrado una completa revolución en nuestro sistema conceptual y llevado a la física a una especie de callejón sin salida, en que se encuentra todavía actualmente, y del que no saben cómo salir ni los más grandes cerebros de nuestra ciencia.

Como ejemplos de los conocimientos de la primera clase consideremos las interesantísimas teorías que hemos obtenido mediante el estudio de los fenómenos radioactivos. Las conquistas logradas en este terreno han conmovido y precipitado en el absurdo uno de los dogmas angulares de la física y la química, objeto de fe tan sólida hasta fines del siglo pasado, que el que hubiese osado dudar de él, habría atraído sobre sí el ridículo. "Los elementos químicos — así reza tal dogma — son substancias simples de peso atómico determinado; y, en principio, no cabe transformarlos los unos en los otros". Por lo que sabemos hoy ambos asertos de esta ley son falsos. En primer lugar, cabe transformar unos elementos en otros; actualmente se conocen, fuera de las tres series transformativas radioactivas, otros tipos de transformación, que es dable suscitar artificialmente. En segundo lugar, dista muchísimo de ser cierto que los elementos sean substancias simples; la mayoría de ellos son más bien *mezclas isotópicas;* constan de componentes de distinto peso atómico pero de igual número de cargas nucleares. Uno de los dogmas cardinales de la química del siglo XIX queda, pues, tan rotundamente desmentido por las nuevas luces que hemos alcanzado sobre el particular, como lo queda una falsa versión en los diarios al hacerse la rectificación de rigor, fundada en los hechos, a que obliga la ley de prensa.

Así y todo, lo que hemos ido conociendo últimamente acerca de la isotopía y la transformación de los elementos es, en el respecto puramente conceptual, de lo más inocuo que haya aportado la física en los últimos decenios. Sin duda que ahora sabemos sobre la estructura de la materia *más* que antes; pero en cuanto a nuestra manera de pensar seguimos en las mismas; estos recientes descubrimientos no han producido un desquiciamiento en nuestras ideas. ¿Qué nos enseñan, efectivamente, en el fondo? Pues que los átomos no son los últimos componentes indivisibles de la materia. ¿Y eso no cabía ya inferirlo de la teoría de los iones? No para revolucionar nuestra concepción sobre la estructura de la materia, sino para simplificarla, es para lo que han servido los descubrimientos de que hablamos. En último análisis, los elementos originarios de que se componen todos los cuerpos materiales son los electrones y los protones: éste es el esquema simple que nos ponen ante los ojos.

Seguimos, pues, avanzando cómodamente por el mismo camino de antes: no nos vemos obligados a caminar por otros nuevos. Si tales descubrimientos fueran el único fruto de la labor investigativa desarrollada por los físicos en los últimos decenios, cabría hablar tan sólo de una época de progresiva clarificación y afinación de las ideas, no de una crisis. Con sobrado motivo, tampoco el Sr. Mark los incluyó en la conferencia anterior, por más interesantes que sean en otros aspectos, en el número de los hechos experimentales que han llegado a conmover la física clásica.

Por la dosis revolucionaria bastante elevada que contiene, merece colocarse por encima de las observaciones sobre la estructura de la materia que nos han ocupado en las líneas anteriores la teoría de la relatividad, basada — según se explicó en la primera conferencia — en el resultado negativo de la experiencia de Michelson.

Lástima que en la presente conferencia no podamos dedicarle más de un cuarto de hora. Debemos renunciar a todo propósito de perfilar siquiera su esqueleto ideológico. No importa. Lo que después de todo nos interesa de ella para las consideraciones que venimos haciendo no es tanto su ideología, como la influencia que ha ejercido en el sistema conceptual de la física.

Muchos de Vds. saben seguramente que las reflexiones de Einstein han tenido por primer efecto que se revisaran los conceptos de espacio y tiempo. Minkowski ha resumido los resultados obtenidos en esta dirección en la siguiente tesis: "El espacio por sí y el tiempo por sí han perdido todo significado; lo único que lo tiene es la unión de ambos, lo que designamos con el nombre de *mundo*."

Esta somera afirmación le resultará enteramente incomprensible a más de uno de Vds. No obstante, antes de intentar aclararles el sentido de ella, me gustaría darle una forma que por lo menos el matemático entendiera sin mayor dificultad.

Analizada la concepción de Minkowski a la luz de la teoría especial de la relatividad, significa lo que sigue:

Ya en la física clásica las leyes de la naturaleza debían ser formuladas de tal modo, que la relación entre las ecuaciones que las traducían permaneciesen invariables cuando se hacía girar el sistema de coordenadas, esto es, cuando se procedía a una transformación ortogonal linear de las tres coordenadas espaciales. La teoría de la relatividad exige además lo siguiente: Si además de las tres coordenadas del espacio x_1, x_2, x_3 introducimos una cuarta x_4 — ict, las leyes físicas deben ser de índole tal, que permanezcan invariables al hacer la transformación ortogonal linear de estas cuatro coordenadas, x_1, x_2, x_3, x_4. Exige asimismo que la velocidad de la luz sea constante. En estas dos proposiciones estriba sustancialmente la teoría de la relatividad, en cuanto se refiere al concepto de espacio-tiempo.

Lo malo que este modo de formular la teoría de la relatividad sólo es accesible a los matemáticos. ¿Cómo aclarársela al común de los mortales que no lo son? Voy a tratar de hacerlo, aunque pido indulgencia de antemano por si fracaso en la tentativa.

Empecemos con una sencilla consideración que cae por entero dentro del ámbito de la concepción clásica no relativista. En la fig. 1 se ha trazado una recta horizontal y encima se han señalado puntos A y B, a 6 cm. de distancia el uno del otro. Y he aquí lo que afirmamos:

1º B está más alto que A.

2º La distancia entre A y B es de 6 cm.

Veamos ahora cuál de estas afirmaciones merece el calificativo de absoluta, y cuál el de relativa. La primera afirmación es válida si la recta trazada en la figura es horizontal. Pero puede hacerse también falsa si tenemos la figura inclinada; y aun cuando la mantengamos en posición perfectamente horizontal, si se nos ocurre, p. ej., referir la designación de "más alto" y, respectivamente, "más bajo", no al horizonte del lugar en que nos hallamos, sino al de otro lugar de la tierra. Sea, por ej., la recta punteada una paralela al horizonte de

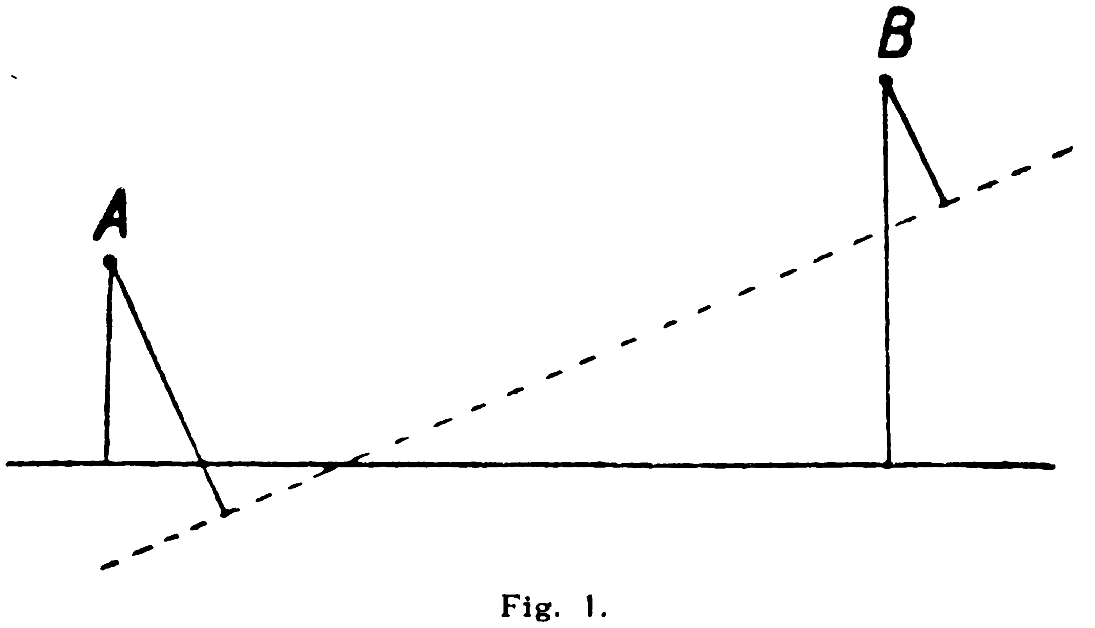


Fig. 1.
Relatividad de los conceptos de distancia horizontal y distancia vertical.

algún lugar del Asia, al cual queremos referir nuestras afirmaciones. En tal caso hay que invertir los términos de la primera afirmación: A está más alto que B.

La primera afirmación es, pues, relativa: sólo posee validez para determinado sistema de referencia. Por el contrario, la segunda afirmación es absoluta, invariable:

se cumple para cualquier sistema de referencia. Echemos ahora mano a los recursos que nos ofrece la geometría analítica elemental aprendida en el colegio nacional. Con su auxilio cabe formular también así nuestro asunto: las relaciones entre A y B.

Fijemos la posición de los dos puntos mediante sus coordenadas ortogonales, y sean x_1, y_1; x_2, y_2 sus respectivas coordenadas en el sistema cuyo eje de abscisas se encuentra en el plano horizontal de nuestro lugar; y x_1' y_1' y x_2' y_2' sus respectivas coordenadas en el sistema cuyo eje de abscisas sea paralelo al plano horizontal del lugar lejano del Asia.

Con estos supuestos, resultan las siguientes relaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x_2 - x_1 \neq x_2' - x_1' \\ y_2 - y_1 \neq y_2' - y_1' \end{array}\right\} \begin{array}{l} r^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = \\ = (x_2' - x_1') + (y_2' - y_1')^2, \end{array} \qquad (1)$$

que en palabras expresan lo siguiente: La distancia horizontal y la vertical de A y B resulta diferente en ambos sistemas de referencia; en cambio, la distancia AB que no se toma sobre ninguno de los dos ejes, debe tener siempre el mismo valor r, independientemente del sistema de referencia. Matemáticamente esto se expresa así: Las diferencias entre las coordenadas no permanecen invariables cuando se hace girar el sistema de coordenadas; en cambio, la forma cuadrática derivada de ellas: $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = r^2$ permanece constante. Tal afirmación rige para el espacio de dos dimensiones, que es el que tomamos en cuenta aquí; para el de tres, las constantes se expresan mediante una fórmula de tres términos análoga a la precedente.

O hablando otra vez en el lenguaje común: los conceptos de distancia horizontal y vertical no tienen un significado absoluto, independiente. Lo que se afirme sobre ellas sólo goza de validez relativa: relativamente a un determinado sistema de referencia. Significado absoluto, independiente, lo tiene, por el contrario, lo que se afirme de la distancia espacial entre dos puntos.

Para estas consideraciones, como hemos dicho, no tenemos que salirnos para nada del terreno de la geometría clásica. Pasemos ahora a las otras análogas que cabe hacer dentro de la teoría de la relatividad especial. Pero dado que en las ecuaciones de esta última interviene siempre la velocidad de la luz c — ya vimos más arriba cómo Minkowski sustituía x_4 por ict —, que alcanza el enorme valor de 3.10^{10} cm. por seg., necesitamos disponer de un poco más de espacio para nuestro ejemplo. Vamos a operar a continuación con dimensiones cósmicas.

Imaginemos diversos observadores distribuídos en las estrellas del espacio, y designemos siempre, a fin de ahorrar palabras, con el nombre de la estrella fija correspondiente al eventual planeta habitable del sistema. Supongamos ahora que ocurra en el universo un suceso cualquiera rigurosamente determinado espacial y temporalmente, un llamado suceso-punto; p. e., esta noche a las 21 horas 35½ min. se produce de repente una erupción del Vesubio. Llamémosla el suceso *A*. Imaginen ahora Vds. que a las 24 horas explota un polvorín en un planeta de Sirio. Sea éste el suceso *B*.

He aquí lo que se podría afirmar de estos dos sucesos de acuerdo con la concepción del espacio y el tiempo en vigor antes de la teoría de la relatividad:

La distancia espacial entre los lugares en que ocurren los dos sucesos tiene un valor perfectamente determinado: los $8{,}21 \times 10^{18}$ cm. que median entre Sirio y la Tierra. La distancia temporal entre los dos sucesos también lo tiene: es $t=24$ horas, considérese la cuestión como se quiera.

Podrá disputarse si el suceso B ocurre *más arriba* o *más abajo* en el espacio, que eso depende de cómo se coloque un plano horizontal en aquél, y de cuál cara de éste se designe como arriba, y cuál como abajo. Pero que A ocurre *antes* que B — justo 24 horas antes —, y que la distancia entre los lugares en que ocurren A y B respectivamente, es de $r=8{,}21 \times 10^{18}$ cms., eso cabe afirmarlo con carácter absoluto.

Así se encaraba el problema en la concepción imperante con anterioridad a la teoría relativista. Escuchemos ahora cómo razonan los adherentes a esta última para rebatir el carácter absoluto atribuído por sus adversarios a la segunda afirmación.

Perdonen, señores, pero Vds. van un poquito lejos en lo que afirman. La distancia entre A y B y el intervalo de tiempo entre los sucesos que ocurren en uno y otro punto son, a no dudarlo, independientes de la posición del sistema de referencia, mientras lo supongamos a éste en reposo; no así si lo suponemos en movimiento. Imaginemos para simplificar el asunto que el movimiento relativo de Sirio con respecto del sol sea despreciable. En tal caso los observadores de Sirio y la

Tierra coincidirán en que el suceso *B* ocurre 24 horas después de *A*. No es ésta, empero, la única hipótesis que quepa.

Imaginen Vds. que las explosiones *A* y *B* son observadas también desde una tercera estrella, v. gr., desde Prokión, la cual supondremos — siempre para los fines de nuestro razonamiento — que se mueve a gran velocidad con respecto de Sirio y de nuestro sistema solar. Lo que sucedería entonces según la teoría de la relatividad — que lo halla mediante una serie de cálculos que no puedo reproducir aquí —, sería lo siguiente. Aunque el observador situado en Prokión calculara correctísimamente el tiempo que ponen los rayos luminosos que parten de Sirio y de la tierra en llegar hasta él, obtendría para el intervalo entre los sucesos *A* y *B* un valor t', diferente de 24 horas. Más aún; hasta podría suceder, si el supuesto movimiento de Prokión fuera muy rápido, que, fundado en sus cálculos, dicho observador concluyera que el suceso *B* ocurre *antes* que *A*. Y asimismo para la distancia espacial el observador de Prokión hallaría un valor r', que diferiría mucho 8,21 x 10^{18} cm. Y un tercer observador situado en la estrella de la constelación de Orión, hallaría a su vez para los intervalos espacial y temporal entre los dos sucesos, valores completamente diferentes; por ejemplo: r'' y t'', respectivamente. ¡Qué tremenda confusión, al parecer, pues! Hay un punto, no obstante — nos sigue enseñando la teoría de la relatividad — en que estos tres observadores, y cualesquiera otros que llevasen a cabo mediciones exactas, estarían perfectamente de acuerdo.

Si formamos, en efecto, la expresión:

$$s^2 = r^2 - c^2\ t^2, \tag{2}$$

resulta:

$$r^2 - c^2\ t^2 = r'^2 - c^2\ \ t'^2 = r''^2 - c^2\ t'' = \tag{3}$$

(donde c indica como de costumbre la velocidad de la luz $= 3 \times 10^{10}$ cms. seg.).

Recuerden ahora lo que se expuso más arriba. Vimos cómo, aun sin salirnos de la geometría no relativista, ciertas expresiones, p. ej., las diferencias mismas entre las coordenadas, es decir, la distancia horizontal y vertical, tenían valores que dependían de la posición del sistema de referencia, mientras que la distancia espacial misma permanecía constante pese a las rotaciones que se imprimieran a dicho sistema. Análogamente, también conforme a la teoría de la relatividad especial los intervalos de espacio y tiempo entre dos sucesos no dependen de la posición del sistema de referencia, pero sí del movimiento de éste. Sólo la expresión s^2, resultado de combinar de un modo determinado los valores r y t, es constante. Y eso es lo que quiere dar a entender Minkowski cuando afirma: "El espacio por sí y el tiempo por sí han perdido todo significado; lo único que lo tiene es la unión de ambos, lo que designamos con el nombre de mundo".

Es de subrayar, sin embargo, a fin de evitar errores de interpretación en que se incurre frecuentemente, que no porque el tiempo pierda su independencia en la teoría de la relatividad especial se lo equipara con las tres dimensiones del espacio. Bien muestra que es todo lo contrario la fórmula:

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$$

Con perder, como pierde, su independencia el tiempo sigue desempeñando, como antes, un papel destacado, al paso que ninguna de las tres dimensiones del espacio sobresale entre las restantes.

La teoría de la relatividad especial ha ensanchado, pues, el sistema conceptual de la física, introduciendo en él, entre otras cosas, el concepto de *mundo*, que engloba los de espacio y tiempo. Prosiguiendo la labor de la anterior, la teoría de la relatividad general ha puesto en nuestras manos las siguientes ideas fundamentales:

La esencia de la gravitación consiste en causar una curvatura en la multiplicidad espacio-temporal que llamamos *mundo*. Y esta curvatura es tanto más pronunciada, cuanto más intenso es el campo gravitatorio. Si suponemos puntos alejados infinitamente de todas las masas, tal curvatura será allí infinitamente pequeña.

Vds. no ignoran seguramente que esta concepción de Einstein ha chocado con no pocas resistencias. Se ha objetado que un espacio curvo — y más aún un tiempo curvo — es absurdo; que la teoría no está exenta de contradicciones internas, etc., etc. No tengo tiempo de ponerme a discutir este punto, y de aclararles a Vds. cuál es el sentido concreto de la curvatura del *mundo*. Con tanto mayor motivo puedo eximirme de tratar aquí este problema, cuanto que en la cuarta conferencia de este ciclo se enterarán Vds. de mayores pormenores sobre el particular.

Lo que sí quisiera, es caracterizar en dos palabras la posición de la física teórica frente a esta crítica.

Lo mismo que todos los estudiosos, los físicos cuyas opiniones hacen ley discrepan entre sí en muchos puntos, y ponen mayor o menor ardor en zanjar sus mutuas discrepancias. Sin embargo, nadie que haya penetrado bastante a fondo en la teoría de la relatividad abriga duda alguna sobre la admisibilidad y justificación lógica de los puntos de vista sustentados por ella. Y hay más aún: y es que de un tiempo a esta parte abundan los físicos que han dado en pensar que, "la teoría de la relatividad es cosa demasiado cierta para seguir siendo interesante todavía". Por eso, al crítico de la teoría de la relatividad — por lo general procedente de campos diferentes al de la física —, que nos venga con la advertencia: "Vamos, señor profesor, confiese Vd. que con la teoría de la relatividad su ciencia de Vd. se ha deslizado en un terreno resbaladizo y, filosóficamente hablando, impugnable en más de un punto", sólo cabe replicarle, "Señor colega, ojalá no pasaran de ahí las dificultades con que nos debatimos, que entonces dormiríamos tranquilos."

Son otras las dificultades que traen preocupado al físico. De ellas hablaremos en seguida. Lo único que quisiera hacer notar todavía a fin de poner punto final al capítulo sobre la teoría de la relatividad, es lo siguiente.

Si bien los fenómenos de la naturaleza se nos ofrecen de una manera inequívoca, el modo de describirlos la física puede variar — y en puntos esenciales — muchísimo. Así, pongo por caso, la teoría de la relatividad, al tratar el problema de los planetas, opera con conceptos de todo punto ajenos a la teoría física newtoniana; por ej.: la curvatura del mundo, el tensor de la curvatura, la línea geodésica en el R_4, etc. Merced a esta nueva terminología el concepto de gravitación se evapora por completo, absorbido por el de curvatura del mundo. Es de mencionar en este respecto, el intento que hiciera hace ya cuarenta años, H. Hertz de eliminar de la mecánica el concepto de fuerza, el cual, si bien se mira, está de más.

Quiere decir entonces que la teoría de la relatividad ha puesto en uso un nuevo sistema conceptual. Sí, un nuevo sistema. Porque no es que se haya ramificado simplemente una rama ya existente del arbolillo — para atenernos a nuestro símil —, sino que el tronco mismo ha echado una rama completamente nueva, y la ha echado muy cerca de las raíces.

Pero con todo eso, si atendemos a los frutos de esta revolución obrada por la teoría de la relatividad en la física, hemos de confesar que son nulos. Einstein ha tirado sin duda abajo un ala del edificio teórico de la física clásica; pero lo ha ido levantando cuidadosamente otra vez piedra por piedra. Eso sí: imprimiéndole las líneas positivas que reclaman los tiempos modernos. La revolución no ha sido, pues, tan radical. Einstein no ha dejado el campo sembrado de ruinas a su paso.

Que el concepto de mundo curvo no acaba de entrarle en la cabeza al que juzga de las cosas con su sano sentido común — el tan a menudo mal empleado sentido común —, nadie lo niega. Tal concepto no tiene, sin embargo, nada de ininteligible: le falta una base intuitiva, no más. Y esto que decimos del mundo curvo cabe extenderlo al cuerpo entero de doctrinas de la teoría de la relatividad especial y general. Para cuantos de veras la entienden, preséntase esta última como un sistema que, aparte de permitir una mayor aproximación a la naturaleza, descansa sobre sólidos cimientos lógicos, y es internamente coherente. Y si no la estiman merecedora de que se la coloque por encima de la mecánica y la teoría de la gravitación de Newton, no vacilan en asignarle un puesto al lado de ellas.

La idea de que el espacio sea curvo, no es sino la forma sublimada, elevada a noción abstracta, de aquella otra idea que asomara a la mente humana hace siglos: la de la redondez de la tierra. Ambas ideas pertenecen a la misma familia. También esta otra idea fué combatida como absurda por sus contemporáneos. Y también por razones de sano sentido común. Baste citar una de ellas. "A nuestros antípodas se les debe de subir la sangre a la cabeza de andar siempre con los pies para arriba." ¡Así objetaban!

La conclusión que quizá quepa sacar de lo antedicho es la siguiente. La crisis provocada por el resultado negativo de la experiencia de Michelson parece haber sido resuelta, en todos sus puntos, por la teoría de la relatividad. En este campo la reconstrucción, al parecer, ya ha tocado a su término.

Llegamos ahora a la tercera clase de transformaciones sufridas por la física. Con éstas sí que nos internamos en terreno resbaladizo. No es poco el embarazo que uno siente cada vez que les tiene que hablar de tales cosas a gentes no especializadas en física. Muchos autores hasta opinan, con razón, que por hoy este controvertido campo no debería popularizarse todavía. Eddington dice en una de sus excelentes obras: "Al frente del edificio de la teoría de los *cuanta* habría que colocar un cartel con las siguientes advertencias: "Cerrado por refacciones y completa transformación. — Prohibida rigurosamente la entrada a personas ajenas a la obra."

A pesar de esta prohibición de Eddington, quisiera dejarles echar un ligero vistazo al terreno, un poco caótico, en que se está levantando la teoría de los *cuanta*. Porque, bien pensado, nada perderán Vds. Lo peor que puede pasarles es que se vuelvan a hallar tan en ayunas después del vistazo como antes de él. Estado de ignorancia compartido, más o menos, por los mismos físicos. Pues en esto se diferencian la teoría de la relatividad y la de los *cuanta*: y es que la primera, no obstante que parece resultarle terriblemente difícil al no iniciado, pueden entenderla sin mayores dificultades, en sus fundamentos al menos, los hombres del oficio. La segunda, por el contrario, aun para sus autores, — según propia confesión de ellos —, sigue siendo un enigma impenetrable.

La dificultad estriba aquí — para decirlo en una palabra — en que no se ha logrado todavía hallar un sistema de conceptos adecuados para tratar los fenómenos de los *cuanta*. Los conceptos tomados de la física macroscópica no cabe trasladarlos a los fenómenos atómicos mismos, objeto de la teoría de los quanta. La física de los *cuanta* se ocupa, según es sabido, de los fenómenos a que da lugar la acción recíproca entre la radiación y los átomos: los procesos de emisión de rayos, esto es, la formación de espectros, de absorción de rayos, de dispersión, del efecto de Compton (sobre el que les ha informado el Sr. Mark en la conferencia anterior). Todos estos actos elementales de acción recíproca entre la radiación y la materia pertenecen al dominio de la física de los quanta.

Es claro desde luego que para describir los átomos y los fenómenos que ocurren en ellos ciertos conceptos físicos tienen que resultar impropios y, por tanto, vacíos de significación. Así, por ej., carecerían por completo de ella afirmaciones del siguiente tenor: "El átomo de hidrógeno es verde, tiene una temperatura de 500° y un coeficiente de elasticidad de tantas o cuantas unidades absolutas". Es igualmente claro que no es posible aplicar esos conceptos tomados de la física macroscópica — que, si se atiende a su significado, se refieren siempre a una colección de átomos — a un solo individuo; no de otro modo como no es posible tampoco hablar de la cifra de mortandad de un solo hombre.

Verdad, por otra parte, que existen conceptos físicos que uno no hesitaría lo más mínimo en trasladar a los átomos. Aparentemente no hay ninguna razón por que hayan de perder su sentido para las dimensiones atómicas. Citaré como único ejemplo el concepto de velocidad. Se puede medir la velocidad de las estrellas fijas y planetas, como también la de un dirigible Zeppelin, la de un proyectil, la de las partículas de polvo que se agitan en un rayo de sol y la de una partícula visible en el campo del ultramicroscopio. Nada parece, pues, oponerse a que hablemos también de la velocidad de un electrón. Y de hecho, se mide también por vía indirecta la velocidad de los electrones de un rayo catódico. Hasta cabe llevar el grado de exactitud de la medición a tal punto, que sea dable comprobar la modificación de la masa, postulada por la teoría de la relatividad. Parece, por tanto, perfectamente lógico que, en principio, debería poder hablarse también de la velocidad de rotación de un electrón en el seno de un átomo de hidrógeno.

Otro caso en que no se ve a primera vista por qué no habrían de aplicarse los conceptos en cuestión a las dimensiones atómicas, es el de la formación de un campo ondulatorio electro-magnético mediante una carga eléctrica en movimiento. Moviendo de arriba para abajo con suficiente rapidez una carga eléctrica a lo largo de una recta vertical, se engendra un determinado campo ondulatorio electromagnético, que se puede calcular con mucha precisión. Este fenómeno corresponde, en lo esencial, exactamente al que ocurre en la antena vertical de un emisor de radio. En vista de esto, uno esperaría lo siguiente: que disminuyendo cada vez más la carga y la duración de la oscilación, vaya debilitándose naturalmente el campo ondulatorio y acortándose el largo de la onda.

Dicho de otro modo: a la variación de la carga y la duración de la oscilación ha de corresponder una variación puramente *cuantitativa* en la intensidad del campo ondulatorio y en la longitud de onda; lo que es *cualitati-*

vamente, no deben modificarse estos últimos, puesto que las leyes elementales de la electrodinámica no tienen en cuenta para nada la escala en que ocurren los fenómenos.

Ahora bien, hay efectivamente fenómenos de los que se creyó poder concluir durante algún tiempo que las leyes de Maxwell acerca de la influencia de un campo ondulatorio sobre una carga y acerca de la formación de un campo ondulatorio mediante una carga oscilatoria son aplicables sin más a los átomos aislados. A estos fenómenos pertenece, p. ej., el de la dispersión normal y el del efecto normal de Zeemann. En consecuencia, en ciertos fenómenos todo ocurriría en estricta consonancia con los postulados de la electrodinámica clásica. Verificaríase en ellos la acción recíproca postulada en la teoría clásica, que se mencionó en la primera conferencia.

Sin embargo, hacia fines del siglo pasado — según se expuso por extenso en dicha primera conferencia — las mediciones efectuadas para ver cómo se distribuye la energía en el espectro de los rayos caloríficos del cuerpo negro dieron un resultado un tanto diferente del previsto por la teoría. Y a fin de explicar estas insignificantes diferencias concibió Max Planck en el año 1900 la genial y revolucionaria idea — cuyo alcance no sospechara ni su mismo creador —, destinada a abrir una nueva época en la física.

La hipótesis de los *cuanta*, formulada por Planck en 1900, reza así: Un átomo que emita radiaciones, no puede emitirlos en cantidad tan pequeña como se quiera, sino que las cantidades de energía emitida tienen que ser múltiplos enteros de una cantidad mínima determinada, proporcional a la frecuencia de la radiación. Designando con ν la frecuencia (número de oscilaciones por segundo), la energía emitida con E, se verifica según Planck:

$$E = nh\nu \qquad (4)$$

en que n es un número entero y h una constante universal (la constante de Planck), cuyo valor es de

$$h = 6{,}55 \times 10^{-27} \text{ erg. sec.}$$

La idea de que la radiación no puede ser tan débil como se quiera, es decir, que tiene una estructura discontinua, atómica, era esencialmente ajena a la teoría clásica.

Más tarde se hallaron casos que, no sólo se apartaban ostensiblemente de lo postulado por la teoría clásica, sino que no consentían siquiera la más remota aplicación de ella. A título de ejemplo mencionemos tan sólo, que, conforme a la teoría de Bohr de los espectros del hidrógeno, confirmada en sus más nimios detalles por la experiencia, los electrones del hidrógeno, al recorrer en círculo, las llamadas *órbitas estacionarias*, no emiten absolutamente ninguna clase de rayos, es decir, no engendran campo ondulatorio alguno, hecho que riñe en absoluto con las leyes de la electrodinámica.

A estas experiencias se agregan las mencionadas por el Sr. Mark en su conferencia, y que revelan la enigmática doble naturaleza de la luz. De ellas se desprende que los rayos ostentan unas veces carácter ondulatorio; y otras, corpuscular. Antes, sin embargo, no se pensaba así. Hace mucho tiempo ya que, fundándose en todos los fenómenos de interferencia y polarización se creyó haber averiguado definitivamente que los rayos luminosos son ondas, y ondas electromagnéticas.

A estar a esta concepción, cuando un átomo irradia luz, se esparcen en torno de él, colocado en el centro, ondas esféricas, que forman un campo cuya energía va decreciendo hacia la periferia. (La energía decrece con el cuadrado de la distancia, para ser precisos). Lo malo es que otras experiencias parecen conducirnos a concluir que, cuando el átomo en vez de irradiar luz la absorbe, toda la energía irradiada por el átomo, la cual se supone esparcida por la superficie de la esfera que envuelve al átomo, aparece de repente localizada en *un solo punto del campo*. Y lo propio acontece si, p. ej., el átomo emisor se encuentra en una estrella alejada de nosotros muchos miles de años de luz. En suma, por las experiencias en cuestión no parece sino que los rayos luminosos son corpúsculos pequeñísimos de dimensiones atómicas, emitidos por la fuente luminosa en línea recta, según una dirección determinada. Lo malo del caso es que con esta última concepción no podemos dar razón de los fenómenos de interferencia. A consecuencia de ésto, los físicos se han visto en el penoso trance de tener que confesar que los rayos luminosos, cuya naturaleza creían haber penetrado definitivamente hace más de un siglo, son hoy tan enigmáticos como los animales fabulosos de la mitología. Algo así como los centauros: por la parte de arriba caballos; y por la de abajo, hombres.

La situación se hizo más complicada, aunque a la par más interesante, a raíz de los experimentos — sugeridos por una idea genial de De Broglie — que efectuaran

Germer y Davisson, y de los cuales se sigue que los rayos corpusculares tienen carácter ondulatorio: consecuencia inversa, pues, a la de los experimentos anteriores. Estos experimentos, que se realizaran en un principio en América, fueron repetidos más tarde en Alemania e Inglaterra. Una de las más hermosas fotografías obtenidas en el transcurso de los mismos puede verse reproducida, gracias a los cuidados de Mark y Wierl, en la figura 6 de este libro.

El resultado de estas experiencias es sobremanera sorprendente, ya que desde todo tiempo se habían contrapuesto como cosas *fundamentalmente diferentes* los rayos catódicos, de índole puramente corpuscular, a los rayos ondulatorios; tan fundamentalmente diferentes como puedan serlo, por ej., la lluvia y el ruido producido por las gotas de la misma al chocar contra una superficie. Aunque el descubrimiento de la difracción de los electrones — indudablemente uno de los descubrimientos más importantes de los últimos decenios — muestra que no siempre difieren tan radicalmente las ondas elementales, sino que en circunstancias dadas la diferencia se borra por ambas partes.

Frente a este material de hechos fracasa el sistema de la física clásica; pero fracasa no menos el de la electrodinámica relativista. Diré de paso que los físicos teóricos engloban generalmente hoy la teoría de la relatividad en la física clásica. La marcada línea separatoria entre lo *clásico y lo no clásico* hállase actualmente más allá de la teoría de la relatividad: es menester buscarla en los umbrales de la física de los cuanta.

Las experiencias que hemos ido enumerando implicaban, pues, el fracaso de los conceptos clásicos. La eficacia de éstos se había agotado por entero. Los tiempos estaban maduros para una reforma del sistema conceptual. Y a ella pusieron manos a la vez en 1925, si bien cada uno de ellos trabajando por su cuenta, dos físicos geniales: Heisenberg y Schrödinger.

De la teoría de Heisenberg sólo vamos a conocer un principio, que sobre ser relativamente accesible a la comprensión común es de importancia básica. Se lo designa con el nombre de: *relación de indeterminación de Heisenberg*. Ya dijimos antes que aun la velocidad de los pequeñísimos electrones, impenetrables a la vista, cabe medirla con relativa exactitud. Y nada se opone en principio a imaginar que andando el tiempo, conforme vayan perfeccionándose los medios auxiliares de la óptica — p. ej., si llega a inventarse algún ultra-ultra-microscopio — pueda hallarse modo de hacer visibles los diversos electrones, de determinar su lugar, y, por tanto, de medir sus coordenadas espaciales. Adelantándose a tales futuras experiencias, he aquí lo que nos advierte el principio de Heisenberg: por más que lográsemos llevar a efecto semejantes mediciones conducentes a determinar el lugar y la velocidad de los electrones, protones u otros corpúsculos elementales, sería fundamentalmente imposible determinar con *igual* grado de exactitud ambos. Antes por el contrario, cuanto más exactamente midiéramos su velocidad, de tanto mayor falta de exactitud adolecería la determinación del lugar, y viceversa.

Expresado en fórmulas:

Sea x la coordenada de un electrón, es decir, su distancia a un punto de origen elegido arbitrariamente y tomada sobre una recta de dirección determinada. Y sea v su componente de velocidad en la misma dirección, y m su masa. El producto $m\,v$ se designa, como es sabido, con el nombre de *cantidad de movimiento* o *impulso* del corpúsculo. Designemos, además, con $\Delta\ x$ y $\Delta\ mv$ el error cometido al medir la coordenada y, respectivamente, el impulso, queremos decir, la diferencia entre el valor real y el valor medido.

Con estos presupuestos se verifica según Heisenberg lo siguiente:

$$\Delta\, x \,.\, \Delta\, m\, v \geqq h, \tag{5}$$

fórmula en que h es la repetidas veces mencionada constante de Planck.

Y resolviendo la ecuación (5), primero respectivamente a $\Delta\ x$ y luego respectivamente a $\Delta\ m\,v$, se obtiene:

$$\Delta\, x \geqq \frac{h}{\Delta\, mv} \qquad\qquad \Delta\, mv \geqq \frac{h}{\Delta\, x} \tag{6}$$

Estas fórmulas muestran que, cuanto más exactamente se determina el impulso, — por lo tanto la velocidad, — tanto mayor es el error cometido en la determinación del lugar y viceversa.

Las raíces de esta relación sui géneris residen, por una parte, en la estructura atómica, ya reconocida por Planck, de la radiación; y por otra, en la acción impulsiva de la radiación sobre los electrones, puesta al descubierto por el efecto de Compton.

El único agente físico que nos permite determinar los lugares en medios infinitamente pequeños o medir velocidades, igualmente infinitamente pequeñas, es la luz; o si no, los rayos de onda más corta aún, como: los ultravioleta, los X, los γ. Y como, según Planck, las ondas electromagnéticas sólo pueden presentarse en cantidades que sean múltiplos enteros de una cantidad mínima *h*, la radiación misma tiene en cierto modo una estructura atómica, granular. Siendo esto así, nuestros intentos de llevar a un más alto grado la precisión de nuestras medidas tropezarán siempre, como contra un límite infranqueable, con este carácter granular de los rayos. Algo así como los gránulos de las placas fotográficas constituyen un límite último, más allá del cual es imposible continuar ampliándolas.

Veamos ahora qué motivos plausibles militan en favor de la relación indeterminada de Heisenberg, expresada en la fórmula (5). Planck había asentado que la energía de una cantidad de radiación asciende a $h\nu$. Más tarde Einstein amplió esta noción mediante el importante agregado de que el impulso (*la fuerza impulsiva*) de cada una de estas cantidades de radiación viene dado por el cociente $\frac{h\nu}{c}$, en el que c representa la velocidad de la luz. Ahora bien, como se desprende del efecto de Compton, al incidir una cantidad de radiación sobre un electrón, el impulso de la radiación se traslada efectivamente al electrón, éste es compelido a retroceder y su impulso se modifica en $\triangle mv$, cantidad proporcional a $\frac{h\nu}{c}$, es decir, que la modificación resulta tanto más pronunciada, cuanto mayor es la frecuencia y, respectivamente, cuanto menor es la longitud de onda de la radiación. Debido a ésto, no cabe realmente determinar con igual grado de exactitud el lugar y el impulso (la velocidad) de un electrón. En efecto, si queremos determinar muy exactamente, su lugar, esto es, medir su coordenada x con el menor error (Δx) posible, tenemos que emplear para nuestras observaciones una radiación de tan corta duración como sea posible, puesto que el error cometido al determinar el lugar tiene por límite inferior el tamaño de la de onda. Lo malo que si empleamos una radiación de onda muy corta, se modifica, a consecuencia de este solo hecho, la velocidad del electrón. Por eso al medir el impulso cometemos un error; error que, según la fórmula de Einstein recién mentada, es tanto mayor, cuanto menor es el largo de onda de la radiación. Y al revés, si se quiere medir lo más exactamente posible la velocidad, hay que emplear, a fin de evitar en el resultado los errores que trae consigo el efecto de Compton, radiaciones del mayor largo de onda posible. Verdad que esto comporta su correspondiente error en la determinación del lugar.

Se ve, pues, por la fórmula de Heisenberg (5), que la estructura atómica influye en forma complicada en la exactitud de las mediciones efectuadas con cualquier clase de rayos, algo así como, hablando en términos generales, la estructura atómica de la materia influye en la medición de la longitud de los cuerpos. Estando los cuerpos materiales compuestos de átomos, cuyo diámetro es de unos 10^{-8} cm., síguese como consecuencia natural que, por más que perfeccionáramos ilimitadamente nuestros métodos de medición, nunca podríamos llevar más allá la exactitud de ellos — p. ej., al tratar de fijar una unidad de longitud — de un millonésimo de milímetro. Quiere decir que la estructura atómica de la materia constituye un *límite inferior absoluto* de los errores que se cometen al medir la longitud de los cuerpos materiales. En cambio, la relación indeterminada (5) de Heisenberg, basada en la naturaleza cuántica de la radiación no implica la existencia de tal límite infranqueable; acepta que quepa exactitud en la medición, si bien con ciertas restricciones. Según ella, en efecto, nada obsta en principio a que se determine, con toda la exactitud apetecible, el lugar o la velocidad de los electrones. Eso sí, es menester hacer la salvedad de que la precisión que se logre en la determinación del uno traerá aparejada, necesariamente, una imprecisión correspondiente en la determinación de la otra, y viceversa. Cuanto más exactamente se determine el lugar, tanto menos exactamente se determinará la velocidad; y al revés, cuanto más exactamente se determine la velocidad, tanto menos exactamente se determinará el lugar.

Fuera de esta relación indeterminada Heisenberg ha desarrollado en 1925 una teoría matemática sumamente interesante, la llamada *mecánica de los cuanta*, con cuyo auxilio se pueden calcular las longitudes de onda, el estado de polarización y las intensidades de las rayas espectrales, basándose en las supuestas propiedades de los átomos emisores de la radiación. En su teoría sólo se tomarán en cuenta — tal es el juicioso y evidente principio que le sirve de punto de partida — las relaciones entre magnitudes observables, como la longitud de onda de la radiación, etc. Las magnitudes *semimetafísicas,* como las coordenadas y velocidades de los electrones, prácticamente imposibles de medir, no tienen ninguna cabida en ella. Lo malo es que la teoría de Heisenberg exige de parte del estudioso un esfuerzo mental tan enorme, que no podemos entrar a tratarla con mayor extensión aquí. En cambio, vamos a apuntar algunas indicaciones sobre la mecánica ondulatoria, de Schrödinger, cuya inclusión en este lugar se justifica con tanto mayor motivo, cuanto que ambas teorías — la de Heisenberg y la de Schrödinger —, no obstante tener puntos de partida completamente diferentes, concuerdan por entero en cuanto a los resultados físicos concretos.

Schrödinger — un vienés que merece ser timbre de orgullo para todos nosotros — encontró en 1925, por una intuición genial incomprensible, su famosa *ecuación de las ondas,* la cual desde hace seis años ejerce un dominio casi absoluto en el campo de la teoría de los cuanta. La ecuación de Schrödinger viene a ser la ecuación diferencial de las ondas de Broglie antes mentada, y su aplicación ha puesto en nuestras manos resultados y conocimientos insospechados. Cierto que lo que más nos interesa — iluminar conceptualmente el enigma de los cuanta —, no lo hemos logrado, ni mucho menos. La ecuación de Schrödinger es una típica fórmula mágica: se hacen cálculos con ella, y, sabiéndola emplear correctamente, se obtienen resultados que armonizan con la experiencia, pero nadie la entiende.

Voy a indicarles, lo más someramente posible, cuáles son en rigor los puntos de la teoría de Schrödinger que se resisten sistemáticamente a todo esfuerzo por comprenderlos, y permanecen envueltos en un halo de misticismo. En primer término, en tratándose de las ondas de Schrödinger o de De Broglie, falta el sujeto del predicado *vibra*. En el caso de las ondas sonoras, sabemos que lo que vibra son las partículas del aire, ejecutando movimientos de un lado para otro. Para las ondas electromagnéticas se había introducido en un principio un hipotético éter, cuya única función consistía en hacer de sujeto del verbo *vibrar*. Más tarde, dejándose de fantasías, se cayó en la cuenta de que no hace falta un algo concreto que vibre como el éter: cabía también explicar las ondas electromagnéticas imaginando que la *energía del campo* vibra, esto es, sufre periódicamente modificaciones en su intensidad. Lo malo es que para las ondas de De Broglie no hay modo de hallar ni siquiera un adecuado sujeto abstracto; constituyen un caso aparte. Verdad es que Schrödinger había ensayado una interpretación de estas ondas bastante plausible en cierto respecto, pero que encerraba contradicciones internas que la hacían insostenible. Recházanla por ello hoy en día la mayoría de los físicos.

El problema acerca del sujeto de las vibraciones sigue, pues, en pie. Hay, con todo, un problema más embrollado que éste; y es que las ondas de que se echa mano para resolver las ecuaciones de Schrödinger no son vibraciones en el verdadero sentido físico, es decir, fenómenos variables periódicamente en el espacio y en el tiempo.

El teatro de estas vibraciones no es, en efecto, el espacio tridimensional del mundo real, sino el llamado *espacio de configuración* del sistema, esto es, un espacio ficticio, fruto del pensamiento, que tiene tantas veces tres dimensiones como sea el número de partículas que actúen las unas sobre las otras en el sistema en cuestión. Así, por ejemplo, en un solo átomo de uranio, tal espacio tendría unas 280 dimensiones; y en los sistemas de varios átomos el número de dimensiones sería aún mayor.

En los últimos años la ecuación de Schrödinger ha sido ampliada y generalizada por una teoría del talentosísimo físico inglés Dirac, quien logró darle una forma relativista invariable. Púsose de manifiesto, gracias a esto, que la rotación de los electrones en torno de su eje — introducida en 1924, a título de atrevida hipótesis, por Uhlenbeck y Goldsmit — se sigue forzosamente de la ecuación de las ondas. Quería decir entonces que, contrariamente a lo que se pensaba antes, la teoría de la rotación de los electrones, plenamente corroborada por la experiencia, no era una hipótesis adicional introducida "ad hoc", sino que ya entraba como elemento orgánico en las leyes fundamentales de la teoría general. El que se viera esto fué sin duda uno de los frutos más enjundiosos de la teoría de Dirac. Otra consecuencia notable de la misma. Según sus fórmulas la carga de las partículas elementales puede cambiar espontáneamente de signo, de tal modo que, p. ej., hay que contar con electrones positivos y protones negativos. Y, efectivamente, observaciones hechas en los últimos meses en el laboratorio de Millikan (Pasadena), e independientemente de éstas, en el de Rutherford (Cambridge) parecen indicar que junto a los electrones negativos se dan asimismo electrones positivos. Si bien con estas observaciones no pisamos aún terreno definitivamente seguro, parece hallar confirmación aquí en forma notabilísima por el experimento algo que, al anticipárnoslo la teoría, nos sonaba a cosa enteramente increíble.

Con todo eso, prescindiendo de estos éxitos, de data recientísima, logrados por la física en el campo teórico, el estado de ésta caracterízase por haberse producido en la teoría de los quanta un compás de espera, habiendo fracasado los intentos, que se remontan a los tres o cuatro últimos años, enderezados a sacarla de su estancamiento. Los nuevos conceptos puestos en circulación por Heisenberg y De Broglie por una parte, y por otra por Schrödinger y Dirac, no han resultado, pues, suficientes para suministrarnos una descripción satisfactoria desde todo punto de vista de los complejos fenómenos cuánticos y atómicos.

No extrememos, sin embargo, las cosas. En esta etapa de su desarrollo la física no ha dejado de realizar significativos progresos. La aplicación de la fórmula mágica de Schrödinger ha suministrado realmente nociones nuevas importantes; ha obrado fructíferamente sobre la física experimental y ha permitido también predecir nuevos hechos de experiencia. Mencionemos, tan sólo a modo de ejemplo, que merced a la ecuación de Schrödinger pudo tratarse con éxito el problema de las moléculas de hidrógeno H_2, que le ofreciera considerables dificultades a la teoría, más antigua, de

Bohr; y que fijándose en la simetría de las soluciones se concluyó que debe de haber dos especies diferentes de moléculas de hidrógeno, a las que se designó con los nombres de parahidrógeno y ortohidrógeno, respectivamente. Diversidad verificada más tarde también experimentalmente por Bonhoeffer y Harteck. Además, gracias a la teoría de Schrödinger comienza a profundizarse actualmente la esencia de las llamadas valencias homeopolares; se han hecho progresos en el dominio de la mecánica estadística, obteniendo luces acerca del mecanismo de la conducción de corriente eléctrica a través de metales, etc. En una palabra: la fórmula mágica demuestra ser un excelente guía, y surte efectos fructíferos ya hoy, aun antes de que se haya logrado comprender correctamente su significado.

Pero así y todo, lo cierto es que en el campo de la física de los cuanta el sistema exactamente adecuado no ha sido encontrado aún. Las transformaciones porque han ido pasando los conceptos de la física no han sido suficientes para poner en pie dicho sistema. Quede reservado a la fantasía y a la sagacidad de los teóricos del futuro el hallar los conceptos con que describir en forma inobjetable cómo actúan las fuerzas elementales atómicas de la naturaleza.

BIBLIOGRAFIA

A. Exposiciones amplias en que se entra en una dilucidación filosófica del tema:

B. RUSSELL, *Philosophie der Materie,* traducido al alemán por K. Grelling (Colección "Wissenschaft und Hypothese", T., 32), Teubner, Berlín y Leipzig, 1929 XI y 433 p.

NIELS BOHR, *Atomtheorie u. Naturbeschreibung,* 4 estudios con una introducción destinada a hacer la sinopsis del tema, Berlín, J. Springer, 1931.

A. S. EDDINGTON, *Das Weltbild der Physik u. ein Versuch seiner philosophischen Deutung,* traducción alemana de M. Rausch v. Traubenberg y H. Diesselhorst, Braunschweig, (Vieweg e hijo. 1931 VIII y 356 p.).

MAX PLANCK, *Wege zur physikalischen Erkenntniss, Reden u, Vorträge, Leipzig,* S. Hirzel, 1933 (X y 280 p.),

B. BAWINK, *Ergebnisse u. Problemen der Naturwissenschaften,* (5. Auf. Leipzig, S. Hirzel 1933 L. 628 p.).

HERBERT FEIGL, *Theorie u. Erfahrung in der Physik* (Wissen u. Wirken, T. 58), Karlsruhe, G. Braun (1921) (242 p.).

H. REICHENBACH, *Athom u. Kosmos,* Berlín, D. Buchgemein, 1930.

B. Teoría de la relatividad:

A. EINSTEIN, *Uber d. spezielle u. allgem. Relativitätstheorie* (Col. Vieweg, Cuad. 38), 11 Ed. Braunschweig, Vieweg u. Sohn, 1921.

H. THIRRING, *Die Idee d. Relativitätstheorie,* 2 Ed., Berlín, J. Springer, 1922.

MAX BORN, *Die Relativitätstheorie Einstein u. ihre physikalischen Grundlagen,* 3 Ed., Berlín, Springer, 1922.

LUDWIG HOPF, *Die Relativitätstheorie,* Col. Verständliche Wissenschaft. T. 14, Berlín. Springer, 1931.

A. S. EDDINGTON, *Raum, Zeit u. Schwere, Ein Umriss d. Allgemeinen Relativitätstheorie,* Tr. alem. de W. Gordon, Vieweg u. Sohn, 1923, Col. Wissenschaft, T. 70.

E. BOREL, *Zeit u. Raum von Euklid bis Einstein,* Stuttgart, Frankhsche Verlagsbuchhandlung, 1932.

M. SCHLICK, *Raum u. Zeit d. gegenwartigen Physik,* Berlín, Springer, 1922.

W. BLOCH, *Einführung in die Relativitätstheorie* (Col. Natur u. Geisteswelt, T. 618), Berlín u. Leipzig, Teubner, 1918.

C. Obras de física en que se toma en cuenta especialmente la teoría atómica:

A. HAAS, *Das Naturbild d. neuen Physik,* 3 Ed., Berlín, W. de Gruyter, 1932.

A. HAAS, *Die Welt d. Atome, 10 gemeinverständliche Vorträge,* W. de Gruyter, 1926.

A. HAAS, *Quantenchemie, Eine Einleitung in 4 Vorträgen,* Leipzig Akad. Verlagsgesellschaft, 1929.

A. HAAS, *Atomtheorie,* Berlín, Walter de Gruyter, 1929.

A. HAAS, *Physik f. Jedermann,* 1933.

O. HALPERN u. H. THIRRING, *The Elements of the New Quantum Mechanics,* London, Methuen and Co., 1932. (Exposición matemática para las personas más adelantadas en este estudio).

M. BORN, *Der Aufbau d. Materie, Drei Aufsätze über moderne Atomistik u. Elektronentheorie,* 2 Ed., Berlín, J. Springer, 1922.

M. BORN, *Moderne Physik, Sieben Vorträge über Materie u. Strahlung,* completadas por F. Sauter, Berlín, Springer, 1933.

H. WEYL, *Was ist Materie?,* Berlín, Springer, 1924.

SIR WILL. BRAGG, *Was ist Materie?,* 6 gemeinverständliche Vorträge, gehalten in der Royal Institution, Deutsch v. Finkelstein, Leipzig, Akadem Verlagsgesell., 1931 (Punto de vista de la física experimental).

W. GERLACH, *Materie, Elektrizität, Energie, Grundlagen u. Ergebnisse d. experimentellen Atomforschung,* 2 Ed. Dresden u. Leipzig, Steinkopf., 1926.

A. MARCH, *Moderne Atomphysik, Eine allgemein verstandliche Einführung,* Leipzig, J. A. Barth, 1931.

C. G. DARWIN, *The New Concept of Matter,* London, G. Bell and Sons Ltd., 1931.

B. RUSSELL, *A B C der atome,* Tr. alem. de W. Bloch, Stuttgart, Frankhsche Verlagsbuchhandlung, 1925.

N. BOHR, *Über d. Bau d. Atome, Nobelvortrag,* Berlín, Springer, 1922.

F. REICHE, *Die Quantentheorie, ihr Ursprung u. ihre Entwicklung,* Berlín, Springer, 1921.

H. A. KRAMERS u. H. HOLST, *Das Atom u die Bohrsche Theorie Seines Aufbaus, Gemeinverständlich dargestellt,* Tr. alem. de F. Arndt, Berlín Springer, 1925.

D. La Física y el Cosmos:

W. NERNST, *Das Weltgebäude im Lichte d. neueren Forschung,* Berlín, Springer, 1921.

A. S. EDDINGTON, *Sterne u. Atome,* Berlín, Springer, 1928.

J. H. JEANS, *Sterne, Welten u. Atome,* Tr. al. de R. Nutt, Stuttgart-Berlín, Deutsche Verlagsanstalt, 1931.

J. H. JEANS, *Der Weltenraum und seine Rätsel, ebenda* 1931.

LA CRISIS DE LA INTUICION

Por JUAN HAHN (*)

Entre todos los filósofos que marcan rumbos, fué sin duda I. Kant el que asignó a la intuición el más amplio alcance y significado en nuestro conocimiento. Empezaba observando justamente que en nuestro conocimiento se compenetran intimísimamente dos elementos opuestos: uno pasivo de pura receptividad y otro activo de espontaneidad. En la *"Crítica de la razón pura"*, al comienzo del capítulo intitulado: *Segunda parte de la doctrina trascendental de los elementos. Lógica trascendental,* leemos: "Nuestro conocimiento nace de dos fuentes principales del ánimo, de las cuales la primera es la capacidad de recibir representaciones (receptividad de las impresiones); la segunda la de reconocer, mediante esas representaciones, los objetos (espontaneidad de los conceptos). Por la primera los objetos se nos dan; por la segunda los objetos, dados

(*) Dada la índole de las cuestiones tratadas en las dos conferencias siguientes, nos hemos preocupado por lo general más de explicar que de traducir el pensamiento de sus respectivos autores. No hemos vacilado en introducir letras en las figuras (por ejemplo, en las 4 y 5), modificar ligeramente la explicación de las mismas, redactar de nuevo algunos párrafos, etc. Un estricto rigor filológico en cuestiones así sólo puede ser contraproducente. — (*N. del T.*).

en la representación como simples afecciones del ánimo, son pensados. La intuición y los conceptos constituyen los dos elementos de todos nuestros conocimientos. . ." Quiere decir que nos comportamos pasivamente al recibir en nosotros por vía intuitiva las representaciones; y activamente, al elaborar las mismas con el pensamiento. Pero en la intuición, a su vez, es preciso volver a distinguir, al entender de Kant, dos elementos: una parte proveniente de la experiencia, empírica, a posteriori, la cual constituye el *contenido* de la intuición: colores, sonidos, olores, impresiones tactiles, como la dureza, la blandura, la aspereza, etc.; y una parte independiente de toda experiencia, pura, a priori, que constituye la *forma* de la intuición. De tales formas puras de la intuición tenemos dos: el *espacio,* forma de intuición de nuestro sentido *externo,* merced al cual "nos representamos los objetos fuera de nosotros"; y el *tiempo*, forma de intuición del sentido interno, "merced al cual el ánimo se intuye a sí mismo o su estado interno."

Y esta intuición pura desempeña, en el sentir de Kant, un papel de suma importancia en nuestro conocimiento. Es sobre la intuición pura, y no sobre el pensamiento, como pudiera creerse, sobre lo que se fundan, según él, las matemáticas. La geometría, conforme se la viene enseñando desde la antigüedad, trata de las propiedades del espacio que se nos da con entera exactitud en la intuición pura. La aritmética, la teoría de los números reales, descansa sobre la intuición pura y completamente exacta del tiempo. Las formas puras de la intuición espacio y tiempo forman el marco dentro del cual ordenamos todos los fenómenos que nos suministra la experiencia: cada suceso físico tiene su puesto rigurosamente preciso y exacto en el espacio y el tiempo.

Por plausibles que puedan parecer estas ideas y por bien que correspondieran al estado de la ciencia en los tiempos de Kant, sin embargo la marcha ulterior de aquélla ha venido a sacudirlas en sus cimientos.

El aspecto físico de la cuestión ya se trató en las dos primeras conferencias, por lo cual puedo limitarme aquí a breves indicaciones. Las ideas de Kant acerca del significado en física del espacio y el tiempo en física corresponden a la física newtoniana, en exclusivo predominio en sus días, en el cual se ha mantenido hasta hace muy recientemente. Un primer golpe lo recibió esta concepción de la teoría de la relatividad. En concepto de Kant, el espacio y el tiempo no tienen nada que ver entre sí; es más, proceden de fuentes completamente diferentes: el espacio es la forma de intuición del sentido externo, el tiempo, la del sentido interno. Nos hallamos en presencia, pues, de un espacio inmovilizado en reposo absoluto, y de un tiempo absoluto que se va deslizando sin tocarlo para nada. Contrariamente, la teoría de la relatividad nos enseña: no hay ni un espacio ni un tiempo absoluto; lo único que tiene significado absoluto en física es la unión de ambos: el *mundo*.

Un golpe de efectos más perniciosos, empero, lo recibió la concepción de Kant del espacio y tiempo como formas a priori de la intuición, a consecuencia del desenvolvimiento novísimo de la física. Ya dijimos que según aquella concepción todo suceso tiene su lugar exactamente fijo en el espacio y en el tiempo. Quedaba, empero, siempre una dificultad. Y es que nosotros sólo conocemos los sucesos físicos por experiencia; y toda experiencia es imprecisa, toda observación adolece de errores. La solución de esta dificultad estaría según la vieja concepción en que, si bien es cierto que todo suceso *tiene* su lugar exacto en el espacio y en el tiempo, a nosotros nos es imposible en principio *conocerlo*. Consideremos, p. ej., un pedazo de tiza. Una vez elegida una unidad de longitud, la distancia entre dos puntos de este pedazo de tiza se mide por un número real rigurosamente preciso. Supongamos que se hayan determinado todas las distancias entre dos puntos cualesquiera del pedazo de tiza, y llamemos a la mayor de tales distancias el diámetro del pedazo de tiza. (*) Si se concibe que este pedazo de tiza ocupe un lugar exactamente fijo en el espacio, tendría pleno sentido la pregunta: ¿es racional o irracional el diámetro del mismo? Pero dentro de esta concepción no podría ser contestada nunca, por cuanto la diferencia entre lo racional y lo irracional es demasiado sutil, para que quepa comprobarla por la observación. Plantéanse, por tanto, dentro de esta concepción cuestiones que, no obstante poseer su pleno sentido, son insolubles. Quiere decir entonces que esta concepción es *metafísica*.

Dificultad ésta que, sin embargo, no se había tomado suficientemente en serio antes de ahora, pues se creía poder salir del paso con argumentaciones del siguiente tenor más o menos. Toda observación singular será in-

(*) El autor se refiere evidentemente, no a todo el pedazo de tiza, sino a un corte transversal de él. — (*N. del T.*).

exacta, adolecerá de errores. Pero qué, ¿no va en constante progreso el grado de precisión de nuestros métodos de observación? Imaginemos que una misma magnitud física se mida reiteradamente con métodos de observación cada vez más precisos. ¿Qué resultará? Cada uno de los valores así obtenidos será inexacto; todos ellos irán, no obstante, acercándose indefinidamente a un límite perfectamente determinado, y este límite vendrá a ser el valor exacto de la magnitud física de referencia.

Semejante argumentación es insatisfactoria desde el punto de vista filosófico. Pero aún sin remontarnos a la filosofía, el novísimo desarrollo de la física parece probar que es insostenible por razones puramente físicas. Parece que es imposible, por razones físicas, localizar con exactitud creciente un suceso en el espacio y el tiempo; llegados a cierto grado en la exactitud, ya no cabe, al parecer, seguir adelante.

Quede asentado, pues, que la teoría de la localización exacta de los sucesos físicos en el espacio y el tiempo es metafísica, y, por ende, carente de significado. Por fuerte que haya debido ser el sacudimiento obrado en los dogmas metafísicos a que se aferran la mayoría de los hombres — incluso la mayoría de los físicos — por el reciente desarrollo revolucionario de la física, al pensador educado en la escuela de la filosofía empírica no lo toma éste de sorpresa. No le ve nada de paradójico; antes bien, lo siente en seguida como cosa familiar, y le da la bienvenida, porque se da cuenta de que con tal desarrollo se avanza un buen trecho en el camino de limpiar a la física de elementos metafísicos, de hacerla *más física*.

Después de estas someras indicaciones sobre el lado físico de la cuestión, encarémonos ahora con el campo matemático, donde la resistencia contra la teoría kantiana de la intuición se inició considerablemente antes que en la física. En lo que sigue discurriré, pues, exclusivamente sobre el tema "Matemáticas e intuición". Pero ni aún este tema lo trataré íntegro. Dejaré de lado un importante a la par que dificultoso conjunto de problemas, de los que se ocupará el Sr. Menger en la última conferencia de este ciclo. Me refiero a los que convergen en torno al intenso y fructífero movimiento de oposición que se ha llevado contra la tesis de Kant, de que también la aritmética, la teoría de los números, descansa sobre la intuición. Este movimiento de oposición se ha propuesto demostrar que, contrariamente a lo que sostenía Kant, la aritmética pertenece por entero al dominio del pensamiento, de la lógica ([2]). Por este motivo circunscribo aun más mi tema. Trataré de "La geometría y la intuición". Será mi intento mostrar cómo vino a quebrantarse la confianza en la intuición en la geometría, dominio que, a primera vista, parece pertenecerle originariamente, cayendo así cada vez en mayor descrédito, hasta acabar por verse desterrada del todo también de este su dominio natural.

Una de las cosas que movió a los matemáticos a lanzarse por esta vía de la desvalorización de la intuición, fué el haberse descubierto que — en abierto contraste con lo que se había dado por seguro fundándose en esta última — hay curvas que carecen de tangentes en todos sus puntos, o, lo que viene a ser lo mismo, como veremos, cabe pensar que un punto se mueva sin tener, no obstante, una velocidad determinada en ningún momento. Fuerte fué la impresión que suscitó este descubrimiento en los matemáticos, al darlo a conocer su autor, el gran matemático berlinés C. Weierstrass, en el año 1861. No era cosa tan nueva, sin embargo. Mucho antes ya le era conocida — como nos consta hoy por manuscritos que se conservan en la biblioteca nacional de Viena — al filósofo, teólogo y matemático austriaco B. Bolzano.

Como los problemas que plantea este descubrimiento tocan muy de cerca las bases del cálculo diferencial, desenvuelto por Newton y Leibnitz, procede decir primero algunas palabras acerca de los conceptos fundamentales de dicho cálculo ([3]).

Newton partía del concepto de *velocidad*. Imagínese un punto que se mueva sobre una línea recta (fig. 1), y que en el instante t se encuentre, p. ej., en el sitio Q. Supuesto esto, ¿qué se ha de entender por la velocidad del punto en movimiento en este instante t? Para responder a esta pregunta, empecemos determinando la posición del punto en movimiento en un segundo instante t'. Sea p. ej., Q' este nuevo sitio. Claro entonces que conociendo Q y Q' y t y t', conocemos el trayecto QQ' recorrido por el punto móvil en el lapso de tiempo tt'. Dividamos luego el trayecto QQ' por el tiempo transcurrido entre los instantes t y t'. Se obtiene así la llamada *velocidad media* del punto móvil entre los instantes t y t'. Verdad es que tal velocidad media no es de ningún modo la velocidad del punto en el instante t mismo

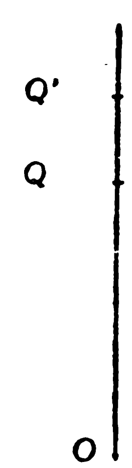


Fig. 1.

(puede resultar, p. ej., muy grande, aunque la velocidad en el instante t haya ya sido muy pequeña, como es el caso cuando el punto se mueve muy velozmente en la mayor parte del lapso de tiempo $t' - t$, pero muy lentamente en el instante t) ; pero si se ha elegido a t' con conveniente aproximación, lo es bastante aproximadamente, y tanto más aproximadamente cuanto más cerca se ha elegido al instante t' de t. Véase en qué términos más o menos razona entonces Newton. Supongamos que se elija a t' cada más cercano a t: 'la velocidad media entre los instantes t y t' se irá entonces acercando indefinidamente a un valor perfectamente determinado, tenderá — como se dice en matemáticas — a un determinado valor límite. Y este valor límite es lo que se llama "la velocidad del punto móvil en el instante t. Es decir que la velocidad en el instante t es el límite a que tiende la velocidad media entre los instantes t y t', cuando el instante t' se va acercando indefinidamente al instante t.

Leibnitz partía de la consideración del llamado *problema de las tangentes*. Imaginemos una curva dada (figura 2), y preguntémonos cuál es su pendiente con respecto del horizonte en uno de sus puntos, P por ejemplo. Para ello elijamos un segundo punto P′ y averigüemos, primero — algo por el estilo a lo que hicimos en el caso anterior — la *pendiente media* de la curva entre los puntos P y P'. Esta pendiente media se obtiene dividiendo el tanto de altura P''P' en que se ha acrecentado la curva al ir de P a P' por la proyección horizontal P P'' del camino recorrido, la cual indica cuánto se avanza en dirección horizontal al ir la curva de P a P'. Verdad es que tal pendiente media de la curva entre los puntos P y P' no es idéntica a su pendiente en el punto P (en el caso de la fig. 2 la pendiente en el punto P es visiblemente mayor que la pendiente media entre P y P') ; pero eligiendo el punto P' suficientemente próximo a P, se obtendrá un valor bastante aproximado para la pendiente en el punto P mismo, y tanto más aproximado cuando más cerca se ha elegido a P' de P. Es decir que — como en el primer caso — si se va acercando indefinidamente el punto P' a P, la pendiente media de la curva entre los puntos P y P' tenderá a un límite determinado, y este límite es lo que se designa como la "pendiente de la curva en el punto P". Definamos, pues. La pendiente del punto P es el límite a que tiende la pendiente media entre los puntos P y P', cuando el punto P' se va acercando indefinidamente a P'. Y se designa como *tangente* de nuestra curva en el punto P a la recta que pasa por P y que tiene, en toda su longitud, la misma pendiente que la curva en el punto P.

La analogía entre este procedimiento para encontrar la pendiente de una curva y el procedimiento analizado más arriba, para encontrar la velocidad de un punto móvil, salta a la vista. Y de hecho, la tarea de hallar la velocidad de un punto móvil se resuelve en la de hallar la pendiente de una curva en un punto dado, si nos valemos de un procedimiento que han hecho familiar a casi todo el mundo los planos gráficos de los ferrocarriles. Señálense sobre una recta horizontal (*el eje del tiempo*) los valores del tiempo, de modo que cada punto de esta recta represente un punto determinado del tiempo; y sobre la recta de la fig. 1 — sobre la que se mueve el punto en cuestión — fíjese un punto absolutamente cualquiera. Supongamos que el punto móvil se encuentra en el instante *t* en el lugar Q. Levantemos luego sobre el eje del tiempo, y por el punto que representa al instante *t*, una perpendicular igual a OQ: el punto P obtenido (fig. 2) representa la posición del punto móvil en el instante *t*. Imaginemos que esta operación se repita para todos los instantes: obtendremos entonces como representación del movimiento de nuestro punto una curva — la curva espacio-temporal del punto móvil —, por la cual podemos conocer todos los pormenores del movimiento de este punto, del mismo modo que podemos conocer los del movimiento de un tren consultando el plano de su recorrido. Es evidente que sólo la pendiente media de la curva espacio-temporal entre los puntos P y P' es idéntica a la velocidad me-

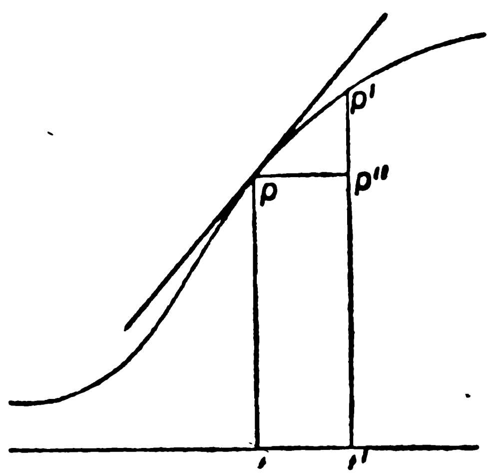


Fig. 2.

media del punto móvil entre los instantes *t* y *t'*, y que, por eso la pendiente de la curva espacio-temporal en un punto P es idéntica a la velocidad del punto móvil en el instante *t*. Tal es la sencilla relación que existe entre el problema de la velocidad y el de las tangentes; ambos problemas no son, pues, conceptualmente diferentes.

Pues bien, la *tarea fundamental del cálculo diferencial*, es la siguiente. O bien conocemos el trayecto de un punto móvil, y se trata de calcular en base de él su velocidad en cada instante; o bien se nos da una curva, y se trata de calcular su pendiente — su tangente — en cada punto. En lo que sigue nos atendremos al problema de las tangentes. Todo lo que digamos en dilucidación de este problema cabe extenderlo sin mayor dificultad — por lo dicho en el párrafo anterior — al de la velocidad.

Dijimos que a medida que el punto P' de la curva aquí considerada se va acercando indefinidamente al punto P de la misma, la pendiente media de la curva entre P y P' tenderá indefinidamente a un límite, el cual nos indica precisamente la pendiente de la curva en el punto P. Pero ¿ocurre real y verdaderamente que la pendiente media entre P y P' tiende a un límite determinado al irse acercando indefinidamente el punto P' al P? En todas las curvas que se vienen estudiando desde antiguo: el círculo, la elipse, la hipérbola, la parábola, la cicloide, etc., ocurre eso verdaderamente, según lo muestra el cálculo. Pero no en *cualquier curva.* Cabe verlo mediante un ejemplo relativamente simple. (*).

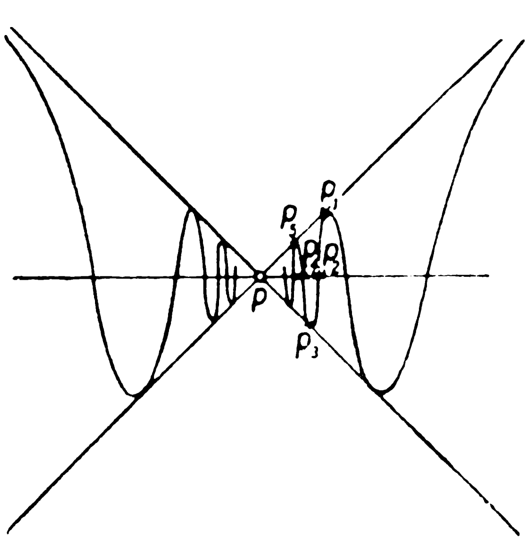


Fig. 3.

Consideremos la curva esbozada en la fig. 3. Es una línea ondulada que en las cercanías del punto P muestra infinitas ondas. Tanto el largo como la amplitud de las ondas van decreciendo indefinidamente al ir aproximándose éstas al punto P. Vamos a tratar de hallar, por el pro-

(*) Los ejemplos que siguen los he explicado más que traducido. El sistema de letras que aparecen en las figuras 4 y 5 ha sido introducido por mí. Dada la índole del tema, creo ser así más útil al lector que con una simple traducción. — (*N. del T.*).

cedimiento indicado más arriba, la pendiente de esta curva en el punto P. Para ello tomamos sobre la curva un segundo punto, y determinamos la pendiente media entre este nuevo punto y P. Supongamos que este segundo punto sea, sucesivamente, P_1, P_2 y P_3 . . ., puntos que se van acercando cada vez más a P. Si el segundo punto es P_1, la pendiente media será $+ 1$. (*) Si abandonamos P_1 y retrocedemos sobre la curva para acercarnos más a P, la pendiente irá decreciendo; por fin, cuando lleguemos a P_2, será nula. Si seguimos retrocediendo sobre la curva hacia P, la pendiente pasará de positiva a negativa e irá disminuyendo de valor hasta llegar a valer -1 en P_3. Si continuamos nuestro retroceso hacia P, la pendiente media aumentará de valor hasta llegar a valer otra vez 0 cuando nos encontremos en P_4. Y si de P_4 retrocedemos hacia P_5, la pendiente pasará de negativa a positiva, e irá creciendo hasta alcanzar otra vez el valor 1 en P_5. Y de continuar adelante nuestro camino de retroceso hacia P, se repetirá el mismo juego. Cuando el punto móvil, al ir acercándose a P, haya recorrido una onda entera de nuestra línea ondulada la pendiente decrecerá del valor $+1$ al valor -1, para volver luego a crecer de -1 a $+1$. Si el punto móvil se va acercando indefinidamente al punto P, tendrá que recorrer infinitas de tales ondas, puesto que nuestra curva ostenta infinitas ondas a uno y otro lado del punto P. En consecuencia, si el punto P' se va acercando indefinida-

(*) En el supuesto de que las rectas PA y PB. formen ángulo recto. Si no lo forman, la tangente en los puntos P_1, P_2 P_3 . . ., irán oscilando entre un valor dado positivo y su opuesto negativo, pasando por O; el cual puede hacerse tan grande como se quiera, al ir creciendo el ángulo a b, o tan pequeño como se quiera, al ir decreciendo dicho ángulo. (*N. del T.*).

mente al punto P, la pendiente media entre P y P' oscilará constantemente entre los valores — 1 y +1. Siendo así, no cabe decir que se aproxima indefinidamente a un límite determinado; ni tampoco cabe decir que nuestra curva tiene una pendiente determinada en el punto P. Esta curva carece, pues, de tangente determinada en el punto P.

Este ejemplo relativamente sencillo y fácilmente accesible a la intuición muestra, por consiguiente, que no es forzoso que una curva tenga una tangente en cada uno de sus puntos. Sobre esto no puede haber ninguna duda. Pero antes no se pensaba así. Se creía que nada más que por excepción puede ocurrir que una curva carezca de tangente en algunos de sus puntos: en todos es absolutamente imposible que carezca de ella. Tomando por fundamento la intuición, se creía poder concluir que, ya que no en todos, siquiera en la mayoría predominante de sus puntos, una curva ha de poseer una pendiente determinada, una tangente determinada. El matemático y físico Ampère, cuya meritoria contribución a la teoría de la electricidad conoce todo el mundo, hasta trató de demostrarlo, pero su demostración es falsa.

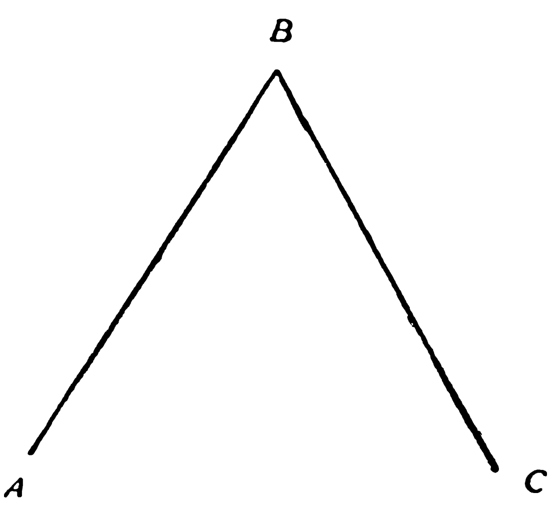


Fig. 4.

Dada esta manera de pensar, grande hubo de ser el revuelo suscitado entre los matemáticos al hacer conocer Weierstrass una curva que ni en un solo punto posee una pendiente determinada, una tangente determinada. Lo malo que los difíciles cálculos por los cuales Weierstrass dedujo la existencia de semejante curva no son para reproducirlos aquí. Felizmente hoy podemos arribar al mismo fin de Weierstrass mostrar que hay curvas que carecen de tangente en todos sus puntos — por camino mucho más llano. Voy a tratar de trazar tal camino, o al menos esbozarlo ([4]).

Nuestro punto de partida es la línea simple representada en la fig. 4, compuesta de dos rectas iguales, la una ascendente AB y la otra descendente BC. Reemplacemos la recta ascendente AB por una línea quebrada compuesta de 6 rectas (fig. 5): AD, DE, EF, FG, GH y HB, siendo de notar que AD, EF, FG y HB son ascendentes, y DE y GH descendentes, y que la distancia de los puntos D, F y H a la recta AC, es igual a la mitad de la distancia del punto B a la misma. Y reemplacemos asimismo la recta descendente BC por una línea quebrada compuesta por 6 rectas: BI, IJ, JK, KL, LM y MC, siendo de notar que BI, JK, KL, y MC son descendentes y IJ y LM ascendentes, y que la distancia de los puntos I, K y M a la recta AC es igual a la mitad de la distancia del punto B a la misma. Reemplazando ahora cada una de las 12 rectas de la quebrada así obtenida por una quebrada compuesta de 6 rectas obtenida con análogo procedimiento, llegaremos a formar la quebrada de 72 rectas

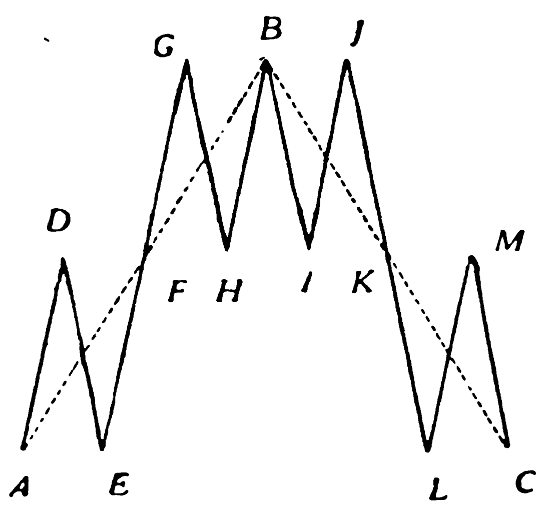


Fig. 5.

de la fig. 6. Y se ve que tal formación de quebradas se puede proseguir indefinidamente, creciendo no menos indefinidamente el grado de complicación de las mismas.

Ahora bien, cabe demostrar con todo rigor — si bien nosotros no vamos a hacer aquí, como es natural, tal demostración — que las sucesivas quebradas construídas con el procedimiento indicado se van acercando indefinidamente a una curva que goza de la propiedad deseada: en ningún punto tiene una pendiente determinada; por tanto, en ningún punto tiene una tangente. Verdad que la trayectoria de tal curva escapa por completo a la intuición. ¡Qué! Si después de repetir un par de veces la operación arriba descripta ni siquiera nos es dado seguir con la vista las nuevas quebradas que se van obteniendo sucesivamente, menos nos será dado percibir con ella la curva a que estas últimas se van acercando indefinidamente. Sólo el pensamiento, el análisis lógico pueden avanzar hasta ella.

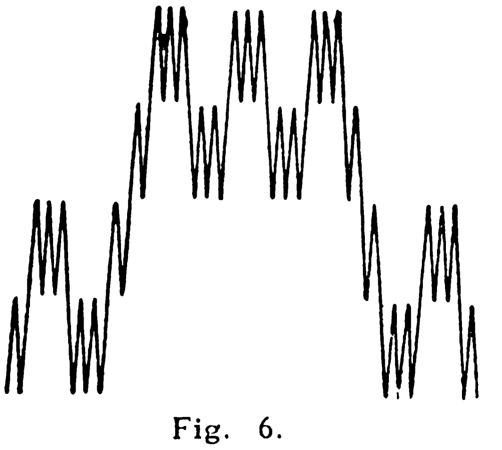


Fig. 6.

Véase cómo entonces, de habernos fiado de la intuición, seguiríamos aun persistiendo en el error en la cuestión de las tangentes de las curvas. ¿No parecía probar la intuición, irrefragablemente, que es imposible que existan curvas que carezcan de tangente en todos sus puntos?

Este primer ejemplo de cómo falla la intuición lo hemos tomado de los elementos del cálculo diferencial. Un segundo ejemplo podríamos tomarlo de los elementos del cálculo integral. La tarea fundamental del cálculo diferencial es: dada una curva, calcular su pendiente; dada la trayectoria de un punto móvil, calcular su velocidad; dada una curva, calcular su pendiente. La tarea fundamental del cálculo integral es justamente la contraria: conocida la velocidad de un punto móvil en cualquier instante, calcular su trayectoria; o conocida la pendiente de una curva en todos sus puntos, calcular la curva misma. Tarea que, claro está, sólo tiene sentido, si realmente la velocidad del punto móvil decide realmente de su trayectoria, si la pendiente de una curva decide realmente de la forma de la misma. ¿Cómo responderemos esta cuestión: afirmativa o negativamente?

Pero planteemos aún con más rigor la cuestión. Si dos puntos que se mueven a lo largo de una recta parten en el mismo instante del mismo lugar (*), concordando en todo momento en sus velocidades, ¿permanecerán forzosamente juntos, o cabe que se separen? Y respectivamente: si dos curvas de un plano parten del mismo punto, concordando siempre en sus pendientes, ¿se superpondrán forzosamente en todo su recorrido, o cabe que una de las dos se eleve sobre la otra? Si nos guiamos por la intuición, parece que los dos puntos móviles habrán de permanecer a la fuerza siempre juntos, que las dos curvas habrán de superponerse a la fuerza en todo su recorrido. Y sin embargo, el análisis lógico enseña que no es necesario que sea así. Concedamos que para los movimientos y, respectivamente, curvas que se

(*) Y se entiende en la misma dirección. Y lo mismo dígase del trazado de las curvas. (*N. del T.*).

toman en cuenta usualmente se cumpla lo postulado por la intuición. Cabe, con todo, concebir ciertos movimientos complicadísimos, ciertas curvas complicadísimas en que no se cumpla.

También en este problema resulta engañosa la aparente seguridad de la intuición [5]. Verdad que la falta de espacio nos impide extendernos largamente en mostrarlo. Tenemos que contentarnos con ligeras indicaciones.

Los dos ejemplos de cómo falla la intuición dilucidados en lo anterior estaban tomados de las consideraciones que sirven de base al cálculo diferencial e integral, terreno dificultoso si los hay; dificultad que ya se transparenta en el solo nombre con que suele designárselo: *matemáticas superiores,* entendiendo con esto destacarlas de las partes elementales de dicha ciencia. Siendo esto así, como lo es, no será de escasa importancia mostrar cómo ya en tales partes elementales es dable comprobar la facilidad de la intuición.

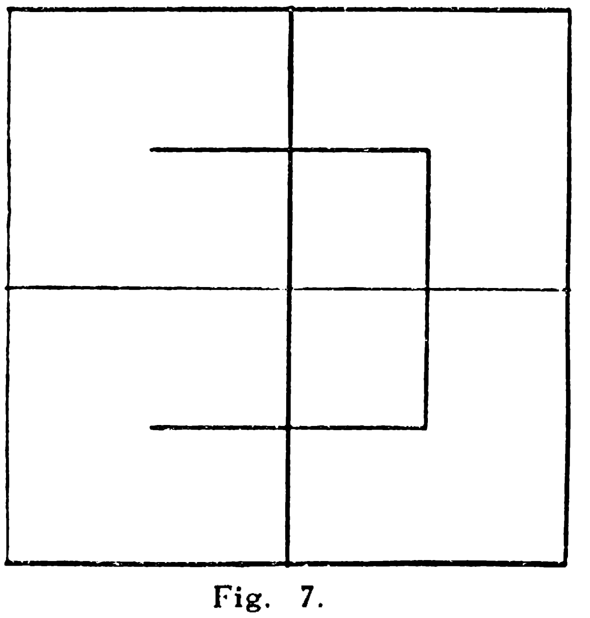


Fig. 7.

En los umbrales mismos de la geometría nos encontramos con el concepto de curva. No hay quien no crea tener una noción intuitivamente clara de este último concepto. Y esta noción veníase creyendo desde antiguo poder encerrarla en la siguiente definición: curva es toda forma geométrica que se genera por el movimiento de un punto (6). ¡Pero véase lo que son las cosas!

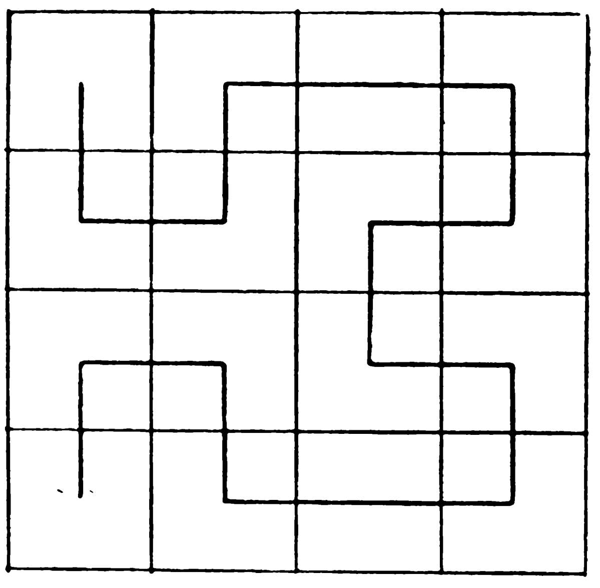


Fig. 8.

En 1890 el matemático italiano Giuseppe Peano — benemeritísimo también por sus investigaciones de lógica — mostró que entre las formas engendrables por un punto en movimiento figuran también superficies enteras. Cabe concebir, p. ej., que el punto se mueva de tal modo, que en un espacio de tiempo finito recorra todos los puntos de una superficie cuadrada. Y sin embargo, nadie querrá por eso considerar una superficie cuadrada como una curva.

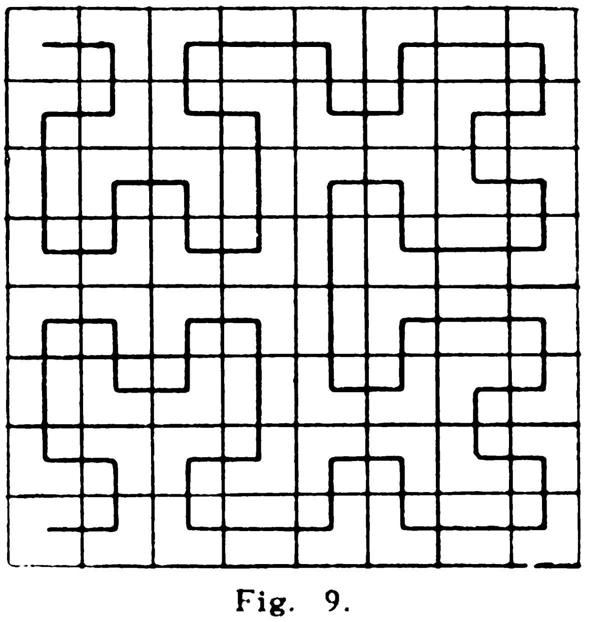


Fig. 9.

Voy a tratar de ayudarles a Vds. a la luz de un par de figuras a que se formen una idea siquiera aproximada de cómo se llega a un movimiento tal de un punto (7). Divídase un cuadrado en cuatro cuadrados parciales de igual tamaño (fig. 7), y únanse los centros de estos cuadrados por medio de una línea quebrada, e imagínese un punto que en un espacio de tiempo finito, por ej., en la unidad de tiempo, recorra con velocidad uniforme esta línea quebrada. Divídase luego (fig. 8) cada uno de los cuadrados parciales de la fig. 9 en cuatro cuadrados parciales de igual tamaño, y únanse los centros de estos 16 cuadrados parciales, e imagínese que el punto se mueve de modo que en la unidad de tiempo recorra, con velocidad uniforme, esta nueva línea quebrada. Vuelva a dividirse luego (fig. 9) cada uno de los cuadrados parciales de la fig. 8 en cuatro cuadrados parciales del mismo tamaño, únanse los centros de esos 64 cuadrados parciales por una línea quebrada, e imagínese que el punto se mueva de modo que en la unidad de tiempo recorra con movimiento uniforme esta nueva línea quebrada. Se ve claro cómo se puede proseguir esta operación. La fig. 10 muestra unos de los pasos posteriores de la misma, en el cual el cuadrado grande está dividido en 4096 cuadrados parciales. Ahora bien, cabe demostrar rigurosamente que los sucesivos movimientos tomados aquí en consideración: el primero, en el cual el punto recorre en la unidad de tiempo una línea quebrada que une los centros de los 4 cuadrados parciales de la fig. 7; el segundo, en el cual el punto recorre en el mismo tiempo la línea quebrada que une los centros de los 16 cuadrados parciales de la fig. 8;

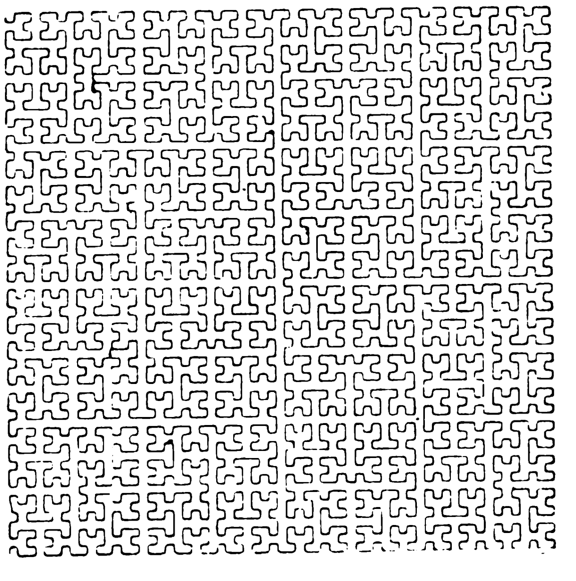


Fig. 10.

el sexto, en el cual el punto recorre en el mismo tiempo la línea quebrada que une los centros de los 4096 cuadrados parciales de la fig. 10, se van acercando indefinidamente a un movimiento determinado, en el cual el punto recorre en la unidad de tiempo todos los puntos del cuadrado. Claro está que tal movimiento escapa a toda posibilidad de ser captado intuitivamente. Sólo el análisis lógico puede captarlo.

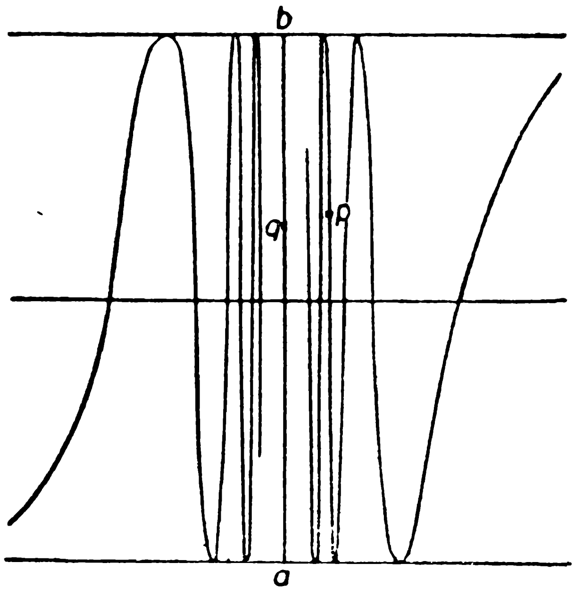


Fig. 11.

Contradiciendo pues, todo lo que parece mostrar la intuición, hay formas geométricas a las cuales a nadie se le ocurrirá considerar como curvas, por ej., un cuadrado, y que, sin embargo, pueden ser engendradas por el movimiento de un punto. Pero ocurre también lo contrario. Hay formas geométricas que uno se inclinaría a mirar como curvas, y que no obstante no son engendrables por un punto en movimiento.

Considérese, por ej., la forma geométrica esbozada en la fig. 11: una línea ondulada que en las cercanías de la recta *a b* — que se ha de mirar como perteneciente a dicha forma — presenta infinitas ondas de longitud indefinidamente decreciente, pero cuyas amplitudes — contrariamente a lo que pasaba en la fig. 3 — no van decreciendo indefinidamente, sino que son todas iguales. No es difícil demostrar que tal forma geométrica, a pesar de su carácter lineal, no puede ser engendrada por el movimiento de un punto. No cabe concebir, en efecto, movimiento alguno en el cual el punto recorra, en un espacio de tiempo finito, todos los puntos de esta forma.

Naturalmente que esto plantea dos importantes cuestiones. Primero: ya que, por lo visto, la definición susomentada de curva, que goza del prestigio de una venerable antigüedad, es completamente inapropiada para encerrar en una fórmula la noción que nos formamos de una curva, ¿por cuál otra definición, más apropiada, se ha de sustituirla? Y segundo: ya que, por lo visto, no todas las formas geométricas engendrables por un punto en movimiento son por fuerza curvas, ¿cuáles son entonces las formas geométricas engendrables por el movimiento de un punto? A ambas cuestiones se ha contestado hoy satisfactoriamente. Sobre la contestación dada a la primera volveremos más tarde. Sobre la segunda digamos algunas palabras a renglón seguido ([8]).

A esta segunda cuestión logróse dar respuesta merced a un nuevo concepto geométrico: el de *la conexión en lo pequeño* o *conexión local.* Examinemos algunas figuras engendrables por el movimiento de un punto, por ej., una recta, un círculo y un cuadrado (fig. 12). Tomemos sobre cualquiera de estas formas dos puntos P y Q situados muy próximamente el uno del otro. Presupuesto esto, podemos llegar de P a Q sin tener que salirnos de la respectiva forma por un camino que permanece muy

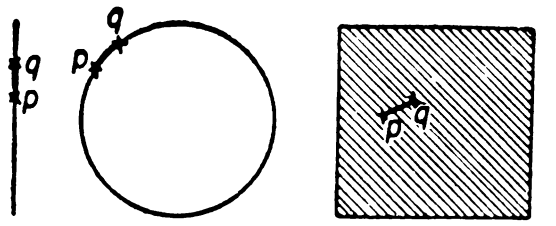


Fig. 12.

cercano a P y a Q: esta propiedad se designa — usando un lenguaje más preciso — con el nombre de *conexión en lo pequeño*. La forma esbozada en la fig. 11 no goza de esta propiedad. En efecto, considérense, por ej., los dos puntos P y Q situados muy próximos el uno al otro sobre la misma: si se quiere llegar de P a Q sin abandonar la forma habría que recorrer todas las infinitas ondas de la línea ondulada que median entre uno y otro; pero este camino no permanece muy próximo a P y Q, por cuanto todas las ondas tienen igual amplitud. Ahora bien, la *conexión en lo pequeño* es lo que caracteriza esencialmente las formas geométricas elementales.

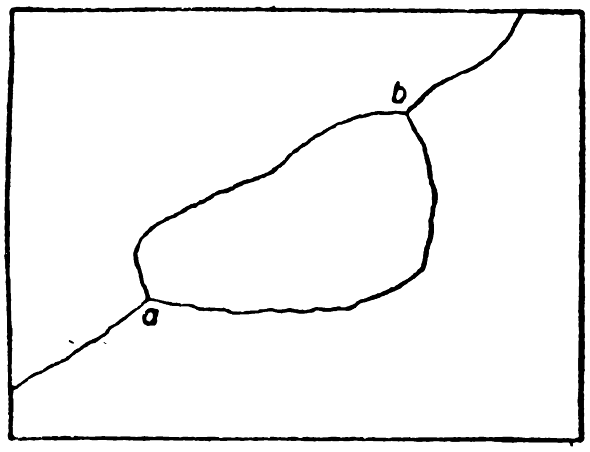


Fig. 13.

Imaginemos un mapa en que no haya más que tres países limítrofes, los cuales se limiten mutuamente en forma tal que los tres se toquen a la vez en *cualquier* punto limítrofe. Vamos a procurar aclarar de algún modo también esto, siquiera sea a la ligera. Esta demostración la ha dado el matemático holandés L. E. J. ~~Brauer~~ en 1910.

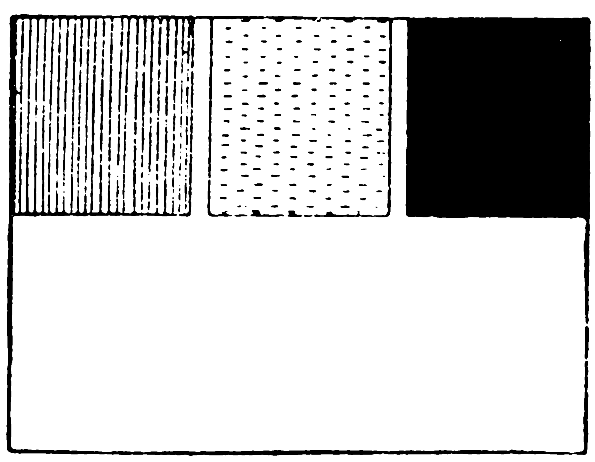


Fig. 14.

Partimos del mapa de la fig. 14, en que se encuentran tres países: uno rayado, uno punteado y uno negro.

En cuanto al resto del territorio figurado en el mapa, carece de dueño conocido. Ahora bien; el país rayado resuelve buscar expansión por el lado de este territorio sin dueño. Para ello se apodera de una faja del terreno vacante que avanza en todos sentidos hasta un kilómetro de las fronteras del mismo, pero que — para evitar conflictos — no toque a ninguno de los otros dos países vecinos. Viendo esto, los del país punteado se dicen: ¡pues podemos hacer también nosotros lo mismo! Dicho y hecho. También ellos se apoderan de una faja del territorio vacante que avanza, en todos sentidos, hasta medio kilómetro de las nuevas fronteras de aquel, pero que no toca a ninguno de los dos otros países (fig. 16). En vista de estos dos precedentes los del país negro piensan: ¡cualquier día habríamos de quedarnos atrás nosotros! Y poniendo en práctica su pensamiento, se apoderan también ellos de una faja del territorio vacante que avanza, en todos sentidos, hasta un tercio de kilómetro de las nuevas fronteras del mismo pero que no toca a nin-

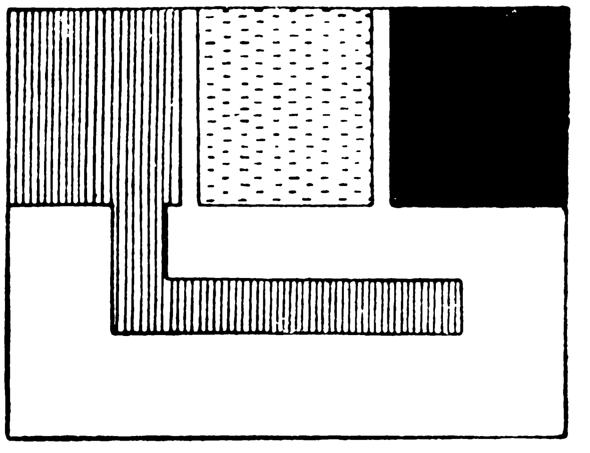


Fig. 15.

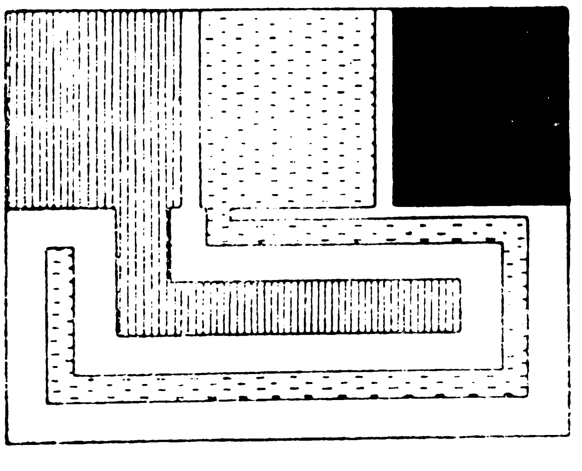


Fig. 16.

guno de los otros dos países (fig. 17). Una vez sucedido esto, los del país rayado se dicen: ¡Nos han ganado el juego! ¡No tenemos otro remedio que avanzar de nuevo! Y vuelta a apoderarse de una faja de terreno del territorio vacante que avanza hasta un cuarto de kilómetro de las nuevas fronteras del mismo, pero que no toca a ninguno de los otros dos países. Y así sigue y sigue la operación. El país punteado se apodera de una faja cuya distancia a cualquiera de los puntos aun vacantes alcanza como máximo un quinto de kilómetro. Luego el país negro se apodera de una faja cuya distancia a cualquiera de los puntos aun vacantes alcanza como máximo a un sexto de kilómetro. Luego vuelve a apoderarse de una faja de terreno el país rayado, etc., etc.

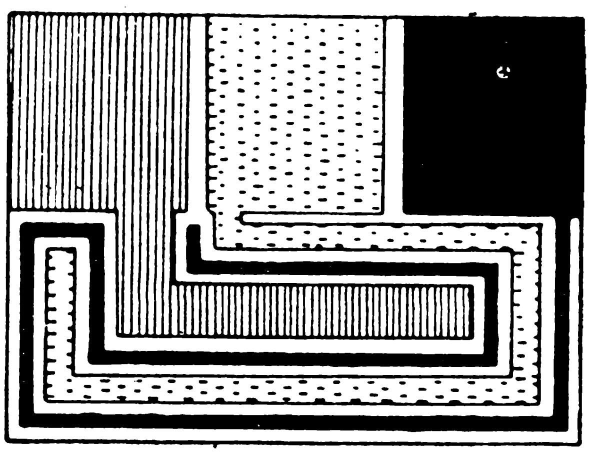


Fig. 17.

Y ya que le hemos soltado las riendas a la fantasía, dejémosle remontar el vuelo un poco más. Supongamos que el país negro haya necesitado un año para apoderarse de su primera faja de terreno; que el país rayado se haya apoderado de su primera faja al cabo del semestre siguiente; que el país negro se haya apoderado de su primera faja al cabo del trimestre siguiente; que el país rayado se haya apoderado de su segunda faja al cabo del mes y medio siguiente, etc., de modo que el tiempo que se emplee en apoderarse cada nueva faja sea la mitad del empleado en apoderarse de la faja inmediata anterior. No cuesta mucho convencerse que al cabo de dos años no queda más ningún punto vacante, y que los tres países se hallan distribuídos de tal modo, que en ninguna parte se toquen dos solamente de estos tres países: en cualquiera de los puntos limítrofes se tocan los tres a la vez. Pero por cierto que no es por vía intuitiva como llegamos a concebir una distribución tal de los tres países. También aquí ha de entrar en juego el raciocinio. Vemos, pues, una vez más, cómo falla la intuición. Con ser sencillo y todo el problema que nos hemos propuesto, habríamos incurrido en grave error, de fiarnos de ella para resolverlo.

Las proposiciones que a los ojos de la intuición pasan por seguras han ido revelándose como falsas al análisis lógico; y esto no en una o dos cuestiones, sino en muchísimas. A consecuencia de esto ha ido cundiendo en las matemáticas el escepticismo respecto a su valor. Cada vez ha ido ganando más terreno la convicción de que la intuición es insuficiente para que de ella se derive proposición matemática alguna, de que sobre ella no cabe asentar disciplina matemática alguna. Hay que eliminarla de raíz de las matemáticas, hay que convertirla en disciplina lógica, fué la exigencia que llegó a formularse. Todo nuevo concepto matemático que se introduzca debe ser definido en forma puramente lógica; toda demostración matemática debe llevarse a cabo con medios puramente lógicos. Fueron los primeros campeones de esta tendencia: Augustín de Cauchy (1789-1857), Bernard Bolzano (1841-1848), Carl Weierstrass (1815-1897), Georg Cantor (1845-1918) y Richard Dedekind (1831-1916).

Ha sido tarea difícil y penosa ésta de convertir las matemáticas en disciplina puramente lógica. Había que reformarlas de pies a cabeza. Las proposiciones aceptadas antes como evidentes intuitivamente tenían que ser cuidadosamente demostradas. Un ejemplo entre los muchos que pudieran traerse a colación. Una proposición geométrica tan simple como la de que: "Todo polígono cerrado que no atraviese a sí mismo divide al plano en exactamente dos partes separadas", exige una demostración laboriosísima y artificiosísima. Y la dificultad sube de punto en el caso de la proposición análoga para el espacio: "Todo poliedro cerrado que no se atraviese a sí mismo divide al espacio en exactamente dos partes separadas".

Como prototipo de los juicios sintéticos derivados de la intuición pura aduce expresamente Kant la proposición de que: "el espacio es tridimensional". Pero también esta proposición exige — según contemplamos las cosas hoy — un penetrante análisis lógico. Se ha de empezar por definir qué se entiende por número de dimensiones de una forma geométrica, de un *conjunto de puntos*. Y luego se ha de demostrar, en forma puramente lógica, que al fundamentar esta definición el espacio de la geometría común, que es a la par el de la física newtoniana, es, efectivamente, tridimensional. Esto se hizo recién en los últimos años (1921-22), y al mismo tiempo, por el matemático vienés K. Menger y el ma-

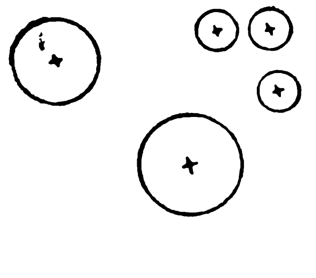


Fig. 18.

temático ruso P. Urysohn, quien en el entretanto, en el apogeo de su fuerza creadora, caía víctima de un trágico accidente.

Voy a indicar, aunque más no sea a la ligera, cómo se define el número de dimensiones de un conjunto de puntos ([12]).

Un conjunto de puntos se dice *nulidimensional,* cuando para cada uno de sus puntos hay contornos lo suficientemente pequeños para que no contengan dentro de sus límites a ningún punto del conjunto. Así, p. ej., todo conjunto compuesto de finitos puntos es nulidimensional (Cfr. la fig. 18); pero se dan también muchísimos conjuntos de puntos nulidimensionales muy complicados que constan de infinitos puntos. Un conjunto de puntos que no sea nulidimensional llámase *unidimensional,* cuando para cada uno de sus puntos hay contornos lo suficientemente pequeños como para que no tengan en común con el conjunto de puntos sino conjuntos nulidimensionales. La recta, cualquier figura compuesta de un número finito de rectas, el círculo, la elipse, en suma, cualquiera de las formas que se designan comúnmente como curvas, son en este sentido unidimensionales (fig. 19). No lo es, empero, menos la forma geométrica representada en la fig 11, que, como vimos, no es engendrable por el movimiento de un punto. Un conjunto de puntos que no sea ni nulidimensional ni unidimensional llámase bidimensional, cuando para cada uno de sus

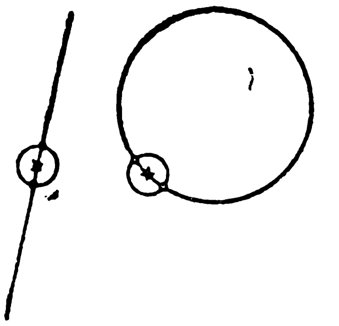


Fig. 19.

puntos hay contornos lo suficientemente pequeños como para que tengan en común con el conjunto de puntos a lo sumo conjuntos unidimensionales. Ejemplifican tal tipo de conjunto el plano, los polígonos, el círculo, la superficie esférica: en suma, todas las formas que se designan comúnmente como superficies, son en este sentido bidimensionales. Un conjunto de puntos que no sea ni nulidimensional, ni unidimensional, ni bidimensional llámase tridimensional, cuando para cada uno de sus puntos hay contornos lo suficientemente pequeños como para que dentro tengan en común con el conjunto de puntos, a lo sumo, conjuntos bidimensionales. Y se demuestra — aunque a decir verdad tal demostración dista muchísimo de ser sencilla — que el espacio de la geometría corriente es efectivamente tridimensional en este sentido.

Suministra asimismo esta teoría una definición realmente satisfactoria del concepto de *curva* ([13]). Como rasgo esencial de las mismas aparece aquí su unidimensionalidad. No se reduce, empero, el aporte de la teoría que comentamos a la definición de las curvas. Pone en nuestras manos también un análisis extraordinariamente sutil de su estructura. Tampoco quisiera pasar en silencio este aspecto de la teoría. Permítaseme, pues, dos palabras sobre él.

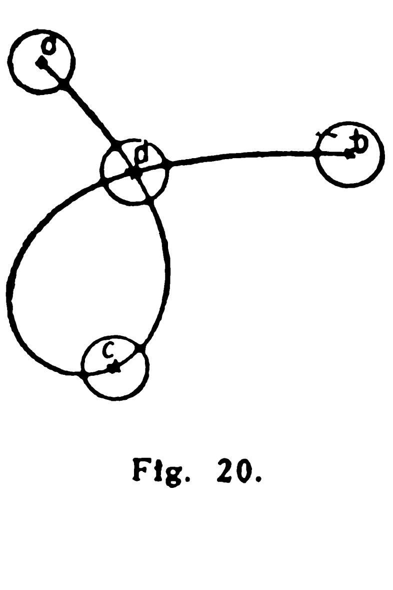


Fig. 20.

Se dice que un punto de una curva es *final*, cuando considerando un contorno alrededor de él pequeño a placer, éste no tiene en común con la curva más que un punto. Así serán puntos finales de la curva de la figura 20 los puntos *a* y *b*. Se dice que un punto de una curva es de ramificación, cuando considerando un contorno alrededor de él pequeño a placer, éste tiene en común con la curva más de dos puntos. (En la fig. 20 lo es el punto *d*).

Ahora, la intuición parece enseñar que en las curvas los puntos finales y de intersección ocupan un puesto de excepción, que en cierto sentido estos últimos son contados; que es imposible que una curva se componga nada más que de puntos finales ni nada más que de puntos de intersección. Conjetura ésta que precisa y corrobora el análisis lógico respectivamente a los puntos finales; pero que refuta respectivamente a los puntos de ramificación. Hay curvas — lo ha demostrado el matemático polaco W. Spienski en 1925 — cuyos puntos son todos de ramificación. Procuremos compenetrarnos de esto mediante un par de indicaciones.

Supongamos que dentro de un triángulo equilátero se inscriba otro triángulo equilátero (el rayado de la fig. 21). Borremos ahora con el pensamiento el interior de dicho triángulo, de modo que no quede de él más que su perímetro: en el triángulo grande quedarán entonces tres triángulos equiláteros. Vuélvase a inscribir un triángulo equilátero en cada uno de estos tres triángulos (fig. 22), y bórrese con el pensamiento el interior de ellos: en el

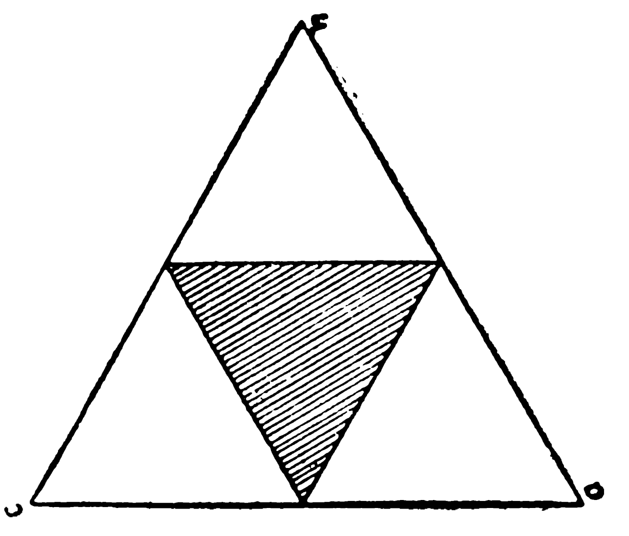


Fig. 21.

triángulo grande quedarán entonces nueve triángulos equiláteros. Vuélvase a inscribir en cada uno de estos triángulos equiláteros que quedan un triángulo equilátero, y bórrese con el pensamiento el interior de ellos: quedarán entonces en el triángulo grande 27 triángulos equiláteros. E imaginemos que esta operación se continúe indefinidamente (la fig. 23 representa el quinto paso de esta operación, en la cual han quedado en el triángulo grande 243 triángulos equiláteros). Ahora bien, cabe demostrar que los puntos del triángulo primitivo que quedan al final de la operación, esto es, que no pueden ser borrados por ninguno de los infinitos pasos de esta última, forman una curva, *todos* cuyos puntos, excepción hecha de los tres vértices *a*, *b* y *c* del triángulo primitivo, son de ramificación. De esta curva es facilísimo obtener otra *todos* cuyos puntos sean de ramificación. Para ello no hay más que desfigurar toda la figura de tal modo, que los tres vértices *a*, *b* y *c* del triángulo primitivo concurran en un punto.

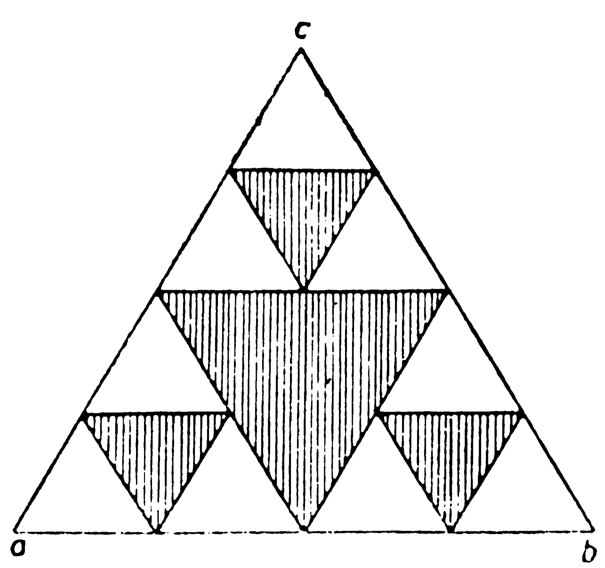


Fig. 22.

Pero dejémonos de ejemplos, y resumamos lo que hemos venido diciendo hasta aquí. Una vez y otra hemos hallado que la intuición es una guía en que no se puede poner ninguna confianza, aun para las cuestiones geométricas más simples y elementales de suyo. Medio subsidiario tan incierto, mal puede proporcionar el punto de partida y los cimientos para una disciplina matemática. El espacio de la geometría no es una forma de la intuición: es una construcción lógica. Sí; pero construcciones lógicas caben muchas. Nada se opone a admitir otros espacios conformados de diverso modo que el de la geometría corriente. Espacios en que, por ejemplo, el postulado de Euclides llamado de las paralelas sea sustituído por el contrario: los espacios *no-euclídeos;* o espacios que tengan más de tres dimensiones; o espacios *no-arquimedeos.* Digamos algunas palabras sobre estos últimos aquí dejando la consideración de los espacios no-euclídeos y polidimensionales para la conferencia siguiente, que estará dedicada a ellos íntegramente.

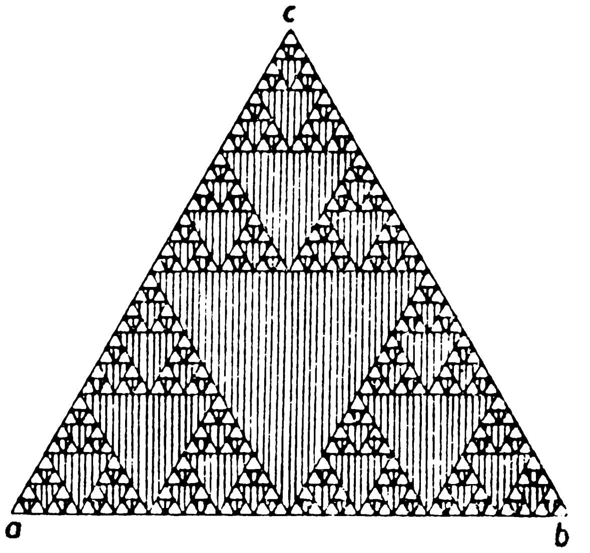


Fig. 23.

La posibilidad de poder medir una recta mediante un número real, y la posibilidad, que deriva de la anterior, de poder determinar la posición de un punto mediante uno o más números reales — sus *coordenadas* — descansa sobre el llamado *postulado de Arquímedes* (14). Este postulado reza: Dadas dos rectas, hay siempre un múltiplo de la primera que sea mayor que la segunda. Pero si hacemos del espacio una construcción lógica, caben espacios en que el postulado de Arquímedes sea sustituído por el contrario, es decir, en los cuales haya rectas que sean mayores que cualquier múltiplo de una recta dada, en los cuales, por tanto, una vez elegida una recta como unidad de medida, haya rectas *infinitamente grandes* y rectas *infinitamente pequeñas*, mientras que en el espacio de la geometría corriente no se dan ni rectas infinitamente grandes ni rectas infinitamente pequeñas. Por de contado que en semejante espacio *no-arquimedeo* cabe medir rectas y cultivar la geometría analítica; eso sí, no con ayuda de los números reales de la aritmética corriente, sino con ayuda de *sistemas de números no-arquimedeos*. Estos números difieren por fuerza de los números reales de la aritmética corriente. Sin embargo, es dable contarlos y hacer cálculos con ellos, lo mismo que con los números reales ([16]).

Todos estos espacios polidimensionales, no-euclídeos y no arquimedeos serán, a fuer de construcciones lógicas, todo lo exentas de contradicciones que se quiera — tal es lo que se oye objetar a menudo —, pero, no siendo, como no son, *intuitivos*, resultan inútiles para ordenar nuestras vivencias. Para ordenar estas últimas la única geometría que sirve, es la tridimensional, euclídea, arquimedea, por ser la única intuitiva. ¿Qué diremos de este reparo?

Cabría replicarles ante todo a los que así razonan — y no otra cosa tendía a demostrar toda mi conferencia — que ni la geometría corriente es tan intuitiva como a ellos se les figura. Absolutamente cualquier geometría — así la tridimensional como polidimensional, la euclídea como la no-euclídea, la arquimedea como la no arquimedea — es una construcción lógica. El desarrollo de la física ha traído consigo el que, para ordenar nuevas vivencias nos valiésemos de la construcción lógica de la geometría tridimensional, euclídea, arquimedea, fin para el cual esta última ha mostrado hasta hace muy poco prestarse excelentemente. Por eso nos hemos ido acostumbrando a su manejo. Y no es sino esta costumbre la que se designa como la intuibilidad de la geometría corriente. Todo lo que se aparte de aquella es tenido por no intuitivo, contrario a la intuición, intuitivamente imposible. ¡Vaya, como si de tales imposibilidades intuitivas no estuviera afectada también la geometría corriente! Y surgen en ella — lo hemos visto — todas las veces que dejando el estudio de las formas a que hemos terminado por habituarnos gracias a un uso prolongado, hacernos entrar en el círculo de nuestras consideraciones otras en que hasta ahora no se había pensado nunca.

Para ordenar nuestras vivencias la física de hasta hace muy poco aplicaba exclusivamente la geometría tridimensional y euclídea. La física novísima, en cambio, ha visto la conveniencia de admitir para el mismo efecto también las construcciones lógicas de las geometrías polidimensionales y no-euclídeas. Pero como recién en fecha muy reciente se ha echado por este camino no nos hemos acostumbrado aun al manejo de tales construcciones lógicas. No es otra la razón porque las tildamos de contrarias a la intuición. Eso por lo que hace a las geometrías polidimensionales y no-euclídeas. Lo que es a las no-arquimedeas, no les hemos hallado, hasta la hora presente, en qué aplicarlas; lo cual no quita de ningún modo que algún día podamos hallárselo.

Con las nuevas geometrías pasa lo que con la teoría de la redondez de la tierra. Uno de los motivos que a menudo solían alegarse para rechazar esta última cuando fuera formulada por primera vez, era que la existencia de antípodas riñe con la intuición. Andando el tiempo hemos ido acostumbrándonos, sin embargo, a esta concepción, y hoy no se le ocurrirá a nadie tacharla de imposible so pretexto de que es antiintuitiva.

Construcciones lógicas son también, lo mismo que los conceptos geométricos, los específicamente físicos. Y su intuibilidad depende, lo mismo que la de los geométricos, nada más que de la costumbre. Los conceptos físicos a cuyo manejo estamos acotumbrados se revisten de carácter intuitivo; aquellos a cuyo manejo no estamos acostumbrados permanecen inintuibles. Se verá claramente lo que afirmamos fijándose en cualquiera de ellos. El concepto de *peso* le es familiar a casi todo el mundo; hijo de esta costumbre arraigada es el tanto de intuibilidad que casi todos le asociamos a él. Pocos son, en cambio, los que manejan el concepto de *momento de inercia*: por eso permanece éste inintuible para la mayoría. A los ojos de muchos experimentadores y técnicos que tienen que hacer uso de él continuamente este concepto se reviste de carácter tan intuitivo como el de *peso* para la generalidad de los hombres. Análogamente, el concepto de *diferencia de potencial* tendrá carácter intuitivo para el electrotécnico, no así para la generalidad de los hombres.

Cuando las construcciones lógicas de las geometrías polidimensionales y no-euclídeas se revelen convenientes para ordenar nuestras vivencias, cuando nos hayamos acostumbrado más a su manejo, cuando se las haya incorporado a la enseñanza escolar, cuando las absorbamos con la leche materna — como sucede hoy con la geometría tridimensional euclídea —, con toda seguridad que no se le va a ocurrir entonces más a nadie ponerles la tacha de ser contrarias a la intuición. Estas geometrías pasarán por tan intuitivas como actualmente la geometría tridimensional euclídea.

La intuición no es — como quería Kant — un medio de conocimiento puro y apriorístico. Engéndrase con la fuerza de la costumbre. La costumbre que, a su vez, tiene por madre a la pereza mental.

BIBLIOGRAFIA

(1) Más detalles al respecto en W. HEISENBERG: *Die physikalischen Prinzipien der Quantentheorie,* Leipzig, Hirzel, 1930

(2) La principal obra en esta dirección es: WHITEHEAD-RUSSELL: *Principia mathematica,* Cambridge University Press, 1910-1913 (2ª ed., 1925). Exposición popular: B. RUSSELL: *Einführung in die mathematische Philosophie. München, Drei-Masken* Verlag, 1923.

(3) Acerca de los conceptos de velocidad y de pendiente puede hallarse una amplia exposición en HAHN-TIETZE, *Einführung in die Elemente der höheren Mathematik,* Leipzig, Hirzel, 1925, p. 153 y p. 190 y sigtes.

(4) Exposiciones matemáticas rigurosas en H. HAHN: *Jahresber. d. Deutschen Math.*— Ver. 26 (1918), p. 281; L. BIEBERBACH: *Differential-und Integralrechnung,* I. Teubner, 1917, p. 104.

(5) Véase H. HAHN: *Monatshefte f. Math. u. Phys.* 16 (1905), p. 161. Trata de movimientos y, respectivamente, curvas cuyas velocidades, y, respectivamente, pendientes llegan a tomar valores infinitos.

(6) Por movimiento entiéndese un desplazamiento *continuo,* esto es, un desplazamiento tal que el punto en movimiento ocupe tan pocas posiciones diferentes como se quiera, considerándolo en instantes suficientemente cercanos entre sí. Un punto que se mueva así no puede, por ejemplo, desplazarse a saltos.

(7) Exposiciones detalladas en H. HAHN: *Theorie der reellen Funktionen,* Berlín, Springer, 1921, p. 146; K. MENGER: *Kurventheorie,* Leipzig, Teubner, 1932, p. 10.

(8) Han respondido a esta cuestión en 1913/14: H. Hahn y St. Mazurkiewicz. Exposiciones más recientes en F. HAUSDORFF: *Mengenlehre,* 2. Aufl., Berlín, de Gruyter, 1927, p. 205; H. HAHN: *Reelle Funktionen,* Leipzig, Akad. Verlagsgesellschaft, 1932, p. 164; H. MENGER: *Kurventheorie,* p. 31.

(9) L. E. J. BROWER: *Mathem. Annalen* 68 (1910), p. 427. En la exposición siguiente hacemos uso de una interpretación intuitiva propuesta por el japonés Wada. Llámase punto limítrofe a todo punto en cuyas cercanías haya puntos de diferentes países. En un punto limítrofe limítanse, pues, los tres países a la vez, si en sus cercanías hay puntos de cada uno de los tres países.

(10) Una demostración de esta proposición encuéntrase en: H. HAHN: *Monatshefte f. Math. u. Phys.* 19 (1908), p. 289.

(11) LILLY HAHN: *Monatshefte f. Math. u. Phys.* 25 (1914), p. 303; N. J. LENNES: *American Journal of Mathematics,* 33 (1911), p. 37.

(12) Exposición detallada en K. MENGER: *Dimensionstheorie,* Leipzig, Teubner, 1928.

(13) Exposición detallada en K. MENGER: *Kurventheorie.*

(14) Sería más justo llamarlo el postulado de Eudoxo. Eudoxo vivió entre 408 y 355 a. Cr.; Arquímedes, entre 287 y 212 a. Cr.

(15) El primero en ocuparse de los espacios no-arquimedeos ha sido el matemático italiano G. VERONESE: *Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen und mehreren Arten gradliniger Einheiten,* Leipzig, Teubner, 1894.

(16) Acerca de los sistemas de números no-arquimedeos cfr. H. HAHN: *Sitzungsberichte d. mathem.-naturwiss. Klasse d. k. Akademie d. Wiss.* Wien 116 (1907), p. 601.

LA CUARTA DIMENSIÓN Y EL ESPACIO CURVO

Por JORGE NÖBELING

Gracias a las teorías físicas modernas han ido acercándose cada vez más al círculo de interés general vastos dominios de la geometría cuya importancia no trascendía antes de las matemáticas. Nos referimos sobre todo a la geometría polidimensional y a las no euclídeas. Sobre estos dominios — que han ido desenvolviéndose siguiendo la senda abierta por los grandes geómetras alemanes Gauss y Riemann — quisiera ayudarles a Vds. a formarse una impresión; impresión que no por ser imperfecta, como naturalmente habrá de serlo, dejará de contener por lo menos respuesta cabal a algunas de las principales cuestiones que, día a día, le van suscitando a estas maravillosas nuevas construcciones de las ciencias exactas, gentes ajenas a estas últimas, y que son fuente de tantas equivocaciones.

He dicho geometrías — en plural —, cuando todo el que no haya estudiado especialmente matemáticas y física vive en la creencia — por culpa del grandísimo atraso en que se ha quedado la enseñanza que se imparte en las escuelas con respecto del estado actual de la ciencia — de que hay una sola geometría: la tridimensional euclídea. Creencia que, por lo demás, se encuentra todavía en Kant, quien atribuye certeza apodíctica a las proposiciones geométricas, y tiene al espacio tridimensional euclídeo por de necesidad intuitiva. Y hay más: hasta hace poco la física no aplicaba otra geometría para la descripción de los hechos de experiencia. Y si hemos acabado por zafarnos de tal espacio no ha sido por cierto partiendo de la experiencia, sino en alas de la pura especulación matemática: la corroboración empírica ha venido más tarde. Pero antes de entrar a tratar de las reflexiones en que se funda el nuevo espacio, así como sus aplicaciones en la física, conviene que nos pongamos en claro primero sobre lo que significa para el matemático el espacio tridimensional euclídeo.

Ya desde el colegio nacional sabe hoy todo el mundo que cualquier lugar del espacio cabe caracterizarlo mediante tres números, las llamadas *coordenadas*, esto es, indicando las distancias del lugar en cuestión a tres planos perpendiculares entre sí. Así, p. ej.: cualquier lugar de una pieza está inequívocamente determinado con indicar su distancia al piso, a la pared de adelante y a una de las laterales. De este hecho — de que cualquier lugar del espacio cabe caracterizarlo mediante tres números, o, como suele decirse, mediante una *terna* de números — arranca precisamente la geometría analítica del espacio tridimensional euclídeo, cuyos orígenes se remontan a Descartes y a Fermat.

Valiéndose de una terna de números se pueden caracterizar también los elementos de otras multiplicidades. Una mezcla de tres gases, p. ej., queda inequívocamente determinada por tres números x, y, z, los cuales indican que la mezcla contiene x unidades de volumen del primer gas, y unidades de volumen del segundo y z unidades de volumen del tercero. Lo mismo si una persona A, está en relaciones financieras con tres personas B, C y D; la posición financiera de A queda inequívocamente caracterizada indicando que B le adeuda x chelines, C y chelines y D z chelines. Si x, y o z fueran negativos, significaría ello que no B, C y D le adeudan a A dichas sumas, sino que, al revés, A se las adeuda a ellos.

Lo que distingue al espacio de la experiencia de las demás multiplicidades descriptibles mediante coordenadas, es que ciertas formas suyas — como líneas, superficies planas, etc. — son de particular interés. Para cualquier punto de una superficie plana bastan las coordenadas x, y, z — cabe comprobarlo efectuando la medición —, de una ecuación lineal, es decir, de una relación de la forma: $ax + by + cz + 1 = 0$, cuyos coeficientes a, b, c son números constantes iguales para todos los puntos de la superficie plana, o, generalizando, de una relación de la forma: $ax + by + cz + \mathrm{d} = 0$ cuyos coeficientes a, b, c y d están inequívocamente determinados, salvo un factor común, por la superficie. Las coordenadas de los puntos de una línea recta satisfacen a dos de tales ecuaciones lineales.

Estos hechos han dado pie para forjar los siguientes conceptos puramente matemáticos.

El sistema de todas las ternas de números x, y, z se llama un *espacio tridimensional euclídeo;* cada terna misma se llama *punto* de este espacio. Si x, y, z y x', y', z' son dos puntos, el número

$$+\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$$

recibe el nombre de *distancia* entre ellos. Los diversos números $x, y, z,$ se llaman también las tres *coordenadas cartesianas rectangulares* del punto (terna de números) x, y, z. Todo conjunto consistente en todos los puntos $x, y, z,$ cuyas coordenadas satisfagan a cualesquiera cuatro números constantes a, b, c, d de la ecuación lineal $ax + by + cz + d = 0$ se llama *plano*. Dos planos que tengan por ecuaciones $ax + by + cz + d = 0$ y $a'x + b'y + c'z + d' = 0$, respectivamente, se dicen *paralelos,* si los coeficientes de estas últimas se hallan ligados por la relación: $a : b : c : d = a' : b' : c' : d'$. La intersección de dos planos no paralelos, esto es, de los conjuntos de todos los puntos cuyas coordenadas satisfagan a la vez a dos ecuaciones lineales, se llama *recta.* Dícese que dos formas G y G' son *congruentes,* cuando pueden copiarse la una sobre la otra conservando fielmente las distancias, queremos decir, cuando a cada punto de G se le puede hacer corresponder de tal modo un punto de G', que entre cada dos puntos de G medie la misma distancia que entre los dos puntos que se les hace corresponder en G'.

Desígnase con el nombre de *geometría analítica* al sistema de todas las consecuencias de estas y otras parecidas definiciones. Sirvan de ejemplo de tales consecuencias —

para citar solamente algunas de las más simples de entre ellas —, la de que un plano y una recta no situada en ella tienen a lo sumo un punto común; el método para calcular las coordenadas de este punto de intersección valiéndose de las ecuaciones del plano y de la recta; la demostración de que dos puntos determinan inequívocamente una recta que pasa por ellos, etc.

A fin de entender los conceptos matemáticos, es de gran importancia tener claramente ante los ojos lo siguiente. Sin duda que el llamado valor intuitivo — en que tan a menudo se insiste — de los citados conceptos de la geometría analítica ha desempeñado relevante papel para su hallazgo y descubrimiento; pero una vez que ha alcanzado su plena madurez, la geometría analítica no se ocupa más del espacio de la experiencia o dígase intuitivo, sus formas parciales y relaciones recíprocas, sino exclusivamente de las *entidades aritméticas*: las ternas de números, los conjuntos de tales ternas y las relaciones que los ligan.

Siendo esto así, nuestra respuesta a la pregunta preliminar de, *¿qué significa para la geometría analítica el espacio tridimensional euclídeo?* es como sigue:

Para la geometría analítica el espacio tridimensional euclídeo es el conjunto de todas las ternas de números en el cual a cada dos ternas x, y, z *y* x', y', z' *le corresponde el número* $\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$ *como distancia, y en el cual se definen ciertos conjuntos parciales, como planos, rectas y las relaciones entre ellos. La geometría analítica del espacio tridimensional euclídeo es el sistema de todas las consecuencias de estas definiciones.*

Hecha esta dilucidación, encarémonos con los conceptos cuyo campo de aplicación cae fuera del espacio tridimensional, en primer lugar con los del espacio tetra y polidimensional.

Desde luego que la descripción mediante coordenadas no se circunscribe a los casos en que se necesitan justo tres coordenadas. Los ejemplos de mezclas de gases y de cálculos con sumas de dinero nos han patentizado que no es forzoso que así ocurra. En vez de mezclas con tres gases, pueden considerarse mezclas de cuatro, cinco o más gases, y caracterizar inequívocamente cada mezcla mediante cuatro o, respectivamente, cinco o más números. Parejamente, cabe determinar inequívocamente a cuánto asciende la fortuna de una persona que se halle en relaciones financieras con tres, cuatro, cinco o más personas, mediante cuatro o, respectivamente, cinco o más números.

Eso lo lleva a uno a pensar que se deba hacer otro tanto con los conceptos geométricos, es decir, libertarlos de la terna de las tres coordenadas, y desenvolverlos para cuatro, cinco o más dimensiones. Y este pensamiento le acude a uno a la mente con tanto más motivo, cuanto que cabe muy bien desarrollar una teoría que opere con *pares* de números al lado de la geometría analítica del espacio tridimensional, e históricamente hasta se la ha desarrollado — bajo el nombre de *geometría bidimensional euclídea* o *geometría del plano euclídeo,* — antes de la de espacio tridimensiona[1]. Aun en la actualidad, por razones pedagógicas, acostúmbrase en la enseñanza hacer preceder el estudio de la geometría del espacio tridimensional por la del plano, en la cual los puntos se explican por *pares* de número x, e y, llamándose x e y coordenadas cartesianas rectangulares; y en la cual la recta se define como conjunto de todos los pares de números x, y que satisfagan a una ecuación lineal $ax + by + c = 0$, mientras la distancia entre dos puntos x, y y x', y' viene dada por el número $\sqrt{(x—x')^2 + (x—y')^2}$. Por lo demás, una vez en posesión de una geometría analítica del espacio tridimensional, se ve que es dable obtener la del plano, anulando una de las coordenadas z, por ej., en las fórmulas de aquélla; esto es, pasando a estudiar qué es lo que ocurre en el plano de un espacio tridimensional.

Defínese análogamente el *espacio tetradimensional euclídeo,* diciendo que es el conjunto de todas las cuaternas de números x, y, z, u, designándose cada una de tales cuaternas de números como un punto del espacio tetradimensional y correspondiéndole a cada dos de tales puntos, es decir, a cada cuaterna x, y, z, u y x', y', z', u', como distancia el número $\sqrt{(x—x')^2 + (y—y')^2 + (z—z')^2 + (u—u')^2}$. Los números x, y, z, y u mismos llámanse las coordenadas cartesianas rectangulares del punto (cuaterna de números) x, y, z, u. En la geometría bidimensional el conjunto de los puntos cuyas dos coordenadas satisfacen a una ecuación lineal, desígnase como recta. En la geometría tridimensional el conjunto de los puntos cuyas tres coordenadas satisfacen a una ecuación lineal se llama plano, recibiendo en la misma el nombre de recta el conjunto de los puntos cuyas tres coordenadas satisfacen a dos ecuaciones lineales. En la geometría tetradimensional, en cambio, desígnase al conjunto de los puntos cuyas cuatro coordenadas x, y, z, u satisfacen a una ecuación lineal $ax + by + cz + du + e = 0$ como *hiperplano;* al conjunto de los puntos cuyas cuatro coordenadas satisfacen a dos de tales ecuaciones lineales como *plano,* y al conjunto de los puntos cuyas coordenadas satisfacen a dos de tales ecuaciones lineales, como *recta.*

Respondamos, pues, a la pregunta: *¿Qué se entiende en geometría analítica por espacio tetradimensional euclídeo?*

Para la geometría analítica el espacio tetradimensional no es sino el conjunto de todas las cuaternas de números, habiéndose de definir de un modo dado la distancia entre cada dos de tales cuaternas, los hiperplanos, los planos y las rectas mediante ecuaciones lineales.

Sobre el espacio de la experiencia o intuitivo la geometría tetradimensional no afirma nada. Pero qué, ¿no hemos visto que dicho espacio tampoco es objeto de la geometría tridimensional euclídea? Así como la geometría analítica del espacio tridimensional euclídeo no es nada más que un sistema de consecuencias lógicas de ciertas definiciones — la del espacio tridimensional como conjunto de todas las ternas de números y la de los planos y rectas por ecuaciones lineales —, así a la pregunta de: *¿qué es la geometría tetradimensional?* cabe responder análogamente?

La geometría tetradimensional euclídea es el sistema de las consecuencias lógicas de las citadas definiciones de espacio tetradimensional como conjunto de todas las cua-

ternas de números, de sus hiperplanos, planos y rectas mediante ecuaciones lineales y de la distancia de sus pares de puntos mediante la fórmula indicada.

Mas antes de proseguir, vayan unos cuantos ejemplos de los resultados que ha dado por fruto la geometría tetradimensional. (3)

En el espacio tetradimensional dos planos tienen en general — conforme se demuestra — un solo punto común (cuyas coordenadas pueden calcularse si se conocen las ecuaciones de ambos planos), contrariamente a lo que ocurre en el espacio tridimensional, en el cual — es bien sabido — dos planos que tengan un punto común se cortan según una recta. En cambio, cabe demostrar que, lo mismo que en la geometría del espacio tridimensional, también en el espacio tetradimensional por dos puntos pasa una recta y una sola. Otras de las cosas de que se ocupa la geometría tetradimensional es el cálculo del volumen de cuerpos tetradimensionales, enumeración de todos los cuerpos regulares, esto es, de los que gozan de ciertas propiedades de simetría, etc.

Al modo como de las fórmulas de la geometría tridimensional euclídea se obtienen las de la geometría plana anulando una coordenada, así de las fórmulas de la geometría tetradimensional euclídea se obtienen las de la geometría tridimensional anulando una de las coordenadas. Con respecto al espacio tridimensional se halla, pues, el espacio tetradimensional en la misma relación que aquél respecto al plano. La única diferencia esencial entre el espacio tridimensional y el plano consiste en que en el primero se tiene más libertad de movimiento que en el segundo. Vamos a aclararnos esto, no con el espacio tridimensional euclídeo mismo de todas las ternas x, y, z, sino con el espacio de la experiencia, descriptible mediante tres coordenadas; en el cual, por tanto, es dable seguir todos los movimientos geométricamente, es decir, traducirlos en las fórmulas de la geometría analítica.

Figurémonos un plano del espacio tridimensional poblado por seres bidimensionales ligados al plano. La forma de tales seres sería, pues, como la de nuestras sombras, o cosa así. Sus casas semejarían los planos de las nuestras; sus armarios tendrían forma de rectángulos; las paredes de los armarios serían los lados de los rectángulos. Imaginemos ahora que dentro de uno de tales armarios pertenecientes a nuestros seres superficiales se halle encerrado un objeto.

¿Cómo se las arreglarían para sacarlo de allí? Sólo abriendo el armario, esto es, apartando, haciendo girar o agujereando una de sus paredes. De otro modo les sería imposible. Imposibilidad ésta que no subsistiría sin embargo para un hombre tridimensional que diese en observar este mundo plano, que para él acaso ocuparía el plano X. Y de su sistema de coordenadas (el plano en el cual $z = 0$. Como que tal ser tridimensional podría sacar sin esfuerzo el objeto del armario sin ni siquiera tocar las paredes de éste último, y transportarlo luego a cualquier lugar del mundo plano. La geometría analítica tridimensional permite seguir fase por fase la operación requerida para ello. El observador tridimensional no tendría más que levantar el objeto que hubiese de ser transportado por encima del plano que sirve de habitación a los seres superficiales; es decir, si, por ej., $\overline{x}$, $\overline{y}$

son las dos coordenadas del objeto en el mundo plano, mover el objeto de modo que en el mundo tridimensional llegue a tener por coordenadas $\bar{x}$, $\bar{y}$, z (z crece de 0 a 1 (*)) A continuación debería desplazar el objeto en el mundo tridimensional a lo largo del plano $z = 1$ hasta el punto $\bar{\bar{x}}$, $\bar{\bar{y}}$, 1. Por último, debería volver a colocar el objeto en el mundo plano, haciéndole recorrer a tal efecto los puntos $\bar{\bar{x}}$, $\bar{\bar{y}}$, z (z decrece de 1 a 0). A los ojos de los seres planos, a cuya observación directa sólo es accesible su plano, ese fenómeno aparecería como una repentina desaparición del objeto del armario, y como una no menos repentina reaparición del mismo fuera de aquél.

O si no supongamos que los seres planos tuvieran dos manos que fuesen cada una de ellas como el reflejo en un espejo la una de la otra — según sucede con nuestras manos —, y cuya forma fuese como la sombra que proyectan estas últimas. Los guantes, que entre nosotros — gente de tres dimensiones — son de pieles finas, casi sin espesor, y cuya forma es igual a la de nuestras manos, se reducirían entre los seres planos a un hilo fino, casi sin ancho, cuya forma dibujaría fielmente los contornos de sus manos planas. Y nunca podría un ser plano meter la mano derecha en un guante de la mano izquierda — a no ser que lo diese vuelta al revés —, como nosotros no podemos hacerlo con nuestros guantes; pues no habría en el mundo plano movimiento alguno capaz de

(*) Un suponer, porque z puede crecer de 0 a cualquier número finito, debiendo luego decrecer — al volver a colocar el objeto en el plano — en igual valor. (N. del T.).

llevar a hacer coincidir un guante plano de la mano izquierda con guante plano de la mano derecha. Y otra vez podría darse el gusto un observador tridimensional que tuviese ganas de divertirse de sembrar la confusión entre los seres planos. Para ello levantaría los guantes correspondientes a la mano izquierda y les haría describir un arco de 180° en su espacio tridimensional — tomando el dedo medio, por ej., como eje —, volviendo luego a colocarlos en el mundo plano. Los guantes en cuestión no servirían entonces más que para la mano plana derecha.

Cosa análoga sucede en el mundo tridimensional. Si encierro un objeto en un armario de forma cúbica, p. ej., me es imposible sacarlo de él sin abrir o dañar sus paredes. Consideremos, por el contrario, a nuestro espacio tridimensional tal como nos lo ofrece la experiencia embutido dentro de un espacio tetradimensional, es decir, admitamos que fuera de los puntos accesibles a nuestra observación directa haya otros todavía cuya descripción exigiría cuaternas de números. Esto supuesto y admitido, un observador tetradimensional de tal espacio podría sacar sin esfuerzo el objeto del armario sin tocar las paredes de éste, y colocarlo luego en un lugar cualquiera del espacio tridimensional. La geometría analítica del espacio tetradimensional permitiría seguir fase por fase la operación requerida para ello. Si $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$, son las coordenadas del objeto que ha de ser transportado en nuestro espacio tridimensional, el observador tetradimensional tendría que empezar por hacer recorrer al objeto los puntos $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$, u (u crece de 0 a 1, por ej.); luego moverlo a lo largo del hiperplano en cuya ecuación u sea 1 hasta el punto de coordenadas $\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}, \bar{\bar{z}}, 1$; y, por fin, volver a desplazarlo de vuelta hacia el mundo tridimensional, haciéndolo recorrer para tal efecto todos los puntos $\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}, \bar{\bar{z}}, u$ (u decrece de 1 a 0).

De igual manera, un observador tetradimensional podría, según enseña la geometría tetradimensional, transformar nuestros guantes correspondientes a la mano izquierda en los correspondientes a la mano derecha. Para ello sacaría los de nuestro mundo tridimensional, les haría describir un arco dado volviendo luego a colocarlos en aquél. Estaría en sus manos, además, separar, sin tocarlos, dos anillos entrelazados de nuestro mundo tridimensional. Supongamos que se le haga un nudo a una cuerda y que luego se sellen los extremos de ésta. Pues bien, a nuestro imaginario observador tetradimensional le sería dado desatar el nudo sin romper los sellos ni deteriorar la cuerda en ninguna parte. Todas estas operaciones, irrealizables como es natural en el espacio tridimensional, nos las enseña a seguir fase por fase la geometría del espacio tetradimensional.

Las anteriores dilucidaciones nos llevan de la mano a la cuestión: ¿En qué relación se halla la geometría tetradimensional, que hemos introducido como un sistema de puros conceptos matemáticos y sus consecuencias, con respecto de la experiencia? Hemos visto que todos los lugares del espacio de nuestra experiencia cabe caracterizarlos mediante ternas de números. De otros puntos, para cuya descripción se requeriría una cuarta coordenada, no tenemos noticia; bien así como los seres planos considerados más arriba pueden caracterizar todos los puntos de su mundo plano por dos coordenadas, pero no conocen en su mundo punto alguno para cuya descripción hagan falta más de dos coordenadas. Claro está que si los seres planos comprobaran regularmente y en forma inobjetable que ciertos objetos desaparecen en un lugar de su espacio para volver a aparecer en otro, que otros objetos cabe sacarlos de armarios cerrados, sin tocar para nada las paredes de éstos, etc., no podrían menos de tratar de buscarles explicación a tan — para ellos — notables fenómenos. Y una de las hipótesis que podrían ocurrírseles para explicarlos — sobre todo si sus geómetras hubieran ya formulado una geometría tridimensional como puro sistema lógico —, sería de que su mundo bidimensional está embutido en un espacio tridimensional; los puntos del cual situados fuera de su plano, si bien escapan, por alguna razón, a su percepción directa, no dejan de servir para que por ellos puedan desaparecer o reaparecer en ocasiones objetos de su mundo plano. Con este espacio se explicaría satisfactoriamente cómo un guante correspondiente a la mano izquierda desaparece para volver a aparecer transformado en guante de la mano derecha: bastaría que después de abandonar el plano describiese un arco en tal espacio.

Apliquemos lo dicho a nuestro mundo. Si comprobáramos, regularmente y en forma inobjetable, en circunstancias dadas, la aparición y desaparición inmotivada de objetos, el que es posible sacar objetos encerrados en armarios sin tocar las paredes de éstos, separar anillos entrelazados, deshacer nudos de cuerdas cuyos extremos estén unidos, y otros fenómenos por el estilo imposibles en el espacio tridimensional, bien podríamos, para explicarlos, formular la hipótesis de que el mundo tridimensional accesible a nuestra percepción directa se halla embutido en un espacio tetradimensional. Y bien, todos los fenómenos mentados los han tratado en efecto de llevar a cabo ocasionalmente los mediums espiritistas. Lo malo que como ninguno de estos intentos ha sido suficientemente verificado, y de todos se sospecha si no serán juegos de prestidigitación, la demostración de que el mundo tridimensional de nuestra experiencia esté embutido en un espacio tetradimensional — no de otro modo como lo está un plano en uno tridimensional — puede declararse fracasada, y la hipótesis de tal espacio tetradimensional como superflua por hoy.

¿En qué relación, pues, *se halla la geometría tetradimensional con respecto de la experiencia?*

Lo anterior nos permite contestar a esta pregunta así: *Siendo la geometría tetradimensional misma un sistema de consecuencias de ciertas definiciones, por tanto, una construcción lógica independiente de toda experiencia, la cuestión acerca del número de dimensiones del espacio es de orden completamente empírico. Verdad es que cabe imaginar hechos que se explicarían sin dificultad encuadrando el espacio tridimensional de nuestra experiencia en un espacio tetradimensional. Experimentalmente, empero, no se ha demostrado la existencia de tales hechos.*

Y sin embargo, en otro sentido la geometría tetradimensional no ha dejado de encontrar aplicaciones físicas. Todo suceso ocurre en un lugar determinado del espacio tridimensional caracterizable por tres coordenadas, y en un momento determinado del tiempo, que se puede precisar mediante un número. En total, pues, cabe hacerle corresponder a todo suceso cuatro números, esto es, un punto de un espacio tetradimensional. Modo éste de representación de que hace uso, según lo expuso el Sr. Thirring en su conferencia, la teoría de la relatividad.

Huelga decir que como construcciones lógicas, no sólo se han desarrollado una geometría tetradimensional, sino también geometrías pentadimensionales y polidimensionales. ¿Se quiere más? Se contemplan en la geometría espacios de infinito número de dimensiones, cuyos puntos se definen como consecuencias infinitas de números coordenados. Si se considera una cantidad de gas que llena una parte del espacio tridimensional euclídeo y que se compone de las n moléculas M_1 $M_2 \ldots$ M_n la posición de cada molécula M_i en un instante t está determinada por tres coordenadas x_i, y_i, z_i; y el impulso en el instante t — si m designa la masa y $\dot{x}_i$, $\dot{y}_i$, $\dot{z}_i$, las componentes de velocidad de M_i. — por los tres números $m_i\dot{x}_i$, $m_i\dot{y}_i$, $m_i\dot{z}_i$. Los números sexenarios x_i, y_i, z_i, $m_i\dot{x}_i$, $m_i\dot{y}_i$, $m_i\dot{z}_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ caracterizan el estado de movimiento del gas en el momento t. Y para comprobarlo con otros estados, se le hace corresponder a cada estado de movimiento — después de Boltzmann — un punto del espacio hexadimensional, el llamado espacio físico. El conjunto de todos aquellos puntos de este espacio que corresponden a estados de movimiento con una determinada energía total, es una hipersuperficie de este espacio.

Con eso ponemos punto final al examen de los espacios polidimensionales euclídeos — más adelante volveremos, sin embargo, brevemente sobre el problema general del espacio —, y nos encararemos con los espacios *curvos*.

Para empezar partimos, lo mismo que antes, del concepto de espacio euclídeo. Las definiciones del espacio tridimensional euclídeo como conjunto de todas las ternas de números, de las rectas y planos por ecuaciones lineales — tales como las da la geometría analítica —, no son las primitivas de estos conceptos. El antiguo edificio de la geometría, obra de Euclides, descansa más bien sobre axiomas.

Sean *A*, *B* y *C* tres sistemas de cosas cualesquiera. Supuesto caso que entre cosas medien relaciones que satisfagan a ciertos postulados (axiomas), los elementos de *A* se llaman puntos, los de *B* rectas y los de *C* planos. Y la totalidad de los puntos, rectas y planos, esto es, la totalidad de los elementos de *A*, *B* y *C*, llámase un espacio tridimensional euclídeo. Formuladas las definiciones, vienen los axiomas. Así, por ej., a unas de la relaciones entre puntos y rectas, entre puntos y planos, así como entre rectas y planos que se designa *el estar en*, o *estar situado en*, ha de satisfacer los siguientes postulados. Dos puntos están sobre una recta. Dos puntos no pueden estar a la vez en rectas diferentes, es decir, una recta es determinada inequívocamente por dos puntos situados sobre ella. En una recta hay dos puntos por lo menos. En un plano hay tres puntos, por lo menos, no situados en línea recta. Si dos puntos de una recta *r* están en un plano, la recta *r* está en este plano. Si un punto está en dos planos, hay un punto más, por lo menos, en ambos planos. Si r es una recta y P un punto no situado en r, hay en el plano que contiene a r y a P una paralela, y una sola, a r que contiene a P, recibiendo aquí el nombre de *paralelas* dos rectas situadas en un plano cuando no existe ningún punto del mismo que esté a la vez en las dos. El postulado últimamente mencionado es el famoso *axioma de las paralelas.* ([4])

Ahora bien, a efecto de entender los demás conceptos geométricos es de gran importancia tener claramente presente que la geometría axiomática versa tan poco como la analítica sobre el espacio de la experiencia, que antes bien aquélla no es nada más que el sistema de todas las consecuencias lógicas de los axiomas. Pero mientras en la geometría analítica del espacio tridimensional euclídeo los puntos, las rectas y los planos se definen como ternas de números y por ecuaciones lineales, y todas las proposiciones se deducen de las definiciones mediante el cálculo, en la geometría axiomática no se dan ninguna clase de definiciones de las palabras: punto, recta y plano. Por lo tanto, en ella tiene uno entera libertad en cuanto a la interpretación de lo que sean el punto, la recta y el plano. Lo único que postula tal geometría son algunas *relaciones entre ellos,* que han de satisfacer a los axiomas, nada más. Por eso, para la geometría axiomática nada hay tan evidente por sí mismo que no haya de ser formulado expresamente en forma de axioma; a menos que quepa deducirlo de los restantes axiomas. Así, nada es más evidente para la intuición que en una recta haya por lo menos dos puntos. Verdad tan obvia, no obstante, es objeto expreso de un axioma en la geometría que vamos comentando.

En lo que toca al fin de la geometría axiomática estriba éste en la elaboración lógica de las afirmaciones designadas como axiomas. De los axiomas se sacan consecuencias; derívanse de ellos, por deducción lógica, otras afirmaciones, las llamadas *proposiciones*. Así, por ej., cabe deducir de ellos las conocidas proposiciones sobre los triángulos semejantes y la importante proposición de que en todo triángulo la suma de los ángulos interiores es de 180º. Como las proposiciones no son sino consecuencias de los axiomas, todo el fin de la geometría axiomática viene a cifrarse en mostrar cómo en un sistema de cosas llamadas puntos, rectas y planos, entre los cuales median relaciones que satisfacen a los axiomas, gozan también estas relaciones las propiedades enunciadas en los teoremas.

Pero si bien el que los axiomas correspondan a ciertos hechos del espacio de nuestra experiencia, o el que sean conformes a una llamada intuición del espacio tuvo su importancia, desde el punto de vista eurístico, para llegar a formularlos, no lo tiene para la geometría axiomática como sistema completo. Si se la considera en este último sentido, la geometría va avanzando de teorema en teorema más bien independientemente de toda experiencia y de toda intuición, en forma puramente lógica.

Contempladas las cosas a esta luz la respuesta a la la pregunta de: *¿Qué es para la geometría axiomática un espacio tridimensional?* se formula como sigue:

Desígnase con el nombre de espacio tridimensional a todo sistema de cosas cualesquiera, llamadas puntos, rectas *y planos, ligadas entre sí por relaciones que satisfacen a algunos postulados fundamentales, los axiomas euclídeos. Y la geometría axiomática es el sistema de todas las consecuencias lógicas de estos axiomas.*

En cuanto a las relaciones en que se halle tal geometría axiomática con la geometría analítica examinada más arriba — primer problema que debemos resolver antes de seguir adelante —, cabe formularlas así. Por una parte, las proposiciones que en la geometría axiomática se postulan como axiomas, en la geometría analítica se demuestran por cálculo para los puntos, rectas y planos definidos por ternas de números y ecuaciones lineales. Y por otra, basándose en los axiomas de la geometría axiomática cabe demostrar como teorema que los puntos, rectas y planos — no definidos por dicha geometría — son descriptibles por ternas de números y ecuaciones lineales.

Siendo esto así, la geometría axiomática y la analítica aparecen como dos sistemas lógicos equivalentes, o hasta como dos modos diferentes de representar el mismo sistema lógico. ([1])

Al examinar los citados axiomas de la geometría euclídea llama la atención, por más complicado que los demás, el de las paralelas. Por tal motivo, durante largo tiempo se dió en sospechar si no sería posible deducirlo quizá como teorema de los demás axiomas. Desde Euclides hasta comienzos del siglo XIX los intentos de demostrar este axioma se han renovado sin cesar. Pero todos los esfuerzos han sido inútiles. Ha acabado por abrirse camino la convicción de que el axioma de las paralelas de Euclides no puede deducirse de los demás axiomas; de que, antes por el contrario, es independiente de ellos. Convicción que hizo concebir a Bolyai y a Lobatcheffski la atrevida idea de reemplazar dicho axioma por su contrario.

Sea *r* una recta y *P* un punto del plano no situado sobre ella. Pues bien, en este plano — tal postulan Bolyai y Lobatcheffski — hay infinitas rectas que contienen al punto *P* pero que no tienen ningún punto común con *r*. Los demás axiomas de Euclides los conservaron. Modificado así el sistema de los axiomas, pasaron a deducir de él — en un principio de modo puramente formal — los teoremas de la nueva geometría. Excusado está decir que tales teoremas discrepan mucho de los de la geometría euclídea. Uno de ellos reza: la suma de los ángulos interiores de un triángulo es menor que 180°, y difiere tanto más de 180°, cuanto mayor es la superficie del triángulo. Otro teorema reza: no hay figuras semejantes, esto es, figuras de igual forma pero de superficie mayor o menor. Todos estos teoremas forman un sistema deductivo apellidado geometría no-euclídea o, con el nombre de sus descubridores, geometría de Bolyai-Lobatcheffski. ([5])

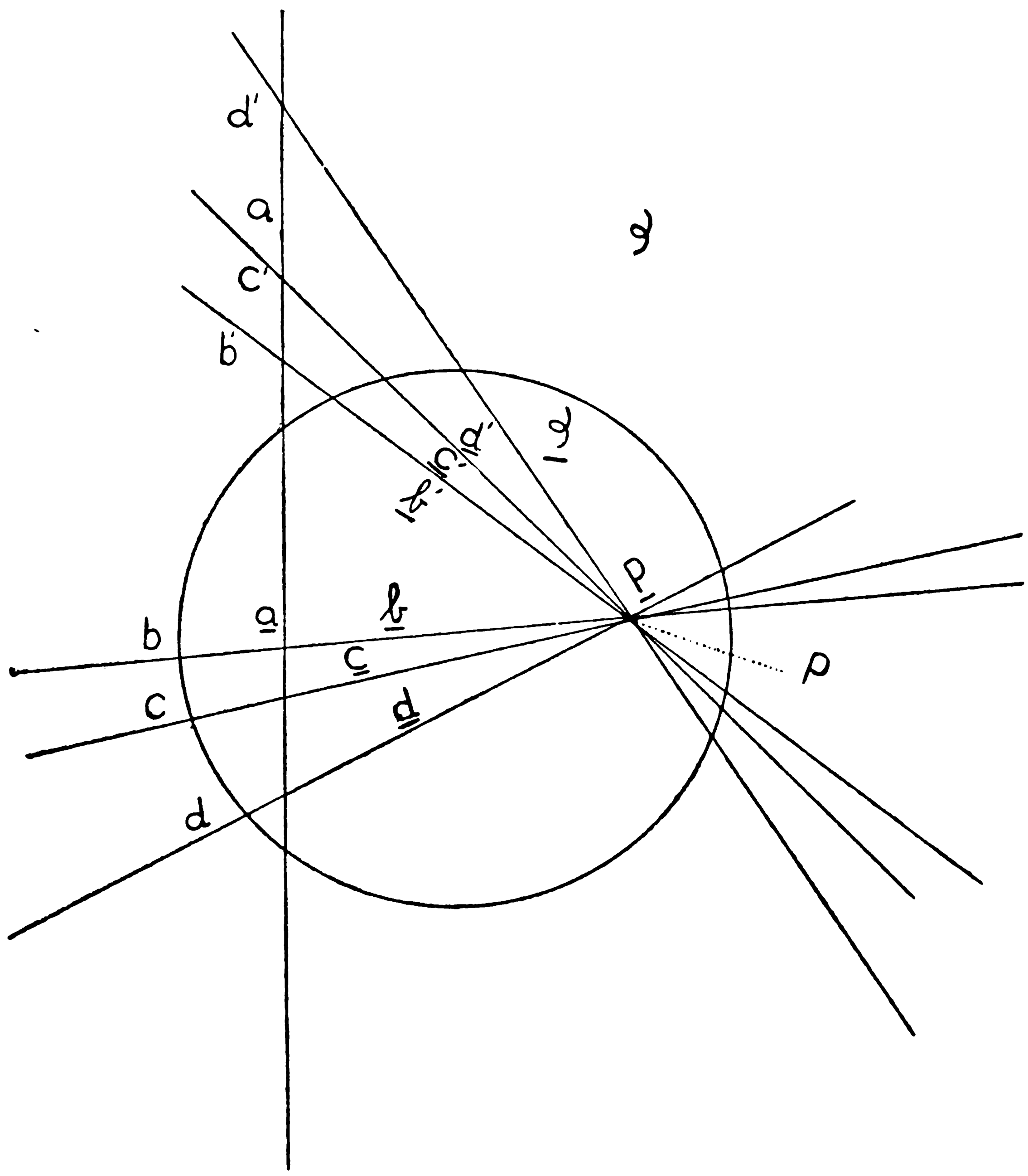
Respondamos, pues, a la pregunta: *¿Qué es un espacio tridimensional no-euclídeo? Llámase espacio tridimensional no-euclídeo a todos sistemas de cosas llamadas puntos, rectas y planos y ligadas entre sí por relaciones que satisfacen a todos los axiomas de Euclides, excepción hecha del de las paralelas, el cual es reemplazado por su contrario. Y la geometría no-euclídea es el sistema de todas las consecuencias de este sistema de axiomas.*

El que estos axiomas no-euclídeos se conformen o no a la intuición del espacio, es para el desarrollo del sistema deductivo de la geometría no-euclídea, lo de menos. Tampoco al desarrollar la geometría euclídea — lo hemos visto — se toma en cuenta ninguna especie de intuición: se procede de teorema en teorema por pura deducción; por demostraciones en que sólo interviene lo afirmado por los axiomas, no así las intuiciones, sean cuales fueren, que los acompañan. Carece igualmente de importancia para el sistema deductivo de la geometría no-euclídea el problema, que nos queda por ventilar todavía, de las relaciones de tal sistema con respecto del espacio de la experiencia, ya que, lo mismo que la geometría euclídea, la no-euclídea no trata del espacio de la experiencia. *La geometría euclídea y la no-euclídea son más bien dos sistemas deductivos que subsisten el uno al lado del otro.*

La única cuestión que sí importa dilucidar para la geometría no-euclídea como sistema deductivo, — y que se plantea debido a lo inusitado de sus teoremas —, es la de si no contendrá acaso *contradicciones,* queremos decir, la de si no será posible acaso deducir de los axiomas no-euclídeos tanto un teorema como su contrario. Tan lejos está de suceder esto para la geometría no-euclídea como para la euclídea. En efecto, Klein ha logrado señalar dentro del espacio tridimensional euclídeo un sistema de cosas tal, que si designan éstas como *puntos, rectas y planos,* satisface a todos los axiomas no-euclídeos

Para obtener este sistema se parte de la consideración del interior de una esfera del espacio tridimensional euclídeo. Como puntos desígnanse solamente los puntos del espacio situados dentro de la esfera; como rectas, solamente los segmentos de recta situados dentro de la esfera; como planos, solamente las partes de los planos del espacio contenidos dentro de la esfera. Estos llamados puntos, rectas y planos satisfacen a todos los axiomas euclídeos, menos al de las paralelas. Así, por ej., dos puntos están sobre una recta, ya que como puntos del espacio euclídeo están sobre una recta de dicho espacio, y el segmento de ésta contenido dentro de la esfera es una *recta* r que contiene a ambos puntos. Y ya que como puntos del espacio euclídeo pueden estar a lo sumo sobre una recta de dicho espacio, queda asimismo determinada inequívocamente la recta del modelo que los contiene a ambos. Análogamente confírmanse todos los demás axiomas euclídeos referentes al punto, la recta y el plano; sólo que en vez del axioma de las paralelas euclídeo se cumple el axioma de las paralelas no-euclídeo. Sea, con efecto, a una *recta* cualquiera, esto es, el segmento contenido dentro de la esfera de una recta del espacio; P un *punto* no situado sobre r y α el plano que contiene a a y a P, el cual viene a ser la parte contenida dentro de la esfera del plano α del espacio que contiene a a y a a. El plano α contiene infinitas rectas que contienen a P y cuyos puntos de intersección con a están fuera del plano α, por tanto no son puntos. Los segmentos de estas infinitas rectas contenidos dentro de la esfera constituyen infinitas *rectas*, que están en α y no tienen ningún punto común con α.

(Para mayor claridad imaginemos una esfera cortada por un plano, que llamaremos $\underline{\alpha}$ en tanto que se lo considera dentro de la esfera, y α en tanto que se lo considera abstracción hecha de la esfera. Y consideremos en este plano una recta, que llamaremos $\underline{a}$ en tanto que el plano que la contiene se considera dentro de la esfera, y a en tanto que el plano que la contiene se considera abstrac-



ción hecha de la esfera. Y sea, por fin, un punto exterior a dicha recta, que llamaremos $\underline{P}$ en tanto que el plano que lo contiene se considera dentro de la esfera, y P en tanto que el plano que la contiene se considera abstracción hecha de la esfera. En este supuesto habrá dos sistemas: el sistema de los *planos* — ya que fuera de α caben infinitos otros: β, γ, δ . . . —, el de las *rectas* — ya que fuera de a caben infinitas otros: b, c, d . . . —, y el de los *puntos* — ya que fuera de P caben infinitos otros: Q, R, S . . . —; y el sistema de los p'anos — ya que fuera de α caben infinitos otros: β, γ, δ . . . —, el de las rectas — ya que fuera de a caben infinitas otras: b, c, d . . . —, y el de los puntos — ya que fuera de P caben infinitos otros: Q, R, S . . . —. Podrán entonces suceder dos cosas. Por nuestro punto pasan infinitas *rectas*: b, c, d . . . , que cortan a a, las cuales si se hace abstracción de la esfera, son rectas — b, c, d . . . — y cortan a a. Por tanto, en cualquier de los sistemas por un punto exterior a una recta pasan infinitas rectas que la cortan. Pero por el mismo punto pasan también infinitas *rectas*: b′, c′, d′ . . . , que no cortan a a, las cuales, si se hace abstracción de la esfera, son rectas — b′, c′, d′ . . . — y cortan a a. Por tanto, si bien en el segundo sistema por un punto exterior a una recta pasan infinitas rectas que la cortan, en el primero por un punto exterior a una recta pasan infinitas rectas que no la cortan: contrariamente a lo postulado por Euclides). (Nota y dibujo del traductor).

Supongamos ahora que en la geometría no-euclídea quepa demostrar, indiferentemente, un teorema como su contrario. Se podrá hacerlo, por consiguiente, para los *puntos, rectas* y *planos* de nuestro modelo. Pero como estos últimos los hemos definido valiéndonos de la esfera, el punto, la recta y el plano del espacio euclídeo, serán formas completamente euclídeas, y, en su consecuencia, la contradicción de que se imagine afectada esta geometría no-euclídea refluirá de rechazo sobre la geometría euclídea, a la que aquélla debe su origen. Y como no es posible admitir que el sistema de la geometría euclídea se contradiga, no queda entonces más remedio que conceder que, si bien el sistema de la geometría no-euclídea discrepa del de la geometría euclídea en un axioma y numerosos teoremas, en sí no se halla menos exento de contradicciones que él.

Toda esta argumentación no hace mella, sin embargo, en los no matemáticos. Véase lo que suelen objetar. La geometría no-euclídea, si de algo trata, es de los puntos, las rectas y los planos. El modelo mentado, en cambio, no comporta tal generalidad, ni mucho menos. ¿De qué se compone, en efecto? De *muchos* puntos del espacio — los situados en el interior de una esfera —; de ciertas *partes* de rectas — las contenidas en el interior de la esfera — es decir, de superficies circulares. Verdad es que los elementos de la esfera se llaman *puntos, rectas* y *planos,* pero de hecho no son más que ciertos puntos, segmentos de rectas, partes de planos (las superficies circulares). Y un punto que ha de cumplir un requisito dado — el de hallarse dentro de los límites de una esfera — no es *el* punto; un segmento de recta, no es *la* recta; una superficie circular no es *el* plano. ¿Cómo pretender entonces demostrar algo acerca de la geometría no-euclídea en base de tal modelo?

Objeción infundada. Para reconocerlo es preciso tener en cuenta que ni la geometría axiomática euclídea ni la geometría axiomática no-euclídea formulan presupuesto alguno sobre lo que *son* el punto, la recta o el plano, que estos entes no son definidos en ninguno de los dos sistemas deductivos. Lo único que sí, es que ambos sistemas postulan algunas relaciones entre dichos elementos, las cuales han de satisfacer a los axiomas. Fuera de esto nada se presupone sobre ellos. Por eso un espacio no-euclídeo no es sino — lo hemos subrayado más arriba — un sistema de cosas cualesquiera, ligadas por relaciones que satisfagan a ciertos axiomas. Y como el sistema de *puntos, rectas* (segmentos) y *planos* (superficies circulares) de nuestro modelo efectivamente satisface — según lo hicimos notar páginas atrás — a todos los axiomas no-euclídeos, esto es, al axioma de las paralelas de Bolyai-Lobatcheffski y a los demás axiomas euclídeos, representará un espacio no-euclídeo y tendrá su correspondiente geometría.

El axioma de Bolyai-Lobatcheffski, está destinado en las geometrías no-euclídeas a hacer las veces del axioma de las paralelas de la geometría euclídea. Pero a todas luces no es tal axioma el único que quepa sustituir al de las paralelas. Obtiénese otro sistema de axiomas reemplazando el de las paralelas por el siguiente postulado: *en un plano no hay absolutamente rectas que no se corten. En particular, si r es una recta cualquiera del plano* y *P* un punto cualquiera del mismo, exterior a *r, ninguna de las rectas que pasen por P será paralela a r.* O dicho en otros términos: *dos rectas cualesquiera de un plano tienen siempre un punto de intersección.*

El sistema deductivo obtenido reemplazando el axioma de las paralelas de Euclides por este otro postulado, pero conservando los demás axiomas euclídeos — y que posee igualmente su modelo en el espacio euclídeo — se designa con el nombre de geometría *elíptica.* La geometría de Bolyai-Lobatcheffski, en cambio, es designada también, a fin de distinguirla esta última, con el nombre de geometría *hiperbólica.* Una de las diferencias capitales entre las tres geometrías aquí consideradas consiste en que, en la geometría euclídea la suma de los ángulos interiores de un triángulo vale 180°; en la hiperbólica, menos de 180° y en la elíptica, más de 180°.

¿En qué relaciones se halla la geometría analítica con respecto a estos espacios no-euclídeos? Ante todo, es de recordar que hay una rama de esta geometría, la *geometría diferencial,* que se ocupa de ciertas propiedades de las líneas y superficies curvas ([7]). Investiga esta geometría, p. ej., el largo de las líneas que se hallen sobre una superficie, los ángulos que forman entre sí tales líneas, el área de superficies, etc. De estos ofrecen particular interés entre estos elementos las llamadas *líneas geodésicas* de una superficie *S*. Son líneas tales, que si se consideran sobre ellas dos puntos, el trozo de arco que los une es menor que cualquiera de los demás arcos que corren en las cercanías de aquél y que unen también los dos puntos. En particular, si la superficie *S* es un plano, las líneas geodésicas vienen a ser rectas; si *S* es una superficie esférica, las líneas geodésicas vienen a ser arcos de círculo máximo, es decir, aquellos arcos de círculo que marcan la intersección de los planos que pasan por el centro de la esfera con la superficie de la misma. La forma de las líneas geodésicas de una superficie S depende en alto grado de la forma de la misma. Consideremos, por ejemplo, cuáles son las líneas geodésicas de la superficie de la tierra. Si esta superficie fuera exactamente esférica, las líneas geodésicas buscadas serían los arcos de los meridianos y el ecuador, por ser unos y otro círculos máximos; no lo serían, en cambio, los arcos de los paralelos, ya que éstos no son círculos máximos. Pero como la superficie de la tierra, a causa de sus montañas y valles, no es exactamente esférica, los arcos de los meridianos no son exactamente sus líneas geodésicas. Pues si entre dos lugares A y B, situados sobre el meridiano M, se interpone una escarpada montaña, un ligero rodeo en torno a la montaña resultará más corto que el camino directo a lo largo del meridiano pasando por la cumbre de aquélla. Y este camino más corto diferirá tanto más del camino a lo largo del meridiano, cuanto más alta y escarpada sea la montaña. De conformidad con esto, si en un mapa estuviera dibujada una red de líneas geodésicas, cabría, en base de ella, inferir la existencia de montañas; más, incluso calcular su altura, por más que estas montañas mismas no estuvieran marcadas con tinta de color o cosa parecida en el mapa. En general, de las propiedades formales de una superficie S es dable concluir el recorrido de sus líneas geodésicas, y viceversa. Por ejemplo, la suma de los ángulos interiores de un triángulo formado por líneas geodésicas sólo puede diferir de 180°

en el caso de ser curva la superficie; y la curvatura será tanto más pronunciada, cuanto más difiera de 180° la suma de dichos ángulos.

Por superficie *lisa* entiéndese en la geometría diferencial el conjunto de todos los puntos x, y, z, que satisfacen a una relación $f\ (x, y, z) = 0$, siendo f una función diferenciable con respecto a cada una de las tres variables.

En particular, si f es una función lineal, esto es, si la relación que define la superficie es de la forma: $ax+by+cz+d = 0$, la superficie lisa es un plano. Toda superficie lisa posee en cada uno de sus puntos — gracias a la presupuesta diferenciabilidad de la función f que la define — un plano tangente; cosa que no ocurre necesariamente en el caso de las superficies no lisas, definidas por funciones del tipo $f\ (x, y, z,) = 0$ continuas, pero no diferenciables. Tales superficies continuas pueden carecer de planos tangentes, no de otro modo como también en el plano — de acuerdo con el análisis hecho por el Sr. Hahn en su conferencia — hay curvas continuas sin tangentes.

Una superficie lisa cabe describirla *a trozos* mediante dos coordenadas. Queremos decir lo siguiente: alrededor de cada punto de la superficie es dable limitar de tal manera un pequeño trozo de superficie, que a cada punto de este último puedan hacérsele corresponder como coordenadas dos números u, v, coordenadas que, a pesar de la pequeñez del trozo, diferirán para cada punto del mismo.

Todo punto del trozo tendrá, pues, como coordenadas un par de números. Pero claro que la inversa no se verifica: no a todo par de números le corresponderá un punto del trozo. Para introducir tales coordenadas en un trozo de superficie se puede proceder, por ej., así: se proyecta éste sobre un plano situado convenientemente — sobre un plano tangente al trozo, pongamos por caso —; se pasa luego a describir este plano mediante dos coordenadas; y por fin, se hace corresponder a cada punto del trozo de superficie las coordenadas u, v de su proyección en el plano.

Gauss halló que, describiendo de este modo un trozo de superficie mediante dos coordenadas, cabe hacerle corresponder a cada uno de sus puntos u, v tres números $g_{11}(u, v)$, $g_{12}(u, v)$, $g_{22}(u, v)$ — las tres funciones dependientes de u, v, pues al variar éstos varían ellos en consonancia —, tales que con su ayuda es dable expresar para la superficie todas las relaciones métricas arriba consideradas: largo de arcos, magnitud de ángulos, áreas. En particular, si se consideran dos puntos u, v y u', v' de la superficie suficientemente próximos entre sí, el largo del arco geodésico que los une diferirá muy poco de la raíz cuadrada de la expresión:

$$g_{11}(u, v) \cdot (u-u')^2 + 2g_{12}(u, v) \cdot (u-u') \cdot (v-v') + \\ + g_{22}(u, v) \cdot (v-v')^2$$

Y la diferencia es muy pequeña, no sólo en el sentido de que en este caso son muy pequeños tanto el arco geodésico como la raíz cuadrada de la expresión susomentada, sino incluso en el sentido de que el cociente del primero por la segunda se acerca mucho a *1*. En particular, si la superficie considerada es un plano y se eligen para u, v las coordenadas cartesianas del sistema cartesiano rectangular x, y, en el cual la distancia entre dos puntos x, y y x', y' es igual a la raíz cuadrada de la expresión $(x—x')^2 + (y—y')^2$, las tres funciones g_{11} (x, y), g_{12} (x, y), g_{22} (x, y) se hacen constantes, esto es, son iguales para todos los puntos x, y de la superficie: valen *1*, *0* y *1*, respectivamente. El arco geodésico que une dos puntos x, y y x', y' es en este caso el segmento entre los dos puntos cuyo largo es igual a la distancia de los mismos, esto es, es igual a

$$\sqrt{(x—x')^2 + (y—y')^2}$$

y esta es la raíz de la expresión para los puntos x, y, y x', y', si se tiene en cuenta que

$$g_{11}\ (x, y) = 1,\ g_{12}\ (x, y) = 0,\ g_{22}\ (x, y) = 1$$

Partiendo de las funciones g_{11} (u, v), g_{12} (u, v), g_{22} (u, v) de una superficie cabe formar una función k (u, v), llamada la curvatura de la superficie en el punto u, v, cuyos valores difieren tanto más de 0, cuanto más difiere de 180° la suma de los ángulos interiores de los triángulos formados por líneas geodésicas de dicha superficie. Para cualquier punto del plano el valor de la curvatura k (u, v) es 0; para cualquier punto de una superficie esférica de radio r *1* k (u, v) vale $= \frac{1}{r^2}$. En general en las superficies en las cuales la curvatura es constantemente positiva la suma de los ángulos interiores de triángulos formados por líneas geodésicas de aquélla es mayor que 180°. En cambio, en las superficies de curvatura negativa dicha suma es menor de 180°.

Estas reflexiones de la geometría diferencial las ha generalizado Riemann para mayor número de dimensiones ([8]). El punto de arranque de esta teoría lo constituye el concepto que se designa hoy como espacio *riemanniano*. Recibe este nombre una multiplicidad M cuyos elementos se llaman puntos, si poseen las siguientes dos propiedades. En primer lugar, M ha de poder ser descripta a trozos por tres coordenadas x, y, z, es decir, si alrededor de cada punto de la multiplicidad es dable limitar de tal modo un trozo, que a cada punto del mismo quepa hacerle corresponder tres números x, y, z, coordenadas que habrán de variar para cada punto del trozo. En segundo lugar, a cada punto se le han de poder hacer corresponder seis números g_{11}, g_{22}, g_{33}, g_{12}, g_{13}, g_{23}, variables de punto en punto, que sean, por tanto, funciones g_{ik} (x, y, z) de los puntos. Gracias a estas funciones y basándose en ciertas fórmulas cabe asignarle a cada línea de la multiplicidad una longitud; a cada ángulo formado por tales líneas, una magnitud; a cada cuerpo de M, un volumen, etc. Merced a las seis funciones g_{ik} (x, y, z) se establecen lo que se llama las *relaciones métricas* del espacio riemanniano. A consecuencia de esto, modificando las funciones g_{ik} (x, y, z), pueden modificarse también las relaciones métricas del espacio, esto es, las líneas pueden cambiar de longitud, los ángulos de magnitud, etc. En particular, al modificar las funciones g_{ik} (x, y, z), una línea puede perder o adquirir la propiedad de ser línea geodésica.

Por un punto cualquiera x, y, z de un espacio riemanniano se puede hacer pasar una superficie S tendida por el haz de líneas geodésicas que pasa por x, y, z, es decir, cuyas líneas geodésicas lo son a la vez del espacio M. Esta superficie S tiene en el punto x, y, z una curvatura. Ahora, si el espacio M posee la propiedad de que esta curvatura sea siempre un número constante k — elíjanse como se quiera el punto x, y, z en el espacio y la superficie geodésica S que lo contiene a aquél —, el espacio M recibe el nombre de *espacio de curvatura constante k*. En particular, si el espacio riemanniano es el espacio euclídeo, la curvatura es igual a 0, ya que en este caso las superficies geodésicas son planos. Al contrario, bajo ciertos sencillos presupuestos un espacio riemanniano de curvatura nula es un espacio euclídeo en el cual las líneas geodésicas son rectas. Casos especiales de los espacios riemannianos de curvatura constante, negativa y, respectivamente, positiva son los espacios hiperbólicos y, respectivamente, elípticos, esto es, los espacios en que los puntos, las líneas geodésicas, etc., satisfacen a todos los axiomas concernientes al punto, a la recta, etc., que sirven de base a la geometría hiperbólica y, respectivamente, a la elíptica.

Un espacio riemanniano de curvatura constante es llamado *esférico*, que es en el espacio tridimensional algo análogo a lo que en el bidimensional es la superficie esférica. Igualmente que en ésta en el espacio esférico las líneas geodésicas son círculos (círculos máximos), lo que trae por consecuencia que en un espacio esférico muchas líneas geodésicas tienen *dos* puntos comunes, así como en la superficie esférica cada dos círculos máximos tienen dos *puntos* comunes, diametralmente opuestos. En el espacio elíptico, en cambio, cada dos líneas geodésicas (*rectas*) tienen a lo sumo *un* punto común.

Pero estos espacios de curvatura constante son tan sólo un caso especial restringido del concepto general de espacio riemanniano, puesto que por regla general las superficies geodésicas de éste no poseen una curvatura constante. Llámanse *curvos* por excelencia los espacios riemannianos en los que la suma de los ángulos de los triángulos formados por líneas geodésicas difiere de 180°. El motivo de esta designación reside en que en la superficie de un espacio euclídeo — la cual puede mirarse como un espacio bidimensional riemanniano — la suma de los ángulos interiores de los triángulos formados por líneas geodésicas sólo vale 180° cuando — lo hemos mencionado — la superficie es curva; y en que la superficie es tanto más curva, cuanto la suma de dichos ángulos se aparta de 180°.

A los no matemáticos la designación ésa de *espacio curvo* no deja de chocarles comúnmente. Están acostumbrados a emplear los términos de *curvo* y *no curvo* nada más que como predicados de *formas parciales* dentro del espacio. Por eso cuando oyen hablar de espacio curvo, experimentan la misma sensación que si se les hablase de botellas líquidas. Y no obstante, no cuesta mucho disipar esta dificultad. Basta con tener presente a qué se refiere el matemático cuando habla de espacio curvo. Con el término curvo no quiere significarse sino la propiedad de los espacios riemannianos de contener triángulos formados por líneas geodésicas la suma de cuyos ángulos interiores difiera de 180°.

Vayamos sacando conclusiones.

¿Qué es, pues, un espacio tridimensional riemanniano? *Un espacio riemanniano es toda multiplicidad descriptible a trozos por tres coordenadas, en la cual se dan seis funciones con cuyo auxilio se definen la longitud de líneas, la magnitud de ángulos, el volumen de cuerpos, etc.*

Y otra pregunta. *¿Qué requisitos ha de reunir un espacio para que el matemático lo califique de curvo?*

Un espacio riemanniano llámase curvo cuando contiene triángulos formados por líneas geodésicas la suma de cuyos ángulos interiores difiera de 180°.

En la geometría analítica se pasa del espacio tridimensional al tetradimensional considerando en vez del conjunto de todas las ternas de números el conjunto de todas las cuaternas de los mismos. En virtud de una consideración análoga pásase del espacio riemanniano tridimensional al espacio riemanniano tetradimensional. Dícese que una multiplicidad de elementos — llamados puntos — es un espacio riemanniano tetradimensional, cuando cabe describirla a trozos mediante cuatro coordenadas, y a cada punto le corresponde un sistema de números que varían generalmente de punto en punto, gracias al cual toda línea es de una longitud dada, todo ángulo de una magnitud dada, etc. Y análogamente se definen espacios riemannianos de n dimensiones.

Pero la abstracción matemática no se ha detenido en modo alguno en el concepto de espacio riemanniano. Después de todo las geometrías de los espacios riemannianos de tres o más dimensiones no hacen sino generalizar las relaciones métricas especiales del espacio euclídeo estudiado por la geometría analítica. En aquéllos, no menos que en éste, los puntos son caracterizados por — tres o más — números: sus coordenadas. Por eso Fréchet, dando un paso más adelante, hace abstracción de la índole especial de los puntos espaciales. Siguiéndolo a este matemático, desígnase como *espacio métrico* un conjunto de elementos cualesquiera a los que se da el nombre de puntos (*), siempre que — único requisito — a cada dos de ellos les corresponda un número, llamado la *distancia* de los dos puntos en cuestión y que satisface a las siguientes condiciones: Cada dos puntos diferentes tienen una distancia positiva; la distancia que separa a todo punto de sí mismo es de 0; si consideramos tres puntos cualesquiera, la distancia entre dos de ellos no es nunca mayor que la suma de las distancias entre los otros dos pares de puntos (del mismo modo que en un triángulo un lado no es mayor que la suma de los otros dos). Valgan de ejemplo de espacios métricos los espacios euclídeos y no-euclídeos de cualquier número de dimensiones.

Claro está, por otra parte, que cualquier conjunto parcial de un espacio métrico es a su vez un espacio métrico ([9]). El haber englobado los espacios euclídeos dentro de estos espacios métricos generales se lo debemos a Menger. ([10])

Pero si Menger y Urysohn han logrado dar con la solución general del viejo problema del número de las dimensiones del espacio, ha sido ante todo gracias a que

(*) Que, por lo demás, no se definen, como tampoco se definen el punto, la recta y el plano en la geometría axiomática.

Hausdorff les ha preparado el terreno con sus espacios métricos y otros conceptos afines.

Veamos a qué prueba — puramente intelectual — somete Menger un espacio métrico cualquiera *M*, por ej., una porción cualquiera de un espacio euclídeo, a objeto de averiguar cuántas dimensiones tiene. Trata de *sacar de tal espacio un punto junto con su contorno entero.* Para llevar a cabo la cual operación, si *M* es *tri*dimensional, por ejemplo, un cuerpo de madera, habrá que ir recortando con una sierra formas *bi*dimensionales (superficies). Si *M* es *bi*dimensional, por ejemplo, una lámina delgada de lata, habrá que ir recortando con una tijera formas *mono*dimensionales (curvas). Si *M* es *mono*dimensional, por ej., una curva fina de alambre, habrá que ir arrancando con unas tenazas puntos *diseminados* sobre la misma. Concluyamos. Si para sacar de un espacio métrico *M* un punto con su contorno entero es menester cortar de él formas de (n—1) -dimensionales, *M* será n-dimensional. De aquí se pasa fácilmente a la definición general de número de dimensiones de un espacio de Menger-Urysohn de que trató el Sr. Hahn en su conferencia. ([11])

Hemos pasado en revista los espacios no-euclídeos tanto desde el punto de vista axiomático cuanto del analítico. Lo que más especialmente nos importaba, era dejar firmemente asentado que las geometrías de estos espacios no son otra cosa que sistemas lógicos, derivados de axiomas diferentes de los euclídeos, o bien de definiciones aritméticas que discrepan de las del espacio euclídeo. Y exactamente lo mismo se aplica, como es natural, a la geometría riemanniana. En este respecto, las geometrías no-euclídeas y la vasta geometría riemanniana no son, por lo tanto, ni más ni menos que la geometría euclídea: ¿no acentuamos desde el mismo principio que ésta no pasa de ser un sistema puramente lógico? Una diferencia parece haber, con todo, en favor de la geometría euclídea: y es que con ser ésta un sistema puramente lógico, como lo es, no deja de apoyarse — lo hemos hecho notar — para formular sus axiomas y definiciones aritméticas en ciertas entidades y relaciones del mundo de la experiencia, asidero de que se ven privadas — aparentemente al menos — las demás geometrías. Es oportuno, por eso, ventilar ahora esta cuestión. ¿En qué situación se hallan las geometrías no-euclídeas y las riemannianas frente a la experiencia?

Es cosa clara, ante todo, que en el mundo de la experiencia no hay ni puntos, ni rectas, ni planos. Si algo hay en él, son objetos observables. Si miramos por los telescopios de nuestros observatorios astronómicos, vemos retículos y rayos luminosos; si echamos una mirada en nuestros laboratorios, vemos delgadas varas, cuerpos rígidos, etc. Siendo así, ¿cómo aplicaremos al espacio de la experiencia cualquiera de nuestras geometrías? Pues haciéndoles corresponder a los puntos retículos; a las rectas, rayos de luz, etc. De esta manera los teoremas de la geometría pasan a ser afirmaciones sobre objetos perceptibles.

Con esto no quedaría resuelta, sin embargo, nuestra cuestión. Merced al procedimiento indicado los teoremas de la geometría vienen a enunciar algo sobre objetos de la experiencia. Sí, ¿pero las de qué geometría?, visto que hay muchas. Eso es lo que se impone dilucidar: ¿cuál de esas geometrías posee validez empírica. Dicho en otros términos: *Si en las proposiciones geométricas reemplazamos las palabras punto, recta, línea geodésica, etc., por otras que designan las correspondientes entidades perceptibles por vía empírica — como ser: retículo, rayo luminoso, etc. — obtenemos un cuerpo de axiomas y teoremas corroborable por la experiencia. Pues bien, tal cuerpo de axiomas y proposiciones ¿patrimonio de cuál de las geometrías viene a ser?*

Un ejemplo para aclarar lo dicho. Nos hemos impuesto que una de las principales diferencias entre las geometrías euclídea, hiperbólica y elíptica la constituye el valor de la suma de los ángulos interiores de los triángulos. Pues bien, preguntamos: si hacemos corresponder a los vértices y lados de los triángulos, objetos sobre que razona el geómetra, objetos del mundo empírico y medimos la dicha suma, ¿cuál de las tres geometrías resulta ser la cierta? Consideremos, por ej., un triángulo trazado a regla sobre un papel: la suma de sus ángulos puede verificarse experimentalmente, digámoslo así, por medio de un transportador. Siempre resulta — salvo un margen de error — de 180°. Pero dijimos que también en la geometría parabólica la suma de los ángulos interiores de triángulos pequeños difiere poquísimo de 180°: sólo en los triángulos grandes diverge considerablemente esta suma de los 180°. Por eso Gauss recurrió para medir el valor que decimos a un triángulo cuyos vértices eran cumbres de montañas y cuyos lados eran rayos luminosos. La divergencia, hallada por Gauss, no superaba, sin embargo, el margen de error que implica toda observación empírica.

La geometría euclídea salía, pues, incólume de la prueba; en cambio, de arrojar la medición de los ángulos una cifra diferente de 180°, hubiera quedado demostrado con ello que no es esa geometría la que rige en la empiria. Claro que, así y todo, no cabía pronunciar la palabra definitiva sobre este asunto. Por grande que sea un triángulo que tenga por vértices las cumbres de tres montañas, siempre será pequeño en comparación de otro cuyos vértices sean tres estrellas fijas.

Este problema quedó relegado a segundo plano hasta que lo convirtió en foco de sus meditaciones la teoría de la relatividad general. En efecto, esta teoría mira el espacio de la experiencia como riemanniano. Pero, según vimos, las relaciones métricas de un espacio riemanniano recién es posible establecerlas una vez que se han elegido de un modo determinado las funciones g_{ik}, cosa que puede hacerse de muchas maneras. En la teoría de la relatividad se las elige de tal suerte, que las líneas geodésicas determinadas por estas funciones coincidan con las vías de los rayos luminosos y de los puntos de masa, sujetas solamente a la gravitación. Esto se consigue definiendo las funciones g_{ik} de modo que dependan de las masas que se encuentran en el espacio, es decir, que para un mismo punto del espacio varíen los números g_{ik} cuando se acerca a él una masa pesada. En momentos diferentes las funciones g_{ik} de un mismo punto pueden, pues, ir tomando valores diferentes. A fin de comprender exactamente esta variación temporal, el espacio tridimensional y el tiempo se reunen en un espacio riemanniano tetradimensional, que recibe el nombre de espacio-tiempo.

mundo. Dependiendo las funciones g_{ik} de las masas que se encuentran en las cercanías de un punto, dependerá también de ellas la trayectoria de las líneas geodésicas determinadas por dichas funciones. Y como las líneas geodésicas coinciden con los rayos luminosos, síguese de esta teoría que tampoco los rayos luminosos seguirán el mismo recorrido en las cercanías de masas pesadas que lejos de ellas. Esto se confirmó en un todo, cualitativa y cuantitativamente, por la observación. Comprobóse, en ocasión de un eclipse solar, que el rayo luminoso emitido por una estrella fija se desvía en el campo de gravitación del sol. Y la consecuencia especial que de ello deriva es que en los triángulos formados por rayos luminosos la suma de los ángulos interiores difiere generalmente de los 180°, y que, por tanto, el espacio de la experiencia es curvo. Pero no es eso todo. Dado que esa divergencia de los 180° es mayor en las cercanías de grandes masas que lejos de ellas, síguese de consecuencia que en el espacio de la experiencia rige, no sólo la geometría euclídea, sino también la hiperbólica y la elíptica.

Después de haber contestado más arriba a la pregunta de qué entiende el matemático por espacio curvo, contestemos ahora a esta otra: *¿Por qué califica el físico al espacio de la experiencia de curvo? Porque los retículos, los rayos luminosos, etc., de la experiencia se comportan del mismo modo que los puntos, las líneas geodésicas, etc., de un espacio riemanniano curvo, en el sentido en que entienden este último las matemáticas.*

Pero esta confirmación experimental no disipa del todo las dudas de los no matemáticos sobre la plausibilidad del concepto de espacio curvo. El que los rayos luminosos se comporten como líneas geodésicas, no hay por qué interpretarlo, según ellos, en el sentido de que el espacio sea curvo. El espacio es euclídeo y lo que la experiencia puede enseñar, cuando mucho, es que los rayos luminosos no son rectos, sino curvos. Algo de cierto hay en lo que dicen: y es que efectivamente sería posible describir los fenómenos observados utilizando la geometría euclídea. Sí, pero lo malo es que, de hacer la descripción de acuerdo con esta última, los rayos luminosos en vez de moverse a lo largo de las líneas más cortas, lo harían a lo largo de curvas complicadísimas: en contraste con las sencillas y armoniosas fórmulas de la teoría de la relatividad obtendríase una física teórica extraordinariamente complicada. Y aun cabría invocar otra cosa en favor de la teoría de la relatividad. No hay absolutamente modo de ejemplificar en el mundo de la experiencia los conceptos que desempeñan papel primordial en la geometría euclídea, p. ej.: el de recta. En el mundo de la experiencia físico-astronómica no se dan entidades que se hallen entre sí en las relaciones en que se hallan los puntos, rectas y planos de la geometría euclídea. La teoría de la relatividad, en cambio — y en esto estriba justamente uno de los pensamientos cardinales que le sirven de pauta — al ir describiendo las relaciones que se observan entre los objetos de la experiencia, no deja de acoger algunos de los principales de entre estos últimos en el seno de la geometría puesta como base de la física.

Otra de las afirmaciones de la teoría de la relatividad que da lugar a no pocas falsas interpretaciones, es la de que nuestro espacio es *cerrado*, es decir, *ilimitado y finito*.

Empecemos por ponernos en claro el concepto de lo cerrado (fruto de la rama más reciente de la geometría: la topología ([12]) para superficies. Una superficie esférica, p. ej., podemos cortarla de tal modo — siguiendo la línea de los meridianos y paralelos — en un número finito de trozos, que en cada uno de los bordes de los trozos se toquen exactamente dos de ellos. Toda superficie que, como la esférica, permita una descomposición en un número finito de trozos de tal modo, que cada borde pertenezca a dos trozos exactamente, recibe el nombre de superficie cerrada. Como cada uno de los bordes de cualquier trozo pertenece a exactamente dos trozos, no aparece, por consiguiente, en las superficies cerradas borde libre — ningún límite —; por eso reciben también las tales el nombre de finitas. Un disco circular no es una superficie cerrada, pues descomponiéndolo en un número finito de trozos, aparecen siempre bordes que pertenecen a *un* solo trozo, a saber: los bordes contenidos en la circunferencia que limita el disco. Tampoco es una superficie cerrada el plano. Verdad que cabe descomponerlo de tal manera, que cada uno de los bordes de los trozos resultantes de la descomposición pertenezca a exactamente dos trozos — que no aparezca, por tanto, ningún borde libre (ningún límite) —: pero el número de trozos habrá de ser infinito; número infinito que va implicado en la infinitud propia del plano. Por analogía llámase *cerrado* un espacio tridimensional, cuando cabe descomponerlo de tal manera en un número finito de trozos espaciales que en cada una de las caras que limitan dichos trozos se toquen exactamente dos de ellos.

Ahora bien, la teoría de la relatividad admite que el espacio (astronómico) de la experiencia es cerrado. Y como quiera que cada uno de los trozos espaciales de que consta aquél tiene un diámetro finito (queremos decir que para cada trozo espacial hay un número preciso, si bien naturalmente grandísimo, que no es superado en ningún caso por la distancia entre dos puntos cualesquiera de dicho trozo), síguese que también el espacio todo es finito, esto es, tiene un diámetro finito. Por lo tanto, es imposible alejarse de un punto tanto como se quiera. Otra consecuencia, es que sólo existe un número finito de estrellas y que la masa existente en el mundo es finita.

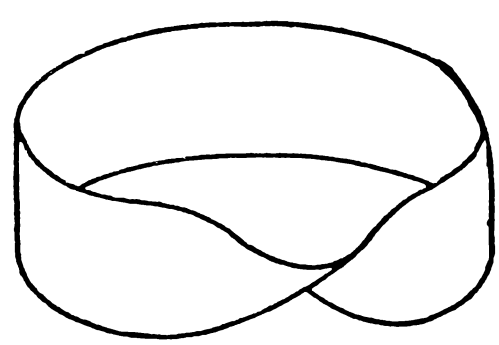
Si — de acuerdo con esta concepción — el espacio es finito, habrá de terminar por ello en alguna parte, se habrá de llegar alguna vez en él a un borde y a un fin. Así arguyen frecuentemente los no matemáticos. Conclusión errónea la de ellos. ¿No acabamos de ver que las definiciones de superficie cerrada y espacio cerrado implican justamente lo contrario: la carencia absoluta — tanto en las unas como en los otros — de bordes en el verdadero sentido de la palabra, o dicho en fórmula más breve, la ilimitación espacial? Eso desde el punto de vista puramente conceptual. Pero aun sin atender a definiciones de conceptos, también la intuición nos ofrece, en la superficie esférica, un ejemplo de una forma que, no obstante poseer un diámetro finito, carece de todo borde.

Volvamos a los seres superficiales considerados al comienzo, y supongamos que habiten, no el espacio euclídeo, sino la superficie esférica. Su mundo será, pues, finito; a pesar de esto, y muévanse en la dirección que les plazca, no arribarán nunca a sus linderos. Supongamos, además, que en este mundo los rayos luminosos se propaguen desde su fuente a lo largo de las líneas más cortas existentes en su espacio: los arcos de círculo máximo. Supongamos, también, que los seres superficiales sean muy pequeños en comparación con la totalidad de la esfera. En un principio — mientras sus exploraciones sobre la esfera permanezcan circunscritas a un ámbito reducido — nuestros seres superficiales serán de parecer que en su mundo rige la geometría euclídea bidimensional. Parecer harto razonable, ya que, estudiados dentro de los límites antedichos, los rayos luminosos y retículos se comportan como rectas y puntos de la geometría euclídea. Y lo que especialmente es de notar, es que para tales seres superficiales la suma de los ángulos interiores de los triángulos no se apartará sensiblemente de los 180°. Pero no bien empiecen a dominar porciones más amplias de su mundo esférico, no tardarán en percatarse de la curvatura de su espacio, o lo que viene a ser lo mismo, que en los triángulos más grandes que los que están habituados a considerar la suma de los ángulos pasa de los 180°. Mas no terminarían sin embargo aquí los justos motivos de su asombro. Algo más notable aún se les depararía. ¡Y es que un buen día — cuando hubiesen aumentado hasta tal punto el alcance de sus telescopios, que con ellos se pudiese abarcar su mundo todo — se verían a sí mismos, por detrás, en el fondo de aquéllos, en medio del mundo de su experiencia! Y se explica, porque los rayos luminosos describen en su mundo, arcos de círculo máximo y, por tanto, prolongados suficientemente estos últimos, líneas cerradas.

Cabría pensar entonces que algún día nos sucederá otro tanto a nosotros hombres. Como nuestro espacio es cerrado, esto es, como en él los rayos luminosos se comportan igual que las líneas geodésicas de un espacio riemanniano cerrado, bien pueden, en circunstancias dadas, retornar sobre sí mismos. Quiere decir que si enfocáramos con nuestros telescopios el cenit, veríamos — en la inteligencia, claro está, que aquéllos tuviesen el suficiente alcance — detrás de todas las estrellas los rayos luminosos provenientes de los lugares habitados por nuestros antípodas, esto es, la mitad de atrás de nuestro mundo. Verdad que la percibiríamos, no tal cual es ahora, sino como era en un pasado remotísimo: hace 150.000 millones de años, para ser exactos. En efecto, el diámetro de nuestro universo es, según se calcula, de 150.000 millones de años, luz por parte baja: los rayos luminosos que llegasen a nosotros de la mitad de atrás de la tierra deberían, pues, haber sido emitidos hace ese mismo número de años.

Pero puede ocurrir algo mucho más peregrino todavía. Vamos a consignarlo como remate de estas reflexiones sobre el espacio.

Consideremos en vez de la superficie esférica una cinta de Möebius. Originase ésta dándole una vuelta a una tira rectangular de papel y pegando luego sus puntas, de modo, pues, que los dos extremos de cada una de las diagonales coincidan. Figurémonos ahora esta superficie habitada por seres bidimensionales, que, lo mismo que nosotros, no sepan servirse sino de la mano derecha, y que tengan el corazón del lado izquierdo. Si los tales seres son muy pequeños en comparación con la cinta, opinarán desde luego que en su espacio rige la geometría euclídea bilidimensional. En cuanto a la suma de los ángulos interiores de los triángulos, la estimarán de 180°: sólo si miden la de triángulos mayores, advertirán alguna divergencia con respecto de dicho valor. Imaginemos ahora que uno de los seres que decimos logre recorrerse su universo — la cinta susomentada — de una punta a la otra. Al volver no será poca la sorpresa que cause en sus congéneres, que no se han movido del lugar, debido a la extraña transformación por él sufrida. ¡Cómo que volverá zurdo y con el corazón del lado derecho! Y lo bueno del caso es que él no se cansará de protestar que de camino no se ha modificado en lo más mínimo anatómicamente, y que, por el contrario, — conforme se lo muestra su observación — los zurdos y los que



tienen el corazón del derecho son ellos, sus paisanos, que se han quedado en casa. Y entonces, al oirle aseverar tal cosa probablemente experimentarán ellos a más del sentimiento de sorpresa que antes dijimos, otro de muy diversa índole: la sospecha de habérselas con un loco.

Pues un fenómeno en cierta manera análogo al descripto no deja de observarse en este bajo mundo. Eso sí, no concerniente al espacio, sino al tiempo. Y consiste en que si un viajero que recorra el globo no tiene la precaución, al llegar a determinado punto de éste, de atrasar o adelantar — según sea la dirección que lleve — en un día la fecha de su calendario, la que este último señale cuando vuelva a su lugar distará de coincidir con la del calendario de los que se quedan en aquél. Claro que para que pueda efectuar tal cambio de fecha debe conocer el punto preciso donde efectuarlo. A fin de posibilitarle este conocimiento hemos trazado en el Océano Pacífico una línea divisoria: cuando la cruce de Este a Oeste ha de arrancar dos hojas en vez de una de su calendario; en cambio, cuando la cruce de Oeste a Este, ha de dejar pasar un día sin arrancar una hoja del mismo. Una línea divisoria por el estilo deberían trazarla en su mundo los imaginarios habitantes de la cinta de Möebius, cuando los viajes por aquél llegasen a ser para ellos cosa ordinaria y corriente, como nosotros la hemos trazado en nuestro globo cuando éste se hubo abierto al tráfico regular. Una línea bien clara, pasada la cual lo que antes era derecho se llamase izquierdo, y viceversa.

La propiedad de la cinta de Möebius por la cual las figuras de ella merced a un movimiento dentro de la cinta se transforman en otro que viene a ser como su imagen en un espejo, llámase su *no-orientabilidad*. Y se dan también espacios tridimensionales cerrados, *no-orientables*.

Cabe asimismo pensar que tampoco el espacio de nuestra experiencia sea orientable; que, por lo tanto, recorriendo en él distancias suficientemente grandes pueda uno retornar con un aspecto que sea como la imagen en un espejo del que tenía al partir y con el corazón — a juicio de los que se quedan en casa — del lado derecho.

BIBLIOGRAFIA

(1) DESCARTES, *Geometrie*, Mayer-Müller, Leipzig, 1923; FERMAT, *Einführung in die ebenen und körperlichen Örter*, Akad. Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1923. Entre los libros modernos merece citarse especialmente: SCHREIER-SPERNER, *Einführung in die analytische Geometrie u. Algebra, Teubner*, 1931.

(2) Esta manera de entender la geometría analítica la preconiza sobre todo: STUDY, *Die realistische Weltanschauung u. die Lehre vem Raum*, Vieweg, Braunschweig 1914, p. 84 a 92.

(3) Sobre esta rama científica, cuya fundación se debe a Grassmann, es digno de recomendación el tratado de SCHOUTE, *Mehrdimensionale Geometrie*, colección Schubert, T. 35 y 36, Göschen, Leipzig, 1905.

(4) La construcción axiomática que se obtiene con estos presupuestos — y de la cual se han tomado los axiomas citados por nosotros — las desarrolla HILBERT, *Grundlagen der Geometrie*, Teubner, Leipzig. Obra de Hilbert es también el modo de entender la geometría axiomática aquí expuesto. De las ediciones de Euclides citemos en primera línea la de HEIBERG, *Euklidis Elementa*.

(5) Una amplia exposición acerca de las relaciones entre la geometría analítica y axiomática encuéntrase especialmente en PASCH-DEHN, *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Springer, Berlín 1926 y

en VEBLEN-YOUNG, *Projective Geometry*, 2 t., Ginn and C^o^, Boston, 1910 y 1918.

(6) Sobre la historia y rasgos fundamentales entre la geometría no-euclídea informa, por ejemplo: BONOLA LIEBMANN, *Die nichteuklidische Geometrie*, Teubner, Leipzig 1919. Citemos además: KLEIN, *Vorlesungen über nichteuklidische Geometrie*, Springer, Berlín 1928; MOHRMANN, *Einführung in die nichteuklidische Geometrie*, Akad. Verlagsgesellschaft, Leipzig 1930; SCHILLING, *Projektive u. nichteuklidische Geometrie*, Teubner, Leipzig, 1931.

(7) De los numerosos tratados de geometría diferencial citemos en especial aquí el de Bieberbach, Teubner, Leipzig, 1932, y el de Blaschke, Springer, Berlín, 1930.

(8) RIEMANN, *Uber die Hypothesen, welche der Geometrie zur Grunde liegen*, Tesis para optar al título de profesor adjunto en la Universidad, 1854, nueva edición de Weyl, Springer, Berlín, 1919. Como tratado de geometría riemanniana citemos: LEVI-CIVITA, *Der absolute differentialkalkül*, Springer, Berlín, 1928.

(9) En esto se diferencia fundamentalmente este espacio de los demás tratados hasta ahora. En un espacio euclídeo sólo son a su vez espacios radicalmente euclídeos — de menos dimensiones — aquellas porciones de él dadas por ecuaciones *lineales*. En un espacio riemanniano solamente pueden mirarse como espacios riemannianos las multiplicidades *lisas*, es decir, las dadas por funciones susceptibles de múltiple diferenciación. Lo importante que es contemplar conjuntos de índole completamente general, lo expuso detalladamente y valiéndose de ejemplos Menger en su conferencia: "Die neueren Methoden u. Probleme der Geometrie", en el congreso internacional de matemáticas, Zurich, 1932.

(10) MENGER, *Bericht über metrische Geometrie*, Jahresber. der Duetsch. Math. — Ver. 40 (1931), pág. 201.

(11) MENGER, *Dimensionstheorie*, Teubner, Leipzig, 1928, y Nöbeling, Die neuesten Ergebnisse der Dimensionstheorie, Jahresber. d. Deutsch. Math. Ver. 41 (1932), p. 1.

(12) De las exposiciones científicas sobre la relatividad citemos: LORENTZ-EINSTEIN-MINKOWSKI, *Das Relativitätsprinzip*, Teubner,

Leipzig, 1913; EDDINGTON, *Relativitätstheorie in mathematischer Behandlung*, Springer, Berlín, 1925.

(13) Como introducción a la topología de las superficies citemos: KERÉKJÁRTÓ, *Vorlesungen über Topologie*, I, Springer, Berlín, 1923.

L A N U E V A L O G I C A

Por CARLOS MENGER

En las conferencias anteriores de este ciclo se trató del papel que desempeñan la *experiencia y la intuición* en la crisis y reconstrucción de las ciencias exactas de nuestro tiempo. En la del Sr. Mark se analizó cómo en virtud de nuevos experimentos iba siendo cada vez más hondamente sacudido el edificio teórico de la física clásica. En la del Sr. Thirring han oído Vds. cómo estos datos experimentales — en que palpitaba un fermento de crisis — condujeron a la reconstrucción del sistema conceptual de la física. En la del Sr. Hahn se mostró cómo las matemáticas atraviesan por una crisis en lo que respecta al valor de la intuición, atendido que frente a ciertas formas complicadas del espacio euclídeo la llamada intuición geométrica resulta poco de fiar, razón que ha hecho necesario que se reconstruyera la geometría euclídea imprimiéndole una orientación lógica. Cómo, finalmente, ya hace cien años, a la vera de la geometría euclídea nacieron otras geometrías — las llamadas no-euclídeas — que no querían ser otra cosa que construcciones puramente lógicas, y cómo recientemente han resultado aplicables en la física, se explicó en la conferencia del Sr. Nöbelling.

La presente conferencia, con la que clausuramos el ciclo, versa sobre la crisis y reconstrucción de la *lógica misma* y de sus consiguientes repercusiones en la aritmética.

El enunciado de tal tema ha de haber sorprendido a la mayoría de Vds. Que se hable de crisis donde intervienen la experiencia y la intuición, vaya y pase. ¡Pero en la lógica! Aun el que no se halle al corriente de los pormenores de la física y de la geometría puede figurarse que nuevos descubrimientos empíricos son capaces de dar en tierra con las antiguas teorías, incluso las más respetables; y que la intuición debe volver sobre sus pasos cada vez que, por haberse precipitado temerariamente en sus juicios haya arribado a falsas posiciones. Pero la lógica pasa por algo inalterable e inconmovible. Por eso, el que quepa también en sus dominios hablar de crisis y reconstrucción, es una cosa que no sólo le suena a novedad por él ignorada, al que no está completamente iniciado, sino que apenas puede concebirla.

Y — confesémoslo — tiene sobrada razón en su extrañeza. Si hay una ciencia conservadora, es la lógica. Por espacio de dos mil años ha sido la más conservadora de todas las ciencias. ¿Cómo es posible entonces, en ella, la renovación? Eso es lo que vamos a ver.

Por padre de la lógica es tenido Aristóteles. Su punto de partida es que todo juicio consiste en afirmar un predicado de un sujeto. Los juicios se dividen por una parte, en afirmativos y negativos; por otra, en universales y particulares. "Todos los gatos son mamíferos", es un juicio universal afirmativo. "Algunos mamíferos son gatos", es un juicio particular afirmativo. "Algunos mamíferos no son gatos", es un juicio particular negativo. "Ningún gato es un pez", es un juicio universal negativo. Los juicios así definidos sirven de base a la deducción, al silogismo en la terminología de Aristóteles. Todo silogismo consiste en derivar de dos juicios de esta forma un tercero. Por ej., de que todos los gatos son mamíferos y de que todos los mamíferos son vertebrados, síguese que todos los gatos son vertebrados. De que todos los gatos son mamíferos y de que ningún mamífero es un pez, síguese que ningún gato es un pez. En tres figuras, que comprenden 14 subtipos, resumió Aristóteles todos los tipos de silogismo posibles a su juicio. En la Edad Media se ampliaron estos tipos hasta abarcar 4 figuras con 19 subtipos, que se designaron con los nombres de Barbara, Celarent, etc. (*)

También los tres principios que más tarde se designaron como los principios fundamentales de la lógica: el de identidad, el de contradicción y el del tercero excluso, ya fueron formulados por Aristóteles, eso sí — cosa digna de nota —, no en sus escritos de lógica, sino en su metafísica. El núcleo de su lógica lo constituía el trinomio sujeto-predicado-juicio, de que hicimos mención. Y no otra cosa fué, en lo esencial, lo que durante dos mil años después de Aristóteles se ha venido considerando como lógica pura.

(*) Cuando del hecho de que a todos los M, o, respectivamente, a ningún M le compete un predicado P, y a todos los S les compete el predicado P, se concluye que a todos los S, o, respectivamente, a ningún S le compete el predicado P, se habla de un silogismo según el modo Barbara o, respectivamente, Celarent.

En la católica edad media, es verdad, los sabios escolásticos emprendieron variadas y profundas investigaciones lógicas; pero en la edad moderna, especialmente en el período del iluminismo, fué generalizándose la costumbre de tachar sus trabajos de sofismas, y sin preocuparse de estudiarlos — antes dándolos al olvido — se los fué reemplazando por otros, que les iban en zaga en profundidad. Por ello la lógica de los escolásticos no prolongó su influencia a la época posterior. No menos careció de ella, al menos inmediata, el esbozo de lógica de Leibnitz, con el cual éste se adelantaba tanto a su tiempo.

Leibnitz veía bien claro que no basta tratar en la lógica de las diversas maneras cómo puedan hallarse el uno con respecto al otro el sujeto y el predicado de un juicio. A ello había de agregarse como complemento una lógica de las relaciones. Además, trató más sistemáticamente los principios lógicos y sus conexiones mutuas, y bosquejó un proyecto de *lingua characteristica,* merced a la cual todas las proposiciones científicas son expresables en forma precisa, y el de un *calculus ratiocinator,* el cual había de contener y tratar por el cálculo todos los tipos de silogismo.

Pero que también las ideas de Leibnitz, igualmente que los trabajos de los escolásticos permanecieron sin eco, resalta con particular evidencia en las famosas palabras que Kant dice sobre la lógica en la introducción a la segunda edición de la *Crítica de la razón pura*: "Que la lógica ha marchado por este seguro camino desde los tiempos más antiguos, échase de ver en el hecho de que desde Aristóteles no haya debido dar ningún paso atrás... Es digno de nota además en ella, que hasta ahora tampoco haya podido dar algún paso hacia adelante, y que, por consiguiente, por cualquier aspecto que se la mire, parece ser cerrada y perfecta". Y en la *Lógica* de Kant se lee: "La lógica actual proviene de la *Analítica* de Aristóteles... Por lo demás, la lógica no ha ganado mucho en contenido desde los tiempos de Aristóteles, ni tampoco puede hacerlo, dada su índole... Pues Aristóteles no ha omitido ningún elemento del entendimiento".

La chispa que desencadenó la crisis en esta antigua lógica brotó de las matemáticas. La construcción por vía puramente lógica de la geometría primero, y más tarde también la de la aritmética, no sólo condujo a que se revisaran todos los presupuestos matemáticos empleados, sino también a que se procurara obtener claridad sobre todos los *principios de la deducción* que se aplican al derivar los teoremas matemáticos de los axiomas. Y cuando se la hubo sometido a tal examen se puso de manifiesto que la lógica clásica no satisface a las exigencias de las matemáticas modernas en punto a exactitud ni a perfección. Por este motivo fueron preponderantemente matemáticos los que emprendieron y llevaron a cabo la reconstrucción necesaria de la lógica. Esta reconstrucción se designa con el nombre de *logística*. Voy a ofrecerles a Vds. un sucinto esbozo de las principales etapas por ella atravesadas. Quisiera, sin embargo, prevenirles desde ahora que en la actualidad esta logística, por muchísimo que rebase de la lógica aristotélica, no deja, con todo, de poder incluirse ya dentro del cuerpo de la lógica clásica. Los verdaderos problemas de la nueva lógica recién los verán Vds. asomarse allí donde la logística toca a su término.

El primer paso hacia esta reconstrucción fué el desarrollo del llamado *cálculo de clases* — llamado también álgebra de la lógica — por obra principalmente de Boole, Pierce y Schröder, en la segunda mitad del siglo pasado (1). La lógica aristotélica se ocupa más que de nada, según vimos, de la cuestión de: conocidas las relaciones en que dos clases (esto es, totalidades; por ej. la clase de todos los gatos y de todos los animales vertebrados) se hallan con una tercera (por ej., la clase de todos los mamíferos), ¿qué podemos afirmar sobre las relaciones de las dos clases entre sí? El cálculo de clases, en cambio, presenta una teoría sistemática de las relaciones entre un número de clases cualquiera. Y mientras en Aristóteles lo único que se investiga acerca de dos clases es si la una está o no contenida total o parcialmente en la otra (esto es, si todos o varios elementos de la una son o no elementos de la otra), en el cálculo de clases se investigan, junto a estas llamadas relaciones de subsumpción, también muchas otras relaciones entre clases y se ejecutan muchas otras operaciones con clases. Por ej., se trata en él sistemáticamente de la clase de reunión e intersección de dos clases A y B (es decir, la clase de todos los elementos que están contenidos en A o en B, o, respectivamente, de los que están contenidos tanto en A como en B). Contrariamente a Aristóteles, que no la toma en cuenta, se estudia asimismo en el cálculo de clases la clase *vacía*, esto es, la que no contiene elemento alguno. Por ej., la intersección de la clase de todos los gatos y la de todos los peces es una clase *vacía.* Se comprende que las relaciones entre todas estas clases son variadísimas. Pues el cálculo de clases las trata sistemáticamente una por una, partiendo de unas pocas proposiciones. Entre sus proposiciones hay 19 que corresponden a los tipos de silogismo aristotélico-escolásticos. (2)

Pero en el cálculo de clases estas 19 proposiciones no son las únicas. Distan mucho incluso de ocupar en él un lugar de preeminencia. No figuran entre las proposiciones que le sirven de punto de partida, por la sencillísima razón de que cabe fundar todo el cálculo de clases en mucho menos de 19 proposiciones; de modo que las 19 proposiciones aristotélicas no son *necesarias* para la fundamentación del cálculo de clases. Pero aun en el supuesto de que se quisiera admitir un número tan superfluo de proposiciones fundamentales, en especial las 19 de Aristóteles serían *absolutamente insuficientes* para deducir de ellas todo el cálculo de clases. El cálculo de clases constituye, pues, en cierta manera un progreso sobre la vieja lógica de la subsumpción.

El segundo paso en la reconstrucción de la lógica traspone la esfera del cálculo de clases. ¿Qué es este último, al cabo? Una teoría deducida de pocas proposiciones fundamentales que tiene por objeto las relaciones entre clases; no de otro modo como la geometría euclídea es deducible de pocas proposiciones fundamentales — los axiomas —, que versan sobre las relaciones entre puntos, rectas y planos (3). Quiere decir entonces que el cálculo de clases no es más que una teoría matemática especial. Lo que es abrazar la lógica toda, se halla lejísimo de hacerlo. La lógica no se agota de ningún modo en amplias consideraciones relativamente a las clases. Cuando, por ej., de ciertas proposiciones — de los axiomas de alguna teoría, pongamos por caso — derivamos otras proposiciones, efectuamos una operación que se designa con el nombre *deducción lógica*.

De reducirse la lógica al cálculo de clases, tal operación no tendría cabida en ella. Pero de hecho sí que la tiene. La deducción, en efecto, tiene por fin establecer relaciones entre proposiciones, y no entre clases, ¿y a quién, si no a la lógica, se acude en demanda de reglas para la deducción (para la transformación y combinación de proposiciones para obtener otras nuevas)? Por este solo ejemplo se advierte que la lógica rebasa del cálculo de clases. Por eso, según lo hicimos notar al comienzo del párrafo, el segundo paso en el desarrollo de la logística consistió en dejar atrás tal cálculo. Se lo sustituyó por el cálculo de proposiciones, elaborado sobre todo por Pierce y Schröder.

El *cálculo de proposiciones* enseña de qué modo pueden ser ligadas las proposiciones por palabras como: *y, o, no,* u otras partículas análogas, para que den por fruto proposiciones compuestas verdaderas. [4] Sobre manera importante entre las múltiples maneras como cabe ligar dos proposiciones, es la *implicación*. Si p y q son dos proposiciones y si q o *no*-p (esto es, la negación de p) es verdadera, exprésase esto brevemente en la logística diciendo que *p implica a q*. Si q es verdadera, con seguridad es verdadera la proposición "q o *no*-p", sea p verdadera o falsa. Por tanto, una proposición q verdadera está implicada en cualquiera de las dos proposiciones *p*. Si *p* es falsa, *no-p* es verdadera y la proposición "*q* o *no-p*" es con seguridad verdadera, sea *q* verdadera o falsa. Por tanto, una proposición *p* falsa implica cualquiera de las dos proposiciones *q*. De ello se sigue, por ej., que la proposición "*no-p* implica a *p*" es verdadera, si *p* es verdadera; y es falsa, si *p* es falsa; que, en consecuencia, si *p* es verdadera, también "*no-p* no implica a *p*" es verdadera.

Entre las proposiciones compuestas por varias proposiciones ligadas por partículas lógicas son de particular importancia las que son verdaderas en cualquier caso, independientemente de si las proposiciones que las constituyen son verdaderas o falsas. Por ej., la proposición "llueve o no llueve" es verdadera independientemente de si la proposición "llueve", contenida en ella como elemento, es verdadera o falsa. Las proposiciones de este estilo, siempre verdaderas, se designan, a propuesta de Wittgenstein, como *tautologías*. Uno de los objetos de que se ocupa el cálculo de proposiciones es el de sentar tales tautologías.

Ahora bien, como lo ha mostrado Frege, también esta parte del cálculo de proposiciones cabe derivarla de algunas proposiciones fundamentales simples, queremos decir, todas las tautologías de unas pocas tautologías simples. Tal vez al oír esto pensarán Vds. que el cálculo de proposiciones es la teoría de las transformaciones por las que cabe hacer pasar estas últimas mediante el empleo de los tres principios aristotélicos: el de identidad, el de contradicción y el del tercero excluso. Sin embargo, no es así. Antes bien, los tres principios aristotélicos desempeñan en el cálculo de proposiciones análogo papel al de los 19 modos aristotélicos de silogismo en el cálculo de clases. Los principios de identidad, contradicción y del tercero excluso figuran a no dudarlo entre los principios del cálculo de proposiciones, pero no sólo no son las únicas, sino que ni remotamente ocupan en él un puesto relevante. Y lo que especialmente es de notar, es que esos principios no aparecen entre las proposiciones que se eligen para servir de punto de partida de dicho cálculo: para su fundamentación no son, pues, *necesarias*. Tampoco son, por sí, *suficientes*. El cálculo de proposiciones entraña, decididamente, cierto progreso sobre la antigua lógica.

He dicho que cabe *derivar* todo el cálculo de proposiciones de algunos principios fundamentales simples. Lo malo es que, por otra parte, los principios de dicho cálculo han de versar justamente sobre la *derivación* lógica. Esto quizá les haga sospechar a Vds. que al pretender fundamentar el cálculo de proposiciones se cae en un círculo vicioso. Este peligro lo ha evitado, sin embargo, Frege. Gustoso intercalo un par de observaciones para aquellos de entre Vds. que deseen se les informe más circunstanciadamente sobre el asunto. Queda entendido, empero, que su conocimiento no es necesario para comprender el resto de esta conferencia.

Los principios fundamentales del cálculo de proposiciones son simplemente algunas fórmulas enunciativas: algunas tautologías. Para tal objeto pueden elegirse, en el sentir de Lukasiewicz, las tres siguientes:

p implica la proposición: "*no-p* implica a *q*".

La proposición "*no-p* implica a *p*" implica a *p*.

La proposición "*p* implica a *q*" implica la proposición siguiente: La proposición "*q* implica a *r*" implica la proposición "*p* implica a *r*".

De estas tres fórmulas expresa la primera el hecho susomentado de que una proposición falsa implica cualquiera de las dos proposiciones; la segunda corresponde al hecho ya señalado de que, si la proposición "*no-p* implica a *p*" es verdadera, también la proposición *p* es verdadera; la tercera expresa el sorites siguiente: Si de *p* se sigue la proposición *q* y de *q* se sigue la proposición *r* de *p* se sigue la proposición *r*.

Pues bien; el cálculo de proposiciones es la totalidad de las fórmulas enunciativas que se pueden obtener de las tres de arriba mediante el empleo de las reglas engendradoras de fórmulas. Y tales reglas consisten simplemente en que, en primer lugar: en las fórmulas enunciativas, o en las obtenidas de ellas, se sustituyen los símbolos *p*, *q*, *r*... por otros símbolos, eventualmente compuestos; en segundo lugar: si la proposición *p* y la proposición "*p* implica a *q*" son dos fórmulas del cálculo de proposiciones, se incluye también a *q* entre las fórmulas de dicho cálculo. Por ej., de la primera fórmula fundamental sale, sustituyendo *p* por la proposición "*r* implica a *s*", la siguiente fórmula que se debe incluir en el cálculo de proposiciones de acuerdo con la primera de las reglas engendradoras de fórmulas: La proposición "no-(*r* implica a s)" implica a *q*.

Como ven Vds. entonces el cálculo y la deducción que lo va desarrollando sistemáticamente son mantenidos netamente separados el uno del otro. El cálculo se expresa por el desarrollo que se va efectuando por dos reglas engendradoras de fórmulas. Ven Vds., además, que tanto las fórmulas fundamentales como las dos reglas engendradoras de fórmulas están determinadas con rigor. Estas reglas son considerablemente más sencillas que las corrientes de la lógica.

Después de esta digresión sobre los pormenores del nuevo desenvolvimiento de la lógica volvamos a sus líneas directoras. Ante todo debemos comprobar que la mayoría de las proposiciones corrientes, especialmente en las matemáticas, fuera de las palabras *y, o, no, implica,* contienen otras partículas lógicas, principalmente las palabras: *todos-as y varios-as* o *hay*. Las reglas exactas para el manejo de las proposiciones, que contienen también los llamados *cuantificadores* lógicos, las suministra un tercer capítulo de la nueva lógica, el cual desde Peirce y Frege aparece junto al cálculo de clases y al de proposiciones y se designa con el nombre de *cálculo de funciones*. La razón histórica de esta designación es la siguiente.

Al lado de las proposiciones en parte verdaderas, como: "este pizarrón es negro", en parte falsas como: "este pizarrón es rojo", se dan combinaciones de palabras, como "x es negro", que no son proposiciones, y que recién llegan a serlo, cuando en vez de x — lo que se llama el lugar vacante de ellas — se pone el nombre de un individuo determinado de cierta esfera, o bien cuando a la x se antepone un *cuantificador*. Tales combinaciones de palabras se designan como *funciones proposicionales*. V. gr., la función proposicional "x es negra" pasa a ser una proposición verdadera, si en vez de x pongo "este pizarrón"; pasa a ser una proposición falsa, si en vez de x pongo "esta tiza"; pasa a ser una proposición universal falsa, en el caso de que yo elija como campo de variabilidad de la x todos los objetos que se encuentran en esta sala, y anteponga a la x el *cuantificador* "todos", pues entonces se origina la proposición falsa "todos los objetos de esta sala son negros"; pasa a ser, finalmente, una proposición existencial verdadera, si antepongo a x el cuantificador "varios", pues la proposición "varios objetos de esta sala son negros" es verdadera.

Son objeto de la ciencia, en última instancia, las proposiciones: las individuales, las universales y las existenciales. Como reglas de las operaciones lógicas con estos dos últimos tipos de proposiciones han sido derivadas de una teoría de las funciones proposicionales, la teoría de las operaciones con proposiciones universales y existenciales recibe el nombre de cálculo de funciones.

Pero el cálculo de clases y el de funciones, así como las partes del cálculo de funciones consideradas hasta aquí, con ser artificiosísimos, no alteran substancialmente la lógica antigua. Lo único que se puede admitir es que la precisan y aguzan. En cambio, el cuarto paso dado por la nueva lógica, de que vamos a tratar a continuación. sí que entraña una *ampliación sustancial* de aquélla.

El impulso para este cuarto paso partió asimismo de las matemáticas. Las proposiciones que forman el objeto de las matemáticas — que Peano fué el primero en expresar mediante un conjunto de símbolos rigurosos — sólo en pequeñísima parte son proposiciones sobre la pertenencia de ciertos individuos a ciertas clases o sobre relaciones entre clases o proposiciones, consistentes en proposiciones ligadas por las palabras "y", "o", "implica", "todos", "varios". La mayoría de los juicios matemáticos trata más bien — según lo advirtiera ya Leibnitz —, de *relaciones*. Cuando digo "3 es menor que 5", enuncio una relación entre dos números; cuando digo "el centro de cualquier segmento de recta está entre los puntos extremos del mismo", enuncio una proposición general sobre una relación entre ternas de puntos de la recta.

Por tanto, si se quiere que un sistema lógico le sea útil al matemático, ha de versar también — y muy principalmente — sobre relaciones. Así como a todo *predicado* le corresponde una *clase*: la de todas las entidades a las cuales compete el predicado en cuestión — por ej., al predicado "negro" le corresponde la clase de todas las cosas negras —, así a toda relación entre dos cosas, o, como se dice en vez de esto, a toda *relación de dos cifras* le corresponde una *clase de pares* de cosas: la clase de todos los pares de cosas en las cuales el primer elemento del par se halle con el segundo en la relación en cuestión. Por ej., a la relación "más pequeño-a, que" le corresponde la clase de todos los pares de números cuyo primer número es menor que el segundo.

La ampliación de la lógica a que nos referíamos consiste, pues, en dar lugar al lado de las proposiciones en que se afirma un predicado de un sujeto a otras cuyo objeto son relaciones. En conformidad con ésto, cabe también caracterizar esta ampliación diciendo, que gracias a ella se investigan en la lógica, a más de las clases de individuos, también *clases de pares de individuos, clases ternas de individuos*, etc. También esta doctrina parte de unas pocas fórmulas fundamentales, derivando de ellas, con ayuda de unas pocas reglas engendradoras de fórmulas, exactamente determinadas y simples, todo un sistema de fórmulas.

No obstante lo extraordinariamente grande de esta ampliación sustancial de la lógica, no basta para expresar todas las conclusiones que se sacan en las matemáticas modernas. Para seguir en sus desarrollos a las matemáticas novísimas, sobre todo en la teoría de los números reales y en la de los conjuntos, habría que crear otro cálculo de funciones ampliando el ya existente; el cual nuevo cálculo se ocuparía también de *clases de clases cualesquiera de individuos*, de *clases de clases de clases*, etc. Y esta nueva y por todo extremo importante ampliación de la lógica no sólo es necesaria para poder seguir los desarrollos de las matemáticas modernas, sino que — como vamos a mostrarlo con un somero esbozo —, es al mismo tiempo suficiente para fundamentar la matemática toda. ([5])

Estando en posesión de dicho cálculo de funciones ampliado, es dable definir ante todo cuándo dos clases A y B se llaman *equinumerales* o equipotentes. Reciben tal nombre — a partir de Jorge Cantor — dos clases, cuando cabe irlas copiando unívocamente la una sobre la otra, esto es, cuando a cada elemento de la clase A se le puede hacer corresponder de tal modo un elemento de la clase

B, que en esta operación a cada elemento de *B* le corresponda un elemento de *A* y uno sólo.

Un ejemplo. Son equipotentes las clases de cruces y puntos de la figura adjunta, puesto que la clase de las cruces puede copiarse sobre la de los puntos, haciéndole corresponder, v. gr., a cada cruz el punto que se halla verticalmente debajo de él. No son equipotentes, en cambio, la clase de los puntos y las de los asteriscos, pues hágase corresponder como se quiera a cada uno de los puntos un asterisco, siempre quedará un asterisco al que se le habrá hecho corresponder más de un punto.

$$
\begin{array}{ccccc}
+ & + & + & + & + \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\ast & \ast & \ast & \ast &
\end{array}
$$

Por lo demás, de hecho los niños y los pueblos primitivos cuentan las clases compuestas de pocos números haciéndoles corresponder unívocamente — sea por contacto o de pensamiento — los dedos de sus manos. No a otra razón obedece el valor particular asumido por el número 10 en nuestro sistema numeral.

No se crea, empero, que este concepto de la *equinumeralidad* presuponga el del número o una operación de contar. Yo puedo, por ej., sin contar cuántos oyentes o asientos se encuentran en esta sala, comprobar que hay *tantos* oyentes como asientos; que cada asiento está ocupado por un oyente, y que cada oyente tiene un asiento: con lo cual se establece la correspondencia unívoca requerida para la equinumeralidad. Antes por el contrario, es sobre este concepto de la *equinumeralidad* sobre el que se apoya el de número. Un número se define, en efecto, como la clase de todas las clases que son equipotentes con una clase determinada. Por ej., el 5 se define como la clase de todas las clases que — tales las de las cruces y puntos de la figura — son equipotentes con la clase de todos los dedos de una mano. Y Cantor ha descubierto — descubrimiento que es preciso contar entre los capitales de la teoría de los conjuntos — que también cabe reunir en una clase todos los conjuntos equipotentes con un conjunto infinito M, esto es, que contiene infinitos elementos, la cual se llama el número o la potencia de M, obteniéndose de este modo *diferentes números infinitos*, ya que no todo conjunto infinito es, como pudiera pensarse, equipotente con todo otro conjunto infinito.

Los números finitos o *naturales* — 1, 2, 3 . . . — se definen haciendo uso nada más que de conceptos lógicos, principalmente del llamado *principio de la inducción completa*. Esta dice que si una proposición, verdadera para el número 1, en caso de ser verdadera para cualquier número n, lo es también para el siguiente $n+1$, será verdadera para cualquier número. Una proposición demostrable con ayuda del principio de inducción completa y válida para todos los números naturales es, por ej., la que afirma que todo número natural puede representarse inequívocamente en forma de producto de números primos. En general, el principio de la inducción completa resulta uno de los medios demostrativos más importantes de la aritmética.

En el campo de los números naturales la suma y la multiplicación se puede proseguir indefinidamente, no así la resta y división. A cada dos números naturales a y b les corresponde un número natural $a+b$ que viene a ser su suma, y un número natural ab que viene a ser su producto; mientras que sólo se dan números naturales $a—b$ y $a \div b$ en el caso de que b sea menor que a 0 respectivamente, divisor de a. A objeto de que también la resta y la división quepa efectuarlas para cualquier par de números, se definen como partes de números naturales el 0, los *números negativos*: —1, —2, —3 . . . , así como los *números racionales* (los quebrados). Por ej., —3 se define por los pares de números naturales a, b y se simboliza con: $a—b$, siendo $a+3$ —b; $\frac{2}{3}$ se define por los pares de números enteros a, b y se simboliza con a, siendo $2b = 3a$. Aunque entre dos quebrados cualesquiera $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ puede intercalarse siempre, en orden de magnitud, un tercer quebrado, por ej., $\frac{a+c}{b+d}$, quedan vacíos entre los quebrados, cosa que nace de que en el campo de los quebrados cabe proseguir indefinidamente la suma, la resta, la multiplicación y la división (salvo la división por 0), no así, otras operaciones, por ej., la extracción de raíces. Es fácil de demostrar, v. gr., que no hay ningún quebrado $\frac{a}{b}$ cuyo cuadrado $\frac{a^2}{b^2}$ sea igual a 2, cosa que se expresa también diciendo que $\sqrt{2}$ no es un número racional. Esto no obstante, hay quebrados cuyo cuadrado es menor en tan poco como se quiera de 2, y quebrados cuyo cuadrado es mayor en tan poco como se quiera de 2. Entre estas dos clases de quebrados — la *clase inferior*, compuesta de todos los quebrados cuyo cuadrado es menor que 2, y la *clase superior*, compuesta por todos los quebrados cuyo cuadrado es mayor que 2 — hay en la clase de todos los quebrados un vacío, ya que no existe absolutamente ningún quebrado cuyo cuadrado sea 2.

Para llenar estos vacíos, a la vez que para hacer factibles muchas otras operaciones fuera de las citadas (extracción de raíces, solución de todas las ecuaciones no lineales y otras), se introducen los *números irracionales*, los cuales llenan precisamente los vacíos en la clase de los quebrados, es decir, que con ellos esta última queda dividida en cierto modo en dos clases parciales. Una vez que se han introducido todos los números racionales e irracionales o, como suele decirse, todos los números *reales*, puede definirse finalmente en forma puramente lógica el concepto, básico para toda la matemática superior, de *valor límite* y, por ende, los de continuidad, diferenciación e integración de funciones, así como el concepto de espacio n-dimensional (como la clase de todos los conjuntos de n números reales), sobre que se asienta la geometría analítica.

Por último, a fin de hacer resoluble la ecuación $x^2 = -1$, se introducen los *números imaginarios* y, en general, los números *complejos*: pares de números reales gracias a los cuales, y de acuerdo con el llamado teorema fundamental del álgebra, se hacen resolubles todas las ecuaciones, teniendo cada ecuación de enésimo grado n raíces. En la geometría se define el concepto de *proximidad* de un punto, y con esto se arriba al concepto general de *dimensión* mencionado en las conferencias de los Srs. Hahn y Nöbeling.

En una palabra, en virtud de la configuración impresa a la lógica por el cálculo de funciones ampliado, *las matemáticas* — según lo expresa Russell — *se han convertido en una parte de la lógica.* Y afirmando ésto no se amplía antojadizamente el significado corriente de la palabra lógica para que quepa en ella la matemática toda. Históricamente las cosas sucedieron más bien — lo hemos visto — como sigue.

Estudiando solamente las conclusiones que se sacan en las matemáticas superiores, y tratándolas como trata el cálculo de proposiciones las conclusiones más primitivas (esto es, derivando todas estas conclusiones de algunas fórmulas fundamentales con ayuda de unas cuantas reglas engendradoras de fórmulas), se llegó a ciertas fórmulas fundamentales, que no sólo permiten derivar las *conclusiones* matemáticas, sino que bastan también para deducir de ella misma la matemática toda.

Con esto se consideraba acabada —por el año 1900—, la logística, flamante edificio levantado en menos de medio siglo por los matemáticos, después de salir la lógica del estancamiento en que había yacido durante dos mil años. Nada quedaba por agregar, ya que el matemático de entonces hallaba en ella respuesta a todas las cuestiones lógicas que pudieran planteársele. Debido a eso una conferencia sobre lógica pronunciada alrededor de dicho año hubiera podido terminar aquí, consignando tan dichoso resultado.

Lo malo que a comienzos del siglo presente las cosas tomaron, en forma enteramente inesperada, un giro de efectos fatalmente destructivos para la logística. Y fué que se introdujo la operación indefinida con clases y con clases de clases, fuente de paradojas; sí, de verdaderas paradojas. Y si una contradicción interna ya es intolerable en una teoría especial de una ciencia particular cualquiera, ¡figurémonos lo que será en la lógica! En la lógica la existencia de una contradicción en su estructura significa algo realmente catastrófico.

Pero antes de entrar a discurrir sobre estas paradojas de nuevo cuño, no he de pasar en silencio que ya la lógica antigua tenía las suyas. Es conocida la del mentiroso, llamada también el silogismo del cretense debido a la fama particular que de mentirosos gozaban los cretenses. "Todos los cretenses son mentirosos, etc." La mejor forma de hacer ver lo que de lógicamente paradójico involucraba este razonamiento para los antiguos, y hacerlo con el rigor requerido en los tiempos modernos, es aplicar tal razonamiento a las tres proposiciones siguientes que voy a escribir en el pizarrón:

"$2 + 2 = 5$",
"$4 + 6 = 3$".

"Todas las proposiciones escritas en este pizarrón son falsas".

Estas tres proposiciones ¿son verdaderas o falsas? Las dos primeras son manifiestamente falsas. La tercera no es — me propongo demostrarlo — ni verdadera ni falsa. Supongamos, en efecto, que sea verdad que todas las proposiciones escritas en este pizarrón son falsas: lo será, por tanto, en particular, la tercera. La tercera proposición es falsa, y como las otras dos también lo son, resultará que todas las proposiciones escritas en el pizarrón son falsas: por tanto, la tercera proposición es verdadera. En consecuencia, si se supone que la tercera proposición es verdadera, se sigue que es falsa; si se supone que la tercera proposición es falsa, se sigue que es verdadera. Dicho con otras palabras: tanto el suponer que la tercera proposición es verdadera cuanto el que es falsa llevan a una contradicción: la tercera proposición no es verdadera ni falsa: resultado paradójico, ya que según el principio del tercero excluso toda proposición es verdadera o falsa, quedando excluída una tercera posibilidad. Cierto que un análisis riguroso muestra que en esta paradoja entran, como parte esencial, palabras que no son de naturaleza lógica, como: "Las proposiciones escritas en este pizarrón"; por lo cual ésta y otras paradojas por el estilo se designan, a propuesta de Ramsey, con un nombre especial, para distinguirlas de las puramente lógicas: se las llama paradojas epistemológicas.

Pero lo que desató una grave crisis en la lógica fué el haberse descubierto en 1901 por Russell — a quien había precedido en este terreno Burali-Fortis — una paradoja puramente lógica, esto es, una paradoja en el cual sólo figuran conceptos del cálculo lógico de funciones, sobre todo el concepto de clase. Si M designa la clase de todos los hombres, resulta: a) todo elemento de M es un hombre, y b) todo hombre es un elemento de M. Como M misma no es ningún hombre, sino una clase de hombres — en razón de *a*) — no figura entre los elementos de M, no de otro modo como la clase de todos los triángulos del plano no es ningún triángulo, y por eso no figura entre sus propios elementos. Se dan, pues, seguramente — como se desprende de ésto y muchos otros ejemplos — clases que no figuran entre sus elementos. Si designamos ahora con *N* la clase de todos los no-hombres, resulta: *a*) todo elemento de *N* es un no-hombre, y *b*) lo que no es un hombre, es un elemento de *N*. Como *N* mismo no es un hombre, sino una clase de no-hombres, figura — en razón de *b*) — entre los elementos de *N*. Otro ejemplo de una clase que figura entre sus propios elementos lo suministra la clase de todas las clases. En efecto, si designamos a esta última con *K*, resulta: *a*) todo elemento de *K* es una clase, y *b*) toda clase es un elemento de *K*. Como *K* misma es una clase (la clase de todas las clases), figura — en razón de *b*) — entre los elementos de *K*. Sea ahora *L* la clase de todas las clases que no figuran entre sus propios elementos. Resultará entonces:

(a) Toda clase que es elemento de *L* no figura entre sus propios elementos (las mentadas clases *N* y *K* por ej., no son, pues, elementos de *L*).

(b) Toda clase que no figure entre sus propios elementos, es un elemento de la clase *L* (por ej., la clase *M* de todos los hombres y la clase de todos los triángulos son elementos de *L*).

Vamos a examinar ahora esta clase para ver si *L* figura o no entre sus propios elementos. Afirmo, primero: que es imposible que *L* figure entre los elementos de *L*. Ya que si *L* fuera un elemento de la clase *L*, contendría como elemento una clase, *L*, que figura entre sus elementos, cuando — según (*a* — toda clase que es elemento de *L*, no figura entre sus elementos. Es imposible, pues, que *L* figure entre los elementos de *L*. Afirmo, segundo: que es imposible que *L* no figure entre los elementos de *L*. Ya que si *L* no fuera elemento de *L*, *L* sería una clase que no figura entre sus elementos y, sin embargo, no sería elemento de *L*, cuando — según (*b*) — toda clase no contenida entre sus elementos, es un elemento de *L*. Hemos demostrado, por consiguiente, que es imposible tanto que *L* figure entre los elementos de *L*, cuanto que *L* no figure entre los elementos de *L*: la proposición "*L* figura entre los elementos de *L*" no es, pues, ni verdadera ni falsa: resultado paradójico, ya que según el principio del tercero excluso toda proposición es verdadera o falsa, quedando excluída una tercera posibilidad.

El primero en buscar una salida de la crisis en que fuera precipitada la lógica por culpa de esta paradoja, fué su mismo descubridor, Russell ([6]). Su solución consiste en lo siguiente.

Ante todo, hay que poner como base de las construcciones que aparecen en las matemáticas un cierto núcleo fundamental de individuos. Junto a estos individuos se consideran clases de individuos, las cuales, empero, no han de confundirse con los individuos mismos; y luego, las clases de clases de tales individuos, que se designan como clases de segundo tipo, y que no han de confundirse con las clases de individuos (las llamadas clases de primer tipo); y, en general, las clases de enésimo tipo, siendo *n* un número cualquiera. Todos estos diversos tipos de clases deben mantenerse bien separados, y — lo que importa singularmente —, cuando se habla de todas las clases, es menester indicar siempre si uno se refiere a todas las clases del primero, del segundo o del enésimo tipo. En segundo lugar, no es lícito formar una clase que contenga clases de distinto tipo como elementos. Teniendo en cuenta estos requisitos negativos, un concepto como el de "clase de todas las clases", que aparecía en la paradoja de arriba, no ocurrirá nunca: no figura en la jerarquía de los tipos. Y tampoco ocurrirá el concepto de la clase de todas las clases que no figuran entre sus propios elementos. Por manera que estos conceptos, que dan lugar a las paradojas susomentadas, se eliminan gracias a la teoría de los tipos. Claro está que esta teoría no ofrece ninguna garantía de que mediante ella se desterrarán las paradojas, aun no descubiertas, que eventualmente lleguen a formularse. Un pastor en son de preservar a su rebaño de los lobos rodea de una tapia el lugar en que pace: pero, ¿puede estar absolutamente seguro de no haber encerrado un lobo dentro de la misma tapia? Esta es la duda que planteaba Poincaré con motivo de un asunto parecido al que da pie a estos comentarios, y que podríamos también plantearnos aquí nosotros.

De hecho, sin embargo, con la estricta observancia de las reglas de los tipos no se ha descubierto hasta ahora ninguna otra paradoja más. Un segundo camino seguido para descubrir paradojas, es el *formalista* o *metalógico* de Hilbert.

El pensamiento sobre que se asienta esta teoría puede resumirse como sigue.

Al tratar de cualquier teoría matemática o lógica es preciso indicar, en primer término, cómo se designan en ella los conceptos fundamentales que aparecen en sus razonamientos, y cómo sus proposiciones se van elaborando, sobre la base de tales signos fundamentales, en series de signos. Por ej., los conceptos fundamentales sobre que versan los axiomas de la geometría euclídea, se llaman — lo saben Vds. por la conferencia del Sr. Nöbeling —: punto, recta y plano. Una de las relaciones fundamentales en la misma es la de "estar en". Una de las reglas para elaborar, sobre la base de estos signos fundamentales, proposiciones geométricas es, por ejemplo, la siguiente: siempre que antes de las palabras "está en" aparezca el signo de un punto, después de las palabras "está en" aparecerá el signo de una recta o de un plano. En segundo término, se han de formular los axiomas de la teoría, queremos decir, poner a la cabeza de ella las series de signos, correspondientes a ciertas proposiciones, para que hagan las veces de fórmulas fundamentales, como procuramos hacerlo para el cálculo de proposiciones. En tercer término, se han de indicar las reglas engendradoras de fórmulas, es decir, las reglas de cálculo para derivar de series de signos, que corresponden a proposiciones de la teoría, nuevas series de signos, cuyas correspondientes proposiciones son acogidas en el seno de aquélla, como lo hicimos igualmente para el cálculo de proposiciones enumerando las reglas que éste aplica para hallar nuevas fórmulas. Con esto la teoría se convierte en un cálculo, y la teoría de este cálculo llámase la *metateoría* pertinente.

Esta metateoría se ocupa de cómo convienen entre sí, y de cómo salen las unas de las otras las proposiciones de la teoría primitiva, cuáles proposiciones son demostrables o refutables en virtud de los axiomas, etc. Mientras en la geometría euclídea, por ej., se demuestra — es decir se infiere de los axiomas con ayuda de las reglas engendradoras de fórmulas — que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es de 180°, debate la metateoría la cuestión de cuáles axiomas euclídeos son imprescindibles para deducir este teorema. Es de orden metageométrico, por ej., la comprobación de que el axioma de las paralelas es independiente de los demás axiomas. Cometido especial de la metateoría de una teoría dada es demostrar que esta última no está afectada por ninguna contradicción, esto es, que en ella no cabe demostrar nunca una proposición y su contraria. Por consideraciones metateóricas se demuestra — lo mencionó el Sr. Nöbeling en su conferencia — que, si la geometría euclídea se halla exenta de contradicciones, también se hallará exenta de ellas la no-euclídea. Se ha podido demostrar, además, por consideraciones matemáticas que si la teoría de los números reales se halla exenta de contradicciones, se hallará exenta de ellas la geometría euclídea. En vista de eso, Hilbert esperaba poder demostrar en una metalógica o, respectivamente, en una matemática cómo se hallan exentas de contracciones la lógica o, respectivamente, las matemáticas; y de este modo, no sólo salvar a ambas de la crisis en que las han precipitado las paradojas descubiertas, sino preservarlas para siempre de semejantes crisis, probando concluyentemente la imposibilidad de cualquier clase de contradicciones en dichas ciencias.

Mas antes de adentrarme en el estudio de los frutos cosechados por vía metalógica en este respecto, he de citar algunos de los resultados generales suscitados por el método metalógico.

Así como en geometría, partiendo de axiomas distintos de la geometría euclídea se han deducido otras geometrías, cada una de las cuales forma, no obstante, un sistema cerrado; así se han construído también varias lógicas, que difieren entre sí, pero cada una de las cuales forma un sistema cerrado. A título de ejemplo citaré las llamadas *lógicas polivalentes,* ideadas por Lukasiewicz y Post ([8]).

En la lógica corriente todas las proposiciones se dividen en dos clases: la de las llamadas verdaderas y la de las llamadas falsas; de manera que toda proposición pertenece a una u otra de dichas clases, cosa que halla su expresión en el principio del tercero excluso. Pues por analogía con esta lógica se ha desarrollado otra, en la cual las proposiciones se dividen en tres clases, y rige el principio del cuarto excluso. Y del mismo modo que la hipótesis de que por un punto exterior a una recta pasan varias paralelas, no ha dado por fruto meramente un edificio teórico abstracto, sino que es susceptible de ser representada en cierta manera intuitivamente valiéndose de modelos; así cabe hacer accesible aproximadamente a la intuición esta lógica trivalente, dividiendo, p. ej., las proposiciones en positivamente verdaderas, inciertas y positivamente falsas. Generalizando, para cada número natural n hay una lógica n-valente, en la cual las proposiciones se dividen en clases, y rige el principio del $(n + 1)$-simo excluso. Y la lógica corriente con su bipartición de las proposiciones entra en esta clasificación en calidad de lógica bivalente. A cada una de estas lógicas *n*-valentes les pertenece una matemática; verdad que hasta la hora ésta sólo la perteneciente a la lógica bivalente ha sido estudiada con amplitud.

Pero no importa. El sólo haber llegado a admitir la existencia de diversas lógicas y de matemáticas a ellas pertenecientes ya constituye de por sí un paso interesante. La prueba más clara de lo que significa este paso está en que hasta hace poco no más se las descartaba: todavía Poincaré las tildaba, explícitamente, de imposibles.

Fuera de esta conexión con las matemáticas en general, posiblemente las lógicas polivalentes se hallen en íntima conexión con el cálculo de probabilidades. Diremos más: es de esperar que más de un punto oscuro de los fundamentos de la teoría de las probabilidades se esclarezca precisamente a la luz de la lógica polivalente. ([9])

La metateoría de una teoría tiene por misión, entre otras cosas, demostrar que esa teoría se halla a salvo de contradicciones, queremos decir, que no figura en ella ninguna proposición que sea tan legítima como su contraria. Pero para que pueda cumplirla ha de reinar ante todo claridad en cuanto a los medios demostrativos permitidos para tales consideraciones metateóricas. Todas las veces que se trate de alguna geometría u otra teoría especial, la cosa no ofrecerá gran dificultad; en caso necesario se podrá utilizar naturalmente como medios demostrativo el cuerpo entero de la lógica. Donde se suscita la dificultad es cuando dicha demostración se ha de hacer para la lógica misma y para las matemáticas que se resuelven en la lógica general. Aquí no cabe aplicar todas las especies de deducción lógica, porque eso sería hacer intervenir en la demostración aquello mismo que se trata de demostrar. Por medio de la deducción lógica habría que demostrar que el sistema de los principios de la deducción lógica no presenta contradicción alguna. Tal demostración carecería, pues, de valor. Para que lo tenga, sólo es lícito emplear una *parte* de la lógica. Con un *mínimo* de medios demostrativos metalógicos trátase de probar la falta de contradicciones para la parte *más grande posible* de la lógica y de las matemáticas. Por ej., Herbrand logró demostrar la falta de contradicciones del cálculo de proposiciones y de una parte de la teoría de los números naturales, empleando la inducción completa, pero sin recurrir al principio del tercero excluso.

Pero había que ir más lejos aún: extender esta demostración a la matemática toda. Este era el problema cardinal último que se imponía resolver: *valiéndose de una parte de la lógica y de la matemática demostrar la falta de contradicciones de la lógica y matemática toda.*

Tal era el estado de la ciencia hace muy poco; hasta que en el año 1930 se realizó un descubrimiento completamente inesperado, preñadísimo de significación; y quien lo realizó fué el joven matemático vienés, Kurt Gödel. Y consistió en solucionar el susomentado problema cardinal, pero en sentido negativo. Demostró, con efecto, Gödel, por vía metalógica — haciendo uso nada más que de la teoría de los números naturales — que *con una parte de la lógica y de la matemática no se puede* *demostrar la falta de contradicciones de la lógica y de la matemática toda.* (10)

Naturalmente que esto plantea en seguida la cuestión: ¿no será hija acaso tal imposibilidad de alguna falla de que se resienta el sistema axiomático de la lógica, corregida la cual quepa demostrar de veras que la lógica se halla exenta de contradicciones? No; la imposibilidad que decimos es de orden más profundo.

Gödel, en efecto, ha demostrado la siguiente generalísima proposición: *Es imposible demostrar la falta de contradicciones de ninguna teoría formal que abrace la teoría de los números naturales con ninguna especie de medios expresables en los términos de dicha teoría.* Por consiguiente, sean cuales sean las modificaciones que se le hagan sufrir al sistema de lógica, mientras permanezca lo suficientemente amplio como para que baste para fundamentar la teoría de los números reales, será imposible demostrar su falta de contradicciones con los medios expresables en los términos de dicho sistema. Pero si a los medios demostrativos metalógicos se les agregan otros, *no* formulables en los términos de la teoría lógico-matemática cuya falta de contradicciones se trata de demostrar, entonces sí que se hace posible la demostración. Eso sí, en este caso los medios demostrativos rebasan de la teoría de referencia. Cabe, por ej., demostrar la falta de contradicciones de la teoría de los números enteros, si se presupone como medio demostrativo la operación con cualesquiera clases de números naturales, esto es, esencialmente, la operación con números reales. Lo que sí resulta imposible, es demostrar con una parte de las matemáticas la falta de contradicciones en la matemática entera o de una parte amplia de la misma. Claro que con una parte de las matemáticas cabe demostrar la falta de contradicciones de otra parte de las mismas, pero a condición de que la segunda sea más reducida que la primera. O dicho con otras palabras: para demostrar la falta de contradicciones de una parte de las matemáticas, necesítase en general de una parte más amplia de aquella cuya falta de contradicciones se trata de demostrar.

Este resultado es fundamental. Pero tal vez haya quien crea que no hace falta tanto razonamiento para llegar a él. No nos extrañaría que los no matemáticos de tendencias filosóficas nos salieran advirtiendo que a ellos jamás no se les habría ocurrido esperar otra cosa. Si hay algo que al filósofo le resulte claro, es que una teoría no cabe fundarla sobre una de sus partes, como no se haga entrar en su elaboración elementos superfluos. No obstante, al querer aplicar tales principios generales a los problemas metalógicos, no ya se revelan como no evidentes, sino como falsos. Así, p. ej., — según se mencionó — basándose en los axiomas de la teoría de los números reales, se puede demostrar que la falta de contradicciones de dicha teoría trae consigo la falta de contradicciones de la geometría euclídea y de la no-euclídea n-dimensionales, aunque la teoría entera de los números reales no pase de ser una parte, un caso especial — la geometría monodimensional — de la geometría n-dimensional. De la investigación de Gödel se desprende, en cambio, lo contrario: y es que, p. ej., basándose en los axiomas de la teoría de los números naturales — para la cual Peano fué el primero en poner en pie un sistema de axiomas — es imposible demostrar que de la falta de contradicciones de la teoría de los números naturales se siga la falta de contradicciones de la teoría de los números reales. Tampoco es dable demostrar con ciertas partes de la teoría de los números naturales que, si estas partes están exentas de contradicciones, toda la teoría habrá de estarlo.

Por este par de ejemplos contrapuestos se echa de ver que eso de que ninguna teoría quepa fundarla sobre una de sus partes, no es una cosa evidente por sí, que tiene su razón de ser en ciertos principios generales. No; esta verdad no es evidente por sí, sino — tal es el sentido del descubrimiento de Gödel — una proposición matemática de raíces escondidas, que puede y necesita ser probada.

Ilustra bien la fuerza de los métodos metamatemáticos la segunda parte del descubrimiento de Gödel. Pero para explicarles a Vds. con más detalle este último, tengo que tomar las cosas de un poco más atrás.

Fué uno de los mayores descubrimientos de Euler que las proposiciones que tratan de los números naturales 1, 2, 3, 4, . . . cabe también demostrarlas con los llamados medios auxiliares *trascendentes*, es decir, con ayuda de consideraciones que se salen de la esfera de los números naturales y que dejan atrás el principio de la inducción completa, pues emplean los conceptos de valor límite y de continuidad, así como la operación con números reales y funciones cualesquiera. Por ej., la proposición — hallada y demostrada de modo elemental por Fermat —

de que todo número primo de la forma $4\ n+1$ es representable por una suma, y una sola, de dos cuadrados de números naturales, ha sido demostrado también con medios auxiliares trascendentes. Pero a despecho de la gran admiración suscitada por este descubrimiento de Euler — del cual se ha desenvuelto una rama especial de las matemáticas: la llamada *teoría analítica de los números* —, persistió la creencia de que todas las proposiciones sobre números naturales se pueden demostrar con medios elementales. Y aun cuando se encontraban proposiciones elementales que sólo se estaba en condiciones de demostrar con medios trascendentes, atribuíase ésto a la circunstancia de que hasta entonces no se había dado todavía con las demostraciones elementales de tales proposiciones.

Pues Gödel ha probado por vía matemática que existen seguramente proposiciones sobre los números naturales, que no cabe demostrar en forma elemental: para demostrarlas es preciso echar mano a medios trascendentes ([10]). Ni se debe ello — es el caso de repetirlo — a alguna imperfección de que se resintieran nuestros supuestos acerca de los números reales; antes es un caso particular de un teorema de validez general que reza: *En toda teoría formal que abrace la teoría entera de los números naturales, existen problemas no dirimibles en el seno de la teoría en cuestión.* Así como hay proposiciones sobre los números naturales sólo demostrables con los medios auxiliares tomados de la teoría de los números reales, así, hay proposiciones sobre los números reales sólo demostrables con los medios auxiliares tomados de la teoría de los conjuntos de números reales, y hay problemas sobre conjuntos de números reales sólo dirimibles mediante hipótesis sobre conjuntos de potencias superiores. Y lo que es más, en toda teoría formal que abrace la teoría entera de los números naturales hay proposiciones no dirimibles hasta entre las referentes a los números *reales*.

En otras palabras: una lógica universal, que, arrancando de unos cuantos principios zanje todas las cuestiones imaginables — con la cual soñara Leibnitz — es imposible que exista.

La metamatemática ni está en aptitud de demostrar que las matemáticas se hallan a salvo de contradicciones, ni de poner en nuestras manos un procedimiento para decidir todas las cuestiones que puedan presentarse. Pudiera tal vez creerse entonces que ha fracasado. No es así sin embargo. Pues aun prescindiendo de los preciosos frutos obtenidos por ella que tienen valor por sí, no hay que olvidar que ha sido precisamente el punto de vista metamatemático creado por Hilbert lo que le ha permitido a Gödel lanzarse a hacer sus descubrimientos. Antes que haber fracasado, la metamatemática ha dado pruebas de ser hasta ahora el único camino por donde quepa penetrar y conocer algo de las bases de la lógica y de las matemáticas, por más que estos conocimientos se reduzcan en parte a la destrucción de ilusiones.

Y con esto paso a hablar del tercer camino por que se echó — los dos primeros fueron la teoría de los tipos y la metamatemática —, al ser precipitada la lógica en una crisis por las paradojas descubiertas en los albores de nuestro siglo. Verdad que el camino ya existía de antes; no se hizo más que elaborarlo. Quien lo había abierto fué el matemático Kronecker, allá por el año ochenta y tantos del siglo pasado, quiere decir, con antelación al descubrimiento de las paradojas dichas. Los continuadores de Kronecker lo designaron con el nombre de *intuicionismo*. (11)

Russell hace de las matemáticas una parte de la lógica: Kronecker está por la primacía de las matemáticas sobre la lógica. La construcción matemática le es, pues, lo primario. "Los números enteros — dice — han sido hechos por Dios; todo lo demás es obra humana". Tan es así que la construcción matemática es lo primario, que la pura deducción lógica puede, cuando no la acompañan construcciones matemáticas, llevar a proposiciones matemáticamente incorrectas. Lo que sobre todo ataca Kronecker son las demostraciones indirectas, las cuales del hecho de que se demuestra que la no existencia de una entidad con ciertas propiedades es contradictoria, concluyen la existencia de una entidad con las propiedades en cuestión, sin suministrar, no obstante, un procedimiento para construir la tal entidad. Un ejemplo ilustrará esto.

Supongamos que se lograra hacer patente por alguna vía que la hipótesis — designada como de Goldbach — de que todo número par es representable por una suma de números primos, encierra una contradicción: ¿Qué concluiría el matemático clásico? Pues que existe un número par no representable por una suma de números primos. Lo que es Kronecker, no iría hasta formular tal proposición existencial, a no ser que se le indicara realmente un número par que no sea suma de dos números primos, o, por lo menos, un procedimiento que permitiese hallar, recorriendo un número finito de pasos, semejante número. De demostrarse, por ej., que entre los números de 1000 cifras existe un número de la especie deseada, habría seguridad de encontrarlo si se fueran examinando uno por uno, de menor a mayor, todos los números de 1000 cifras, para ver si son o no representables por una suma de números primos. Cierto que procedimiento tan largo no podría ponerlo en práctica hombre alguno; con todo, después de un número finito de pasos no dejaría de conducir al fin propuesto. En cambio, la mera demostración indirecta de esto — el inferir que ha de haber un número par que no sea representable por una suma de números primos, basándose en que es imposible que no exista — carecería en absoluto de viabilidad a los ojos de Kronecker, puesto que no se tendría con ello ningún procedimiento para hallar tal número.

Poincaré, de su lado, dirigió sus ataques contra lo que él llamaba *definiciones no predicativas*. Son las definiciones en que entran como clases las mismas a que pertenece la entidad que se trata de definir. Ejemplo típico de semejantes conceptos no predicativos lo constituye el de la clase de todas las clases, que da pie a paradojas. Son asimismo no predicativos los conceptos, de importancia para toda la matemática superior, de número máximo y de límite superior de un conjunto de números. Por eso Weyl, en su libro sobre "*El continuo*" (1918) ha arribado a la conclusión que hay que desechar estas entidades, salvo en el caso en que también sean susceptibles de determinación metódica, por tanto, de definición no predicativa. Las proposiciones que sí tienen valor concluyente, al entender de Poincaré, son las que da por fruto la inducción completa: son proposiciones sintéticas a priori, en el sentido de Kant.

En los últimos decenios Brouwer ha ido sacando las consecuencias que implicaban las tesis de Kronecker, y mostrando cómo extensas partes de las matemáticas modernas descansan sobre demostraciones existenciales indirectas, y que quitándoles este punto de apoyo viene a faltarles su razón de ser. La inducción completa fúndala este autor sobre una *intuición primigenia,* de la cual toma asimismo su concepto de conjunto; pero de este concepto no se sale; las investigaciones teóricas sobre los conjuntos que vayan más allá de este concepto recházalas como carentes de sentido. La lógica expresaría las regularidades del lenguaje de la deducción aplicada a conjuntos finitos; trasladarla a los conjuntos infinitos fuera absurdo. En especial modo no sería aplicable a los conjuntos infinitos el principio del tercero excluso, fuente de las demostraciones existenciales indirectas.

Kronecker había limitado el uso de la palabra *existir*: existe lo que puede ser hallado recorriendo un número finito de pasos. Brouwer hace suya esta tesis: de ahí que impugne la validez de la alternativa: una de dos: o todo número par es representable por una suma de dos números primos, o existe un número par que no es la suma de dos números primos. Mientras no se demuestre, o refute, uno de los dos miembros de la alternativa la hipótesis de Goldbach, no sólo permanece envuelta en oscuridad la solución del problema — es decir: es inseguro *cuál* de los dos casos sea el cierto —, sino que ni hay seguridad de que sea soluble; de suerte que ni siquiera es posible formular a priori la alternativa — es decir: no es lícito afirmar *que* uno de los dos casos sea el cierto. La alternativa sólo se podrá formular a posteriori. Recién después de efectuada la demostración, o refutación, que decíamos se podrá ver a posteriori que es cierto uno de los casos afirmados en la alternativa. Por otra parte, tampoco a priori cabría afirmar — siempre a juicio de Brouwer — que el problema de Goldbach, o cualquier otro problema determinado, sea insoluble.

Contrastan con estas ideas de los intuicionistas las de los matemáticos de tendencias clásicas. En el sentir de estos últimos, una proposición como: "Un número que tenga la propiedad *P* cabe hallarlo después de recorrer un número finito de pasos" — proposición que no se identifica con esta otra: "Existe un número que tiene la propiedad *E*" — no es la contraria de la proposición: "Todos los números tienen la propiedad *no-E*", de modo que para el matemático de tendencias clásicas estas dos proposiciones no forman ninguna alternativa. El hecho de que haya cuestiones indecisas no tiene, pues, para él nada que ver con el principio del tercero excluso. Ni siquiera queda afectado en su sentir este principio por los problemas *indirimibles* que plantea la metamatemática. Hemos visto, en efecto, que en todo sistema de axiomas que abrace la aritmética, cabe enunciar proposiciones, cuya verdad o falsedad es imposible de probar con los métodos formulables dentro del sistema de axiomas de referencia. Parecer este último no compartido por el intuicionista, quien opina que algún día podrá dirimir esas cuestiones; ya que él no expresa sus métodos de decidir los problemas matemáticos en un sistema de axiomas determinado, sino, como veremos todavía, les deja un margen de libertad.

¿Cómo defender la matemática clásica de los ataques de los intuicionistas? Un análisis desapasionado del intuicionismo nos lo hará ver.

Es menester distinguir entre lo que los intuicionistas pretenden y cómo lo cumplen en sus exposiciones orales o escritas. Según los intuicionistas las matemáticas se agotan en la actividad constructiva del espíritu. Lo único que le es dable al matemático en su exposición es suministrar al oyente o al lector indicaciones más o menos imperfectas con que este último pueda reconstruir en su espíritu lo que él, el matemático, ha construído previamente en el suyo. Detengámonos a examinar tales exposiciones. Imperfectas y todo — como manifestaciones meramente exteriores que son del pensamiento — constituyen — no hay que decirlo — el único elemento de juicio de que dispone el crítico que quiera juzgar desapasionadamente del intuicionismo. Dos ingredientes cabe discernir en ellas: uno de índole matemática y otro de índole epistemológica. Consiste el primero en construcciones, pero también en demostraciones, que se valen con toda regularidad de ciertos modos de silogismo. Consiste el segundo en afirmar la plenitud de sentido de los modos de silogismo basados en la intuición, y la carencia de él de los modos de silogismo que se salen de aquélla.

Al aseverar: "Tales modos de silogismo tienen sentido; tales otros carecen de él" no se hace sino traducir una impresión subjetiva o un gusto personal. Afirmaciones de este tenor sólo tienen interés para el que haya de trazar la biografía de la persona que las formula. En la lógica o las matemáticas no hallan cabida. Son *juicios de valor,* frente a los cuales la única actitud que cabe es la fundada en lo que le dictan a uno sus propios sentimientos. Se ha de decidir por un acto de voluntad que tales modos de silogismo se han de emplear y tales otros no; pero porque sí, no porque quepa encararlos como fuentes de conocimiento, susceptibles, por tanto, de recibir el calificativo de verdaderas o falsas. Eso por lo que hace al ingrediente epistemológico involucrado en las exposiciones de los intuicionistas.

Purificadas del mismo, ¿qué queda de ellas? Pues la deducción de ciertas proposiciones con ayuda de ciertos métodos y modos de silogismo: un sistema de silogismos de acuerdo con ciertas reglas. Pero no otra cosa son tampoco las matemáticas clásicas. Los intuicionistas, es verdad, protestan de que la totalidad de sus construcciones sean reducibles a un sistema formal, sean precisables en cuerpo de axiomas. No obstante, como es posible agrupar los silogismos desarrollados por ellos con plena regularidad, a juzgar por sus exposiciones, y reducirlos a unos pocos — y efectivamente Heyling ha formulado tal axiomática del cálculo de proposiciones y funciones del intuicionismo —, esta afirmación de los intuicionistas sólo puede tener evidentemente el sentido de que ellos se reservan el derecho de utilizar eventualmente otros silogismos fuera de los contenidos en un sistema cualquiera de axiomas.

De hecho, empero, los silogismos desarrollados por los intuicionistas son reducibles *en cada caso* a sistema formal. Por ej., hasta hoy los intuicionistas no han sacado en el cálculo de proposiciones y funciones ninguna conclusión que no figure en el sistema de Heyting. No obstante esto, si algún día, en base de vivencias reveladoras de evidencias de especie no conocida hasta ahora, llegaran a hacerlo, pues habría que proceder al ensanche del sistema de axiomas: y nuevamente se tendría entonces un sistema formal que tradujese los datos existentes. En consecuencia, en el intuicionismo la parte *formalizada* está limitada, por así decirlo, hacia abajo, esto es, constituye un cierto mínimo que no admite con seguridad merma: sólo hacia arriba está abierta, esto es, no cabe fijarle un máximo. Por lo demás, tampoco la matemática clásica exige en modo alguno una rigidez absoluta en el sistema de los axiomas fundamentales, sino que también ella se reserva el derecho de introducir nuevos axiomas.

Con el fin de ilustrar más de cerca este asunto, hagamos mención de los conceptos de *asignabilidad*, *construibilidad* y *demostrabilidad* de que se habla en el intuicionismo, pero de los cuales no se han precisado hasta el presente todos los casos en que cabe aplicarlo ni todas las reglas pertinentes; en particular, se lo ha hecho en el sistema de Heyting. Los intuicionistas se aferran tenazmente a sus *construcciones* y rechazan las argumentaciones *no constructivas* que se salgan de ellas, sobre todo en la teoría de los conjuntos: cosa en que yo me pondría de parte de ellos, mirándola como de consecuencia para las matemáticas, con una condición: si no hubiese sino un *único* tipo de postulados de constructividad; y eso — con seguridad — no ocurre. *Hay postulados de constructividad gradualmente diferentes.* Lo que hace el intuicionismo no es más que realizar una de estas múltiples posibilidades, forjando un sistema de postulados confusamente delineado en muchos puntos, y a buen seguro no el más riguroso que quepa concebir.

Con todo eso, aun entre algunos matemáticos de tendencias no intuicionistas reina la opinión de que el intuicionismo, parte de la matemática clásica — la parte de ella que no contiene el principio del tercero excluso ni sus consecuencias — es más seguro que aquélla tomada en toda su amplitud. Pero Gödel ha encontrado hace poco que, no sólo la matemática intuicionista es una parte de la clásica, sino que todo el cálculo de proposiciones clásico entero y toda la teoría clásica de los números junto con el principio del tercero excluso pueden ser mirados como una parte del intuicionismo, ya que por medio de un diccionario sencillo se puede traducir cualquier proposición clásica de los campos mentados a una proposición intuicionista ([12]). Una de las reglas para tal traducción es la de que, siempre que en las proposiciones clásicas aparezcan las palabras "*p* o *q*", hay que poner "*es imposible que p sea imposible y q sea imposible*". En verdad, pues, el rechazo del principio del tercero excluso no trae, por consecuencia ninguna limitación en las proposiciones clásicas — ya que los intuicionistas admiten imposibilidades para las proposiciones universales —, sino tan sólo *una modificación en los enunciados* de las mismas. Como sí puede comportar limitaciones reales el intuicionismo, es rechazando — como hacía Poincaré — las definiciones no predicativas, limitaciones que afectan entonces a la teoría de los conjuntos. Puesto que, en lo tocante a los conceptos específicos de esta última, yo he indicado hace ya algunos años un diccionario que permite traducir todos los conceptos intuicionistas en conocidos conceptos especiales de la teoría clásica de los conjuntos. La diferencia en este punto entre el intuicionismo y las teorías clásicas estriba en que el primero se circunscribe dogmáticamente a los conceptos especiales, calificándolos de plenos de sentido y constructivos, mientras a los conceptos clásicos que se salen de aquéllos los tacha de absurdos. Pero con este proceder el intuicionismo deja de pisar terreno matemático, y se lanza a pronunciar los juicios de valor de que ya dijimos páginas atrás.

Eso por lo que respecta a la crítica del intuicionismo. Seguro que cabe en lo posible — por más que yo no lo tenga por probable — que se pueda llegar a una lógica restringidísima y a una matemática realmente *finitista* (la cual, claro está, sería entonces mucho más restringida que la llamada matemática intuicionista), contemplando las relaciones de la lógica y las matemáticas con lo que nos ofrecen las proposiciones empíricas. En las proposiciones matemáticas que se rigen por la empiria no figuran los números reales ni el concepto de continuidad. El Sr. Hahn ha señalado el hecho de que no hay modo de comprobar por medición si el diámetro de un pedazo determinado de tiza es racional o irracional, y en otra ocasión ha señalado el hecho de que en las proposiciones puramente empíricas no aparece tampoco el *cuantificador* "todos-as"

Tal vez pueda desarrollarse una matemática restringidísima así, no lo negaré; con todo eso — y sin prejuicio del interés que pueda tener epistemológicamente — para la inmensa mayoría de los matemáticos no ofrecerá otro interés que el que, pongamos por ejemplo, para un geógrafo la geografía de su lugar natal.

Se han enterado, pues, Vds. que la lógica y las matemáticas no son ni inalterables ni inconmovibles; que la lógica aristotélica ha revelado ser insuficiente, y ha sido sustituída por el nuevo edificio de la lógica matemática; que esta última ha venido a parar a un atolladero por culpa de las paradojas descubiertas en su seno, del cual han buscado una salida por diversos caminos la teoría de los tipos, el formalismo y el intuicionismo: se han enterado Vds., en resumen, que también la lógica y las matemáticas se hallan — lo mismo que las demás ciencias exactas — bajo el signo de crisis y reconstrucción. Bien; acaso pregunten Vds. entonces cómo salen libradas la lógica y las matemáticas de todas estas vicisitudes porque han tenido que pasar.

Lo que al matemático le interesa y lo que hace, es, exclusivamente, deducir ciertas proposiciones de ciertas otras — que debe enumerar antes de proceder a la deducción, pudiendo, por lo demás, elegirlas de diversos modos — con el auxilio de ciertos métodos — que también debe enumerar antes de proceder a aquélla, pudiendo, por lo demás, elegirlos también de diversos modos.

En cuanto a la lógica, emprende la formulación y el primer desenvolvimiento de las reglas generales de la deducción. En eso se cifra la actividad tanto del lógico como del matemático; actividad que no es susceptible, ni lo necesita, de *fundamentación*: todo lo que — a mi entender — está en manos del lógico y del matemático, es comprobarla simplemente como hecho. Cuáles proposiciones fundamentales y métodos de deducción haya de elegir el matemático o el lógico; en qué relaciones se encuentren con la llamada realidad y con las vivencias reveladoras de evidencias, etc., son preguntas que pertenecen a otras ciencias, menos exactas.

Las matemáticas no están inmunizadas contra contradicciones: en cualquier momento pueden declararse en su seno. Eso es lo que quiere dar a entender Poincaré con su metáfora, que en sus manos significa todo un reproche contra el carácter de la certeza matemática. El pastor, en son de preservar a su rebaño de los lobos rodea de una tapia el lugar en que pace: pero, ¿puede estar absolutamente seguro de no haber encerrado un lobo dentro de la tapia misma? Y el solo motivo que lo mueve a formular este reproche, es que él exige que la certeza matemática, sea, no sólo *gradualmente* mayor, sino *esencialmente* mayor.

Claro que si quisiéramos tratar en todos sus detalles la profunda transformación sufrida por nuestra manera de concebir la lógica y las matemáticas, nos saldríamos mucho del marco de esta conferencia. Vamos a limitarnos a precaver contra un error, en que más de uno podría incidir ateniéndose a nuestra definición de las matemáticas: y es el de figurarse que la mera transformación de proposiciones cualesquiera de acuerdo con reglas cualesquiera, no constituye una ciencia, sino un *juego*.

Hay sin duda en las matemáticas un aspecto de mero juego, que encierra para el que las entiende cualidades estéticas análogas a las de la música, a la que nadie le reprocha, sin embargo, el que no trasmita conocimientos, sino que sea solamente un juego. Verdad que mientras poquísimos hombres están destituídos del todo del sentido para la música, el goce estético de las matemáticas le está vedado desgraciadamente a la mayoría. Pero eso no quita la justeza de la comparación. La capacidad para gustar de las matemáticas no es más rara que el oído musical. Si la primera se halla tan poco difundida, no se vea en ello sino las deplorables resultas de una mala enseñanza. Entendámonos: la capacidad de gustar de las matemáticas podría hallarse más difundida con una buena enseñanza, no el don de invención matemática, el cual es tan poco común como la fuerza creadora del compositor.

Pero las matemáticas son algo más que juego. Lo haré ver a la luz de un solo ejemplo. Y lo aduzco, no porque me parezca la aplicación más importante de las matemáticas, sino porque pone de manifiesto con toda brevedad lo que queremos aclararnos, y por serles a Vds. familiar por la conferencia anterior. ¿Qué podría haber tenido, hace cien años, más el carácter de mero juego a los ojos de un observador superficial que la hipótesis de que en un plano por un punto exterior a una recta pasa más de una paralela, y sus consecuencias? Y sin embargo, sabemos hoy que las vías de los rayos luminosos y de puntos de masa bajo el influjo de la gravitación vienen a ser esas paralelas múltiples. De modo que tales especulaciones matemáticas, tan ajenas en un principio a la realidad y al parecer tan de mero juego, dirigen nuestra atención sobre una multitud de relaciones entre objetos observables en la experiencia que antes no sospechábamos, y a la par nos suministran medios para fiscalizar cuantitativamente nuestras hipótesis.

Concluyamos. Si bien las matemáticas, tienen que moderar — debido a los descubrimientos hechos por la nueva lógica — sus pretensiones en cuanto a poder resolver todos los problemas que se les plantean (recuérdese al respecto el teorema de Gödel, citado más arriba), y en cuanto a hallarse en absoluto al abrigo de contradicciones, con todo, las partes superiores de las mismas se han ido desenvolviendo y elaborando en estos últimos años en forma tal, que llena de admiración especialmente a los que penetran en las conexiones lógicas más hondas. Por eso nosotros sustituiríamos la decantada metáfora de Poincaré del pastor y del lobo encerrado en la tapia por esta otra, más fiel a la verdad de los hechos.

Nuestras casas están desde luego expuestas a que cualquier día las destruya un terremoto. Pero no por eso, sin embargo, se resolverán los hombres a la larga a renunciar a la construcción de casas, y a las comodidades consiguientes para irse a vivir en cavernas. La vida del troglodita, sobre ser incómoda, no ofrece una protección absoluta contra los efectos de los terremotos. Lo que sí hacen, es esforzarse en construir casas cuya estabilidad y firmeza las pongan a resguardo de semejante peligro.

Pues igual problema se plantea e igual solución se impone — a lo que me parece — en lo atañedero a las matemáticas clásicas. Los matemáticos construyen casas, el vivir en las cuales, no sólo les resulta placentero, sino que les reporta beneficios, en el sentido de que los capacita más para la interpretación de la naturaleza. Lo malo que el día menos pensado se les pueden venir abajo: siempre hay el peligro que en el seno de sus teorías surjan contradicciones que las invaliden. ¿Qué hacer? ¿Se cruzarán por ello de brazos, y dejarán sin terminar las casas cuya construcción tienen empezada, o de construir otras nuevas? No; lo que habrán de hacer, será esforzarse — después de cada terremoto — en construir casas capaces de resistir los terremotos más firmemente que las destruídas.

BIBLIOGRAFIA

(1) La obra capital en lengua alemana sobre el cálculo de clases es la de SCHRÖDER: *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, 3 tomos, Teubner, Leipzig, 1890-1910, y el *Abriss der Logik*, 1909/10.

(2) Los cuales, por lo demás, se dejan resumir, según Ladd Franklin, en una proposición: nunca para 3 clases: A, B y C es *vacía* la intersección de las clases A y B, es vacía la de las clases no-B, y C; no es vacía, en cambio, la de las clases A y C. En el caso del modo de silogismo Bárbara se presupone: todos los M son P y todos los S son M, esto es, la clase M tiene con la clase no-P una intersección *vacía*, y la clase S tiene una intersección *vacía* con la clase no-M. Luego, en virtud de la fórmula de Franklin, es imposible que las clases S y no-P tengan una intersección *no-vacía*, con otras palabras, la clase S tiene entonces con la clase no-P una intersección *vacía*,

esto es, todos los S y P, con lo cual queda demostrado lo afirmado por el modo Barbara.

(3) El cálculo de clases no sólo no es, desde el punto de vista del método, más que una geometría axiomática, sino que, como lo he observado en otra ocasión, cabe armonizarlo, desde el punto de vista de la forma, con teorías geométricas elementales, es decir que hay una teoría que comprende la geometría elemental y el cálculo de clases, de la cual es dable obtener cualquiera de las teorías especiales mediante axiomas complementarios específicos. (Cfr. las observaciones en el *Jahresbericht der Deutschen Math. — Vereinig.*, 37 (1928), p. 309.

(4) Exposiciones detalladas del cálculo de proposiciones así como del cálculo de funciones se encuentran en FREGE: *Begriffsschrift*, Halle, 1879; WHITEHEAD-RUSSELL: *Principia Mathematica*, Cambridge University Press, 1925; la introducción de esta obra ha aparecido bajo el título de RUSSELL-WHITEHEAD, *Einführung in die mathematische Logik*, editado por la editorial Dreimasken, München, 1932; HILBERT-ACKERMANN: *Grundzüge der theoretischen Logik*, Springer, Berlín, 1928; CARNAP: *Abriss der Logistik*, Springer, Berlín, 1929.

(5) Una exposición fácil de comprender de la fundamentación lógica de las matemáticas puede verse en RUSSELL: *Einführung in die mathematische Philosophie*, Dreimaskenverlag, München, 1923.

(6) Cfr. la *Einführung* de RUSSELL, citada en la nota 4 y el *Abriss* de CARNAP.

(7) Exposiciones fácilmente comprensibles en BERNAYS: *Blätter f. deutsche Philosophie*, 4 (1930), p. 326, y HERBRAND: *Révue de méthaphysique et de morale*, 37, 1930, p. 243. Algunas disertaciones de HILBERT sobre cuestiones básicas se hallan en las nuevas ediciones de sus *Grundlagen der Geometrie*, Teubner, Leipzig.

(8) Un resumen de los resultados de éstos y otros trabajos originales difícilmente asequibles figura en HEYTING-GÖDEL: *Mathematische Grundlagenforschung* en la colección *Ergebnisse der Mathematik*, Springer, Berlín.

(9) Tentativas en esta dirección se encuentran ante todo en REICHENBACH: *Sitzungsber. d. preuss. Akad. der Wissenschaften,* 39 (1932), p. 476.

(10) GÖDEL: *Monatshefte f. Math. u. Phys.,* 38 (1930), p. 173, y *Erkenntnis,* 2 (1931), p. 149.

(11) Una exposición del desarrollo histórico de esta orientación con numerosas referencias bibliográficas la he hecho yo en el artículo *Der intuitionismus,* Blätter f. deutsche Philosophie, 4 (1930), p. 311. Una exposición de las discusiones sobre los problemas fundamentales de esta tendencia acompañada de numerosas referencias bibliográficas encuéntrase en FRÄNKEL: *Mengenlehre,* 3ª ed., Springer, Berlín, 1928.

(12) Ver *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums,* 4, Teubner, Leipzig, 1933.

I N D I C E

ESTE LIBRO SE ACABÓ
DE IMPRIMIR EN LA
SEGUNDA QUINCENA
DE SEPTIEMBRE
DE MIL NOVECIENTOS
TREINTA Y SEIS, EN LA
IMPRENTA LOPEZ
CALLE PERÚ 666
BUENOS AIRES

Algunas Publicaciones de la Universidad de La Plata

Actas y trabajos científicos del XXV° Congreso internacional de americanistas. 1934. 2 tomos.
Catálogo de periódicos argentinos y suramericanos anteriores a 1862. 1934.
Obras completas de Joaquín V. González. 1935. Edición ordenada por el Congreso de la Nación Argentina (en prensa).

SERIE "EXTENSION UNIVERSITARIA"

Número 1.—*Las reformas de la Constitución de la Provincia de Buenos Aires*, por el doctor Juan A. González Calderón (1928).
Número 2.—*Defensa de la producción agropecuaria*, por el ingeniero Pedro T. Pagés (1928).
Número 3.—*Las relaciones entre Sud América y Sud Africa reveladas por la investigación geológica de las sierras australes de Buenos Aires*, por el doctor Juan Keidel (1928).
Número 4.—*Coricancha. El templo del Sol en el Cuzco y las imágenes de su altar mayor*, por el doctor Roberto Lehman Nitsche (1928).
Número 5.—*Influencia de la agricultura en el desarrollo de las ideas económicas. La situación económica internacional. Los problemas internacionales de la agricultura*, por el doctor Arturo Labriola (1929).
Número 6.—*Los estudios químicos en Estados Unidos, Alemania y Francia*, por el doctor Carlos A. Sagastume (1929).
Número 7.—*La influencia de los estudios puros en la formación de una nueva conciencia*, por Jorge Fr. Nicolai (1929).
Número 8.—*La transformación del Establecimiento de Santa Catalina*, por el doctor Ramón G. Loyarte (1929).
Número 9.—*Procedimientos no medicamentosos en Cardioterapia*, por Jorge Fr. Nicolai (1929).
Número 10.—*Alma Mater* (discurso leído en el acto de asumir la Presidencia de la Universidad Nacional de La Plata), por el doctor Ricardo Levene (1931).
Número 11.—*La Ciudad universitaria*, por el doctor Ricardo Levene (1931).
Número 12.—*El día panamericano*, por el doctor José Abel Verzura (1931).
Número 13.—*Investigación, enseñanza universitaria y cultura general*, por el doctor Ricardo Levene (1933).
Número 14.—*La Edad media y la empresa de América*, por el doctor Claudio Sánchez Albornoz (1933).
Número 15.—*La cultura en Hispanoamérica*, por el doctor José Vasconcelos (1934).
Número 16.—*Nuevas aportaciones para el estudio del régimen municipal hispanoamericano del período colonial*, por el doctor José Ma. Ots (1934).
Número 17.—*La personalidad y la obra de Ameghino*, por el doctor Joaquín Frenguelli. (1934).
Número 18.—*Definición de las épocas modernas en la historia*, por el doctor Manuel García Morente (1934)
Número 19.—*Perfil de España*, por Salvador de Madariaga (1935).
Número 20.—*Discurso del Presidente de la Universidad ingeniero Julio R. Castiñeiras, pronunciado en el acto en que tomó posesión del cargo* (1935).
Número 21.—*Salamanca de Ibero América*, por el doctor Ricardo Levene (1935).
Número 22.—*XXX° Aniversario de la fundación de la Universidad de La Plata.* Discursos de Julio R. Castiñeiras, Alfredo Schaffroth y Fernán Félix de Amador (1935).
Número 23.—*XXX° Aniversario de la fundación de la Universidad de La Plata.* Discursos de Juan E. Cassani y Lola Juliánez Islas.

PUBLICACION OFICIAL

Sección II: Discursos - Conferencias - Trabajos científicos y literarios: *XXIV Colación de grados* (entrega primera, 1936).
Sección III: *Anuario* (en prensa).
Sección V: *Digesto* (en prensa).

SPARGIT SEMINA, ALTERI PROSINT • IMPRENTA LOPEZ • AL SERVICIO DEL LIBRO