El joven Leibniz y la división del continuo

FEDERICO RAFFO QUINTANA
CONICET/UNLP/UNQ

Introducción

En el presente trabajo nos proponemos analizar un aspecto crucial del denominado 'laberinto de la composición del continuo' en el pensamiento de juventud de Leibniz. Este laberinto puede ser sucintamente definido como el problema de la divisibilidad infinita de magnitudes finitas (Leibniz, 1982: 335, nota 20). Como reconoció un pensador muy influyente para Leibniz en esta materia, han existido al menos dos alternativas en torno a este problema: o el continuo es infinitamente divisible (en este sentido no es posible hallar componentes últimos) o hay partes últimas que se caracterizan por la indivisión (Froidmont, 1631: 1).

El aspecto particular que nos proponemos analizar corresponde al problema de la división del continuo. Para esto, se tendrá en cuenta una distinción que Leibniz indicó en el año 1676. En efecto, en abril de este año el autor señala que "una cosa es estar dividido sin fin y otra estar dividido en mínimos", pues "[lo que está dividido sin fin] no tendrá una parte última", cosa evidentemente contraria al otro tipo de división (A VI 3, 513). Esta distinción es capital desde el punto de vista de la evolución del pensamiento de Leibniz en torno al laberinto del continuo desde 1671 hasta 1676. En este sentido, proponemos mostrar que algunas de las grandes modificaciones en la comprensión leibniziana de la estructura del continuo que han tenido lugar a lo largo de dichos años se deben a la manera de comprender las partes componentes y la similitud, en algunos casos, en relación al concepto de lo mínimo.

La indivisión de los mínimos

La cita aludida anteriormente indicaba que la división sin fin no alcanza un componente último en el continuo. Por contraposición, la división en mínimos 'tiene un límite' justamente allí donde encuentra lo mínimo. En este caso, el componente resultante debería poseer al menos una característica: la indivisión. En la *Theoria motus abstracti* de 1671 (de aquí en más *TMA*) Leibniz presenta una descripción conceptual de lo mínimo que es consistente con esto. En efecto, allí indica que son aquello "que no tiene magnitud o partes" (A VI 2, 264). Sin embargo, lejos de aceptarlos, se esfuerza por mostrar que los mínimos no se dan en el continuo (A VI 2, 264). Es evidente la similitud que el concepto leibniziano de mínimo tiene en relación a la definición euclidiana de punto (Euclides, 1991: 189). Una de las características del planteo leibniziano, y que en este aspecto concuerda con el de Hobbes, es que el punto euclidiano no cumple con los requisitos para existir, es decir, para afirmarse su existencia efectiva. Para el británico algo que no posea cantidad no puede ser concebido en la naturaleza (*De corpore*, III, 15, 2). Ni él ni Leibniz conciben que una línea, por poner un caso, se componga de puntos. Asimismo, y por consiguiente, para Leibniz el punto debe poseer al menos cierta magnitud. Según uno de los argumentos con los que él muestra la imposibilidad de existencia de lo mínimo, en la medida en que no tenga magnitud o partes, un mínimo del cuerpo habrá de ser entendido como un cuerpo que no esté espacialmente situado. Un cuerpo dado, esto es, situado en un espacio, tiene por eso mismo distintas caras en virtud de las cuales es susceptible de ser tocado por varias cosas que mientras tanto no se tocan entre sí; un cuerpo que no esté posicionado, además de que no cumpliría con los requisitos que se siguen de la definición de cuerpo, no podrá cumplir por consecuencia con esto (A VI 2, 264).

Si bien no se dan los mínimos, sí se dan en el continuo lo que él llama *indivisibles* o *inextensos* (A VI 2, 164). De acuerdo con la descripción que Leibniz ofrece de ellos, los indivisibles evitarían los argumentos que presentó contra los mínimos: si bien son inextensos, ellos poseen magnitud y son, además, unos mayores que otros. Es necesario afirmarlos, pues "de otra manera no puede entenderse ni el inicio ni el fin del movimiento o el cuerpo" (A VI 2, 264). Y si de hecho se da el movimiento, por ejemplo, es porque hay un inicio de él. Los indivisibles son justamente los inicios y fines de los continuos. No es nuestra intención aquí hacer un análisis detallado de los ellos. Nos limitaremos a mencionar aquellas cosas que son necesarias para cumplir con nuestro objetivo.

La afirmación de la existencia de los indivisibles no es un presupuesto de Leibniz, en el sentido de que él intenta justificarlos. El argumento empleado ha sido caracterizado por R. Arthur como una "inversión de la paradoja de Zenón" (Arthur, 2000). Sintéticamente, la paradoja subraya que si un movimiento puede dividirse en mitades infinitamente, nunca se alcanzaría su comienzo efectivo y consecuentemente no podría explicarse. Pero como para Leibniz el movimiento existe –y aquí está la 'inversión'–, debe tener un inicio, y debe ser tal que no admita una nueva subdivisión. Debe ser, consecuentemente, indivisible (A VI 2, 264-265). De este modo, Leibniz redefine el concepto de punto precisamente en términos de algo indivisible, indicando primero qué no es y luego qué sí es: "Punto no es aquello que no tiene parte ni aquello cuya parte no es considerada, sino aquello que no tiene extensión, o sea cuyas partes son indistantes, cuya magnitud es inconsiderable, inasignable (...)" (A VI 2, 265). Así, los indivisibles no son mínimos o puntos euclidianos ya que tienen partes. Pero sus partes no son entre sí distantes. Serán *distintas*, pero *indistantes*.

No obstante, el concepto de indivisible ha durado poco en el análisis leibniziano del laberinto del continuo: un año después de redactar la *TMA*, en *De minimo et maximo*, Leibniz rechaza los indivisibles. La primera tesis de este texto es: "No se da lo Mínimo o indivisible en el espacio o cuerpo" (A VI 3, 97). En esta expresión se hace evidente que Leibniz equipara al menos en algún aspecto lo mínimo con lo indivisible. La demostración de esta tesis implica que de afirmarse los mínimos se alcanzaría una contradicción, pues se darían tantos en un todo como en una parte suya. Por una cuestión de espacio, el argumento, que se encuentra claramente desarrollado en dicho texto (A VI 3, 97-98), no será aquí analizado. Aunque no indivisibles, Leibniz admite partes infinitamente pequeñas en el continuo. Incluso, para justificarlas utiliza el mismo argumento empleado en *TMA* para afirmar los indivisibles, esto es, la "inversión de Zenón" (A VI 3, 98-99). Las partes infinitamente pequeñas o infinitesimales, a diferencia de los indivisibles, no poseen justamente la característica de la indivisión, pues son partes que poseen a su vez partes infinitamente (A VI 3, 98-99).

Es llamativo que la negación de los mínimos y de los indivisibles se fundamente aquí por el mismo argumento. Evidentemente, esto hace pensar que hay una característica que comparten las definiciones de mínimo e indivisible que 'incomoda' a Leibniz, o mejor dicho, que da lugar a las contradicciones que él señala recurrentemente. Examinados los conceptos, debe concluirse que esta característica no es otra que la indivisión. Es cierto que la razón de la indivisión no es la misma en uno que en otro: lo mínimo no admite una subdivisión por no poseer partes, mientras que lo indivisible por ser inextenso, esto es, porque sus partes (pues las tiene) son indistantes. Si 'la división en mínimos' se ha caracterizado como una tal que alcanza aquello que no es nuevamente divisible ni puede ser nuevamente dividido, entonces la división que justificó los indivisibles será de este tipo. Evidentemente se entiende que en la 'división en mínimos', 'mínimo' significa, 'componente último' que no admite una nueva subdivisión al infinito. De este modo, la distinción en los dos tipos de divisiones y la posterior afirmación de la división sin fin podría incluso pensarse como una suerte de autocrítica, en la medida en que la división que alcanza componentes últimos ha sido afirmada por Leibniz en los primeros escritos relativos al problema del continuo de la década de 1670 y desestimada ya en 1672.

Razones de la *divisio sine fine*

Hay una característica distintiva que posee la división del continuo, sea tratándose de la división en mínimos o de la división sin fin. Tal característica es lo que podríamos denominar la infinitud cuantitativa de componentes resultantes o el 'infinito actual'. En la TMA, por ejemplo, comienza indicando justamente la infinitud de partes del continuo: "Se dan en acto partes en el continuo (...) y éstas son infinitas en acto (...)" (A VI 2, 264). La diferencia fundamental entre los dos tipos es, en este sentido, relativa al proceso mismo de división. R. Arthur explica la diferencia diciendo, a propósito de la división sin fin: "Ahora la división actual infinita, en vez de llegar a un límite en los puntos indivisibles, es reinterpretada por él como una división con final abierto, que no llega a un límite" (Arthur, 1986: 110).

En la división sin fin es fundamental el concepto de infinitesimal, aunque en 1676 la afirmación de su realidad entre en crisis. El problema está en su interpretación actual (Arthur, 2009), pero no en su utilización. Por supuesto que esto restringe su campo de uso: ya no serán admitidos en las explicaciones de la naturaleza. Pero, de hecho, estas ficciones, dice Leibniz, sirven a los fines de la geometría, pues ésta exhibe verdades que, sin ellas, podrían de todas maneras ser presentadas. Por eso, "estos Entes ficticios son excelentes compendios de enunciados y, por esto, perfectamente útiles" (A VI 3, 499). Sin embargo, pese a haber desestimado su realidad actual, hay algo de la noción de lo infinitesimal que persiste, aunque no desde el punto de vista de un componente del continuo sino desde uno fenoménico, y que se corresponde con la antes mencionada ausencia de un límite en la división. En este sentido, es posible encontrar partes menores que las que actualmente consideradas al infinito. De este modo, lo infinitesimal desaparece como componente, pero sigue vigente desde la perspectiva de la división del continuo (Esquisabel, 2012:75-76).

Es asimismo muy relevante que en 1676 Leibniz haya definido con precisión el concepto mismo de infinito que es capital en todo este problema. Aunque reconoce que hay tres grados de infinito, uno solo de ellos es el importante para esta cuestión, el primero y más bajo, que asimismo es el comúnmente utilizado, y que define simbólicamente como "por ejemplo la asíntota de una hipérbola" (A VI 3, 385). Esto es: una línea curva que continuamente se acerca a una recta pero sin nunca llegar a tocarla, manteniendo, por lo tanto, una distancia respecto de ella (aunque sea imperceptible), es una línea infinita. Esto es importante, desde el punto de vista del laberinto del continuo, pues permite explicar por qué el infinito se da dentro de términos finitos (como la aproximación infinita recién descrita no invalida que la superficie que media entre la línea recta y la curva sea finita).

Simultáneamente, Leibniz comienza a delimitar, en virtud de sus respectivos objetos de estudio, regiones de conocimiento distintas que hasta ese momento él no había diferenciado con claridad. Así, por ejemplo, reconoce que un todo será anterior o posterior a sus partes dependiendo de qué tipo de entidad se trate. En este sentido, por un lado, las líneas y las entidades geométricas en general son todos anteriores a sus partes. Las líneas, dirá, no pueden componerse ni de un número finito ni de un número infinito de puntos (interpretados como unidades mínimas) dados los argumentos antes mencionados contra los mínimos (A VI 3, 548-549). Pero por esto mismo, una línea no se compone de puntos en absoluto. De este modo, sería erróneo entender a una línea como una totalidad resultante de la adición de partes puntuales discretas. Por consiguiente, ha de entendérsela como una totalidad continua dada con anterioridad a las partes. En efecto, una línea dada puede dividirse en un número de partes cualquiera, cosa que sería imposible si se compusiera de un número de partes determinado (A VI 3, 548-549). En el Pacidius Philalethi, texto que Leibniz escribe en forma de diálogo hacia finales de 1676, extrae la siguiente conclusión:

> Si lo apruebas, Pacidio, diremos que los puntos no son nada antes de ser asignados; Si una esfera toca un plano el punto es el lugar del contacto (...) Pero no hay puntos, líneas, superficies en cualquier parte y en general los extremos no son otra cosa que las que surgen al dividir: y las partes no existen en el Continuo también antes de que se produzcan por la división. (A VI 3, 552-553)

Hay, sin embargo, otro tipo de entidades que no admiten lo dicho para las entidades geométricas. Este es el caso, por ejemplo, de los cuerpos. Hay, ciertamente, similitudes en los planteos relativos a ambos tipos de entidades. Por ejemplo, así como se ha negado que las líneas se compongan de puntos, Leibniz niega también que los cuerpos se compongan de mínimos. En este sentido, la composición de los cuerpos a partir de unidades mínimas o atómicas, esto es, “cuerpos tan firmes que no permiten ninguna subdivisión o flexión” (A VI 3, 561), dificultaría la comprensión de la cohesión de las partes a partir de las cuales resulta el cuerpo todo. De allí que Leibniz intente dar razón no sólo de la composición sino también de la cohesión de los cuerpos. Por eso, indica: “no niego por ello un cuerpo flexible en todas partes, al punto de afirmar que todo cuerpo es tal" (A VI 3, 554). El cuerpo flexible tiene partes cohesionadas, es decir, no diseminadas. Por eso, Leibniz presenta una nueva imagen de la división de los cuerpos:

> Por tanto, la división del continuo no debe ser considerada como la [división] de la arena en granos, sino como la [división] de un papel o una túnica en pliegues; y así, aunque sucedan algunos pliegues infinitos en número menores que otros, no por ello un cuerpo se disolverá en puntos o mínimos. (A VI 3, 555)

Sin embargo, a diferencia de las entidades geométricas, en el cuerpo el todo no es anterior a sus partes sino resultante por adición. Eso implicaría, consecuentemente, que la división no es operada por nosotros sino que nos es dada con anterioridad. La línea es un todo anterior a sus partes, y en este sentido está *en potencia* de ser dividida infinitamente. El cuerpo no es un todo anterior a sus partes sino que es un todo *per accidens* (A VI 3, 391), posterior a sus partes. Y ellas existen no en potencia, como en el continuo geométrico, sino *en acto* (A VI 3, 565-566), siendo su división, por lo tanto, no algo arbitrario dependiente de nuestra intención sino algo que es tal por naturaleza (A VI 3, 563-564).

Conclusiones

Recapitulemos, en primer lugar, las conclusiones parciales del trabajo. La distinción entre 'división en mínimos' y 'división sin fin' que Leibniz menciona en 1676 puede interpretarse como resultado de una evaluación que él hace de su primera concepción del continuo de la que resulta el concepto de indivisible. En la medida en que lo mínimo y lo indivisible comportan características comunes que llevarán a Leibniz a negarlos a ambos en 1672, el proceso de división del que resulta aquello que, aunque tenga partes, no pueda dividirse, no diferirá en lo esencial de la división en mínimos. El tratamiento de la división sin fin que tiene lugar fundamentalmente en 1676 remarca la imposibilidad de hallar un límite en la división de una magnitud cualquiera dada. Sin embargo, Leibniz reconoce que hay una diferencia de realización de la división misma en las entidades geométricas y en las físicas: en las primeras es el hombre el que divide las entidades, que como totalidades les son dadas con anterioridad a la división, en el número de partes que quiera; en los cuerpos no sucede lo mismo: su infinita composición no depende del arbitrio humano sino que las infinitas partes están naturalmente dadas. Por eso los cuerpos, a diferencia, son todos posteriores a las partes, o como Leibniz también suele mencionar, son agregados.

Es famosa la distinción que Leibniz hace entre el infinito categoremático y el sincategoremático en su pensamiento maduro. El segundo tipo, que implica que siempre hay infinitas partes más que las que pueden asignarse, es evidentemente compatible con la división sin fin. El primero, por su lado, está claramente en sintonía con la división en mínimos. Encontramos, entonces, que la distinción entre los dos tipos de división que él presentó en 1676 es no sólo el punto de llegada de sus reflexiones juveniles relativas al problema de la composición del continuo sino también el punto de largada de futuras indagaciones.

Referencias bibliográficas

Arthur, Richard T. W. (1986), "Leibniz on Continuity", *PSA: Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association*, 1: 107-115.

Arthur, R. T. W. (2000), "Leibniz's Inversion of Zeno: Continuity of Motion, Substantial Action and Plurality", http://www.humanities.mcmaster.ca/~rarthur/papers/LIZ.pdf. [última consulta: 21 de mayo de 2014]

Esquisabel, O. (2012), "Infinitesimales y conocimiento simbólico en Leibniz", *Notae Philosophicae Scientiae Formalis*, 1, 1: 66-79.

Euclides, (1991), *Elementos* (introducción de Luis Vega, traducción y notas de María Luisa Puertas Castaños), Madrid , Gredos.

Froidmont, L. (1631), *Labyrinthus sive de compositione continui*, Anvers.

Hobbes, T. (1839-1845), *The English Works of Thomas Hobbes,* Londres , J. Bohn.

Leibniz, G. W. (1923-ss), *Sämtliche Schriften und Briefe*, Akademie-Verlag, Darmstadt, Leipzig, Berlin. (Citado como A; luego la serie en números romanos y el tomo correspondiente en números arábigos. Ejemplo: A VI 3). Las traducciones son nuestras.

Leibniz, G. W. (1982), *Escritos filosóficos*, Edición de Ezequiel de Olaso, Buenos Aires, Charcas.

Leibniz, G. W. (2001), *The Labyrinth of the Continuum. Writings on the Continuum Problem, 1672-1686*, textos seleccionados, traducidos y editados e introducción elaborada por Richard T. W. Arthur, New Haven y Londres , Yale Univerisity Press.

Levey, S. (2003), "The Interval of Motion in Leibniz's *Pacidius Philalethi*", *NOÛS*, 47, 3: 371-416.