Universidad Nacional de La Plata

Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación

Aprendizaje significativo y comprensión del concepto función: un estudio con estudiantes de Licenciatura de Matemáticas y Física en la Universidad de Antioquia.

Tesis para optar al título de doctor en Ciencias de la Educación

Autor

Mg. Jose Wilde Cisneros

Director

Dra. Viviana Angélica Costa

La Plata, Provincia de Buenos Aires

República Argentina

2022

Agradecimientos

A la Universidad Nacional de la Plata (Argentina) por haberme dado la oportunidad de continuar con mi formación docente.

A la Dra. Viviana Angélica Costa por sus valiosas sugerencias y paciencia en la construcción de la investigación.

A los estudiantes de la U de A, en especial al Dr Rubén Darío Henao por permitir realizar la investigación en su asignatura.

A Eugenia, Laura, Sebastián y Agustín,

mi esposa, mis queridos hijos y nieto.

Índice

Contenido

Tabla de Ilustraciones

Tabla de mapas conceptuales

Resumen

La investigación se enmarca en la Teoría del Aprendizaje Significativo, la Teoría Sociocultural y el Modelo de Pirie & Kieren en el análisis del proceso de comprensión , se apoya en la Educación Matemática como disciplina del conocimiento que se ocupa del estudio de los fenómenos didácticos ligados al saber y al conocimiento matemático y en la Didáctica de la Matemática entendida como una disciplina científica que se encarga de investigar metódica y sistemáticamente el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

El objeto de estudio corresponde al concepto de función, el cual se considera como el foco de las matemáticas que, se ha construido y transformado a través de la historia constituyéndose en una herramienta útil para modelar y comprender fenómenos en las ciencias naturales, económicas, sociales y humanas, entre otras.

El estudio se realiza en un curso de Desarrollo del Pensamiento Lógico en el nivel universitario en la Universidad de Antioquia. La pregunta que la orienta es: ¿En qué medida puede desarrollarse aprendizaje significativo y la comprensión del concepto de función en particular la función a tramos y cómo influyen algunos subsumidores como dominio, rango, límite, continuidad y derivada en dicho aprendizaje desde la resolución de problemas con la implementación de un material potencialmente significativo que involucra tal concepto?

Como parte de la búsqueda de la respuesta a la pregunta de investigación emplea una metodología a la luz del paradigma cualitativo, bajo un enfoque estudio de caso. Así, se analiza el desarrollo del aprendizaje significativo desde Ausubel y Vigostky y la comprensión desde la propuesta de Pirie & Kieren y los conceptos de Kaput, Batanero y Pecharromán entre otros.

En esa vía, se diseñan cinco materiales que pretenden ser potencialmente significativos en el marco de la Teoría del Aprendizaje Significativo, que se aplican a los estudiantes, no solo con la pretensión de que su aprendizaje del concepto de función a tramos sea significativo, sino que el mismo sea importante para comprender otros conceptos que lo utilizan en el Análisis Matemático como los límites y las derivadas, conceptos involucrados en el material.

La investigación aporta a la Educación Matemática en particular al tratamiento de los fenómenos de producción y desarrollo de conocimiento y al estudio de las interacciones entre la epistemología, los procesos cognitivos y su dimensión sociocultural, además, de la de relaciones que se dan entre ambas Teorías.

El análisis de los datos y los resultados obtenidos en esta investigación permiten concluir que el diseño y posterior implementación de un material potencialmente significativo, logra llevar a cabo las relaciones entre los marcos de Aprendizaje Significativo y Sociocultural a través de la práctica social.

Palabras clave: Aprendizaje significativo, comprensión, estructura cognitiva, material potencialmente significativo, práctica social.

Abstract

The research is framed of the Meaningful Learning Theory and Sociocultural Theory and the Pirie & Kieren model in the analysis of the comprehension process, they are supported by Mathematical Education as a discipline of knowledge that deals with the study of didactic phenomena linked to mathematical knowledge and knowledge and in the Didactics of Mathematics understood as a scientific discipline that is in charge of methodically and systematically investigating the teaching-learning process of mathematics.

The object of study corresponds to the concept of function, which is considered as the focus of mathematics that has been built and transformed through history, becoming a useful tool to model and understand phenomena in the natural, economic, and social sciences. and human, among others.

The study is carried out in a course of Development of Logical Thinking at the university level at the University of Antioquia. The guiding question is: ¿To what extent can significant learning and understanding of the concept of function be developed, in particular the piecewise function and how do some subsumers such as domain, range, limit, continuity and derivative influence such learning from the resolution of problems with the implementation of a material potentially significant that such a concept involves?

As part of the search for the answer to the research question, it uses a methodology in light of the qualitative paradigm, under a case study approach. Thus, the development of meaningful learning from Ausubel and Vigostky and understanding from Pirie & Kieren's proposal and the concepts of Kaput, Batanero and Pecharromán among others.

In this way, five materials are designed that claim to be potentially significant within the framework of the Theory of Meaningful Learning, which are applied to students, not only with the claim that their learning of the concept of function is significant, but also that it is important to understand other concepts that use it in Mathematical Analysis such as limits and derivatives, concepts involved in the material.

The research contributes to Mathematical Education in particular to the treatment of the phenomena of production and development of knowledge and to the study of the interactions between epistemology, cognitive processes and their sociocultural dimension, what's more to the relationships that exist between both Theories.

The analysis of the data and the results obtained in this research allow to conclude that the design and subsequent implementation of a potentially significant material, manages to carry out the relationships between the Meaningful and Sociocultural Learning frameworks through social practice.

Keywords: Meaningful learning, understanding, cognitive structure, potentially significant material, social practice.

CAPÍTULO I

Organización de la investigación

La memoria de la investigación inicia con su respectiva introducción, seguida por ocho capítulos que corresponden a la linealidad del proceso realizado, los cuales se describen brevemente a continuación.

El Capítulo I presenta la introducción y desde allí se plantea la problemática, se desarrolla la justificación del problema a investigar, además, estudios que se han realizado relacionados con las dificultades y obstáculos concernientes al aprendizaje significativo. Así mismo, se plantea el desarrollo de conocimiento matemático y la comprensión del concepto de función, los cuales respaldan la descripción del problema, se exponen las preguntas de investigación orientadoras del proceso investigativo, los objetivos e hipótesis.

El Capítulo II presenta los fundamentos teóricos, se exponen las Teorías del Aprendizaje Significativo de Ausubel, la Teoría Sociocultural de Vygotsky, que son esenciales por cuanto se realiza la conexión entre ambas fundamentaciones.

El Capítulo III exhibe el marco conceptual desde el cual se hace un recorrido histórico sobre la evolución del concepto de función, sus diferentes acepciones y generalizaciones y de las configuraciones epistémicas que se han manejado a través de la historia que, muestra la evolución del conocimiento matemático como un elemento fundamental en la cultura el cual compartimos con los estudiantes. Desde la perspectiva cognitiva, se explicita cómo la historia y la evolución del concepto función ha logrado ofrecer fundamentos matemáticos y didácticos que, hicieron parte del proceso histórico-cultural acogidos por la humanidad para desarrollar sus conocimientos que probablemente los estudiantes incurran en un proceso similar. Luego se presenta el desarrollo actual del concepto, la función a tramos y los conceptos de límite y derivada de una función.

El Capítulo IV acoge la metodología de la investigación, describe el tipo de estudio, las etapas de la investigación, los participantes, la conexión entre las dos fundamentaciones, los instrumentos utilizados para recoger la información, el diseño de los instrumentos y la caracterización de cada uno de ellos.

El Capítulo V presenta el estudio previo de la investigación, incluye la identificación de los elementos del análisis designado como pre-test, se obtienen elementos sobre la comprensión matemática de los conceptos de función y función a tramos y las dificultades conceptuales, que no permiten anclar en la estructura cognitiva otros conceptos pertinentes al objeto de estudio.

El Capítulo VI ostenta el diseño del material potencialmente significativo, que se propone de acuerdo a los resultados obtenidos en el pre-test. Dicho material permitiría anclar los conceptos existentes en la estructura cognitiva de manera que se pueda lograr la comprensión de varios tipos de conceptos como límite, continuidad y derivada de la función a tramos.

El Capítulo VII presenta los resultados a través del análisis cualitativo, obtenidos de la aplicación del material que es considerado potencialmente significativo. Cada pregunta del pos-test tiene su respectivo análisis que involucra los subsumidores, el aprendizaje significativo, la comprensión del concepto y el anclaje de nuevos conceptos. Se analizan las categorías y subcategorías con la respectiva caracterización. Así mismo, este capítulo es considerado el foco central de la investigación debido a que se describe cómo los estudiantes a través de la resolución de problemas logran anclar los conceptos de límite, continuidad y derivada de funciones a tramos y a la vez desarrollar conocimiento matemático. Se resalta, además, la importancia del contexto sociocultural; la identificación del proceso de aprendizaje significativo el cual tiene como objetivo articular la actividad matemática con el entorno social y cultural, orientando la atención en el desarrollo del conocimiento y la comprensión de los objetos matemáticos.

En el Capítulo VIII se exponen las conclusiones, algunas reflexiones sobre la Educación Matemática, se responden las preguntas de investigación, algunas cuestiones abiertas y las principales aportaciones hechas por el autor a la comunidad educativa.

Al final se encuentran las Referencias Bibliográficas utilizadas en el cuerpo de la investigación.

La mayoría de los capítulos presentan mapas conceptuales que son los que guían el proceso de los contenidos en las respectivas secciones, gráficas que surgen como resultado de los análisis de los datos, las cuales fueron elaboradas por el investigador al igual que los mapas conceptuales. Las ilustraciones, son el producto de las respuestas dadas por los estudiantes a las preguntas del pretest y al material educativo potencialmente significativo.

1. Problemática de la investigación

Introducción

"El concepto de función es uno de los conceptos fundamentales en la matemática, pero también es uno para el cual los estudiantes tienen problemas para desarrollar una comprensión satisfactoria" (Díaz, 2013). Dicho concepto resulta fundamental para la en las matemáticas a cualquier nivel educativo, sobre todo en el estudio del Cálculo en la educación superior (Farfán y García, 2005).

En Colombia, los Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas[1], incluyen el pensamiento variacional, donde el concepto de función se circunscribe en la variación y el cambio en diferentes contextos, así como su aplicación en la modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólico, allí se señala:

> Uno de los propósitos es contribuir desde la Educación Básica Primaria distintos caminos y acercamientos significativos para la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos, para el aprendizaje con sentido del cálculo numérico y algebraico y, en la Educación Media, del cálculo diferencial e integral. Este pensamiento cumple un papel preponderante en la resolución de problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana, las ciencias naturales y sociales y las matemáticas mismas. (MEN, 2006, p. 66)

---

[1] https://www.mineducacion.gov.co/portal/

En los estudios de pregrado este concepto es transcendental para las matemáticas modernas y es esencial en áreas relacionadas de las ciencias. Una sólida comprensión del concepto es esencial para cualquier estudiante que desee adquirir conocimientos de Cálculo, Análisis y favorece el desarrollo de futuros científicos, ingenieros y matemáticos en el proceso de elaboración de modelos matemáticos.

Además, en la educación superior incluyendo facultades de educación, introducen el concepto en el currículo desde los primeros niveles o cursos de Matemáticas Operativas, Introducción al Cálculo, Cálculo diferencial e Integral, donde se incluyen temas referentes a la función, sus tipos y la función a tramos.

Los cursos de Cálculo se desarrollan alrededor del estudio de temas ligados al concepto función, tales como: clases de funciones, dominio, rango, límite de una función, derivada de una función, operaciones con funciones y funciones trascendentales, entre otros; convirtiéndose en uno de los cimientos más importantes para el Cálculo y la modelación de situaciones y fenómenos en varios ámbitos de la ciencia, de forma que los resultados y procesos en distintas ciencias pueden verse afectados por una inadecuada conceptualización y aplicación del concepto.

De igual forma, las funciones a tramos se inscriben en las funciones trascendentales y son importantes en el sentido que se aplican en las modelaciones del comportamiento de fenómenos económicos, físicos, sociales y matemáticos, además, permite una mejor visión de diversos conceptos específicos tales como límites, continuidad y derivadas.

En las ciencias naturales y en nuestra vida rutinaria aparecen fenómenos que son modelos de funciones, que tienen un comportamiento continuo, como el volumen de agua en una represa, el crecimiento de una planta, el desplazamiento de un vehículo, pero también se presentan fenómenos de discontinuidades como las corrientes eléctricas.

Dada la importancia de este concepto, en esta investigación se aborda el aprendizaje significativo del mismo en un curso universitario con estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad de Antioquia. El concepto de función, en particular del concepto función a tramos permite anclar otros conceptos del Cálculo y Análisis Matemático como son: límites laterales, continuidad puntual y en un intervalo y derivadas laterales de una función.

Este abordaje se realizará utilizando las nociones de aprendizaje significativo y el desarrollo de conocimiento matemático. Para ello, es necesario tener en cuenta las fundamentaciones teóricas que permitan y posibiliten la articulación de saberes matemáticos, que reconozcan el papel que juegan tanto la actividad humana en los procesos socioculturales como en la práctica social en el desarrollo del conocimiento.

Para analizar la comprensión, el aprendizaje significativo y el desarrollo de conocimiento matemático en condiciones socioculturales que emergen de la práctica social, nos guiamos por dos fundamentaciones como son la Teoría cognitiva del Aprendizaje Significativo (Ausubel, 1963, 1976, 2002) y la Teoría Sociocultural (Vygotsky, 1978,1979), además, por la propuesta de Pirie & Kieren las cuales se vislumbran como alternativas que contribuyen a restablecer el anclaje de nuevos contenidos a través de material educativo potencialmente significativo.

Ausubel (1963, 1976, 2002) presenta un modelo teórico basado en el aprendizaje significativo y centrado en el contexto educativo y un material en sí mismo no arbitrario para la comprensión de los objetos. Se ocupa en especial del proceso de aprendizaje de los conceptos científicos a partir de los conceptos que los estudiantes ya han anclado en su estructura cognitiva, anclaje que permite relacionarse con la interiorización esbozada por Vygotsky (1978,1979).

Así mismo, Ausubel (1976, 2002) se focaliza en conocer y explicar las condiciones y características del aprendizaje que se pueden relacionar con formas efectivas y eficaces de provocar de manera deliberada cambios cognitivos estables, susceptibles de dotar de significado individual y social a los objetos matemáticos.

Vygotsky (1978) plantea que la actividad socialmente significativa que genera aprendizaje, debe basarse en el análisis del potencial del estudiante para llegar a niveles superiores del desarrollo cognitivo, lo cual se debe realizar por medio de los instrumentos que son mediadores de la actividad, ello permite a los sujetos dinamizar el proceso de desarrollo humano de conocimiento y la constitución de significado conferido a los objetos.

La Teoría Sociocultural fundamenta y respalda la dinámica del desarrollo de conocimiento y la comprensión de los objetos, teniendo como referente los procesos psicológicos superiores y los símbolos -el significado lógico de los materiales- y su transformación en la vida social de los sujetos -internalización de instrumentos y signos- (Moreira, 2000).

La Teoría Sociocultural de Vygotsky (1978,1979) se articula, converge y se complementa con la Teoría de Ausubel (1976, 2002) en el sentido dado a los aprendizajes significativos en contextos dentro de una comunidad de práctica social, en la cual los sujetos toman conciencia de los objetos en interacción, ubicados en un contexto amplio de influencias históricas, sociales y culturales, en este sentido Planas (2010) afirma:

> No tiene sentido pensar la actividad matemática en el contexto único de la persona que la realiza […] tampoco tiene sentido pensar la actividad matemática únicamente ambientada en el entorno sociocultural, histórico y político sin atender a las particularidades cognitivas de las personas involucradas en dicha actividad. (p. 166).

Ambas Teorías examinan el papel de los instrumentos físicos y simbólicos como la escritura, las fórmulas, los signos y diferentes tipos de notaciones o sistemas de representación que reestructuran la memoria, la atención y la percepción, de forma tal que la cognición esté situada dentro de circunstancias sociales, culturales e históricas específicas.

En la construcción o desarrollo de conocimiento las fundamentaciones estarían representando formas diferentes y no excluyentes de conocer, de pensar y, en consecuencia, de aprender, es decir, ambas adquieren aplicabilidad en el ambiente educativo y pedagógico.

En consecuencia, la investigación admite el tratamiento del fenómeno de desarrollo de conocimiento que permite el estudio de las interacciones entre la epistemología, procesos cognitivos y su dimensión sociocultural a través de una estrategia que incluye el material potencialmente significativo, que circunscribe la actividad de resolución de problemas.

1.1. **Justificación de la investigación**

El concepto de función a tramos en la Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad de Antioquia, es abordada en algunos tópicos de fundamentos de Introducción al Cálculo, Cálculo en una variable y Cálculo en varias variables, Ecuaciones Diferenciales y Análisis, en los que intervienen temáticas como funciones, límites y derivadas.

Se evidencian múltiples obstáculos en el aprendizaje del concepto formal por parte de los estudiantes y, dificultades en la comprensión de los conceptos y procesos matemáticos. De igual forma, existen obstáculos de tipo cognitivos, dificultades de aprendizaje significativo y escasa comprensión del concepto función[2], los cuales abarcan el desarrollo del conocimiento matemático y el valor de la cultura, dificultades que son la matriz que ha generado esta investigación.

Las dificultades cognitivas de los estudiantes cuando abordan la noción de *función* (Akkoç & Tall, 2005), se refieren al desconocimiento de la diversidad de representaciones asociadas con esta noción.

Además, cuando los estudiantes focalizan el estudio de la función en procesos algorítmicos conllevan la consideración de la *función* como una fórmula, con una escasa y limitada significación, donde la construcción de registros en tablas es un simple requisito y la gráfica no tendrá interpretación (Artigue, 1998).

En ocasiones los estudiantes no logran identificar o admitir como funciones aquellas cuya generalidad y arbitrariedad no permite expresarlas algebraicamente o mediante gráficas cartesianas.

La noción de función es el foco de las matemáticas y se ha formado y transformado a través de la historia (Gagatsis, Elia, Mousoulides, 2006) constituyéndose en un referente para las ciencias naturales, sociales y humanas.

Sin embargo, el concepto ha sido controversial y estudiado desde varios puntos: histórico, epistemológico, matemático y educativo, razón por la cual los reportes sobre el problema de su aprendizaje por parte de profesores y estudiantes son de interés para los investigadores de diversos campos.

---

[2] Comprender el concepto función es el acto mental que realiza una persona de hacer corresponder al término 'función' otro objeto. Con el término 'función' se designa una entidad cultural, un objeto no ostensivo -símbolos, gráficos-.

En el escenario curricular la función tiene implementación en los modelos de distintos fenómenos propios de los sistemas analíticos, de igual forma, se utiliza para realizar diferentes prototipos de modelación tanto en la ingeniería, las ciencias naturales, sociales y humanas, además, franquea desde los cursos de la educación media hasta cursos universitarios de Cálculo Diferencial e Integral.

Investigaciones como las de Carlson, Jacobs, Coe, Larsen & Hsu (2003) señalan:

> Desde finales del siglo diecinueve se ha recomendado de manera reiterada incrementar en los currículos escolares el énfasis en el estudio de las funciones (Klein,1883; Hamley, 1934; College Entrance Examination Board, 1959). De manera más reciente, la literatura que propende por incluir el tema de funciones desde muy temprano en la instrucción, apoya que se promueva el pensamiento conceptual acerca de funciones. (p. 122)

Los autores indujeron a que los estudiantes asimilen e interpreten enunciados referentes a la forma como crece o decrece la tasa de inflación y, en general, basaron sus ideas en que los estudiantes deben desarrollar una "comprensión más profunda de las maneras en que los cambios en las cantidades se pueden representar matemáticamente" (NCTM, 2000, p. 305).

Así mismo, la *National Research Council* (1996) ha exaltado que los estudiantes usen funciones matemáticas para identificar patrones y anomalías en los datos, lo cual permite una mejor comprensión del objeto en cuestión.

Las investigaciones de (NCTM, 1989; Thorpe, 1989; Vinner & Dreyfus, 1989; Monk, 1992; Sfard, 1992; Kaput, 1994; NCTM 2000) que tienden a incluir el tema de funciones desde muy temprano en la instrucción, afirman que debe promoverse el desarrollo del conocimiento acerca de las funciones, lo que incluye investigar patrones de cambio.

Ligado a lo anterior, los investigadores (Arzarello & Edwards, 2005; Arzarello, 2006; Radford, 2006, 2009, 2010) sugieren revisar y ahondar en la forma en que surgen y evolucionan el desarrollo del pensamiento matemático en general y en particular las formas de pensamiento aritmético, algebraico y geométrico. Como consecuencia, se encuentran patrones los cuales contribuyen a la emergencia del simbolismo algebraico e influyen en la cognición enfatizando el rol jugado por los conceptos en diferentes contextos.

En este sentido, Brown, Collins & Duguid (1989) revelan que “al ignorar la naturaleza situada de la cognición, la educación frustra su propio objetivo de proporcionar conocimiento” (p. 2).

Moreira (2010) ha manifestado la importancia del aprendizaje significativo -en adelante AS- en diferentes contextos y la relevancia acerca de la forma de presentar los conceptos de manera contextualizada y del valor de la cultura cuando los estudiantes resuelven problemas matemáticos, argumentando que se genera un pensamiento crítico.

El AS es aprendizaje con significado, comprensión, retención, capacidad de transferencia. Sánchez y Ramis (2005) indican que la resolución de problemas incita en los estudiantes a usar apropiadamente los recursos de aprendizaje, al mismo tiempo que emplear el conocimiento y habilidades adquiridas.

Bransford, Brown, & Cocking (1999), reconocen que el conocimiento previo que los estudiantes traen consigo son sustanciales para su aprendizaje y no sólo como sujetos que siguen los dictados de los profesores, identifican el aprendizaje centrado en el estudiante con una determinada concepción sobre el currículo y el conocimiento más nuclear e integrado de una disciplina.

En la literatura existente sobre los tipos de dificultades (Tall & Vinner, 1981; León y Vergel, 1997; Planchart, 2005; Gutiérrez, 2007; Ospina, 2012) señalan que existen y reaparecen los problemas de acercamiento al concepto de función, pero, lo que no sabemos es cómo se producen, cómo emergen y cómo se mantienen. Es decir, de cierta manera no sabemos por qué no se comprenden ciertos conceptos involucrados en la solución de problemas referentes al concepto de función, con qué tropiezan, qué conflictos surgen, pero, además, no sabemos en sí cómo ni por qué se genera la ausencia de comprensión. Mientras no sepamos mucho más sobre ello, no lograremos superar esos obstáculos.

En síntesis, se plantea el tratamiento de los fenómenos de producción y desarrollo de conocimiento matemático, cuando se utiliza material educativo potencialmente significativo concerniente al concepto de función a tramos, donde la actividad de resolución de problemas permitirá el anclaje influyente de otros objetos matemáticos.

Lo anterior, nos conlleva a la identificación de elementos bajo un corte cognitivo y sociocultural, basados en el trabajo matemático y análisis del desempeño en interacción social de los estudiantes que, permite visionar esta investigación desde una perspectiva que se focaliza en el planteamiento del proceso de desarrollo del conocimiento matemático y la comprensión del concepto de la función a tramos, cuando se utiliza un material potencialmente significativo reconocido en las prácticas sociales durante la actividad de resolución de problemas.

Las diversas investigaciones desarrolladas en la línea a la que pertenece este trabajo permiten esbozar elementos de construcción de conocimiento, sin embargo, queremos resaltar la poca o escasa visión social de la construcción del conocimiento que se desarrolla cuando los estudiantes resuelven problemas a partir del concepto de función y en particular la función a tramos.

Las diversas investigaciones desarrolladas en la línea a la que pertenece este trabajo permiten esbozar elementos de construcción de conocimiento, sin embargo, queremos resaltar la poca o escasa visión social y cultural en el desarrollo del conocimiento que se despliega cuando los estudiantes resuelven problemas a partir del concepto de función y en particular la función a tramos.

Surge así, esta propuesta de investigación que se apoya en algunos de los investigadores anteriores, los cuales contribuyen en cómo es posible ayudar a desarrollar el aprendizaje significativo y cómo se reconoce los conocimientos previos que los estudiantes tienen en su estructura cognitiva. De igual forma pretendemos aportar otros elementos constitutivos a la hora de explorar y describir cómo los estudiantes adquieren aprendizaje con significado y comprenden el concepto de función y en particular de función a tramos teniendo en cuenta la resolución de problemas matemáticos -RP en adelante-.

1.2. **Planteamiento del problema**

1.2.1. ***Presentación del problema***

En este apartado se ubica la problemática que da respaldo a la investigación desde una perspectiva más amplia, dado que el estudio que se describe presenta y analiza la relación con el saber, con las matemáticas y el conocimiento matemático subyacente en el concepto de función a tramos, su aprendizaje y comprensión durante la actividad[3] RP.

---

[3] En esta investigación la actividad es considerada un proceso interactivo entre hombre-mundo que satisfacen una necesidad (Leontiev, 1978). La actividad, según el autor, tiene como particularidad el motivo por el cual el sujeto se dispone a proceder a partir de una necesidad, así, la resolución de problemas es considerada una actividad humana y el aprendizaje es la necesidad.

En matemáticas, diferentes formas de pensamiento que abarcan varios significados del concepto de función, surgieron a partir del año 1000 DC y continúa evolucionando hoy en día. Dirichlet (Citado en Thompson, 2017, p. 422) afirmó "los valores de una variable están determinados únicamente por los valores de otra con una ley de correspondencia precisa entre x e y [eso] puede enunciarse claramente", con lo cual se refiere a elementos que caracterizan a la función.

Thompson afirma que, Dirichlet brindó la definición de función a tramos f, definida sobre los números reales por la regla " $f(x) = \begin{cases} 0, & si\ x\ es\ irracional \\ 1, & si\ x\ es\ racional \end{cases}$ para aclarar que una ley de correspondencia puede ser arbitraria y que las funciones podrían ser altamente discontinuas" (p. 422).

Un problema generalizado de comprensión del concepto de función como una relación entre variables y desconocimiento de elementos circunscritos a dicho concepto, ha suscitado desde el siglo pasado diversas investigaciones a su alrededor (Sierpinska, 1992; Ruiz, 1998).

En este marco basamos nuestro interés en el aprendizaje significativo, esencialmente a partir de un análisis cognitivo del concepto bajo influencia sociocultural, para el que hicimos uso de Teoría del Aprendizaje Significativo y la Teoría sociocultural.

Algunos de los estudiantes de la Licenciatura de Matemáticas y Física de la Universidad de Antioquia, del curso Desarrollo del Pensamiento Lógico, no son ajenos a dichos problemas, pues no comprenden el concepto de función y en particular el de función a tramos y cuando intentan resolver problemas presentan dificultades para resolverlos cuando en estos se involucra dicho concepto.

De igual forma se observa la tendencia a conceptualizar las funciones como expresiones analíticas, tienen muy naturalizada la idea que las funciones deben representarse por una sola expresión algebraica. Esto permite explicar algunas de las dificultades sobre el AS detectadas en la presente investigación para identificar funciones definidas por tramos en forma algebraica y sus diferentes representaciones durante la RP.

Las limitaciones anteriores referidas con el concepto parecen focalizarse tanto en su complejidad como en su generalidad, como consecuencia de múltiples aspectos y la variedad de representaciones[4], además, de una diversidad de conceptos propios del Análisis Matemático que se exteriorizan con diferentes niveles de abstracción.

1.2.2. *Sobre la problemática*

En este apartado presentamos resultados de las principales investigaciones relacionadas con diversos aspectos del tema que nos han servido de referencia para nuestro estudio.

Estos trabajos son seleccionados puesto que dan cuenta sobre dificultades de aprendizaje y la comprensión de objetos matemáticos; contribuyen en esta investigación a establecer y relacionar algunas de las categorías de análisis utilizadas en la metodología, ayudándonos a observar que el desarrollo del conocimiento emerge a partir del rechazo de formas previas de conocimiento en la estructura cognitiva de los

---

[4] Kaput (1987) señala: El concepto de representación da por supuesta la consideración de dos entidades relacionadas, pero funcionalmente separadas. Uno de estos entes se denomina el objeto representante (símbolo o representación), el otro es el objeto representado (concepto), también está implícita cierta correspondencia entre el mundo de los objetos representantes y el mundo delos objetos representados. (p. 23)

estudiantes, conocimientos adquiridos durante un tiempo de forma lógica y práctica en contextos culturales.

La actual investigación involucra el aprendizaje desde las teorías cognitivas concebido como procesos mediante los cuales los hombres adquieren o desarrollan conocimientos. Procesos que involucran lenguaje, percepción, memoria, razonamiento y resolución de problemas.

En ese sentido, el desarrollo cognitivo de los individuos se halla relacionado con la interacción social en el marco de la cultura preponderante, es decir, que responde al proceso de socialización, donde la producción individual de los significados y desarrollo de conocimiento es parte de una construcción dinámica compartida en el seno de la sociedad.

El marco teórico construido por Ausubel (1973, 1976, 2002) pretende dar cuenta de los elementos por los que se lleva a cabo la adquisición y la retención de los grandes corpus de significado. Aunque se trata de una Teoría psicológica ya que se ocupa de los procesos mismos que el individuo pone en juego para aprender, esta investigación no trata temas relativos a la psicología misma ni desde un punto de vista general, ni desde la óptica del desarrollo, sino que se focaliza en lo que los estudiantes aprenden, comprenden y la forma como desarrollan conocimiento bajo condiciones requeridas durante la práctica social.

El aprendizaje como proceso dinámico del desarrollo de estructuras cognitivas, se fundamenta en esta investigación en el AS, el desarrollo social y cultural del conocimiento matemático, se identifica con el saber relacionado con la comprensión del significado de un concepto matemático.

1.2.3. ***Dificultades en el aprendizaje sobre el concepto de función y su compresión***[5]

Vamos a exponer algunas de las investigaciones o trabajos más relevantes que se han investigado centrado en los procesos cognitivos que abordan el concepto de función. Los vínculos del cálculo tanto con la matemática básica elemental como con el Análisis matemático y su papel en las ciencias y su transformación en un conjunto de conocimientos con valor teórico y empírico indispensable en la educación superior.

En el campo de la Educación Matemática se han fundamentado situaciones donde se identifican algunas dificultades de aprendizaje que han sido reportadas por diferentes investigadores (Orton, 1983; Artigue, 1998; Cantoral, 2000; Artigue, 2003; Moreno-Armella, Hegedus & Kaput, 2008; Salinas & Alanis, 2009) y a través de diferentes perspectivas teóricas como la Socioepistemología y la Ingeniería Didáctica.

Estos trabajos se han orientado al desarrollo de acercamientos didácticos que favorecen la construcción de significados, se han incluido por su interés en esta investigación tanto por el nivel de los procesos como por el tratamiento de los conceptos propios del Cálculo y del Análisis Matemático, especialmente de los conceptos de función, límite, continuidad, derivada y convergencia, entre otros.

Investigadores como Tall & Vinner (1981) obtienen evidencias sobre los escasos aprendizajes por parte de los estudiantes universitarios, ante nociones matemáticas como

---

[5] La comprensión, es un proceso en el cual el estudiante fundamenta, desarrolla, interpreta, representa y relaciona diferentes componentes del concepto del objeto en cuestión. Se trata de determinar qué conoce, y para qué lo utiliza, de investigar lo que hace para resolver un problema, es decir, es un todo dinámico, recursivo, jerarquizado de una reorganización de la estructura cognitiva.

número real, límite, continuidad, series infinitas, como ausencia para dar sentido y significado al concepto de función.

Vinner & Dreyfus (1989) reportan:

> Los estudiantes por otro lado, no necesariamente usan la definición del concepto para decidir si un objeto matemático dado es o no un ejemplo de dicho concepto. En la mayoría de los casos deciden sobre la base del concepto imagen, es decir, el conjunto de todas las imágenes mentales asociadas en la mente de los estudiantes con el nombre del concepto, junto a todas las propiedades que la caracterizan. La imagen del estudiante es el resultado de su experiencia con ejemplos y no ejemplos. del concepto. (p. 356)

Los autores aclaran que por imágenes mentales consideran “algunos tipos de representación -imágenes, formas simbólicas, diagramas, gráficas-” (p. 356). Sin embargo, expresan los autores que el conjunto de objetos matemáticos considerado por los estudiantes cuando estos aportan representaciones visuales, propiedades del concepto de función, no son necesariamente el mismo objeto matemático que el determinado por la definición.

Existe una diferencia entre un concepto matemático, tal y como se expresa y es concretizado rigurosamente, y el concepto matemático tal como es concebido y apropiado por el estudiante, es decir, simplemente coexiste una asociación con el nombre del concepto.

Tall & Vinner (1981) identifican varios problemas en la concepción de conceptos matemáticos, en especial el concepto de función, que parecen ser comunes a los estudiantes de todos los países. Estos problemas en su mayoría de comprensión se revelan como inconsistencias entre los significados asociados con el concepto, ya que son activados por el estudiante ante demandas cognitivas en relación con diferentes situaciones problemáticas.

Otras investigaciones (León y Vergel, 1997; Planchart, 2005; Gutiérrez, 2007; Rey *et al*., 2009; Ospina, 2012) dan cuenta de la complejidad de la comprensión del concepto de función, descubriendo que una de las dificultades que se evidencia es la manera como se promueve el aprendizaje debido a que "en muchos casos, primero se formaliza el conocimiento a enseñar y luego se aplica en la resolución de ejercicios que, en general, están construidos exclusivamente para la aplicación directa del concepto aprendido, sin ningún tipo de transformación" (Rey *et al*., 2009, p. 153).

Las investigaciones muestran que los estudiantes presentan dificultades con la conceptualización de los procesos o procedimientos y que éstas se refieren a la ruptura existente entre lo conceptual y lo algorítmico, en este sentido, la enseñanza del Cálculo privilegia el tratamiento algorítmico, en detrimento propiamente de la comprensión de nociones básicas (Quezada, 1986; Artigue, 1998; Cantoral, 2000).

Sierpinska (1992) plantea el problema general de la comprensión de un concepto matemático, y a partir de un desarrollo histórico-epistemológico del concepto de función, reporta algunos obstáculos epistemológicos donde se reconoce que, el análisis debe centrarse en el paso desde antiguas formas de conocer a nuevas formas de conocer.

Lo que la autora plantea es un reconocimiento en el cual los estudiantes deben situar en práctica los conocimientos adquiridos a casos específicos para desarrollar nuevos conocimientos, reconoce que se debe partir de lo que el estudiante ya ha comprendido.

También devela la autora que los estudiantes presentan inconvenientes para comprender el enlace entre diferentes representaciones, "en manipulación de gráficos y símbolos relacionados con las funciones tales como f(x), $x \rightarrow y$, sen (x+t)" (Sierpinska, 1992, p. 25).

En su estudio se aprecian los análisis de las componentes cognitiva y epistemológica, incluyendo, además, fenómenos como la motivación, los conocimientos previos que tienen los estudiantes en su estructura cognitiva y relación con las comprensiones de los diferentes registros de representación.

Los trabajos de Farfán y Hitt (1990), Hitt (1994) reportan que la comprensión del concepto de función es un proceso cognitivo complejo, tanto para estudiantes como para los maestros durante el proceso de aprendizaje del concepto; en referencia al trazado de gráficas de funciones indica que profesores y estudiantes tienden a representar a aquellas funciones con la propiedad de ser continuas, dejando de lado las demás, en especial las funciones discontinuas y a tramos.

Los estudiantes que provienen del bachillerato e ingresan a la universidad traen una comprensión deficiente sobre el concepto de función, y los cursos universitarios de primer nivel hacen poco para solucionar esta dificultad, la afirmación anterior es consecuencia del análisis de un estudio de caso realizado por Monk & Nemirovsky (1994) con estudiantes de los Estados Unidos y Carlson (1998) la confirma con estudiantes del College of Algebra.

En el estudio Carlson, Jacobs, Coe, Larsen & Hsu (2003) indican que:

> Al examinar el pensamiento de estudiantes de cálculo que están intentado interpretar la naturaleza cambiante de la razón de cambio para intervalos del dominio de una función, diversos estudios (Monk, 1992; Monk y Nemirovsky, 1994; Nemirovsky, 1996; Carlson, 1998) han revelado que esta habilidad se desarrolla lentamente y además se han reportado problemas específicos en la

> habilidad de los estudiantes para interpretar información en las gráficas de funciones. Estudios realizados por Monk (1992) y Kaput (1992) han notado que estudiantes de cálculo muestran una tendencia fuerte a distraerse por la forma cambiante de una gráfica y en general no parecen ver la gráfica de una función como un medio para definir la relación de covariación entre dos variables. (p. 125)

Posteriormente concluyeron que los estudiantes parecían no tener una comprensión de las variables que estaban cambiando en la función, es decir, no tenían claro la noción de correspondencia ligada a la noción de función como covariación de los valores del dominio y del rango.

Diversas investigaciones (Bartell, Webel, Bowen & Dyson, 2013; Magiera, van den Kieboom & Moyer, 2013) señalan que, en general los estudiantes no construyen un adecuado significado del concepto de función, lo que implica concebir al objeto como una herramienta conceptual que se desarrolla a través de su uso, es decir, el significado depende de relaciones entre sus objetos constituyentes o componentes y, la relación con otros objetos.

Investigaciones acerca de la comprensión sobre el concepto de función que tienen los estudiantes de nivel de pregrado, han documentado sobre la dificultad para modelar relaciones funcionales de situaciones que involucran la razón de cambio de una variable cuando varía continuamente en una relación dependiente con otra variable (Carlson, 2003).

De igual forma, los estudiantes del estudio de caso de la U de A no perciben el concepto de función involucrado cuando resuelven problemas referentes a límites, derivadas y continuidad de una función en un punto o un intervalo, debido a la poca comprensión que poseen de este de este concepto. Se observó una escasa construcción de las funciones focalizadas en la relación de f y f’ donde f representa la ordenada y f’ la pendiente de la recta tangente, lo cual es permitido desde un sistema de representación diferente al cálculo de f'(a). si f es derivable en a, entonces es continua en a, se nota así una dificultad para solucionar problemas que involucran la continuidad puntual.

Así, se deja de lado la comprensión de la derivada como una nueva función y la relación entre el aspecto local y global dado en un punto f'(a) y la idea de función derivada f ' (x), que permite pasar de una perspectiva puntual a una global.

Asimismo, se encontraron dificultades en la transformación a diferentes registros del objeto matemático en los estudiantes, cuando tienen que considerar otros tipos de funciones definidas por procesos equivalentes, o cuando tienen que ocuparse no con funciones elementales sino con funciones definidas por una propiedad general cualquiera, incluyendo funciones a tramos.

1.2.4. Desde la resolución de problemas y aprendizaje del concepto de función y sus dificultades

Los problemas pueden valerse como fuente de nuevos aprendizajes de conceptos, y también para resignificar conocimientos aprendidos, además, debe facilitar los diferentes contextos en los cuales se desarrollen conocimientos matemáticos lo cual implica que los estudiantes adquieran aprendizaje y en particular AS.

Schoenfeld (1985) afirma que "Cuando la instrucción se focaliza casi exclusivamente sobre el dominio de hechos y procedimientos, los estudiantes no desarrollan probablemente algunas de las de habilidades de orden superior, necesarias para usar las matemáticas" (p. xiii.).

Sierpinska (1992) ha tratado de encontrar la respuesta de diferentes formas a la problemática anterior, ha utilizado la RP, el uso de calculadoras y computadores, concluyendo que esas soluciones pedagógicas se experimentaron en clases y aunque hubo un impacto, durante el aprendizaje observaron saltos prominentes de conceptos que impedían formar o reconocer nuevos objetos, a lo que ha llamado obstáculos epistemológicos.

En cuanto a la resolución de problemas "(…) La percepción de las funciones como una herramienta apropiada para modelar o matematizar relaciones entre magnitudes físicas (u otras) es una condición para dar sentido al concepto de función en su totalidad" (Sierpinska, citada por Ruiz,1998, p. 64).

En este sentido Artigue (1998) indica que los estudiantes presentan dificultades y no adquieren ni desarrollan conocimientos cuando resuelven problemas relacionados por ejemplo con límites, derivadas y función integral, conceptos que debieron ser anclados en su estructura cognitiva, debido a que no han comprendido el concepto de función, y en particular el de función a tramos, ni logran relacionarlo con algunos conocimientos previamente estudiados -como función de variable real, composición de funciones- en su primer año en la universidad.

De otra parte, el aprendizaje de las matemáticas ha pasado de Teorías generales de aprendizaje a estudios del aprendizaje de contenidos matemático específicos (Kilpatrick, 1998), aunque se han realizado investigaciones alrededor de las estructuras cognitivas que los estudiantes generan cuando resuelven tipos particulares de problemas (Nesher & Kilpatrick, 1990; Burscheid, Struve, & Walther 1992, Grouws *et al*., 1992), las investigaciones aún no han logrado aclarar los esquemas cognitivos generales que utilizan los sujetos cuando se resuelven problemas matemáticos.

Grouws, Good & Dougherty (1990) recalcan la necesidad de investigar las prácticas escolares en relación con la comprensión de los objetos involucrados en la RP. Indican que "en algunos casos, pueden ser manifestaciones de nociones, creencias y preferencias que actúan como fuerzas impulsoras en la configuración del comportamiento del maestro" (p. 135), indican los autores que, es importante llegar a la comprensión de los objetos pasando por diversos registros, si se quiere mejorar la RP.

Ávila y Aparicio (2006) reportan sobre el problema del concepto de función y la transformación a otros registros de representación, cuando se les pide a estudiantes que han realizado cursos de cálculo evaluar o resolver problemas que involucran la función a tramos valor absoluto $\int_{-3}^{3} |x+2|dx$, observan dificultades epistemológicas al representar la función asociada en su forma gráfica y su forma algebraica, presenciando que no hay un adecuado desarrollo de conocimiento matemático.

En el contexto universitario Rey *et al*., (2009) plantean que los estudiantes que ingresan a la universidad encuentran dificultades para interpretar, definir y graficar funciones que permitan modelar situaciones problemáticas, tanto del campo de la matemática como de otras áreas del conocimiento, y que se encuentra una diversidad de concepciones asociadas a la noción de función, ello como consecuencia a un enfoque basado en el uso de rutinas y procedimientos algorítmicos.

1.2.4.1**. El concepto de función como objeto de enseñanza y aprendizaje.** En su desarrollo histórico el concepto de función ha ido evolucionado por la necesidad de ser generalizado tanto en su conceptualización como aplicación, por esa razón es uno de los conceptos más difíciles tanto para su enseñanza como para su aprendizaje.

Según Bloch (2003) los maestros universitarios no asumen de buena forma que los estudiantes no muestren las habilidades adecuadas para realizar demostraciones y que utilizan tanto los gráficos y las ecuaciones como si fueran tipos de etiquetas de una función, en lugar de medios materiales para expresar conceptos.

Vrancken, Gregorini, Engler, Müller & Heckiein (2006) reportan dificultades presentadas por los estudiantes en el concepto de funciones como: identificar el dominio, representar la gráfica de una función y distinguir la variable independiente y la variable dependiente.

López y Sosa (2007) presentan un reporte correspondiente a una investigación realizada con el propósito de identificar cuáles son los factores que influyen en las dificultades de aprendizaje y los errores cometidos por alumnos del nivel medio superior al momento de manipular el concepto función.

Los autores indican que durante la enseñanza suelen presentarse diversas formas de representar al mismo objeto matemático (diagramas sagitales, conjuntos, gráficas, entre otras.), pero dichas representaciones están desvinculadas y non encaminadas hacia la conceptualización de función como relación de correspondencia ni como relación entre variables.

Finalmente concluyen que es necesario considerar aspectos cognitivos, epistemológicos y didácticos para el aprendizaje de funciones, basados en actividades y experiencias que promuevan el lenguaje y el pensamiento variacional, la visualización y la modelación de situaciones o fenómenos.

En las clases de Cálculo los términos variable dependiente e independiente se utilizan en ocasiones de manera equivalente, pudiendo degenerar en una dialéctica que es necesario controlar (Barwell, 2013). Sin embargo, el concepto de variable para su aprendizaje es raramente discutido en asignaturas en la universidad (Biehler & Kempen, 2013).

Saa y Trochez (2013) realizan un trabajo de enseñanza de la función por tramos partiendo de sus diferentes registros de representación semiótica integrando el periódico y GeoGebra, e implementan una secuencia didáctica, para estudiantes de grado 9°.

Toman como referentes la Teoría de Situaciones Didácticas y las representaciones semióticas.

El estudio involucra cuatro fundamentaciones teóricas y se enfocan en la caracterización del diseño de una secuencia didáctica, y por otro lado, se orientan a enseñar el manejo de Geogebra que no es el objetivo, al igual el uso de límite de una función, contenido que es de grado superior -11°- en Colombia.

Otras investigaciones (Guevara, 2011; Lozano, 2017; Neira, 2017; Parra, 2020) que se plasman en tesis doctorales, trabajos de maestría y artículos en Colombia, muestran que la repitencia, deserción escolar, incomprensión de conceptos, obstáculos epistemológicos, el inadecuado manejo de razonamientos, la escasa competencia algebraica, son la problemática que enfrentan los estudiantes en la resolución de problemas referentes al concepto de función, cuando los estudiantes inician su formación en matemáticas en la universidad en diferentes carreras, que tienen que cursar Cálculo Diferencial o Cálculo I, en parte debido a cursos desarrollados mediante trabajo algorítmico y algebraico.

Parra (2020) llevó a cabo un estudio en la Universidad de Antioquia donde manifiesta que existen tópicos relacionados con el Cálculo, y el manejo erróneo de algunos de sus temas subyacentes a la materia, los cuales obstaculizan el desarrollo profundo de los conceptos como son, el concepto de función, límite, máximos y mínimos, continuidad, derivada e integral, que genera limitaciones para realizar aplicaciones del cálculo.

Lozano (2017) busca contextualizar el estudio del concepto de función desde los enfoques de representaciones semióticas y comunicacional, estudia sus características, sus diferentes representaciones y aplicaciones particulares de las funciones elementales.

La propuesta implementada se enfoca en mejorar la enseñanza de las funciones elementales desde marcos y apoyos en recursos que favorezcan el aprendizaje, propone su enseñanza desde sus diferentes representaciones, conversiones y tratamientos, mediante el uso de recursos TIC y algunas tecnologías computacionales, y el trabajo colaborativo para la construcción de discurso matemático. El trabajo se realiza con estudiantes de pregrado de Fundamentos de Matemáticas.

Neira (2017) bajo un enfoque Ontosemiótico -EOS- trata de responder a la pregunta: ¿Qué elementos conceptuales trae el estudiante para trabajar las nociones intuitivas del Cálculo? Como puede notarse, se pregunta por conceptos previos, encontrando que tienen obstáculos en el concepto de función, entre otros, precisamente en este estadio de desarrollo cognitivo y conceptual. Con respecto a las funciones, Lozano y Neira encuentran una dependencia del manejo representacional gráfico o tabular, localizan dificultades en los estudiantes para articular los distintos registros de representación con sus representaciones semióticas, por ejemplo, indican que la forma "$y = 4$", no representa una función debido a que no hay una asociación de la variable independiente x.

Ambos trabajos, aunque presentan enfoques diferentes, presentan una concepción del conocimiento matemático según la cual, es sólo por medio de representaciones semióticas que es posible una actividad sobre los objetos matemáticos, sin embargo, se deja de lado tanto el aprendizaje como hecho social, cultural educativo, el AS y la RP y sobre la función a tramos.

Gallo, Manrique y Prada (2017) expresan que el concepto matemático de función facilita la transición entre la Educación Básica y Media[6]y la Educación Superior, pero a pesar de abordarse en diversos grados, se han reconocido dificultades "en estudiantes en su primer curso universitario de Cálculo al no tener la correcta apropiación del concepto, puesto que este es fundamental para el aprendizaje de los diversos contenidos propios del Cálculo como lo son límite, continuidad y derivada" (p. 43).

Gallo et al., concluyen en su trabajo:

> De igual forma se evidencian vacíos, el desconocimiento de conceptos como función inyectiva, sobreyectiva además de no reconocer funciones a trozos en ningún tipo de registro. Uno de los inconvenientes más comunes en los docentes en formación[7] fue la interpretación y análisis de enunciados, presentan dificultades de comprensión. (p. 48)

El trabajo involucra situaciones o actividades para resolver en grupos, las cuales incluyen el concepto de función, análisis de enunciados para generar una expresión algebraica y verificar si corresponde a una función, reconocer una función a partir del registro gráfico para luego proponer su respectiva expresión algebraica.

---

[6] El sistema educativo colombiano lo conforman: la Educación Inicial, la Educación Preescolar, la Educación Básica (primaria cinco grados y secundaria cuatro grados), la Educación Media (dos grados) y, la Educación Superior.

[7] Docentes en formación alude a estudiantes que están realizando la Licenciatura en Matemáticas.

1.2.4.2. **Desde el aprendizaje significativo**. El AS pretende dar cuenta de los mecanismos por los que se lleva a cabo la comprensión y la retención de nuevos conocimientos que se pueden relacionar con formas efectivas y eficaces de provocar de manera deliberada cambios cognitivos estables, susceptibles de dotar de significado individual y social.

"Los estudiantes deben aprender matemáticas comprendiéndolas, y construir activamente nuevos conocimientos a partir de la experiencia y de los conocimientos previos" (NCTM, 2000, p. 20).

Bransford, Brown & Cocking (1999) indicaron que los estudiantes que memorizan hechos o procedimientos sin comprenderlos, son inseguros a la hora de utilizar lo que saben, y tal aprendizaje es muy frágil.

Borges (2007) manifiesta la escasez de aprendizaje significativo y las dificultades en el manejo del concepto de función, las cuales permanecen incluso después de haber cursado y aprobado los contenidos de Cálculo Básico.

Guevara (2011) utiliza el enfoque de aprendizaje significativo y sistemas de representaciones para analizar del concepto de función para cursos de Precálculo[8] en la universidad. Desarrolla como estrategia módulos para guiar las clases, incorporando actividades de simulación y modelación, manipulación de herramientas informáticas y aplicativas.

El trabajo tiene en cuenta los conceptos, las proposiciones y los procedimientos que se derivan significativamente de una función matemática con el objetivo de que el

---

[8] En Colombia los cursos de cálculo se desarrollan en torno al estudio de propiedades o aspectos asociados al concepto función, tales como: tipos de funciones, dominio, rango, operaciones con funciones. Derivada, límite de una función.

aprendizaje sea significativo. Además, de facilitar una enseñanza significativa para los estudiantes de los conceptos de funciones polinómicas y funciones racionales a partir de la modelación y uso de Geogebra.

El estudio anterior en forma general muestra como dar significado a los contenidos que involucran el concepto de función, específicamente se dedica a enseñar dicho concepto involucrando la modelación de fenómenos físicos y geométricos, el trabajo no involucra la función a tramos. Además, no ilustra los obstáculos que afrontan los estudiantes al instruirse sobre algunos contenidos durante la RP.

Prada, Hernández y Ramírez (2016) señalan:

> Los docentes ofrecen a sus estudiantes herramientas mecánicas para realizar algunos procesos, como determinar si una expresión algebraica es una función, o también la manera de hallar un límite al infinito o determinar un máximo relativo a través del proceso de derivación. Sin embargo, el hecho de que el estudiante realice los procesos mecánicos de forma más o menos correcta no implica que haya alcanzado una comprensión satisfactoria de dichos conceptos. (p. 190)

Lo anterior indica que el proceso de interacción a través del cual los conceptos deben relacionarse con el nuevo material para el anclaje de nuevos conocimientos, no es el adecuado, probablemente debido a que la enseñanza universitaria tradicional, tiende a contribuir con el aprendizaje mecánico como protocolos de RP.

Es decir, la interacción entre conocimientos nuevos y previos está ausente y según Moreira (2012) "En dicha interacción el nuevo conocimiento debe relacionarse de manera no arbitraria y substantiva (no literal) con aquello que el aprendiz ya sabe. AS es aprendizaje con comprensión, con significado, con capacidad de transferencia" (p. 11).

La habilidad para relacionar la información adquirida sobre un objeto, no le sirve de anclaje para comprender y dar sentido al objeto matemático, captar nueva información de manera adecuada y clara, es decir, no se logra la progresiva transformación del conocimiento, presentan dificultades en la estructura cognitiva en relación a un conjunto de principios teóricos organizado estructuralmente de reconocer el mismo objeto matemático en contextos diferentes y en representaciones distintas, y usarlo en la RP en particular la función por tramos.

Muchos investigadores han tratado de encontrar la respuesta de diferentes formas a la problemática sobre AS algunos de ellos han utilizado la RP, calculadoras y computadores (Sierpinska,1992). El fondo de la cuestión radica en que, los estudiantes no han construido un significado adecuado del concepto de función ni la forma de transformar dicha noción en sus diferentes sistemas de representación.

La construcción de un significado parcial del concepto durante los primeros años de universidad puede generarles dificultades en su desempeño en los cursos de cálculo. Además, las concepciones previas de los estudiantes pueden tener aspectos contradictorios, que se manifiestan según las situaciones y son muy resistentes al cambio. Por tal motivo, es necesario entender la influencia del AS en los procesos a través de los cuales los estudiantes comprenden, dotan de significado al concepto de función en la RP.

La influencia del AS indica promover el cambio conceptual, transformar al sujeto y su relación no arbitraria y sustantiva en su estructura cognitiva. Es decir, se busca que el AS influya tanto en la adquisición de la práctica social como histórico-cultural que ha alcanzado producir la sociedad humana, en tanto experiencia que debe pasar desde el plano social al plano individual de la actividad de cada estudiante, ello se posibilita desde las actividades planteadas en el material potencialmente significativo, herramienta que permite mediar en el cambio, desarrollo y transformación de la estructura cognitiva del estudiante.

En esta investigación desde la perspectiva del AS, se realizan algunas contribuciones y aportes significativos a los procesos de enseñanza y aprendizaje en la Educación Matemática, desde la forma en que se promueve el conocimiento científico, y desde la riqueza que posee este constructo y, que aún no ha sido explorada a profundidad.

Acorde a lo anterior, es trascendental observar cómo influye el AS en los estudiantes cuando desarrollan conocimiento matemático a partir de los conceptos e ideas adquiridas con anterioridad, cómo relacionan y transforman los objetos matemáticos, cómo los comprenden, le dan sentido y significado (Pozo, 1999; Moreira, 2000), es decir, cómo generan nuevas relaciones entre diferentes representaciones que convergen en el desarrollo de conocimiento, en particular el conocimiento matemático generado en la actividad de RP (Pozo y Rodrigo, 2014).

Caro (2013) realiza una propuesta sobre estrategias de enseñanza referente a la modelación de funciones por tramos para estudiantes de grado once -11°- mediada por aprendizaje significativo, de modo que permita el ascenso de lo concreto a lo abstracto, el objetivo es que los estudiantes identifiquen el modelo que representa un problema aplicando las heurísticas de Schoenfeld.

Teniendo como foco los antecedentes investigativos acerca de la escaza influencia del AS y la comprensión social y cultural dado al objeto función y que, además, la mayoría de investigaciones no se focalizan en la función a tramos ni en el uso de material potencialmente significativo, surge esta propuesta con metodología cualitativa y método de estudio de caso.

A partir de estas dificultades detectadas por los autores anteriores, se propone en la presente investigación analizar el AS adquirido por los estudiantes y la comprensión matemática del concepto de función a tramos, ligada con el desarrollo de conocimiento matemático teniendo en cuenta los conceptos previos que poseen los estudiantes.

Los conocimientos previos engloban no solo los conocimientos propios del concepto de función, sino también las relaciones coherentes que el estudiante establece con el nuevo conocimiento, de esta manera, el aprendizaje será significativo

Se trata de un enfoque cognitivo orientado desde la práctica social, encaminado a establecer el funcionamiento epistémico que subyace en la RP y sus procedimientos matemáticos.

Lo expuesto anteriormente indica que, algunos estudiantes necesitan efectuar una mirada preliminar en forma más estructurada del concepto la función y de la función a tramos y sus sistemas de representación, para ello presentamos la pregunta de investigación y los objetivos que nos guiaran a resolverla.

1.3. Pregunta de investigación

- ¿En qué medida puede desarrollarse aprendizaje significativo y la comprensión del concepto de función en particular la función a tramos y cómo influyen algunos subsumidores como dominio, rango, límite, continuidad y derivada en dicho aprendizaje desde la resolución de problemas con la implementación de un material potencialmente significativo que involucra tal concepto?

1.4. **Objetivos**

1.4.1. *General*

Interpretar los aprendizajes significativos, la comprensión y el tratamiento de los fenómenos que ocurren en la producción y desarrollo de conocimiento, que experimenta un grupo de estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad de Antioquia, cuando utilizan un material potencialmente significativo en la resolución de problemas que involucra el concepto de función a tramos.

1.4.2. *Específicos*

- Identificar la posible vinculación de los aprendizajes significativos adquiridos con el desarrollo de nuevos conceptos y conocimientos matemáticos a través de la RP que involucran la función a tramos, mediante un material educativo diseñado para ser potencialmente significativo.
- Analizar los subsumidores para el aprendizaje del concepto de función y de la función a tramos y los conocimientos desarrollados que emergen de un sistema de práctica social y cultural como consecuencia de la naturaleza de la actividad resolución de problemas.
- Establecer cómo el material potencialmente significativo en un sistema de práctica social y cultural aporta al aprendizaje significativo de los estudiantes referente a la función a tramos a partir de los subsumidores.

1.5. **Hipótesis**

Las hipótesis que orientan la tesis investigación se fundamentan en los siguientes presupuestos:

- La influencia del AS apoyado por un marco sociocultural posibilita la transición hacia el desarrollo del conocimiento matemático y la construcción de una relación particular con el saber, basados en la actividad de RP.
- Es posible tanto comprender como dar significado a un objeto matemático, cuando se tiene la capacidad de realizar transformaciones y transitar por diferentes sistemas de representación del objeto en cuestión.
- La actividad de RP sobre la función a tramos requiere no solo de procesos cognitivos, de hecho, requiere ciertas estructuras cognitivas específicas cuyo desarrollo tienen génesis en la actividad sociocultural.

CAPÍTULO II

2. **Marco teórico de la investigación**

En este capítulo se exponen los marcos teóricos que fundamentan la investigación como son la Teoría del Aprendizaje Significativo y la Teoría Sociocultural y el modelo de Pirie & Kieren que, permiten caracterizar y encuadrar la presente investigación, estos enfoques de corte cognitivo y sociocultural tienen como objetivo contribuir al desarrollo del conocimiento matemático y el AS desde la práctica social.

Las teorías cognitivas están fundadas en los procesos mediante los cuales el estudiante adquiere y desarrolla conocimientos. Se desvela por el estudio de procesos tales como lenguaje, percepción, memoria, razonamiento y la actividad de RP.

El cognitivismo es un enfoque estructuralista de la psicología, que "Pretende explicar el aprendizaje humano como un proceso integral en el que entran a funcionar mecanismos mentales complejos como la comprensión, el análisis y la propia aplicación del saber en un contexto social" (Arboleda, 2005, p. 180).

Ausubel (1973) focaliza el cognitivismo en un contexto educativo, es decir, en los esquemas de circunstancias de interiorización a través de la instrucción. De igual forma la propuesta sociocultural de Vygotsky (1981) está centrada en la estructura y desarrollo cultural, siendo la actividad del hombre el eje del proceso de ese desarrollo. La interacción social se convierte en el motor del aprendizaje.

La adquisición de conceptos matemáticos y desarrollo de conocimiento en el nivel universitario, requiere en los estudiantes un proceso cognitivo, específicamente en el desarrollo de las capacidades de razonamiento, abstracción, análisis y representación de los objetos matemáticos.

Por medio de procesos cognitivos el aprendizaje resulta más factible y la nueva información puede ser almacenada en la memoria por mucho tiempo. El proceso de aprendizaje puede ser explicado, por medio del análisis de los procesos mentales, pero también en función del papel que desempeñan los instrumentos en la práctica social. De esta manera, los artefactos son consustanciales al pensamiento, no son simples ayudas.

Se trata de realizar acercamientos y articulaciones entre la Teoría cognitiva del AS y la Sociocultural. Para ello se incorporan los diferentes componentes de los procesos cognitivos basados en la resolución de problemas, desde las dos teorías se otorga sustento a esta investigación.

En este sentido tienen confluencia las dos fundamentaciones teóricas ambas establecen aspectos del pensamiento que han sido objeto de estudio en el análisis de la práctica social a través de la actividad humana, que se apoyan de una forma u otra en el principio de accesibilidad al conocimiento.

Moreira (2017) hace una afirmación en la cual nos basamos para justificar la aproximación de ambas Teorías desde el punto de vista metodológico "la visión clásica de Ausubel puede ser complementada y enriquecida por otras visiones que la posicionan con mayor potencial como referente para organizar una enseñanza volcada hacia la comprensión, el significado" (p. 2).

Otorgar significados a los objetos matemáticos está lejos de la pasividad, donde las condiciones para el AS son la *potencialidad significativa* de los materiales educativos - libros de texto, conceptos, ideas, herramientas, instrumentos, sistemas numéricos, teoremas, labor conjunta, entre otros- pero con intencionalidad de transformar en psicológico el significado lógico de dichos materiales, *lo anterior no indica una autonomía intelectual*.

2.1. **Mapas conceptuales**

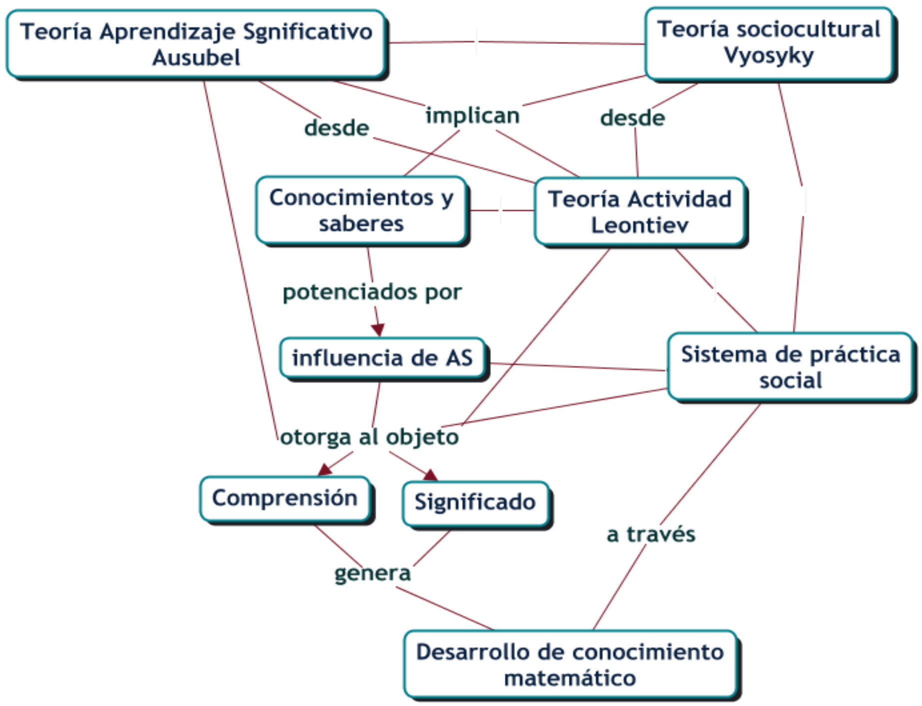
Incluimos mapas conceptuales en algunos apartes de la investigación con el objeto de guiarla conceptualmente. Estos mapas son diagramas que indican relaciones entre conceptos, o entre palabras que usamos para representar. Los mapas conceptuales constituyen una representación explícita y manifiesta de los conceptos y proposiciones que posee una persona (Novak y Gowin, 1998).

Los mapas conceptuales desempeñan una función clave para representar y organizar los contenidos, pero también ayudan a los estudiantes en su desempeño escolar al tener aprendizajes -no memorísticos- (Novak, 1988).

El siguiente mapa es la ruta de navegación en la cual se presentan los componentes teóricos que sustentan el desarrollo de la investigación, son el eje conductor para responder a la pregunta de investigación y al planteamiento de los objetivos, seleccionar la metodología, la elaboración de estrategia metodológica y el análisis de información.

Mapa conceptual 1

Marco teórico: teorías involucradas en la investigación



La problemática de la presente investigación está inscrita en tal propósito, en el de analizar los niveles de comprensión que atañen, primordialmente, a la conceptualización del objeto función, particularmente la función a tramos, el cual se constituye en uno de los conceptos matemáticos más complejos de la matemática avanzada.

2.2. Teoría del Aprendizaje Significativo

La Teoría del AS representa un cuerpo teórico desde la perspectiva psicológica del aprendizaje. Ausubel (1963, 1973,1976, 2002) ha construido dicho marco teniendo en cuenta los mecanismos por los que se lleva a cabo la construcción de conocimiento en el aula.

El AS surgió como Teoría de la cognición como oposición al aprendizaje repetitivo y a la condición no significativa del aprendizaje y va encaminado a reconocer el establecimiento de las relaciones fundamentales y no de un modo arbitrario entre lo que debe aprenderse y lo que es conocido por el aprendiz.

La Teoría del AS se focaliza en el interés por entender y explicar las condiciones y propiedades del aprendizaje, que se logran relacionar con formas efectivas y eficaces de impulsar de manera premeditada cambios cognitivos estables y susceptibles de conferir significado tanto a nivel individual como social (Ausubel, 1976).

Según Ausubel (1983)

> El aprendizaje significativo ocurre cuando los contenidos son relacionados de modo no arbitrario y sustancial (no al pie de la letra) con lo que el estudiante ya sabe. Por relación sustancial y no arbitraria se debe entender que las ideas se relacionan con algún aspecto existente específicamente relevante de la estructura cognoscitiva del alumno, como una imagen, un símbolo ya significativo, un concepto o una proposición. (p. 18)

Para Moreira (2000) el AS:

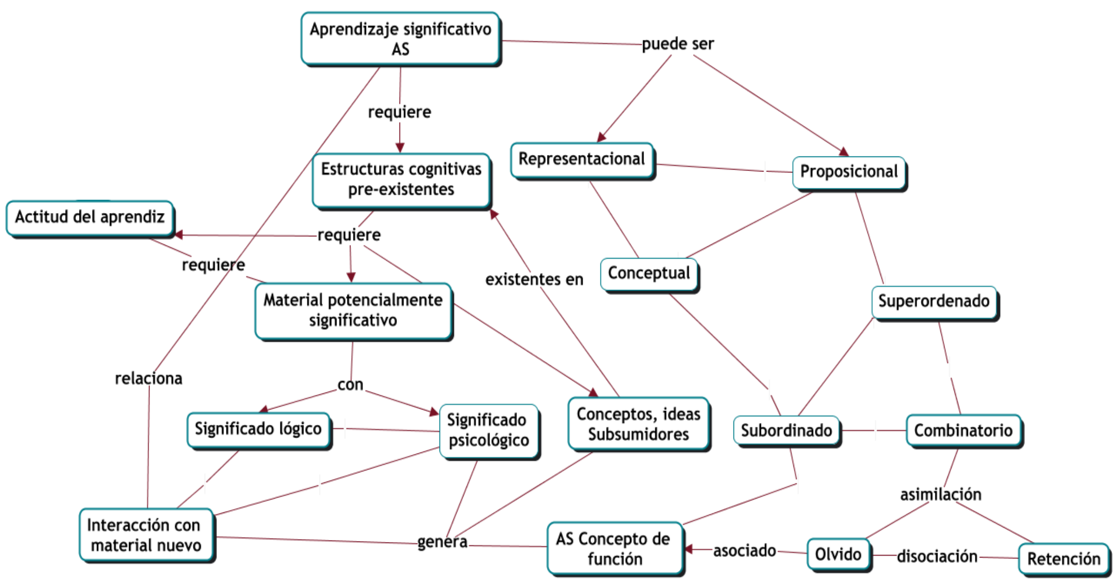
> Es un proceso a través del cual una misma información se relaciona, de manera no arbitraria y sustantiva (no literal) con un aspecto relevante de la estructura cognitiva del individuo. Es decir, en este proceso la nueva información interacciona con una estructura de conocimiento específica llamada subsumidor, existente en la estructura cognitiva de quien aprende. (p. 11)

Aprender de un modo significativo consiste en efectuar un proceso de actualización de los esquemas cognitivos relativos a la situación en consideración, es decir, poder atribuir un significado al material objeto de estudio Ausubel (2002).

El siguiente mapa contiene los tipos de AS y expone y las condiciones que lo posibilitan.

Mapa conceptual 2

Ruta del Aprendizaje significativo



2.2.1. *Tipos de aprendizaje significativo*

Es significativo reiterar que el AS no es una conexión escueta del nuevo conocimiento con el existente en la estructura cognitiva del aprendiz, el AS implica la modificación, transformación y evolución del nuevo conocimiento.

Para que se produzca AS, debe existir, por un lado, una intencionalidad y una predisposición o actitud del estudiante para aprender y, por otro, la tarea de aprendizaje -en nuestro caso está en el material potencialmente significativo que incluye la RP- lo que debe ser aprendido, debe ser potencialmente significativo. En este momento se trata de que: "El aprendizaje *significativo receptivo*[9] ocurre en la medida que materiales potencialmente significativos llegan a la estructura cognitiva y con ella interaccionan siendo apropiadamente subsumidos por un sistema conceptual relevante y más inclusivo" (Ausubel, 1963, p. 25).

Con relación a lo anterior Ausubel (1978) distingue tres tipos de aprendizaje significativo: representacional, de conceptos y proposicional.

2.2.2. *Aprendizaje representacional*

"Supone la atribución de significados a determinados símbolos (típicamente palabras), es decir, la identificación, en significado, de símbolos que pasan a significar, para el individuo, aquello que sus referentes significan" (Moreira, 2000, p. 20).

Es captar el significado de los símbolos o palabras y darles sentido, es decir, comprender lo que representan. Ocurre cuando se asemejan en significado símbolos arbitrarios con sus referentes -objetos, eventos, conceptos- y significan para el aprendiz cualquier significado al que sus referentes aludan.

Lo anterior no indica una simple asociación entre el símbolo y el objeto matemático, debido a que en la medida en que el aprendizaje sea significativo, existen

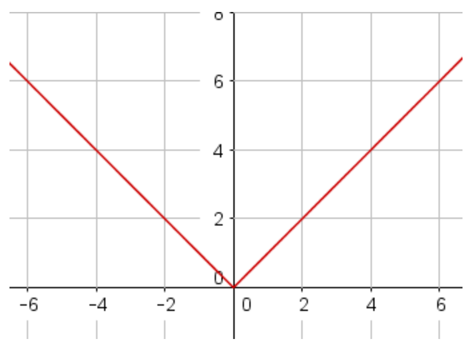
[9] Cursivas colocadas por el investigador.

relaciones substantivas y no arbitrarias, es una apuesta de equivalencia representacional basada en los subsumidores.

Así, para la función $f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$ se establece una equivalencia en significado entre los símbolos algebraicos y un referente -gráfica del valor absoluto-.

Gráfica 1

Valor absoluto: f(x) =|x|



2.2.3. A*prendizaje de conceptos*

Ausubel (1978) describe los conceptos como: "objetos, eventos, situaciones o propiedades que poseen atributos criteriales -esenciales- comunes y se designan, en una cultura dada por algún signo o símbolo aceptado" (p. 86).

Regresando al ejemplo anterior, cuando el estudiante adquiere el significado más genérico de $f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$, dicha función sirve también como significante para el concepto cultural f(x), es decir, la equivalencia se lleva a cabo entre la expresión algebraica y los atributos criteriales comunes a múltiples ejemplos del referente.

En este tipo de aprendizaje el estudiante abstrae de la realidad objetiva aquellos atributos comunes a los objetos que les hace pertenecer a una cierta clase de la asociación símbolo / atributos genéricos.

Según Moreira (1999) el aprendizaje de conceptos es, “un aprendizaje representacional, pues los conceptos son, también, representados por símbolos particulares, pero son genéricos o categóricos dado que representan abstracciones de los atributos esenciales de los referentes, es decir, representan regularidades en objetos o eventos” (p.13). Es un tipo superior de aprendizaje de representaciones.

Así como el símbolo puede ser adquirido antes del concepto en sí, puede también ocurrir lo contrario, es decir, abstraer los atributos criteriales de una clase de objetos, a exhibir más precisión, así como diferenciación, pero aún no es claro establecer una equivalencia representacional entre el símbolo y la regularidad observada.

Los conceptos juegan un rol en la Teoría del AS puesto que la comprensión de los conceptos está involucrada en la resolución de problemas y depende en gran medida de la disponibilidad en la estructura cognitiva del estudiante (Ausubel, 2000).

2.2.4. *Aprendizaje proposicional*

Ocurre cuando “la tarea no es aprender significativamente lo que representan palabras aisladas o combinadas, sino aprender el significado de ideas en forma de proposición” (Moreira, 1999, p. 14).

Lo anterior indica que no es aprender el significado de los conceptos sino el significado de las ideas expresadas verbalmente, simbólicamente a través de esos conceptos, es decir, debe dársele sentido a los objetos.

Como lo afirma Ausubel (2000) en el verdadero aprendizaje proposicional, “el objetivo de la actividad de aprendizaje no es aprender proposiciones de equivalencia representativa, sino aprender el significado de proposiciones verbales que expresan ideas distintas a las de equivalencia representacional” (p. 81).

En este tipo de aprendizaje no se trata de asimilar el significado de términos o símbolos aislados, sino de ideas que resultan de una combinación lógica de términos en una sentencia.

“Para que se puedan aprender los significados de una proposición verbal es preciso antes aprender los significados de sus términos componentes o lo que esos términos representan” (Moreira, 2000, p. 22).

Por ejemplo, la proposición referente al teorema sobre los límites laterales, solo podrá aprenderse significativamente, si han sido aprendidos los conceptos que combinados constituyen la proposición sobre la existencia del límite de una función $\lim_{x \to a} f(x)$.

Para Ausubel (2000) es en el aprendizaje proposicional donde se logra aprender el significado de una nueva idea por cuanto que:

(1) la propia proposición se genera al combinar o relacionar entre sí múltiples palabras individuales (conceptos), cada una representando un referente unitario; y
(2) que las palabras individuales se combinan de tal manera (generalmente en forma de oración) que la nueva idea resultante es más que sólo la suma de los significados de las palabras individuales componentes. (p. 81)

Sin embargo, los conceptos, objetos y situaciones están representados por sistemas semióticos -palabras, símbolos, signos- y, para aprender el significado del concepto, se debe saber qué concepto está representado en los nuevos registros del concepto dado o aprendiendo que el nuevo concepto es equivalente en significado a lo que significa el concepto sí mismo, es evidentemente la relación con un tipo de aprendizaje representacional (Ausubel, 2000).

Lo anterior indica la diferencia entre los dos tipos de AS -de concepto y proposicional- referente al aprendizaje por concepto, los atributos de criterio de un nuevo concepto están relacionados con ideas significativas en la estructura cognitiva[10] para originar un nuevo significado genérico pero unitario, mientras que, en el aprendizaje proposicional, una nueva proposición está relacionada con la estructura cognitiva para producir un nuevo significado compuesto.

De igual manera, en el aprendizaje verbal significativo se involucran la interacción entre el estímulo verbal y la estructura cognitiva, para percibir mensajes verbales y aprender tanto social como cognitivamente su significado como resultado de interpretarlos a la luz del conocimiento existente. Ausubel (2010) afirma que "La percepción implica un contenido inmediato de conciencia antes de la intervención de procesos cognitivos tan complejos como los que están involucrados en el aprendizaje de recepción (comprensión de las ideas presentadas)" (p. 82).

Se considera que para esta investigación existe una vinculación entre los tipos de aprendizaje significativo y el desarrollo del conocimiento matemático, en relación con el saber y el resultado de la interacción entre los sujetos o aprendices que, se vislumbran como una alternativa que contribuyen a mejorar la comprensión de nuevos contenidos a

---

[10] Cuando el aprendizaje ocurre por asimilación de nuevos *conceptos* y *proposiciones* en una estructura conceptual y proposicional ya existente que tiene el estudiante. A tal estructura de conocimiento se le llama estructura cognitiva.

través de material potencialmente significativo cuando resuelven problemas que contienen el concepto de función y en particular de función a trozos.

2.2.5. *Aprendizaje supraordinado*

El aprendizaje subordinado es correlativo "si es una extensión elaboración, modificación o limitación de proposiciones previamente aprendidas" (Ausubel, 1983, p. 47). En este caso el nuevo conocimiento es integrado con los subsumidores significativos más inclusivos, pero su significado no es implícito por lo que los atributos de criterio del concepto incluido pueden ser modificados. Es decir, las nuevas ideas son una elaboración, modificación o limitación de las ideas más generales o inclusivas.

Cuando ocurre lo contrario, que se va de lo específico a lo general se le conoce como *aprendizaje supraordinado***.** La adquisición de nuevos conocimientos en el aprendizaje supraordinado se realiza por medio de un proceso de *reconciliación integradora*.

Ausubel (1983) considera la asimilación como el proceso mediante el cual "la nueva información es vinculada con aspectos relevantes y pre-existentes en la estructura cognitiva, proceso en que se modifica la información recientemente adquirida y la estructura preexistente" (p. 71).

El aprendizaje supraordinado ocurre cuando una nueva proposición se relaciona con ideas subordinadas específicas ya establecidas, "tienen lugar en el curso del razonamiento inductivo o cuando el material expuesto […] implica la síntesis de ideas componentes" (Ausubel, 1983, p. 83).

En este tipo de aprendizaje, al introducir los nuevos conceptos se deben establecer las semejanzas y diferencias con las ideas existentes en la estructura cognitiva y a partir de dichos análisis, si existen los componentes adecuados, se generan ideas más inclusivas y generales.

El aprendizaje supraordinado se puede tornar subordinado en determinado momento, ello confirma que la estructura cognitiva es transformada constantemente; pues el estudiante puede estar aprendiendo nuevos conceptos por subordinación y a la vez, estar realizando aprendizajes supraordinados ya que posteriormente puede ocurrir lo inverso resaltando la característica dinámica de la evolución de la estructura cognitiva.

2.2.6. *Aprendizaje combinatorio*

Cuando los nuevos conocimientos no se relacionan de manera subordinada, ni supraordinada con la estructura cognitiva previa, sino que se relaciona de manera general con aspectos relevantes de la estructura cognitiva, se tiene el *aprendizaje combinatorio.* Es como si el nuevo conocimiento fuera potencialmente significativo con toda la estructura cognitiva.

En el aprendizaje *combinatorio*, las proposiciones son, posiblemente las menos relacionables y menos capaces de conectarse con los conocimientos previos, y por lo tanto con más dificultad para su aprendizaje y retención que las proposiciones subordinadas y supraordinadas; este hecho es una consecuencia inmediata de la disponibilidad de subsumidores relevantes y específicos para el aprendizaje significativo.

2.2.7. *Proceso de Asimilación*

A medida que el estudiante ha adquirido una cierta cantidad de conceptos, la diferenciación de esos conceptos y la adquisición de otros nuevos se lleva a cabo a través de la *asimilación de conceptos*.

La asimilación permitirá la *interacción entre el nuevo material* que será aprendido y los subsumidores lo cual ocasiona una reorganización de los nuevos conocimientos y los previos, para constituir una estructura cognitiva diferenciada, esta interacción del nuevo conocimiento y las ideas apropiadas que existen en la estructura cognitiva propician su asimilación.

La adquisición de nuevos conocimientos de un proceso de *diferenciación progresiva* se llama *aprendizaje subordinado*, va de lo más general a lo específico o particular. Este aprendizaje se presenta cuando el nuevo conocimiento es vinculado con los conocimientos adecuados de la estructura cognitiva previa del estudiante, es decir, cuando existe una relación de subordinación entre el nuevo material y la estructura cognitiva pre existente, es el característico proceso de subsunción.

Este tipo de aprendizaje está ligado con la estructura cognitiva del estudiante, es decir, ya debe existir allí, con las ideas más inclusivas y generales de manera que los nuevos conocimientos puedan servir de ideas de afianzamiento.

Si no existen en la estructura cognitiva este tipo de aprendizaje, las ideas más inclusivas y generales deben ser introducidas como organizadores previos al inicio del material de aprendizaje, en un nivel de abstracción mayor que el de los nuevos conceptos que los estudiantes deben aprender significativamente.

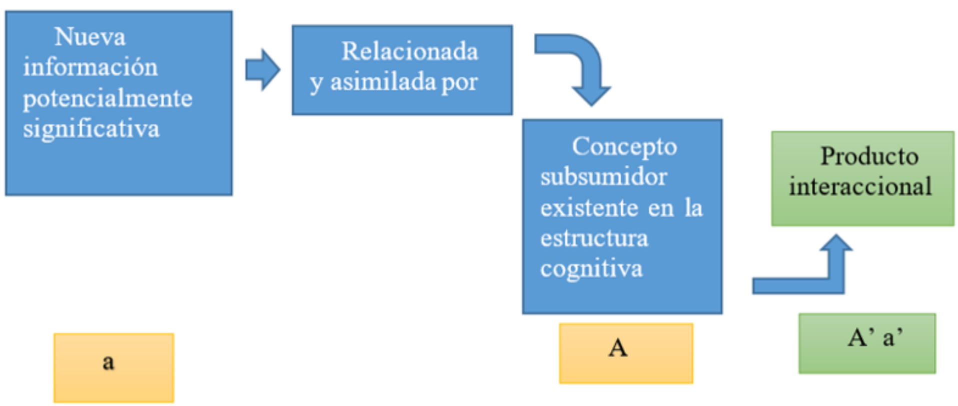
El aprendizaje subordinado puede ser de dos tipos: *Derivativo y Correlativo*. El primero ocurre cuando el material es aprendido y comprendido como un ejemplo específico de un concepto ya existente, confirma o ilustra una proposición general previamente aprendida, es decir, la inclusión derivativa corresponde a cuando las nuevas ideas son una extensión o ejemplo de las ideas más generales.

El significado es directamente derivable o está implícito en un concepto o proposición más inclusiva ya existente en la estructura cognitiva, por ejemplo, si estamos hablando de la proporción directa, mencionar que se trata de una función inyectiva, se estará promoviendo un aprendizaje derivativo en el estudiante, que tenga claro y preciso el concepto de función en su estructura cognitiva. Cabe indicar que los atributos de criterio del concepto no cambian, sino que reconocen nuevos ejemplos.

El principio de la asimilación se representa en la siguiente gráfica:

Gráfica 2

Principio de asimilación. Tomado de Moreira (2000, p.24)



Lo anterior puede interpretarse como:

Gráfica 3

Interpretación de la asimilación. Adaptado de Moreira (2000, p.24)

$$a + A \longrightarrow A'\ a'$$

Donde:

a: idea, concepto o proposición nueva potencialmente significativa.

+: Relacionada o asimilada por.

A: Idea más general ya establecida en la estructura cognitiva. Subsumidor.

$\longrightarrow$: Producción.

A' a': Producto de la interacción.

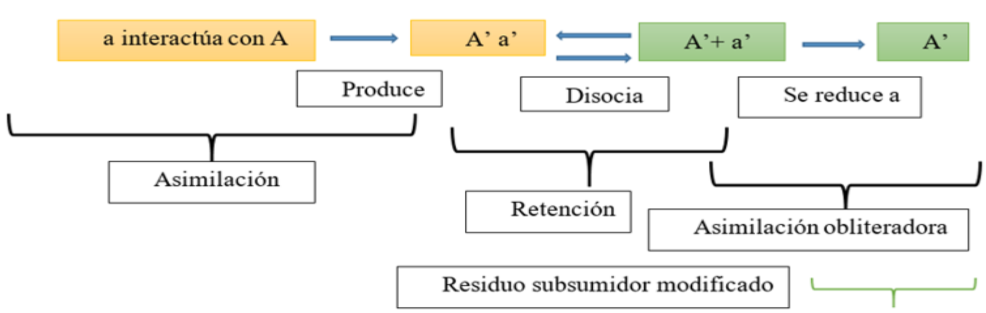
El producto de la interacción del proceso de aprendizaje no es solamente el nuevo significado de (a'), sino que incluye la modificación -transformación- del subsumidor y es el significado compuesto (A' a').

Como lo indica Moreira (2000) "La importancia del proceso de asimilación no está solamente en la adquisición y retención de significados, sino también en el hecho de que implica un mecanismo de olvido subyacente de esos significados" (p. 25).

Después del resultado de interacción A' a', se inicia el olvido como un estado de asimilación, al cual se le conoce como ***asimilación obliteradora***, es decir, se alcanza un grado de disociabilidad nulo, y A' a' se reduce a A'.

Gráfica 4

Proceso de asimilación. Tomado de Moreira (2000, p. 26)



Los significados recién asimilados llegan a estar disponibles durante el tiempo de aprendizaje, debido a que durante cierto periodo son disociables de sus subsumidores, por lo que pueden ser reproducidos como entidades individuales lo que favorece la retención de a'.

"Olvidar representa así una pérdida progresiva de disociabilidad de las ideas recién asimiladas respecto a la matriz ideativa a la que estén incorporadas en relación con la cual surgen sus significados" (Ausubel,1983, p. 126).

En síntesis, la particularidad del proceso de asimilación radica en que los nuevos significados son alcanzados a través de la interacción de los nuevos conocimientos con los conceptos o proposiciones previas, existentes en la estructura cognitiva del estudiante, de esa interacción resulta un producto (A' a'), en el que no solo el nuevo conocimiento adquiere un nuevo significado (a') sino, también el subsumidor (A) adquiere otros significados (A'). Durante la etapa de retención el producto es disociable en A' y a', para después de un tiempo ingresar en la fase obliteradora donde (A' a') se reduce a A' dando lugar al olvido.

En el proceso de asimilación, existen tres conceptos esenciales como lo son: la *fuerza de disociación*, el *umbral de disponibilidad* y la *potencialidad significativa* de los materiales de aprendizaje.

Respecto de la *Fuerza de disociación,* está determinada por la separación entre el concepto o proposición aprendido y la idea apropiada de la estructura cognitiva que le sirvió de anclaje. Esta fuerza varía con el tiempo teniendo un máximo en el momento de la terminación del aprendizaje. La reducción de esta fuerza hace que el material aprendido sea cada vez menos excluyente en relación a la idea pertinente que le sirvió de anclaje, lo cual hace cada vez más difícil su reproducción. Se produce entonces el olvido gradual del material aprendido, hasta llegar un momento en el cual lo aprendido ya no puede ser reproducido.

El *umbral de disponibilidad* corresponde a la mínima fuerza de disociación para la cual un aprendiz puede recordar un material aprendido significativamente. Los materiales aprendidos pueden ser reproducidos por encima de ese valor, y por debajo de ese valor ya no pueden ser rescatados y se produce el olvido. Pero aún en esta zona un material aprendido significativamente puede ser recuperado mediante retroalimentación de manera que aumente su fuerza de disociación y supere el umbral de disponibilidad.

El umbral de disponibilidad depende de las ideas, comportamiento, actitudes particulares del estudiante o grupo con el que esté realizando la actividad de aprendizaje.

Por su parte la potencialidad *significativa* de los materiales de aprendizaje, indica que deben poseer un significado *lógico* y un *significado psicológico*. El significado lógico es propio e inherente al material y corresponde a las características del mismo que permiten que pueda ser relacionado de manera no arbitraria y sustantiva con elementos pertinentes de la estructura cognoscitiva del estudiante. El significado psicológico corresponde al significado dado por el estudiante. Para lo cual éste debe poseer en su estructura cognitiva las ideas pertinentes con las cuales poder relacionar de manera no arbitraria y sustantiva el nuevo conocimiento.

El significado psicológico es, por tanto, el resultado de "la relación sustantiva y no arbitraria de material lógicamente significativo con la estructura cognitiva del aprendiz" (Moreira, 2000 p. 15). El significado sicológico es real o fenomenológico, mientras que el significado lógico sólo depende de la naturaleza del material en sí mismo.

2.2.8. *Material potencialmente significativo*

Para Ausubel (1963) el rol del docente es imprescindible para diseñar *material potencialmente significativo*, al respecto afirma que "Aprendizaje significativo es un proceso que presupone que tanto el aprendiz presente una actitud de aprendizaje significativo como que el material a ser aprendido debe ser potencialmente significativo para él/ella" (p. 22).

El material considerado potencialmente significativo hace referencia al significado inherente a ciertos tipos de materiales simbólicos y la disponibilidad del contenido adecuado en la estructura cognitiva del estudiante.

Un material preparado para enseñar y aprender no es significativo en sí mismo, sólo es significativo cuando se asocia en interacción con las estructuras cognitivas de los estudiantes. Pero puede ser potencialmente significativo si presenta diferenciación entre los conceptos, organización jerárquica y una estructura clara en sus relaciones.

El material educativo tiene el objetivo de conducir al estudiante a aprehender y compartir significados. En este contexto, lo más relevante del AS es el conocimiento previo del estudiante "El desarrollo de material potencialmente significativo debe ser capaz de extraer las concepciones previas y desde este punto, crear situaciones para dar nuevos significados al conocimiento" (Silva, Zômpero, & Laburú, 2014, p. 81).

La adquisición de significados según Ausubel, es el resultado de la interacción entre el nuevo material que se va a aprender y la estructura cognitiva existente, es una asimilación de antiguos y nuevos significados que contribuyen a la diferenciación de la estructura cognitiva.

Moreira (2012) afirma que el material de aprendizaje debe ser potencialmente significativo, lo que es consecuente con tener significado lógico[11], que se corresponda dentro del dominio de la capacidad humana de aprender.

El AS se produce cuando un nuevo concepto se enlaza con un concepto relevante, llamado *subsumidor,* existente en la estructura cognitiva, esto implica que, los nuevos conceptos, teoremas y proposiciones pueden ser aprendidos significativamente en la medida en que otros conceptos o proposiciones relevantes estén disponibles en la estructura cognitiva del estudiante y que *actúen como anclaje* de los primeros.

2.2.9. *Subsumidores*

Los subsumidores son conceptos, ideas, proposiciones, principios, leyes, existentes en la estructura cognitiva, que sirve como *anclaje* de los nuevos conocimientos que adquieren significados para el estudiante.

La existencia de subsumidores relevantes es condición para AS y la adquisición de signos o símbolos, de conceptos lo cual ocurre de manera gradual e idiosincrática en cada sujeto.

Se adquiere AS cuando un nuevo conocimiento se ancla en conceptos relevantes -***subsumidores***-, que se encuentran en la estructura cognitiva, la cual se considera como el lugar "donde se encuentran las ideas previas que generalmente están representadas por conceptos, símbolos e imágenes que permiten organizar un puente cognitivo que las relacione con los nuevos conocimientos" (Yepes, 2011, p. 48).

---

[11] El significado lógico depende de la naturaleza del material, posibilidad de relación entre material e ideas correspondientemente significativas.

No se produce AS si no están presentes las ideas de anclaje pertinentes en la estructura cognitiva del estudiante. Es un requisito necesario sin el cual no hay modo de vincular los nuevos conocimientos con los existentes. En este caso se origina el ap*rendizaje mecánico*, el cual se ocasiona por la escasez de subsumidores relevantes o adecuados, de tal forma que los nuevos conocimientos son acumulados arbitrariamente, sin interactuar con conocimientos previos.

2.2.10. ***Significado lógico y psicológico***

Cuando los conceptos o las proposiciones tienen *significado lógico*, pueden relacionarse de manera sustantiva -no literal- y no arbitraria con elementos de la estructura cognitiva del individuo, siendo su interacción -si se produce- lo que posibilita su transformación en *significado sicológico* (Ausubel, 1973).

El ***significado lógico*** es el significado atribuido por el estudiante a los contenidos aprendidos, de tal modo que el subsumidor que actuó de anclaje se ha modificado y la información que se recibió se ha interpretado o transformado.

El significado lógico se refiere a la capacidad que tiene el material de aprendizaje que se le brinda al estudiante de enlazarse con algunas ideas de anclaje que estén presentes en su estructura cognitiva y que sean pertinentes para ello. Debería ser un material no aleatorio, plausible y razonable (Ausubel, 2000).

El ***significado psicológico*** es el resultado de "la relación sustantiva y no arbitraria de material lógicamente significativo con la estructura cognitiva del aprendiz" (Moreira, 2000, p.15).

El significado psicológico es real o fenomenológico, mientras que el significado lógico sólo depende de la naturaleza del material en sí mismo (Ausubel, 2002).

En el AS los esquemas cognitivos del estudiante no se limitan a asimilar la nueva información, sino que se concentra en una constante revisión, modificación y ampliación del conocimiento produciéndose nuevos vínculos entre ellos, de esta forma, se logra la comprender y dar significado a los objetos matemáticos.

En esta investigación, lo anterior es eje alrededor del cual gira la comprensión y significado del objeto función, complementado desde la actividad RP y las actividades requeridas para el anclaje influyente del AS de los contenidos del concepto de función a tramos.

El concepto de AS lleva a re-examinar el rol que los contenidos tienen en el proceso de aprendizaje ampliando su significado inclusive considerar las estrategias y distintos tipos de procedimientos tales como: el sistema de preguntas para indagar, explorar y observar con un carácter científico.

2.3. **El conocimiento**

Desde la exposición de Descartes "cogito ergo sum" -Pienso luego existo- como principio racional, el cogito es una intuición del yo como primera realidad y, para acentuar el papel de la razón en el conocimiento, psicólogos y filósofos han debatido la naturaleza de éste, Kant (1928) afirma:

> La matemática y la física son los dos conocimientos teóricos de la razón que deben determinar sus objetos a priori; la primera con entera pureza, la segunda con pureza al menos parcial, pero entonces según la medida de otras fuentes cognoscitivas que las de la razón. (p. 13)

Se interpreta que para Descartes sólo existen dos clases de conocimiento: el teórico y el práctico de la razón, cuya matriz es la experiencia y las prácticas discursivas, incluye a las matemáticas como una ciencia pura, de esto se resalta que lo real -matemáticas- es una verdad absoluta.

En este sentido, Hegel (1982) afirma que "lo absoluto convertido en real es el espíritu" (p.5), y la fenomenología va a mostrar el conocimiento que el espíritu logra progresivamente de sí mismo, es decir su emergencia. Hegel desde el materialismo dialéctico se refiere a la conciencia como un proceso de actividad humana y desde esta óptica tiene relevancia la emergencia y desarrollo del conocimiento del hombre como movimiento de formas de actividad en las sociedades histórica y culturalmente constituidas, en particular la actividad ligada a la RP.

Se considera la RP como una actividad humana y como tal, involucra procesos de razonamientos, desde esta perspectiva, Cantoral (2016) indica que el pensamiento matemático:

> Es como una reflexión espontánea que los matemáticos hacen sobre la naturaleza de su conocimiento […] como una parte de un ambiente científico en el cual los conceptos y las técnicas matemáticas surgen y se desarrollan en la resolución de tareas y que el pensamiento matemático se desarrolla entre los seres humanos al enfrentar cotidianamente múltiples tareas. (p. 61)

La RP incluye las actividades que éstos presentan así, puede decirse que *el conocimiento* es un producto de la actividad humana, precisamente, muy específica que es el pensamiento, por ello, el conocimiento es dinámico, como demostrando que el conocimiento matemático que incluye conceptos y pruebas nunca es estático, sino que experimenta cambios. El conocimiento no es abstracto y universal, sino que está vinculado en numerosos contextos y siempre debe considerarse histórico (Gee, 2013).

En términos epistemológicos, los modos de conceptualizar, conocer y pensar no pueden ser adecuadamente descritos solamente en términos de prácticas discursivas, es trascendental partir desde una concepción no mentalista del pensamiento, es decir, el pensamiento es una práctica social y como tal se circunscribe en el uso los artefactos, ayudas consustanciales en la materialización del desarrollo del conocimiento y la constitución del saber:

> "práctica social", entendida como aquello que nos hace comportarnos, en términos de comunidades, tal y como lo hacemos, y no de una manera diferente; una práctica social nace como respuesta a una necesidad que es una especie de acuerdo, explícito o no, de la comunidad para trabajar en una cierta dirección (v.gr. la construcción de cierto conocimiento específico). (Cantoral y López, 2010, p. 117)

Lo anterior, da soporte a esta propuesta desde la práctica social, que propicia la forma en que las acciones de los estudiantes adquieren ciertas comprensiones de objetos matemáticos a partir de la RP. Es decir, de contribuir al tránsito del conocimiento al saber a través de una herramienta básica la cual es un material potencialmente significativo como mecanismo con valor de uso.

En este sentido, Piaget (1995) afirma que "El conocimiento en esencia es colectivo y la vida social constituye un factor esencial en la creación y crecimiento del conocimiento, tanto pre científico como científico" (p. 30).

En esta investigación se supone que existe una interrelación recíproca entre el conocimiento matemático y los contextos sociales. Esto es indispensable para la investigación científica del desarrollo sociocultural del conocimiento matemático.

Desde esta posición, estamos de acuerdo con Steinbring (2005) cuando afirma que:

> La adquisición de conocimiento matemático en el contexto del aula y otras situaciones de aprendizaje, se da un papel muy importante a la conexión entre las

> condiciones sociales, los factores que influyen y el conocimiento matemático que se debe adquirir y desarrollar. (p.11)

Así, durante la comprensión del concepto de función los estudiantes representan sus ideas matemáticas en conceptos y situaciones, que pueden complementar con el significado derivado de su entorno social; con la intención de desarrollar y generalizar sus conceptos matemáticos.

2.3.1. ***El conocimiento matemático y el saber***

El conocimiento matemático es resultado de una evolución histórica, de un proceso cultural, cuyo estado actual no es, la culminación definitiva del conocimiento.

Reconocemos la existencia de diversas formas de conocimiento que se han tratado con frecuencia en la matemática y en la educación matemática, por ejemplo, instrumental, relacional, conceptual, procedimental, algorítmico, formal, visual, intuitivo, implícito, explícito, elemental, avanzado, sin embargo, en esta investigación tratamos el conocimiento matemático en relación con el saber, teniendo como foco las prácticas sociales.

El conocimiento matemático como el de la ciencia nunca alcanza una forma final pero siempre es corregible y discutible, representa las experiencias de los sujetos que interactúan en entornos históricos y socioculturales inscritos en un sistema educativo que promueve la formación y el saber cultural de la matemática generado en las prácticas sociales.

Es imprescindible el papel de la práctica social en el paso del conocimiento al saber, en este sentido Cantoral (2016) afirma “Sostenemos que el conocimiento matemático, aun aquel que consideramos avanzado, tiene un origen y una función social asociados a un conjunto de actividades prácticas socialmente valoradas y normadas" (p.11).

El saber es construcción social del conocimiento, es un proceso intencionado para el uso compartido del conocimiento. "se trata de mecanismos constructivos, altamente sofisticados, de naturaleza social, que se caracteriza por producir interacciones, explícitas o implícitas, entre mente, conocimiento y cultura" (Cantoral, 2005, p. 57).

Radford (2017) expresa que el saber no es un objeto que se construye o se transmite, "sino *posibilidad*, es decir, algo potencial que *emerge* de la actividad humana y que se imbrica en un proceso de movimiento -de *devenir,* para ser más precisos- para *materializarse* o *expresarse* en conocimiento" (p. 100).

El saber son formas de movimiento que adquieren realidad a través de la actividad, Además, sugiere Radford (2012) que el saber es "un conjunto de procesos corporizados de acción y de reflexión constituidos histórica y culturalmente" (p. 10). Es decir, es pura posibilidad, y puede adquirir realidad a través de la actividad concreta la actividad que mediatiza el saber y el conocimiento, está constituido de formas siempre en movimiento de reflexión y acción histórica y culturalmente codificadas.

> La producción del saber no corresponde a necesidades de adaptación, sino que está enmarcado por formas culturales de pensamiento imbricadas en una realidad material y simbólica, la cual provee las bases para interpretar y transformar el mundo de las personas y los conceptos que éstas forman acerca de ese mundo. (Radford, 2013, p. 44)

Así, el pensamiento funcional es forma de acción y reflexión que ha permanecido codificada en la cultura. Es una forma cultural codificada de pensamiento, ha sido desarrollado y refinado en el curso de la historia cultural. Éste pre-existe en una forma ideal desarrollada antes de que los estudiantes participen de actividades de aula.

2.3.2. *Influencia sobre el aprendizaje significativo*

Como se ha indicado anteriormente, la investigación se fundamenta en la Teoría de Ausubel (1963) y la Teoría Sociocultural de Vigostky (1978) las cuales influyen en el AS con acercamientos en la adquisición y acumulación de gran cantidad de ideas e informaciones representadas en cualquier campo de conocimiento, en particular para la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus elementos subyacentes que conllevan al desarrollo de conocimiento matemático desde las prácticas sociales.

2.3.3. *La comprensión*

Comprender significa percibir mentalmente algo, adquirir el significado de algo, reconocer en un objeto todo lo que en él es conocible. En este sentido, resulta como un modo manifiesto de conocimiento. Así, conocer es una actividad intencional, dirigida a un estado de cosas que debe aprehenderse, que tiene como resultado lo que se denomina saber disponible intersubjetivo, organizado y estructurado mediante representaciones (Krings, Baumgartner & Wild, 1978).

Se entiende por comprensión “una representación estructural o conceptual ordenada, de las relaciones entre las partes de la información que se debe aprender, y entre esa información y esas ideas y nuestra base de conocimientos y experiencia" (Wittrock, 1990; p. 569).

La comprensión puede verse como un proceso de representaciones múltiples, que permite al estudiante la participación en la construcción de objetos matemáticos, relaciones y métodos mediante la participación en prácticas sociales en las cuales se comparten los artefactos culturales y lingüísticas (Kaput, 1989).

Se admite que un determinado conocimiento es estable en un individuo, si éste puede articular diferentes representaciones del concepto sin contradicciones. La comprensión de un contenido conceptual, reposa en la coordinación de al menos dos registros de representación y esta coordinación se manifiesta por la rapidez y la espontaneidad de la actividad cognitiva de conversión.

Según Batanero (2005) "la comprensión es un proceso continuo y creciente por el cual el estudiante construye y relaciona progresivamente los diferentes elementos del significado que atañen al concepto" (p. 257). La comprensión se vislumbra en los estudiantes cuando realizan acciones pertinentes al proceso de RP, Pecharromán (2013) indica que:

> Cuando el individuo perciba las representaciones del objeto como medios de expresión de un mismo objeto y, por tanto, independice el objeto de sus representaciones, y cuando perciba la funcionalidad que permite el uso y no los usos particulares, el alumno habrá aprendido y comprendido el objeto y será capaz de que se desarrolle este aprendizaje con nueva información sobre él. (p. 132)

Se acepta que los estudiantes exteriorizan comprensiones diferentes sobre un mismo concepto o estructura matemática, es decir, se logra integrar imágenes mentales, representaciones y propiedades propias del concepto, así:

> Cuando escuchas la palabra "función", de un lado, podría recordar la expresión "$y = f(x)$", podría visualizar el gráfico de una función como $y = x^2$ o $y = \sin x$, $y = \ln x$ etc. Por lo que hemos dicho, está claro que solo es posible hablar de una imagen conceptual en relación a un individuo específico. Además, el mismo

> individuo puede reaccionar de manera diferente a un término determinado (nombre del concepto) en diferentes situaciones. (Vinner, 2002, p. 68)

La construcción de estas imágenes del concepto, está muy relacionada con el AS, debido a que ocurre cuando el estudiante halla nueva información y debe fortalecerla y transformarla en su estructura cognitiva ya presente. Así, la comprensión del concepto será utilizada para resolver problemas y demostrar teoremas cuando ello sea necesario.

Sierpinska (1992) aporta algunas formas de identificación de la comprensión del concepto de un objeto matemático, en particular del objeto función:

> Cuando se puede decir qué es y qué no es un objeto, cuando tomamos conciencia de la relación con otros conceptos, cuando notamos que esas relaciones son análogas con las que estamos familiarizados, cuando hemos captado la posición que tiene el objeto dentro de una teoría y sus posibles aplicaciones, entonces podemos decir que entendimos algo al respecto. (p. 26)

Tomando en cuenta las representaciones, comprender un concepto matemático consiste en conocer sus principales representaciones, el significado de cada una de ellas, así como operar con las reglas internas de cada sistema, y también en convertir una representación en otra.

La comprensión es un proceso complejo de relevancia social y educativa, ligado a disciplinas como la psicología y la epistemología entre otras, su desarrollo es la base de los procesos psíquicos cognitivos, ha sido preocupación de cómo los estudiantes comprenden diferentes conceptos para aplicarlos en la resolución de problemas y el vínculo del proceso de aprendizaje relacionado con el entorno sociocultural.

En consecuencia, se asume como un fenómeno multidimensional, vinculado al significado que se le atribuye a un objeto matemático, con las representaciones internas de conceptos o redes de conceptos y las representaciones externas como el lenguaje, conjunto de símbolos culturales que manifiestan el concepto, en una situación contextual.

En ese sentido, Hiebert & Carpenter (1992) afirman:

> Para pensar sobre ideas matemáticas y comunicarlas necesitamos representarlas de algún modo. La comunicación requiere que las representaciones sean externas, tomando la forma de lenguaje oral, símbolos escritos, dibujos u objetos físicos. (...) Para pensar sobre ideas matemáticas necesitamos representarlas internamente, de manera que permita a la mente operar sobre ellas." (p. 66)

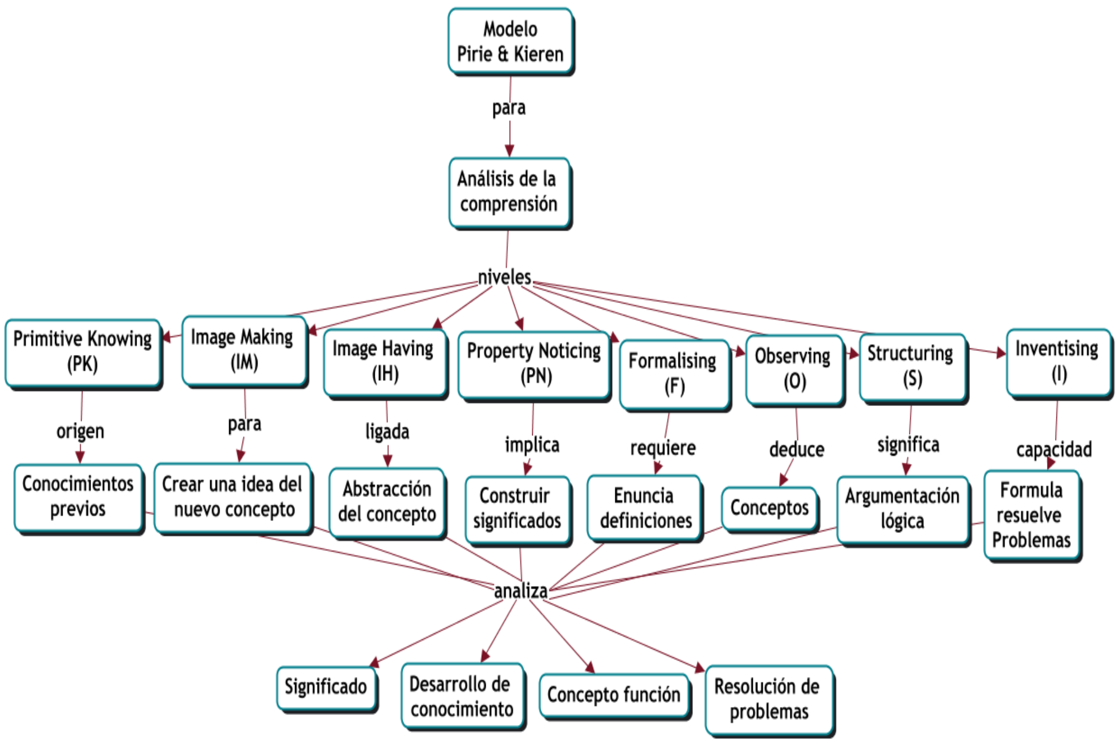
Según Rodríguez, Ponce & Pérez (2016) la comprensión matemática trata de establecer qué conoce, cómo lo conoce y para qué lo utiliza; de averiguar lo que hace para resolver un problema y por qué lo hace, para lo que utilizan diferentes representaciones del objeto matemático.

Lo anterior, permite establecer el Modelo de Pirie & Kieren (1994) sobre la comprensión como un proceso de relevancia social que se adecua conscientemente a la actuación y la comunicación -forma de expresar conceptos- de los estudiantes.

A continuación, se presenta el **mapa conceptual 3** gira en torno al desarrollo de la comprensión y su nexo con el concepto de función.

Mapa conceptual 3

Modelo Pirie & Kieren y su relación con la comprensión del objeto función



2.3.4. *Modelo de Pirie & Kieren*

Esta propuesta consiste en el análisis de la progresión de la comprensión de un concepto matemático. El Modelo se plasma en ocho niveles que componen su aspecto descriptivo -evolución- puntualizan el progreso matemático referente a conceptos o relaciones entre conceptos.

El origen inicial se fundamenta en la observación y la manera cómo se logra la comprensión de las matemáticas a nivel escolar medio y superior -universitario- en conceptos como las fracciones y las funciones cuadráticas.

Pirie (1988) indica que la comprensión es un proceso dinámico completo y no una adquisición de uno o múltiples valores, ni una combinación lineal de categorías de conocimiento, es un proceso continuo de organización de estructuras de conocimiento de una persona.

El Modelo presenta características fundamentales como el folding back, que tiene que ver con el proceso dinámico de redoblar. Pirie & Kieren (1989, p. 11) afirman "El redoblamiento permite a una persona funcionar en un nivel exterior y enfrentarse con un desafío para regresar a un nivel de comprensión más interno con el fin de reconstruir esa comprensión como base para nuevos niveles externos de comprensión".

El foldink back (redoblar) impulsa la reexaminación de la comprensión de un nivel de forma diferente, a partir de las acciones que surgieron originalmente cuando se trabajó el problema en ese nivel.

La siguiente característica se refiere a los límites de falta de necesidad, éstos se refieren al ascenso del estudiante hacia un nivel más elaborado y estable, que no demanda obligatoriamente de los elementos de los niveles más bajos (Piere y Kieren, 1992)

A continuación, se presenta en orden ascendente la descripción de cada uno de los niveles que permiten conocer la forma como un estudiante inicia el desarrollo y construcción o reconstrucción de conocimiento de un objeto. Los ocho niveles potenciales o modos de crecimiento abarcan desde el más interno al más externo, propuestos para la comprensión matemática e incluyen a cualquier estudiante que pretenda resolver problemas sobre cualquier tema específico.

El proceso inicia con el nivel de *Primitive Knowing (PK) -conocimiento primitivo-*. Se refiere a todo lo que el estudiante conoce y sabe hacer antes de confrontarse con el nuevo concepto matemático a estudiar En este nivel, el investigador o docente asume lo que el estudiante puede plasmar inicialmente, como el conocimiento previo y la capacidad de manejo de un lenguaje sobre los conceptos básicos que posee sobre un objeto. Por supuesto, nunca es posible saber qué es este conocimiento primitivo en su totalidad.

Pirie & Kieren (1994) aclaran el concepto de imagen, que será utilizado en los dos niveles siguientes.

> Tenemos, por ejemplo, el uso de la palabra "imagen" etiquetada en dos niveles. Ya que la evidencia en estos niveles se basa frecuentemente en la representación pictórica. Corremos el riesgo de que la comprensión en estos niveles se considera restringida solo a este modo de expresión, y no se considere que se abarque también imágenes mentales. Sin embargo, sentimos que el concepto de imágenes mentales está suficientemente establecido para ser comprendido dentro de nuestra teoría. (p. 62)

El segundo nivel se le llama *Image Making (IM) -creación de imágenes*- en este nivel el estudiante debe realizar distinciones entre el conocimiento previo e imágenes formadas en su estructura cognitiva y aplicar dicha distinción de una manera nueva.

El estudiante es capaz de hacer distinciones del concepto u objeto matemático con base en sus capacidades y conocimientos previos. Realiza acciones -físicas o mentales- con el fin de crear una idea del nuevo concepto.

El tercer nivel se llama *Image Having (IH) -comprensión de la imagen-*, es un acto de forma que se tiene del objeto, sin tener que actuar sobre él. El estudiante se forma una imagen en su estructura cognitiva, por la realización de actividades sugeridas por el docente. Las imágenes asociadas con una sola actividad son sustituidas por una imagen mental. El desarrollo de estas imágenes mentales orientadas por un proceso mental, libera las matemáticas del estudiante a partir de la necesidad de realizar acciones físicas, es decir, el uso de artefactos que no son meras ayudas sino constitutivas del pensamiento.

De esta forma, el estudiante está capacitado para utilizar una construcción mental sobre el concepto matemático, pero sin la necesidad de trabajar con ejemplos particulares o realizar una abstracción del concepto mismo. Por tanto, se ve en la necesidad de sustituir imágenes asociadas al concepto por una imagen mental del mismo.

Un cuarto nivel *Property Noticing (PN) -observación de la propiedad*-, ocurre cuando el estudiante puede manipular o combinar aspectos de las imágenes que ya posee para construir propiedades relevantes y específicas al contexto y tratar de generalizarlas. El estudiante construye significados para representar el objeto.

Una vez que el estudiante ha construido varias imágenes, puede examinarlas, establecer conexiones y distinciones entre ellas, es una forma de *standing back* -redoblamiento, ir hacia atrás- y reflexionar sobre la manera de regresar a niveles inferiores existente a fin de promover la comprensión del objeto. En este nivel se observan las propiedades construidas hasta entonces, las cuales se combinan para construir definiciones que pueden evolucionar y definir características particulares, mientras que se ignoran otros elementos del concepto puesto en escena.

En el siguiente nivel *Formalising (F) -formalización-*, el estudiante conoce las propiedades y tiene la capacidad para abstraer características o cualidades comunes de la imagen previa dependiendo del conocimiento que caracterizó su propiedad notada.

En este nivel cualquier estudiante estaría preparado y será capaz de enunciar y considerar una definición matemática formal de un concepto o algoritmo, sin hacer referencia a una acción o imagen particular.

Observing (O) -*observación*- Un estudiante que está formalizando conceptos, también está en condiciones de reflexionar, coordinar actividades, establecer y expresar conexiones entre conceptos matemáticos que le permitan deducir patrones y regularidades al momento de expresar algoritmos y teoremas.

El nivel *Structuring (S)* -*estructuración*- ocurre cuando el estudiante intenta pensar en sus observaciones formales como una teoría. Esto significa que el estudiante es consciente de cómo una colección de teoremas está interrelacionada y requiere la justificación o verificación de declaraciones a través de argumentación lógica o metamatemática.

Inventising (I) -invención-, es el nivel más externo de los ocho. Dentro de un tema dado, un estudiante en este nivel tiene una estructura completa de comprensión y, por lo tanto, puede romper con las ideas preconcebidas que provocaron una construcción errónea de los objetos matemáticos y crear nuevas preguntas que podrían convertirse en un concepto totalmente nuevo.

Este Modelo es tenido en cuenta en esta investigación en el análisis del concepto función, por la manera en que enfoca los conocimientos previos que debe tener un estudiante cuando resuelve situaciones o problemas, hasta llegar a un desarrollo o construcción de conocimientos.

Estamos de acuerdo con Pirie & Kieren al decir que, es importante que se entienda que la comprensión es un proceso de crecimiento dinámico, no es limitada, ni tampoco finita, sino recursiva y no, ubica o categoriza a un estudiante en alguno de los niveles que presenta el modelo ya que los niveles ilustran modos de evolución más que fases aparentemente monótonas.

2.3.5. *Significado*

Se reconoce que el significado de los conceptos matemáticos se apoya no sólo sobre su definición formal sino, de un modo fundamental, sobre los procesos implicados en su funcionamiento. Por esta razón se pone el énfasis en el estudio de los procesos cognitivos de los estudiantes en lugar de en sus destrezas o producciones actuales.

El significado expresa el saber personal/institucional, es definido por el sujeto/institución en el desarrollo de la actividad, por ello es subjetivo, describe las propiedades de un concepto en el seno de un sistema cultural.

Godino y Batanero (1994) indican que el significado de un objeto puede ser institucional o personal y lo consideran como el sistema de prácticas[12] (institucionales/personales) asociadas al campo de problemas de las que emerge dicho objeto en un momento dado.

El significado institucional se desarrolla desde la misma naturaleza del objeto matemático. El significado de un objeto matemático se desarrolla desde la funcionalidad organizativa que le da origen y lo representa, en el caso de la función es la relación. Si la función es una relación entre magnitudes variables, la función cúbica no deja de tener ese significado.

La adquisición de significados, es un producto del aprendizaje significativo. Rodríguez (2011, pp.11-12, citando a Ausubel, 1976):

---

[12] Llamamos práctica a toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas (Godino y Batanero, 1994, p. 8)

> El significado real para el individuo (significado psicológico) emerge cuando el significado potencial (significado lógico) del material de aprendizaje se convierte en contenido cognitivo diferenciado e idiosincrásico por haber sido relacionado, de manera substantiva y no arbitraria, e interactuado con ideas relevantes existentes en la estructura cognitiva del individuo. (p. 23)

Los objetos matemáticos deben ser considerados como símbolos de unidades culturales, emergentes de un sistema de usos ligados a las actividades de resolución de problemas que realizan ciertos grupos de personas y que van evolucionando con el tiempo (Godino, Batanero, 1994).

En este sentido, la propuesta realiza determinados tipos de prácticas a partir del material potencialmente significativo, lo que establece que emerjan gradualmente los objetos matemáticos pues el significado de estos objetos está ligado a la actividad RP.

Según Leontiev (1978) la actividad sitúa a los sujetos y les suministra el significado a través de la toma de conciencia que está directamente relacionada con la actividad. Los significados están socialmente centrados, mientras que el sentido es la perspectiva del individuo. El significado de los objetos matemáticos debe estar referido a la acción que realiza un sujeto en relación con dichos objetos.

En esta propuesta la conciencia se toma en el sentido dado por (Vygotsky, 1979) la cual debe ser comprendida como un caso particular de la experiencia social. De esta forma, las acciones de los individuos dentro de la actividad están siempre motivadas por el sentido, que incorpora cognición. Por ello, la toma de conciencia primero se produce a nivel social y luego a nivel personal.

El significado está ligado al campo de problemas del que los objetos emergen en un momento dado. Su naturaleza se opone al carácter intencional del objeto, permitiéndonos enfocar desde otro punto de vista las cuestiones de diseño de material y desarrollo del conocimiento de los sujetos.

La cognición involucra procesos tales como relacionar el nuevo material con aspectos relevantes de la estructura cognitiva existente, verificando cómo se puede conciliar el nuevo significado resultante con el conocimiento establecido, y recodificarlo en un lenguaje más familiar e idiosincrásico (Ausubel, 2010).

El término 'Aprendizaje y enseñanza significativos' hace referencia a aquellas formas pedagógicas de acción que conllevan a:

> (1) una comprensión profunda de los conceptos matemáticos y (2) a la creación de un espacio político y social dentro del cual puedan desarrollarse subjetividades reflexivas, solidarias y responsables. La comprensión y la producción de saberes y subjetividades en el aula, así como la identificación de formas pedagógicas de acción que conlleven a una enseñanza y aprendizaje significativos. (Radford, 2014, p. 136)

En la presente propuesta una acción pedagógica que promueve la comprensión, está focalizada en el material potencialmente significativo. En el curso del aprendizaje significativo, el significado lógico de los materiales de aprendizaje se transforma en significado psicológico para el aprendiz (Ausubel, 2002).

2.3.6. *El desarrollo del conocimiento*

Es una estructura organizada que forma una jerarquía conceptual, en la cual elementos más específicos de conocimiento son relacionados a conceptos, ideas, proposiciones más generales e inclusivos. (Ausubel, 1976, 2002; Moreira, 2010).

Inicialmente las ideas, conceptos y procesos de la matemática no están formalmente bien definidos en la estructura cognitiva de los estudiantes, sin embargo, se aprende a reconocerlos por la experiencia y uso en contextos apropiados. Luego durante ese proceso, esos conceptos e ideas pueden ser refinados y memorizados para el manejo de conceptos en la RP, en ese sentido se desarrolla el conocimiento matemático.

No es posible aislar el desarrollo del conocimiento matemático de las acciones sobre los objetos, ni de la intuición y de las aproximaciones inductivas ligadas a la RP en contextos particulares, ni tampoco de los instrumentos de representación culturalmente elaboradas en apoyo de la actividad matemática. En este sentido, es importante a tener en cuenta en el AS de un concepto *la imagen conceptual* que cada estudiante ha elaborado en su estructura cognitiva, en una situación determinada, en un momento determinado.

La *imagen conceptual* describe la estructura cognitiva de un individuo, que se asocia con el concepto, que incluye todas las imágenes mentales (cualquier clase de representación: forma simbólica, diagrama, gráfica) y las propiedades y los procesos que le caracterizan (Tall & Vinner 1981).

El conocimiento matemático y su desarrollo no está construido a priori por cada generación, hace parte de un aprendizaje como un proceso cuyo objetivo es de adaptación a las prácticas sociales, en ese sentido, se modifica constantemente, es decir se desarrolla conocimiento matemático en las prácticas sociales.

Basados en lo anterior, en esta investigación estamos interesados en los procedimientos y las formulaciones escritas que los estudiantes producen cuando resuelven problemas matemáticos, del mismo modo analizar los mecanismos mediante los cuales la cultura y el contexto contribuyen al desarrollo del conocimiento matemático.

Identificar los subsumidores a partir de la función a tramos es parte fundamental como lo son los conocimientos desarrollados que emergen de un sistema de práctica social y cultural, por ello, el conocimiento del estudiante debe vincularse con los aprendizajes significativos adquiridos con la construcción de nuevos conceptos, de hecho, requiere ciertas estructuras cognitivas específicas cuyo desarrollo tienen génesis en la actividad sociocultural.

2.3.7. *El concepto de función*

Aunque en el Marco Teórico ampliamos este concepto, en este apartado incluimos algunos conceptos del objeto función.

Una función es una correspondencia entre dos conjuntos no vacíos, es una de las propuestas de Vinner (1983).

Este es un concepto generalizado, y que, como tal, pierde características como la variable dependiente e independiente, la variación y el cambio, la continuidad.

El concepto de función puede estar definido en una forma simbólica formal. El sentido lógico de los conceptos se limita a lo que dice esta definición. La ventaja es desligar el concepto de función de los fenómenos físicos o de fórmulas concretas. Tiene sentido debido a que le permite dar origen a las funciones a tramos, en tal caso el ejemplo de Dirichlet, lo que permitió observar una función con muchas discontinuidades.

Vinner (1983) incluye la función como representación, esta propuesta busca mediante una fórmula matemática, expresar en forma implícita o explícita la relación funcional. Este tipo de representaciones logra trascender a las sucesiones, donde se puede observar cómo la sucesión (- 1, 1, -1, …) corresponde con la definición de $f(n) = (-1)^n$, siendo n un número natural.

2.4. **La Teoría Sociocultural**

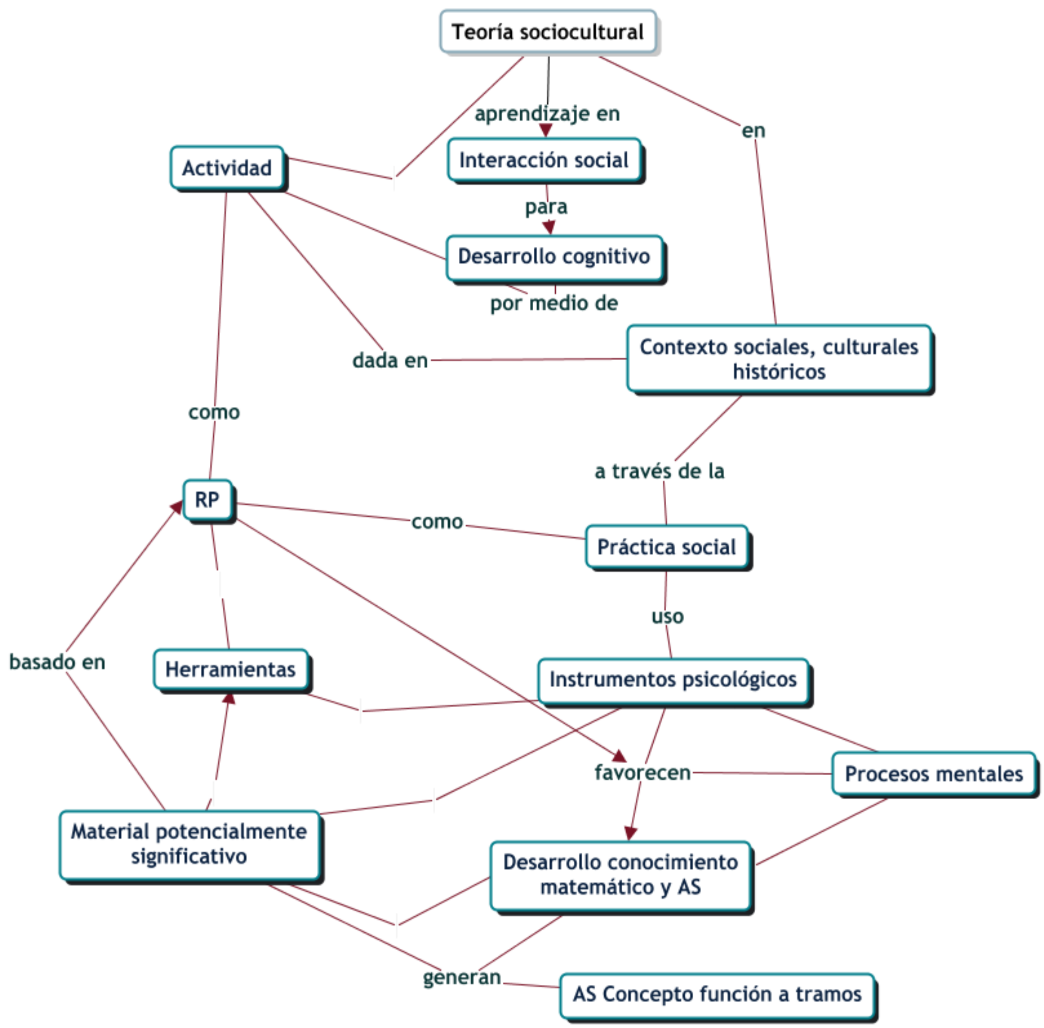
Es importante ampliar la fundamentación anterior para una mejor comprensión del AS desde la Teoría Sociocultural (Vygotsky, 1978). Desde esta Teoría, el conocimiento se construye a través de la interacción entre los individuos y su medio, por lo que la interacción, y la mediación -por medio de material- son elementos indispensables para que se produzca aprendizaje.

La Teoría Sociocultural permite asumir al sujeto como un ser social, y al conocimiento como una producción social que fundamenta el desarrollo del pensamiento. Así mismo, enfatiza el carácter sociocultural de la cognición y propone la existencia de las funciones psicológicas naturales y culturales. Las naturales se evidencian en las funciones cognitivas en el transcurso de su desarrollo y madurez de los estudiantes. "La civilización humana interviene de manera radical [funciones cognitivas] transformando las funciones naturales en culturales. Este cambio se produce bajo la influencia de instrumentos materiales y simbólicos y también a través de formas de comunicación interpersonal" (Kozulin, 1998, p.16).

El **mapa conceptual 4** amplía el desarrollo teórico de la investigación a partir de la Teoría Sociocultural.

Mapa conceptual 4

Principales elementos involucrados en la Teoría Sociocultural



Para la Teoría Sociocultural el aprendizaje es un proceso distribuido, interactivo, contextual que es el resultado de la participación de los estudiantes en una comunidad de práctica. Aprender, significa participar en una serie de actividades que implican procesos en continuo cambio. Al respecto Vygotsky (1982) manifiesta:

> El aprendizaje es una actividad social, y no sólo un proceso de realización individual, una actividad de producción y reproducción del conocimiento mediante la cual el niño asimila los modos sociales de actividad y de interacción, y más tarde en la escuela, además, los fundamentos del conocimiento científico, bajo condiciones de orientación e interacción social. (p. 89)

El aprendizaje así planteado se ubica en un contexto social para que el estudiante se apropie -asimilación e internalización de los símbolos y signos propios de la cultura- del conocimiento históricamente acumulado en interacción con otros como docente-estudiante a modo de labor conjunta y estudiante-estudiante en condiciones sociales y de culturas determinadas a través de acciones como comunicar, comprender, experimentar, abstraer, generalizar. La forma de construcción y desarrollo la constituyen las transformaciones internas del sujeto, es decir, la modificación de sus propias funciones psicológicas.

El término sociocultural se dirige en esta investigación hacia la comprensión y desarrollo del conocimiento y de cómo se ubica la acción mental en escenarios culturales, históricos e institucionales. La acción está mediada y no puede ser separada del medio en que se lleva a cabo.

Dentro de la Teoría Sociocultural son importantes tres ejes básicos que propone Vygotsky citado por Wertsch (1993):

> 1) una dependencia del análisis genético o de desarrollo; 2) la afirmación de que el funcionamiento mental superior en el individuo deriva de la vida social; y 3) la afirmación de que la acción humana, tanto en el plano social como en el individual, está mediada por herramientas y signos. (p. 19)

En esta investigación se retoman los aspectos básicos 1, 2 y 3, los cuales nos facilita reconocer el desarrollo del conocimiento y a la vez el intercambio de estructuras culturales y sociales que permite una dinámica de cambio o transformación del sujeto, dada por el desarrollo histórico y cultural de la actividad práctica cognitiva y social de la actividad RP.

En referencia al primer aspecto, Vygotsky formula una propuesta sobre el origen de las funciones mentales del sujeto, es lo que permite el desarrollo sociocultural y es relevante en esta tesis.

> Cualquier función en el desarrollo cultural del niño aparece dos veces, o en dos planos. Primero aparece en el plano social, y luego en el plano psicológico. Primero aparece entre personas como categoría de interpsicológica, y luego dentro del niño como una categoría intrapsicológica. Esto es igualmente cierto con respecto a la atención voluntaria, la memoria lógica, la formación de conceptos […]. (Wertsch, 1993, p. 43)

Lo anterior reafirma la forma social en que se desarrolla el conocimiento.

El segundo eje nos indica que se necesita de la mediación del otro, en esta investigación la mediación la realiza no el docente, sino que se centra en el papel del material potencialmente significativo como un mediador de significados en el curso de la actividad RP.

Las estructuras de pensamiento y estructuras de acción se desarrollan a través de las actividades sociales y las habilidades cognitivas básicas que intervienen, son las que se desarrollan cuando se interactúa con un grupo, la sociedad o nuestra cultura.

El tercer eje ubica a los procesos de aprendizaje en el contexto de la participación en actividades sociales, orientando la atención en la construcción del conocimiento mediado por diferentes perspectivas, saberes, y habilidades aportadas por los participantes en los eventos de interacción, al igual que los instrumentos en particular el material potencialmente significativo.

La adquisición de significados y la interacción social son inseparables, teniendo en cuenta que los significados de los signos y símbolos se construyen socialmente (Moreira (2003). Además, según Moura y Dias (2003):

> En la perspectiva histórico-cultural, el aprendizaje es un fenómeno social, ocurre y se desarrolla en las relaciones establecidas entre sujetos mediados por intercambios simbólicos. De esta manera, el entorno social constituye la fuente en la que se basa el desarrollo conceptual del niño. Según Vygotsky, el hombre, cuando busca relacionarse con los objetos, usa los sistemas simbólicos que tiene, provistos por la cultura, por el entorno social. Este tipo de operación permite el desarrollo de la abstracción y la generalización que, en esta perspectiva, va de lo social a lo individual. (p. 68)

Lo que expresa el autor, es la existencia de la cultura y la mediación en relación con el desarrollo conceptual, cuya esencia son las ideas expresadas simbólicamente, los instrumentos utilizados y que, la generación del conocimiento es producto de la interacción social, para el surgimiento de un nuevo significado.

La perspectiva sociocultural aporta elementos para comprender la relación entre la actividad humana en el mundo social y los procesos de apropiación de las prácticas sociales, en este sentido Kalman (2003) citando a Wertsch (1991) revela que “[...] su meta principal consiste en construir una versión de los procesos mentales humanos que da cuenta de estos procesos y su relación con los contextos culturales, históricos e institucionales” (p. 41).

Se pretende desarrollar algunos conceptos sobre el aprendizaje basados en los presupuestos del enfoque Sociocultural de Vygotsky, y la relación que hay entre el AS.

2.4.1. *Interacción social*

En esta fundamentación el sujeto se concibe como un ser social con acciones más complejas, producto de la interacción y de la capacidad de pensar sobre la acción, se considera deseable vincular la actividad matemática, en particular la RP con el entorno social, histórico y cultural.

La interacción entre el estudiante y el entorno no es inmediata, siempre está mediada por significados originados exteriormente, se desarrollan en las relaciones sociales cuando se resuelve, en nuestro caso los problemas relacionados al concepto de función.

En este sentido, se establece una relación entre la naturaleza del conocimiento que los humanos producen cuando realizan actividades, mediante las cuales y en razón de las cuales dichos conocimientos son producidos (Cantoral, 2005), por ello el aprendizaje constituye tanto una práctica humana como social.

Vygotsky destaca dos elementos significativos para el aprendizaje, el primero es la relación entre el aprendizaje y la interacción social y el segundo es la posibilidad de organizar situaciones de enseñanza que le permite al estudiante alcanzar niveles de conocimiento más elaborados.

El conocimiento se construye de manera social, lo cual implica tener estudiantes activos que observan y participan en actividades culturales en relación con los contenidos adquiridos previamente en su interacción con otros. Es a través de la práctica social donde se lleva a cabo la actividad humana, sobre el medio en el que se desenvuelve. En las prácticas sociales ejercidas por los estudiantes se imprime un sentido a los problemas y su resolución, reconsiderando sobre las complejas relaciones entre ellos y su entorno.

Lograr lo anterior requiere de factores intermediarios, como los instrumentos psicológicos simbólicos y los medios de comunicación interpersonal, instrumentos materiales, instrumentos psicológicos y seres humanos. Vygotsky planteó que los procesos mentales superiores se consideran funciones de la actividad mediada, e implanta los instrumentos materiales y los psicológicos.

En cuanto a los instrumentos materiales, en el AS se requiere tanto de un material potencialmente significativo como de la disposición del estudiante, para que el aprendizaje sea realmente significativo. Referente a la interacción social, Moreira (2000) indica que "el desarrollo cognitivo no puede entenderse sin referencia al contexto social, histórico y cultural en el que ocurre" (p. 81).

Por otra parte, los instrumentos psicológicos según Kozulin (2000):

> Son los recursos simbólicos -signos, símbolos, textos, fórmulas, medios gráficos-simbólicos- que ayudan al individuo a dominar sus propias funciones psicológicas naturales de percepción, memoria, atención. Actúan como un puente entre los actos individuales de cognición y los requisitos simbólicos socioculturales de esos actos. (p. 15)

Desde la interacción social, es posible aminorar las divergencias cognitivas o socioculturales, y fortalecer el desarrollo de conocimiento entre los estudiantes, en función de los objetos matemáticos que están en juego en las diferentes actividades a realizar. Además, la cognición necesita un fuerte soporte del material potencialmente significativo y mediación, como lo son el lenguaje natural, los símbolos y los signos.

Desde esta perspectiva, la cognición es algo que tiene un innegable vínculo sociocultural con la estructura cognitiva o saberes de un estudiante particular que se articulan dialécticamente con la cognición de los demás, o como lo indica (Radford, 2006) “se piensa con y a través de los artefactos culturales” (p. 107).

2.4.2. *Teoría de la Actividad*

Leontiev (1978) en su Teoría de la actividad articula objetos y motivos que dan sentido a las acciones de los estudiantes, tanto objetos como motivos han sido enlazados con el de los modelos mentales de mediación sobre RP y que construyen y que se modifican y transforman en su práctica social.

De acuerdo a lo anterior, los instrumentos psicológicos y materiales, son producto de la actividad histórico cultural de la humanidad. Los estudiantes ya no pueden ser concebidos sin su medio cultural o social y los objetos se convierten en formas históricas, culturales y la acción del estudiante sobre el objeto está orientada hacia el objeto/objetivo. Así, la actividad como práctica humana -en particular la RP- tiene un carácter histórico-social, es decir, como labor conjunta es transformadora y se liga al carácter objetal.

Davidov (1988) al respecto indica:

> El objeto no se comprende como algo que existe por sí mismo y actuante sobre el sujeto, sino como …aquello a lo que está dirigido el acto, es decir, como algo con lo que el ser vivo se relaciona, como el objeto de su actividad, sea esta interna o externa. (Davidov, 1988, p. 28)

La actividad humana se identifica por conseguir un objetivo tal como lo propone Leontiev (1987), presupone que su estructura general la componen dos características fundamentales: la de ejecución y la de orientación. En la orientación, la actividad comprende las necesidades, los motivos, los objetos y las tareas -RP-; en términos de ejecución, una actividad la constituyen las acciones y sus operaciones.

La acción es la búsqueda, recuperación del conocimiento, su uso, y la operación son las condiciones informativas para conseguir el objetivo, es decir, están subordinadas al logro de metas; la acción puede transformarse en un procedimiento para alcanzar el objetivo, en una operación, que coadyuva a la realización de distintas acciones (Leontiev, 1978).

La actividad se forma de acciones y a su vez, se componen de operaciones, o procedimientos por los que se lleva a cabo una acción bajo determinadas condiciones. Las operaciones son realizadas por los sujetos sobre múltiples mediadores de la actividad, son definidas por las situaciones objetivas de realización.

El concepto de actividad que se fundamenta en la Teoría de Leontiev (1978) se relaciona por su interés particular en la forma en que desea teorizar el saber, el pensamiento, el conocimiento y la cultura.

Se puede decir entonces, que el significado de un objeto para un estudiante surge de las maneras de actuar de los otros hacia el primer estudiante en relación con el objeto, sus acciones actúan para definir el objeto. Por lo tanto, el "interaccionismo simbólico ve los significados como productos sociales, como creaciones que se forman en -y mediante- las actividades definidoras de las personas cuando interaccionan" (Blumer, 1969, p. 5).

Según este enfoque, retomado por Engeström (2001) citado por Eurasquín (2014)

> La actividad es una formación colectiva y sistémica con una compleja estructura mediadora. Un *sistema de actividad* produce acciones y se desarrolla por medio de ellas; pero la actividad no se reduce a acciones, con un principio y un fin

> determinados en el tiempo de los individuos o grupos. Los sistemas de actividad evolucionan durante períodos de tiempo sociohistórico, adoptando la forma de instituciones u organizaciones. (p. 4)

No es posible comprender la actividad humana sin relacionarla con la toma de conciencia ya que forman una unidad dialéctica. La conciencia es la forma de reflexión psíquica de la realidad, es decir, la forma de expresión del sujeto con las relaciones sociales, culturales e históricas, es la interiorización de los objetos a partir de la mediación con otros -maestro, compañero, material potencialmente significativo, instrumentos, entre otros-. No es un mundo interior ya que expresa las relaciones del estudiante con otros y con su entorno social circundante, es social por naturaleza (Moura, 2010).

Para Radford (2004), la actividad es un proceso social cuyo propósito es alcanzar un objeto que posee significados culturales. En este proceso tiene lugar una nueva forma de conocimiento de los objetos como "Si en la acción directa sujeto-objeto, este último revela sus propiedades sólo dentro de límites condicionados que el sujeto puede percibir, entonces en el proceso de interacción mediado por un instrumento, la cognición va más allá de estos límites" (Leontiev, 1978, p. 23).

La actividad en esta investigación se entiende en el sentido de Leontiev (1978) como: (a) la actividad humana tiene estructura instrumental -herramientas- en la satisfacción de las necesidades primarias y secundarias y (b) la actividad está implicada en las relaciones mutuas con otros seres humanos. La actividad media no sólo en la relación con el mundo natural, sino también en la relación con otros seres humanos.

En el caso de nuestra investigación, nos referimos a la actividad en tanto que unidad de análisis (a) Son un grupo de estudiantes, en los cuales se analiza el proceso de AS de la función a tramos, circunscrita a las teorías Sociocultural, de la Actividad y se relaciona con los elementos como la comprensión y significado, analizados desde la propuesta de Pirie & Kieren. (b.) Las acciones subordinadas al logro de objetivos específicos, como lo son: identificar, diseñar y establecer las operaciones que emerge dentro de la dinámica de RP.

2.4.3. ***Instrumentos***

Para Cedillo (2006) los instrumentos son determinantes en la forma en que se realiza la actividad humana, pueden ser los instrumentos externos como las calculadoras, pero que pueden ser también instrumentos cognitivos, como el lenguaje. Moreno (1996) indica que "todo acto cognitivo está mediado por un instrumento que puede ser material o simbólico" (p. 3).

La relación sujeto-objeto en la actividad, está mediada por los artefactos o herramientas -instrumentos-, que pueden ser físicos, intelectuales o materiales.

Los instrumentos materiales no son de uso individual, presuponen una función colectiva, una comunicación interpersonal y una representación simbólica (Vygotsky, 1978). Este aspecto simbólico de la actividad mediada por instrumentos da lugar a una mediación cultural.

Tanto los instrumentos materiales como los instrumentos psicológicos son formaciones artificiales. Por su naturaleza, los dos son sociales. Sin embargo, los instrumentos materiales se dirigen a controlar procesos de la naturaleza, sirven como conductores de la actividad humana orientada a objetos externos.

En concordancia con los aspectos anteriores, los materiales, artefactos e instrumentos serán conceptos importantes que se someten a examen en esta investigación. Se considera que ayudarán a estudiantes a tomar conciencia de los procedimientos realizados durante la actividad matemática de RP.

Al respecto Kozulin (2000) afirma:

> Al igual que los instrumentos materiales, los instrumentos psicológicos son formaciones artificiales. Por su naturaleza los dos son sociales. Sin embargo, mientras que los instrumentos materiales se dirigen a controlar procesos de la naturaleza, los instrumentos psicológicos dominan los procesos cognitivos y conductuales naturales del individuo. A diferencia de los instrumentos materiales, que sirven como conductores de la actividad humana orientada a objetos externos, los instrumentos psicológicos se orientan hacia el interior y transforman los procesos psicológicos naturales internos en funciones mentales superiores. (p. 29)

Se resalta la mediación entre el estudiante y el mundo, indicando que las interacciones sociales son significativas para el aprendizaje. La sociedad y la cultura son mediatizadas por medio de herramientas, y en particular herramientas culturales. El pensamiento y el lenguaje son vistos como una relación dialéctica, el lenguaje ofrece significados históricos culturales heredados, pero cada partícipe de la actividad usa herramientas para dotar de significados a los objetos.

La naturaleza del material de instrucción, es decir, el material potencialmente significativo -herramientas, artefactos, instrumentos, libros, símbolos entre otros-, debe ser suficientemente no arbitrario -no aleatorio, meritorio- para que pueda relacionarse con las ideas correspondientes que se encuentran dentro de los contextos sociales y culturales que, los seres humanos son capaces de aprender en interacción.

En esta investigación se articula la actividad mediada por instrumentos -material potencialmente significativo- y la interacción social de los estudiantes como eje imprescindible hacia la transición del AS y para el desarrollo del conocimiento matemático propiciado por la actividad RP referente a la función, donde se elaboran se analizan y comparten significados relativos a la función por tramos, para establecer un saber que permite comprender el objeto matemático en los diferentes contextos en el cual se desarrolla su práctica social. Al respecto Rückriem (2009) resalta:

> El entorno social influye en la cognición por medio de sus instrumentos, esto es, de sus objetos culturales y su lenguaje e instituciones sociales. El cambio cognoscitivo se logra al utilizar los instrumentos culturales en las interrelaciones sociales, e internalizarlas y transformarlas mentalmente. (p. 1)

En esta investigación, el material potencialmente significativo es situado entre el entorno y el estudiante, modificando las condiciones de la interacción para que el aprendizaje sea significativo. El mediador modifica, amplifica y lleva a comprender y transforma los objetos puestos en escena en la situación, en este caso la actividad sociocultural de RP.

2.5. La resolución de problemas

Históricamente, la manera en que los babilonios y griegos llegaron a pensar y a conocer objetos matemáticos, la forma en plantear y resolver problemas está contenida en la naturaleza misma de la matemática y por la condición misma de la actividad y acciones de pensamiento formado en el curso de la actividad humana.

Esta investigación realiza la aproximación de la actividad hacia el proceso de AS y se sustenta desde la RP. La actividad del estudiante siempre corresponde a alguna necesidad -motivación o actitud para aprender- y está dirigida al objeto que puede satisfacer esta necesidad cognitiva. De igual manera los conocimientos -previos- dirigen hacia la obtención de AS y desarrollo de nuevo conocimiento, son los motivos y representan el objetivo de la actividad. Si el estudiante no tiene la necesidad -actitud-, entonces no habrá AS y tampoco actividad, debido a que no hay asimilación.

Antes de adentrarnos en el campo de la RP, veamos algunos conceptos de lo que se ha considerado un problema. Para Contreras (1987) el problema es una situación no conocida para el estudiante, la cual requiere un tratamiento, una formulación y comprobación de hipótesis a través de la elaboración de conductas propias que pongan a prueba sus capacidades de raciocinio autónomo.

Según Dumas-Carré (Citado por Perales, 1993, p. 170) un "problema puede ser entendido genéricamente como cualquier situación prevista o espontánea que produce, por un lado, cierto grado de incertidumbre y, por otro, una conducta en la dirección de la búsqueda de la solución".

Un concepto en el que al parecer están de acuerdo muchos investigadores es el de Lester (citado por Pozo, Pérez, Domínguez, 1994) y Peduzzi (1997) en el cual aseveran que un problema es una situación que un individuo o grupo desea o necesita resolver y para la cual no dispone de un camino rápido y directo que conduzca a la solución. Lester, agrega que una situación sólo puede ser concebida como problema en la medida en la que sea reconocida como tal y de forma que no haya procedimientos automáticos que permitan solucionarla de manera más o menos inmediata y que demande algún proceso de reflexión o toma de decisión sobre la heurística a seguir.

La RP matemáticos ha sido considerada el foco de la actividad matemática y el corazón de ésta, su relevancia se ha mantenido de tal forma que los sistemas educativos lo han integrado a los diseños curriculares ubicándolo como un eje central en la organización de los contenidos que han de ser enseñados (NCTM, 2000), ya que sitúa de forma manifiesta la capacidad de análisis, comprensión y razonamiento, es decir, propone como organizar las actividades de RP para permitir que los aprendizajes sean significativos, hasta el punto de llegar a identificar la RP con el pensamiento y la cognición.

En concordancia con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas existen periodos en los que se evidencia la relación entre las emociones y los procesos cognitivos, son los instantes de comprensión de la estructura de la actividad, en la cual los estudiantes hacen uso de los conocimientos y conceptos que garantizan la adquisición y la retención o de recuperación de la información de fórmulas o procedimientos mecánicos cuando se propone resolver un problema matemático.

En ese sentido, la *cognición* -o el acto de conocer- se ocupa de atribuir significado, representar; procesar y utilizar el conocimiento en la estructura cognitiva del estudiante a través del proceso de internalización de signos (Vygotsky), de *subsunsores* (Ausubel).

Plantear y resolver problemas es sugerido en los currículos, y en los estándares de matemáticas de la mayoría de los países, debido a que ello permitiría otorgar significado tanto a los objetos matemáticos como al desarrollo de los conocimientos matemáticos emergentes.

La National Council of Teachers of Mathematics (1980); el Informe Cockroft (1985); Silver (1987) indican que los educadores tienen la resolución de problemas como una meta para la instrucción, que su interés radica en desarrollar la capacidad de los estudiantes para usar y aplicar el conocimiento matemático aprendido en la escuela para resolver problemas del mundo real, resolver problemas no rutinarios, así como ejercicios de libros de texto.

En este aspecto, Lesh & Zawojewski (2007) afirman que la resolución de problemas es un:

> Proceso de interpretar una situación matemáticamente, la cual involucra varios ciclos interactivos de expresar, probar y revisar interpretaciones y de ordenar,

> integrar, modificar, revisar o redefinir grupos de conceptos matemáticos desde varios tópicos dentro y más allá de las matemáticas. (p. 782)

Esta caracterización presenta un esquema en relación a la comprensión y desarrollo de pensamientos matemáticos como un proceso de reflexión mediante el cual el estudiante transforma los objetos matemáticos como resultado de participar en un sistema de actividad dentro de una comunidad de aprendizaje.

El aprendizaje de las matemáticas requiere problematizar o discutir los problemas, lo cual incluye desde el punto de vista cognitivo pensar las formas de comprender o resolver un problema, establecer el significado del objeto en cuestión, interpretar la solución y comunicar los resultados (Santos-Trigo, 2014).

Al respecto, Schoenfeld (1985) establece que:

> Aprender a pensar matemáticamente involucra más que tener una gran cantidad de conocimiento de la materia al dedillo. Incluye ser flexible y dominar los recursos dentro de la disciplina, usar el conocimiento propio eficientemente, y comprender y aceptar las reglas tácitas de juego. (p. xxi)

El significado de problema de matemáticas según House, Wallace & Johnson, (1983):

> Problema matemático es una situación que supone una meta para ser alcanzada donde existen obstáculos para alcanzar ese objetivo que requiere deliberación, y se parte del conocimiento del algoritmo útil para resolver el problema. La situación es usualmente cuantitativa o requiere técnicas Matemáticas para su solución, y debe ser aceptado como problema por alguien antes de que pueda ser llamado problema. (p. 10)

Los autores sitúan el énfasis en los conocimientos previos que deben tener los estudiantes para enfrentarse a resolver un problema, dejando de lado las estrategias de razonamiento y las situaciones de interacción y comunicación en el aula, además, poco activan la construcción socio-cultural del conocimiento como proceso compartido que envuelve a participantes.

Un aspecto que debe intervenir durante la interacción con los problemas o contenidos matemáticos referidos al concepto de función, es que los estudiantes describan cambios o formas de variación -incluyendo variables- entre los objetos o atributos asociados con la actividad o problema que los lleven a la identificación de patrones, conjeturas o relaciones. (Santos-Trigo, 2008).

Para Kilpatrick (1985), "un problema es una situación o tarea en la cual una meta quiere ser lograda y una ruta directa a ella está bloqueada" (p. 3), ampliando que usualmente se requiere de sujetos que tienen el problema.

El concepto problema planteado también indica una meta por lograr y en ese sentido estamos de acuerdo, sin embargo, olvida el medio con el cual el sujeto o los sujetos deben alcanzar el objetivo, además de los conocimientos y experiencias previos. El problema debe ser una actividad en la cual se logra una meta, y se requiere el uso de algoritmos y conocimientos previos para su solución, suele manifestar que se ha alcanzado una estrategia la cual favorece el desarrollo de conocimiento.

CAPÍTULO III

3. **Marco conceptual de la investigación**

En este capítulo se hace un recorrido histórico sobre la evolución del concepto de función, sobre sus diferentes acepciones y generalizaciones y de las configuraciones epistémicas que se han manejado a través de la historia y los que aún se manejan de las funciones y de las relaciones adecuadas. Muestra la evolución del conocimiento matemático como un elemento esencial en la cultura el cual compartimos con los estudiantes.

3.1. **La función**

Desde la perspectiva cognitiva, se explicita cómo la historia y la evolución del concepto función ha logrado ofrecer fundamentos matemáticos y didácticos que, hicieron parte del proceso histórico y cultural acogidos por la humanidad para desarrollar sus conocimientos que probablemente los estudiantes incurran en un proceso similar. Luego se presenta el desarrollo actual del concepto, la función a tramos y los conceptos de límite y derivada de una función.

Las matemáticas tratan en la gran mayoría de campos de forma directa o indirecta con las funciones, es así, como el Análisis Matemático considera la función de una, dos, o n cantidad de variables, estudiando sus propiedades; las Ecuaciones Diferenciales e Integrales respaldan la resolución de ecuaciones en las cuales las incógnitas son funciones; el análisis funcional trabaja con espacios hechos de funciones; y el análisis numérico estudia los procesos de control de errores en la evaluación de todos los diferentes tipos de funciones (Ponte, 1992).

El desarrollo del concepto de función a lo largo de la historia, es paralelo a los diferentes propósitos de la humanidad en concebir y tratar de comprender la naturaleza en la que vive. De igual forma está ligado a los razonamientos filosóficos hasta refinarse en un proceso científico, “culminando” en un desarrollo matemático que ayuda a la modelación el mundo y las leyes que o rigen.

A continuación, se presentan los componentes del concepto de función que sustentan el desarrollo de la investigación en el análisis de datos, son un eje esencial para responder a la pregunta de investigación planteada en el capítulo I.

Mapa conceptual 5

Un recorrido histórico sobre el concepto de Función.

3.2. **Desde la historia**

La historia de la Educación Matemática muestra la evolución del conocimiento matemático como un elemento de la ruta de la cultura que compartimos con los estudiantes, “en el fondo subyace la idea de la complejidad de los conceptos, su historicidad y la creencia de que la epistemología y la antropología son dos claves esenciales que interrelacionan la historia y la educación matemática” (Radford, Furinghetti & Katz, 2007, p. 109).

Desde la Matemática Educativa se ha investigado históricamente la construcción del concepto de función con el objetivo de hallar ideas que consientan explicar algunas dificultades que se presentan en el aprendizaje de este concepto. Hitt (2000) registró que las ideas intuitivas de las funciones se remontan a la época de las tablas de arcillas de los babilonios, donde se pudo identificar la idea de relación con los números y sus cuadrados, los números y sus raíces cuadradas.

Desde la perspectiva cognitiva, el conocimiento de la historia puede ayudar a resolver problemas relativos al aprendizaje de conceptos matemáticos, como límite, simbolismo algebraico (Sierpinska,1985; Sfard, 1992).

Históricamente, el concepto de función es uno de los más importantes en las Matemáticas y las ciencias. “El concepto de función, tal y como se define actualmente en matemáticas, es un objeto muy elaborado como consecuencia de numerosas generalizaciones realizadas a través de una evolución de más de 2000 años” (Ruiz ,1993, p. 147).

Se considera que la historia del concepto de función ha logrado ofrecer fundamentos matemáticos y didácticos que, hicieron parte del proceso histórico y cultural acogidos por la humanidad para desarrollar sus conocimientos, probablemente los estudiantes incurran en un proceso similar; por lo tanto, es necesario tener en cuenta las condiciones que le fueron dando sentido al concepto a través de las diferentes generaciones.

La estructura del concepto de función que tenemos actualmente, es el resultado evolutivo de un espacio de tiempo cercano a los 2000 años. En la antigüedad, aunque no se tenía una idea abstracta de variable, se describían de manera gráfica o verbal, y es a partir de allí que los avances del concepto esta época, especialmente en las culturas babilónicas y griegas fueron significativos.

La concepción de función más común, para profesores y libros de texto actuales, es una consecuencia del desarrollo histórico del concepto y del posicionamiento filosófico que los matemáticos impulsaron desde 1900, concerniente a los fundamentos de la Matemática (Mesa, 2004).

Si bien las culturas griega y babilónica resaltan la importancia de sus logros tanto filosóficos como matemáticos al alcanzar hacer uso de una noción intuitiva del concepto de función, los babilonios tratan de reconocer patrones y regularidades a través de tabulaciones de fenómenos naturales como el movimiento de las constelaciones, es decir, se reconoce la función como una relación que asocia elementos entre dos conjuntos.

En la antigüedad el estudio del concepto de función se centraba en la búsqueda de regularidades y proporciones, se generaron situaciones en las que se observaba la dependencia entre cantidades de diferentes magnitudes, "fueron representadas verbalmente, en tablas, en gráficas o con ejemplos" (López y Sosa, 2007, p. 15).

Los filósofos griegos consideran el cambio y el movimiento como algo externo a las matemáticas, lo cual lleva a hablar en términos de incógnitas e indeterminadas más que en términos de variables. Lo anterior conduce a las proporciones y ecuaciones, y no a las funciones como tal (Ruiz, 1998).

Para los griegos la ciencia de las magnitudes era la geometría -lo medible- y bajo estas condiciones, las magnitudes variables sólo se establecían en forma homogénea para expresarlas como proporciones o razones: comparaban longitudes con longitudes, áreas con áreas, volúmenes con volúmenes.

La homogeneidad de cierta forma imposibilitaba encontrar dependencias entre variables de diferentes magnitudes, origen de toda relación funcional. Las nociones más negativas en la evolución del concepto de función fueron la proporcionalidad, la inconmensurabilidad, y la gran disociación en el pensamiento entre número y magnitud.

La Edad Media, se caracteriza por los intentos en dar una explicación cuantitativa racional a los fenómenos naturales a través de procesos de abstracción los cuales aparentemente no poseen peso debido a la separación entre número y magnitud. Como consecuencia de tal disociación se proponen situaciones de modelación matemática fundamentada en resultados experimentales, esto influyó para construir las bases de la noción de función, Farfán y García (2005, p.490) citando a Cotret (1985) donde asevera que “la historia nos va a mostrar que es unificando, fundiendo las dos concepciones, como se van a poner las bases de la noción de función”. Prácticamente a partir de esta época se da inicio a la modelación matemática con el uso del concepto de función.

Solo en el período moderno, a fines del siglo XVI y especialmente durante el siglo XVII, comienzan a prevalecer las expresiones y funciones analíticas. Estas etapas reflejan, en realidad, el camino recorrido por el hombre a través de la historia hacia la generalización y formalización del concepto de funciones. El proceso de abstracción demuestra una comprensión real y profunda del concepto a la vez que es un factor de construcción de ésta.

Al respecto, Moura y Dias (2003) consideran que:

> La investigación histórica nos ha demostrado que el desarrollo del concepto de función estuvo marcado por algunas etapas fácilmente identificables a través de las estrategias utilizadas, en diferentes tiempos para resolver problemas que involucran variaciones en cantidades. Según Youschkevitch (1976, p. 39) hay tres etapas principales. En la antigüedad se estudian casos particulares de dependencia entre dos variables, sin embargo, no existe una noción general de cantidad y funciones variables. En la Edad Media, estas nociones generales se expresan por primera vez en forma geométrica y mecánica, pero en el caso concreto de dependencia entre dos cantidades se define mediante una descripción verbal o gráfica. (p. 69)

En el Siglo XIV aparecen los primeros indicios del concepto de función y se presentan dos corrientes, por un lado, Heytesbury & Swineshead en Inglaterra, a través de la Teoría de la intensidad de formas, expresada mediante un álgebra verbal representando por una figura las intensidades de una cualidad de una magnitud continua que dependen de otra magnitud análoga Ruiz (1998).

Ruiz (1998) revela que en los siglos XV y XVI no se realizan aportes significativos al desarrollo del concepto de función, pero, se sientan las bases de la simbología algebraica que permite una manipulación práctica y eficiente, esencialmente al diferenciar entre variable de una función e incógnita de una ecuación, lo cual marcará la estructura simbólica que llevará a la conformación de la noción de función.

A partir de la creación de la geometría analítica, de Descartes (1592-1650) y Fermat (1601- 1665) se introduce por primera vez la idea de ecuación en x e y, como un medio para expresar la relación de dependencia entre dos cantidades variables.

El siglo XVII inicia con la creación de la Geometría Analítica a través del sistema de coordenadas cartesianas, creada por Descartes y Fermat, ello dio pie al desarrollo del cálculo diferencial e integral por Newton *y* Leibniz y aparece el concepto función. Este último la comprende como una cantidad que varía de un punto a otro en una curva, de igual forma, introduce términos como constante, variable, coordenadas y parámetro.

En el siglo XVII por primera vez, se sustenta la idea de que una ecuación en x e y es un medio para introducir una dependencia entre dos cantidades, de manera que permite el cálculo de los valores de una de ellas correspondiente a los valores dados de la otra (Ruiz, 1998).

Como consecuencia de lo anterior, se inicia el estudio de las curvas y las expresiones algebraicas que las describen, lo cual da pie al desarrollo de la Teoría de funciones:

> Se jugó un significado decisivo para el desarrollo posterior de la doctrina de las funciones, por un lado, el crecimiento impetuoso de los cálculos matemáticos, y por el otro, la creación del álgebra simbólico-literal junto a la extensión del concepto de número […]. (Youschevitch, 1976, p. 50)

Lo anterior indica el comienzo a la introducción del concepto de función "como una relación entre conjuntos de números en lugar de "cantidades" y para la representación analítica de funciones mediante fórmulas" (Ib. P. 50).

En el siglo XVIII la discusión entre D'Alambert y Euler sobre el problema de la cuerda vibrante, generó una evolución en el concepto de función, dirigiendo a Euler a considerar y explicitar por primera vez la noción general de correspondencia entre pares de elementos, la definición aparece en su obra *Institutiones calculi differentialis* (1755), "Si x es una cantidad variable, entonces toda cantidad que dependa de x de cualquier manera o que está determinada por aquél se llama función de dicha variable" MEN (2004, p.8).

En este siglo, se analizan los fenómenos físicos a través de un objeto matemático de naturaleza eminentemente analítica que deja de ser la curva para llegar a ser la función, impregnada aún de las ideas infinitesimales de Leibniz, Bernoulli y Euler, los cuales serán las figuras del siglo XVIII, con quienes la noción de función es considerada una expresión analítica, proponiendo el primero de ellos, la letra griega f para designar la característica de una función, escribiendo entonces: << *f x* >>, lo que evolucionará con Euler, para escribirse como *f(x)*.

Lo anterior se evidencia cuando el concepto de función es tomado como un objeto indispensable por Euler para imprimirle una estructura capaz de fusionar el Cálculo Diferencial de Leibniz con el Método de fluxiones de Newton, de donde emerge el Análisis Matemático, disciplina que estudia los procesos infinitos.

Sin embargo, es Dirichlet en 1837 quien propone una definición general, la cual adquiere un significado independiente del concepto de expresión analítica:

> Si una variable y está relacionada con otra variable x de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a x hay una regla según la cual queda determinado un único valor de y, entonces se dice que y es una función de la variable independiente x. (MEN, 2004, p. 9)

Dirichlet (1837) propone una definición satisfactoria del concepto de función "Una cantidad variable "y" se llama función de la cantidad variable "x" si a cada valor de "x" le corresponde un solo y determinado valor de "y"" (Citado por Ugalde, 2014, p. 15).

Una función podía ser expresada, incluso solamente con palabras. La intención era desligar el concepto de función de fenómenos físicos o de fórmulas concretas. El ejemplo clásico lo suscitó Dirichlet:

$$\mathrm{f(x)} = \begin{cases} 0, si\ x\ es\ un\ número\ irracional \\ 1\ , si\ x\ es\ un\ número\ racional \end{cases}$$

Nótese que no es fácil calcular los valores de dicha función porque no siempre se sabe si un número real dado es racional o irracional. A pesar de no poseer una expresión analítica y no tener una gráfica asociada, es una función, con estos trabajos el concepto de función inicia un proceso de separación de la representación analítica con la cual había estado tan ligada hasta el momento y de esta forma se da origen a las funciones a tramos.

El siglo XIX se identifica en las diversas divulgaciones observadas en los trabajos de Cauchy (1827), Lobachevsky (1834), Dirichlet (1837) y Riemann (1858), al emplear al objeto matemático función como el núcleo del Análisis Matemático. Ellos describían a la función con la particularidad de ser una correspondencia de tipo muy general (Ruiz, 1998).

A finales del siglo XIX y principios del XX surge el concepto de conjunto, éste influyó en los posteriores conceptos de función. Un grupo de matemáticos, que se hacían llamar Nicolás Bourbaki dan el siguiente concepto: "Una función es una regla de correspondencia entre dos conjuntos de tal manera que a cada elemento del primer conjunto le corresponde uno y sólo un elemento del segundo conjunto" (Bourbaki, 1973).

A medida que la matemática avanza como ciencia, el concepto de función también lo hace con ella gracias a topología y la Teoría conjuntista. En 1939 el grupo Bourbaki, citado por Rey G., Boubée, C., Sastre-Vázquez, P. & Cañibano, A. (2008) definió la función como correspondencia entre conjuntos:

> Sean E y F dos conjuntos, que pueden o no ser distintos. Una relación entre un elemento variable x de E y un elemento variable y de F, se llama relación funcional en y, si para todo x en E, existe un único y en F el cual está en la relación dada con x. Damos el nombre de función a la operación que, de esta forma, asocia cada elemento x en E con el elemento y en F que está en relación con x, se dice que, y es el valor de la función en el elemento x, y se dice que la función está definida por la relación dada. Dos relaciones funcionales equivalentes determinan la misma función. (p. 152)

Es la primera definición como relación entre elementos de dos conjuntos; inicialmente las definiciones se enunciaban respecto de expresiones algebraicas, de cantidades variables que dependían unas de otras, de asociaciones entre valores numéricos, ya sea tomados de intervalos o de cantidades variables.

El siglo XX corresponde al uso y exploración del concepto de función basado en la noción introducida por Dirichlet, y lo confirma Spivak (2014) al escribir que:

> Indudablemente el concepto más importante de las matemáticas es el concepto de función: En casi todas las ramas de la matemática moderna, la investigación se centra en el estudio de funciones. No es sorprendente, por tanto, que el concepto de función sea de una gran generalidad. (p. 39)

En libros de cálculo actuales, es evidenciable cómo se intenta favorecer más la relación que guarda el concepto de función con el intento por describir fenómenos naturales, de tal manera que “en la actualidad se prefiere considerar el concepto de función como aplicación” (Dieudonné, 1989, citado por Farfán, p. 493).

O como diría Freudenthal (1983) “Aunque esta definición está construida de una manera lógicamente formalizada, sin embargo, se ha oscurecido su esencial significado como acción de asignación de variables, ha perdido su carácter dinámico para transformarse en algo puramente estático*”* (p. 497).

3.3. **Desarrollo actual**

El aprendizaje de las matemáticas es un tema clave en el desarrollo de las ciencias y de la cultura. Las investigaciones pioneras para el aprendizaje inicial de las matemáticas son la comprensión de los números y las proporciones (asociado al concepto de función).

El desarrollo del pensamiento variacional desde esta perspectiva se origina en los trabajos de Piaget e Inhelder (1958) los cuales asociaron el aprendizaje operacional de los conceptos de cantidad, de número y de cálculo con el desarrollo mental de los procesos metapsicológicos y del lenguaje. De esta forma, la proporción se considera como un modelo que establece relaciones entre relaciones, así la razón es una relación entre dos variables.

Freudenthal (1983) indica que el análisis fenomenológico de un concepto o de una estructura matemática radica según Puig (1997) en “describir cuáles son los fenómenos para los que es el medio de organización y qué relación tiene el concepto o la estructura con esos fenómenos” (p. 2).

Freudenthal (1983) expresa la existencia de dos objetos mentales que preceden a la estructura organizativa del objeto función, la idea de *variable y de dependencia funcional*. Establece dos conceptos relacionados al término variable: uno, como nombre polivalente; otro, como objeto variable. Frente a la primera concepción se refiere a un conjunto de objetos o “medios para formular enunciados generales, esto es enunciados que se cumplen para todos los objetos que nombran” (p. 491).

3.4. **Elementos que caracterizan al concepto de función**

A continuación, se exponen los elementos más importantes del concepto de función al igual que las definiciones básicas que se han ido construyendo a través de los tiempos. "Iindudablemente el concepto más importante de todas las matemáticas es el de función: en casi todas las ramas de la matemática moderna la investigación se centra en el estudio de funcione" (Spivak, 2014, p. 39).

Una variable es una propiedad o un atributo que puede tomar uno o varios valores dados por los elementos de un conjunto. Cuando el conjunto de los valores posibles de una variable es un subconjunto o un intervalo de números reales, se le denomina *variable real*.

Cuando la relación entre dos variables x e y es tal que, a cada valor de la primera, corresponde un único valor de la segunda, se dice que esta última está en función de la primera. A la *variable x se le llama variable independiente* y *a la variable y se le llama variable dependiente*.

Al escribir la regla de correspondencia, se denota por y = f(x) el valor de la variable dependiente y correspondiente al valor x de la variable independiente y se hace explícita la regla f para calcular y a partir del valor x. De aquí en adelante, adoptando la notación establecida por el. Lagrange, denotaremos cada función real escribiendo:

$f: A \rightarrow B$

$y = f(x)$

Existen varios conceptos o definiciones de función, enunciaremos algunas.

"Una función es una regla que designa a cada elemento de un conjunto exactamente un elemento, llamado f(x), de un conjunto B" (Stewart, Redlin & Watson, 2012, p. 143).

Por lo cual, cada elemento x del conjunto A, se relaciona con un elemento del conjunto B que se define por y = f(x). El *conjunto A se llama dominio* de la función o el conjunto de todos los posibles valores para la variable independiente, y el conjunto B, se conoce como el conjunto formado por todos los valores posibles de f(x), conforme varia en todo el dominio de f, llamando *conjunto imagen o rango*.

Cuando una función se conceptualiza por medio de una fórmula "f(x) = fórmula" y el dominio no es explícito, se entiende que el dominio es el mayor conjunto de valores de x para los cuales la expresión f(x) tiene sentido como número real. Éste es el llamado *dominio natural* de la función.

Dada una función $f : A \to \mathbb{R}$, y un conjunto no vacío $C \subset A$, el conjunto de las imágenes por f de todos los elementos de C: $f(C) = \{f(x) : x \in C\}$ se llama *imagen de* C *por* f. Cuando C = A, el conjunto f(A) se llama *conjunto imagen* de f y también *rango* o *recorrido* de f.

Una de las representaciones de las funciones es a partir de una gráfica de un sistema de coordenadas, donde se establece la relación al asociar puntos en el plano cartesiano como una pareja ordenada (x, y), Stewart *et al*. (2001) la definen como:

> Si f es una función con dominio A, entonces la gráfica de f es el conjunto de pares ordenados $\{(x, f(x) / x\epsilon\ A\}$. En otras palabras, la gráfica de f es el conjunto de todos los puntos (x, y) tales que y = f(x); es decir, la gráfica de f es la que corresponde a la ecuación y = f(x). (p. 139)

Es necesario vislumbrar que las funciones pueden no estar definidas para todos los valores numéricos de la variable independiente, sino para aquellos que pertenecen a un cierto conjunto.

Spivak (2014, p.47) define: “Una función es una colección de pares de números con la siguiente propiedad: si *(a,b)* y (a,c) pertenecen a la colección, entonces *b* = c; en otras palabras, la colección no puede contener dos pares distintos con el mismo primer elemento”.

A partir de la definición anterior, Spivak define el *dominio* de una función:

> Si f es una función, el dominio de *f* es el conjunto de todos los *a* para los que existe algún *b* tal que (a, *b)* está en *f*. Si *a* pertenece al dominio de *f,* se deduce a partir de la definición de función que existe, en efecto, un *único* número *b* tal que *(a, b)* pertenece a f. Este único *b* se designa por *f* (a). (p. 48)

Por su parte Aleksandrov (1981) afirman que: “La variable (dependiente) y es función de la variable (independiente) x si existe una regla por la cual cada valor de x, perteneciente a un cierto conjunto de números, corresponde un valor definido de y” (p. 103)

El conjunto de los valores que toma la variable independiente x de la definición anterior se denomina *dominio* de la función. El conjunto formado por aquellos valores de y definidos o relacionados con al menos un valor de x, se llama *rango o imagen* de la función.

Con los avances de la Teoría de conjuntos, la definición de función alcanza un nivel de abstracción y generalización más avanzado, como lo indica el MEN (2004):

> Dados dos conjuntos arbitrarios A y B una función (o aplicación) de A en B es una ley que a cada elemento x de A hace corresponder un solo elemento y de B; o si se prefiere, una función de A en B es un subconjunto F del producto cartesiano A x B tal que si (x, y) y (x, z) pertenecen a F entonces y = z. (p. 9)

En esta definición, el concepto de función adquiere características de un objeto matemático estático, que pierde muchos de los atributos presentes en su comienzo y durante su evolución, como lo son la idea de variación y cambio.

Hitt y Torres (1994) indican que en el S XX hay algunas definiciones de la noción de función más comunes que se han empleado en la enseñanza del Cálculo.

Función en términos de variable: Una función es una variable relacionada con otra variable tal que a cada valor de la última le corresponde únicamente un valor de la primera.

Función en términos de conjunto de parejas ordenadas: Una función es un conjunto de pares ordenados, dos de los cuales tienen la misma primera componente.

Función en términos de regla de correspondencia: Una función f de un conjunto A a un conjunto B es una regla de correspondencia que asigna a cada x de cierto subconjunto D de A un elemento determinado de manera única f(x) de B.

Buscando el rigor al uso de este concepto dentro de las estructuras formales y abstractas de las matemáticas, la definición del concepto de función se ve enmarcado dentro del dominio de la Teoría de conjuntos, como lo afirma Ugalde (2014, p. 16):

Sean A y B conjuntos. Una función f: A → B de A en B es un subconjunto f de AXB tal que:

a) Para todo elemento a en A existe un elemento b en B con (a, b) en f; y
b) Si (a, b) y (a´, b´) son elementos de f, entonces b = b´.

Puede observarse la función como una colección de pares ordenados de números por ello, el trazado de una función se reduce a esbozar cada uno de los pares de la misma, así la gráfica contiene todos los pares (x, f(x)).

Para Sfard (1991), el concepto de función debe ser reconocido como un proceso y como un objeto, cuyo proceso de aprendizaje requiere para su comprensión asociar de manera explícita a los conceptos de dominio, recorrido o imagen con la regla que establece la conexión entre las variables y las diferentes formas de representación, como la verbal, escrita, gráfica, de diagramas y tabular.

El concepto de función es abstracto y necesita durante el proceso de su aprendizaje de varias representaciones que sean simultáneas, sin embargo, los estudiantes se limitan por el conjunto de imágenes mentales previas que poseen, a resolver problemas o situaciones basados en una única representación.

Sierpinska (1992) plantea la siguiente pregunta ¿A qué hace referencia la definición de función? (X, Y, f). X e Y se refieren al mundo de los cambios, o bien a los objetos cambiantes; el símbolo f se refiere al mundo de las relaciones entre cambios u objetos cambiantes, o al mundo de los procesos que transforman objetos en otros objetos. Estas relaciones deben estar bien definidas y esto se refiere al mundo de los criterios, modelos y leyes. Indica además que, las funciones deberían desarrollarse en el aula de clase de manera análoga a como se presentó en la historia, primero como modelo de relaciones, posteriormente, como herramienta para la descripción y la predicción.

La autora reporta que:

> Los estudiantes deben interesarse en explicar los cambios, y determinar así regularidades; identificando no sólo aquello que cambia, sino también cómo

cambia; en donde las expresiones analíticas de las funciones deberían constituirse como herramientas que permitan modelar situaciones de la vida real. (p. 93)

Godement (1971) presenta una definición de función como terna, es decir, una definición aún más estructural (Citado por Ruiz, 1998, p. 134) asevera:

Se llama función a la terna f=(G,X,Y), en donde G,X,Y son conjuntos que verifican las condiciones siguientes:

1. $G \subset XxY$

2. Para todo $x \in X$, existe un y sólo un $y \in Y$, tal que, $(x, y) \in G$, G es la gráfica de la función f.

El único elemento y de Y tal que $(x, y) \in G$ se llama valor de la función f en x, y se utiliza para designarlo y=f(x). Es evidente entonces que la gráfica G es el conjunto de pares de la forma (x, f(x)) donde $x \in X$, lo que está de acuerdo con la idea intuitiva de función.

$A \subset X$ se le denomina conjunto de partida de f y a Y conjunto de llegada de f.

3.5. **Categorías de Vinner**

Vinner (1983) caracterizó la definición de la función en seis categorías, éstas son tenidas en cuenta en la presente tesis sobre la base de análisis y discusión de los objetivos propuestos e implicaciones del desarrollo del conocimiento matemático expuesto por los estudiantes cuando utilizan material potencialmente significativo.

3.5.1. *La función como correspondencia*

Una función es una correspondencia entre dos conjuntos no vacíos que asignan a cada elemento en el primer conjunto exactamente un elemento en el segundo conjunto.

3.5.2. *La función como relación de dependencia*

Una función es una relación de dependencia entre dos variables (y depende de x).

Una función de una variable real es una relación de dependencia entre una variable dependiente (Y) y una variable independiente (X). Para cada valor de la variable independiente X solo le corresponde un único valor de la variable dependiente Y.

Una conexión entre dos magnitudes.

3.5.3. *La función como regla*

Se espera que una regla tenga cierta regularidad, mientras que una correspondencia puede ser arbitraria.

En este caso el dominio y el codominio no se mencionan.

El resultado de una determinada regla aplicada a una variable.

3.5.4. *La función como operación*

Una función es una operación o una manipulación -se actúa sobre un número dado, generalmente mediante operaciones algebraicas, para obtener su imagen-.

Se conecta el valor de x con el valor de y.

Una operación realizada sobre ciertos valores de x que asignan a cada valor de x un valor de $y = f(x)$.

Transmitir valores a otros valores de acuerdo a ciertas condiciones.

3.5.5. *La función como fórmula*

Una función es una fórmula, una expresión algebraica o una ecuación.

Si es una ecuación, expresa cierta relación entre dos objetos, conecta dos factores.

3.5.6. *Función como una representación*

La función se identifica, de una manera posiblemente sin sentido, con una de sus representaciones gráfica o simbólica.

Una gráfica puede ser descrita matemáticamente. Una colección de números ordenados que se expresan gráficamente.

3.6. **La función a tramos**

El concepto de función a tramos contendido en esta tesis, tiene su matriz en el concepto moderno de función propuesto por Dirichlet-Bourbaki en Vinner & Dreyfus (1989) "Es una correspondencia entre dos conjuntos no vacíos que asignan a cada elemento del primer conjunto (el dominio) exactamente un elemento del segundo conjunto (el codominio)" (p. 357).

En 1829 Dirichlet formula por primera vez el concepto moderno de función $y= f(x)$ de una variable independiente en un intervalo $a < x < b$, definiendo la función de la siguiente forma:

> y es una función de una variable x, definida en el intervalo $a < x < b$, si a todo valor de la variable x en este intervalo le corresponde un valor definido de la variable y. Además, es irrelevante en qué forma se establezca esta correspondencia. (Kleiner, 1989, p. 10)

Es una definición general, no indica sobre la necesidad de definir a la función por medio de una fórmula o expresión algebraica, sobre todo el dominio de definición no lo hace implícito ni explícito.

El término correspondencia se puede discutir sobre un conjunto de pares ordenados que satisfacen una determinada condición. Entre esas correspondencias se definen funciones discontinuas y funciones definidas sobre dominios a tramos -diferentes reglas con diferentes subdominios-

Las funciones a tramos están definidas mediante varias expresiones algebraicas, el dominio de la correspondencia se divide en varios subdominios, en cada uno de los cuales se mantiene una regla diferente de correspondencia, en la cual cada expresión actúa en un intervalo diferente.

La regla es una fórmula o una función de la forma f_1: $I_1 \longrightarrow \mathbb{R}$, donde I_1 es el intervalo en el cual toma valores la variable independiente x.

De esta forma, se puede establecer que una función definida a trozos en los intervalos disjuntos I_1, I_2, …I_n, es una función de la forma:

f: $I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_n \rightarrow \mathbb{R}$, definida por la expresión analítica, para diferentes valores de la variable independiente x:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), si\ x \in I_1 \\ f_2(x), si\ x \in I_2 \\ \quad\quad\quad . \\ \quad\quad\quad . \\ \quad\quad\quad . \\ f_n(x), si\ x \in I_n \end{cases}$$

El dominio de la función a tramos está constituido por la unión de los intervalos $\bigcup_{i=1}^{n} I_i$.

Cada función f_i (x) se define como una representación analítica o algunos símbolos algebraicos, ninguna de ellas es vacía.

> Usualmente se dice que un punto x_0 es un punto de cambio de definición cuando dicho punto es el extremo final de uno de los intervalos I_n y al mismo tiempo el extremo inicial del siguiente intervalo. Justo en esos puntos se produce un cambio en la función algebraica para la función de manera que a la izquierda del punto tenemos una expresión algebraica, y a la derecha otra distinta. El estudio de los puntos de cambio de definición es esencial para analizar las propiedades de una función definida a trozos. Las funciones a trozos, como todas las funciones matemáticas, son esenciales para la modelización, y en este caso se destaca su potencial para el estudio de la continuidad de funciones. (Fanaro y Almaro, 2019, p. 30)

El punto x_0 es central en el análisis de la continuidad de una función a tramos, determina el límite de una partición arbitraria del intervalo que es parte del dominio de la función a tramos. A partir de tal punto, se obtienen las reglas que diferencian a las expresiones analíticas, lo cual hace que la imagen de un elemento del dominio dependa de la clase en la cual está contenido tal elemento y a los elementos de dicha clase.

3.7. **El límite de una función**

La evolución histórica de la definición de límite es paralela al concepto de continuidad e indica que no se desarrolló de forma independiente y autónoma, sino que hace parte de otros conceptos como variable, función, función continua, infinito, infinitesimal, número, número real, continuo numérico.

La concepción inicial de límite fue geométrica, debido a que se abordaba desde las magnitudes y no de forma numérica. Newton fundamentado en su Teoría de las fluxiones creó el método de los límites de las magnitudes casi-casi nacientes -primera relaciones- o casi-casi en desaparición -últimas relaciones- que es una de las primeras formas de límite. Con esos conceptos estableció los teoremas sobre los límites de las relaciones entre la longitud del arco de una curva continua y suave y la cuerda y la tangente.

Leibniz puso a discusión las cantidades infinitamente pequeñas, aunque no eran cero, no podían decrecer más, acercándose a cero, contribuye al nacimiento del análisis infinitesimal. Intuyó que la pendiente de la tangente a una curva depende de la razón entre las diferencias de las ordenadas y de las abscisas, cuando se hacen infinitamente pequeñas estas diferencias. Se entrevé en su propuesta la concepción geométrica de límite.

Por su parte, Euler retoma los conceptos de Newton y Leibniz los fusiona y desarrolla el Análisis, el cual se ocupa del estudio de los procesos infinitos. Plantea la regularidad de las funciones e introduce la función continua como suma, producto y composición de funciones elementales. Su Teoría de los ceros guía los pasos hacia el límite, los cuales eran usados en la diferenciación de funciones. De una u otra forma, separa la geometría del cálculo, al trabajar sobre funciones y no sobre variables.

D'Alembert desarrolla la Teoría de los límites modificando el método de las primeras y últimas razones de Newton. Merzbach & Boyer (2011) informa que D'Alembert definió el límite como: "Una cantidad es el límite una segunda cantidad (variable), si la segunda cantidad puede aproximarse a la primera hasta diferir de ella en menos que cualquier cantidad dada sin coincidir realmente con ella" (p. 47).

Esta definición, trata el límite de forma unilateral y las variables son monótonas. Cauchy aporta un nuevo concepto de límite: “Cuando los valores sucesivos que toma una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo para terminar, difiriendo de él tan poco como se desee, este último valor se llama límite de todos los demás” (Merzbach & Boyer, 2011, p. 455).

Esta definición toma el límite proveniente de una sucesión al aplicarla a los sucesivos valores que toma una variable y en otra ocasión como el límite de una función al referirse solo a la variable dependiente. El límite se ve como una aproximación tan precisa como se desee entre valores numéricos -aproximación infinita-.

> L es el límite de una función f(x) para $x = x_0$, si, dado arbitrariamente cualquier número pequeño ε puede ser encontrado un número δ tal que para todo valor de x difiriendo de x_0 por menos que δ , el valor de f(x) diferirá de L por menos el valor de ε**.** (Weierstrass, citado por Boyer, 1959, p. 287)

La definición anterior la formalizó Heine, introduciendo cuantificadores y apoyado en la definición de función de Dirichlet y Riemann como correspondencia arbitraria.

> Si dado cualquier ε existe η_0 tal que para $0< \eta < \eta_0$, la diferencia $f(x ,\pm\eta) - L$ es menor en valor absoluto que ε**,** entonces se dice que L es el límite de f(x) para $x = x_0$ (Heine-Weierstrass, en Boyer, 1992, p. 696)

En la actualidad la definición de límite es tomada de la anterior y se conceptualiza de la siguiente manera:

Sea a en un intervalo abierto I y sea f una función definida en I, salvo la única posible excepción para x= a. Sea L un número real, la expresión $\lim_{x\to a} f(x) = L$, significa que:

$\forall\varepsilon > 0$ tal que $|0 < |x\text{-}a| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon|$

Donde $|x\text{-}a| < \delta \leftrightarrow -\delta < x - a < \delta \leftrightarrow a - \delta < a + \delta$

Nota: Dado un $\varepsilon > 0$ debe existir un $\delta > 0$ el cual debe encontrarse para que el límite exista, con $I \subset D_{f.}$

Una definición *intuitiva de límite* en un punto es la siguiente: Sea f una función. Se dice que el límite de f cuando x tiende a un valor x = a es L, si para acercar el valor de f(x) a L tanto como se desee, basta con acercar adecuadamente x al valor a, y se escribe.

$\lim_{x \to a} f(x) = L.$

Es de anotar que este concepto es el más utilizado en los cursos de cálculo tanto por docentes como por estudiantes, perdiendo así la rigurosidad de cómo a debe estar dentro de un intervalo que pertenece al dominio de f(x) y que L está dentro del codominio de f(x).

3.7.1. *Límite lateral por la derecha*

Sea *f* una función definida en todos los números de algún intervalo abierto (*a*, *c*). Entonces, el límite de *f*(*x*), cuando *x* se aproxima a *a* por la derecha es L y se escribe

$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ si para cualquier $\varepsilon > 0$ independientemente de qué tan pequeño sea, existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < a\text{-}x < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \epsilon$.

3.7.2. *Límite lateral por la izquierda*

Sea *f* una función definida en todos los números de algún intervalo abierto (*a*, *c*). Entonces, el límite de *f*(*x*), cuando *x* se aproxima a *a* por la derecha es L y se escribe

$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ si para cualquier $\varepsilon > 0$ independientemente de qué tan pequeño sea, existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < a\text{-}x < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \epsilon$.

Consideremos una función f(x) tal que cuando x se acerca al valor a por la izquierda, la función se acerca al valor L1 y cuando se acerca al valor a por la derecha, la función se acerca al valor L2. Independientemente de que la función esté o no definida en a, se dice que los límites laterales convergen a un valor y se escribe:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L1 \text{ y } \lim_{x \to a^+} f(x) = L2, \text{con } L1 = L2$$

El límite general de una función, se define como:

> Supongamos que f(x) está definida cuando x está cerca del número a. (Esto significa que f está definida en algún intervalo abierto que contiene a a, excepto posiblemente en a misma.) Entonces escribimos $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y decimos que "el límite de f (x), cuando x tiende a a, es igual a L. Si podemos hacer que los v alores de f (x) estén arbitrariamente cercanos a L (tan cercanos a L como queramos), tomando valores de x suficientemente cerca de a (por ambos lados de a), pero no iguales a a. (Stewart, 2012, p. 87)

3.8. **Continuidad de una función**

La demostración del teorema fundamental del algebra, condujo a Bolzano a utilizar la continuidad de una función en su demostración, para ello se basó en la siguiente definición de límite:

> Una función f(x) es continua en un intervalo si para algún valor de x en ese intervalo la diferencia $f(x + \Delta x) - f(x)$ se convierte y permanece menor que cualquier

> cantidad para Δx suficientemente pequeña ya sea positiva o negativa. (Boyer, 1959, p. 268)

Cauchy enuncia una definición un poco más rigurosa que proviene como consecuencia del concepto de función:

> Una función f(x) es continua dentro de los límites dados si entre estos límites hay un incremento infinitamente pequeño i, si en la variable x produce siempre un incremento infinitamente pequeño f (x + i) – f (x) en la función misma. (Boyer, 1959, p. 277)

Es importante resaltar que se necesita de un intervalo, como lo explica Cauchy en su trabajo en términos de lo infinitamente pequeño: f(x) es continua dentro de un intervalo si el límite de la variable f(x) cuando x se acerca a a es f(a), para algún valor de a dentro del intervalo.

La continuidad de una función se define a partir de su dominio:

$f: D \rightarrow \mathcal{R}$ y en la actualidad se dice que una función f(x) es continua en un punto x= a ϵ D_f si dicha función está definida en dicho punto y los límites laterales son iguales a f(a), es decir, $\lim_{x \to a^-} f(x) = L1$ y $\lim_{x \to a^+} f(x) = L2$, con L1 = L2 = f(a).

Cuando los límites laterales convergen, pero son diferentes de f(a), se dice que la función es *discontinua* y que posee discontinuidad *removible.* En tal caso se puede redefinir la función en el punto x= a. Si la discontinuidad no es removible, se dice que es *esencial*.

De igual manera una función $f: D \rightarrow C$ es continua en el punto a del dominio D si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ -llamado módulo de continuidad- tal que:

$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ si $|x-a| < \delta$

Una función f: D → C es continua si lo es en todos los puntos de su dominio D.

Para el caso de las funciones elementales o a tramos, se halla la continuidad en un intervalo.

Una función f(x) es continua en un intervalo con $x \in (a , b)$ del dominio de la función si es continua en cada punto del intervalo y en los puntos extremos los límites son laterales.

De la misma forma, decimos que f(x) es continua en $x \in [a , b]$ del dominio de la función, si f(x) es continua en (a , b).

3.9. **Derivada de una función**

En el cálculo de Cauchy, los conceptos de función y límite fueron fundamentales para definir la derivada de una función y = f(x) con respecto a x , le asignó a la variable x un incremento $\Delta x = i$ para formar la razón:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i)-f(x)}{i}$$

"el límite del cociente de esta diferencia cuando Δx se aproxima a cero lo definió como la derivada f´(x) de y con respecto a x" (Merzbach & Boyer, 2011, p. 456).

La definición de derivada de Cauchy deja en claro que la derivada no existirá en un punto para el cual la función es discontinua.

En la actualidad, si (x, f(x)) es un punto cualquiera sobre la gráfica de una función y con $x \in (I \subseteq \mathcal{R})$, la derivada de la función con respecto a la variable independiente se define como:

$$f'(x) = \lim_{h \to o} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

La derivada de la función está definida en un intervalo que está en el dominio de la función en el que dicho límite converge a un valor.

Para funciones a tramos donde:

$$f(x) = \begin{cases} f1(x), & x < a \\ f2(x), & x \geq a \end{cases}$$

Suponiendo que f(x) es continua en x = a, la derivada puede definirse como:

$$f'(a^+) = \lim_{h \to 0} \frac{f2(a+h) - f2(a)}{h} \quad \text{y} \quad f'(a^-) = \lim_{h \to 0} \frac{f1(a+h) - f1(a)}{h}$$

Siempre y cuando los límites laterales converjan a un mismo valor, decimos que la función es derivable en dicho punto, y su derivada es f'(a).

3.10. **Otros tipos de funciones**

En el campo de las matemáticas existen otro tipo de funciones que no se van a estudiar en esta investigación, debido a que el objetivo es su aplicabilidad en la constitución de las funciones a tramos, pero que hacen parte de los conceptos previos de los estudiantes.

En Cálculo elemental tiene interés por considerar aquellas funciones en las que el dominio y el recorrido son subconjuntos de números reales. Estas funciones se llaman *funciones de variable real* o más brevemente *funciones reales* y se pueden representar geométricamente mediante una gráfica en el plano *x* y. Se representa el dominio X en el eje *x,* y a partir de cada punto x se obtiene el rango -ámbito- de la función.

La función identidad. Supongamos que *f(x)* = *x* para todo real *x.* Esta función con frecuencia se denomina la *función identidad.* Su dominio es el eje real, esto es, el conjunto de todos los números reales.

Para *cada* punto *(x,* y) de la gráfica es *x* = y. La gráfica es una recta que forma ángulos congruentes con los ejes coordenados El rango de *f* es el conjunto de todos los números reales.

Funciones *constantes.* Una función cuyo rango consta de un solo número se llama función constante. un ejemplo, en la que *f(x)* = a para todo *x* real. La gráfica es una recta horizontal que corta al eje y en el punto (0, a).

Función lineal: f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$f(x) = ax + b$, con $a \neq 0$, a y b constantes.

Función cuadrática: f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida así:

$f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$ y b, c constantes, y el punto (0,c) es la intersección con el eje y.

Función valor absoluto: es una función a tramos definida de la siguiente manera:

f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Existen otro tipo de funciones con aplicaciones a la ingeniería o las matemáticas, que no son tenidas en cuenta en esta investigación, su aplicación y modelación son propias en muchas ocasiones de la física.

Función signo. Es una función a tramos especial que se define como Sgn (x): $\mathbb{R} \rightarrow \{-1,0,1\}$ de acuerdo a la regla

$$\text{Sgn(x)} = \begin{cases} 1, si\ x \in \mathbb{R}^{+} \\ 0, si\ x = 0 \\ -1, si\ x \in \mathbb{R}^{-} \end{cases}$$

Función periódica: Una función definida sobre los reales f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, es una función periódica si existe al menos un $t \in \mathbb{R}^{+}$ tal que $\forall\ x \in \mathbb{R}$: f(x+t) = f(x).

Función de excitación: En el análisis de sistemas lineales, como en los sistemas vibratorios (mecánicos y eléctricos), uno de los objetivos es conocer la respuesta (o salida) del sistema provocada por una función de excitación (o entrada), de la forma $\alpha\, x'' (t) + \beta x'(y) + \gamma x(t) = f(t)$ donde f(t) es la función de excitación y x(t) es la respuesta o salida a esta excitación.

Función delta de Dirac en a: es una función a tramos que, en física puede representar la distribución de densidad de una masa unidad concentrada en un punto ***a***.

$$\delta(t-a) = \begin{cases} +\infty, & \text{si } t = a \\ 0, & \text{si } t \neq a \end{cases}$$

Como se mencionó existen otros tipos de funciones con una mejor aplicación en las matemáticas avanzadas, que por supuesto no hacen parte de esta investigación.

CAPÍTULO IV

4. **Metodología de la investigación**

Este capítulo describe la metodología y el método utilizado para el análisis de los datos, igualmente se describen los participantes, la conexión entre las dos fundamentaciones, la teoría de la Actividad y el modelo de Pirie & Kieren, los instrumentos utilizados para recolectar la información, el diseño de los instrumentos y la caracterización de cada uno de ellos, finalmente se realiza una caracterización entre el pretest y el material potencialmente significativo.

4.1. **Conexión entre marcos teóricos**

Los capítulos II y III dan cuenta de la elaboración teórica y conceptual de la investigación. En esta etapa se expusieron las Teorías del AS de Ausubel, la Teoría sociocultural de Vygotsky, la Teoría de la actividad de Leontiev y el modelo de Pirie & Kieren, de igual forma de los conceptos que facilitan una serie de variantes teóricas, que exploran las maneras de articular las dinámicas sociales e individuales en el desarrollo cognitivo, específicamente, en correspondencia a la problemática del aprendizaje.

La vida en sociedad del hombre ha llevado a que el progreso de la humanidad se determine a través de las leyes sociales. Ese desarrollo de los individuos humanos se percibe por la vía de la asimilación de la interacción social, que existe en los medios de producción, en los libros, en las herramientas.

"La influencia benéfica de las interacciones sociales para las adquisiciones cognitivas ha sido demostrada experimentalmente por las corrientes de la psicología social del desarrollo cognitivo" (Armella y Waldegg, 2002, p. 16). Desde este punto de vista, el rol que desempeñan las Teorías incluidas en el marco teórico son fundamentales para el desarrollo del conocimiento en esta investigación.

El proceso de enseñanza-aprendizaje, se considera una actividad en el sentido propuesto por Leontiev, referente a la articulación de objetos que dan sentido a las acciones de los estudiantes que genera soporte al AS. Para el docente esto significa que, su objetivo es instituir los tipos determinados de la actividad, entre ellas la actividad cognitiva, sin excluir el pensamiento, la memoria y otros procesos psicológicos.

La actividad cognitiva depende en gran medida de las condiciones sociales en las que se desarrolla el objeto de estudio al igual que de sus propiedades intrínsecas. Pero las dimensiones epistémica y social no están aisladas, los objetos de aprendizajes están históricamente, social y culturalmente determinados. Se aprende en contextos sociales en los cuales los objetos tienen funciones y significados atribuidos socialmente.

Además, como afirman Armella y Waldegg (2002) “la cognición necesita un fuerte soporte de los instrumentos de representación y mediación, como lo son el lenguaje natural y los sistemas semióticos de representación” (p. 15). Lo anterior significa debe ampliarse el concepto de cognición y no percibirla únicamente como algo que ocurre en el cerebro de los sujetos sino como algo que tiene un vínculo sociocultural.

En la interacción social se favorece la internalización de significados, de forma semejante indica Ausubel (1968): “Para todas las finalidades prácticas, la adquisición de conocimiento en la materia de enseñanza depende del aprendizaje verbal y de otras formas de aprendizaje simbólico” (p. 79).

Por otro lado, la transcendencia de la cultura en la cognición y aprendizaje se fundamenta en la interacción necesaria entre el sujeto y su entorno, es decir, su relación con una cultura de recursos tanto materiales como sociales que son mediadores de la actividad cognitiva. Como consecuencia de ello, podemos decir que, la estructura cognitiva del sujeto es esencialmente el resultado de su compromiso con la cultura.

Como se expuso en el capítulo II, el AS implica adquisición/construcción de significados. El significado lógico de los materiales potencialmente significativos, se transforma en significado psicológico para el estudiante (Ausubel, 1963). Esa transformación es análoga a la interiorización de signos, y los materiales potencialmente significativos son instrumentos y signos que median la actividad del estudiante.

4.2. **Metodología y método de la investigación**

Se realizó el análisis de datos a partir de un pretest y de material considerado potencialmente significativo para dar respuesta a las preguntas de investigación. Para ello, se utilizó el enfoque cualitativo con corte descriptivo interpretativo, con método de estudio de caso.

El pretest o prueba inicial la consideramos como una actividad que forma parte del diseño de un cuestionario de investigación, cuya finalidad es predeterminar la comprensión y significados de un objeto -la función a tramos-. El material se considera significativo en la medida que entra en interacción con la estructura cognitiva de los estudiantes. Tanto pretest como el material fueron aplicados al mismo grupo de estudiantes en el cual se llevó a cabo la investigación.

El enfoque cualitativo se justifica por cuanto incluye una variedad de concepciones, visiones, técnicas y estudios, además, se fundamenta en un proceso inductivo de exploración, descripción e interpretación de la información como lo proponen Denzin & Lincoln (1994), Creswell (1998), Hernández, Fernández & Baptista. (2014), entre otros.

Además, el enfoque muestra la forma como es posible ligar el método de estudio de caso, al captar la complejidad de la vida social, lo cual es consecuencia del análisis de la comprensión y el otorgamiento de significado a los objetos, en particular los matemáticos, a los cuales los agentes involucrados en las prácticas sociales educativas, le conceden significado, así lo afirman Yin (1984), Stake (1994), Kroll (2004) Vasilachis (2013), Atairo y Rovelli (2019) entre otros.

4.2.1. *Enfoque cualitativo*

Para alcanzar los objetivos y dar respuesta a la pregunta de investigación en relación con el enfoque investigativo, el marco teórico y conceptual, se propone precisar diferentes herramientas y técnicas que han sido el eje conductor para abordar la propuesta planteada, la elección de la metodología, la elaboración de los instrumentos de recolección y análisis de información.

Acorde con la esencia de las preguntas y de los objetivos de esta investigación, se asumió un enfoque cualitativo que, según Hernández *et al*., (2014), representa un conjunto de procesos que permiten interpretar los fenómenos a través de los significados que otorgan los agentes, -los estudiantes- a los hechos y los roles sociales.

Hernández *et al*. (2014) afirman que "El enfoque cuantitativo es secuencial y probatorio. Cada etapa precede a la siguiente y no podemos "brincar" o eludir pasos. El orden es riguroso, aunque desde luego, podemos redefinir alguna fase" (p. 4).

La investigación cualitativa es apropiada por el sentido en que se involucran las preguntas y emergen los procedimientos y la forma en que se recopila los datos en el contexto social de los participantes. Además, el enfoque permite explorar y comprender el significado que los estudiantes o grupos vinculan a un problema, es decir, por el modo en el que el investigador hace las interpretaciones del significado de los datos, favoreciendo los supuestos teóricos y epistemológicos que se van poniendo en juego en el proceso investigativo.

Por su parte, Vasilachis (2013) asevera que las metodologías cualitativas:

> Abordan los fenómenos de investigación en sus escenarios concretos de acontecimiento, de forma holística y contextual, captando la complejidad propia de la vida social y recuperando la presencia, el papel y el significado de los agentes en el desenvolvimiento de los procesos sociales. (p. 234)

En este sentido se considera que el enfoque cualitativo permite canalizar el cumplimiento de los objetivos específicos, en particular: *Establecer cómo el material potencialmente significativo en un sistema de práctica social y cultural aporta al aprendizaje significativo de los estudiantes referente a la función a tramos a partir de los subsumidores.*

Denzin & Lincoln (1994, p. 2) afirman que la investigación cualitativa es "multimetódica, naturalista e interpretativa. La investigación cualitativa abarca el uso y recolección de una variedad de materiales empíricos -estudio de caso- que describen los momentos habituales y problemáticos y los significados en la vida de los individuos."

Por su parte, Creswell (1998, p. 15) considera que "la investigación cualitativa es un proceso interpretativo de indagación basado en distintas tradiciones metodológicas como -estudio de caso- que examina un problema humano o social."

4.2.2. ***Método estudio de caso***

El estudio de caso se utiliza para contribuir a describir, interpretar y explicar cómo se desarrolla conocimiento en el grupo objeto de indagación. Permite responder la pregunta: *¿En qué medida puede desarrollarse aprendizaje significativo y la comprensión del concepto de función en particular la función a tramos y cómo influyen algunos subsumidores como dominio, rango, límite, continuidad y derivada en dicho aprendizaje desde la resolución de problemas con la implementación de un material potencialmente significativo que involucra tal concepto?* pregunta de investigación planteada después de haber realizado el planteamiento del problema y la presentación del problema en cuestión.

Stake (1999) afirma:

> […] destacamos la presencia de un intérprete en el campo para que observe el desarrollo del caso, alguien que recoja con objetividad lo que está ocurriendo, y que a la vez examine su significado y reoriente la observación para precisar o sustanciar esos significados. (p. 20)

Por lo anterior, se asume el estudio de caso como estrategia que permite realizar un análisis de la comprensión del campo funcional. El estudio de caso se elige como esa estrategia que resulta adecuada para desarrollar búsquedas que giran en torno a preguntas sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje (Stake, 1994).

Hernández *et al*. (2012) consideran al estudio de casos como "un método de investigación cualitativa, que facilita entender cómo los agentes perciben los acontecimientos" (p. 390).

Vasilachis (2013) afirma que los estudios de casos como diseño de investigación "pueden ser definidos como estrategias de investigación empírica (…) se diferencian del caso en sí mismo o del estudio del caso simplemente" (p. 222).

Estas dos últimas afirmaciones, nos permiten concluir que el estudio de caso en tanto diseño de investigación, proporciona la convergencia de varias técnicas, para lograr la comprensión del contexto y las interpretaciones del investigador.

Para Atairo y Rovelli (2019):

> En el campo educativo, los estudios de caso se diseminan en la formación y la práctica profesional como recurso de enseñanza; también ocupan un lugar

> central en la práctica de investigación desde el reposicionamiento de los abordajes cualitativos en la investigación social. Un punto nodal de la distinción entre ambos usos del estudio de casos es la relación con la base empírica: como estrategia metodológica de investigación, requiere de un trabajo de campo riguroso y a partir de estos, elaborar interpretaciones. (p. 6)

En este sentido, el estudio de caso es especialmente apropiado para analizar problemas de la práctica educativa y sociocultural, pues los estudiantes expresan en circunstancias concretas sus ideas y es posible estudiar de forma natural los sujetos en su contexto. Por otro lado, es una estrategia que permite aproximarse al fenómeno y captar significados en contextos cotidianos, es decir, en los espacios mismos donde estos se producen y toman sentido (Yin, 1984).

Yin (1984) concreta un estudio de caso como una indagación empírica que "investiga un fenómeno contemporáneo dentro de su contexto real de existencia, cuando los límites entre el fenómeno y el contexto no son claramente evidentes y en los cuales existen múltiples fuentes de evidencia que pueden usarse" (p. 23).

De acuerdo con Kroll (2004) "el estudio de casos no es una elección metodológica, de una estrategia de investigación, sino que la elección de un objeto por ser estudiado" (p. 256). Lo que hace específico es mantener la unidad del todo, no perder el carácter unitario de la unidad que está en estudio, el estudio de casos es el estudio de lo particular (Stake, 1994).

Mertens (2005) define el estudio de caso como una exploración sobre un individuo, grupo, organización, comunidad o sociedad, que es examinado y detallado como una entidad. Se establece como un método para ejercitarse respecto a una instancia compleja, basado en un entendimiento comprehensivo de esta instancia como un todo y su contexto, mediante datos e información obtenidos por descripciones y análisis.

Se entiende el estudio de caso como un método que requiere de un análisis holístico y en profundidad, generalmente el estudio tiende a focalizarse en un número acotado de hechos para abordarlos de manera minuciosa.

De acuerdo a lo anterior, el objeto matemático a estudiar y analizar es la función a tramos. Así en relación el caso de estudio seleccionado es un grupo de estudiantes de Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad de Antioquia -Medellín, Colombia-, el cual es observado como una sola unidad de análisis, estamos ante un caso con unidad holística y nos apoyamos como estrategia que permite resolver el problema planteado inicialmente, problemas de la práctica educativa, cognitiva y sociocultural, pues los estudiantes expresan en circunstancias concretas sus ideas y es posible estudiar de forma natural los sujetos en su contexto (Yin, 1984).

La mayoría de la información que proviene de este tipo de estudios es de carácter textual, recopilada de diferentes tipos de registros. En esta investigación, el análisis de los datos obtenidos y las descripciones elaboradas nos va a permitir verificar el marco teórico y la construcción de la propuesta fundamentada en el material didáctico, al mismo tiempo, dar respuesta a la pregunta de investigación a través de una relación dialéctica entre los datos recogidos y la conceptualización previa necesaria para el análisis.

4.2.3. *Corte descriptivo e interpretativo*

En los párrafos anteriores, se expuso alguno tópicos de la metodología de investigación cualitativa la cual acogemos por su corte descriptivo e interpretativo e inclusión del estudio de caso, con ella pretendemos realizar el análisis del AS en contexto de la comprensión y desarrollo de conocimiento como construcción social y natural que incluye una serie de saberes que se comparten en la práctica social los cuales caracterizan a un momento histórico y contextos culturales en los que ocurren los acontecimientos (Sampieri, Fernández y Baptista, 2006).

Entendemos el corte descriptivo e interpretativo como el proceso que vincula el método con los resultados, es decir, el uso de técnicas y procedimientos utilizados en el relevamiento de datos empíricos que, relacionan la perspectiva teórica y postura epistemológica para evaluar las afirmaciones de conocimiento aportadas por los estudiantes y a partir de estos, elaborar interpretaciones del estudio que dan cuenta de la pregunta de investigación, sus objetivos e hipótesis planteadas.

Durante el proceso descriptivo se especifican las propiedades y las características relevantes del estudio de la función a tramos, lo cual permite evaluar la información recolectada para inmediatamente describir, analizar e interpretar sistemáticamente las características del fenómeno estudiado.

En el presente estudio se describieron la comprensión y los conocimientos y el análisis del AS que han logrado los estudiantes cuando resuelven problemas relacionados con el uso de las funciones a tramos que involucran los conceptos de límites y derivadas.

4.3. **Participantes y contexto de la investigación**

Como se describió al inicio, la investigación se realizó con estudiantes de la Licenciatura de Matemáticas y Física de la Universidad de Antioquia y que adelantan el curso de Desarrollo del Pensamiento Lógico, donde se llevará a cabo la investigación, el curso es asesorado por el docente Doctor en Educación Rubén Darío Henao.

El docente seleccionó teniendo en cuenta dos aspectos: en primera instancia por la cercanía a las posiciones epistemológicas relativas al proceso de enseñanza del investigador; en segundo lugar, el docente accedió al igual que los estudiantes a que se realizara la investigación en su curso.

Es de anotar que en el aula no hay clases, solo la aplicación por parte del docente investigador de los instrumentos iniciales que son un pretest y la aplicación posterior de un material educativo considerado potencialmente significativo. La aplicación del material se realiza los días lunes en las dos primeras horas de clase -de 14 pm a 16 pm-. El curso se divide en grupos para dar solución tanto al pretest como al material educativo considerado potencialmente significativo[13].

Al siguiente lunes acude el investigador a realizar discusiones y compartir significados sobre, los conceptos matemáticos que subyacen en las actividades y problemas, al igual que ciertos conocimientos y saberes previos utilizados en la solución, lo cual es el objeto de investigación.

Esta relación entre conocimientos y la actividad de resolución de problemas matemáticos no es estática implica concebir al investigador y al material utilizado como mediadores de un proceso de aprendizaje, un recorrido en el cual las relaciones inicialmente elaboradas se validan y se transforman, por esa razón no interviene en las discusiones el docente encargado del grupo, por lo tanto, no puede considerarse como un colaborador dentro del proceso investigativo.

Es sustancial resaltar, que los estudiantes se encontraban cursando el séptimo semestre de la Licenciatura, por lo tanto, tienen formación previa en áreas de Fundamentos de Cálculo, Cálculo en una y Varias Variables. El curso en mención tiene en promedio 15 estudiantes, donde predomina el género masculino. Es de anotar de igual forma, que los estudiantes no permitieron que se realizaran grabaciones de ningún tipo, solo que se realizara la discusión sobre los análisis de los problemas planteados.

---

[13] El hecho de dividir en grupos el curso, no indica que se van a tomar varios casos, por el contrario, múltiples fuentes de evidencia se utilizan para ser analizadas como un caso, ello permite favorecer los supuestos teóricos y epistemológicos de la investigación.

El curso en el cual se llevará a cabo la investigación tiene una duración de 16 semanas - 4 meses -; con dos secciones semanales de clase de dos horas cada una. Si bien el contenido del curso es diferente a lo planteado en la investigación, el docente asesor accedió a que se llevara a cabo la implementación de la estrategia con el material educativo en el cual está presente la temática de las funciones como parte del desarrollo del pensamiento lógico de los estudiantes.

Además, debe destacarse que la investigación se llevará a cabo en la Universidad de Antioquia, debido a que el investigador está inmerso en el escenario educativo universitario y, en particular es docente de cátedra de la Universidad y se ha desempeñado en cursos de Fundamentos de Cálculo, Álgebra, Geometría y Lógica Matemática, con una experiencia de más de doce años, posibilitando el conocimiento acerca de los estudiantes en el sentido de su nivel académico, el contexto social educativo y la forma como se desarrolla el currículo.

Los registros de información o datos son recolectados, de las soluciones dadas al pretest durante las sesiones del curso los cuales han sido procesados o analizados. Parten desde la elección de los conceptos elegidos en esta investigación, y las definiciones teóricas y operacionales.

El material es considerado potencialmente significativo inicialmente, debido a que cumple con las condiciones dadas en la Teoría del AS. Es a su vez, elaborado por el investigador con revisiones y aportes de la asesora de la tesis.

En el material la atribución de significados se viabiliza debido a que éste no sólo es el producto final, sino también hace parte del proceso que conduce al AS que se caracteriza y define por la interacción durante la práctica social. El material propone e incita a los estudiantes a auxiliarse de otros materiales -instrumentos- como libros de texto, aplicaciones como Geogebra, entre otras.

Además, desde el enfoque ausubeliano, el material presenta una organización jerárquica de contenido de forma que se relacionan a la estructura cognitiva que deriva en dos principios básicos que justifican la consecución de un AS: la diferenciación progresiva en la adquisición de nuevos conocimientos que genera *aprendizaje subordinado*, el cual va de lo más general a lo específico o particular y la reconciliación integradora que se va de lo específico a lo general logrando así el *aprendizaje supraordinado*.

Como consecuencia, se obtiene información de manera clara y precisa lo cual permite llevar a cabo esta investigación de manera natural y sin sometimiento a una propuesta de intervención de aula.

4.4. **Recolección de datos: instrumentos utilizados**

Las investigaciones requieren de técnicas para recoger los datos, éstas son las formas y modalidades en las que se puede concretar cada una de las etapas u operaciones (Colás y Buendía, 1992). Las formas se concretan en instrumentos que son herramientas a dichas técnicas. Para esta investigación, se ha utilizado un cuestionario -que llamaremos pretest- y otro el material potencialmente significativo.

Se analizaron los datos a la luz de la aplicación de los instrumentos que informan sobre los fenómenos identificados en la investigación referente a la problemática sobre la función a tramos, y que fueron examinados desde los elementos de los marcos teórico y conceptual, análisis que se fue reformando y depurando a lo largo de la investigación, siendo su declaración presente uno de los fundamentales resultados de la misma.

El instrumento de recolección de datos utilizado -pretest- contiene atributos tanto de un *cuestionario como de una prueba*. Consiste en un conjunto de preguntas respecto a una o más variables a medir. Las pruebas -instrumentos- por su parte, permiten evidenciar los conocimientos, habilidades y destrezas a nivel de logros.

El pretest permite estimar una variable, tal como es definida por la misma prueba o instrumento. En el pretest que se utiliza en esta investigación los sujetos han de poner en juego sus conocimientos matemáticos previos para resolver problemas y desarrollar nuevos conocimientos, además, de compartir significados consideramos que comparte aspecto de una prueba.

Se escogen estos instrumentos por su pertinencia con la identificación de los participantes que aportan gran cantidad de información a la investigación, de acuerdo con los requerimientos teóricos de esta última. Además, por su adecuación debido que, al contar con datos suficientes, permite desarrollar una amplia descripción del fenómeno a investigar.

Estos instrumentos permitieron construir escenarios de análisis sobre la comprensión y dificultades que poseen los estudiantes sobre concepto de función, y la delimitación de los elementos de orden cognitivo, bajo los cuales se analizan el corpus de datos.

La recolección de datos es un proceso selectivo, por ello, se debe delimitar la investigación (Miles y Huberman, 1994), en nuestro caso, las funciones matemáticas se limitarán a las funciones por tramos, como consecuencia, el marco conceptual y las preguntas de investigación delimitan el exceso de información y permiten realizar un análisis más exhaustivo.

4.5. **Categorización de la información**

El análisis cualitativo de la información se afrontó de manera sistemática, orientada a instituir desarrollo de conocimiento, estableciéndose esta estrategia en una base para vincular de modo coherente aspectos del marco teórico con la conceptualización de los estudiantes.

Por análisis cualitativos entendemos el proceso mediante el cual se organiza y transforma la información acumulada por el investigador para establecer relaciones, interpretar, describir y extraer significados y conclusiones.

Los instrumentos aplicados no se limitaron simplemente a la recolección de datos o actuaron de forma aislada, al contrario, se formalizaron como un conjunto sistematizado y articulado que permitieron establecer con la mayor coherencia posible los avances, aciertos y desaciertos en relación con el marco conceptual de la investigación y su norte para cumplir con los propósitos de la misma manera que, dar respuesta a las preguntas de investigación y cumplimiento de los objetivos e hipótesis planteadas.

Durante el proceso de análisis de los datos cualitativos, nos basamos en una lógica dialéctica que previó una relación entre lo teórico y lo empírico, efectuamos categorizaciones y contextualizaciones preliminares partiendo de los datos, luego se exploró el marco conceptual y nuevamente, regresamos a los datos para refinar el análisis, y así se realizó el ciclo de investigación.

Para organizar y preparar el material para su posterior análisis de la información, se realizó una *condensación de datos,* procedimiento que consiste en buscar descripciones coherentes y explicaciones afines en el material para establecer categorías analíticas y definir códigos, esto acorde con (Miles y Huberman, 2014).

Este proceso, condujo a formular las categorías y a generar un marco de categorización, ello nos permitió utilizar estrategias cualitativas basadas en la categorización y contextualización, que examinan relaciones de similitud y contigüidad, respectivamente (Maxwell y Miller, 2008).

La categorización, la entendemos como identificación, descripción, interpretación y comprensión de los conceptos y significados que emergen del análisis de los datos de la investigación. Las estrategias de categorización permitieron realizar una codificación y análisis temático, lo cual consiente en llevar a cabo el desglose basado en mapas conceptuales (Miles y Huberman, 1994) ello generó conexiones con los diferentes componentes del marco conceptual.

La categorización es el proceso mediante el cual el contenido de la información cualitativa, transcrita en el texto de campo, se descompone o divide en unidades temáticas que expresan una idea relevante del objeto de estudio, relacionado con la codificación. La unidad del discurso se fragmenta en componentes menores que expresan unidades de un mismo tópico conceptual.

Al respecto Miles, Huberman y Saldaña (2014) informan:

> La codificación también es una heurística, un método de descubrimiento. Usted determina el código para un fragmento de datos por la lectura cuidadosa y reflexión sobre sobre su contenido o significado central. La codificación se refiere a cómo se tratan los datos que se están analizando, involucra identificar y registrar uno o más partes del texto u otros elementos de los datos que, en cierto sentido explican la teoría o idea descriptiva. Esto le da intimidad, interpretación y familiaridad con todos los datos del corpus. (p. 80)

Para la codificación, se identificaron los fragmentos y luego se vincularon con un nombre para esa idea, en nuestro caso es un texto o uso de viñetas que reemplaza al código numérico, por lo tanto, todo el texto se resume en la misma codificación.

En las estrategias de contextualización realizamos los análisis de los problemas y actividades propuestos en el material potencialmente significativo, realizados en forma grupal que, finalmente se convirtieron en el foco epistémico, que situó en relación entre la elaboración de significado, sentido y la comprensión de los conceptos puestos en juego cuando los estudiantes resolvieron los problemas, es allí donde se ubicó la potencialidad epistémica, lo que nos permitió analizar la producción o desarrollo de conocimiento.

Las estrategias descritas permitieron que, no nos centráramos solamente en relaciones de semejanza, que pueden ser utilizadas para clasificar la información dentro de ciertas categorías independientemente del contexto, sino que también indagaron relaciones que conectaron los símbolos y las diferentes representaciones utilizadas por los estudiantes referente al concepto de función dentro de un contexto, es decir, dentro de una situación, un problema o una actividad. Como consecuencia se tiene, la identificación de conexiones entre categorías, lo cual puede se percibió como un paso de contextualización en el análisis (Dey, 1993), esta estrategia nos permitió reproducir conocimiento y consolidar/validar las Teorías inmersas en la investigación.

Una relación con la postura anterior sobre nivel epistémico, para esta investigación nos referimos a los diferentes usos del lenguaje simbólico, basados en los diferentes registros de representación los cuales tratan con variados grados de actividad cognitiva.

Este nivel se sitúa en juego cuando, se analizó conjuntamente, por un lado, la producción de los estudiantes y por otro la posición del investigador, quien finalmente logra analizar, interpretar y, describir el pensamiento de los estudiantes. Lo anterior permitió evidenciar la forma como los estudiantes desarrollaron conocimiento y cómo lo transformaron.

Así, los niveles epistémicos se ven reflejados desde la forma de comprender los resultados basados en los análisis de los datos que emergen de las prácticas sociales, lo cual es fundamental para dar evidencia de la emergencia del AS.

La parte fundamental estuvo centrada en los subsumidores que fueron la clave para la comprensión de los conceptos desde donde se permitió otorgar significado al objeto matemático en cuestión, lo cual es importante para el desarrollo de nuevos conocimientos Ausubel (2003).

Confirmamos lo anterior a través del armado de viñetas que, tal como sugieren Miles y Huberman (1994), se presenta una reconstrucción sintética de eventos representativos, en nuestro caso, la resolución de los problemas, además, de asociar de manera coherente las correspondientes representaciones que fungieron de tal resolución.

Así mismo, rotulamos algunas nociones básicas y definiciones, emergentes de la producción y desarrollo de conocimiento, recolección sistemática del manejo de los datos, para posteriormente dirigirnos a lo concerniente al análisis de los mismos.

Definimos el manejo de datos como las operaciones necesarias para un proceso sistemático y coherente de recolección, sistematización y recuperación de datos. Estas acciones tuvieron el propósito de asegurar la accesibilidad a datos de alta calidad, documentación de los tipos de análisis y conservación de los datos.

El análisis de datos abarcó tres subprocesos relacionados, propuestos por Miles y Huberman (1984, 1994): reducción -síntesis/procesamiento- de los datos, presentación y conclusiones/verificación. Con la reducción de los datos, el universo potencial de éstos quedó limitado de manera anticipada cuando elegimos los marcos teórico y conceptual, las preguntas de investigación, y los instrumentos.

La presentación de datos definida como un ensamblaje comprimido y organizado de información permitió exponer conclusiones y/o tomar decisiones. Habitualmente el investigador necesitó ver un conjunto de datos reducido como base para pensar sobre sus significados.

Las presentaciones más focalizadas pueden incluir sumarios estructurados, viñetas (Erickson, 1986), conexiones en red u otros diagramas y matrices con textos, en vez de números en celdas (Miles y Huberman, 1984, 1994).

4.5.1. *Categorización anclaje conceptos y AS*

De acuerdo a lo expuesto en los párrafos anteriores por Miles y Huberman, Erickson, Huberman & Saldaña, Maxwell y Miller, el proceso de codificación abarcó tres tipos: Anclaje de subsumidores, comparación pretest con el material educativo potencialmente significativo y desarrollo de conocimientos matemáticos del concepto de función a tramos, los cuales permitieron identificar la conceptualización, la comprensión y el AS del objeto.

Se categorizaron como una unidad las respuestas dadas por los grupos de estudiantes -estudio de un caso-, se definieron tres categorías de respuestas que se designaron con las letras A y B. A cada una de las categorías se le asignó un nombre que corresponde a la evaluación que identifica a dicha categoría: A (Bien), B (Regular). A continuación, se presentan las categorías de análisis para el anclaje de subsumidores.

Tabla 1

Anclaje de subsumidores y AS

Categorías según tipo representación	Conocimientos Previos	Anclaje del concepto
A	Bien	Total
B	Regular	Parcial

4.5.2. *Categorización: desarrollo de conocimientos*

En la **tabla 2** se muestra la distribución de las categorías y subcategorías de los conocimientos matemáticos que emergen o desarrollan los estudiantes cuando solucionan un problema referente al concepto de función.

A cada una de las categorías se le asignó un nombre que corresponde a la evaluación que identifica a dicha categoría y la cual se indica a continuación: A (AS), B (AS parcial).

La categorización que se ha realizado para las respuestas de los estudiantes a la evaluación de conocimientos de "concepto de función", se asoció en dos grupos que corresponde a, uno que considera la existencia de AS y que encierra las categorías A y B, y otro que considera ausencia AS el cual corresponde a la categoría C.

Dentro del grupo en el cual se considera que ha ocurrido AS podemos distinguir tres sub-grupos: el primero en el cual se ha logrado AS que corresponde a *la categoría* A y se considera que el nuevo conocimiento interacciona con el concepto subsumidor sirviendo de anclaje del concepto de función, a partir de los subsumidores dominio y codominio o rango.

El segundo en el cual se considera que el aprendizaje es parcialmente significativo y corresponde *a la categoría* B y se considera se alcanzó anclaje parcial del concepto; por último, la categoría C donde se considera no hay subsumidores en la estructura cognitiva que sirvan de anclaje para el concepto.

En la categoría A se considera AS cuando se conoce el concepto, o definición y se es capaz de aplicarlo o relacionarlo con una situación diferente a aquella en la cual fue aprendido, actúan los diferentes tipos de AS: representacional -R-, de conceptos -C- o proposicional -P- de la Teoría de Ausubel. Se atribuye significado al objeto basado en la emergencia del desarrollo de conocimiento matemático como resultado de la interacción de los subsumidores.

Se considera aprendizaje significativo parcial cuando se conoce un concepto, o definición, pero no se aplica ni se relaciona correctamente con otras situaciones no consideradas en el aprendizaje. Interviene en forma parcial los tipos de AS, y se ubica en categoría B, en este grupo se tiene en cuenta uno de los tipos de AS.

Dentro del grupo donde se considera que no hubo AS el estudiante en sus respuestas mezcla afirmaciones conceptualmente correctas con otras incorrectas y contradictorias, dando respuestas aleatorias a la pregunta planteada, este subgrupo corresponde a la categoría C. El aprendizaje en este grupo es el mecánico -M-.

Tabla 2

Desarrollo de conocimiento matemático

Categorías	Subsumidores	Desarrollo conocimiento.	AS
A	Anclados	Producción	Si
B	Anclados parcialmente	Se produce parcialmente	Parcial

4.5.3. *Caracterización de la comparación entre pretest y material potencialmente significativo*

Una de las características fundamentales que se consideró en la metodología de investigación empleada es la identificación entre los elementos del análisis designado como pretest y los obtenidos en el análisis del material potencialmente significativo.

Estas caracterizaciones corresponden al análisis de los documentos producidos a partir del desarrollo del material potencialmente significativo y los conocimientos previos de los estudiantes, del trabajo, en el cual estos consignaron el desarrollo de cada procedimiento de resolución o de enunciados, en su trabajo individual o reformulados en grupos pequeños. En la tabla siguiente se muestran los descriptores para este tipo de análisis.

Tabla 3

Comparación pretest y material potencialmente significativo

Código	Descripción
CP	Uso de conocimientos previos.
EA	Producción de expresiones algebraicas, en el análisis de la actividad RP.
ES	Identificación de expresiones simbólicas.
F	Conjunto ordenado para reconocimiento de funciones desde la Teoría de conjuntos.
G	Producción de representaciones gráficas.
L	Uso de lenguaje verbal para describir objetos, precisar conceptos o definiciones.
OP	Identificación y caracterización de operaciones en el tratamiento del problema.
T	Realización de tablas.
RG	Identificación de uso de varios registros semióticos involucrados en el problema para representar el mismo objeto matemático.
Grupos (G)	A: Aplicación del material potencialmente significativo. B: Aplicación del pretest.

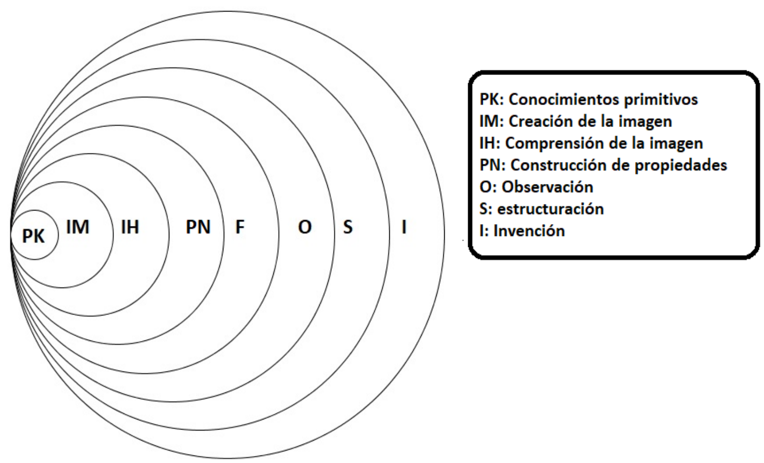
4.5.4. *Caracterización* y *análisis de la comprensión de los conceptos*

El análisis de de los subsumidores que intervienen en el concepto de función se llevó a cabo teniendo en cuenta la propuesta de Pirie & Kieren (1994), para ello se diseñó la **gráfica 5**, la cual incluye aspectos de una comprensión en forma dinámica y no lineal, como un proceso no estático o exclusivamente mental, también se caracteriza por la interacción social.

Además, hacen parte de los análisis sobre los conceptos y definiciones dados por (Krings, Baumgartner & Wild, 1978; Kaput, 1989; Sierpinska, 1992; Hitt ,1996; Batanero, 2005; Pecharromán, 2013)

Gráfica 5

Niveles de comprensión Pirie & Kieren (1994)



Adaptado de Pirie & Kieren (1989, p.8)

El trabajo se encuadró igualmente en las investigaciones que consideran que comprender un concepto implica reconocerlo en diferentes representaciones, manipularlo en una representación dada y trasladarlo de una representación a otra.

4.5.5. *Diseño de material potencialmente significativo*

Para realizar el diseño del material se recogió inicialmente la información de los datos obtenidos del pretest con el objetivo de tener un acercamiento al anclaje de algunos conceptos propios de la estructura del concepto de función, del concepto de función a trozos, que les sirvió a los estudiantes como anclaje de los conceptos de límite, continuidad y derivada.

La fiabilidad del material se basa en la validez de la descripción respecto a la regularidad y exactitud con que los hechos son recogidos sin ser encubiertos por el investigador. Además, permiten proporcionar una descripción válida de objetos acorde al tipo de investigación, eventos y conductas, que permite la comprensión interpretativa, la cual conduce a dilucidar los significados que tienen para los estudiantes esos objetos matemáticos que intervienen en el problema.

De igual forma, la validez se evidencia en la forma en que relacionan la teoría con las construcciones teóricas que el investigador aporta o desarrolla durante el estudio. Finalmente, el reconocer y considerar el marco conceptual a través del cual se atribuye significado a los hechos observados.

El cuestionario y la prueba consta de dos partes, la primera contiene ocho ítems que muestran diferentes preguntas abiertas sobre conceptos fundamentales del concepto de función. La segunda parte consta de tres preguntas cada una de ellas con varios incisos referentes al concepto de función y de función a tramos.

Partiendo de los resultados obtenidos en el pretest, se comprobó que, al resolver problemas que involucran el concepto de función, los estudiantes presentaron dificultades de carácter conceptual acompañadas de dificultades de carácter procedimental y de compresión del concepto y los elementos que éste involucra.

Lo anterior, nos llevó al diseño de un instrumento llamado material potencialmente significativo que muestra diversos registros de representación referentes al concepto de función. Se trata del proceso mediante el cual se realizó el trabajo de la investigación, a partir de la aplicación de los instrumentos de base -pretest-, y se plantearon problemas referentes al concepto de función, los cuales se analizaron en el capítulo VI.

4.5.6. *Implementación* y *análisis de material potencialmente significativo*

Para analizar los datos proporcionados por los estudiantes se consideraron las diferentes respuestas como un dato, donde cada una de ellas es estimada como una unidad de análisis. Cada pregunta, ítem o inciso fue objeto de codificación acorde al proceso mediante el cual se realizó una interpretación del concepto desde la Teoría o del conocimiento emergente desarrollado por los estudiantes.

El propósito fundamental de análisis de datos consistió en dar sentido a la información obtenida, tratándola y organizándola y codificándola para poder explicar, predecir, describir e interpretarla a la luz del soporte teórico, del fenómeno objeto de estudio y dar respuesta al problema planteado. La implementación y análisis se realizó en el capítulo VII.

CAPÍTULO V

5. **Estudio previo de la investigación**

En este capítulo se exponen los enunciados, análisis y resultados del pretest aplicado a los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas y Física de la U de A, para tener un acercamiento al anclaje de algunos conceptos propios de la estructura del concepto de función y en particular la función a tramos, sus ideas, interpretaciones e intenciones respecto de su AS y desarrollo social del conocimiento matemático.

Buscamos conocer la relación del AS con el saber y con el conocimiento matemático desarrollado por los estudiantes. Nos preguntamos cómo los sujetos comprenden y otorgan significado a los objetos matemáticos, especialmente los referidos al concepto de función a tramos.

Se otorga respuesta al primer objetivo de la investigación: *Analizar los subsumidores para el aprendizaje del concepto de función y de la función a tramos y los conocimientos desarrollados que emergen de un sistema de práctica social y cultural como consecuencia de la naturaleza de la actividad resolución de problemas.*

Dicho logro se indagó a través de la identificación y estudio de actos de comprensiones y significados relevantes en la apropiación social del concepto de función propuesto por Vinner (1983) sobre la caracterización y estructura de la definición de función.

Este estudio consideró como referencia el enfoque cognitivo y socio cultural por cuanto el desarrollo cognitivo no puede entenderse sin referencia al contexto social, histórico y cultural, nos basamos en el AS y su incidencia en la comprensión de conceptos y desarrollo del conocimiento matemático, en particular de la función a tramos.

Estos enfoques han sido desarrollados por Ausubel (1968,1978, 1980) y Vygotsky (1987, 1988) y se apoyan en diferentes tipos de aprendizaje como el representacional, que involucra la atribución de significados a determinados símbolos, el aprendizaje de conceptos que representan abstracciones de los atributos criteriales de regularidades en objetos. Por su parte el enfoque socio cultural se apoya en la conversión de relaciones sociales en procesos mentales superiores determinada por instrumentos y signos, teniendo en cuenta que los signos se construyen socialmente, dando así origen a la construcción social del significado de los signos.

En cada una de las ilustraciones tenemos, por un lado, el conocimiento matemático que se comparte socialmente y que está sujeto a transformaciones lo cual nos permitió situarlo como objeto de aprendizaje, y, por el otro, el conocimiento subjetivo que los estudiantes relacionan con su estructura cognitiva.

En ese sentido, como lo indica Sfard (1991) de un objeto matemático tenemos una idea presente en nuestra mente, que depende de las experiencias que haya tenido el sujeto con todo aquello que se relaciona con el concepto. Se supone entonces, que esa idea está sujeta a transformaciones que dependen de las interacciones entre el estudiante y el objeto matemático.

5.1. **Pretest**

El pretest se consideró como una actividad que forma parte del diseño de investigación, cuya finalidad fue predeterminar la comprensión y significados del objeto función y función a tramos y analizar determinados conceptos - dominio, rango, límite, continuidad, derivada- previos contenidos en la estructura cognitiva de los estudiantes.

Se presenta el pretest como una especie de cuestionario que contiene problemas a realizar por los estudiantes dividido en dos partes, la primera contiene preguntas referentes al concepto de función y contenido subyacente a ella. La segunda parte presenta actividad sobre función a tramos y un problema.

5.1.1. *Enunciados del Pretest*

Los siguientes problemas están encaminados para que los estudiantes, demuestren tanto el significado y la comprensión del concepto de función y en particular de la función a trozos que poseen en su estructura cognitiva.

Objetivo: Realizar un análisis sobre el significado dado al concepto de función a trozos, que les sirve a los estudiantes como anclaje de los conceptos de límite, continuidad, derivada.

Parte I.

a. En sus propias palabras defina qué entiende por variable dependiente e independiente.
b. Qué entiende por función. Dé un ejemplo de aplicación del significado de función en la vida cotidiana y otro de función matemática como tal.
c. Cuál es su concepto sobre el dominio de una función.
d. Qué entiende por codominio de una función.
e. Qué entiende por imagen de una función.
f. ¿Podría decirse que el conjunto de imágenes de la función es el mismo codominio? Justifique su respuesta.
g. En sus propias palabras defina que es una función a trozos.
h. ¿Cómo trataría el significado de función a trozos? Dónde y cómo lo aplicaría.

Parte II.

1. Dada la función $f(x) = \frac{x}{3}$
   a. Si el dominio de f(x) son los números naturales, cuál es el codominio de f(x).
   b. Si el dominio de f(x) son los números enteros, cuál es el codominio de f(x).

2. Dada la función f: R → R si, $f(x) = \begin{cases} x-2, si & x<0 \\ x+1, si & x \geq 0 \end{cases}$
    a. Cuál es el codominio de f(x).
    b. Cuál es el valor de la función cuando: x= -1, x=1, x= 1.001, x= -0.009.
    c. Podría decirse que ¿f(x) es continua? En caso de no serlo, redefina f(x) para que sea continua.
    d. Grafique la función.
    e. ¿Puede decirse que la función es derivable? Explique su respuesta.
3. En el siguiente problema, se presenta con base en la información de la secretaría de movilidad de Medellín, 2019.

    Mediante Resolución número 201850080832 del 8 de noviembre de 2018 la Secretaría de Movilidad fijó las tarifas para el transporte público terrestre automotor individual de pasajeros en vehículos taxi básico, las cuales serán las siguientes:

    Arranque o banderazo: Pesos ($3.500)

    Valor caída por cada 78 metros: Pesos ($100)

    Carrera mínima: Pesos ($5.500)

    Valor de espera (60 segundos): Pesos ($200)

    Valor hora contratada: Pesos ($25.200)

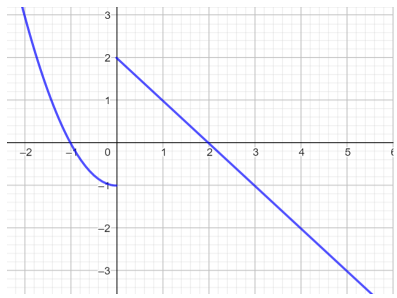
    Tomado de: https://www.medellin.gov.co/movilidad/transito-transporte/taxis

    Los taxis deben portar elementos como el taxímetro, la tabla de equivalencias de unidades y valores, así como la tarjeta de control en un sitio visible para el usuario. El banderazo corresponde a 35 unidades.

    a) Represente la función algebraica que permite realizar el cobro en unidades.
    b) Dibuje la función.
    c) Si el taxímetro le indica 50 unidades, ¿cuánto debe pagar el usuario?

d) ¿Cómo se sabe, el mínimo de unidades es 35, si el taxímetro marca 70 unidades, indica que debe pagar el doble de dinero?

4. Dada la gráfica de la función



a. ¿Cuál es el dominio y el codominio?
b. Cuanto cambia f(x) si x cambia de -1 a 2.
c. ¿La función es continua? Explique.
d. Escribe la función en forma analítica -expresión algebraica-.
e. Halle el área encerrada entre el intervalo [-1,1] y el eje x.

5.2. **Resultados y análisis del pretest**

El objetivo del pretest es: Realizar un análisis sobre el significado dado al concepto de función a trozos, que les sirve a los estudiantes como anclaje de los conceptos de límite, continuidad, derivada y función integral.

En las preguntas del pretest se pueden identificar diferentes tipos de representación: Lenguaje natural, métrica, gráficas, simbólica, con el objetivo de no circunscribir a los estudiantes en un mismo tipo representacional funcional, lo cual permite al investigador estudiar el mismo objeto matemático en sus diferentes representaciones.

Los estudiantes se dividieron en grupos; las preguntas son conceptuales, se refieren a describir el dominio, rango, codominio e imagen de una función, aunque no son las más habituales en los cursos, responden al propósito de la investigación. Para el AS este proceso es coyuntural debido a la comprensión y atribución de significados que los estudiantes hacen a partir de sus conocimientos previos establecidos en su estructura cognitiva, un proceso natural que nos indicará retención -presencia- u olvido -ausencia- de dichos subsumidores.

En el análisis emergieron los siguientes tipos de representación: verbal, algebraico -simbólico-, gráfico, lenguaje natural y otros. Se confirma su presencia en las respuestas de los estudiantes respecto a esos conocimientos previos asociados al concepto de función.

Un pretest de tres preguntas dividido en dos partes, la primera parte comprende los ítems desde a hasta la h, dirigida a evidenciar el aprendizaje significativo del concepto de función y el anclaje de los conceptos de variable dependiente e independiente, dominio y codominio, rango e imagen, función y función a tramos. La segunda parte está dirigida a reconocer el dominio y el rango tanto en funciones elementales como en funciones a tramos y plantear y resolver un problema de aplicación de función a tramos.

La primera parte contiene preguntas abiertas, formuladas en el registro del lenguaje natural, lo que permite evidenciar el AS que de una u otra forma han logrado interiorizar los estudiantes y cómo sus conocimientos matemáticos han sido anclados o sirven de subsumidores como factor previo influyente en el aprendizaje que se han quedado como saberes especializados o pasan a ser parte de su saber cultural.

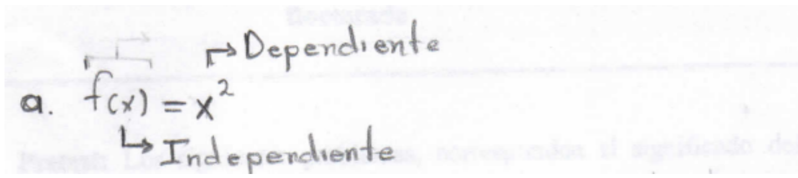
5.2.1. *Parte I: Pregunta 1*

a. Qué entiende por variable

Una clase de respuesta, los estudiantes recurren al uso de símbolos.

Ilustración 1

Uso de símbolos para explicar variable dependiente e independiente

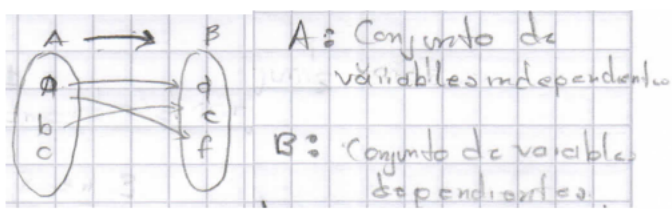


Los estudiantes se apoyan en un registro algebraico para describir los tipos de variable, en esta modalidad puede intuirse no hay una explicación o justificación que implícitamente traslade al concepto pedido.

Otro grupo de estudiantes apelan a los gráficos.

Ilustración ***2***

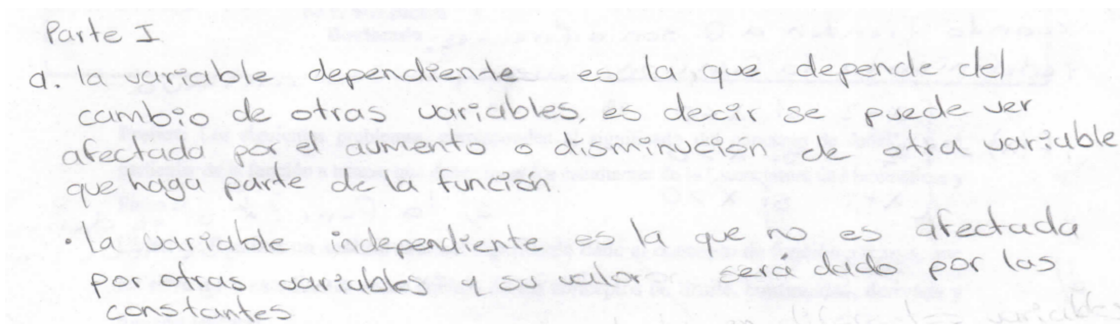
Explicación variable dependiente e independiente



Como puede observarse, los estudiantes se basan en elementos de la Teoría de conjuntos, donde las referencias gráficas son implícitas, son visualizaciones intuitivas que apoyan al lenguaje natural. Sin embargo, puede representar una correspondencia dada en una relación y no en una función debido a que no es una correspondencia funcional.

Ilustración 3

Lenguaje natural variable dependiente e independiente



Parte I

a. la variable dependiente es la que depende del cambio de otras variables, es decir se puede ver afectado por el aumento o disminución de otra variable que haga parte de la función.

• la variable independiente es la que no es afectada por otras variables y su valor será dado por las constantes

Otra clase de respuesta está basada en el lenguaje natural: Las respuestas en lenguaje natural, contiene una explicación o justificación y se encuentran diferentes modalidades del concepto de variable dependiente e independiente.

En la tabla siguiente se muestra las diferencias dada al concepto de variable dependiente e independiente por los grupos de estudiantes.

Tabla 4

Tipos de representación emergentes a partir del concepto variable dependiente e independiente

Categorías	**Aprendizaje significativo (subsumidor)**
Simbólico	Se trata de utilizar el símbolo f(x) = y, pero con un ejemplo en el cual se indica a x para ambos conceptos.
Gráfico	Puede representar una correspondencia dada entre dos conjuntos. Como elementos del conjunto de partida y del conjunto de llegada. Se aleja de la variación al no corresponder a representaciones de funciones.
Lenguaje natural	Intentan dar explicaciones para la distinción de los conceptos, usando la Teoría sin rigor matemático.

Algebraico	Sin significado ni correlación con los demás tipos. Descoordinado de los demás registros.
Variación de magnitud	Ningún grupo.

Los estudiantes expresan sus conocimientos y por su forma de actuar en cada situación de acuerdo al enunciado y explicaciones que son capaces de expresar, nos permite establecer que existen algunas dificultades en el anclaje de estos dos conceptos claves en la estructura del concepto de función.

El tipo de respuesta en lenguaje natural, los estudiantes intentan dar explicaciones basados en la Teoría, tal vez referidos con alguna visualización, es el caso del grupo que indica “determinan los diferentes rangos”, la dificultad en la comprensión del concepto está básicamente en la estructura del concepto, lo cual se percibe en la falta de coordinación entre lo gráfico, lo simbólico y el lenguaje natural.

Respecto a la variable independiente indican que “no es afectada por otras variables” pero son controladas o manipuladas para estudiar efectos en otra variable. Además, indican que puede tomar cualquier valor numérico y determina los diferentes rangos.

Evidenciamos que el concepto de variable dependiente e independiente son fundamentales en la construcción del concepto de función, sin embargo, los estudiantes poseen algunas dificultades para desarrollar una comprensión satisfactoria o anclaje del concepto de función, lo cual parece centrarse en su complejidad y generalidad, ya que hay varias facetas con multiplicidad de representaciones.

Con base en lo anterior se categorizaron como una unidad las respuestas dadas por los estudiantes -estudio de caso-, se definieron tres categorías de respuestas que se designaron con las letras A, B y C. A cada una de las categorías se le asignó un nombre que corresponde a la evaluación que identifica a dicha categoría y la cual se indica a continuación: A (Bien), B (Regular), C (Mal).

La categorización que se ha realizado para las respuestas de los estudiantes a la evaluación de conocimientos de “variable dependiente e independiente”, se puede reunir en dos grupos que corresponde a: uno que considera que ha habido AS y que incluye las categorías A y B, y otro que considera que no ha habido AS y el cual corresponde a la categoría C.

Dentro del grupo en el cual se considera que ha habido AS podemos distinguir tres sub-grupos: uno en el cual se ha logrado AS que corresponde a la categoría A y se considera que el nuevo conocimiento interacciona con el concepto subsumidor sirviendo de anclaje del concepto variable dependiente e independiente.

Otro en el cual el aprendizaje es parcialmente significativo y que corresponde a la categoría B y se considera hubo anclaje parcial del concepto, y el otro que corresponde a la categoría C donde se considera no hay subsumidores en la estructura cognitiva que sirvan de anclaje para el concepto.

Se considera AS cuando se conoce un concepto, o definición y se es capaz de aplicarlo o relacionarlo con a una situación diferente a aquella en la cual fue aprendido. Se ubica en categoría A.

Se considera aprendizaje parcialmente significativo cuando se conoce un concepto, o definición, pero no se aplica ni se relaciona correctamente con otras situaciones no consideradas en el aprendizaje. Corresponde a la categoría B.

Dentro del grupo donde se considera que no hubo aprendizaje en el cual las respuestas mezclan afirmaciones conceptualmente correctas con otras incorrectas y contradictorias, dando respuestas aleatorias a la pregunta planteadas, este subgrupo corresponde a la categoría C.

A continuación, se presentan las categorías de las respuestas, los conocimientos que corresponden a cada categoría y el tipo de aprendizaje que representan, según lo analizado anteriormente.

Tabla 5

Características para AS concepto variable

Categorías según tipo representación	**Conocimientos**	**Anclaje del concepto variable**	**AS**
A	Conoce el concepto, y lo aplica correctamente a otras situaciones y contextos o relacionarlo con a una situación diferente a aquella en la cual fue aprendido que sirven de subsumidores para nuevos conocimientos.		
B	Conoce el concepto y no lo aplica a otras situaciones y contextos que sirven de subsumidores para nuevos conocimientos.	El concepto de variable no permite anclar el concepto de función.	El concepto de variable es subsumidor no permite formación de nuevos conceptos.
C	Conoce el concepto, de forma incompleta o parcialmente o totalmente incorrecta.		

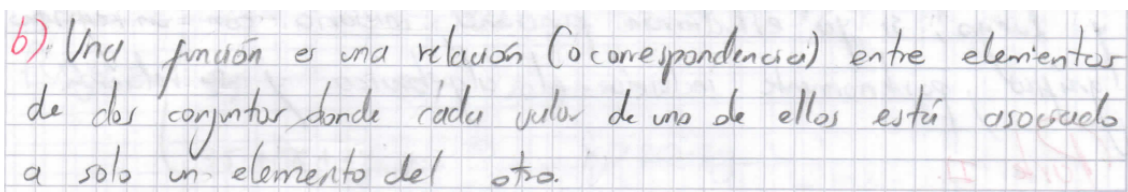
El siguiente ítem de la pregunta 1 es quizás el concepto más fundamental de las matemáticas, pero también es uno para el cual los estudiantes tienen problemas en su comprensión, quizás debido a las diferentes definiciones y diferentes niveles de abstracción.

b. Qué entiende por función.

Caracterizamos la definición de función en seis categorías: correspondencia, relación de dependencia, como una regla, como operación, como fórmula y como representación, un refinamiento de la categorización realizada por Vinner (1983).
Como correspondencia: dos grupos.

Ilustración 4

Concepto de función dado por un grupo de estudiantes


b) Una función es una relación (o correspondencia) entre elementos de dos conjuntos donde cada valor de uno de ellos está asociado a solo un elemento del otro.

Como relación de dependencia: tres grupos de estudiantes.

Ilustración 5

Función como relación de dependencia

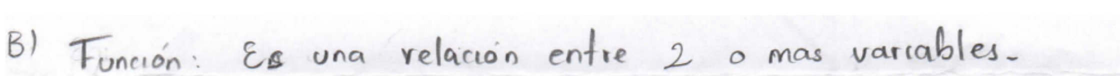
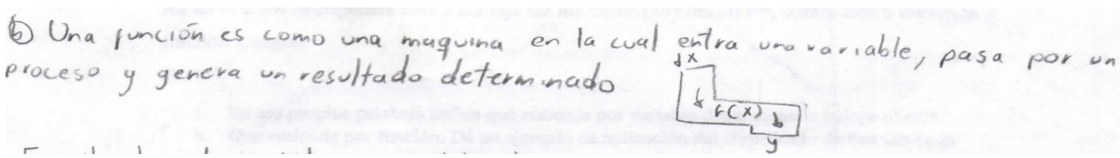

B) Función: Es una relación entre 2 o mas variables.

Ilustración 6

Función como dependencia entre variables. Descripción de fenómenos


b) Una función es como una maquina en la cual entra una variable, pasa por un proceso y genera un resultado determinado

Esta última definición es utilizada con una gráfica que puede ser descrita matemáticamente, para realizar una transformación. Para expresar matemáticamente la dependencia entre variables, y poder así describir fenómenos reales. Podría intuirse que puede usarse una colección de números en cierto orden que puede ser expresado mediante un gráfico y obtener y = f(x).

La **tabla 6** muestra los diferentes conceptos utilizados por los estudiantes para definir la función, de acuerdo con las categorías propuestas por Vinner (1983).

Definimos las diferentes comprensiones para su análisis.

Comprensión baja: intervienen conceptos evidenciados en una mezcla incoherente además de no justificar sus respuestas.

Comprensión intermedia: El estudiante tiene claridad en la diferenciación entre las variables y conceptos, además describe el comportamiento de la función y con presencia de aplicaciones.

Comprensión avanzada: El estudiante presenta una capacidad argumentativa sólida, coherente y asertiva frente a la descripción del comportamiento del tipo de función que está definiendo. Se evidencia la claridad conceptual tanto en diagramas y gráficos realizados.

Tabla 6

Categorías de distribución del concepto de función

Definición categoría	Grupo			
Comprensión				
Subsumidor	Baja	Intermedia	Alta	No se expone
Correspondencia	El término solo no es explicado.			
Relación de dependencia	No indica cómo se da la relación entre las variables.			
Regla				X
Fórmula				X
Representación	Falta rigor matemático.			

Como se evidencia, entre los grupos existe diferencias significativas que poseen del concepto de función.

Variados aspectos del concepto de función son concebidos por los estudiantes, tal como lo expresaron en sus respuestas. Sin embargo, salta a la vista algunas definiciones incompletas a pesar que involucra una asociación como "a cada elemento en el conjunto A le corresponde uno y sólo un elemento del conjunto B"

Igualmente, el concepto como relación de dependencia es incompleto debido a que no se explicita que una variable depende de la otra y la forma en que se hace.

Las respuestas dadas dejan entrever que los estudiantes poseen una concepción parcial del concepto de función, es decir, privilegian algunos conocimientos importantes para ellos, al parecer los subsumidores no están estabilizados en la estructura cognitiva de modo que puedan atribuir significados a nuevos conceptos y hay por lo tanto dificultades de enlazar nuevos conocimientos con los existentes.

Ningún grupo de estudiantes introdujeron en sus conceptos previos la función como una regla o fórmula que asocia un número real con otro de una manera única, ni especificaron en las correspondencias la importancia dada al dominio y al rango como elementos de la función.

En la siguiente tabla se presentan las categorías basadas en las respuestas; los conocimientos que corresponden a cada categoría y el tipo de aprendizaje que representan respecto a la evaluación de conocimientos de "función".

La categorización que se ha realizado para las respuestas de los estudiantes a la evaluación de conocimientos del concepto de función según las categorías de Viner.

Tabla 7

Caracterización AS concepto función

Categorías según tipo representación	**Conocimientos**	**Anclaje del concepto función**	**AS**
A	Buscando el rigor al uso del concepto de función dentro de las estructuras formales y abstractas de las matemáticas, lo aplica correctamente a otras situaciones y contextos que sirven de subsumidores.		

B	Buscando el rigor al uso del concepto de función dentro de las estructuras formales y abstractas de las matemáticas, no se aplica ni se relaciona correctamente con otras situaciones y contextos que sirven de subsumidores para nuevos conocimientos.		
C	Buscando el rigor al uso del concepto de función dentro de las estructuras formales y abstractas de las matemáticas, conoce el concepto, de forma incompleta, parcialmente incorrecta o incorrecta.	El concepto de función no es un subsumidor para el concepto de función a tramos.	Existe *aprendizaje mecánico*, el nuevo conocimiento no es resultado de interacciones existentes en la estructura cognitiva.

Se realizará el análisis en forma conjunta de los ítems c al f, por estar relacionados directamente al concepto de función.

c. Cuál es su concepto sobre el dominio de una función.

d. Qué entiende por codominio de una función.

e. Qué entiende por imagen de una función.

f. ¿Podría decirse que el conjunto de imágenes de la función es el mismo codominio?

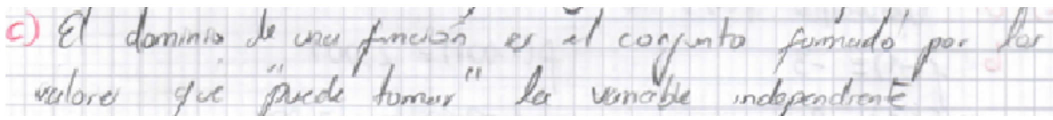
Justifique su respuesta.

Emergen los conceptos de dominio como conjunto de partida, como conjunto de pre-imágenes, como el conjunto de elementos x, como la variable independiente. El codominio como el conjunto de imágenes, como el conjunto y que está relacionado al menos con un valor de x.

Como variable independiente: los grupos coinciden.

Ilustración 7

Explicación del dominio como variable independiente

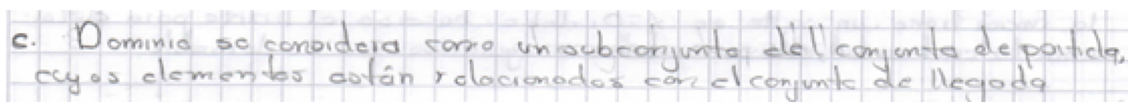

c) El dominio de una función es el conjunto formado por los valores que "puede tomar" la variable independiente

Un grupo retoma el mismo concepto de dominio para el dominio.

Otro grupo o toma como un subconjunto del conjunto de partida.

Ilustración 8

Dominio como subconjunto del conjunto de partida

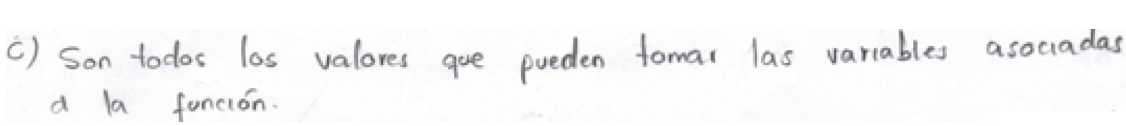

c. Dominio se considera como un subconjunto del conjunto de partida, cuyos elementos están relacionados con el conjunto de llegada

Este grupo de estudiantes al parecer, para ellos el conjunto de variables independientes o el conjunto de elementos de partida no es el mismo para definir la función que debe tratarse.

El otro grupo al parecer toma indistintamente las variables independientes y dependientes, lo cual es ambiguo.

Ilustración 9

Dominio como variables indistinguibles


c) Son todos los valores que pueden tomar las variables asociadas a la función.

Referente al codominio, los seis grupos coinciden en que son todos los valores que puede llegar a tomar la variable dependiente.

Un grupo afirma que son todos los valores que puede a llagar a tomar la variable independiente.

Al parecer los estudiantes poseen serias dificultades respecto a la comprensión del concepto de codominio de una función, debido a que este no siempre coincide con el rango o el conjunto de imágenes. Se aprecia un aprendizaje mecánico y los conocimientos son asumidos en forma literal, sin interacción con los conocimientos previos.

Los ítems d y f se analizan conjuntamente debido a que pretenden evidenciar el anclaje de los conceptos de dominio y codominio.

Un grupo indica que la imagen son las proyecciones que genera el dominio de la función y que no se puede asegurar que las imágenes coinciden con el codominio.

Dos grupos indica que son los valores asociados al codominio y que si se puede afirmar que el conjunto de imágenes son el mismo codominio.

Dos grupos indican que las imágenes son los valores que toman la variable dependiente y que las imágenes no son el mismo codominio.

Las respuestas dadas a estos ítems exigen poner en juego conceptos matemáticos rigurosos, pero se precisan algunas incongruencias en las explicaciones, por ejemplo, al afirmar que el conjunto de imágenes y el codominio son el mismo conjunto.

La siguiente tabla muestra los conocimientos previos utilizados por los estudiantes relacionados con su práctica matemática respecto a los conceptos de dominio y codominio de una función.

Tabla 8

Conocimientos previos sobre dominio y codominio de una función

Objetos Matemáticos		Significado otorgado
Dominio	Conjunto de partida	Elementos del conjunto de partida relacionados con el conjunto de llegada.
	Pre-imágenes	
	Variable independiente	Conjunto de valores que puede tomar la variable independiente.
	Elementos x	
Imagen	Valores asociados al codominio	Coinciden con el codominio. No son el mismo codominio.
Codominio	Conjunto de imágenes relacionado con elemento de x	Todos los valores que toma la variable dependiente.

La segunda parte del trabajo se dividió en tres partes. La primera comprende preguntas sobre la función con planteamientos que afirmaran el anclaje del dominio, codominio y conjunto de imágenes de una función.

En la tabla que se presenta a continuación se evidencias las categorías acordes a las respuestas dadas por los estudiantes, los conocimientos que corresponden a cada categoría y el tipo de aprendizaje que representan respecto a la evaluación de conocimientos de "dominio, codominio e imagen de una función".

Tabla 9

AS concepto dominio y codominio

Categorías según tipo representación	Conocimientos	Anclaje de los conceptos: dominio y codominio	AS
A	A partir de las categorías de Vinner y del concepto de función buscando el rigor al uso del concepto dado por Ugalde, lo aplica correctamente a otras situaciones y contextos que sirven de subsumidores para nuevos conocimientos.		
B	A partir de las categorías de Vinner y del concepto de función buscando el rigor al uso del concepto dado por Ugalde, no lo aplica correctamente a otras situaciones y contextos que sirven de subsumidores para nuevos conocimientos.		
C	A partir de las categorías de Vinner y del concepto de función buscando el rigor al uso del concepto dado por Ugalde, conoce el	El concepto de función no es un subsumidor para el concepto de función a tramos.	Existe *aprendizaje mecánico*, el nuevo conocimiento no es resultado de interacciones

concepto, de forma incompleta, parcialmente incorrecta o incorrecta.	existentes en la estructura cognitiva.

5.2.2. *Parte II: Pregunta 1*

La segunda parte contiene preguntas del dominio, codominio, gráfica y derivada de una función. De igual forma se presenta un problema sobre el recorrido y cobro de tarifa de un taxi.

> Dada la función f(x) = $\frac{x}{3}$
>
> c. Si el dominio de f(x) son los números naturales, cuál es el codominio de f(x).
>
> d. Si el dominio de f(x) son los números enteros, cuál es el codominio de f(x).

La respuesta a esta pregunta exige de la comprensión del concepto de dominio y codominio de una función.

Todos los grupos participantes coincidieron en la respuesta, algunos lo expresaron en lenguaje natural y otros utilizaron símbolos para representar los números racionales.

Ilustración 10

Análisis del dominio en lenguaje natural de f(x) = $\frac{x}{3}$

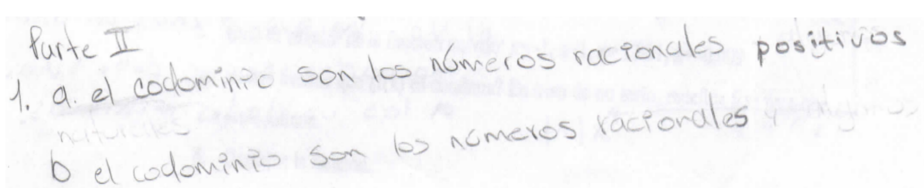
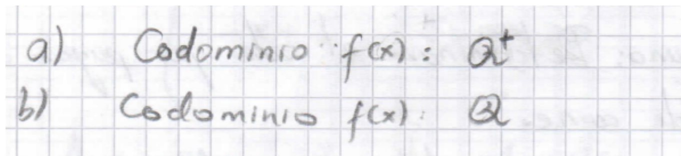


Ilustración 11

Dominio como símbolo de f(x) = $\frac{x}{3}$



La comprensión matemática de los estudiantes de los conceptos involucrados en los ítems anteriores, no expresan una terminología y simbologías matemáticas propias de los conceptos puestos en escena, lo cual indica que los estudiantes en su estructura cognitiva aún no tienen los conceptos previos sobre los tipos de variable que les sirve de anclaje para establecer las relaciones con los conceptos de dominio, codominio.

Tabla 10

Codominio de la función(x) = $\frac{x}{3}$

Objeto matemático		Codominio	Símbolo
$f(x) = \frac{x}{3}$	Si el dominio son los números naturales	Racionales positivos.	$\mathbb{Q}^{+}$
	Si el dominio son los enteros	Racionales.	$\mathbb{Q}$

Puede considerarse que los procesos estructurales de los estudiantes no están asociados a un conjunto numérico en particular los números naturales y los enteros, no reconocen que se tiene una función numérica.

Lo anterior indica que no pre visualiza la función como un conjunto de puntos, es una consecuencia a que no logran diferenciar el codominio del conjunto imagen, es decir, consideran el codominio igual al conjunto imagen.

Por otro lado, los estudiantes no tienen en cuenta que los números racionales son de la forma $\frac{a}{b}$, siendo a y b números enteros con b diferente de cero, lo cual permite tener una función como subconjunto de los racionales para f(x) = $\frac{x}{3}$, formada por puntos, no son rectas o semirrectas.

A continuación, se presentan las categorías de las respuestas, los conocimientos que corresponden a cada categoría y el tipo de aprendizaje que representan respecto a la evaluación de conocimientos de "dominio y de la función de la función $f(x) = \frac{x}{3}$"

Tabla 11

AS concepto de dominio y codominio a partir de f(x) = x/3

Categorías según tipo representación	**Conocimientos**	**Anclaje de los conceptos: dominio y codominio**	**AS**
A	Teniendo en cuenta la función $f(x) = \frac{x}{3}$ y del concepto de función se busca el rigor matemático dado al uso del concepto dominio y codominio, lo aplica correctamente a otras situaciones y contextos que sirven de subsumidores para nuevos conocimientos.		

B	Teniendo en cuenta la función $f(x) = \frac{x}{3}$ y del concepto de función se busca el rigor matemático dado al uso del concepto dominio y codominio, no lo aplica correctamente a otras situaciones y contextos que sirven de subsumidores para nuevos conocimientos.		
C	Teniendo en cuenta la función $f(x) = \frac{x}{3}$ y del concepto de función se busca el rigor matemático dado al uso del concepto dominio y codominio, conoce el concepto, de forma incompleta, parcialmente incorrecta o incorrecta.	El concepto de función no es un subsumidor para el concepto de función a tramos.	Existe *aprendizaje mecánico*. Los estudiantes confunden los conjuntos numéricos $\mathbb{Q}\ y\ \mathbb{Q}^{+}$con una serie de puntos.

5.2.3. *Pregunta 2*

Dada la función f: $\mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$ si, $f(x) = \begin{cases} x-2, si & x < 0 \\ x+1, si & x \geq 0 \end{cases}$

f. Cuál es el codominio de f(x).

g. Podría decirse que ¿f(x) es continua? Explique. En caso de no serlo, redefina f(x) para que sea continua.

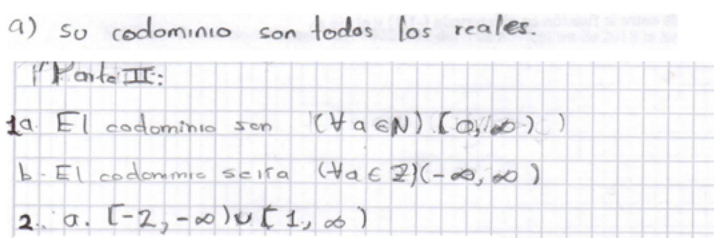
h. Grafique la función.

i. ¿Puede decirse que la función es derivable? Explique su respuesta.

A continuación, realizaremos la interpretación de los conceptos utilizados por los estudiantes con respecto al codominio de la función, ítem a.

Ilustración 12

Concepto de codominio de la función a tramos



La ilustración anterior presenta las dificultades de los estudiantes cuando determinan el codominio de una función a tramos. Lo cual indica los subsumidores no están anclados en la estructura cognitiva. Como lo indica Ausubel cuando los contenidos no son relacionados de modo no arbitrario y sustancial -no al pie de la letra- con lo que el estudiante ya sabe, no es posible que se anclen nuevos conocimientos

Tabla 12

Codominio de la función a tramos asignado por estudiantes

Objeto matemático	Codominio	Grupos
$f(x) = \begin{cases} x-2, si \ \ x<0 \\ x+1, si \ \ x \geq 0 \end{cases}$	Los reales.	1
	[0, ∞)	1
	[-2, −∞) ∪ [1, ∞)	2
	(- ∞, ∞)	2

La tabla anterior manifiesta como los estudiantes aún no han comprendido el concepto de codominio de una función, se evidencian errores que permiten actuar de puente entre los estudiantes y el nuevo contenido para el estudio de las funciones a tramos.

Llama la atención la escritura los dos grupos que escriben el codominio como [-2, −∞) ∪ [1, ∞), donde no hay una organización jerárquica del uso de los intervalos, lo cual puede ser otra dificultad para el anclaje de otros conceptos como la continuidad en un intervalo.

En la siguiente tabla exhiben las categorías de las respuestas, los conocimientos que corresponden a cada categoría y el tipo de aprendizaje que representan respecto a la evaluación de conocimientos de dominio de la función de la función:

$$f(x) = \begin{cases} x-2, si \ \ x<0 \\ x+1, si \ \ x \geq 0 \end{cases}$$

Tabla 13

AS función a tramos

Categorías según tipo representación	Conocimientos	Anclaje del conceptos: dominio	AS
A	Teniendo en cuenta la función: $$\mathrm{f}(x) = \begin{cases} x-2, si & x<0 \\ x+1, si & x \geq 0 \end{cases}$$ y del concepto de función se busca el rigor matemático dado al uso del concepto dominio, lo aplica correctamente a otras situaciones y contextos que sirven de subsumidores para nuevos conocimientos.		
B	Teniendo en cuenta la función: $$\mathrm{f}(x) = \begin{cases} x-2, si & x<0 \\ x+1, si & x \geq 0 \end{cases}$$ y del concepto de función se busca el rigor matemático dado al uso del concepto dominio, no lo aplica correctamente a otras situaciones y contextos que sirven de subsumidores para nuevos conocimientos.	El concepto de función a tramos es un subsumidor parcial.	Aunque hay confusión en la escritura de un intervalo, el otro es correcto. Podemos decir que existe un *aprendizaje representacional*, al suponer significados a los intervalos.

C	Teniendo en cuenta la función: $$f(x) = \begin{cases} x-2, si & x < 0 \\ x+1, si & x \geq 0 \end{cases}$$ y del concepto de función se busca el rigor matemático dado al uso del concepto dominio, conoce el concepto, de forma incompleta, parcialmente incorrecta o incorrecta.	

b. Podría decirse que ¿f(x) es continua? Explique. En caso de no serlo, redefina f(x) para que sea continua.

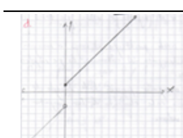
c. Grafique la función.

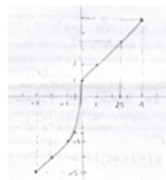
d. ¿Puede decirse que la función es derivable? Explique su respuesta.

Las respuestas de los estudiantes a los ítems b, c y d, son analizados en conjunto por su relación conceptual:

Tabla 14

Gráfica, continuidad y derivada de la función a tramos

Función a tramos	Gráfica	Continua	Derivable
		No: presenta discontinuidad esencial. No: tiene un salto en cero.	No. Porque no es continua.

$f(x) = \begin{cases} x - 2, si & x < 0 \\ x + 1, si & x \geq 0 \end{cases}$	La realizan 2 grupos.  La realizan 4 grupos.	Si.	Si es derivable debido a que los límites existen.

Aunque no hay una puesta en común, solo un grupo trata de explicar la no continuidad a partir de la existencia de límites laterales. Sin embargo, en los conocimientos previos no se evidencia una postura rigurosa frente al concepto de continuidad, en particular en un punto, parece ser que, los estudiantes han adquirido una asimilación obliteradora -olvido- respecto a las condiciones de existencia de la continuidad de una función.

Por otro lado, se remiten a recordar la discontinuidad esencial no removible, sin embargo, no se evidencia el punto en el cual ocurre la discontinuidad.

En este sentido, los estudiantes no tienen en cuenta que una función es continua en un punto x= a perteneciente al dominio de la función, si la función está definida en ese punto y los límites laterales coinciden con la imagen f(a).

Además, cuando los límites laterales coinciden, pero la función no está definida en el punto, la discontinuidad es removible, caso en el que se puede redefinir la función.

Para el caso de la función a tramos se tiene:

$$\lim_{x \to 0^-} x - 2 = -2$$

$$\lim_{x \to 0^+} x + 1 = 1$$

Lo cual ninguno de los grupos lo discutió o problematizó en sus justificaciones.

Dos grupos realizan la gráfica de la función en forma correcta, sin embargo, el concepto de codominio de la función no se corresponde con lo expresado gráficamente, como se pudo apreciar en la **tabla 5**, además, ningún grupo estableció una correspondencia correcta entre la gráfica y la forma simbólica o algebraica.

Además, no analizan la continuidad en un intervalo abierto o cerrado de la función, donde se puede estudiar la continuidad en cada punto de la función a tamos.

Se despliega en la siguiente tabla las categorías de las respuestas, los conocimientos que corresponden a cada categoría y el tipo de aprendizaje que representan respecto a la evaluación de conocimientos de continuidad y derivada de una función a tramos, en particular la función:

$$\mathrm{f}(x) = \begin{cases} x-2, si & x<0 \\ x+1, si & x \geq 0 \end{cases}$$

Tabla 15

AS de los conceptos continuidad y derivada

Categorías según tipo representación	**Conocimientos**	**Anclaje de los conceptos: continuidad y derivada**	**AS**
A	Teniendo en cuenta la función: $\mathrm{f}(x) = \begin{cases} x-2, si & x<0 \\ x+1, si & x \geq 0 \end{cases}$ y del concepto de función se busca el uso de los		

	conceptos continuidad y derivada, los aplica correctamente a otras situaciones y contextos que sirven de subsumidores para nuevos el concepto de límites laterales.		
B	Teniendo en cuenta la función: $$f(x) = \begin{cases} x-2, si & x<0 \\ x+1, si & x \geq 0 \end{cases}$$ y del concepto de función se busca el rigor matemático dado al uso de los conceptos de continuidad y derivada, no lo aplica correctamente a otras situaciones y contextos que sirven de subsumidores para el concepto de límite lateral.	El concepto de continuidad es asociado a la derivada, sin embargo, no se usa los límites laterales para comprobarlo con rigurosidad matemática, lo cual son subsumidores parciales.	Aunque hay confusión en la escritura de un intervalo, el otro es correcto. Podemos decir que existe un *aprendizaje representacional*, al suponer significados a las gráficas.
C	Teniendo en cuenta la función: $$f(x) = \begin{cases} x-2, si & x<0 \\ x+1, si & x \geq 0 \end{cases}$$ busca el rigor matemático dado al uso de los conceptos de continuidad y derivada, conoce el concepto, de forma incompleta, parcialmente incorrecta o incorrecta.		

5.2.4. *Pregunta 3*

El siguiente problema se presenta con base en la información de la secretaría de movilidad de Medellín, 2019.

Mediante Resolución número 201850080832 del 8 de noviembre de 2018 la Secretaría de Movilidad fijó las tarifas para el transporte público terrestre automotor individual de pasajeros en vehículos taxi básico, las cuales serán las siguientes:

Arranque o banderazo: Pesos ($3.500)

Valor caída por cada 78 metros: Pesos ($100)

Carrera mínima: Pesos ($5.500)

Valor de espera (60 segundos): Pesos ($200)

Valor hora contratada: Pesos ($25.200)

Tomado de: https://www.medellin.gov.co/movilidad/transito-transporte/taxis

Los taxis deben portar elementos como el taxímetro, la tabla de equivalencias de unidades y valores, así como la tarjeta de control en un sitio visible para el usuario. El banderazo corresponde a 35 unidades.

e) Represente la función algebraica que permite realizar el cobro en unidades.

f) Dibuje la función.

Seguidamente, se organizan las respuestas dadas por los estudiantes, analizamos la comprensión del concepto de función a tramos que involucra el ítem a.

Tabla 16

Representación algebraica de la función a tramos del problema

<table>
<tr><th>Problema</th><th>Representación algebraica</th></tr>
<tr><td>

La Secretaría de Movilidad fijó las tarifas para el transporte público terrestre automotor individual de pasajeros en vehículos taxi básico, las cuales serán las siguientes:

Arranque o banderazo: Pesos ($3.500).

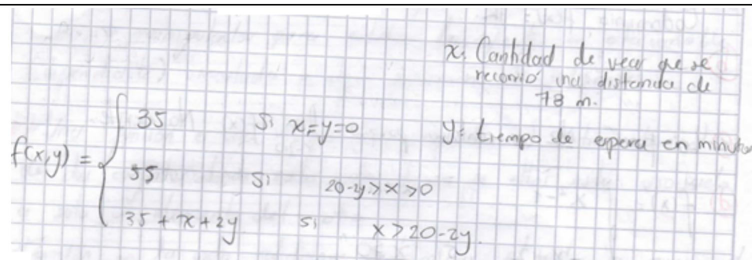
Valor caída por cada 78 metros: Pesos ($100).

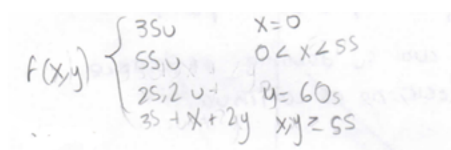
Carrera mínima: Pesos ($5.500).

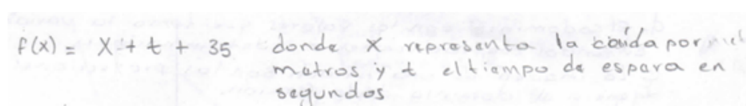
Valor de espera (60 segundos): Pesos ($200).

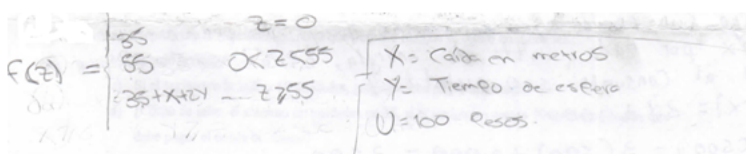
Valor hora contratada: Pesos ($25.200).

</td><td>









</td></tr>
</table>

Aunque los diferentes grupos coinciden en representar una función constante en el primer tramo, utilizan funciones en varias variables, además, no se tiene en cuenta el dominio para el cual se determina los valores de la variable independiente x dada por la expresión analítica de acuerdo a lo pedido en el problema.

Lo anterior indica que los estudiantes no tienen una comprensión del concepto de función a tramos ni de los conceptos previos que le permitan anclar otros contenidos como el límite, derivada o integral importantes en el desarrollo del cálculo.

Para la solución del problema, se debe realizar un análisis desde el banderazo: inicio de la carrera el cual tiene un costo de \$3500, valor de unidad fijo $\frac{3500}{35} = 100$. La carrera mínima tiene un coste de \$5500 lo que son 50 unidades.

$$f(x) = \{5500, 35 < x \leq 50$$

x representa la cantidad de unidades que determina el coste de la carrera.

A partir de este modelo se plantea la función como:

$$\text{f(x)=}\begin{cases} 5500, 35 < x \leq 50 \\ 100\,(x-50)\,, 50 < x \leq 55 \\ 100\,(x-55) + 5500{,}55 < x \leq 1000 \end{cases}$$

Se presentan las categorías de las respuestas, los conocimientos que corresponden a cada categoría acorde al tipo de representación y el tipo de aprendizaje que simbolizan respecto a la evaluación de conocimientos de una función a tramos involucrada en RP.

Tabla 17

AS función a tramos

Categorías según tipo representación	Conocimientos	Anclaje del concepto: función a tramos en RP	AS
A	Teniendo en cuenta el planteamiento del problema que involucra una función a tramos, se busca el rigor matemático para la representación gráfica y algebraica de la función, el uso de los conceptos los aplica correctamente a otras situaciones y contextos que sirven de subsumidores para nuevos conceptos como límites laterales.		
B	Teniendo en cuenta el planteamiento del problema que involucra una función a tramos, se busca el rigor matemático para la representación gráfica y algebraica de la función, no lo aplica correctamente a otras situaciones y contextos que sirven de subsumidores para el concepto de límite lateral.		

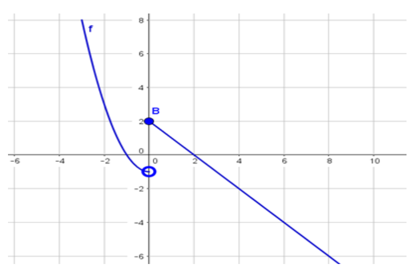
C	Teniendo en cuenta el planteamiento del problema *problema* que involucra una función a tramos, se busca el rigor matemático para la representación gráfica y algebraica de la función, conoce el concepto, de forma incompleta, parcialmente incorrecta o incorrecta.	Los estudiantes no han adquirido los significados de los conceptos de dominio y rango, que les permita solucionar el problema para anclar el concepto de función a tramos.	Aprendizaje mecánico.

5.2.5. *Pregunta 4*

Dada la gráfica de la función:

Gráfica 6

Pregunta 4



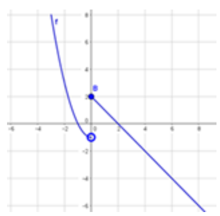
f. ¿Cuál es el dominio y el codominio?

g. ¿La función es continua? Explique. Escribe la función en forma analítica -expresión algebraica-.

h. Escribe la función en forma analítica -expresión algebraica-.

Tabla 18

Dominio, codominio y discontinuidad de grafica función a tramos

Gráfica	Dominio	Codominio	Expresión algebraica
	$(2,1) \cup [0,\infty)$	$(-\infty,\infty)$	$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & si\ x < 0 \\ -x + 1, & si\ x \geq 0 \end{cases}$
	$(-\infty,\infty)$,	$[-1,\infty] \cup [2,-\infty)$	

El análisis anterior revela como los estudiantes transitan de un registro gráfico a uno analítico o algebraico, los seis grupos coincidieron y es correcta la forma de expresar la función a tramos.

En cuanto a dominio y codominio, las respuestas fueron diferentes y dos grupos aportaron la primera forma y cuatro grupos estuvieron de acuerdo en la segunda forma.

Cabe resaltar la contradicción entre la forma de expresar la representación algebraica y el dominio y codominio de la función a trozos. Es decir, dichos conceptos aparecen desconectados en los usos de los estudiantes. Se observa, que el proceso de la asimilación obliteradora significara que, los subsumidores que sirven de anclaje al concepto de función a tramos no ha sido modificado en su estructura cognitiva.

Respecto a la discontinuidad de la función, dos grupos coinciden en que es discontinua en x = 0, sin justificar su respuesta. Los demás grupos indican que es continua. Se puede concluir que los estudiantes no han anclado el concepto de continuidad, fundamental basados en comprensión de la derivada de funciones a tramos.

Se exponen las categorías de las respuestas, los conocimientos que corresponden a cada categoría para el anclaje del concepto continuidad y el tipo de aprendizaje que representan respecto a la evaluación de conocimientos de una función a tramos involucrada en RP para el anclaje del concepto de continuidad en funciones a tramos.

Tabla 19

AS continuidad de una función a tramos

Categorías según tipo representación	**Conocimientos**	**Anclaje del concepto: continuidad**	**AS**
A	Teniendo en cuenta la gráfica de la función a tramos, discontinua en el punto x=0 del dominio se busca transitar al registro algebraico, desde el registro gráfico, aplica correctamente el registro que sirve de subsumidor para el concepto de límites laterales.		
B	Teniendo en cuenta la gráfica de la función a tramos, discontinua en el punto x=0 del dominio	Los estudiantes aprendieron sobre la continuidad de una función guiados por la gráfica. Sin	Aprendizaje representacional parcial.

	se busca transitar al registro algebraico, desde el registro gráfico, no aplica correctamente el registro que sirve de subsumidor para el concepto de límite lateral.	embargo, el concepto no fue aprendido significativamente debido a que, el concepto de dominio y codominio no está en la estructura cognitiva. Es decir, el concepto de **continuidad** no es subsumidor para límites laterales.
C	Teniendo en cuenta la gráfica de la función a tramos, discontinua en el punto x=0 del dominio se busca transitar al registro algebraico, desde el registro gráfico, conoce el concepto de forma incompleta, parcialmente incorrecta o incorrecta.	

Hemos identificado que hay presencia y ausencia de subsumidores relevantes como dominio, codominio, rango, imagen y función, los cuales no se articulan de manera adecuada en la estructura cognitiva de los estudiantes para la comprensión del concepto de función a tramos que lleve a anclar los conceptos de continuidad, límite y derivada al igual que otros conceptos como límites y continuidad.

La caracterización expuesta indica que, aunque existe aprendizaje representacional, no están anclados los subsumidores de límite, derivada y continuidad, y la **tabla 19** analizan el AS e indica que se presenta aprendizaje mecánico y la **tabla 17** muestra avances y se analiza que el tipo de aprendizaje es representacional y es logrado parcialmente.

Se muestra como un proceso de representaciones múltiples, permite al estudiante la participación en la construcción de objetos matemáticos (Kaput, 1989), además se admite que un determinado conocimiento es estable en un individuo, si éste puede articular diferentes representaciones del concepto sin contradicciones. La comprensión de un contenido conceptual, reposa en la coordinación de al menos dos registros de representación y esta coordinación se manifiesta por la rapidez y la espontaneidad de la actividad cognitiva de conversión.

Los estudiantes fueron construyendo y relacionando en forma parcial elementos del significado que atañen al concepto (Batanero, 2005). Según los resultados obtenidos, tanto de las ilustraciones como de las tablas es posible que los estudiantes adquieran la comprensión del objeto en cuestión como un proceso continuo y creciente por el cual es posible transformar la estructura cognitiva y relacionar progresivamente los diferentes elementos subsumidores de forma que puedan llegar a instancias más complejas. En palabras de Sfard (1991) la habilidad de ver una entidad matemática como objeto y como proceso es indispensable en la matemática, cualquiera sea la definición de comprensión que se adopte.

Por lo tanto, habrá que facilitar organizadores que permitan intervenir como vínculo entre el estudiante y el nuevo contenido para que se produzcan condiciones para un AS. Es decir, se requiere un material potencialmente significativo que permita integrar los nuevos conceptos con los que el estudiante tiene presente en su estructura cognitiva, que va más allá de desarrollar un nuevo grado de diferenciación entre los conceptos nuevos y los existentes.

Lo anterior ratifica el hecho de que la RP supone la reorganización de las experiencias previas en los estudiantes, de modo que se ajuste a los requisitos concretos del problema planteado. Si los conocimientos previos existentes en la estructura cognitiva -conceptos, principios, leyes- y son claros, estables y diferenciables, disponen hacia la RP. Sin tales conocimientos previos no es posible empezar a entender la naturaleza del problema que enfrenta para el anclaje de nuevos o antiguos subsumidores.

En este sentido, el pretest anterior referente a la comprensión del concepto de función y en particular de la función a tramos y los elementos inscritos que sirven de anclaje, nos llevan a dar cumplimiento a uno de los objetivos de la investigación: Analizar los subsumidores para el aprendizaje del concepto de función y de la función a tramos y los conocimientos desarrollados que emergen de un sistema de práctica social y cultural como consecuencia de la naturaleza de la actividad resolución de problemas.

CAPÍTULO VI

6. **Diseño del material educativo potencialmente significativo**

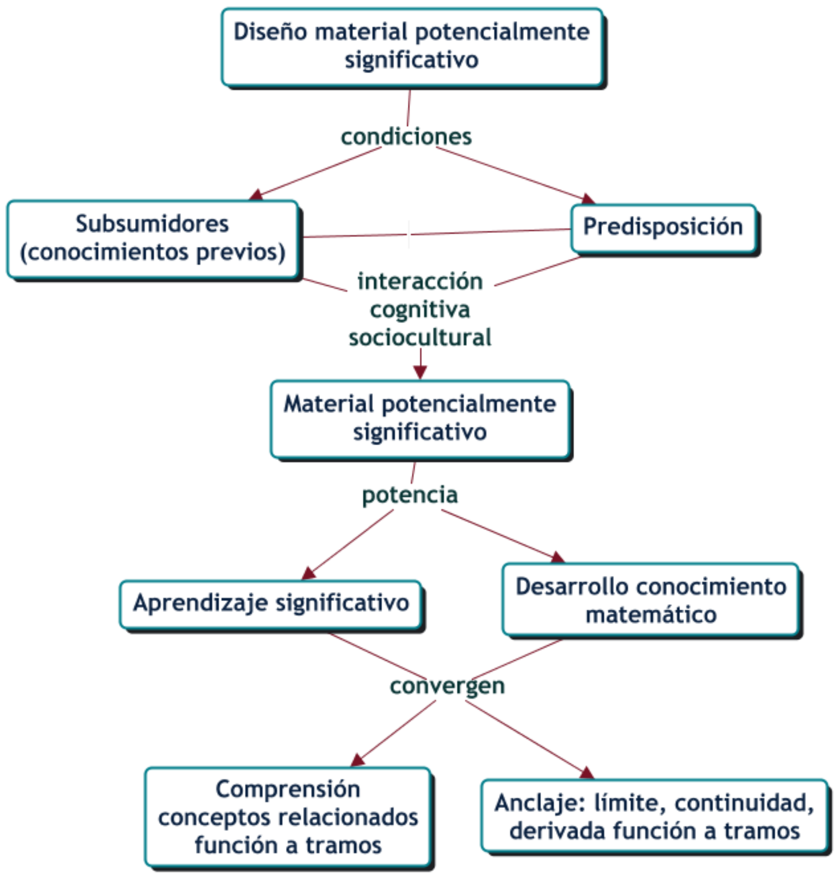
El material potencialmente significativo en esta investigación, está diseñado por el investigador con apoyo de la directora de la tesis y con base en los resultados del pretest, con el fin de establecer relaciones adecuadas entre el conocimiento nuevo y el que ya poseen los estudiantes, se trata de puentes cognitivos para movilizar un conocimiento menos elaborado a un conocimiento más refinado.

El material potencialmente significativo propuesto ayudaría a activar los conceptos previos de los estudiantes y la forma como lo irían a relacionar con el nuevo material el cual les proporciona oportunidades potenciales para refinar, comprender los conceptos y desarrollar nuevos conocimientos que son compartidos en el seno de la práctica social.

El mapa conceptual que se presenta a continuación muestra la estructura del capítulo a partir del diseño del material potencialmente significativo.

Mapa conceptual 6

Diseño material potencialmente significativo



6.1. **Sobre subsumidores y predisposición**

Los subsumidores se constituyen en condición para que haya aprendizaje significativo. Sin embargo, observamos que no siempre están presentes en los estudiantes, y, en ese caso, se recomienda el uso material potencialmente significativo que ha de ser aprendido.

La transformación de los *subsumidores* -saberes previos del estudiante-, y *predisposición* para la producción de saberes con mayor rigor matemático, estructuración y con significado, es lo que le permite alcanzar mayores niveles de fortalecimiento conceptual y la posibilidad del AS de los conceptos subyacentes al de función.

Partimos del hecho de que, los estudiantes deben tener predisposición para el aprendizaje y desarrollo de las actividades y problemas propuestos En cuanto a la disposición para aprender de forma significativa, deben develar actitud para relacionar de manera sustantiva y no arbitraria el nuevo material en su estructura cognitiva. Es decir, el estudiante debería ser generador de su transformación, la cual correspondería como un logro desde la interacción social.

Durante el proceso de interacción social, los estudiantes se comprometerían a generar discusiones profundas alrededor del objeto referente a ideas diferentes o comunes, de forma que otorgarían contribuciones en el desarrollo de conocimiento matemático.

6.2. **Interacción cognitiva sociocultural**

La interacción cognitiva Sociocultural, promueve el AS dentro de la zona del desarrollo próximo -ZDP- definida como la distancia entre el actual desarrollo determinado por la resolución independiente de problemas y el nivel de desarrollo potencial determinado por el material potencialmente significativo en colaboración de otros estudiantes, estimula el desarrollo, adquisición y producción de conocimiento matemático, de conocimiento con significado, que lleva a la internalización de los conceptos, que son necesarios para el desarrollo cognitivo dentro de un contexto histórico social y cultural.

Este proceso de desarrollo evoluciona en forma de una espiral en la que el nivel de desarrollo potencial se convertirá en el futuro, en el nivel de desarrollo real del estudiante y facilitará el origen del AS.

Lo anterior puede lograrse con el uso del material considerado potencialmente significativo, ello fortalece la interacción social a partir de que los estudiantes menos competentes pueden desarrollar habilidades con la ayuda de sus compañeros que poseen una estructura cognitiva más avanzada, lo cual ayuda a que más adelante realice una internalización de los subsumidores específicos del concepto de función.

El elemento del cambio en la ZDP radica tanto en la producción, comprensión, transformación y comunicación de significados como en la mediación del material potencialmente significativo y la interacción social. Así, el rol que desempeña el material en la práctica social es constitutiva y consustancial del pensamiento de los estudiantes.

El potencial es ese saber cultural e histórico que tiene el estudiante como capacidad generativa para resolver problemas y pensar de ciertas formas. El material guía el proceso hacia el proceso de AS tanto desde la disposición de los conceptos generales o saberes como desde la perspectiva de participación en la actividad social de estudiantes en la RP, proporcionada por la instrucción y los conocimientos previos que poseen los estudiantes, provocando así desarrollo y construcción social de conocimiento.

6.3. **Material potencialmente significativo**

La propuesta investigativa tiene como objetivo principal explorar los aprendizajes significativos y el tratamiento de los fenómenos que ocurren en la producción y desarrollo de conocimiento referente al concepto de función y fue realizada teniendo en cuenta las dificultades encontradas en los estudiantes.

En ese sentido, el análisis de los resultados del pretest en el capítulo anterior nos permitió aportar al diseño de materiales potencialmente significativo para el aprendizaje, la comprensión y el significado que los estudiantes otorgan al concepto función a tramos. Así mismo nos permite dar respuesta a la pregunta: ¿En qué medida puede desarrollarse aprendizaje significativo y la comprensión del concepto de función en particular la función a tramos y cómo influyen algunos subsumidores como dominio, rango, límite, continuidad y derivada en dicho aprendizaje desde la resolución de problemas con la implementación de un material potencialmente significativo que involucra tal concepto?

Establecer cómo el material potencialmente significativo en un sistema de práctica social y cultural aporta al aprendizaje significativo de los estudiantes referente a la función a tramos a partir de los subsumidores.

El material está diseñado para identificar los conocimientos tanto previos como los matemáticos desarrollados por los estudiantes cuando resuelven problemas referentes a la función, en particular la función a tramos, asimismo, permite la transformación de los conceptos mediante la acción sobre los objetos matemáticos a través de la comprensión que es el medio fundamental para la producción de conocimientos y el AS.

El material potencia el aprendizaje de recepción significativo, el cual ocurre cuando el material referente a la función, ingresa en el campo cognitivo del estudiante e interactúa y se subsume adecuadamente bajo un sistema conceptual-límite, continuidad, derivada- relevante y más inclusivo.

El material es lógicamente significativo ya que podría ser relacionable con ideas que aparezcan específicamente, como aplicaciones, extensiones, elaboraciones, modificaciones y generalizaciones más inclusivas del concepto de función y sus objetos matemáticos subyacentes

Por lo tanto, el material favorece o potencia el AS; sin embargo, para que se produzca AS, de hecho, no es suficiente que el nuevo material simplemente se relacione con ideas relevantes, sino que tenga en cuenta que la estructura cognitiva de un estudiante particular debe, circunscribir las habilidades intelectuales requeridas -conocimientos previos y aplicaciones-, el contenido de ideas, y relacionadas con la actividad propuesta.

Según (Ausubel, Novak & Hanesian, 1980) para producir un material potencialmente significativo es esencial tener en consideración los conocimientos previos de los estudiantes, los cuales sirven de anclaje para los nuevos conocimientos que se van a desarrollar. Además, la interacción entre los anteriores y los nuevos conocimientos son imprescindibles en la adquisición del AS.

Partiendo de los resultados obtenidos en el pretest, y teniendo en cuenta los párrafos anteriores, se comprobó que, al resolver problemas que involucran el concepto de función, los estudiantes presentaron dificultades de carácter conceptual acompañadas de dificultades de carácter procedimental y de compresión del concepto y los elementos que éste involucra.

Con respecto a las dificultades de carácter conceptual, gran parte de los estudiantes, cuando resuelven problemas, comprenden parcialmente el significado de: variables, dominio, rango, imagen y el concepto de función en sí, en particular el concepto de función a tramos, se observó alguna memorización de fórmulas que intentaron representar en forma gráfica, dando como resultado inconvenientes para expresarla en forma oral y escrita, poca interpretación de diferentes registro y deficiencias para argumentar.

Por otra parte, las dificultades cognitivas cimentada en conocimientos previos o subsumidores adecuados radicaron en los conocimientos pocos precisos que fueron anclados como subsumidores, de forma que ese anclaje no tuvo algún sentido para el estudiante.

Acorde a lo anteriormente descrito, consideramos el uso del material potencialmente significativo debido a que tiene en cuenta la relación entre el contenido aprendido -o por aprender- y el conocimiento previo, el contenido está en relación con los subsumidores y el contenido a anclar es el límite de una función, lo cual permite a los estudiantes comprender los conceptos con significado, como recurso que favorece el AS del objeto función y en particular la función a tramos.

La subsunción de los rastros de la RP debido al sistema de conceptos e ideas establecidas en la estructura cognitiva proporciona anclaje para el nuevo material y, por lo tanto, constituye una forma eficiente y estable de retención para disponibilidad y / o uso futuro.

En el material los enunciados de los problemas implican un acercamiento previo a diferentes tipos de representaciones o expresiones simbólicas, analíticas, gráficas y a referencias construidas en el registro escrito, que pueden o no tener símbolos propios de los registros usuales.

De esta manera, el enunciado del problema, se construyó por parte del autor bajo ciertos presupuestos; uno de ellos es que el enunciado tenga alguna base de conocimientos previos o algún acercamiento a las diferentes representaciones de las funciones que le permitan al estudiante identificar las referencias y relaciones con los elementos fundamentales como rango, dominio y codominio.

Tener en cuenta los conocimientos previos permite que las distintas secciones conformen un enunciado integral con significado lógico para el estudiante; es decir, que se integren los contenidos en una unidad y no sean simplemente informaciones desencajadas, de manera que éstos puedan establecer alguna relación entre lo afirmado y la pregunta formulada en el contexto matemático en el que se plantea el enunciado.

Los enunciados de los problemas demandan por parte de los estudiantes las actividades de selección y organización de la información dada que les permita establecer relaciones entre lo que se conjetura o afirma y la pregunta.

La actividad de selección involucra examinar y registrar las referencias dadas, las afirmaciones de esas referencias y la información por la que pregunta del enunciado en su parte de orientación. Por otro lado, la actividad de organización involucra identificar relaciones matemáticas en diferentes contextos del enunciado, diferenciar las que se pueden instaurar a partir de los datos dados de manera manifiesta de las que se puedan inferir implícitamente, y relacionar estas últimas con las que hay que establecer según la pregunta.

Por otra parte, la actividad cognitiva involucrada no depende sólo de las propiedades específicas del objeto de conocimiento, sino también de las condiciones sociales en las que tiene lugar, de los recursos naturales que son constitutivos de la actividad mental (Radford, 2006). Pero, la dimensión epistémica y la dimensión social no están desvinculadas, los objetos de nuestra estrategia para lograr el AS siempre están social y culturalmente definidos. Se aprende en contextos sociales en donde hay objetos que tienen funciones y significaciones atribuidas por la sociedad.

6.3.1. *Material de trabajo 1*

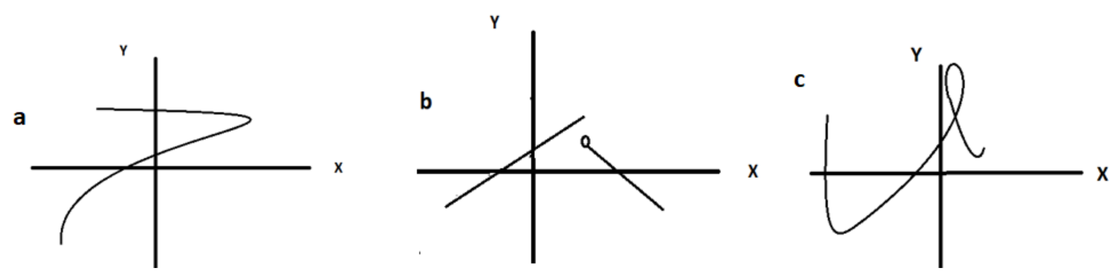
El primer material contiene implícitamente los subsumidores de dominio, codominio, imagen, además del concepto de función a tramos, los cuales son los subsumidores para anclar el concepto de función, éstos tienen la disponibilidad del contenido relevante adecuado en la estructura cognitiva del aprendiz.

El material incita al uso de diferentes instrumentos como libros de texto y herramientas tecnológicas como Geogebra, los cuales permiten tener una idea preliminar del concepto a ser aprendido. Se tiene en cuenta que son estudiantes de un nivel superior que ya han tenido dentro del currículo la asignatura informática y sistemas de información, en los cuales se han apropiado del uso de diferentes aplicaciones.

Los siguientes problemas, corresponden al análisis del concepto de función, basado en los conocimientos previos adquiridos o puestos en escena en el pretest.

Objetivo: Realizar un análisis sobre el significado, la comprensión, el AS adquirido y la interpretación que los estudiantes otorgan al concepto de función, cuando abordan problemas sobre la estructura general de una función y su límite en particular del concepto de función a trozos.

1. De las siguientes gráficas, cuál o cuáles representan funciones: Explique su respuesta.



2. ¿Existe una función que asigne a cada valor diferente de cero su cuadrado y a cero le asigne 1? En caso afirmativo, ¿Es importante conocer el dominio y el rango de la función? Realice la representación algebraica de la función y realice su gráfica.
3. Realiza un mapa conceptual de los conceptos previos que hasta el momento has puesto en escena para resolver los anteriores problemas.

Contenido sobre límite de una función

Se dice que el límite de una función f cuando x tiende a un valor x = a es L si para aproximar el valor de f(x) a L tanto como se quiera basta con aproximar adecuadamente x al valor a, y se escribe:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

Ahora bien, en la definición de límite formal necesitamos de un intervalo abierto I y una función definida en I, salvo la única excepción para x= a. Sea L un número real, la expresión:

$\lim_{x\to a} f(x) = L$ ***significa que:***

$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0$ tal que $0 < |\ x - a\ | < \delta \leftrightarrow |\ f(x) - L\ | < \varepsilon$

En el concepto de límite va implicado un proceso clave, y es: dado un ε, hallar el δ correspondiente.

4. Considere el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 3}(3x - 4) = 5$$

Este límite puede interpretarse como: cuando x está muy próximo de 3, entonces 3x – 4 está muy próximo de 5, o, se puede aproximar 3x – 4 a 5 tanto como se desee tomando x suficientemente próximo a 3.

En este sentido, ¿se puede hacer que 3x – 4 diste de 5 menos de una unidad? Compruébelo.

Realice una representación gráfica en la que se muestre la situación.

¿Se puede hacer que 3x – 4 diste de 5 menos de una centésima? Compruébelo.

¿Qué tanto se puede aproximar 3x – 4 a 5?

¿Cómo deben ser las aproximaciones de los números dados para que los valores funcionales de las aproximaciones estén dentro de determinada aproximación dada de antemano, de los valores funcionales de los números dados?

Nota: Puede ingresar a internet y observar las diferentes actividades realizadas en Geogebra como ayuda para resolver el problema. Se sugiere:

https://www.geogebra.org/m/RRf336ZC

https://www.geogebra.org/m/btk8TzYC
https://www.geogebra.org/m/hY4WhKaX
https://www.geogebra.org/m/KEjTvumT

5. Calcule el siguiente límite de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 \; si \; x < 2 \\ -2x + 5 \; si \; x \geq 2 \end{cases}$$

a) ¿Es importante conocer el dominio y el rango de la función?
b) ¿Son relevantes el cálculo de las imágenes?
c) ¿Tiene importancia realizar una gráfica de la función?
d) Compruebe por la definición formal que el límite es el obtenido.
e) ¿Qué sentido tiene la función a trozos en el cálculo de límites?
f) ¿Qué significado le otorga al concepto de límite de una función?

Actividad: Realiza un mapa conceptual de los conocimientos previos que emergieron al desarrollar la actividad.

El problema anterior contiene relaciones que se pueden establecer de acuerdo a las características de los objetos mencionados o a las acciones que se puedan realizar en los diferentes registros de representación involucrados, o relaciones que se establecen a partir de la información dada en el contexto matemático, las cuales los estudiantes pueden interpretar desde sus trasfondos.

6.3.2. *Material de trabajo 2*

El siguiente material potencialmente significativo presenta la relación entre el contenido aprendido -o por aprender- y el conocimiento previo, el contenido aprendido está en relación con el subsumidor límite de una función que le permite el anclaje del límite de función a tramos.

De igual forma, se pretende la adquisición de significados de la función a tramos, va a ser el resultado de la interacción entre el nuevo material que se va a aprender y la estructura cognitiva existente.

Este material abarca consideraciones tanto didácticas como metodológicas, que incluyen la contextualización de situaciones o tareas que favorecen el desarrollo del conocimiento matemático. Desde la didáctica invita a los estudiantes a diseñar un problema para la enseñanza de la función a tramos y metodológicamente que sea significativo según los estudiantes.

Brun (1996) concibió la didáctica como ciencia de la producción, organización y gestión del proceso enseñanza-aprendizaje tiene relación con la cuestión epistemológica de la transformación del conocimiento. El estudiante enfrenta a un problema de la didáctica y, por tanto, a un saber específico como lo es la función a tramos, así, no se trata de que el estudiante se encara un problema matemático planteado sino de avanzar en la comprensión y la participación en la construcción del objeto función.

Los conocimientos previos de los estudiantes, y el uso de instrumentos en la RP matemáticos está muy influenciada por los documentos curriculares y por el discurso del docente, permite observar los tipos de problemas que puedan plantear que giran en torno a las diferentes representaciones del objeto función a tramos. De esa forma, hay una articulación de los saberes de los estudiantes no como receptor de conocimientos sino como una transformación de los conocimientos en AS.

Objetivo: El estudiante diseñará un material potencialmente significativo con problemas sobre límites que incluya la función a tramos.

1. Diseñe un problema que le permita el ancle el concepto de límite de función a tramos.
2. Realice un mapa conceptual sobre los conocimientos que empleó para diseñar el material potencialmente significativo.

El problema anterior pone en evidencia la exigencia que hace el autor a los estudiantes referente a la comprensión que deben tener sobre conceptos matemáticos que convienen involucrarse en problemas que introducen el límite de una función, que pueden establecer asignándole algún significado al concepto de función según los registros como la función a tramos.

La afirmación descrita indica que cuando los estudiantes comprenden, es debido a que su AS puede ser representacional. Lo cual puede observarse en los diferentes materiales propuestos por ellos, no solo incluyen funciones a tramos en forma algebraica, sino que incita a quien resuelve el problema que lo haga en forma gráfica, lo que implica que existe aprendizaje conceptual. Además, la diferenciación progresiva y la reconciliación integradora están involucradas en estructura cognitiva y en los principios de organización jerárquica del material.

De igual manera se evidencia el desarrollo de conocimiento puesto en escena en la elaboración de un mapa conceptual. El AS puesto en acción en la variedad de procesos permite modelar el concepto de función a tramos con diferentes representaciones, da evidencia de elementos próximos a la vida cotidiana y a las actividades humanas, así como la posibilidad de establecer que los objetos y sus representaciones que conforman sistemas concretos matemáticos dan forma y estructuran los enunciados de problemas del campo analizado.

6.3.3. *Material de trabajo 3*

El material potencialmente significativo presenta la relación entre el contenido aprendido -o por aprender- y el conocimiento previo, el contenido aprendido está en relación con el subsumidor límite de una función a tramos que le permita el anclaje del concepto de continuidad a partir del análisis del límite de una función.

Objetivo: Resolver problemas sobre derivada que incluyen la función a tramos, lo cual permite anclar el concepto de continuidad siendo el concepto de límite un subsumidor.

3. Dada la función: $f(x) = \begin{cases} x^2, & x > c \\ ax + b, & x < c \end{cases}$

a. ¿La función es continua?

b. ¿Qué valores debe tomar a y b (en función de c) para que f˙ (c) exista?

4. Sea la función $f(x) = \begin{cases} |1 - x|, & 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 6, & 2 < x \leq 5 \end{cases}$

   a. ¿Es la función continua? Explique.

   b. Determine la derivada de f(x) y analice los puntos críticos.

   c. ¿Es la primera derivada una función? Explica.

Actividad

Realice un mapa conceptual basado en los conocimientos previos que asumió para resolver el problema.

Las situaciones que aparecen en este campo de enunciados de problemas involucran dos formas de analizar la función a tramos en dominios diferentes. Hace parte de estos problemas la aplicación de un concepto previo como lo es el valor absoluto, que representa una forma de función a tramos, involucrada para convertirla en otro registro de representación y permitir comparaciones con otras funciones, lo cual hace que se tenga una clara comprensión del concepto de función a tramos y que involucra su AS.

El material se considera potencialmente significativo por cuanto les permite a los estudiantes reconocer diferentes concepciones de la derivada que pueden ser construidas a partir de la información brindada.

6.3.4. *Material de trabajo 4*

El material contiene significado lógico -la responsabilidad deliberada y sustancial del material de aprendizaje con los adecuados conceptos relacionados con la función a tramos, que se hallan al alcance de la capacidad de aprendizaje humano-, mapas conceptuales, conocimientos previos de los estudiantes y problemas referentes al dominio de la función a tramos.

El significado lógico expresa naturalmente que el material en sí muestra la suficiente intencionalidad, lo cual indica que hay una manera adecuada y casi obvia de relacionarlo de modo no arbitrario con las clases de ideas y conceptos pertinentes que los estudiantes son capaces de aprender de forma significativa.

Debido a que el material es subsumible de maneras no arbitrarias, no textuales -por ejemplo, relacionable con elementos relevantes estables en la estructura cognitiva como dominio, rango, función a tramos- explica su potencial significativo y hace posible el establecimiento de relaciones significativas con el anclaje de nuevos conceptos y el surgimiento de significado, comprensión y desarrollo de conocimiento matemático.

Análisis del concepto de límite como anclaje para la derivada de una función a trozos, basado en los conocimientos previos son conceptos clave del cálculo. El concepto de derivada conlleva diversos aspectos: su perspectiva gráfica, como pendiente de la tangente a la curva; su perspectiva analítica, como límite del cociente incremental; su carácter puntual o global -es decir, la función a tramos como tal- y, se pueden utilizar aspectos que relacionan a f' y f''.

En síntesis, las características del material planteado pueden mostrar a la derivada desde la integración de una representación analítica y gráfica apoyándose en la representación de la idea de derivada en un punto a través el del cálculo de derivadas sucesivas los cuales son subsumidores para la regla de la cadena.

Objetivo: Objetivo: Anclar el concepto de derivada como razón de cambio a partir de algunos subsumidores como límite y la derivada como límite de la razón incremental.

1. Consideremos la siguiente función desde x=2 hasta x=5.

$$f(x) = \begin{cases} 1, x < 0 \\ 1 - x^2, 0 \leq x \leq 2 \\ x - 5, \quad x > 2 \end{cases}$$

   a. ¿Cuál es el valor de y cuando x=a?
   b. ¿Cuál es el valor de y cuando x = a+h?
   c. ¿Cuál es el ***cambio*** en y cuando x aumenta de a hasta a+h?
   d. ¿Cuál es la tasa de cambio promedio de y en el intervalo x de a hasta a+h?
   e. ¿Puedes usar el resultado (d) para obtener la tasa de cambio de y desde x = -1 hasta x =X (cualquiera)? ¿Si es así, cómo sería?

2. ¿Existe alguna diferencia entre la derivada de una función a tramos como razón de cambio y como tangente? Explique.

Actividad

Qué conocimientos utilizó para resolver el problema. Realice un mapa conceptual.

El problema anterior involucra una parte de la historia del Análisis Matemático, conferido a finales del siglo XIX y durante el siglo XX, es la manera como transformó las concepciones sobre la matemática en los distintos campos y específicamente, sobre la manera de concebir los sistemas de representación de procesos o fenómenos de variación y cambio.

En esta actividad se presenta la función a tramos definida analíticamente. Abarca aspectos cuantitativos de la variación y el cambio, el modelo presenta la dificultad de que la posición inicial no coincide necesariamente con el origen, de manera que la variable dependiente ya no describe espacio recorrido sino desplazamiento desde el punto de referencia, lo cual hace que se otorgue significado al aprendizaje.

Desde la didáctica se plantea cómo la enseñanza del Cálculo ha estado ceñida a veces a métodos algebraicos y no un estudio basado en la razón y el cambio. Aunque el material proporciona considerar la derivada con la concepción geométrica asociada a la idea de pendiente de la tangente, también a la concepción numérica asociada al límite de una función.

La interacción durante la práctica social incentiva a la negociación de significados entre estudiantes y docente o entre ellos mismos, ello es prioritario debido a la tendencia a favorecer y facilitar la adquisición de un aprendizaje significativo de conceptos, procedimientos, actitudes y habilidades de comunicación. De esta forma, el papel del profesor es el de proveedor de un material cuidadosamente seleccionado, organizado y mediador de significados.

En la negociación de significados, los estudiantes llegan a acuerdos temporales mediante la interacción social, y es durante ese proceso de la práctica social, que los aprendizajes pueden alcanzarse en forma significativa, la negociación garantiza un desarrollo de conocimiento compartido y comprensión del objeto en cuestión.

Los subsumidores van fortaleciéndose a través de sucesivos encuentros con instancias del concepto de función El subsunsor función se va enriqueciendo cada vez más, se va quedando con más significados, más estable y más capaz de interactuar con nuevos conocimientos. En este caso aparece el concepto de función a tramos Entonces, a lo largo de sucesivos aprendizajes significativos, el subsumidor va a servir anclaje para nuevos conocimientos, el caso de límite y derivada. Sin embargo, si un conocimiento previo no ofrece usualmente apoyo para el AS de nuevos conocimientos, no pasará espontáneamente por ese proceso de elaboración, diferenciación, cognitiva.

6.3.5. *Material de trabajo 5*

El material relaciona los conceptos existentes en la estructura cognitiva de manera que hacen posible la comprensión de varios tipos de relaciones de conceptos -por ejemplo, derivadas, límites, continuidad- y la aparición paralela de nuevos subsumidores. Permite así mismo, la interacción entre los estudiantes que ponen de manifiesto el progreso social, que podría buscarse en ciertas situaciones de labor conjunta.

El material de aprendizaje lógicamente significativo podría ser así relacionable no arbitrariamente con ideas que aparezcan al caso específicamente, como aplicaciones, extensiones, elaboraciones, modificaciones y generalizaciones más inclusivas del concepto de función y sus objetos matemáticos subyacentes.

Objetivo: Resolver diversos problemas sobre límites y continuidad que incluyen la función a tramos, lo cual permite anclar el concepto de continuidad.

1. Dada la función: $f(x) = \begin{cases} x + a, & x < 1 \\ 1 + \sqrt[2]{x^2 - 1}, & x \geq 1 \end{cases}$

    a. ¿Qué valores toman rango y el codominio de la función?

    b. ¿La función es continua?

    c. En caso negativo, ¿Qué valor debe tener **a** para que la función sea continua? Dé una breve explicación.

    d. Compruebe analíticamente que la función así obtenida es continua.

2. Realice un mapa conceptual basado en los conocimientos previos que asumió para resolver el problema.

La estrategia del material potencialmente significativo de apoyo para el aprendizaje de los elementos conceptuales de la función por parte del investigador, incluye los Mapas Conceptuales, enfocados tanto en los conocimientos previos que deben tener los estudiantes para llevar a cabo la actividad de RP, como los conceptos y conocimientos que emergen durante la actividad, la cual es enfocada a la construcción de subsumidores relacionados con la función a tramos.

Las construcciones de mapas conceptuales por los estudiantes se consolidan en cada actividad como una herramienta de apoyo para potenciar el estudio conceptual de la función a tramos y los conceptos de límite, continuidad y derivada a través de la construcción de estructuras jerárquicas conformadas por conceptos y palabras de enlace.

Podemos resaltar que los mapas conceptuales en esta tesis doctoral, son en sí un medio -mediadores- para favorecer que el aprendizaje sea significativo, no garantizan que el aprendizaje sea significativo. Son un medio de producción inmerso en las relaciones sociales de los estudiantes, son instrumentos facilitadores que promueven aquellas formas de labor pedagógica que pueden llevar a un aprendizaje significativo, es decir, son formas pedagógicas que conllevan a una transformación amplia de los conceptos matemáticos.

Esta herramienta tiene el propósito de hacer emerger los saberes previos del estudiante, lo que garantiza la negociación de significados y su comprensión como eje de desarrollo del pensamiento matemático, lo cual conduce a una conceptualización y AS.

Los conceptos adquiridos se manifiestan en la elaboración de mapas conceptuales tanto de parte de los estudiantes como el que contiene el material, es una actividad que sirve para ayudar a transformar y potenciar el desarrollo del conocimiento del que dispone el estudiante que actúa como mediador en la actividad de RP durante la producción social de conocimiento.

Lo anterior significa que con conceptos vamos mucho más allá de apuntar regularidades en eventos u objetos, se construye y se otorga significado a proposiciones. Se llega así, al aprendizaje significativo proposicional. Por ejemplo, "los mapas conceptuales pueden facilitar la diferenciación progresiva y la reconciliación integradora" (Moreira 2013, p. 9). Se puede decir que la conexión es una proposición que implica los conceptos de AS, por lo tanto, facilitan la diferenciación progresiva y reconciliación integradora.

CAPÍTULO VII

7. **Análisis de los resultados de Implementación del material potencialmente significativo**

En este apartado se presentan la aplicación del material que es considerado potencialmente significativo. Cada pregunta tiene su respectivo análisis. Así mismo, este capítulo es considerado el foco central de la investigación debido a que se describe cómo los estudiantes a través de la RP logran anclar los conceptos de límite, continuidad y derivada de funciones a tramos y a la vez desarrollar conocimiento matemático utilizando dicho material.

El análisis de los datos cualitativos funda una dinámica de labor organizada en categorización, codificación y búsqueda de patrones de procedimientos desde lo particular. Su esencia consiste en viabilizar la emergencia de enunciados sobre los conceptos y significados que formulan los datos como: palabras, textos, gráficos, imágenes pictóricas, expresiones analíticas entre otros. Los conceptos, que se despliegan de los datos, pueden ser descriptivos y empíricos.

Durante el proceso de análisis, nos basamos en una lógica dialéctica que supone una relación entre lo teórico y lo empírico efectuamos categorizaciones y codificación, luego exploramos el marco teórico y nuevamente, regresamos a los datos para refinar el análisis, de esta forma, se realiza el ciclo de análisis que examina relaciones de similitud y contigüidad respectivamente, de acuerdo con (Maxwell & Miller 2008).

La primera sección de este capítulo introduce dos momentos de observación que se han determinado en las fases tres y cuatro del capítulo III, a partir de la práctica social de los estudiantes y la aplicación del material potencialmente significativo descritos anteriormente.

La primera sección referente a la fase de influencia del AS que incluye las actividades y problemas presentados en el material, y la segunda sección en el que se resaltan algunos cambios con relación al estado inicial de la práctica social debido a la transformación de los estudiantes, que se evidencia al contrastar la RP y la transformación con el uso del material, lo que permite dar respuesta a la pregunta que dan respuesta a la pregunta de investigación: *¿En qué medida puede desarrollarse aprendizaje significativo y la comprensión del concepto de función en particular la función a tramos y cómo influyen algunos subsumidores como dominio, rango, límite, continuidad y derivada en dicho aprendizaje desde la resolución de problemas con la implementación de un material potencialmente significativo que involucra tal concepto?*

La descripción cada uno de las secciones se realiza haciendo la delineación de las actividades y la RP por parte de los estudiantes, posteriormente se describen los subsumidores anclados identificadas y el conocimiento desarrollado.

7.1. Influencia del material potencialmente significativo en el AS

Se hace referencia al trascender de los límites del conocimiento, sobrepasando los límites cognitivos; por lo que, el propósito de trascender no es que el sujeto se aproxime al objeto de estudio en toda su dimensión y naturaleza, sino el modo en que transforma los conocimientos científicos para aprender.

En este sentido, un aprendizaje trasciende y transforma al sujeto cuando tiene la característica de permanecer en la estructura cognitiva. Es decir, la influencia del material educativa hacia el AS inicia en el momento que el docente planifica y diseña los materiales potencialmente significativos, buscando congruencia de significados, para que, el estudiante sea capaz de desarrollar habilidades y destrezas en interacción, desde la práctica social, para luego ser aplicadas en diferentes contextos.

En esta sección se analizan las actividades en las que los estudiantes abarcan los contenidos de funciones, límite, continuidad y derivada de funciones a tramos.

Los estudiantes resuelven actividades y problemas relacionados con la función a tramos y con el límite de la función, el material tiene por objetivo: Realizar un análisis sobre el significado y la comprensión que los estudiantes otorgan al cconcepto de función, cuando abordan y resuelven problemas sobre la estructura general de una función y su límite en particular del concepto de función a tramos.

7.2. **Material de trabajo 1**

Se pretende que los estudiantes anclen el concepto de función a tramos y el concepto de límite. Para ello se propuso lo siguiente:

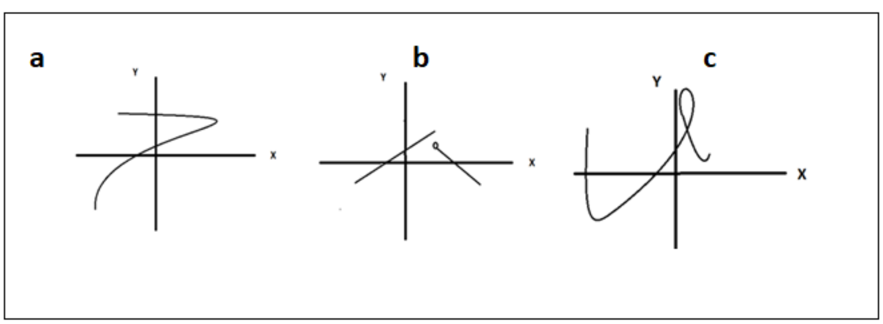
7.2.1. *Pregunta* 1

Las siguientes preguntas del material potencialmente significativo trata sobre las diferencias entre una función y una relación, y de obtener una función a tramos incluyendo el dominio y el rango, con el objetivo de anclar el concepto de función a tramos.

De las siguientes gráficas, cuál o cuáles representan funciones: Explique su respuesta.

Gráfica 7

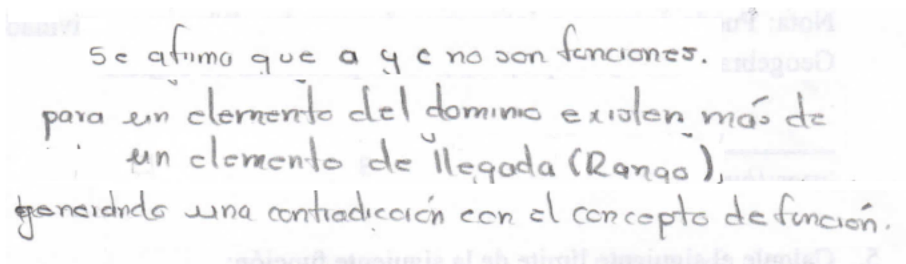
Pregunta 1



La respuesta de uno de los grupos se aprecia en la ilustración 13.

Ilustración 13

Respuesta de un grupo de estudiantes sobre concepto función

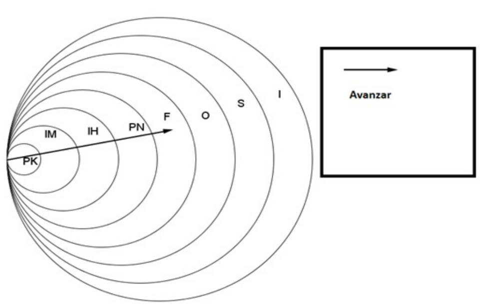

Se afirmo que a y c no son funciones.
para un elemento del dominio existen más de
un elemento de llegada (Rango),
generando una contradicción con el concepto de función.

La respuesta está fundamentada en el concepto de función y tiene un significado lógico al relacionar el dominio y el rango, los cuales actúan como subsumidores, adquisición de significados para signos o símbolos al establecer una correspondencia que ocurre entre el rango y la imagen, en este sentido, se tiene un tipo de *aprendizaje representacional*, ya que atribuyen significados a determinadas palabras -signos-.

La siguiente gráfica muestra el proceso de comprensión apoyado en la interacción social y la actividad de RP, analizado por la propuesta de Pierie & Kieren (1994).

Gráfica 8

Análisis de la comprensión del concepto función



Puede interpretarse que, para este grupo, la adquisición de significado del concepto de función ha evolucionado y cambiado su significado debido al paso de un nivel a otro del concepto, este proceso lo exalta las representaciones gráficas del material, que les permite a los estudiantes la participación en la construcción del concepto matemático teniendo en cuenta la participación en prácticas sociales y la labor conjunta.

Los estudiantes utilizan los conocimientos previos del concepto de función, pasando por el nivel de comprensión de las imágenes -pictóricas- del material, hasta llegar a la formalización del concepto.

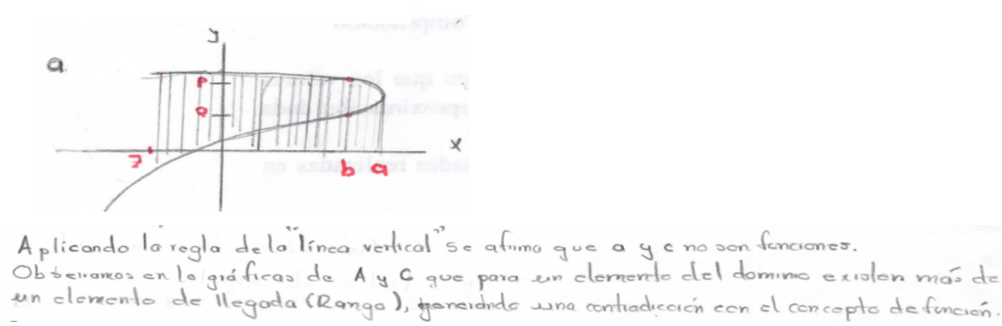
Además, los estudiantes utilizan sus propias representaciones, como indicio de que han adquirido una cierta cantidad de conceptos los tienen diferenciados y los han llevado a la adquisición de otros nuevos a través de la *asimilación de conceptos*.

La asimilación permitirá la *interacción entre el nuevo material* que será aprendido y los subsumidores lo cual ocasiona una reorganización de los nuevos conocimientos y los previos, para constituir una estructura cognitiva diferenciada.

Si se tiene $f: A \rightarrow B$ entonces para todo elemento a en A existe un elemento b en B con (a, b) en f.

Ilustración 14

Significado del concepto de función asignado por un grupo de estudiantes



En la ilustración anterior los estudiantes utilizan una "regla de clase de forma que al trazar una línea paralela al eje y si corta a la gráfica en más de un punto, ésta no es función" -es una forma pedagógica que usan los docentes para el reconocimiento de una función-.

De la anterior ilustración, puede describirse que, si (a, b) y (a´, b´) son elementos de f, entonces b = b´, lo cual confirma el concepto de función como correspondencia.

En la **gráfica 9** se observa el proceso que han seguido los estudiantes hasta el momento de determinación del uso adecuado del concepto. En la gráfica se representa los dos saltos entre diferentes niveles, inicialmente, se realiza una formalización del concepto función, demostrando que el anidamiento de niveles, así representado, ilustra el hecho de que el crecimiento en la comprensión no lineal ni unidireccional. De hecho, cada nivel contiene todos los anteriores y está incluido en los niveles siguientes.

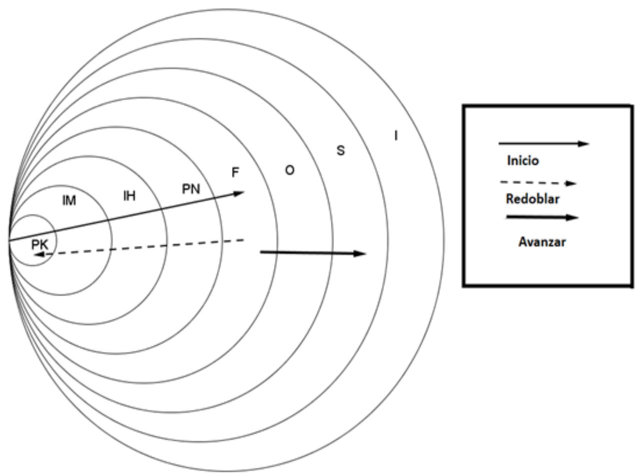
El segundo salto "Folding back" -redoblamiento- acentúa y expresa de manera gráfica el hecho de que los estudiantes han comprendido el concepto desde una naturaleza "embebida", esto es, incluye dentro de sí a otros muchos elementos que intervienen en la definición del concepto de función.

La regla "línea vertical" funge como un conocimiento previo, describe la forma como los estudiantes en interacción social, van hacia el dominio al cual se dirige el AS y la articulación con la RP en la construcción social de conocimiento, se anuncia como el *motivo* donde la *necesidad* cognitiva de los estudiantes encuentran su realización objetal que simultáneamente participa como objetivo de la actividad.

El redoblamiento permite a los estudiantes funcionar en un nivel exterior y enfrentarse con un desafío para regresar a un nivel más interno con el fin de reconstruir el concepto, es decir, ha ocurrido una asimilación obliteradora del concepto puesto en juego.

Gráfica 9

Comprensión por desdoblamiento



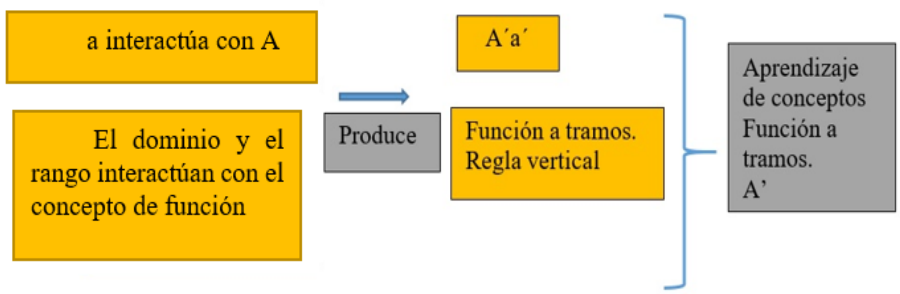
Los estudiantes regresan -redoblamiento- a los subsumidores dominio y rango que han sido interiorizados, son los subsumidores A, ya establecidos en la estructura cognitiva, lo cual indica que se ha modificado el concepto de función a, para establecer el concepto específico de función a tramos. Tal concepto aún es de corto plazo, es decir, existe asimilación obliteradora.

La **gráfica 10** revela el análisis de la comprensión desde la teoría del AS, ocurre que el proceso de asimilación no está solamente en la adquisición y retención de significados, sino también en el hecho de que implica un mecanismo de olvido subyacente de esos significados (Moreira, 2000).

Después del resultado de interacción A’ a’, se inicia el olvido como un estado de asimilación, al cual se le conoce como ***asimilación obliteradora***, es decir, se alcanza un grado de disociabilidad nulo, y A’ a’ se reduce a A’.

Gráfica 10

Inicio del principio de comprensión y asimilación obliteradora del concepto función



La regla utilizada tiene una función simbólica que deriva de la relación entre la gráfica y las rectas paralelas trazadas, se abstraen regularidades que permiten construir el *concepto cultural de función*. Esta relación es una particularidad del *aprendizaje de conceptos*. Además, expresan verbalmente el concepto, lo que indica esgrimen un significado, lo cual es propio del *aprendizaje proposicional*.

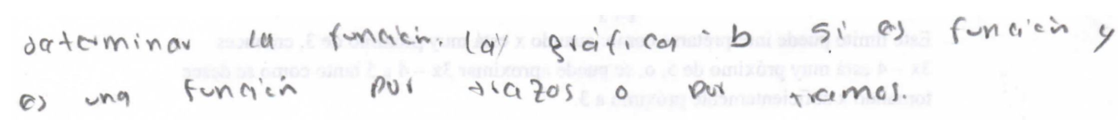
Desde la Teoría Sociocultural emerge un significado real para el grupo -significado psicológico-, lo cual se interpreta el atribuir significado como un acto de cognición, al realizar representaciones -trazar paralelas- y utilizar el conocimiento relevante en la estructura cognitiva a través del proceso de internalización de signos (Vygotsky), y de *subsumidores* (Ausubel).

Los párrafos anteriores indican que los estudiantes han logrado anclar el concepto eje fundamental de la investigación, de igual forma que lo comprenden; en términos de la actividad de la Teoría Socio cultural, al resolver el problema planteado se obtiene un indicio que los estudiantes no tienen necesidades cognitivas, es decir, se ha superado la ZDP, el AS se convierte en *acción o anclaje* que se incluye en la resolución de otra actividad o problema.

Así mismo, el proceso desarrollado por los estudiantes, permitió dejar en claro su extensión a la función a tramos, como un nivel PK de comprensión, lo cual se puede comprobar con la extensión del conocimiento previo de función a tramos.

Ilustración 15

Inicio anclaje función a tramos



El AS del concepto de función permite la transformación de la experiencia social en experiencia individual. La actividad se caracteriza por dirigirse a dar significado al concepto de función a tramos, el cual tiene significado histórico, social y cultural. La transformación permitirá desarrollo de conocimiento y nuevas acciones en la práctica social.

7.2.1.1 **Categorización desarrollo de conocimiento**. En la **tabla 20** se categorizaron las respuestas dadas por los estudiantes, de acuerdo a la categorización planteada en la tabla 2. La categorización que se ha realizado para el desarrollo de conocimiento acorde a las respuestas de los estudiantes sobre el "concepto de función", se puede asociar al grupo que corresponde a la existencia de AS.

Dentro del grupo en el cual se considera que ha ocurrido AS que corresponde a la categoría A se considera que el nuevo conocimiento interacciona con el concepto subsumidor sirviendo de anclaje del concepto de función, a partir de los subsumidores dominio y codominio o rango.

Tabla 20

Conocimientos previos y AS concepto de función

Categorías	Subsumidores	Conocimientos previos.	AS
A	Dominio, rango.	Relaciones	Evidencia, aprendizajes R, P y C

7.2.1.2. **Desarrollo de conocimiento matemático y comprensión**. La **tabla 21** muestra la distribución de las categorías y subcategorías de los conocimientos matemáticos que emergen o desarrollan los estudiantes cuando solucionan un problema o una actividad, de igual forma se indica los niveles de comprensión (Pirie & Kieren).

De otro lado se tiene la participación en la construcción de objetos matemáticos (Kaput), y las dos representaciones del objeto como medios de expresión de un mismo objeto, son independientes, y cuando se perciba la funcionalidad que permite el uso y no los usos particulares, el alumno habrá aprendido y comprendido, lo cual se traduce en el nivel esperado.

Tabla 21

Sistema de categorías de desarrollo de conocimiento matemático y comprensión

Categoría	Subcategoría	Desarrollo de conocimiento	Comprensión
Conceptos	Dominio	Definición formal, incluye variable independiente.	PK.
	Rango	Definición formal, usa la variables dependientes e imágenes.	PK.
	Referencia conceptual	Más de un punto de corte para definición formal de función.	IM: realiza acciones ancladas en los conceptos de Df y Rf, representación particular del nuevo tópico matemático.
	Función	Emerge la función como correspondencia y como relación de dependencia. Presencia del concepto de función a tramos.	Un proceso de representaciones múltiples, permiten al estudiante la participación en la construcción del objeto función.
Registro de representaciones	Registros semióticos	Articulación entre lo gráfico y lo variacional, en la relación de dependencia de la función.	

7.2.3. **Comparación pretest y material potencialmente significativo subsumidores: dominio y codominio.**

La **tabla 22** contiene los elementos con los cuales se realizarán las comparaciones entre el pretest y el material de los diferentes conceptos, que intervienen cuando se exploran los aprendizajes significativos y el tratamiento de los fenómenos que ocurren en la producción y desarrollo de conocimiento.

Tabla 22

Comparación pretest y material potencialmente del significativo del concepto función

	CP	EA	ES	F	G	L
Pretest		y= f(x) usa x como variable dependiente e independiente.			Gráfica función como máquina	Definición desde Teoría de conjuntos.
Material potencialmente significativo	Regla de la línea vertical.		f: A→B	Expresa la función como pares ordenados.	Aplican regla paralela vertical.	Relación entre elementos dominio y rango, desde la Teoría de conjuntos.

Para realizar una comparación entre el pretest y el material potencialmente significativo, se realizó la categorización para el anclaje de cada uno de los conceptos que subyacen al concepto de función y en particular al de función a tramos, a partir de las respuestas de los estudiantes.

Desde la comprensión, puede decirse que, resultó de un modo manifiesto el conocimiento como el desarrollo de una actividad intencional, dirigida a un estado de cosas que debe aprehenderse, que tiene como resultado lo que se denomina saber disponible intersubjetivo, organizado y estructurado mediante representaciones (Krings, Baumgartner & Wild, 1978).

En la categoría A, se considera anclaje del concepto de función cuando se conoce el concepto, o definición y se es capaz de aplicarlo y relacionarlo con a una situación diferente a aquella en la cual fue aprendido, se comprende el concepto y los conceptos de dominio y codominio emergen como subsumidores. Además, se transita de un registro a otro sin dificultades. Existe, además, una relación el nuevo material potencialmente significativo. En este caso se considera que ocurrió aprendizaje subordinado y aprendizaje supraordinado.

En la categoría B, no se considera anclaje del concepto función cuando se conoce el concepto y no se es capaz de aplicarlo o relacionarlo en diferentes contextos en la cual fue aprendido, los conceptos de dominio y codominio no son subsumidores, es decir, no se puede describir el proceso de asimilación en términos de la interacción A´a´, existe asimilación obliteradora.

Comparando con los conceptos del pre-test, el concepto de función proporcionado por los estudiantes cuando utilizan material potencialmente significativo, éste logra aportar un significado lógico al concepto de función, es lo manifiesto en la aproximación a la definición formal de función. Lo anterior indica que en el pretest existe aprendizaje mecánico.

En la aplicación del material potencialmente significativo el aprendizaje es significativo. Los subsumidores se han logrado establecer en la estructura cognitiva, teniendo en cuenta en cierta forma los símbolos y los registros de representaciones para que, finalmente el concepto de función y en particular el de función a tramos empiece a ser comprendido por los estudiantes.

Podemos concluir del análisis de los resultados que los estudiantes se ubican en el grupo A, con un leve inicio a la comprensión del concepto de función a tramos cuando utilizan material potencialmente significativo.

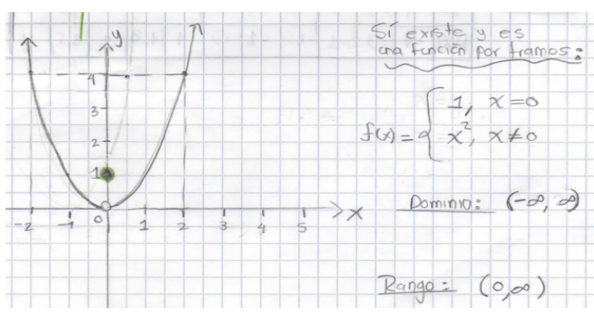
7.2.2. *Pregunta 2*

¿Existe una función que asigne a cada valor diferente de cero su cuadrado y a cero le asigne 1? En caso afirmativo, ¿Es importante conocer el dominio y el rango de la función? Realice la representación algebraica de la función y realice su gráfica.

Con el desarrollo de la pregunta anterior, la noción de función va evolucionando, la respuesta dada por un grupo de estudiantes muestra la relación entre la expresión analítica -algebraica- y su respectiva gráfica.

Ilustración 16

Anclaje función a tramos de un grupo de estudiantes



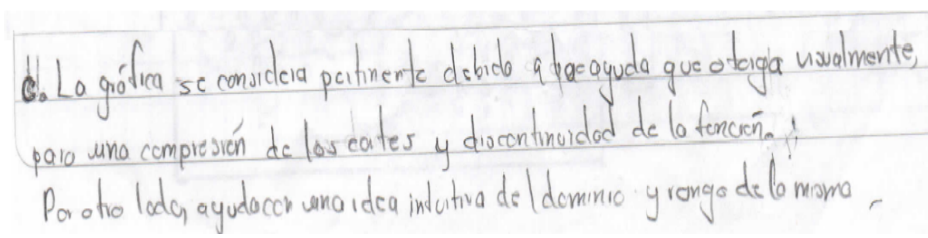
El enfoque cognitivo de AS de alguna manera tiene en cuenta los registros semióticos y su relación con la Teoría sociocultural y la incidencia en el aprendizaje de conceptos matemáticos, en esta investigación el objeto de estudio es la función y en particular la función a tramos.

La ilustración anterior revela el desarrollo de conocimiento matemático a partir de conocimientos previos como dominio, codominio y función, conocimientos que han interiorizado -AS- desde la práctica social, propician la forma en que las acciones de los estudiantes adquieren ciertas comprensiones durante la actividad de RP matemáticos.

La importancia de realizar la gráfica de la función se observa a continuación, donde se establece con claridad la representación visual que se apoya en los conceptos del plano cartesiano para hallar el dominio y rango y además la no continuidad de la función a tramos.

Ilustración 17

Importancia de la gráfica dada por un grupo de estudiantes


d. La gráfica se considera pertinente debido a la ayuda que otorga visualmente, para una compresión de los cortes y discontinuidad de la función.

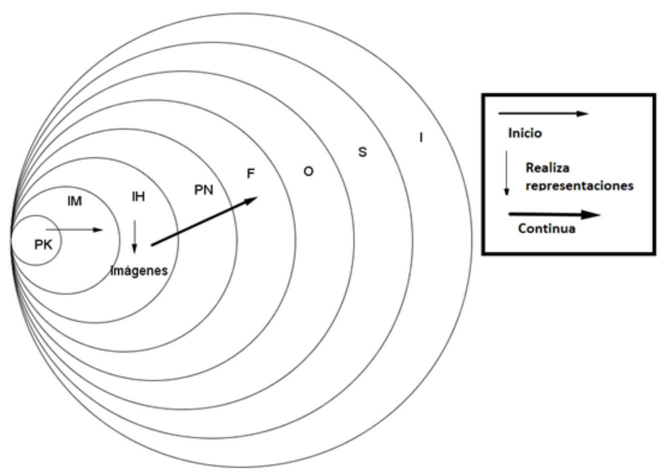
Por otro lado, ayuda a crear una idea intuitiva del dominio y rango de la misma.

La siguiente gráfica muestra las acciones realizadas por los estudiantes en los niveles adecuados, acciones que realizan sobre el objeto como lo son la imagen gráfica y su representación algebraica. Además, establecen un análisis del resultado, puede decirse que han generado un modelo completo para la comprensión del concepto de la función a tramos.

Desde la Teoría de la Actividad los estudiantes realizan acciones que son la búsqueda y desarrollo de conocimiento, en este caso la representación de la gráfica y la expresión analítica, su uso genera la operación sobre ellas como las condiciones informativas para conseguir el dominio y el rango de forma histórica con la representación de los reales por $(-\infty, \infty)$. Se espera que, más adelante se ancle este contenido, es decir sea interiorizado para solucionar problemas referentes a los límites y las derivadas de la función a tramos.

Gráfica 11

Hacia la comprensión y formalización de la función a tramos



En la Teoría sociocultural, la función sirve también como significante para *el concepto cultural f(x)*, es decir, la equivalencia se lleva a cabo entre la expresión algebraica y los atributos criteriales -esenciales- que tiene la representación gráfica y sus elementos del dominio y el rango.

Lo anterior indica que la influencia de la interacción social y la mediación -por medio de material potencialmente significativo- son elementos indispensables para que se produzca AS, y en consecuencia la comprensión del objeto función a tramos al reconocer en el objeto todo lo que en él es conocible.

En esa interacción de la práctica social mencionada anteriormente, lo que caracteriza el AS es el *aprendizaje proposicional*, de una forma general los estudiantes expresan sus ideas a través de los términos componentes del concepto de función a tramos, logrando expresar y representar sus ideas a través de símbolos que son elementos esenciales del concepto de función a tramos.

Desde la Teoría de la actividad, la acción de obtener información sobre el problema de la función a tramos, llevó a los estudiantes a incluir otras acciones más específicas como la de realizar la gráfica, revisar el dominio simbolizando $(-\infty, \infty)$ y el análisis en el rango con el intervalo (0,∞).

Además, formando parte de las acciones mencionadas, pueden existir otras que se definen por objetivos cada vez más específicos. Cuando el sujeto -estudiante- domina cada una de las acciones se puede afirmar que ha adquirido la comprensión del objeto matemático y como consecuencia de ello lo ha anclado en su estructura cognitiva.

> Como se describió en la metodología, sobre el *nivel epistémico,* para esta investigación nos referimos a los diferentes usos del lenguaje simbólico, basados en los diferentes registros de representación los cuales tratan con variados grados de actividad cognitiva, siendo el nivel epistémico central la influencia del AS (Wells,1987).

7.2.2.1. **Categorización desarrollo de conocimiento**. La categorización que se ha realizado con respecto al desarrollo de conocimiento sobre el "concepto de función a tramos" se muestra en la **Tabla 23** la cual manifiesta la caracterización del anclaje de la función a tramos a partir de los subsumidores dominio, rango y las imágenes físicas de la gráfica de la función y su respectiva expresión analítica.

Dentro del grupo en el cual se considera que ha ocurrido AS que corresponde a la categoría A se considera que el nuevo conocimiento interacciona con los subsumidores dominio y rango sirviendo de anclaje del concepto de función a tramos, como se observa en la tabla siguiente.

Tabla 23

Anclaje concepto función a tramos

Categorías	**Subsumidores**	**Anclaje de conceptos de función a tramos**	**Desarrollo conocimiento.**	**AS**
A	Dominio, rango.	Gráfica y expresión analítica.	Función, anclaje función a tramos	Evidencia: C, R La gráfica construida y la respectiva expresión analítica.

Los análisis anteriores dan cuenta del objetivo: *Analizar los subsumidores para el aprendizaje del concepto de función y de la función a tramos y los conocimientos desarrollados que emergen de un sistema de práctica social y cultural como consecuencia de la naturaleza de la actividad resolución de problemas*.

7.2.2.2. **Desarrollo de conocimiento matemático y comprensión**. Puede observarse la relación que efectúan los estudiantes al transitar por los diferentes registros de representación de la función a tramos, el desarrollo de conocimiento matemático y la comprensión del concepto.

Tabla 24

Desarrollo de conocimiento matemático

Categoría	Subcategoría	Desarrollo de conocimiento	Comprensión
Conceptos	Dominio	Definición formal, incluye variable independiente con referencia a los conjuntos X e Y.	PK
	Rango	Definición formal, usa la variables dependientes e imágenes, como referencia del conjunto Y.	PK
	Referencia conceptual	Aparece el concepto de función a tramos al comprender la representación gráfica de la función. Hay elementos teóricos implícitos como referentes teóricos para identificar la función a tramos.	IM: Aparece la imagen física del concepto de función a tramos. Tránsito de representación gráfica a representación analítica.
	Función	Emerge la función como correspondencia y como relación de dependencia, entre los conjuntos X e Y.	IH: Ubicación de puntos en la gráfica de acuerdo al concepto previo de dominio.
Registro de repre	Registros semióticos	Articulación entre lo gráfico y lo variacional,	F: Dos representaciones de un mismo objeto, ayudan a

	en la relación de dependencia de la función.	la comprensión del objeto función a tramos.
Variaciones conceptuales	Concepto de función a tramos a partir de la gráfica realizada.	

7.2.2.3. **Comparación entre el pretest y material potencialmente significativo**. En la siguiente tabla se presenta la comparación del anclaje de función a tramos, sin uso de material y cuando se usa un material potencialmente significativo.

Tabla 25

Comparación anclaje de la función a tramos

	CP	EA	ES	G	L	R
Material potencialmente significativo	Dominio, rango, expuesto desde la Teoría de conjuntos.	f(x) Construyen la función a tramos, otorgándole significado.	$\mathbb{R}$ $(0, \infty)$	Realizan gráfica de f(x)todos los grupos.	Proponen la función a tramos.	Utilizan varios registros semióticos
Pretest	Uso inadecuado. Existe contradicción con respecto al concepto otorgado a las variables.		Las usan parcial mente	Dos grupos realizan la gráfica correcta mente.		

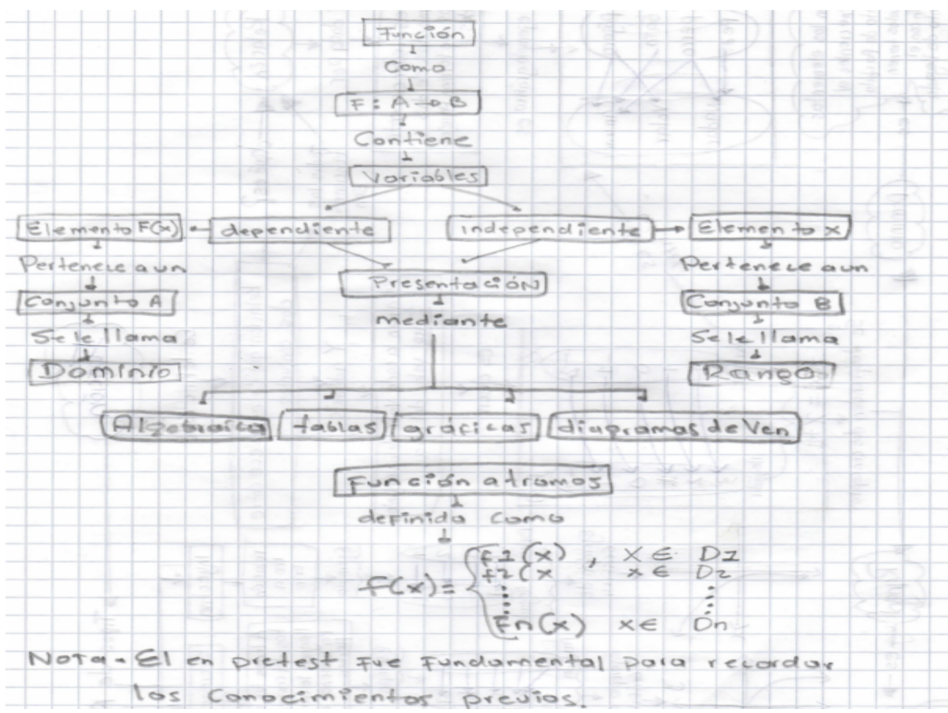
7.2.3. *Pregunta 3*

Realizar un mapa conceptual con los conocimientos previos utilizados que le ayudaron a solucionar los problemas anteriores.

El mapa conceptual propuesto por los estudiantes apoya el desarrollo de conocimientos a partir de los conocimientos previos, como ese proceso dinámico en el que antiguos y nuevos conocimientos son transformados, obteniéndose una estructura cognitiva más diferenciada que tiende a una organización jerárquica del concepto de función (Moreira 2000).

Ilustración 18

Mapa conceptual de conocimientos previos esbozado por uno de los grupos



Los conocimientos previos se sintetizan en estructuras conceptuales de significados que los estudiantes han atribuido al concepto de función.

El mapa muestra los conocimientos previos que han anclado los estudiantes en su estructura cognitiva, allí se encuentran los conocimientos que los estudiantes han desarrollado, tal desarrollo se obtiene al vincular la nueva información a los conceptos anclados como se describe a continuación.

El mapa conceptual ha proporcionado los procesos implicados en la construcción y desarrollo de conocimientos a manera de proceso inductivo, entendido a modo de *Aprendizaje Subordinado*, es decir, la nueva información A´a´ -la definición del concepto de función- adquiere significado a través de la interacción con los subsumidores de función definida en como $f: A \rightarrow B$ y los conceptos de variable dependiente e independiente.

El mapa conceptual realizado por los estudiantes tiende a una organización jerárquica en relación al nivel de abstracción de los conceptos que conllevan al dominio y al rango de la función y la emergencia del concepto de función a tramos con un nuevo significado de unión de dominios, lo cual refleja la subordinación del nuevo conocimiento a la estructura cognitiva (Moreira 2000).

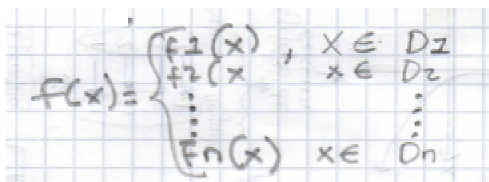
Lo anterior refleja una relación de subordinación del nuevo material en relación con la estructura cognitiva preexistente (Moreira 2000). Este proceso de subsunción de conceptos implica subordinación bajo conceptos más elaborados como la definición en parte formal de función a tramos como se exhibe en la siguiente ilustración.

Así que, como se propuso en la metodología, el mapa conceptual es una estrategia de categorización que permite realizar una codificación y análisis temático (Miles y

Huberman, 1994), lo cual consiente en llevar a cabo el desglose jerárquico con conexiones con los diferentes componentes del objeto de estudio.

Ilustración 19

Concepto función a tramos de un grupo de estudiantes



Aparecen categorías como la *representación simbólica del concepto de función*, la cual permite a los estudiantes desglosar el mapa en una descripción de un sistema, un proceso, un conjunto de fenómenos, que al final se ve reflejado con la representación simbólica del concepto de función a tramos. Al respecto Duval (2016) aporta:

> La situación epistemológica particular de las matemáticas con respecto a los otros campos de conocimiento conduce a conferir a las representaciones semióticas un rol primordial. En primer lugar, constituyen el único medio de acceso a los objetos matemáticos; lo cual plantea el problema cognitivo del paso de la representación de un objeto a otra representación de ese mismo objeto. (p. 63)

Pero, las representaciones semióticas también como categoría pueden ser *signos incluido cualquier lenguaje* y sus asociaciones complejas, que se producen de acuerdo con reglas y que permiten desarrollar nuevo conocimiento y no solo para comunicar cualquier representación mental particular.

En este caso a partir del desglose de la palabra variable, los estudiantes demuestran que han comprendido los conceptos subyacentes al de función -variable dependiente e independiente, dominio, rango y función a tramos- por lo tanto, los subsumidores anteriores se han anclado y se adquirieron por formación de conceptos creando así condiciones de AS.

Aparece el concepto de variable como una categoría que otorga un rango de valores no especificado y que existe la relación funcional entre dos conjuntos específicos: Dominio y rango. En esta representación los registros indican que existen dos variables, las cuales se asocian a los símbolos x y *f(x),* donde x representa la cantidad de magnitud independiente y *f(x)* la cantidad de magnitud que se relaciona con x, la cual es la variable dependiente.

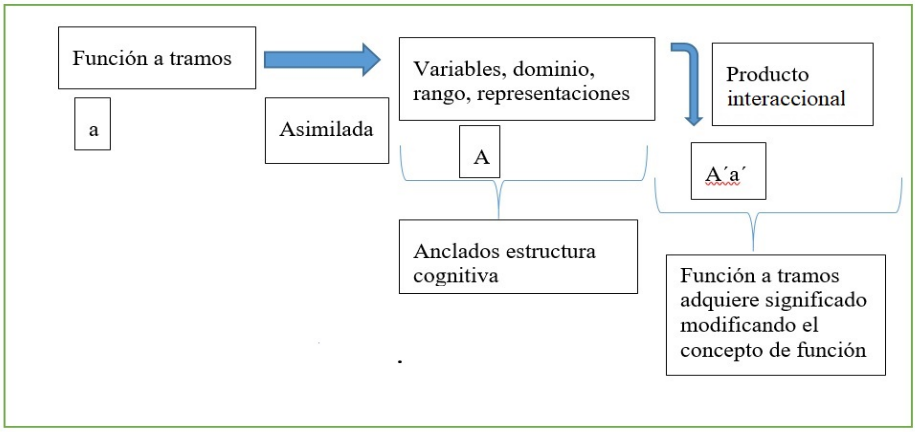
A partir de las dos representaciones anteriores se mencionan varios tipos de representación de las variables: algebraico -analítico-, tabular, gráfico y diagramas que dependen de su naturaleza discreta o continua, el problema de lo discreto tiene restricciones en las tabulares y diagramas de Venn y de los rangos de visualización en el registro gráfico; esta limitación imposibilita la determinación de una función a taramos. Por su parte la representación algebraica o gráfica permiten la generalización de la función y se modificará y será más inclusivo en el nuevo concepto de función a tramos.

La nota de los estudiantes en la **ilustración 18** indican que *el pretest fue fundamental para recordar los conocimientos previos*, nos indica que hubo un proceso de reducción de conceptos, los cuales formaron *un olvido temporal* en su estructura cognitiva, es decir, el concepto de función a tramos a comprender es (a) dominio, rango y tipos de representación (A) son los conocimientos previos.

El producto interaccional a´ A´ no fue transformado por los estudiantes antes del pretest, el proceso de asimilación ingresó a la fase de *asimilación obliteradora -olvido-* pero, se convirtió en AS en el material potencialmente significativo, así se expone en el mapa conceptual, y con el siguiente análisis dado en la siguiente gráfica:

Gráfica 12

Aprendizaje significativo y comprensión función a tramos



En este sentido, (A) adquiere significado adicional (A´), pues f(x) está compuesta por varias funciones y cada una definida en un dominio y rango particular. Como consecuencia podemos afirmar que este producto interaccional (a´ A´) favorecerá la retención de (a´) y por lo tanto servirá de anclaje para la comprensión de los conceptos de límite y continuidad.

El producto de la interacción del proceso de aprendizaje no es solamente el nuevo significado de (a'), sino que incluye la modificación -transformación- del subsumidor y es el significado compuesto (A' a')

El análisis desde la Teoría sociocultural, se planteó a partir de la concepción que Vygotsky esbozó sobre los procesos mentales superiores donde se consideran como funciones de la actividad mediada, e implanta los instrumentos materiales y los psicológicos, indica, además, que la acción humana, tanto en el plano social como en el individual, está mediada por herramientas y signos.

El acto instrumental en este mapa conceptual es la utilización y el manejo de símbolos y signos como f(x), que desarrollan en los estudiantes durante el proceso de mediación del cual emerge los conceptos de variable, conjunto, dominio, rango entre otros, esto implica una atención consciente y mediada, una memoria voluntaria.

En este sentido, los estudiantes otorgan significado al concepto de función a tramos, es más una acción mediada e interiorizada mediante una idea o representación codificada en símbolos culturales e históricos como f(x) en el acto de escribir en el mapa conceptual. Es decir, se recupera la conexión de la mente con el mundo externo, es recuperar el sentido y no sólo el significado del concepto.

Desde esta Teoría el conocimiento se desarrolla a través de la interacción entre los individuos y su medio, por lo que la interacción, y la mediación por medio de material son elementos indispensables para que se produzca aprendizaje.

El conocimiento se funda de manera social, lo cual implicó tener aprendices activos, en el sentido de realizar una labor conjunta, que observan y participan en actividades culturales en relación con los contenidos adquiridos previamente por el individuo en su interacción con otros.

Desde el material potencialmente significativo cimentado en la RP, los estudiantes identifican los contenidos y se plantean los objetivos de aprendizaje. Lo anterior facilitó la comprensión de los conceptos de dominio y rango y función a tramos, conocimientos relacionados con los ya aprendidos significativamente.

La actividad de RP a través del material contribuyó al desarrollo de conocimiento, y a activar los procesos mentales superiores como dibujar, escribir, contar, ello indica que es una actividad mediada socialmente significativa (Kozulin, 1994).

Podemos afirmar que el desarrollo de conceptos -mapa conceptual- a partir del concepto de función, permiten a los estudiantes la participación en la construcción de objetos matemáticos, además, admitimos que el conocimiento es estable como consecuencia de que pueden articular las diferentes representaciones del concepto sin contradicciones (Kaput, 1989).

Comprender significa percibir mentalmente algo, adquirir el significado de algo, reconocer en un objeto todo lo que en él es conocible. La comprensión en este sentido, resulta como un modo manifiesto de conocimiento.

Los análisis anteriores han permitido la consecución del objetivo: *Identificar la posible vinculación de los aprendizajes significativos adquiridos con el desarrollo de nuevos conceptos y conocimientos matemáticos a través de la RP que involucran la función a tramos, mediante un material educativo diseñado para ser potencialmente significativo.*

7.2.4. *Pregunta 4*

> Consideremos el siguiente límite : $\lim_{x\to 3}(3x-4)=5$
>
> Este límite puede interpretarse como: cuando x está muy próximo de 3, entonces 3x – 4 está muy próximo de 5, o, se puede aproximar 3x – 4 a 5 tanto como se desee tomando x suficientemente próximo a 3.
>
> En este sentido, ¿se puede hacer que 3x – 4 diste de 5 menos de una unidad? Compruébelo.

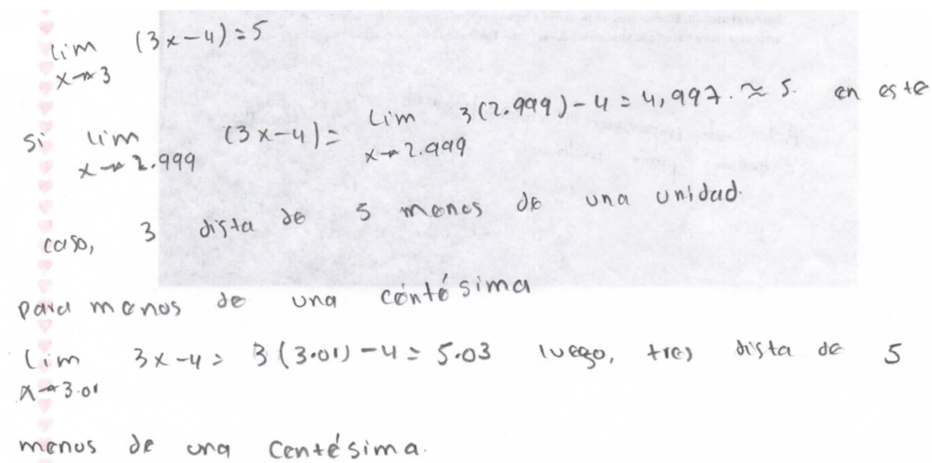
Esta pregunta está planteada en el registro algebraico y pretende que los estudiantes comprendan el significado del límite como una aproximación a un número a partir de diferentes registros, lo cual obliga a dar una explicación de tal comprensión.

Los grupos respondieron de diferentes formas, usando algunos tipos de registros.

Una primea clase de respuesta toma aproximaciones a 3, como se muestra confirma en la ilustración siguiente, a la variable independiente se le asigna un valor de 2.999.

Ilustración 20

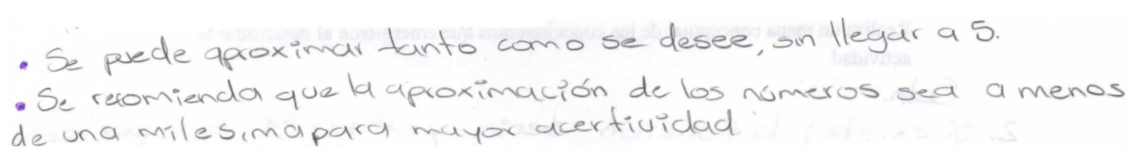
Cálculo de un grupo de estudiantes de un límite por aproximación



Otro tipo de respuesta se da en un lenguaje natural, así se observa a continuación:

Ilustración 21

Explicación sobre la comprensión de límite

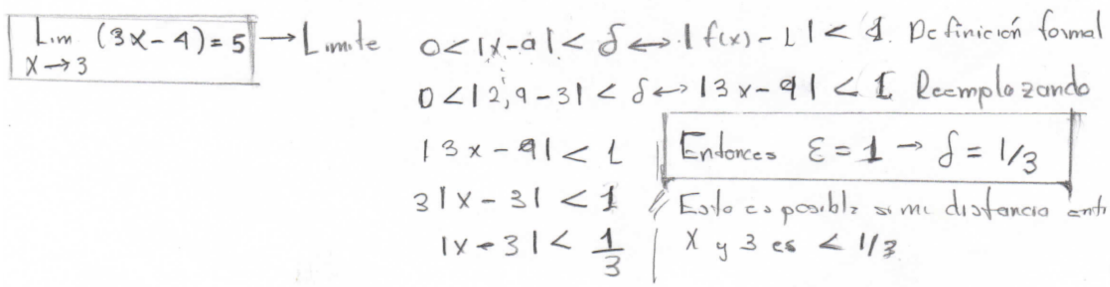


Puede evidenciarse que este grupo comprende el concepto de límite a partir del concepto de entorno, puede intuirse que conceptualizan una proximidad arbitraria que se dé de 3. Es clara la posición con respecto a la reducción del entorno.

Uno de los grupos usa el registro algebraico implícito en la definición formal de límite, como puede observarse a continuación:

Ilustración 22

Demostración formal de un límite, definición métrica



Lo anterior indica que si x dista de 3 menos de $\frac{1}{3}$, entonces 3x – 4 dista de 5 menos de una unidad. Por lo tanto, debe tomarse un $\delta < \frac{\epsilon}{3}$ para obtener el límite dado.

Lo que se ha demostrado es qué tanto puede aproximarse 3x-4 a 5, lo cual se expone en las ilustraciones 19 a 23 se afirma "se pueden aproximar tanto como se desee" , para lo cual basta con tomar una distancia arbitraria $\epsilon > 0$, para ello se halla un intervalo (3 - $\delta, 3 + \delta$) para x que satisfaga la condición | (3x – 4)- 5 | $< \epsilon$.

Referente al registro geométrico -gráfico-, lo exponen los estudiantes como se aprecia en siguiente ilustración.

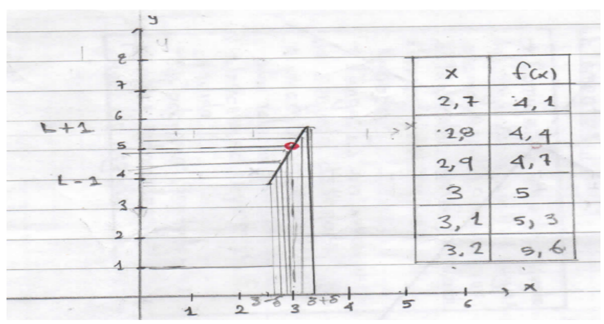
En este registro, se evidencia la comprensión del límite desde una interpretación geométrica, el punto (3,5), que representa a (x_0, L) es un punto de la gráfica -recta-

El punto de acumulación $x_0 = 3$ con 3 en el dominio de f(x), es la parte importante del concepto de límite que desarrollan los estudiantes, es claro para ellos se tiene un entorno con centro en 3: $V_\delta(3) = (3-\ \delta, 3+\delta)$ tal que $f(x) \in (L-\epsilon, L+\epsilon)$.

El límite de una función ha sido comprendido por los estudiantes como una forma de aproximación a un punto. La comprensión entendida como cuando "el individuo perciba las representaciones del objeto como medios de expresión de un mismo objeto y, por tanto, independice el objeto de sus representaciones…" (Pecharromán, 2013, p. 132).

Ilustración 23

Forma gráfica y tabular del límite



Lo anterior indica que no importa lo cercano que están las rectas y = L+ ϵ y, y = L- ϵ se pueden obtener las rectas verticales x = $x_0 + \delta$ y x = $x_0 - \delta$, de tal forma que todos los puntos de f(x), excepto posiblemente (x_0, f(x)), estén entre las rectas verticales y las horizontales.

Podemos afirmar por lo tanto que, los estudiantes han tenido un AS con nueva información sobre el objeto límite de una función. Al mismo tiempo afirmamos que hubo adquisición de significado para ese objeto, lo cual se revela en el uso de los símbolos y signos, de asociar de manera coherente las correspondientes representaciones algebraicas, gráficas, simbólicas o tabulares con los conceptos previos en la estructura cognitiva de cada uno de los estudiantes.

Es evidente cómo el aprendizaje es un fenómeno social, ocurre y se desarrolla en las relaciones establecidas entre sujetos mediados por intercambios simbólicos e instrumentos materiales. De esta manera, el entorno social constituye la fuente en la que se basa el desarrollo conceptual.

7.2.4.1. **Categorización desarrollo de conocimiento.** A partir de la pregunta cuatro, sólo analizaremos el anclaje de los conceptos que intervienen en el problema y el desarrollo de conocimiento matemático subyacente en la respuesta.

Tabla 26

Anclaje concepto límite

Categorías	**Subsumidores** **Límite por aproximación y límite formal**	**Tipo de aprendizaje**	**Anclaje de conceptos de límite de la función a tramos**	**Desarrollo conocimiento.** **Comprensión.**	**AS**
A	Si	R, C y P	Gráfica y analítica.	Concepto de límite de una función a tramos por aproximación y utilizando el concepto formal $\varepsilon - \delta$	Evidencia de AS

La tabla siguiente realiza una apreciación de las formas de desarrollo de conocimiento matemático cuando los estudiantes solucionan una actividad referente al límite de una función.

Tabla 27

Desarrollo de conocimiento

Categoría	Subcategoría	Desarrollo de conocimiento
Conceptos	Dominio	X_0 punto de acumulación de un conjunto A, donde, A tiene puntos diferentes de X_0, en cualquier proximidad que se dé a X_0.
	Aproximación al concepto de límite	Sustitución de la variable por un valor. Realización de tabla de valores aproximados a X_0
	Referencia conceptual	Punto de acumulación, límite por aproximación.
	Límite	Concepto formal de límite, por $\epsilon - \delta$.
Registro de representaciones	Registros semióticos	Articulación entre registro gráfico y variacional.
	Variaciones conceptuales	Concepto de límite a partir de la gráfica realizada, punto de acumulación y entornos.

7.2.5. Pregunta 5

Calcule el siguiente límite en x=2 de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 \ si \ x < 2 \\ -2x + 5 \ si \ x \ \geq 2 \end{cases}$$

a. ¿Es importante conocer el dominio y el rango de la función?
b. ¿Tiene importancia el cálculo de imágenes?

c. ¿Tiene importancia realizar una gráfica de la función?

d. Compruebe por la definición formal que el límite es el obtenido.

e. ¿Qué sentido tiene la función a trozos en el cálculo de límites?

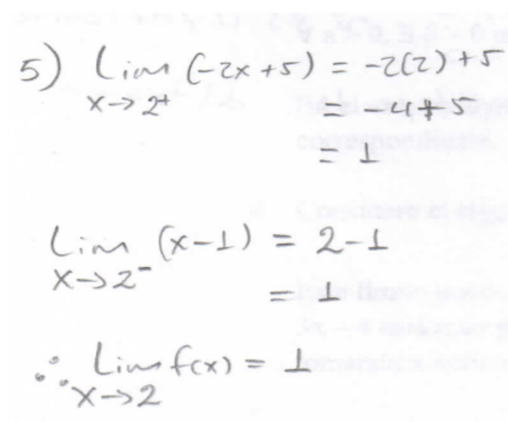
f. ¿Qué significado le otorga al concepto de límite de una función?

Realiza un mapa conceptual de los conocimientos previos utilizados en la solución de la actividad.

Los estudiantes responden sin dificultades el problema del límite, recurriendo a los límites laterales, como se observa en la **Ilustración 24**.

Ilustración 24

Límite de función a tramos. Uso de límites laterales



5) $\lim_{x \to 2^+} (-2x+5) = -2(2)+5$

$= -4+5$

$= 1$

$\lim_{x \to 2^-} (x-1) = 2-1$

$= 1$

$\therefore \lim_{x \to 2} f(x) = 1$

Los estudiantes han integrado el significado de la noción de límite puntual de una función a tramos. Para ello utilizaron conocimientos previos de límite lateral, que fueron anclados con anterioridad.

Construyeron un proceso de aproximación a un número determinado (x = 2) en el dominio a partir de los valores de x por la derecha, y por la izquierda de x.

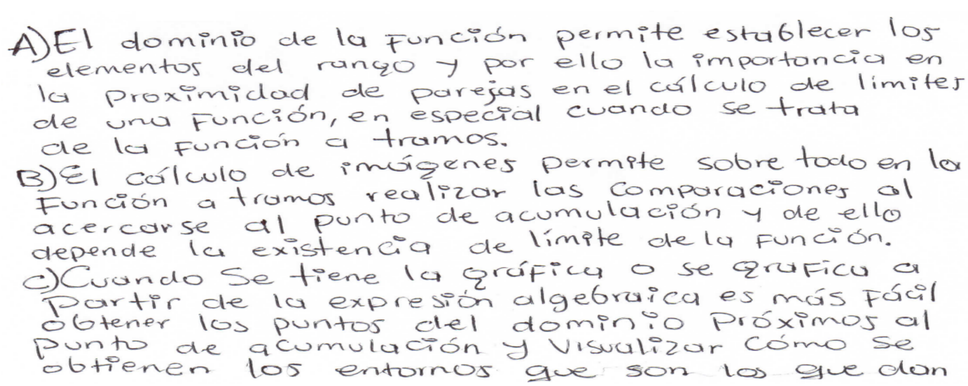
Se evidencia que los estudiantes ya poseen un dominio del contenido matemático, a un nivel procedimental. Esto a su vez, tiene repercusiones en cuanto a la estrategia de uso del material potencialmente significativo, lo que se sustenta en el uso, de algoritmos y reglas referentes al concepto de limite lateral aplicado a la función a tramos.

El uso de instrumentos, en este caso el material potencialmente significativo en la mediación influyó en el desarrollo cognitivo, podemos afirmar que los estudiantes han logrado intercambio de significados del objeto límite de una función, y en particular han comprendido el concepto de función a tramos.

Los estudiantes responden a los ítems a, b y c ligados al cálculo del límite de la función a tramos.

Ilustración 25

Anclaje del concepto de función a tramos



A)El dominio de la Función permite establecer los elementos del rango y por ello la importancia en la proximidad de parejas en el cálculo de límites de una Función, en especial cuando se trata de la Función a tramos.
B)El cálculo de imágenes permite sobre todo en la Función a tramos realizar las comparaciones al acercarse al punto de acumulación y de ello depende la existencia de límite de la Función.
C)Cuando Se tiene la gráfica o se grafica a partir de la expresión algebraica es más fácil obtener los puntos del dominio próximos al punto de acumulación y visualizar cómo se obtienen los entornos que son los que dan

Se observa en la anterior ilustración cómo los estudiantes establecen argumentos -forma verbal- más allá del manejo simbólico que relacionen el dominio y el rango de la función a tramos y en particular dotan de significado a la función a través de la noción de relaciones entre variables -pares ordenados-.

Por otra parte, igual que en las representaciones métricas coinciden que el entorno debe ser reducido “puntos del dominio próximos al punto de acumulación” que es coherente con lo indicado, lo anterior muestra que los estudiantes poseen un esquema previo en la estructura cognitiva, y asocian un significado por medio de la aproximación -forma métrica del límite-.

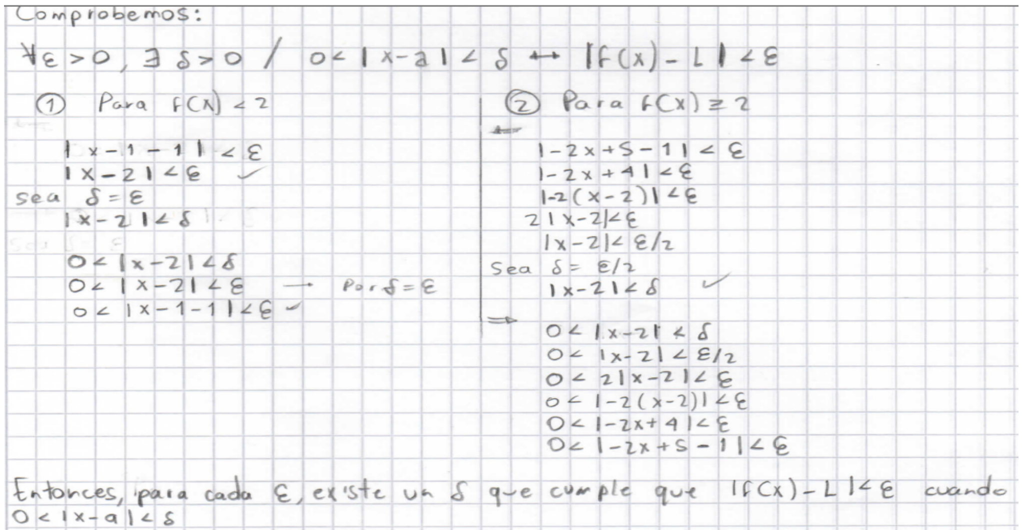
Lo anterior verifica la hipótesis que planteada: *Es posible tanto comprender como dar significado a un objeto matemático, cuando se tiene la capacidad de realizar transformaciones y transitar por diferentes sistemas de representación del objeto en cuestión.*

Desde el sustento teórico sociocultural de la investigación, se plantea que el conocimiento matemático se fundamenta en las prácticas sociales. Son estas prácticas las que favorecen el desarrollo del conocimiento matemático, durante la actividad de RP. Es la praxis mediada por el material potencialmente significativo la que favorece y permite la emergencia y significación del concepto de función a tramos.

El material didáctico indujo al estudiante al uso de diferentes registros de representación como el gráfico, simbólico y escrito, los cuales son convenientes en el desarrollo del conocimiento matemático y la comprensión del concepto.

Ilustración 26

Solución dada por un grupo al límite de la función por concepto métrico



Comprobemos:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ / \ 0 < |x-a| < \delta \leftrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

① Para $f(x) < 2$

$|x - 1 - 1| < \varepsilon$

$|x - 2| < \varepsilon$

Sea $\delta = \varepsilon$

$|x - 2| < \delta$

$0 < |x - 2| < \delta$

$0 < |x - 2| < \varepsilon \longrightarrow$ Por $\delta = \varepsilon$

$0 < |x - 1 - 1| < \varepsilon$

② Para $f(x) \geq 2$

$|-2x + 5 - 1| < \varepsilon$

$|-2x + 4| < \varepsilon$

$|-2(x-2)| < \varepsilon$

$2|x-2| < \varepsilon$

$|x-2| < \varepsilon/2$

Sea $\delta = \varepsilon/2$

$|x-2| < \delta$

$\Rightarrow$

$0 < |x-2| < \delta$

$0 < |x-2| < \varepsilon/2$

$0 < 2|x-2| < \varepsilon$

$0 < |-2(x-2)| < \varepsilon$

$0 < |-2x + 4| < \varepsilon$

$0 < |-2x + 5 - 1| < \varepsilon$

Entonces, para cada ε, existe un δ que cumple que $|f(x) - L| < \varepsilon$ cuando $0 < |x-a| < \delta$

En el contexto de la RP matemáticos -en el registro simbólico- las prácticas sociales son las actividades realizadas por los estudiantes, durante la actividad se comprueba la forma en que se aborda primero desde un procedimiento aritmético y luego con un proceso desde la concepción métrica.

La comprensión se encuentra basada en la coordinación de los dos registros de representación -aritmético y métrico- tal coordinación se pone de manifiesto por medio del uso rápido y la espontaneidad de la conversión cognitiva, la simbolización y la validación de la solución del problema.

Por otro lado, en el desarrollo del conocimiento la **ilustración 26** da evidencia sobre la relación sujeto-objeto está mediatizada tanto por el material potencialmente significativo como por la presencia del otro, donde los estudiantes logran interactuar, esto indica que los estudiantes han logrado interiorizar el concepto de límite de una función al aplicarlo en la comprobación del límite obtenido.

Las acciones que intervienen durante el proceso de comprobación del límite, están operando no solo con números sino con expresiones analíticas sobre un caso particular. Esta forma de proceder hace parte de la instanciación del saber, entendido como pura posibilidad.

7.2.5.1. **Categorización de anclaje de conceptos y AS**. El proceso de codificación para el anclaje de subsumidores, con material potencialmente significativo y desarrollo de conocimientos matemáticos, permite identificar la conceptualización el AS del objeto subyacente en problema.

Tabla 28

Anclaje de subsumidores y AS

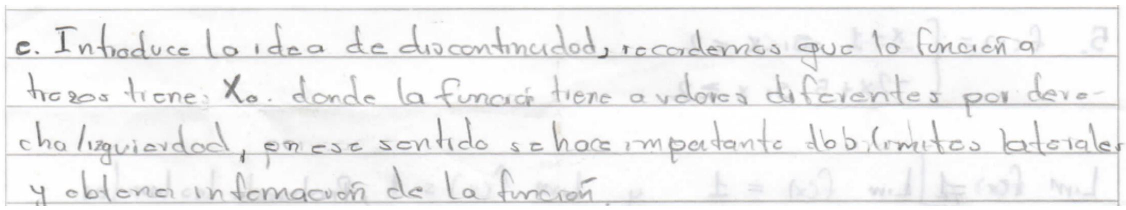
Categorías según tipo representación	Conocimientos previos	Anclaje del concepto	AS
A	Dominio como intervalo. Rango como intervalo. Imágenes. Límites laterales. Punto de acumulación. Entornos Límite por definición métrica.	Se anclan para nuevo conocimiento funciones a tramos.	Existe asimilación del concepto función a tramos.

e. ¿Qué sentido tiene la función a trozos en el cálculo de límites?

Uno de los grupos realiza la siguiente explicación:

Ilustración 27

Sentido dado a la función a tramos por un grupo


c. Introduce la idea de discontinuidad, recordemos que la función a
trozos tiene: X_0. donde la función tiene a valores diferentes por dere-
cha/izquierdad, en ese sentido se hace importante los límites laterales
y obtener información de la función.

El grupo reconoce la importancia de los límites laterales, donde el concepto de continuidad puntual de funciones reales de variable real en particular la función a tramos es considerado un eje básico para los estudiantes.

En nuestra estrategia de diseño presumimos la noción de continuidad puntual como una consecuencia de la discontinuidad puntual, y es precisamente lo que los estudiantes indican al afirmar que la función a tramos tiene a x_0 como punto desde donde se analizan los límites laterales.

El material es mediador para que la noción de continuidad puntual se estabilice en la estructura cognitiva, esto es, que les sirva como un medio para analizar las discontinuidades de orden puntual. De esta forma, se ha realizado el anclaje del límite de una función, en particular de la función a tramos.

Los estudiantes inducen la forma en que se va desarrollando el conocimiento matemático del concepto del objeto estudio de caso función a tramos, además se establece cómo el material potencialmente significativo en un sistema de práctica social y cultural aporta a la comprensión, el sentido y el significado dado a la función a tramos por los estudiantes, a partir de los subsumidores dominio, rango, imágenes, punto de acumulación, límite y límites laterales.

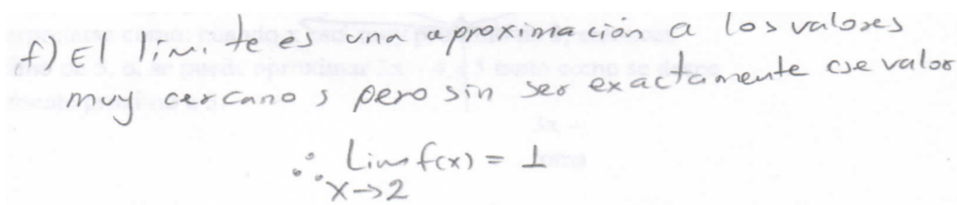
La práctica social y el desarrollo del conocimiento matemático bajo este enfoque, requiere del vínculo de aspectos sociales, como la comunicación, la puesta en común de acuerdos y la construcción de registros de representación.

e) ¿Qué significado le otorga al concepto de límite de una función?

Al ítem anterior, la mayoría de los grupos coincidieron en la siguiente respuesta:

Ilustración 28

Significado de límite dado por un grupo


f) El limite es una aproximación a los valores muy cercanos pero sin ser exactamente ese valor.

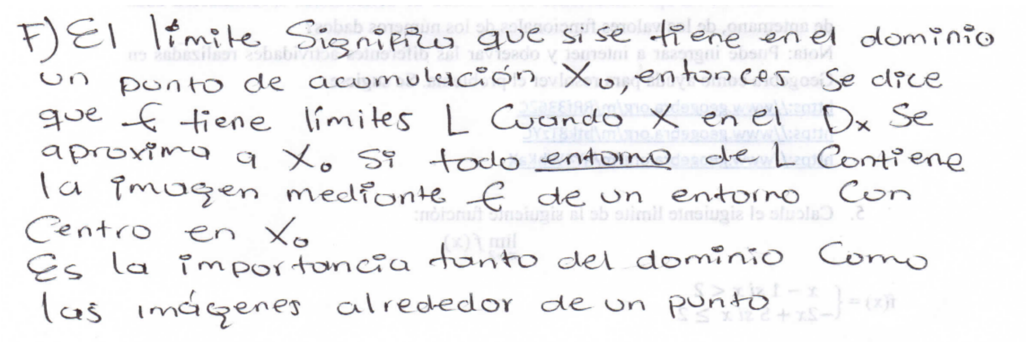
$$\therefore \lim_{x \to 2} f(x) = 1$$

Observamos cómo los estudiantes no se focalizan en la definición formal del concepto de límite, de esa manera no dejan de lado algunos aspectos fundamentales de su AS, por el contrario, de alguna manera se centran en una situación específica desarrollada en las actividades anteriores, lo cual indica que dejan explícito el cálculo del límite de la función utilizando tanto el límite por la izquierda como por la derecha.

Otro grupo expresa lo siguiente:

Ilustración 29

Significado de límite de una función por otro grupo


F) El límite Significa que si se tiene en el dominio
un punto de acumulación X_0, entonces Se dice
que f tiene límites L Cuando X en el D_x Se
aproxima a X_0 Si todo entorno de L Contiene
la imagen mediante f de un entorno Con
Centro en X_0
Es la importancia tanto del dominio Como
las imágenes alrededor de un punto

En este concepto se encuentran en las ideas básicas de aproximación y de tendencia de la variable independiente, además, la conceptualización dada por los estudiantes vincula las nociones históricas dadas por D'Alembert y Cauchy, aunque no con un rigor matemático.

Es una argumentación verbal acompañada de un registro de representación, propio de la Teoría sociocultural, con la cual los estudiantes pueden hacer al momento de articular sus expresiones lingüísticas con representaciones simbólicas que otorgan elementos esenciales al concepto de límite.

La atribución de significad al concepto de límite es producto no solo de la interacción social, también de significados claros y estables en la estructura cognitiva y por supuesto del uso de un sistema de signos -procedimientos- utilizados en la comprobación del límite propuesto para alcanzar finalmente una transformación del objeto límite mediante negociación de significados durante la práctica social en que se desarrolla la actividad de RP.

Se aprecia cómo el concepto dado a la continuidad puntual tiene un cimiento adecuado a partir del cual los estudiantes van más allá de lo que se indaga, pues la idea de continuidad y el límite de una función continua en un punto, parecen cumplir con los argumentos razonables y sea posible construir significados asociados a la continuidad global.

7.2.5.2. **Categorización desarrollo de AS**. En la siguiente tabla se encuentran diferentes tipos de AS de acuerdo al anclaje del concepto de límite formal y límite por aproximación.

Tabla 29

Anclaje del límite de una función a tramos por uno de los grupos de estudiantes

Categorías	Subsumidores	Anclaje de conceptos	Conocimientos previos.	AS
A	Límite por aproximación y límite formal	Forma analítica y verbal. Se otorga significado al límite de la función	Concepto de límite de una función a tramos por aproximación, límites laterales y utilizando el concepto formal $\varepsilon - \delta$	Evidencia de AS: R, C y P. El tratamiento y conversiones, de registros de representación y la coordinación entre ellos constituyen la clave del AS.

Fuente: Elaboración propia

7.2.5.3. **Categorización de desarrollo de conocimiento y comprensión**. En las tablas 29 y 30 se observan las formas de desarrollo de conocimiento matemático cuando los estudiantes solucionan una actividad referente al límite puntual de una función a tramos.

Tabla 30

Desarrollo de conocimiento límite función a tramos

Categoría	Subcategoría Subsumidores	Desarrollo de conocimiento	Comprensión
Conceptos	Dominio Rango	X_0 punto de acumulación de un conjunto A del dominio de la función a tramos. Imágenes próximas al límite L.	X_0 como parte del dominio. PK Conocen sus principales representaciones, el significado de cada una.
	Aproximación al concepto de límite	Concepto por aproximación puntual al punto de acumulación.	Operan con las reglas internas de cada sistema, convierten una representación en otra.
	Referencia conceptual	Punto de acumulación, límite por aproximación.	Punto de convergencia se toma como la imagen.
	Límite	Concepto formal de límite, por $\epsilon - \delta$. Demostración del límite de la función.	Demostración formal del límite. Concepción métrica

Registros	Semióticos	Representación de límites laterales.	Uso de los límites laterales. Articulación de las diferentes representaciones del concepto sin contradicciones

Este análisis cualitativo nos permite concluir que cada uno de los fenómenos evidenciados en las tablas da cuenta de cómo los descriptores están en correspondencia de manera directa con cada uno de los cinco primeros niveles del modelo de Pirie & Kieren:

Conocimiento primitivo: Reconocen una función como una relación entre variables establecida por una definición formal. Usan la definición de $\epsilon - \delta$ para calcular el límite de una función. Reconoce el límite de una función por límites laterales, obviando su gráfica, manifestando una idea intuitiva de límite, sin hacer uso de la visualización geométrica para calcular su valor.

Creación de la imagen: En este nivel los estudiantes crean imágenes mentales, que no necesariamente son pictóricas, para transmitir significados a través de ellas, tales significados permiten obtener información sobre el objeto matemático como reconocer la existencia de funciones por tramos, describir el comportamiento desde los puntos de acumulación.

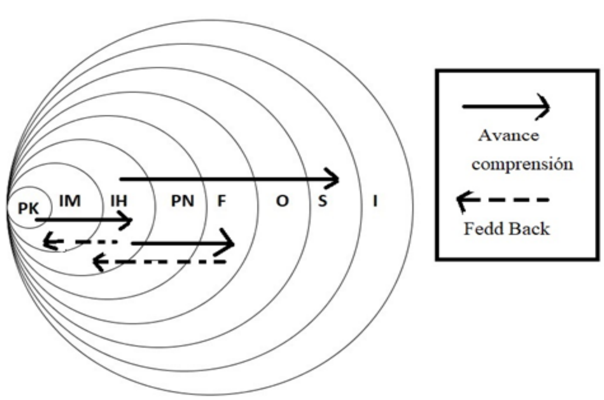
Comprensión de la imagen: En este nivel los estudiantes sustituyen las imágenes asociadas con una sola actividad por imágenes mentales que se consideran orientadas por un solo proceso. De acuerdo con esta consideración, los descriptores de este nivel son: Establecen el valor de una función en un punto, haciendo uso de un proceso algorítmico, usan la definición normal de límite de una función en un intervalo función para calcular su valor en un punto de acumulación, reconocen que el valor límite se puede alcanzar en un punto a través de varios procesos

Observación de la propiedad: Los estudiantes en este nivel están en la capacidad de construir un concepto-definición de límite, creado a partir de la interacción entre las diversas imágenes vinculadas en vez de las imágenes desconectadas. Los descriptores correspondientes a este nivel de comprensión serán: relaciona los conceptos de continuidad y discontinuidad de una función. Se establece que, si se tiene una representación geométrica o algebraica de una función, es más fácil acceder a la realización de su límite, si se conocen los conceptos de límites y continuidad.

Formalización: en este nivel los estudiantes enuncian y considerar una definición matemática formal de un concepto o algoritmo, sin hacer referencia a una acción o imagen particular. El estudiante produce verbalizaciones sobre el concepto de función continua, comparándolo con el de continuidad dando un concepto a partir de la tendencia de los límites de la función., la producción es similar al concepto formal o riguroso matemático.

Gráfica 13

Análisis comprensión del concepto límite función a tramos



El sexto nivel llamado observación, el descriptor principal es la combinación de las definiciones, teoremas utilizados en la demostración del límite de la función, identifican elementos esenciales que los relacionan coherentemente.

En el nivel de estructuración, el descriptor hace referencia a la forma en que los estudiantes tomaron conciencia del concepto de función a tramos y la refinan realizando relaciones entre la imagen, el dominio, el punto de acumulación y así interconectan los diferentes teoremas y propiedades de la función a tramos para llevar a cabo el límite de una función a tramos.

Podemos concluir que los estudiantes han comprendido el concepto de función a tramos y han adquirido AS del concepto, refinándolo y relacionándolo coherentemente con el concepto de límite. Es de anotar que siempre realizaron un Folding back o redoblaron hacia la construcción de imágenes tanto en forma mental como en su ausencia pictórica, deben regresar a conocimientos anteriores y realizar una revisión y reelaboración de los mismos, para regresar al nivel externo y poder avanzar al siguiente nivel, con el fin de asegurar la efectividad de la comprensión del concepto.

Se ha logrado formalizar el objetivo: *Establecer cómo el material potencialmente significativo en un sistema de práctica social y cultural aporta al aprendizaje significativo de los estudiantes referente a la función a tramos a partir de los subsumidores.*

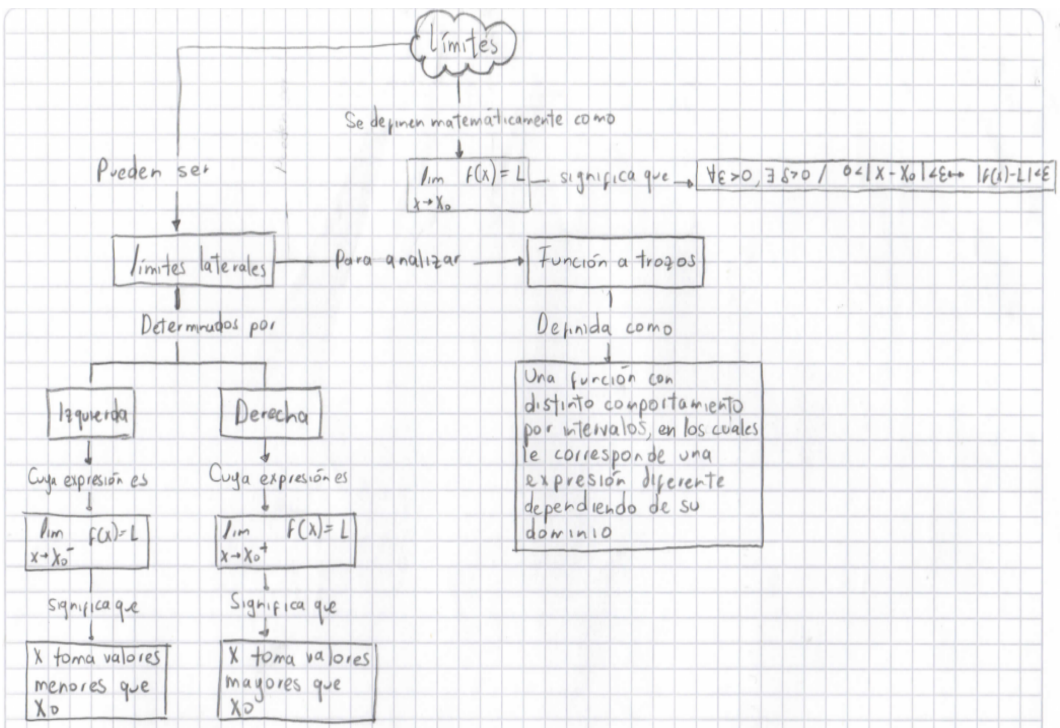
7.2.6. *Actividad*

Realizar un mapa conceptual de los conocimientos que emergieron al desarrollar los ítems anteriores.

Varios de los grupos realizaron un mapa conceptual teniendo en cuenta el límite de una función y otros realizaron desde el concepto de función.

Ilustración 30

Mapa conceptual de un grupo de estudiantes



La ilustración anterior muestra como los estudiantes anclaron el concepto y significado de límite de una función y de la función a tramos, se evidencia que el concepto ha sido comprendido, lo cual indica que las construcciones emprendidas a través del manejo del lenguaje verbal, el uso de símbolos son instrumentos esenciales en el AS.

Los estudiantes utilizan el mapa conceptual para integrar, atribuir significados y diferenciar conceptos referentes al límite de una función, como un recurso de aprendizaje.

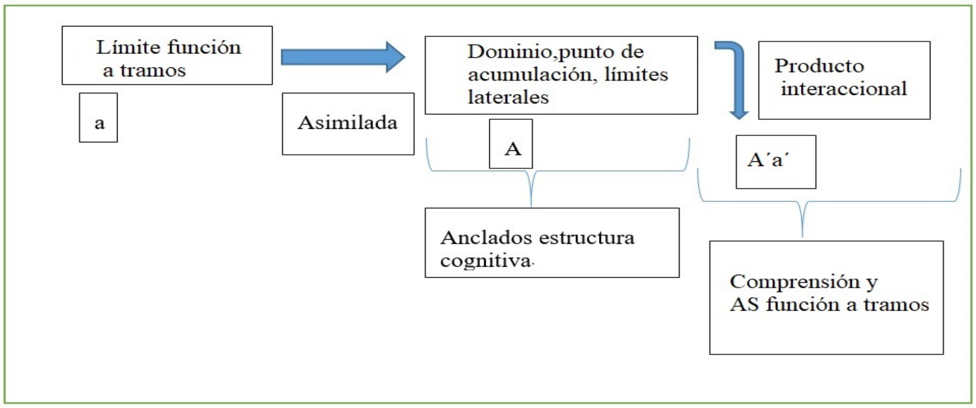
Otro proceso que se refleja en el mapa conceptual elaborado por los estudiantes es el establecimiento de relaciones entre ideas, conceptos y teoremas ya establecidos en la estructura cognitiva, o sea relaciones entre subsumidores. Los elementos que ya existen en la estructura cognitiva en conjunto con la *diferenciación progresiva*, adquieren nuevos significados y llevan a una transformación de la estructura cognitiva.

Por ejemplo, los estudiantes tienen los conceptos de límite y función a tramos claros y estables en su estructura cognitiva, la funda los relaciona y organiza con sus significados, de manera que los ve claramente como expresiones de un concepto más expansivo como es la derivada. Esa transformación, esa reorganización cognitiva, esa forma de relación significativa, es la *reconciliación integradora*. Lo que equivale en la comprensión del modelo de Pirie & Kieren a una estructuración del concepto de función a tramos, para el desarrollo del límite propuesto.

El concepto de función a tramos (a) es el concepto a aprender por parte de los estudiantes, este debe poseer el concepto de dominio, rango e imagen (A) en su estructura cognitiva -conocimientos previos-, el nuevo concepto específico de función a tramos fue asimilado por el concepto más inclusivo -función- (A’ a’).

Gráfica 14

Anclaje del concepto de función a tramos



Si consideramos que la función a tramos consta de una serie de funciones y que el dominio y el rango se obtienen como uniones de sus respectivas funciones, no solamente el concepto de función a tramos podrá adquirir significado para el estudiante, sino también el concepto de dominio y rango que ya poseía será modificado y se volverá más inclusivo, lo cual le permitió comprender el límite lateral de una función.

Sin duda, el producto de la interacción A' a' puede cambiar posteriormente; luego la asimilación no es un proceso que termine después de un aprendizaje significativo sino, que continua a través del tiempo y puede abarcar nuevos aprendizajes así como la pérdida de la capacidad de memoria y reproducción de las ideas subordinadas.

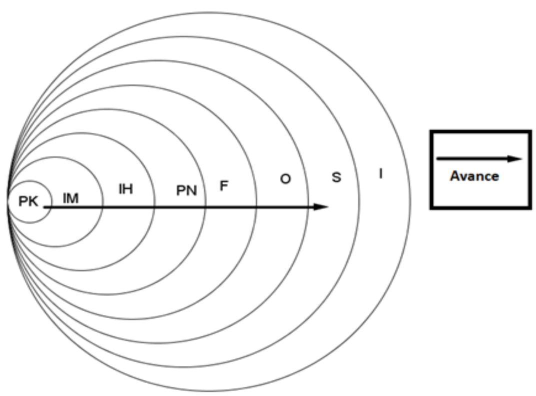
Lo anterior se evidencia en la forma que son conectados cada uno de los conceptos y cómo han logrado un conocimiento estable e incorporado en su estructura cognitiva. Los usos de instrumentos en la mediación han sido creados a lo largo de la historia de las sociedades e influyen en el desarrollo social y cultural (Moreira, 2000).

En el camino hacia el AS, el concepto de límite lateral es el que interactúan con el nuevo conocimiento desarrollado por los estudiantes: el concepto de función a tramos y que sirven de base para la atribución de nuevos significados al límite de una función a tramos, los cuales van del mismo modo modificándose en función de esa interacción.

Desde el modelo de la comprensión de Pirie & kieren (1994), se explora, por ejemplo, la definición de límite lateral y significado, y la definición formal de límite, su adquisición diferenciada es progresiva, a medida que los estudiantes van aprendiendo significativamente la función a tramos, el subsumidor límite lateral y límite de una función se va tornando cada vez más elaborado, más diferenciado, más capaz de servir de ancla para la atribución de significados a nuevos conocimientos.

Gráfica 15

Avance: hacia la comprensión del concepto de función a tramos



Desde la Teoría del AS este proceso característico de la estructura cognitiva se llama *diferenciación progresiva*, lo cual significa que los estudiantes son conscientes de cómo los teoremas están interrelacionados y necesitan una demostración formal o verificación, mediante argumentos meta-matemáticos o lógicos.

Según Moreira (2000) “La reconciliación integradora y la diferenciación progresiva son dos procesos dinámicos que ocurren en el curso del aprendizaje significativo. La estructura cognitiva se caracteriza, por tanto, por una dinámica que lleva a una organización del contenido aprendido” (p. 32).

La organización del contenido es jerárquica, es resultado de un proceso dinámico que surge del AS, el cual es inducido por el material potencialmente significativo.

7.3. **Material de trabajo 2**

Objetivo: Diseñar material potencialmente significativo que incluya a la función a tramos.

Debe presentar, además, un mapa conceptual que incluye algunos conocimientos previos que se supone debe tener para anclar el concepto de función a tramos.

En este reporte se caracteriza por evidenciar un acercamiento conceptual muy refinado de los fenómenos de estudio, específicamente la función a tramos donde los estudiantes describen el significado de los conceptos que intervienen cuando proponen problemas para un material creado por ellos.

El material didáctico propuesto para esta actividad, consiste en la elaboración de un material potencialmente significativo, que orienta al estudiante a desarrollar tanto conocimientos como el anclaje del concepto de función.

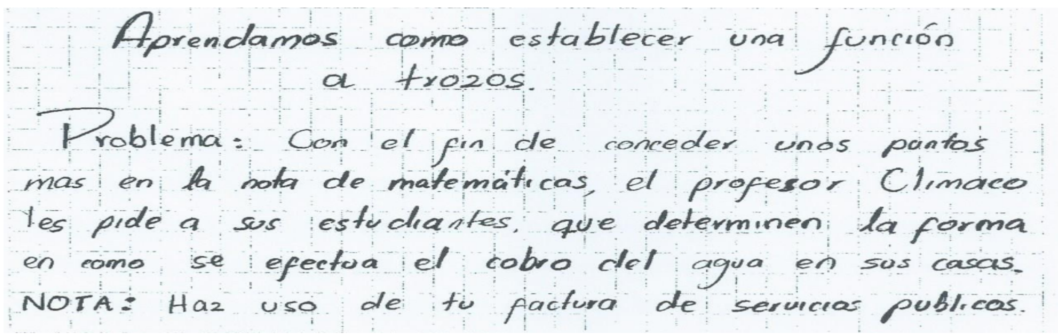
Con la intención de vincular la noción de AS con las ideas de la visión sociocultural, y en particular con la RP, presentaremos el material diseñado por los estudiantes que consideran potencialmente significativo.

7.3.1. *Problemas propuestos por los estudiantes*

Todas las actividades de aprendizaje propuestas se introducen en el material de aprendizaje potencialmente significativo mediante elementos que posibilitan su realización.

Ilustración 31

Material potencialmente significativo propuesto por un grupo



Aprendamos como establecer una función a trozos.

Problema: Con el fin de conceder unos puntos mas en la nota de matemáticas, el profesor Climaco les pide a sus estudiantes, que determinen la forma en como se efectua el cobro del agua en sus casas.

NOTA: Haz uso de tu factura de servicios publicos.

El problema propuesto sugiere una forma de introducir el concepto de función a tramos, sin focalizarse en representaciones, sino en un contexto social que incorpora el concepto. “Las teorías socioculturales en educación matemática surgen precisamente del énfasis en una concepción del conocimiento matemático como proceso social y cultural” (Planas, 2010, p. 164).

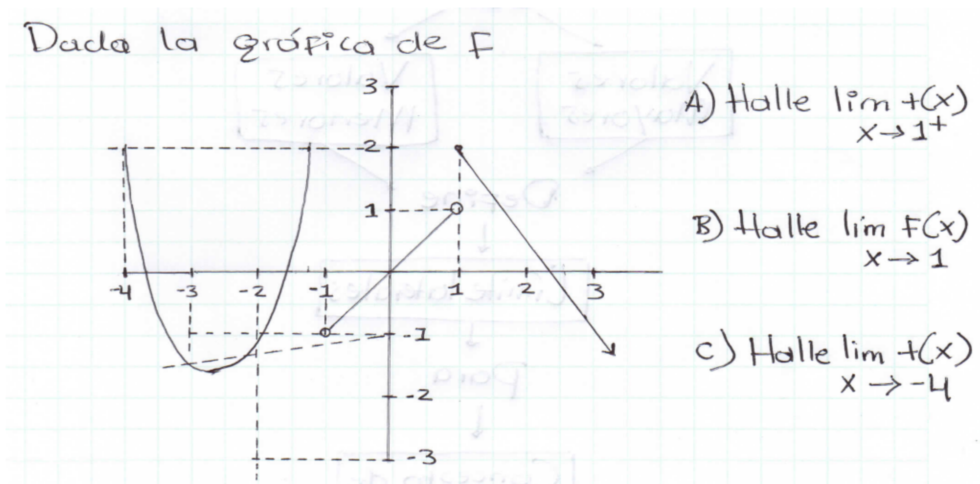
Los estudiantes presentan un material en el cual realizan un contacto con la cultura y el entorno, este tipo de actividad involucra la cognición situada como parte de la premisa de que el conocimiento es situado, es parte y producto de la actividad RP, el contexto y la cultura en que se desarrolla y utiliza. los servicios públicos.

Para los estudiantes, la factura de servicios públicos es una matriz cultural que incorpora tanto la dualidad proceso de RP y de objeto como de una representación del concepto de función a tramos.

Otro grupo de estudiantes realizó la siguiente propuesta:

Ilustración 32

Material *potencialmente significativo propuesto por otro grupo de estudiantes*



El problema propuesto por los estudiantes sugiere una forma de utilizar el concepto de función a tramos, focalizándose en la RP con representaciones gráficas, en un contexto en que el conocimiento y aprendizaje han sido trasmitido a través a través de la cultura de los libros de texto.

En la propuesta de los estudiantes podemos observar cómo se complementa las Teorías Sociocultural y Cognitiva del AS. Por una parte, se piensa la actividad matemática de RP en un contexto, situado en la realidad de los estudiantes que lo realizan. La otra propuesta de RP es sin duda producto de la cultura histórica, basada en la enseñanza tradicional como partícipes de grupos culturales ubicados en una sociedad y en un periodo de tiempo determinado.

Se destaca, además, el desarrollo de conocimiento matemático a través de los saberes matemáticos, los cuales se formaron históricamente mediante procesos de reflexión e interacción con el uso compartido de conocimientos transmitidos de generación en generación, con un sentido didáctico, epistemológico a través del rol de la práctica social.

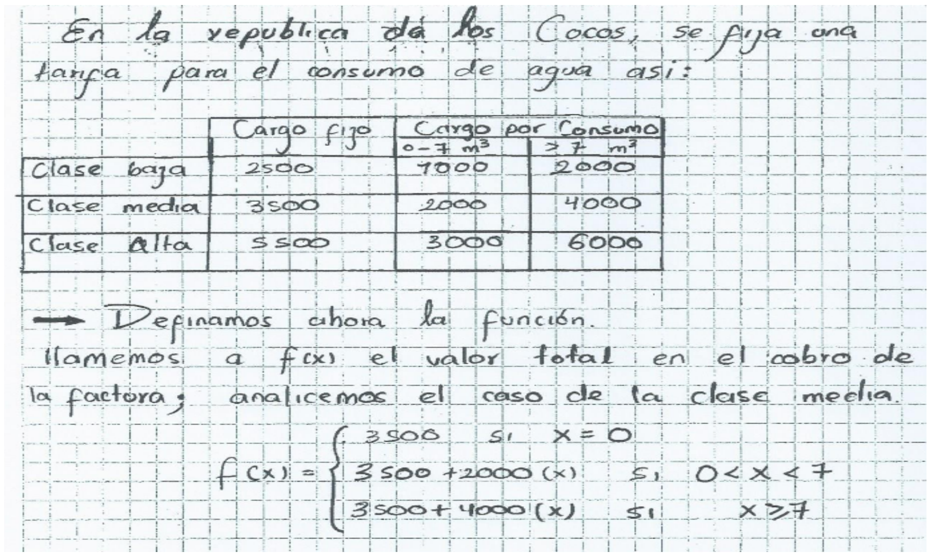
Ambos grupos se ubican en contextos amplios de influencias históricas, sociales y culturales que explican en parte sus acciones y el uso de ciertos mediadores "formas de razonamiento, artefactos físicos y culturales, modos de comunicación" (Planas, 2010, p. 166).

Los estudiantes han tomado conciencia no como un mundo interior ya que expresa las relaciones del individuo con otros y con su entorno social circundante (Moura, 2010). es. la forma de expresión del sujeto con las relaciones social, cultural e histórica. Desde una visión vigotskiana el aprendizaje implica la comprensión e internalización y uso de los símbolos y signos de la cultura y grupo social en la cual están inmersos.

Un grupo propone el siguiente problema:

Ilustración 33

Problema propuesto por uno de los grupos grupo



En la yepublica de los Cocos, se fija una tarifa para el consumo de agua asi:

	Cargo fijo	Cargo por Consumo	
		$0-7\ m^3$	$>7\ m^3$
Clase baja	2500	1000	2000
Clase media	3500	2000	4000
Clase Alta	5500	3000	6000

→ Definamos ahora la función.

llamemos a f(x) el valor total en el cobro de la factora; analicemos el caso de la clase media.

$$f(x) = \begin{cases} 3500 & si \quad x = 0 \\ 3500 + 2000(x) & si \quad 0 < x < 7 \\ 3500 + 4000(x) & si \quad x \geq 7 \end{cases}$$

En la ilustración se demuestra cómo los estudiantes logran una relación consecutiva con la actividad anterior, se desea obtener una generalidad de la función a tramos. Aunque se ubica referencian un país hipotético, del mismo modo, presentan un material en el cual realizan un contacto con su cultura y el entorno, este tipo de actividad también involucra la cognición situada.

Las proposiciones de los estudiantes están relacionadas con la estructura cognitiva para producir un nuevo significado compuesto, en el cual se reconoce que el conocimiento del objeto de saber función a tramos se hace posible mediante la labor conjunta en la práctica social y la comprensión que otros estudiantes conservan de este objeto.

Los estudiantes han utilizado recursos simbólicos. Podemos decir que el mapa conceptual -signos, símbolos, fórmulas, tablas- le ayudan a dominar sus propias funciones psicológicas naturales de percepción, memoria, atención. "Actúan como un puente entre los actos individuales de cognición y los requisitos simbólicos socioculturales de esos actos" Wertsch (1993, p.19).

El material propuesto posee subsumidores y estas características no son arbitrarias, ya que posee un significado lógico. Es un material organizado y no arbitrario. estamos ante un estudio de la naturaleza del contenido mismo, sus rasgos esenciales, lo que hace necesario que llevemos a cabo su análisis conceptual.

El significado lógico es un significado que depende de la naturaleza del material que está dirigida a la comprensión del concepto de función a tramos, y por eso un grupo plantea cómo puede obtenerse, para ello usa como estrategia la factura de servicios públicos. Otro grupo plantea un problema en el cual debe tener en cuenta cómo resolverse el límite a partir del dominio, utilizando los límites laterales, esto implica un AS del concepto que poseen los estudiantes.

Al realizar el análisis conceptual de los contenidos disciplinares, observamos que indaga las relaciones entre distintos temas, asociados a los elementos del concepto de función a tramos -construir la función, hallar el dominio, calcular los límites laterales, utilizar datos para resolver el problema -, y en este sentido se percibe una organización secuencial que indica que el estudiante posee AS.

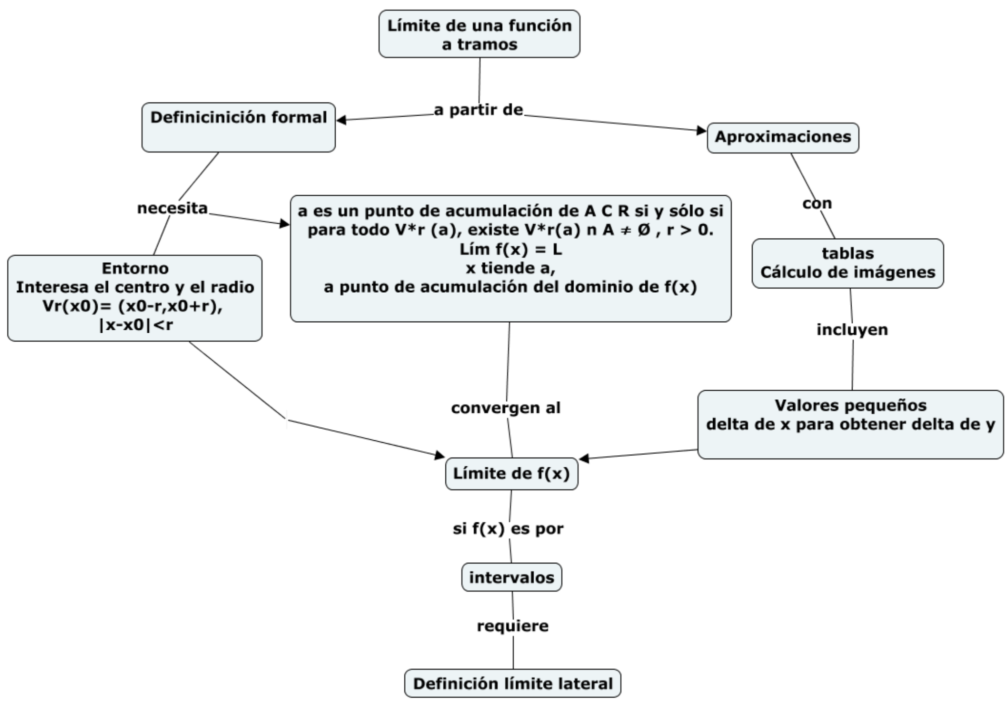
7.3.2. *Mapa conceptual*

Los mapas conceptuales son una especie de organizadores de las relaciones de los conocimientos previos con los nuevos, forman una representación jerárquica esquemática de conceptos más generales e incluyentes con los menos generales a través de correlaciones conceptuales para formar una red de proposiciones progresiva.

Un grupo de estudiantes propone el siguiente mapa conceptual en el que interviene el límite de una función:

Ilustración 34

Mapa conceptual del límite de una función a tramos



El mapa conceptual es el instrumento que mediatiza la actividad que liga a los estudiantes no sólo con el mundo de los objetos expuestos, sino también con otros estudiantes, se fortalece como una herramienta de soporte académico frente al estudio conceptual de la función a tramos y de límite de una función a través de la construcción de estructuras jerárquicas conformadas por conceptos y palabras de enlace (Moreira, 2000).

El mapa conceptual identifica los conceptos claves que deben tienen los estudiantes para anclar el límite de una función a tramos, en el mapa se identifican conceptos subordinados -definición de límite, elaboración de tablas-, superordenados -entorno, punto de acumulación-, inclusivos - límites laterales- y específicos –función a tramos-.

Puede afirmarse que el mapa conceptual realizado por los estudiantes logró plasmar tanto la transformación de los saberes de estos como el desarrollo de conocimiento, con la identificación y construcción de proposiciones, las cuales son definidas como las relaciones entre conceptos de enlace que interactúan de manera coherente, manifestando la jerarquía de los conceptos subyacentes.

En el mapa conceptual se manifiesta cómo las relaciones establecidas son acciones que los estudiantes tienen en la estructura cognitiva para operar sobre números y expresiones analíticas. Establece la forma como realizaron la actividad y las exigencias que permite a los estudiantes la emergencia de registros de representación.

Para la comprensión de un concepto como en el caso de función a tramos, los estudiantes han logrado resumir y generalizar diversas relaciones conceptuales que ilustran cada una de sus partes e identifican los conceptos involucrados en los mismos.

Se resalta los subsumidores vecindad, tablas, imágenes, aproximaciones, intervalos, como conceptos previos al concepto de límite, además, logran describir cómo debe ser el comportamiento de la función a tramos.

Los estudiantes logran captar el significado de los símbolos o conceptos y comprender lo que representan, lo cual se manifiesta en la estructura jerárquica del mapa conceptual propuesto, asemejan en significado símbolos arbitrarios con sus referentes -objetos, eventos, conceptos-, este proceso enfatiza un aprendizaje representacional y de conceptos, “como una subordinación del material en relación con la estructura cognitiva preexistente” (Moreira, 2000, p. 27).

Este apartado fue clave en la consecución formal del objetivo: *Identificar la posible vinculación de los aprendizajes significativos adquiridos con el desarrollo de nuevos conceptos y conocimientos matemáticos a través de la RP que involucran la función a tramos, mediante un material educativo diseñado para ser potencialmente significativo.*

Los problemas propuestos en el material potencialmente significativo y las relaciones creadas en el mapa contextual, propician formas culturales de interacción y labor conjunta que hacen reflexionar en que sus significados culturales van a tener un anclaje histórico y social vinculado a la función a tramos y al límite de dicha función.

7.4. **Material de trabajo 3**

7.4.1. *Pregunta 1*

Objetivo: Resolver problemas sobre derivada que incluyen la función a tramos, lo cual permite anclar el concepto de continuidad siendo el concepto de límite un subsumidor.

Esta pregunta consta de dos ítems, que son analizados separadamente.

5. Dada la función: $f(x) = \begin{cases} x^2, \ x > c \\ ax + b \, , x < c \end{cases}$

   a. ¿La función es continua?

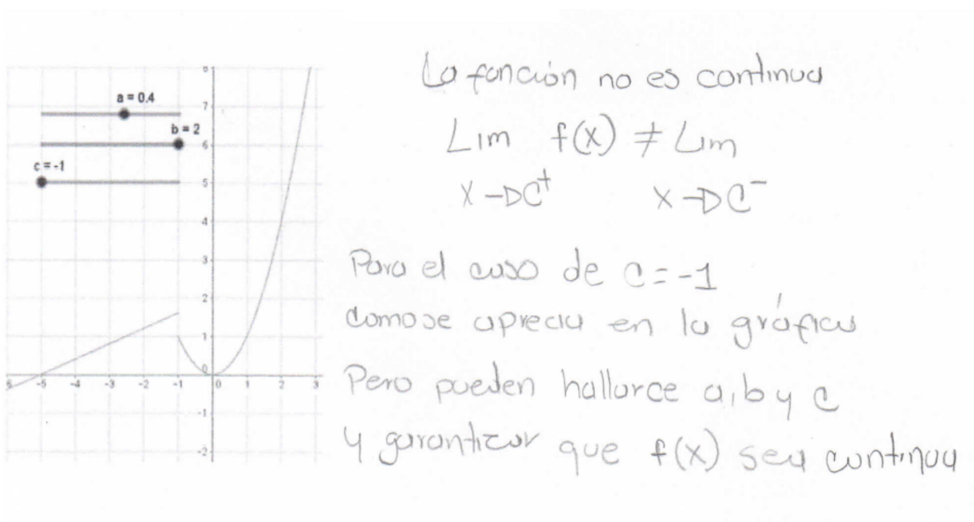
Un grupo de estudiantes utiliza el programa Geogebra y realiza la gráfica de la función para responder la pregunta.

En la siguiente ilustración los estudiantes comprueban la no continuidad de la función a tramos. Esto evidencia que el aprendizaje de conceptos es un aprendizaje representacional, es claro como el concepto de no continuidad es representado por una gráfica en particular cuando el valor de c = -1.

Los estudiantes son conscientes de la necesidad de estudiar el fenómeno para comprenderlo, para su logro incorporan los recursos que la tecnología les brinda.

Ilustración 35

Continuidad-derivada



El material potencialmente significativo incita al uso del recurso tecnológico como el Geogebra, el cual es un instrumento mediador que, induce a los estudiantes al desarrollo de conocimiento matemático, no reducido a un conjunto de habilidades para operar con símbolos que, a su vez, permiten la transformación de diferentes sistemas de representación como una expresión simbólica en otra, sino que, el medio computacional permite anclar diferentes subsumidores como el límite por aproximación y la continuidad de la función. Es decir, como principio orientador para lograr las modificaciones deseadas en relación con la estructura cognitiva de los estudiantes.

La mediación instrumental es el apoyo visual que implícitamente refleja los saberes de los estudiantes al aplicar el concepto de continuidad lateral: si a y b son números reales y si f(a) y f(b) existen entonces se dice que f(x) es continua: por la derecha de a si y solo sí $\lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$ y por la izquierda de b si y sólo sí $\lim_{x \to b-} f(x) = b$, analizando y concluyendo con un valor particular en c = -1 la no continuidad de la función.

Los estudiantes utilizaron un recurso tecnológico como mediador en la resolución del problema, el Geogebra es un medio que mediatiza la actividad, las acciones que realizan los estudiantes para indicar que f(x) no es continua, acciones inmersas en modos culturales de actividad.

Los instrumentos materiales ayudaron a los estudiantes a visibilizar sus pensamientos, a evaluar las relaciones matemáticas y a tomar conciencia de los aspectos conceptuales de los objetos matemáticos. (Radford, 2006).

La estructura cognitiva necesita del soporte instrumental y fundamentado en la práctica social, es el entorno social y cultural en el que se encuentran los estudiantes que les permite el uso de las herramientas como mediador de la acción cognitiva (Armella, Waldegg, 2002).

Lo anterior, indica la forma como median los instrumentos materiales, y ello nos indica que todo acto cognitivo está mediado por un instrumento que pueden ser materiales o simbólicos (Wertsch, 1993), estos mediadores son precisamente parte del material potencialmente significativo utilizado para propiciar el AS.

En dicho acto cognitivo, se reconoce que la actividad de RP tiene lugar en un medio donde se interactúa socialmente, se negocian significados y se fundamenta el desarrollo de conocimiento matemático. Allí se orientan tanto la naturaleza mediada de la actividad cognitiva, como los sistemas representacionales para el desarrollo del conocimiento.

Queda entonces claramente confirmada la hipótesis: *La influencia del AS apoyado por un marco sociocultural posibilita la transición hacia el desarrollo del conocimiento matemático y la construcción de una relación particular con el saber, basados en la actividad de RP.*

7.4.1.1. **Categorización anclaje de conceptos**. En la tabla siguiente se muestra el resumen del análisis del desarrollo de conocimiento a partir del anclaje del concepto de continuidad de la función a tramos. Es importante destacar que, los conceptos previos están representados por un conjunto de conceptos, símbolos e imágenes que permiten organizar un puente cognitivo que las relacione con los nuevos conocimientos.

Tabla 31

Anclaje del concepto continuidad

Categorías	Conocimientos previos	Anclaje del concepto continuidad	AS
A	Límites laterales Concepto de límite de una función a tramos por tramos.	Se otorga significado al límite de la función.	Aprendizaje proposicional aplicados a la continuidad de una función en un intervalo. Uso del dominio a partir de la figura para

			observar la discontinuidad.

7.4.1.2. **Caracterización del desarrollo de conocimiento**. A continuación, se presentan aspectos de desarrollo de conocimiento más acentuado y la comprensión del concepto de continuidad de una función a tramos, a partir del subsumidor límite. La tabla siguiente exhibe el desarrollo de conocimiento suscitado por el concepto de función a tramos y como consecuencia de ello induce a una clase de discontinuidad de dicha función.

Tabla 32

Desarrollo de conocimiento continuidad

Categoría	**Subcategoría**	**Desarrollo de conocimiento**	**Comprensión**
Conceptos	Límites	Se considera f(x) posee continuidad removible.	Comprensión como generador de imagen del concepto Vinner (1991): los estudiante obtienen conceptos cuando construye la gráfica en Geogebra que involucra el concepto de continuidad.
	Aproximación al concepto de continuidad	Discontinuidad removible en x= -1, un punto particular de f(x).	PK (Pirie & Kieren)

Registro de representaciones	Referencia conceptual.	Límites laterales.	PK
	Registros semióticos	Articulación entre registro gráfico y analítico.	Los estudiantes perciben las dos representaciones de la continuidad como medios de expresión de un mismo objeto.
		Representación visual que se apoya en el concepto de límite lateral por aproximación.	
	Variaciones conceptuales	Concepto gráfico de límites laterales.	
		Continuidad puntual.	

Las tablas anteriores evidencian cómo los estudiantes adquirieron una cierta cantidad de conceptos, los han diferenciado y la adquisición de otros nuevos se llevó a cabo a través de la *asimilación de conceptos*. En esta etapa se adquieren los significados de los conceptos de límite y continuidad removible, al igual que el manejo de proposiciones o teoremas referentes a la continuidad de la función a tramos por medio de la relacionabilidad no arbitraria y sustantiva con ideas pertinentes de la estructura cognoscitiva como los límites laterales.

La asimilación permitirá la *interacción entre el nuevo material* que será aprendido y los subsumidores lo cual ocasiona una reorganización de los nuevos conocimientos y del desarrollo de conocimiento.

El siguiente ítem de la pregunta 1, tiene como objetivo anclar el concepto de derivada a partir del subsumidor límite de una función a tramos.

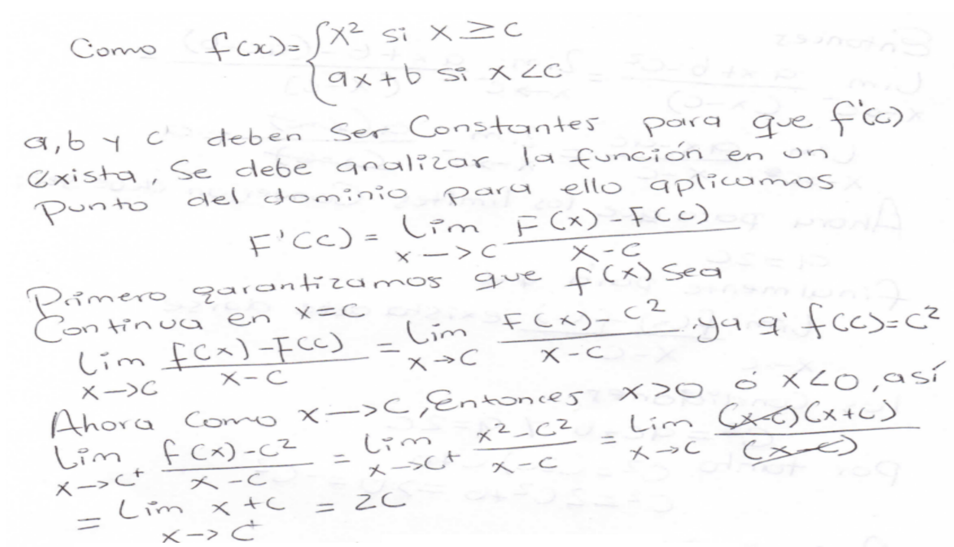
b.¿Qué valores debe tomar a y b (en función de c) para que f¨ (c) exista?

El análisis se llevará a cabo en diferentes secciones que han presentado los estudiantes.

Vemos como los estudiantes otorgan significado a la noción de derivada, a través de su expresión analítica, como límite del cociente incremental. La resolución del problema destaca el rol que los estudiantes poseen referente al pensamiento y el lenguaje variacional.

Ilustración 36

Derivada de una función a tramos


Como $f(x)=\begin{cases} x^2 \text{ si } x\geq c \\ ax+b \text{ si } x<c \end{cases}$

a, b y c deben ser Constantes para que f'(c) exista, Se debe analizar la función en un Punto del dominio para ello aplicamos

$$F'(c) = \lim_{x\to c} \frac{F(x)-F(c)}{x-c}$$

Primero garantizamos que f(x) sea Continua en x=c

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{x\to c}\frac{f(x)-c^2}{x-c}$$ ya q' $f(c)=c^2$

Ahora como $x\to c$, Entonces $x>0$ ó $x<0$, así

$$\lim_{x\to c^+}\frac{f(x)-c^2}{x-c} = \lim_{x\to c^+}\frac{x^2-c^2}{x-c} = \lim_{x\to c}\frac{\cancel{(x-c)}(x+c)}{\cancel{(x-c)}}$$

$$= \lim_{x\to c^+} x+c = 2c$$

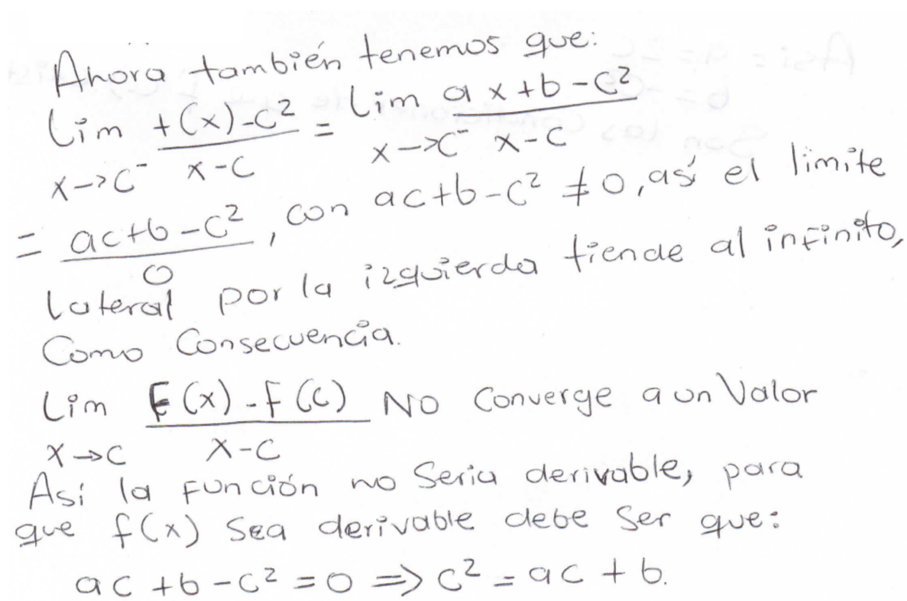
Iniciar la resolución del problema de la derivada con los límites laterales, subraya la importancia de los conocimientos previos en la estructura cognitiva de los estudiantes, esto les permite centrarse en la relación entre razón de cambio y cociente incremental para la comprensión del concepto de derivada de la función a tramos.

Se puede inferir que los estudiantes han desarrollado o adquirido conocimiento nuevo debido a que inician con la derivada puntual para llegar a la derivada en un intervalo cerrado al determinar los límites laterales, en este caso hallan el límite por la derecha de la función.

Siguiendo con la resolución del problema, los estudiantes plantean:

Ilustración 37

Continuación condición derivada



Ahora también tenemos que:

$$\lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - c^2}{x - c} = \lim_{x \to c^-} \frac{ax + b - c^2}{x - c}$$

$= \frac{ac + b - c^2}{0}$, con $ac + b - c^2 \neq 0$, así el límite lateral por la izquierda tiende al infinito, como consecuencia.

$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$ No converge a un valor

Así la función no sería derivable, para que $f(x)$ sea derivable debe ser que:

$$ac + b - c^2 = 0 \Rightarrow c^2 = ac + b.$$

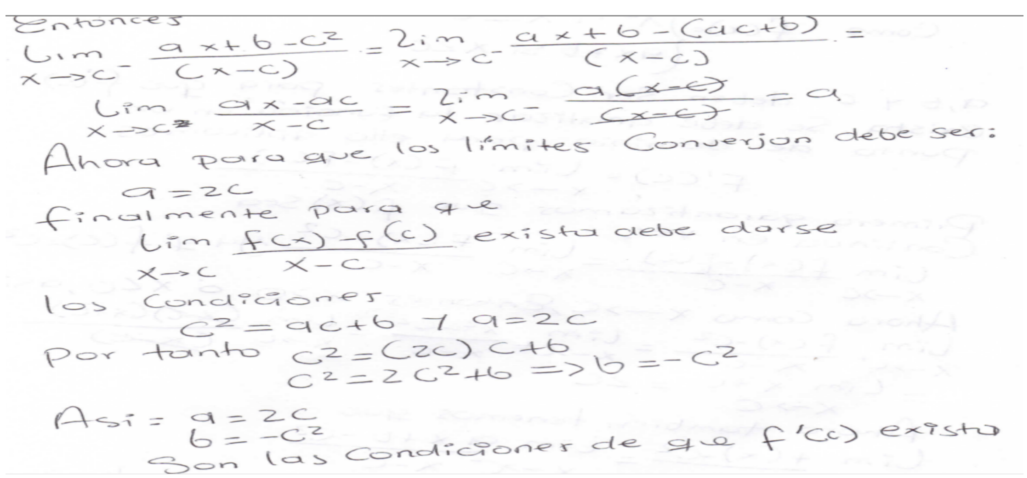
Se evidencia que el límite por la izquierda de la función tiende a infinito, luego al utilizar el teorema de continuidad sobre un intervalo: sea f definida en [a, b]. Se dice que f es continua en dicho intervalo si es continua en: i. (a, b), ii. a la derecha de a y iii. a la izquierda de b.

Lo anterior demuestra el manejo de un universo de formas analíticas extensas en significados por parte de los estudiantes, lo cual indica que comprendieron la función a tramos como un objeto matemático sujeto a las operaciones que otros procedimientos como el límite y la derivada se lleva a cabo sobre ella, cuando operan f(x) – f(c), f(x) – c^2 , estas son las operaciones de gráficas en analogía con las variables o con los números, que a la vez son las traslaciones sobre el eje x.

De acuerdo con las ilustraciones 37 y 38 podemos afirmar que la influencia de los contextos en la construcción del concepto de derivada, su significado y las transformaciones entre diferentes representaciones se dan a partir de los subsumidores de funciones en particular la función a tramos, los límites y la continuidad.

Ilustración 38

Condición de existencia f´(c) del problema


Entonces

$$\lim_{x \to c^-} \frac{ax+b-c^2}{(x-c)} = \lim_{x \to c^-} \frac{ax+b-(ac+b)}{(x-c)} =$$

$$\lim_{x \to c^-} \frac{ax-ac}{x-c} = \lim_{x \to c^-} \frac{a\cancel{(x-c)}}{\cancel{(x-c)}} = a$$

Ahora para que los límites Converjon debe ser:

$a = 2c$

finalmente para qe

$\lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ exista debe darse

los Condiciones

$c^2 = ac+b$ y $a = 2c$

Por tanto $c^2 = (2c)c + b$

$c^2 = 2c^2 + b \Rightarrow b = -c^2$

Asi: $a = 2c$

$b = -c^2$

Son las Condiciones de qe $f'(c)$ exista

Así mismo, dan cuenta de las acciones para transitar por la representación simbólica, como el límite del cociente incremental y el rol que ejercen los conceptos previos como subsumidores. Este hecho subraya la importancia de los conocimientos previos en la estructura cognitiva para que los estudiantes puedan comprender el concepto de la

En las respuestas dadas en las ilustraciones anteriores, se vislumbra el desarrollo del conocimiento matemático de los estudiantes, el cual se ha observado a través del proceso coherente de la resolución del problema y actividades propuestas, de sus conclusiones, que son cimentadas sobre varios aspectos y aplicaciones como el uso de la herramienta computacional Geogebra para aprovechar por medio de los deslizadores, el concepto de continuidad lateral.

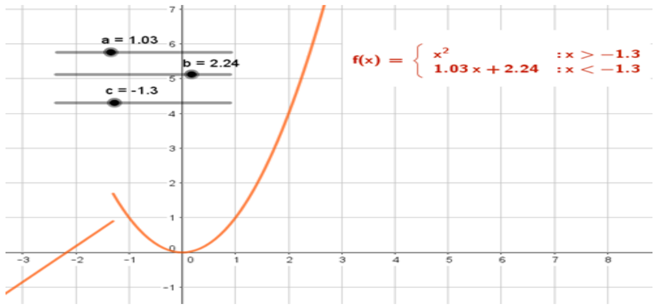
En Geogebra, los estudiantes construyen la función, lo cual se constituye en un aspecto relevante con la posibilidad de construir un universo amplio del concepto de función a tramos a partir de las condiciones del dominio de la función. Cuando la variable x recorre el intervalo A, el conjunto de todos los puntos de coordenadas (x, f(x)) constituye la representación gráfica de la función f a tramos.

Al mover los deslizadores se comprueba lo que han demostrado procedimentalmente haciendo uso de teoremas sobre el límite y continuidad de una función y la existencia de su derivada.

Las representaciones que han realizado los estudiantes en la ilustración anterior se interpretan en sentido amplio, como todos aquellos artefactos -signos, símbolos o gráficos- que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos y con las cuales abordan y desarrollan el conocimiento matemático, es decir, registran y comunican su conocimiento sobre los conceptos de límite, derivada de la función a tramos.

Ilustración 39

Función a tramos, discontinuidad en c



El saber como sistemas de pensamiento y acción cultural e históricamente constituido, aparece en los estudiantes al utilizar el conocimiento previo sobre los límites laterales, la continuidad, la propiedad distributiva y la igualdad como algo cultural de cómo calcular f´ (c), son los subsumidores que están en el curso de sus vidas -dependiendo de las redes culturales, históricas y políticas de acceso al saber que operan ubicuamente en nuestra sociedad- (Radford, 2018), están presentes en la estructura cognitiva de los estudiantes.

7.4.1.3. **Categorización de desarrollo de conocimiento y comprensión**. La Se observa el proceso que han seguido los estudiantes desde la adquisición de significados de los conceptos de límites laterales y la continuidad puntual, que son utilizados como conocimientos previos (PK), hasta el momento de determinación del uso adecuado del concepto de derivada de la función a tramos.

Tabla *33*la **tabla 33** se presentan aspectos de desarrollo de conocimiento, a partir del subsumidor límite laterales para anclar el concepto de derivada puntual. Los estudiantes utilizan el teorema de continuidad de un intervalo abierto, como parte de desarrollo de conocimiento matemático: es continua en (a, b) si y sólo sí es continua en c, $\forall\ c \in (a, b)$.

Se observa el proceso que han seguido los estudiantes desde la adquisición de significados de los conceptos de límites laterales y la continuidad puntual, que son utilizados como conocimientos previos (PK), hasta el momento de determinación del uso adecuado del concepto de derivada de la función a tramos.

Tabla 33

Desarrollo de conocimiento derivada

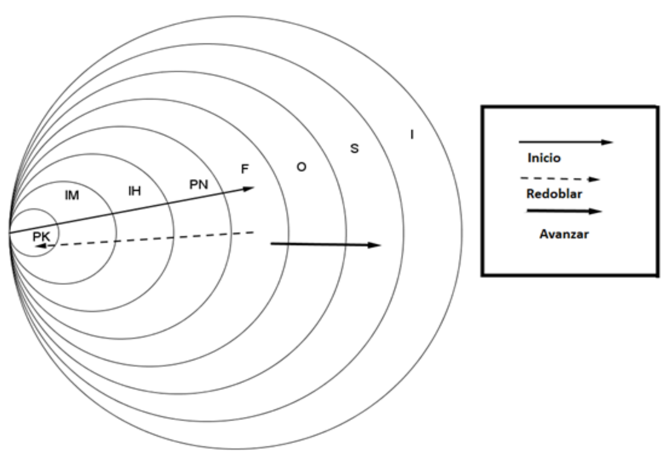
Categoría	Subcategoría	Desarrollo de conocimiento	Comprensión
Conceptos	Límites laterales.	Se considera la convergencia en un punto de una función a tramos.	PK.
	Aproximación al concepto de Derivada.	Condiciones para la convergencia de límites laterales y el concepto de imagen de f´(c).	F: Utilizan los teoremas para decidir sobre la convergencia de la función en un punto.
	Referencia conceptual.	La derivada como la relación entre razón de cambio y cociente incremental.	S: Aplican el concepto definición y procedimiento de derivación de una función a tramos.
	Registros semióticos.	Articulación entre registros analíticos y algebraicos. Gráfica en Geogebra	IM, IH.
	Variaciones conceptuales.		PK, F,S.

La gráfica siguiente representa los dos saltos entre diferentes niveles, inicialmente, se realiza una formalización del concepto función a tramos a través del uso de Geogebra, donde se formaliza dicho concepto, demostrando que el anidamiento de niveles, así representado, ilustra el hecho de que el crecimiento en la comprensión no es lineal ni unidireccional. De hecho, cada nivel contiene todos los anteriores y está incluido en los niveles siguientes

El segundo salto "Folding back" -redoblamiento- acentúa y expresa de manera gráfica el hecho de que los estudiantes han comprendido el concepto desde una naturaleza "embebida", esto es, incluye dentro de sí a otros muchos elementos y procedimientos matemáticos que intervienen en la definición del concepto de función a tramos para llegar a una estructuración del concepto de derivada:

Gráfica 16

Comprensión de la derivada de una función a tramos



7.4.2. *Pregunta 2*

Esta pregunta se dividió en tres ítems, se analizan los dos primeros.

Sea la función:

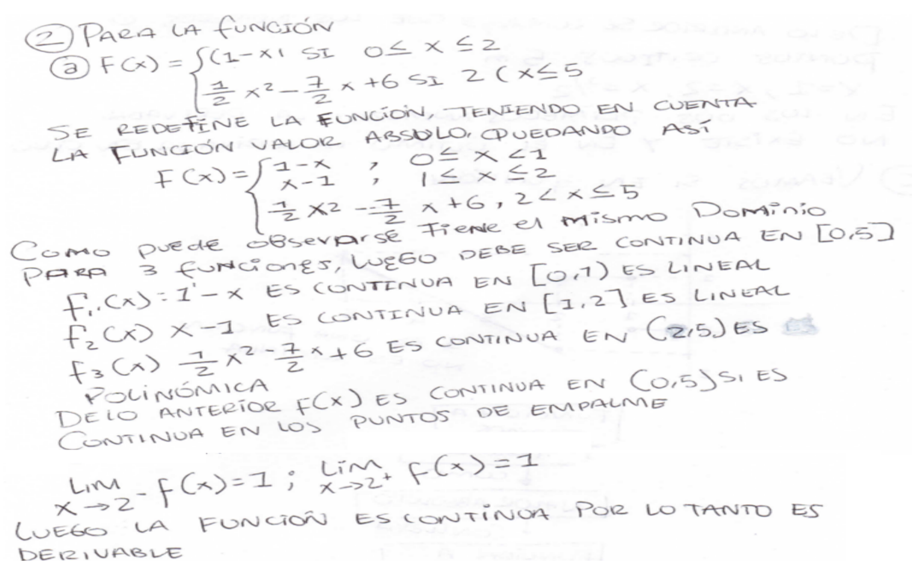
$$f(x) = \begin{cases} |1-x|, & 0 \le x \le 2 \\ \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 6, & 2 \le x \le 5 \end{cases}$$

a. ¿Es la función continua? Explique.

Este grupo de estudiantes inicia con el concepto previo de función valor absoluto y su desarrollo para redefinir la función dada.

Ilustración 40

Continuidad y derivabilidad función a tramos



Los estudiantes utilizan el concepto de función a tramos y reescribe la expresión analítica para diferentes valores de la variable independiente x. Cada función f_i (x) se define como una representación analítica de polinomios y o algunos símbolos, ninguna de ellas es vacía. Respecto al dominio indican que se conserva, lo cual se infiere como que el dominio de la función a tramos está constituido por la unión de los intervalos de cada función.

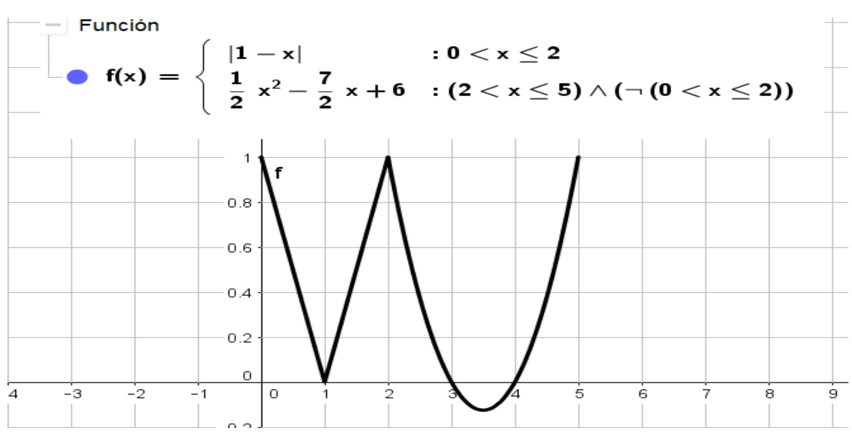
Para el análisis de continuidad realizan el análisis en el intervalo [0,5], concluyendo la continuidad en (0,8) ya que es continua en los puntos de empalme x = 2 y x = 5 en los intervalos de la función, aunque no realizan los límites laterales para x = 1.

Se aprecia el refinamiento de los subsumidores continuidad e implícitamente el límite anclados en la estructura cognitiva como conocimientos previos, para expresar la continuidad de la función a tramos en un intervalo cerrado [a, b] teniendo en cuenta el análisis de cada una de las representaciones analíticas que constituyen la función f(x).

Por otro lado, los estudiantes representan en Geogebra la forma de derivar la función a tramos, lo cual indica una forma de argumento para la continuidad de la función a tramos. En este caso, están asociando una curva a los casos considerados en la redefinición de la función donde se identifican con los tipos de funciones y su continuidad.

Ilustración 41

Derivabilidad de una función a tramos



La derivada de la función proporciona cómo la integración de los conocimientos en la RP, son utilizados para crear acontecimientos en secuencia para utilizar lo que ya saben y construir sobre ello nuevos significados, sus saberes son expresadas simbólicamente y son relacionadas de modo no arbitrario, sino sustancialmente con la gráfica de la función.

Los estudiantes muestran disposición para relacionar, no arbitraria, sino sustancialmente, el material nuevo con su estructura cognitiva, así que el material didáctico diseñado con el cual soluciona problemas es potencialmente significativo para ello, especialmente relacionable con su estructura cognitiva.

Durante la actividad de RP como práctica social, los estudiantes utilizan expresiones analíticas, algebraicas o gráficas, ellas son formas culturales inmersas en los sistemas de registros de representación, estos son constitutivos del objeto función a tramos, sin embargo, es mediante la mediación de instrumentos o herramientas que los estudiantes logran producir una representación mental del problema, se piensa con y a través de esos artefactos culturales (Geogebra).

Lo descrito da cumplimiento a la hipótesis: *Es posible tanto comprender como dar significado a un objeto matemático, cuando se tiene la capacidad de realizar transformaciones y transitar por diferentes sistemas de representación del objeto en cuestión.*

Lo anterior indica que el pensamiento no es algo que transcurre solamente en el plano cerebral de los alumnos, también ocurre en el plano social. El uso de la aplicación Geogebra, los signos, signos y expresiones matemáticas que ayudaron a resolver el problema, son artefactos que mediatizan y materializan el pensamiento. Esos artefactos son parte integral del pensamiento (Radford, 2006).

7.4.2.1**. Categorización desarrollo de conocimiento y comprensión**. La tabla siguiente presenta aspectos de desarrollo de conocimiento, a partir del subsumidor límite laterales, función para anclar el concepto de función a tramos, como se evidencia en la siguiente tabla.

Tabla 34

Desarrollo de conocimiento derivada función a tramos

Categoría	Subcategoría	Desarrollo de conocimiento	Comprensión
Conceptos	Continuidad	Teoremas sobre continuidad de diferentes tipos de funciones, continuidad en un intervalo [a,b].	PK
		Expresiones analíticas para diferentes valores del dominio de f(x).	NP: capacidad de los estudiantes para analizar la continuidad
Registro de representaciones	Registros semióticos	Articulación entre registros analíticos, algebraicos y gráfico.	NP: transita por los diferentes registros semióticos de representación de la función a tramos
	Variaciones conceptuales	Continuidad en intervalo de funciones a tramos.	S: Utiliza los teoremas sobre funciones continuas en un intervalo
	Continuidad	Teoremas sobre continuidad de diferentes tipos de	S: Aplica los conceptos para determinar la

	funciones, continuidad en un intervalo [a,b].	continuidad de la función a tramos en un intervalo cerrado.

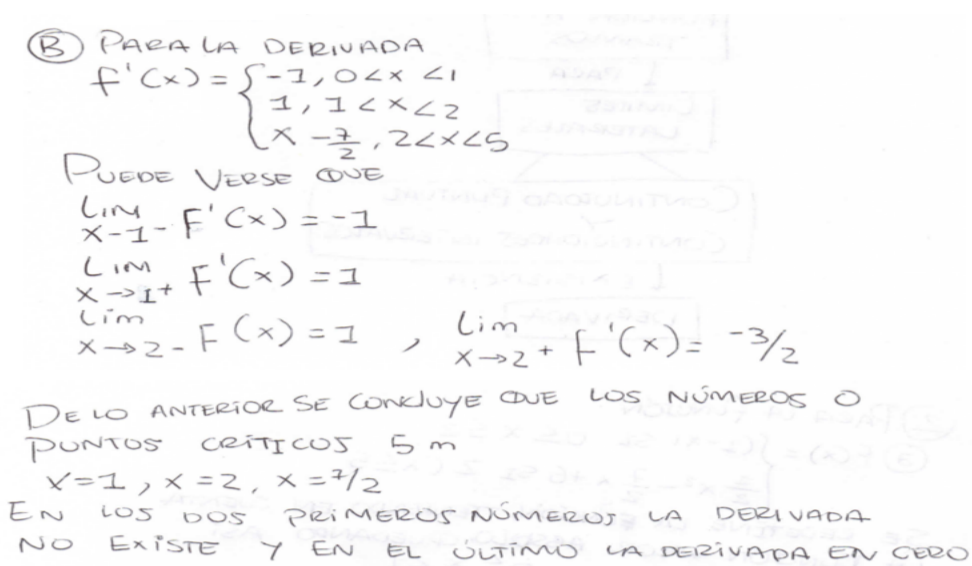
El siguiente ítem de la pregunta 2, tiene como objetivo anclar el concepto de derivada.

b.Determine la derivada de f(x) y analice los puntos críticos.

Continuamos con el análisis del grupo de estudiantes anterior, inician con el concepto previo de función valor absoluto y su desarrollo

Ilustración 42

Derivada función a tramos y puntos críticos



Los estudiantes han concluido que, si la función es continua en todo el dominio, entonces es derivable, han utilizado los conocimientos previos, como proposiciones y teoremas como parte epistemológica utilizada en los algoritmos de derivación en funciones algebraicas y trascendentes.

Los párrafos de la **sesión 7.4** son parte constitutiva de la fusión de las Teorías del Aprendizaje Significativo y de la Teoría sociocultural, se ha logrado dar cumplimiento a la pregunta: *¿En qué medida puede desarrollarse aprendizaje significativo y la comprensión del concepto de función en particular la función a tramos y cómo influyen algunos subsumidores como dominio, rango, límite, continuidad y derivada en dicho aprendizaje desde la resolución de problemas con la implementación de un material potencialmente significativo que involucra tal concepto?*

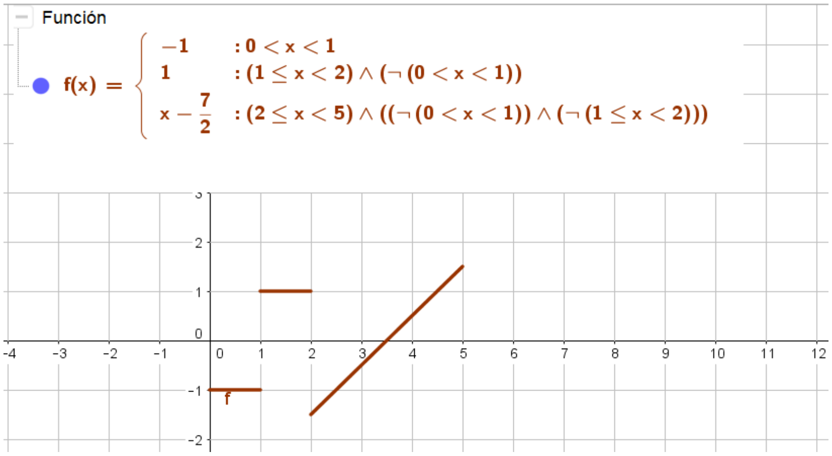
Otro grupo de estudiantes la cual representa f´(x) como forma de comprobación de las conclusiones respecto al análisis de los puntos críticos. Una vez más han utilizado acciones como procedimientos que inducen a la comprensión y construcción de significado del concepto derivada.

La elaboración de la función en la aplicación Geogebra, fortalece el aspecto social en el desarrollo del conocimiento matemático, lo cual es una implicación del establecimiento de una relación en la cual interactúan aspectos didácticos, epistemológicos y cognitivos, lo cual permite la construcción y desarrollo de conocimiento matemático.

En este sentido, no es posible aislar el desarrollo del conocimiento matemático de las acciones sobre los objetos, ni de la intuición y de las aproximaciones inductivas ligadas a la RP en contextos particulares, ni tampoco de los instrumentos utilizados en apoyo de la actividad matemática.

Ilustración 43

Derivada de la función a tramos propuesta



La gráfica describe la estructura cognitiva de los estudiantes, que asocian con el concepto, y relacionan con las diferentes representaciones: simbólica, analítica y las propiedades y procesos que le caracterizan. En este momento es importante a tener en cuenta sobre el AS del concepto derivada que ha sido comprendido y elaborado en la estructura cognitiva por la mediación con instrumentos.

7.4.2.2**. Categorización del desarrollo de conocimiento y comprensión**. La tabla 35 presenta aspectos de desarrollo de conocimiento, a partir del subsumidor límite laterales, función para anclar el concepto de función a tramos.

Tabla 35

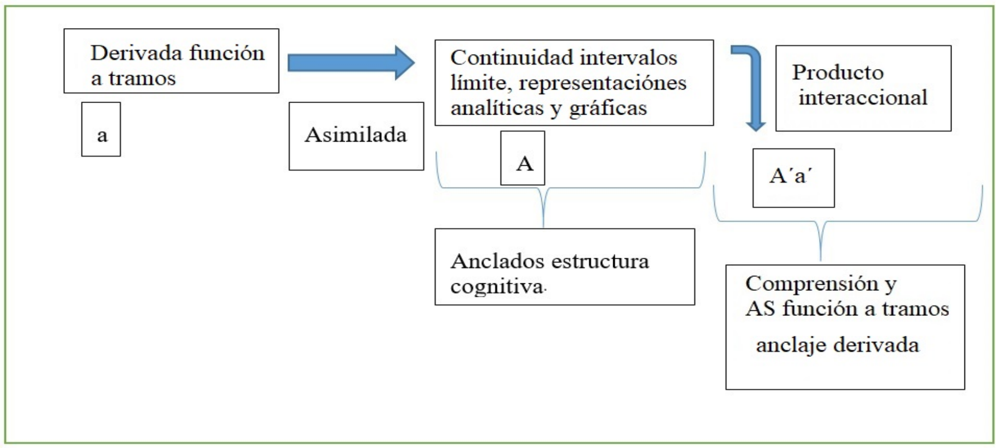
Derivada y puntos críticos función a tramos

Categoría	Subcategoría	Desarrollo de conocimiento	Comprensión derivada
Conceptos	Derivada	Derivación de funciones polinómicas.	PK: Indica de acuerdo a la clase de función su continuidad
	Referencia conceptual	Derivada de funciones polinómicas. Punto crítico	PK. O: Realiza la conexión entre los puntos críticos y la existencia o no de la derivada S: Reconoce las relaciones entre el límite y los puntos críticos
Registro de representaciones	Registros semióticos	Articulación entre registros analíticos, algebraicos y gráfico.	IM: Modela en Geogebra la función y su derivada.
	Variaciones conceptuales	Continuidad en intervalo de funciones a tramos. Concepto gráfico de derivada.	IM, O: conecta los registros analíticos y gráficos de la derivada de la función a tramos

El análisis desde el As nos permite deducir el anclaje del concepto de la derivada de una función a tramos, como puede observarse:

Gráfica 17

Anclaje del concepto derivada de una función a tramos



El concepto de derivada de función a tramos (a) es el concepto a aprender significativamente por parte de los estudiantes, y los conceptos que han asimilado como continuidad en un intervalo y las diferentes representaciones están ancladas en la estructura cognitiva (A) -conocimientos previos-, el nuevo concepto específico de función a tramos y anclaje de la derivada, fue asimilado por el concepto más inclusivo de -función- (A' a').

Podemos afirmar que la asimilación o anclaje del concepto de función a tramos ha permitido tener un efecto facilitador de la retención de a´. es decir, el producto A´a´se puede disociar en A´+ a´, lo cual indica que el AS posibilita que nuevos conocimientos vuelvan espontánea y progresivamente, menos separables en la estructura cognitiva.

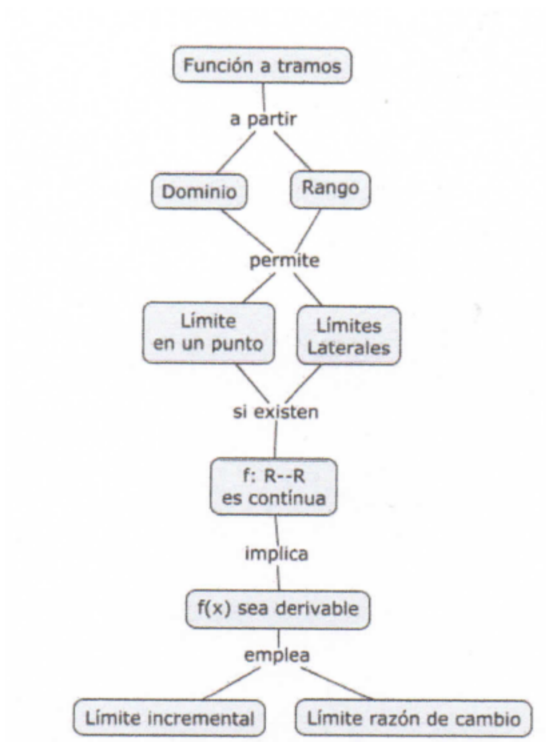
7.4.3. *Actividad*

Realiza un mapa conceptual de los conceptos utilizados en la solución del problema.

A continuación, se evidencia la interacción entre nuevos conocimientos y conocimientos previos anclados en la estructura cognitiva, muestra que es la particularidad del AS es, sin duda, muy apropiada para la comprensión y desarrollo de conocimiento.

Ilustración 44

Mapa conceptual sobre el concepto de derivada propuesto por un grupo



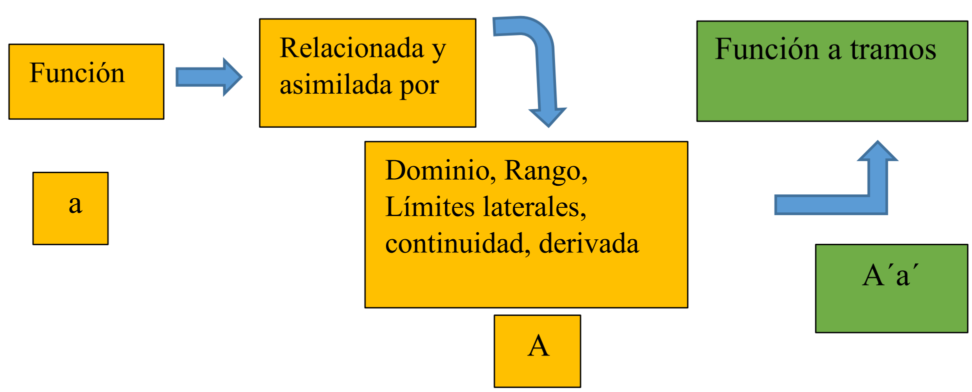
El AS ocurre en el dominio de interacciones jerárquicas que van generando cambios en los conocimientos previos de los estudiantes -función a tramos, límites laterales, continuidad puntual-. En la construcción jerárquica la variable más importante son esos conocimientos previos, quiere decir, representaciones internas en la estructura cognitiva, con un cierto grado de estabilidad, que se van transformando en la medida que incorporan nuevos conocimientos -continuidad en intervalos y derivada-

El mapa conceptual muestra el proceso de adquisición de significado en la estructura cognitiva y el AS desde la interacción cognitiva, no arbitraria y no literal entre el nuevo conocimiento potencialmente significativo y algún conocimiento específicamente relevante. Esa interacción que identifica al AS está siendo mediada desde la práctica social -interacción social- por la computadora y por el material potencialmente significativo.

Se muestra la asimilación y el As de la función a tramos, análisis realizado desde el material de trabajo 3 basado en las preguntas 1 y 2 y el mapa conceptual realizado por los estudiantes:

Gráfica 18

Asimilación y AS concepto función a tramos



El concepto a -función- es el nuevo conocimiento potencialmente significativo a aprender y comprender a través de la RP. Aparecen nuevos significados y conocimientos desarrollados como entorno, punto de acumulación, representaciones diferentes del concepto entre otras.

Estos nuevos o antiguos conocimientos son relacionados y asimilados por los conceptos subsumidores como rango, límites laterales continuidad y derivada, los cuales han sido anclados en la estructura cognitiva, para luego interactuar con el concepto más incluyente de función a tramos. De esta forma, el resultado de la interacción se lleva a cabo con el AS, entre el material potencialmente significativo y la estructura cognitiva.

El proceso llevado a cabo hasta aquí, sugiere que el aprendizaje del nuevo conocimiento -función a tramo- ha sido significativo a través de la interacción con los subsumidores dominio, rango, función, entorno, punto de acumulación, representaciones diferentes de los objetos -gráfica y analítica- límite lateral y derivada entre otros.

Durante este proceso, los estudiantes adquirieron el aprendizaje representacional, otorgando significado a los símbolos, es decir al objeto representante -símbolo o representación, como dominio, rango-, para luego adquirir un aprendizaje de conceptos, es decir asimilaron el objeto representado -concepto, como límite lateral-, este proceso implica un aprendizaje subordinado, así el nuevo conocimiento -función continua- adquiere significado.

Al aparecer un nuevo concepto, se forma en la estructura cognitiva un nuevo subsumidor para originar el aprendizaje proposicional -teorema sobre derivabilidad-, el cual incluye relacionar los símbolos, las representaciones de forma que intervengan en la formación de teoremas y leyes.

Durante el proceso se desarrolla conocimiento y se interiorizan los significados de las proposiciones y los términos que la componen. La adquisición de significados es el producto del AS. Es decir, la función a tramos adquirió significado real para los estudiantes -significado psicológico- el cual emerge por el significado potencial -significado lógico- del material potencialmente significativo.

El desarrollo de conocimiento también es producto de la actividad de RP, aunque la actividad no se le considera aquí una unidad de análisis en el sentido amplio, sí contribuye activa y dinámicamente en el desarrollo cognitivo, como resultado de la interacción de los estudiantes con las herramientas disponibles para la actividad intelectual.

El uso de herramientas, artefactos o instrumentos como mediadores permite, reformular entre los estudiantes la relación entre ellos y el entorno social y cultural, allí se comparte o participa en actividades de labor conjunta, es decir, existe la práctica social lo que hace que la relación sea biunívoca.

Los recursos simbólicos como signos, símbolos, expresiones analíticas fórmulas y medios gráficos son los instrumentos psicológicos y como tal, dominan los procesos cognitivos de los estudiantes, mientras los instrumentos materiales como el computador -su utilización- sirven como conductores de la actividad RP.

El uso del programa Geogebra es la adaptación de un instrumento material disponible en la cultura de los estudiantes, para organizar los procesos mentales superiores que intervienen en la solución del problema, presuponen un uso colectivo y una representación simbólica, la actividad RP es mediada por instrumentos.

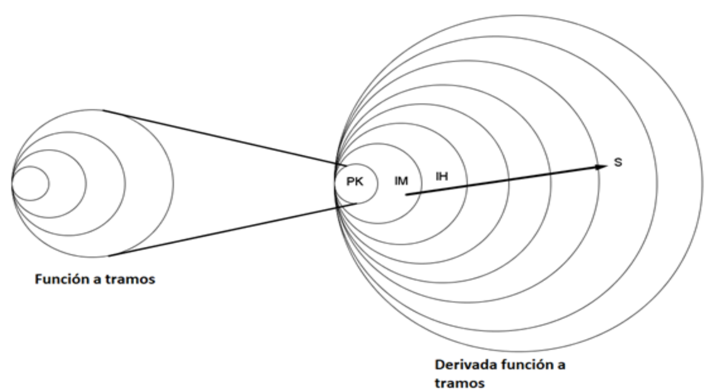
Se convierte así los instrumentos materiales desde la Teoría Sociocultural en un material de aprendizaje potencialmente significativo, que influye en la estructura cognitiva pues: se piensa con y a través de instrumentos. El material -Geogebra- ayuda a los estudiantes a estabilizar los significados del concepto función a tramos que sirvió como subsumidor de la derivada de la función.

Se puede afirmar que los estudiantes comprendieron el concepto de función a tramos y de derivada de una función a tramos, ello se explica en el modelo de Pirie & Kieren.

Se muestra la proyección del crecimiento de la comprensión del concepto de función a tramos desde los conocimientos previos, enfatizando el hecho de que existe un redoblamiento -Folding back- para avanzar hacia el nivel que caracteriza la comprensión de los niveles anteriores, como la creación de imágenes, necesaria para comprender la continuidad, para llegar a este nivel, los estudiantes muestran en Geogebra los puntos de discontinuidad y cómo la función puede llegar a ser continua:

Gráfica 19

Conocimientos previos comprensión derivada función a tramos



No es que se salten los niveles PN, F y O, solo que cuando regresa al papel, allí conectan los registros gráficos y analíticos para demostrar matemáticamente con gran habilidad cuáles son las condiciones de continuidad que debe cumplir la función propuesta como problema en el cálculo de la derivada.

Filtrarse por los niveles F y O y luego retomarlos, hacen que los estudiantes lleguen a un nivel S, en el cual reconocen las relaciones entre las expresiones analíticas y las gráficas concluyendo que la función es derivable en ciertos puntos, lo cual han representan con el uso de Geogebra.

Las habilidades y estrategias cognitivas básicas que han desarrollado los estudiantes como la atención, la memoria, el lenguaje, y la percepción, se han transformando en formas de pensar y actuar, son herramienta para que un sujeto pueda resolver distintos tipos de problemas.

7.5. **Material de trabajo 4**

Objetivo: Anclar el concepto de derivada como razón de cambio a partir de algunos subsumidores como límite y la derivada como límite de la razón incremental de la función a tramos.

7.5.1. ***Pregunta1***

La pregunta consta de cinco ítems que serán analizados a la luz del AS, la comprensión del concepto derivada para el anclaje en la estructura cognitiva y el desarrollo del conocimiento matemático. La pregunta está planteada desde un registro algebraico.

Consideremos la siguiente función desde x=2 hasta x=5.

$$f(x) = \begin{cases} 1, x < 0 \\ 1 - x^2, 0 \leq x \leq 2 \\ x - 5, \quad x > 2 \end{cases}$$

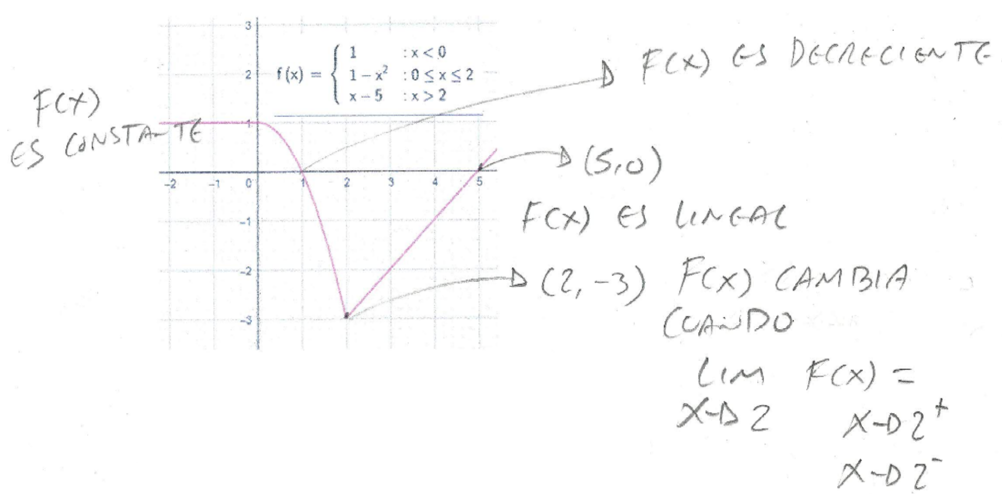
a. ¿Cuál es el valor de y cuando x=a?

Un grupo de estudiantes realiza el gráfico de la función en Geogebra y realiza un análisis del comportamiento de cada una del fi (x) que componen a f(x).

El hecho de una función ser creciente, decreciente o constante lleva a los estudiantes a inducir implícitamente que la función es continua en un intervalo abierto y que alcanza un mínimo absoluto en el punto (2,-3), lo que muestra un cambio al pasar de decreciente a creciente:

Ilustración 45

Función a tramos con criterios de concavidad



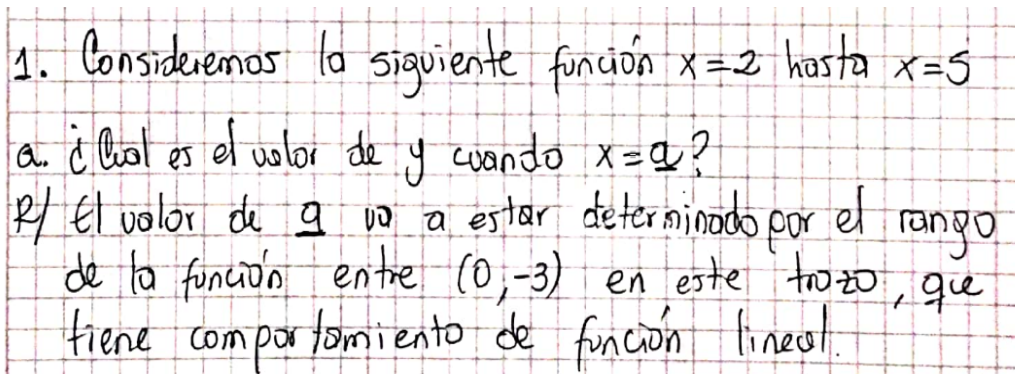
La siguiente ilustración, muestra la importancia que tiene el dominio y el rango cuando la función a tramos toma valores particulares.

Las respuestas dadas demuestran un claro traslado del registro algebraico al registro gráfico, de igual forma, se infiere que se han anclado varios de los conceptos fundamentales en la construcción del concepto de función a tramos como el dominio, el rango, los límites laterales y la continuidad de la función.

Los estudiantes han comprendido los conceptos subyacentes al concepto de función a tramos en el sentido de Wittrock (1990), es decir, han percibido la funcionalidad que permite el uso y no los usos particulares del objeto matemático, como se muestra en la siguiente ilustración:

Ilustración 46

Análisis dominio y rango


1. Consideremos la siguiente función x=2 hasta x=5

a. ¿Cual es el valor de y cuando x=a?

R/ El valor de a va a estar determinado por el rango de la función entre (0,-3) en este trozo, que tiene comportamiento de función lineal.

Como consecuencia de esto, relacionan progresivamente los diferentes elementos del significado, han aprendido de un modo significativo, evidenciado al efectuar un proceso de actualización de los esquemas cognitivos relativos a la situación en consideración, es decir, atribuyeron un significado al material objeto de estudio.

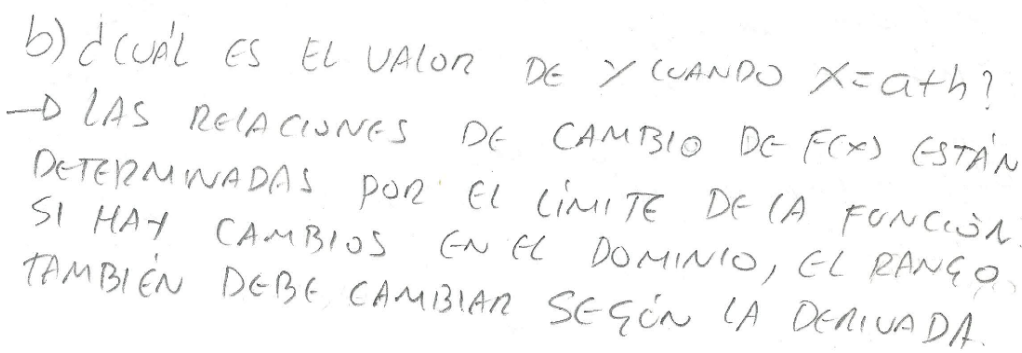
A continuación, se describen y analizan los cuatro ítems faltantes.

c. ¿Cuál es el valor de y cuando x = a+h?
d. ¿Cuál es el ***cambio*** en y cuando x aumenta de a hasta a+h?
e. ¿Cuál es la tasa de cambio promedio de y en el intervalo x de a hasta a+h?
f. ¿puedes usar el resultado (d) para obtener la tasa de cambio de y desde x = -1 hasta x= X cualquiera)? ¿Si es así, cómo sería?

Este tipo de preguntas nos permite entender íntegramente cómo comprenden y tratan la razón de cambio, es decir, saber la relación entre el cambio de la variable dependiente y la independiente y qué elementos contrastan o relacionan con el límite del cociente incremental.

Ilustración 47

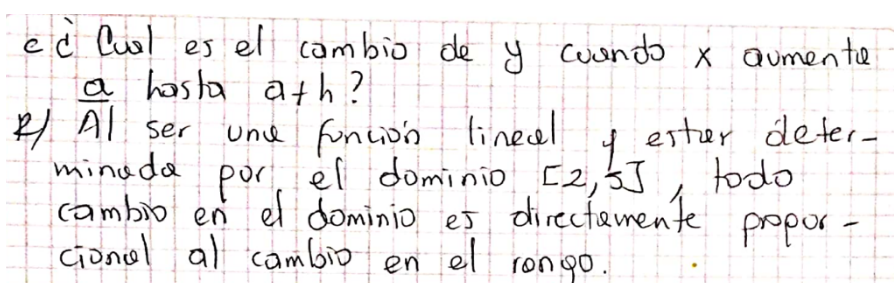
Hacia el incremento como derivada de la función a tramos


b) ¿CUÁL ES EL VALOR DE Y CUANDO X=a+h?
→ LAS RELACIONES DE CAMBIO DE F(X) ESTÁN DETERMINADAS POR EL LÍMITE DE LA FUNCIÓN. SI HAY CAMBIOS EN EL DOMINIO, EL RANGO TAMBIÉN DEBE CAMBIAR SEGÚN LA DERIVADA.

Se detectan los cambios que se producen al pasar de un punto a otro y responder sobre el comportamiento en algunos intervalos específicos de la función a tramos. Aunque los estudiantes no hallaron f(a + h) = a+h-5, si explican la razón de cambio a partir del límite de la función, como se aprecia en la siguiente ilustración.

Ilustración 48

Cambio de a hasta (a+h): incremento o razón de cambio

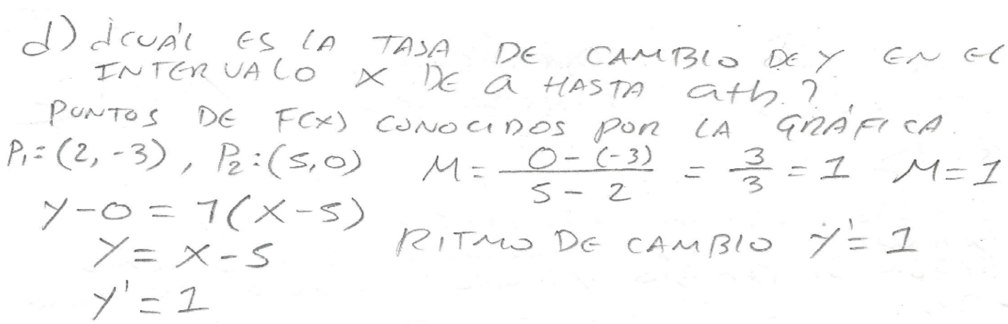

c ¿Cual es el cambio de y cuando x aumenta a hasta a+h?
R/ Al ser una función lineal y estar determinada por el dominio [2,5], todo cambio en el dominio es directamente proporcional al cambio en el rango.

Los estudiantes comprenden el aumento Δx para esta función como un incremento proporcional, lo cual es cierto ya que al x pasar de a hasta a+ h, el cambio es h. Δy = a+h-5-(a-5) =h, es otro concepto previo en la estructura cognitiva como la concavidad.

Como se aprecia en el tratamiento de concepto de derivada no se encierra a la secuencia cuando el incremento de la variable independiente tiende a cero, o a las fórmulas o interpretación geométrica, de igual forma se deja a un lado las aproximaciones numéricas del límite del cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ cuando a Δx se le asignan valores próximos a cero.

Ilustración 49

Derivada como razón de cambio



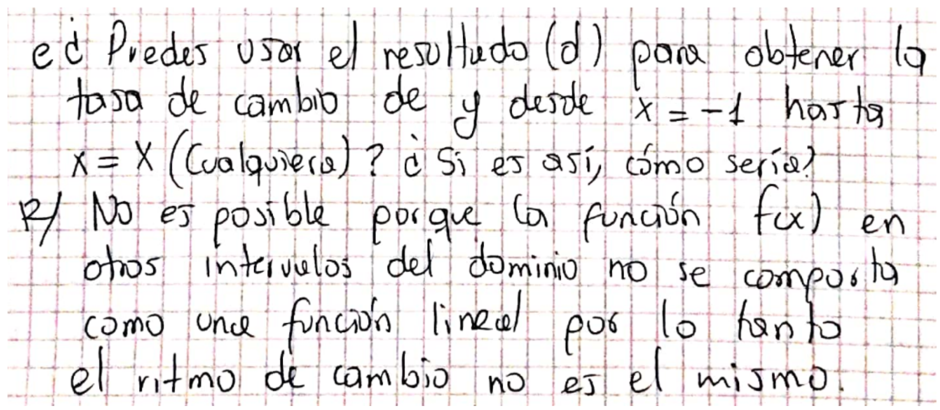
Es el conocimiento matemático como producto de un elemento fundamental en la cultura que compartimos con los estudiantes, el conocimiento desde la historia ayudó a los estudiantes a resolver problemas relativos tanto al límite como a la derivada, indicando la comprensión de los objetos matemáticos mencionados.

Esto a su vez, tiene repercusiones en cuanto a las estrategias del material potencialmente significativo, el cual se aparta del uso de la memoria, aprendizaje no significativo y por el contrario aporta ideas variacionales para el AS del Cálculo.

Un ejemplo de esto lo vemos cuando los estudiantes en su práctica abordan el tema de la derivada, observando que no les cuesta trabajo establecer argumentos que relacionen los puntos del dominio donde está definida la función para el cálculo de la derivada como tasa de variación, asociando un significado por medio de la velocidad como razón de cambio.

Ilustración 50

Comprensión derivada como razón de cambio


e ¿Puedes usar el resultado (d) para obtener la tasa de cambio de y desde $x = -1$ hasta $x = X$ (cualquiera)? ¿Si es así, cómo sería?
R/ No es posible porque la función f(x) en otros intervalos del dominio no se comporta como una función lineal por lo tanto el ritmo de cambio no es el mismo.

La justificación anterior, se encuentra en el conocimiento matemático de los estudiantes el cual se ha fundamentado en el conjunto de prácticas sociales, históricas y culturales, las cuales favorecieron el desarrollo del conocimiento matemático y les permitió que emergieran significados del concepto de derivada.

7.5.1.1**. Caracterización de desarrollo de conocimiento y comprensión.** A continuación, se presentan aspectos de desarrollo de conocimiento, a partir del subsumidor límite de una función a tramos.

Tabla 36

Desarrollo conocimiento razón de cambio

Categoría	Subcategoría	Desarrollo de conocimiento
Conceptos	Límites.	Laterales.
	Aproximación al concepto de derivada	Derivada como razón de cambio.
	Referencia conceptual	Derivada como rapidez.
		La pendiente.
Registro de representaciones	Registros semióticos	Articulación entre registro gráfico y analítico.
		Representación visual que se apoya en la derivada y monotonía de una función.
		Registro verbal articulado a expresiones algorítmicas.
	Variaciones conceptuales	Continuidad puntual.

7.5.2. *Pregunta 2*

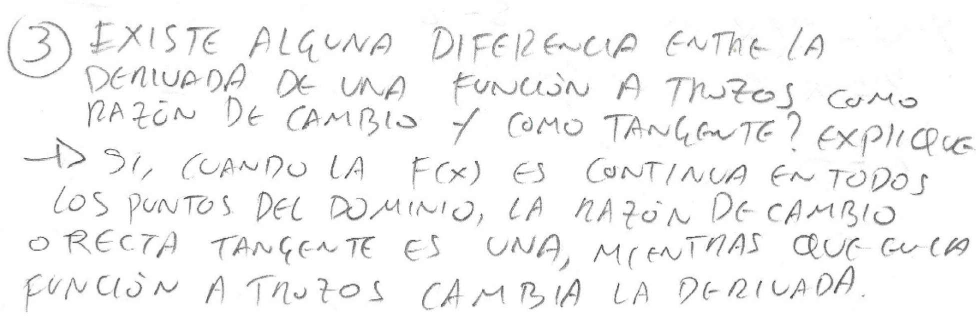
¿Existe alguna diferencia entre la derivada de una función a tramos como razón de cambio y como tangente? Explique.

Esta pregunta pretende demostrar que los problemas planteados pueden llevar a la derivada desde la integración una perspectiva analítica y gráfica apoyándose en la presentación de la idea de derivada como límite incremental y como razón de cambio.

Aunque la derivada f'(a) y f´(a + h) son la razón de cambio instantánea de y=f (x) respecto a x cuando x=a y x= a + h, la relación es que si dibuja la curva y=f(x), entonces la razón de cambio instantánea es la pendiente de la recta tangente a esta curva en el punto donde x=a. Sin embargo, la pregunta no está dirigida en este sentido y los estudiantes responden:

Ilustración 51

Relación entre tangente y pendiente


(3) EXISTE ALGUNA DIFERENCIA ENTRE LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN A TROZOS COMO RAZÓN DE CAMBIO Y COMO TANGENTE? EXPLIQUE.
→ SI, CUANDO LA F(X) ES CONTINUA EN TODOS LOS PUNTOS DEL DOMINIO, LA RAZÓN DE CAMBIO O RECTA TANGENTE ES UNA, MIENTRAS QUE EN LA FUNCIÓN A TROZOS CAMBIA LA DERIVADA.

La respuesta es precisa y los estudiantes se limitan a contestar de acuerdo a la función a tramos planteada y desde esa posición el concepto asumido por ellos tiene significado lógico. Ese significado lógico es propio del material potencialmente significativo, la capacidad de este material de brindarle a los estudiantes la forma de relacionar de manera no arbitraria y sustantiva con el anclaje de algunos subsumidores como función continua y la razón de cambio que ya están presentes en su estructura cognitiva.

El significado atribuido a los conceptos aprendidos es debido al subsumidor razón de cambio que actúo de anclaje y se ha modificado y el conocimiento desarrollado de tangente se ha interpretado. El significado psicológico es, por tanto, el resultado de la relación entre el dominio de la función a tramos, la función a tramos continua, la razón de cambio y la tangente que les ayudó a fijar el material potencialmente significativo de manera sustantiva y no arbitraria en la estructura cognitiva.

Finalmente podemos concluir de acuerdo al análisis anterior que los estudiantes han logrado un AS y han otorgado un tratamiento de los fenómenos que ocurren en la producción y desarrollo de conocimiento, que experimentan, cuando utilizan un material educativo diseñado para que sea potencialmente significativo en la resolución de problemas que involucra el concepto de función a tramos.

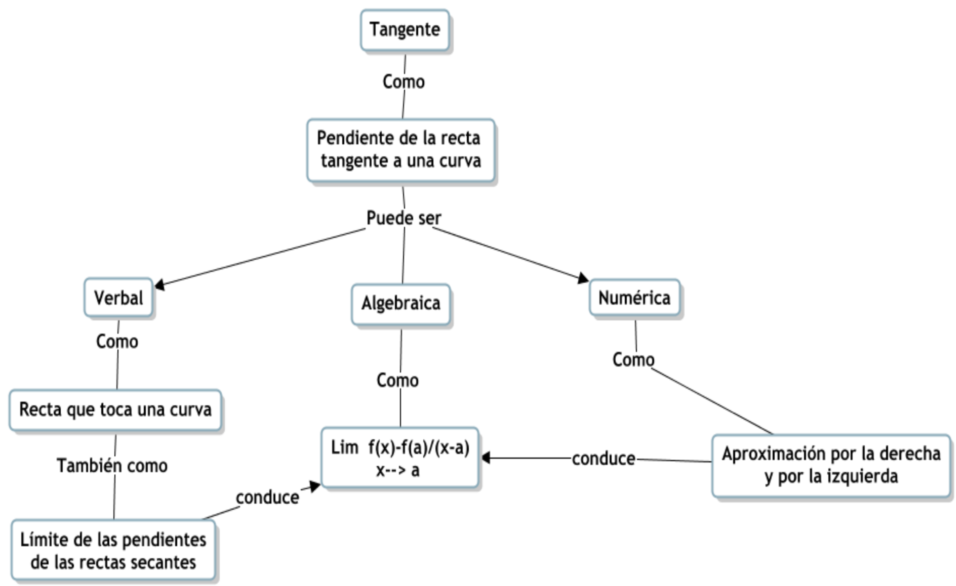
7.5.3. *Actividad*

Qué conocimientos utilizó para resolver el problema. Realice un mapa conceptual.

Un grupo de estudiantes utiliza software para realizar el mapa conceptual.

Ilustración 52

Conocimientos previos para la Tangente



El mapa conceptual explicita los contenidos que utilizaron los estudiantes como estrategias que favorece, en términos generales, su desarrollo cognitivo, teniendo en cuenta el conocimiento previo.

Se aprecia que el mapa conceptual es un mediador del proceso en la resolución del problema, lo cual da evidencias de AS y el anclaje del concepto de derivada como razón de cambio para funciones a tramos.

El entorno social y cultural de los estudiantes, le plantean la necesidad de construir estructuras cognitivas, que cada vez responden a los problemas planteados de la mejor forma posible, además, el material potencialmente significativo provoca que coloquen en juego el desarrollo de conocimiento matemático, con el objetivo de hacerlos integrables a su estructura cognitiva.

La interacción cognitiva entre los conocimientos que han desarrollado y los previos puede describirse e interpretarse a partir de la tangente que es el conocimiento previo que adquirió nuevo significado, lo cual es demostrado cuando se concluye la derivada en la expresión algebraica del $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, el conocimiento previo tangente quedó más elaborado, más diferenciado y de funciona como subsumidor para otros nuevos conocimientos.

Este análisis cualitativo de corte descriptivo e interpretativo nos permite concluir que cada uno de los fenómenos evidenciados en las tablas, gráficas e ilustraciones da cuenta de cómo los descriptores están en correspondencia de manera directa con cada uno de los seis primeros niveles del modelo de Pirie & Kieren:

Conocimiento primitivo: Reconocen una función como una relación entre variables establecida por una definición formal como lo propone Vinner, realizan el reconocimiento del dominio y rango en cada intervalo de la función a tramos. A partir de este concepto reconocen la función creciente y decreciente en un intervalo. Reconocen tipos de funciones formadas por la función a tramos como la constante, la lineal, la función de segundo grado. Reconoce los límites laterales a partir de la construcción de gráficas.

Creación de la imagen: En este nivel los estudiantes crean imágenes mentales, que llevan a cabo usando la aplicación Geogebra, imagen pictórica, para transmitir significados a través de ella, tales significados permiten obtener información sobre el objeto matemático como reconocedor de la existencia de funciones por tramos.

Comprensión de la imagen: En este nivel los estudiantes sustituyen las imágenes asociadas con una sola actividad por imágenes mentales que se consideran orientadas por un solo proceso. De acuerdo con esta consideración, los descriptores de este nivel son:

Establecieron el valor de una función en un punto y describieron el comportamiento de los que le sirven para definir otras estructuras y elementos como la monotonía, usaron la definición normal de límite de una función en un intervalo para calcular su valor en un punto de acumulación.

Observación de la propiedad: Los estudiantes en este nivel tuvieron la capacidad de construir un concepto de razón de cambio, relacionan los conceptos de continuidad y discontinuidad, de la derivada y de la tangente.

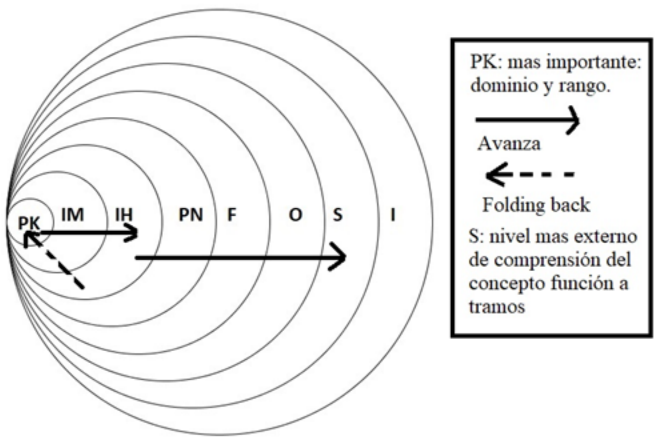
Formalización: Los estudiantes producen verbalizaciones sobre los conceptos de función creciente, a la vez que relacionan la función continua con los cambios que tiene la función a tramos, concluyendo que la recta tangente es diferente para cada intervalo del dominio donde la función a tramos está definida.

El sexto nivel llamado observación, el descriptor principal fue la combinación de las definiciones, teoremas utilizados para calcular tanto los límites como la derivada de la función, donde finalmente indican la relación entre la derivada y la tangente.

En el nivel de estructuración, el descriptor hace referencia a la forma en que los estudiantes tomaron conciencia del concepto de función a tramos y la refinaron realizando relaciones entre la imagen, el dominio, los límites laterales y así interconectan los diferentes teoremas y propiedades para llevar a cabo el cálculo de la derivada de la función a tramos propuesta.

Gráfica 20

Análisis comprensión del concepto razón de cambio función a tramos



Podemos concluir que los estudiantes han comprendido el concepto de función a tramos y han adquirido AS del concepto, refinándolo y relacionándolo coherentemente con los conceptos de continuidad, límite, derivada y función monótona.

Es de anotar que siempre realizaron un Folding back hacia el dominio de la función a tramos, ese regreso a conocimientos anteriores les permitió reelaborar los mismos, para ingresar a un nivel externo y poder avanzar al siguiente nivel, con el fin de asegurar la efectividad de la comprensión del concepto de derivada de una función a tramos.

En la búsqueda por materializar cómo se desarrolla el conocimiento, además de los aspectos cognitivos involucrados en la construcción del objeto matemático, se consideran las prácticas sociales que conducen a la constitución de ese saber.

CAPÍTULO VIII

8. **Conclusiones**

En este último capítulo se exponen las conclusiones generales de orden teórico sobre la comprensión del concepto de función y el AS y su relación con la Teoría sociocultural. En el avance de cada una de las partes se señalan aspectos específicos que emergieron del proceso investigativo, con el fin de, presentar la perspectiva de lo afianzado en la investigación y, ofrecer resultados que se vinculan de manera significativa con la adquisición del concepto de función a tramos.

Los desarrollos, reflexiones y conclusiones presentados en este apartado, se originan en los anteriores capítulos de esta investigación, han otorgado fundamentos para dar respuesta a las preguntas de investigación planteadas al inicio de la misma y verificar el grado de alcance de los objetivos formulados.

Así mismo, se presenta una abstracción y evaluación general de la investigación realizada. Posteriormente se realiza una valoración global de la propuesta y se analiza la posibilidad de su implementación en la enseñanza universitaria. Se declaran además algunos asuntos que quedan abiertos, que motivarán probablemente el desarrollo de futuras investigaciones.

8.1. **Algunas reflexiones**

Como se planteó al comienzo de esta investigación, surgió por el interés de analizar el AS, la comprensión del objeto función y la relación con el saber, con las matemáticas y el conocimiento matemático subyacente en el concepto a función a tramos y la actividad RP.

Diferentes investigaciones en el ámbito de la Educación Matemática han demostrado que los estudiantes logran graficar funciones, calcular límites o derivadas, pero presentan dificultades para comprender, utilizar y desarrollar ciertos conocimientos y relacionar diferentes componentes del concepto de los objetos mencionados. Son diferentes las causas señaladas a esta problemática y en gran medida son conexas a los escasos aprendizajes por parte de los estudiantes universitarios, la manera en que primero se formaliza el conocimiento a enseñar y luego se aplica en la resolución de ejercicios.

De igual manera, las investigaciones evidencian que los estudiantes desarrollan conocimiento con cierta independencia del proceso de enseñanza, interviniendo como un factor fundamental su interacción con el entorno.

Nos propusimos estudiar el AS de los estudiantes cuando interactúan con un material potencialmente significativo, basado en la actividad de RP articulados en torno al concepto de función desde diversos sistemas de representación, centrando la atención tanto en los conocimientos previos de los estudiantes y las prácticas sociales generadoras de conocimiento.

8.2. **La pregunta de la investigación**

¿En qué medida puede desarrollarse aprendizaje significativo y la comprensión del concepto de función en particular la función a tramos y cómo influyen algunos subsumidores como dominio, rango, límite, continuidad y derivada en dicho aprendizaje desde la resolución de problemas con la implementación de un material potencialmente significativo que involucra tal concepto?

Para responder la pregunta de investigación y los objetivos, se establecieron categorías de análisis como el anclaje de conceptos y AS, anclaje de subsumidores, desarrollo de conocimiento matemático en particular del objeto función a tramos.

En estas categorías se realizaron los análisis de la manera en la que cada grupo protagonista de la investigación, fue aproximándose de forma progresiva al concepto de función a tramos y su comprensión.

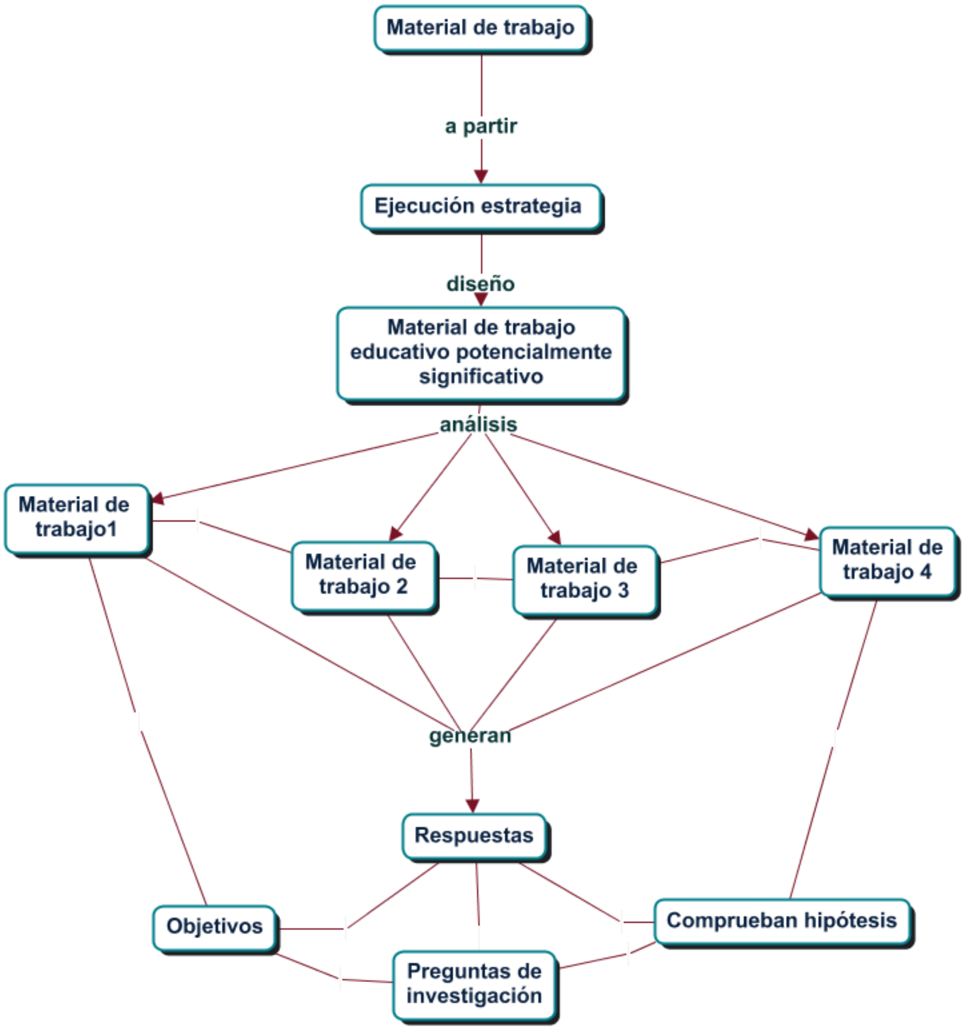
En el capítulo VII se presentan los resultados organizados desde los análisis de cada uno de los instrumentos de recolección de información o material potencialmente significativo y solucionamos las respuestas planteadas al inicio de la investigación y los objetivos propuestos.

Los análisis de los datos obtenidos en esta investigación respaldan la importancia inicial respecto al AS y desarrollo sociocultural de conocimiento matemático, referente a la comprensión del concepto de función a tramos y a la estrategia de implementación de uso de material potencialmente significativo el cual involucra problemas que, logran instanciar las relaciones entre los conocimientos previos y el anclaje de nuevos conocimientos.

El siguiente mapa conceptual muestra la ruta para dar respuesta a cada una de las preguntas, objetivos e hipótesis que sustentan la investigación.

Mapa conceptual 7

Análisis pregunta objetivos



El material de **trabajo 1** logra que los estudiantes anclen el concepto eje fundamental de la investigación la función y la relación entre la expresión analítica, algebraica y su respectiva gráfica, además desarrollen conocimiento matemático; por otro lado, la relación sujeto-objeto mediatizada por el uso de instrumentos, en este caso el material potencialmente significativo propicia la influencia en el desarrollo cognitivo. De igual forma, la actividad de RP a través del material contribuyó al desarrollo de conocimiento, y a activar los procesos mentales superiores.

En análisis del material de **trabajo 2** se reconoce que el conocimiento y la comprensión del objeto de saber función a tramos por parte de los estudiantes, se hace posible mediante la labor conjunta en la práctica social lo cual se plasma cuando proponen problemas relativos a la función a tramos.

El material de **trabajo 3** como material potencialmente significativo induce al uso del recurso tecnológico que, permite a los estudiantes desarrollar conocimiento matemático no reducido a un conjunto de habilidades para operar con símbolos que, a su vez, logran transitar por diferentes sistemas de representación, lo cual refleja los saberes de los estudiantes al aplicar el concepto de función continua aplicando los límites laterales.

Finalmente, el análisis del material de **trabajo 4** expresa cómo los estudiantes han comprendido los conceptos subyacentes al concepto de función a tramos en el sentido de Wittrock (1990), es decir, han percibido la funcionalidad que permite el uso y no los usos particulares del objeto matemático función a tramos.

Los estudios de las **ilustraciones 40 a 44** se explicita mediante el análisis del material que se le ha dado respuesta a la pregunta de investigación principal.

En esencia durante el proceso de comprensión de los conceptos que subyacen al concepto de función, la relevancia del material educativo, el cual contiene explícita o implícitamente en los enunciados de los problemas los subsumidores y los conocimientos previos que debe poseer en su estructura cognitiva el estudiante.

El material tiene en cuenta los conocimientos previos que permite que las distintas secciones conformen un enunciado integral, con significado lógico para el estudiante; es decir, que se constituyan los contenidos en una unidad y no sean simplemente informaciones desencajadas, de manera que éstos puedan establecer alguna relación entre lo afirmado y la pregunta formulada en el contexto matemático en el que se plantea el enunciado

Existen elementos con los cuales se realiza el análisis de los datos, el material posee actividades como los mapas conceptuales, problemas sobre límites y derivadas de funciones a tramos y problemas con diferentes posibilidades de representación de los objetos matemáticos, con lo cual se logró la transformación de representaciones producidas en diferentes registros. Los mapas conceptuales propuestos por los estudiantes apoyan el desarrollo de conocimientos a partir de los conocimientos previos, como ese proceso dinámico en el que antiguos y nuevos conocimientos son transformados, obteniéndose una estructura cognitiva más diferenciada que tiende a una organización jerárquica del concepto de función (Moreira 2000).

El material, además de las características planteadas por Ausubel (1963), Moreira (2012) y Silva *et al*., (2014) es un organizador implícito de los conceptos, de naturaleza esencialmente cognitiva y cultural que incluye, significados, proposiciones, reglas, imágenes mentales, que medien el desarrollo de conocimiento y conducen hacia el proceso de AS, además, poseen una naturaleza situada o dependiente del contexto y ante todo constituyen un saber ser y hacer.

El material educativo debe permitir a los estudiantes a aprehender y compartir significados. En este contexto, lo más relevante del AS es el conocimiento previo impregnado en cada uno de los materiales propuestos, desde donde se percibió que, el desarrollo de material potencialmente significativo permite extraer las concepciones previas de los estudiantes y, desde este punto, crear o plantear problemas para dar nuevos significados al conocimiento.

Finalmente: *Analizar los subsumidores para el aprendizaje del concepto de función y de la función a tramos y los conocimientos desarrollados que emergen de un sistema de práctica social y cultural como consecuencia de la naturaleza de la actividad resolución de problemas*

Se realiza una comparación entre el pretest aplicado a los estudiantes y se concluyó que las dificultades emergen por falta de uso de sus conceptos previos, del anclaje de conceptos claves como dominio, rango y función en su estructura cognitiva; la categorizaron de las respuestas dadas en la tabla responde en parte sobre el anclaje de los subsumidores, y manifiesta en las respectivas ilustraciones a la segunda parte de la pregunta.

Las respuestas a las preguntas se encuentran en los análisis llevados a cabo de cada una de las categorías y se plasman en el capítulo VII, al igual que el cumplimiento de los objetivos. Así mismo, las respuestas a las hipótesis planteadas se encuentran concentradas y comprobadas en los apartados y las ilustraciones 24 y 25.

Es de anotar que la hipótesis "*La actividad de RP sobre la función a tramos requiere no solo de procesos cognitivos, de hecho, requiere ciertas estructuras cognitivas específicas cuyo desarrollo tienen génesis en la actividad sociocultural*", no fue probada en su totalidad, por lo cual se propone para futuros investigadores que deseen ampliar esta investigación o investigaciones similares.

8.3. **Aportes**

Esperamos contribuir al desarrollo de la Educación Matemática en Colombia aportando elementos para la reflexión y la discusión sobre el mejoramiento de la práctica educativa en matemáticas y la incorporación al currículo. Esta investigación será muy importante para la formación de estudiantes universitarios de licenciatura en matemáticas en los cuales se pretendan introducir estrategias metodológicas en sus prácticas educativas y para difundir y afianzar la experiencia en las facultades de educación del país.

Esta investigación aporta conocimiento relacionado con estrategias que los estudiantes logran cuando abordan problemas y actividades relacionadas con el concepto de función y función a tramos y con la caracterización de los conceptos de límite, continuidad y derivada a través de los mapas conceptuales.

En esta investigación se ha expuesto la importancia del concepto de función en particular la función a tramos y su AS, de igual forma el desarrollo de conocimiento matemático subyacente a la comprensión de los conceptos que tal objeto implica cuando se utiliza un material potencialmente significativo a través de la RP.

En el análisis didáctico se ha mostrado cómo en nuestro contexto, el tratamiento de los contenidos no promueve, en general, que los estudiantes sitúen aspectos de su estructura cognitiva, por lo que no se posibilita el AS. Para producirse un aprendizaje a largo plazo es necesario el enlace y la coherencia interna del contenido a aprender, por tanto, es importante relacionar los conceptos y conectarlos de manera no arbitraria. Podemos decir que para conseguir el AS necesitamos de instrumentos que ayuden a relacionar y vincular los conceptos.

La idea previa con la que los estudiantes ingresaron respecto al concepto de función a tramos, aunque no era errada, se fue transformando, provocando aprendizajes significativos en los estudiantes. Desde este punto de vista el aprendizaje tiene que ver con la incorporación en su estructura cognitiva de un cuerpo de conocimientos organizados.

Los conceptos de función a tramos, límite, continuidad y derivada fueron relacionados con propiedades de la gráfica de la función y con símbolos o expresiones algebraicas, conceptos que son significativamente comprendidos, entre otros motivos porque se logró la conexión los conocimientos previos, los cuales se encuadraban en los problemas y actividades propuestas en el material potencialmente significativo.

Lo anterior, llevó a generar sistemas de significación que favorecieron la capacidad de desarrollo de conocimiento matemático. De esta manera, los estudiantes lograron comprensión de los conceptos puestos en juego en problemas y actividades y han logrado fijar significados a dichos conceptos.

Para lograr que los estudiantes comprendieran y dieran significado al concepto de función a tramos y los demás conceptos subyacentes a este objeto, se hizo necesario diseñar un material potencialmente significativo que incorporara la RP con diferentes registros de representación. El diseño del material se fundamentó en los conocimientos previos. Se logró "Identificar los subsumidores para el aprendizaje de la función a tramos y los conocimientos desarrollados que emergen de un sistema de práctica social y cultural como consecuencia de la naturaleza de la actividad resolución de problemas".

En ese sentido, el análisis de los resultados del pretest en el capítulo anterior nos permitió aportar al diseño de materiales potencialmente significativo para el aprendizaje, la comprensión y el significado que los estudiantes otorgan al concepto función a tramos.

El material está diseñado para identificar los conocimientos tanto previos como los matemáticos desarrollados por los estudiantes cuando resuelven problemas referentes a la función, en particular la función a tramos, asimismo, permite la transformación de los conceptos mediante la acción sobre los objetos matemáticos que es el medio fundamental para la producción de conocimientos y el AS.

Por otro lado, los mapas conceptuales dieron sentido y coherencia a los conceptos involucrados en los problemas y actividades desarrolladas por los estudiantes. Se logra conseguir la conexión necesaria de la información para que se formen estructuras de conocimiento, así, es posible observar que los conceptos estén relacionados e interconectados.

Podemos decir que el mapa conceptual fue un instrumento adecuado inducido por el material potencialmente significativo tanto para potenciar o fortalecer el AS y la comprensión del concepto función, allí se logra observar la jerarquía coherencia y conexión entre conocimientos previos y el conocimiento desarrollado. Los estudiantes lograron construir la estructura cognitiva, encuentran sentido a los conceptos que aprenden. Los mapas conceptuales realizados por los estudiantes proporcionaron al investigador, los elementos implicados en la construcción del proceso inductivo entendido como un Aprendizaje Subordinado y el proceso deductivo entendido como un Aprendizaje Supraordenado que contribuyen al desarrollo cognitivo -ver *Asimilación*-.

Los mapas conceptuales no son una manera diferente de disponer u organizar los contenidos, ellos son un instrumento cultural para desarrollar habilidades y capacidades cognitivas: para desarrollar conocimiento. Más allá de los mapas conceptuales está un cuerpo teórico riguroso que los sustentan.

Así mismo, se esperan que la investigación y sus resultados sean utilizados por otros investigadores de diversas universidades de forma que incida en la formación de estudiantes de licenciatura en matemáticas, y a partir de allí emerjan propuestas didácticas para superar algunos obstáculos epistemológicos caracterizados y para desarrollar prácticas sociales y culturales que conduzcan a un desarrollo de conocimiento y aprendizaje significativo.

Las aproximaciones descritas anteriormente permitieron obtener algunos resultados que son promisorios para la investigación, consideramos que estos favorecen la discusión, análisis y elaboración de propuestas. Hemos encontrado que el direccionamiento en dimensiones semióticos, didácticas, epistemológica y socioculturales, plantean no solo un gran número de problemas y de interrogantes -quedan sin resolver-, sino que ayudan a favorecer el AS y el desarrollo de conocimiento matemático. Este planteamiento da cabida a otra investigación para investigadores que deseen ahondar esas dimensiones.

En general la investigación aporta elementos didácticos y metodológicos que admiten examinar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la función a tramos, en tanto colocan a la expectativa de la didáctica formas alternativas en el aula que implican aspectos de acción y reflexión en los actos de conocer y aprender.

En el campo de la Educación Matemática se han fundamentado situaciones donde se ha identificado algunas dificultades que han sido reportadas por diferentes investigadores y a través de diferentes perspectivas teóricas (Orton, 1983; Artigue, 1998, 2003; Cantoral, 2000; Moreno-Armella, Hegedus & Kaput, 2008; Salinas & Alanis, 2009). Esta investigación ayuda a evitar tales situaciones reportadas en la problemática, debido a que se ha orientado en parte al desarrollo de acercamientos didácticos que favorecen la construcción de significados, la comprensión tanto al nivel de los procesos como de los conceptos propios de algunos elementos del Cálculo y del Análisis Matemático, principalmente de los conceptos de función, límite, continuidad, derivada.

8.4. **Sobre el material potencialmente significativo y la RP**

En general, los estudiantes después de establecer conexión con el material potencialmente significativo diseñado, no presentaron dificultades para planear, y resolver problemas y actividades que involucran la función a tramos. Las dificultades en el proceso de RP aparecieron inicialmente fundamentando que ese tipo de problemas es para los ingenieros. Luego admiten que un problema se puede resolver de más de una forma de acuerdo a los conocimientos previos y lo entienden como un contenido de su AS.

En la RP emergen varios de los conocimientos y tipos de AS, muchos de ellos aparecen en el currículo; no obstante, las limitaciones que impone la forma en que este mismo currículo estructura los conocimientos, generan una visión segregada de sus aplicaciones. Evitar tal visión es proveer al currículo universitario de estrategias como la de esta investigación, que contemplan los procesos de aprendizaje con significado, para el desarrollo y enriquecimiento del conocimiento que relacionan conocimientos previos, estudiantes, docentes, contenidos y tecnología.

Podemos decir que la RP puede intuirse como una forma de pensar donde los estudiantes buscan diversas maneras de resolver la actividad y no perder de vista la importancia de justificar sus respuestas con diferentes argumentos. Es decir, el logro no es exclusivamente alcanzar una respuesta sino identificar y verificar otras formas de representar, indagar y resolver el problema.

Los procesos dinámicos de estudio que se originan durante la implementación de un material potencialmente significativo, crean condiciones para que los estudiantes se involucren en la búsqueda de respuestas a los asuntos planteados, respondiendo de forma tal que fundan técnicas necesarias para resolver las actividades que han surgido de dichos planteamientos.

Tall & Vinner (1981) han reportado evidencias sobre los escasos aprendizajes por parte de los estudiantes universitarios, ante nociones matemáticas, límite, continuidad, entre otros, como ausencia para dar sentido y significado al concepto de función. Esta investigación aportaría a la solución de dichos problemas, desde el uso de los mapas conceptuales elaborados por los estudiantes, donde los conocimientos matemáticos emergen como respuesta a cuestiones que deben tener los estudiantes en su estructura cognitiva. De modo que algunas de dichas cuestiones se convierten en argumentos de ser del desarrollo de dichos.

8.5. **Aspectos socioculturales**

Las matemáticas han sido consideradas parte fundamental de la cultura, se les usa en distintos contextos, vivimos con ellas a través de las labores desde las más básicas a las más complejas de toda actividad humana: trueque, edificación de vivienda, recolección de cosechas, producción de medicina, elaboración de recetas de cocina, modelación de vuelos, inversiones financieras.

En ese sentido emerge la práctica social en la dinámica del conocimiento al saber, para hablar de una epistemología. Al respecto, resultó provechoso relacionar el desarrollo de conocimiento con el saber -como producción social del conocimiento-; surge de esta forma un concepto de AS asociado a un conjunto de actividades articuladas por su carácter social.

La investigación transitó por las dimensiones del saber, su naturaleza epistemológica -forma en que conocemos- su tendencia sociocultural, el plano cognitivo y el modo de instrucción que producen interacciones, explícitas o implícitas, entre cerebro, conocimiento y cultura.

Los conocimientos desarrollados por los estudiantes se centran en el análisis de los procesos por los cuales esta construcción social se produce. Por ello, se hizo hincapié en la comprensión de los conceptos y la variedad de significados dados en los diversos sistemas de registros de donde surgieron durante la actividad de RP.

Se demuestra que el planteamiento de Vygotsky sobre las funciones psíquicas superiores -atención, la memoria, la comprensión o el pensamiento- no son aisladas son mediadas por instrumentos -herramientas y signos-, el material potencialmente significativo y el uso de Geogebra y los mapas conceptuales, tienen un papel fundamental en la mediación de las acciones tanto en los estudiantes como de aquellos con quienes éste interactúa en el desarrollo de la actividad resolución de problemas.

Los estudiantes, en el desarrollo del material potencialmente significativo y, específicamente durante la ejecución interactuaron con sus grupos de trabajo, de manera que existió una relación con el objeto de estudio que les posibilitó realizar una transformación interna, una actividad en su estructura cognitiva que es mediada por instrumentos propios su cultura y, por lo tanto, continuar con el desarrollo de sus funciones psíquicas superiores.

Desde ese punto de vista, Wertsch (1993) afirma que para Vigotsky "la acción humana, tanto en el plano individual como en el social, está mediada por herramientas y signos" (p. 36). De esta forma, los instrumentos aquí presentes -material potencialmente significativo, Geogebra, mapas conceptuales-, son instrumentos concernientes al campo simbólico de la matemática y, por lo tanto, como constructo cultural, tienen un rol como medios semióticos que reconstruyen las acciones de los estudiantes frente al objeto de estudio -límites laterales, la razón de cambio $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ entre otros- que les posibilitó comprender aspectos del objeto función a tramos.

Finalmente podemos decir que no necesitamos procesos cognitivos aislados o individuales, se necesita la mediación de sistemas culturales de representación y conocimiento que visibilicen los aprendizajes significativos implícitamente alcanzados. La interiorización de los sistemas de representación son los que hacen posible en parte una transformación de los nuevos conocimientos y la reorganización de la estructura cognitiva que generarán nuevas formas de representar los objetos matemáticos.

Al finalizar esta investigación se señala que, aunque hay muchas investigaciones relacionadas con el concepto de función, hay un menor número de investigaciones referidas a la función a tramos -o a trozos- debido a que en la cultura de la educación matemática poco se organizan actividades que involucran estos conceptos, pero no son objeto de análisis en profundidad.

Así mismo, tenemos la convicción que los resultados de la investigación contribuyen a la construcción del currículo -y de materiales didácticos- de las diferentes facultades de educación que ofertan la licenciatura en matemáticas y consideren a la función como un eje fundamental del pensamiento variacional. La construcción del currículo debe incidir en el mejoramiento de conceptos con significado, además, mejorar significativamente los aprendizajes de los estudiantes, aportamos elementos para los programas de formación docente que permiten dejar atrás los aprendizajes mecánicos y memorísticos.

REFERENCIAS

Aleksandrov, A. (1976). Visión General de la Matemática. En Aleksandrov, A.D., Kolmogorov, A.N., Laurentiev, M.A. La matemática: su contenido, método y significado. Madrid: Alianza Editorial S.A.

Arboleda, T. (2005). *ABC de la Educación Virtual y a Distancia*. Colombia, Editorial Filigrana E.U

Akkoç, H. & Tall, D. (2005). A Mismatch between Curriculum Design and Student Learning: The Case of the Function Concept. In D. Hewitt & A. Noyes (eds.). *Proceedings of the Sixth British Congress of Mathematics Education held at the University of Warwick*, 1-8. Disponible en: http://www. bsrlm.org.uk/wp-content/uploads/2016/02/BS RLM-IP-25-1-01.pdf.

Armella, L y Waldegg, G. (2002). Fundamentación cognitiva del currículo de matemáticas Centro de Investigación y Estudios Avanzados, México**.**

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: Qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* 1*,* pp. 40-55.

Artigue, M. (2003). ¿Qué se puede aprender de la investigación educativa en el nivel universitario? *Boletín de la Asociación Venezolana,* X (2), pp. 117-134.

Arzarello, F. & Edwards, L. (2005). Gesture and the construction of mathematical meaning. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedeings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* Melbourne: PME. pp. 123-154.

Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Special Issue on Semiotics, Culture and Mathematical Thinking* (Editores invitados: L. Radford & B. D´Amore), pp.267-299.

Atairo, D. y Rovelli, L. (2019). Utilización del estudio de casos en las investigaciones recientes sobre políticas universitarias en la Argentina. En: De la Fare, M. Rovelli, L. Oliveira da Silva, M. y Atairo, D. (org.) *Bastidores de Pesquisa en Instituciones Educativas*, Río Grande do Sul/Ensenada: PUCRS editora/FaHCE editora, en prensa.

Ausubel, D. (1963). *Thepsychology of meaningful verbal learning*. New York: Grune and Stratton.

Ausubel, D. (1973). «Algunos aspectos psicológicos de la estructura del conocimiento». Elam, S. (comp.) *La educación y la estructura del conocimiento. Investigaciones sobre el proceso de aprendizaje y la naturaleza de las disciplinas que integran el currículum*. Ed. El Ateneo, Buenos Aires. Argentina.

Ausubel, D. (1976). Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo. México: Ed. Trillas.

Ausubel, D. (2002). Adquisición y retención del conocimiento. Una perspectiva cognitiva. Barcelona: Ed. Paidós.

Ausubel, D., Novak, & Hanesian, H. (1980). *Psicologia Educacional* (Trad. Eva Nick *et al*.). Rio de Janeiro: Interamericana.

Ávila, E., Aparicio, E. (2006). Un estudio de las dificultades que presentan estudiantes en el área de cálculo. En *Memorias del V Encuentro de Investigación Educativa*. Mérida, Yucatán, México.

Bartell, T., Webel, C., Bowen, B. y Dyson, N. (2013). Prospective teacher learning: recognizing evidence of conceptual understanding. Journal of Mathematics Teacher Education, 16, 57-79.

Barwell, R. (2013). Formal and informal language in mathematics classroom interaction: a dialogic perspective. En A. M. Lindmeier, & A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the PME*, 2, pp. 73-80. Kiel, Germany: PME.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Relime*, 8, pp. 247-264.

Biehler, R., & Kempen, L. (2013). Students' use of variables and examples in their transition from generic proof to formal proof. CERME 8, 6-10 February 2013, Manavgat-Side, Antalya - Turkey [Disponible en (12/08/2019): http://cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG1/WG1_Kempen.pdf].

Bloch, I. (2003). A graphic milieu to teach the concept of function: Which forms ok knowledge makes students able to conjecture and prove? *Educational Studies in Mathematics*, *52*, pp. 3-28.

Blumer, H. (1969). *Simbolic interaccionism. Perspective and method*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, Nueva Jersey.

Borges, A. (2007). *El proceso de aprendizaje de los conceptos de función y extremo en estudiantes de economía: análisis de una innovación didáctica*. (Tesis doctoral). Universidad autónoma de Barcelona. España.

Boyer, C. (1959). The History of the Calculus and its Conceptual Development. Dover Publications, Inc. New York.

Bransford, J., Brown, A., & Cocking, R. (1999). *How people learn: Brain, mind, experience, and school*. Whashington, D.C. National Academies Press.

Brown, J., Collins, A & Duguid, P. (1989). Situated Cognition and the Culture of Learning. *Educational Researcher*, 18, pp. 32- 42

Brun J. (1996), Évolution des rapports entre la psychologie du développementcognitif et la didactique des mathématiques. En: Brun J. (ed.) (1996), *Didactique des mathématiques.* Neuchatel,Délachaux et Niestlé, pp.19-43.

Burscheid, H. J., Struve, H., & Walther, G. (1992). A Survey of Research. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 24*(7), pp.296-302.

Cantoral R. (2000). Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (paradigma de investigación en Educación Matemática). Grupo editorial Iberoamérica, S. A. México, D. F. 13. ISBN 979-626-227-4.

Cantoral, R. (2005). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. *Acta Latinoamericana de Matemática educativa*, 17,1-9.

Cantoral, R., y López, J. (2010). La socioepistemología : un estudio de su racionalidad. *Paradigma,* 1, 102-121.

Cantoral, R. (2016). Educación alternativa: matemática y práctica social. *Perfiles Educativos*, XXXVIII, 7-18.

Carlson, M. (1998). A cross-sectional investigation of the development of the function concept. En E. Dubinsky,A.H. Schoenfeld y J.J. Kaput (Eds.), *Research in collegiate mathematics education, 111. Issues in Mathematics Education,* 7,115-162.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. y Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco conceptual y un estudio. *Ema*, *8* (2), 121, 156.

Caro, S. (2013). *Propuesta de enseñanza sobre la modelación de funciones por tramos pasando de lo concreto a lo abstracto*. (Trabjo de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia

Cedillo, E. (2006). La enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria. Los sistemas algebraicos computarizados. *Revista mexicana de investigación educativa*, 11(28), 129-153.

Colás, P. y Buendía, L. (1992). *Investigación educativa*. Sevilla: Alfar.

Contreras, L. (1987). La resolución de problemas, ¿una panacea metodológica? *Enseñanza de las Ciencias, 5*(1): 49-52.

Creswell, J. (1998). *Qualitative inquiry and research design: Choosing among five traditions.* Sage Publications, Inc.

Davidov, V. (1988). *La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico*. Editorial Progreso. Moscu.

Denzin, N., Lincoln, Y. S. (1994) “Introduction: Entering the Field of Qualitative Research”en Denzin, N., Lincoln (eds.) *Handbook of Qualitative Research*. California: Sage.

Descartes, R. (2001). *Discourse on Method, Optics, Geometry, and Meteorology* (Rev. ed.). (P. J. Olscamp, Trans.). Hackett Publishing. (Original work published 637).

Díaz, J. (2013). El Concepto de Función: Ideas pedagógicas a partir de su historia e Investigaciones. *El Cálculo y su Enseñanza*, 4 ,13-25.

Dey, I. (1993). *Qualitative data analysis*. London and New york. Routledge.

Duval, R. (2016). Un análisis cognitivo de problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas. En Doctorado Interinstitucional en Educación. *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas*, pp.61-94. Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Erickson, F. (1986). QualitativeMethods in ResearchonTeaching. En B.J Fraser *et al*. (eds.), *Second International Handbook of ScienceEducation*. Los Ángeles,1451-1469. SpringerScience.

Eurasquín, C. (2014) La Teoría Histórico-Cultural de la Actividad como artefacto mediador para construir Intervenciones e Indagaciones sobre el Trabajo de Psicólogos en Escenarios Educativos. *Revista Segunda Epoca*, 13, 173-197.

Fanaro, de los A., y Almaro, M. (2019). El estudio de las “funciones definidas a trozos”: modelizando el circuito del alcohol en el cuerpo humano con estudiantes de la escuela secundaria. *Números,* 103, 29-47.

Farfán R.; Hitt, F. (1990) Intuitive processes, mental image and analytical and graphic representations of a stationary state: a case study. Proceedings of the 14th Meeting of the Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 45-52). Oaxtepec, México.

Farfán, R. y García, M. (2005) El Concepto de Función: Un Breve Recorrido Epistemológico. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* .18, 489 -494.

Freudenthal, H. (1983). Didactical phenomenology of mathematical structures. Dordrecht, Holland: Riedel.

Gagatsis, A., Elia, I., E., Mousoulides, N. (2006). Are registers of representations and problem solving processes on functions compartmentalized in students' thinking? *Relime, Número Especial,*197-224.

Gallo, A., Manrique, J., Prada, R., (2017). Aplicación de la ingeniería didáctica en el aprendizaje del concepto de función. *Eco matemático 8*(1). 43-48

Gee, J. (2013). *The anti-education era: Creating smarter students through digital learning*. New york: Palgrave Macmillan.

Godino, J y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 14(3), 25-355. Recuperado de http://www.ugr.es/local/jgodino

Guevara, S. (2011). *Propuesta didáctica para lograr aprendizaje significativo del concepto de función mediante la modelación y la simulación.* (Tesis de maestría) Universidad nacional de Colombia sede Medellín. Colombia.

Grouws, D. A., Good, T. & Dougherty, B. (1990). Teacher conceptions about problem solving and problem solving instruction. *Proceedings of 14th PME Conference*, 1,135-142.

Grouws, D. A. (Ed.). (1992). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* New York: Macmillan.

Gutiérrez, S. I. (2007). *Caracterización de tratamientos y conversiones: el caso de la función afín en el marco de las aplicaciones.* (Tesis de maestría). Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá (Colombia).

Hegel, G. (1982). *Ciencia de la lógica*. (Augusta y Mondolfo, trans). Ediciones.

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2014). *Metodología de la Investigación.* México: Mc Graw Hill.

Hiebert, J.; Carpenter, T. (1992). Learning and Teaching with Understanding. *En Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Grouws (ed.) NCTM-MacMillan. New York**.**

Hitt, F. (1994). Teachers' difficulties with the construction of continuous and discontinuous functions. *Focus on Learning Problems in Mathematics* 16 (4), 10-20.

Hitt F. (2000). Funciones en Contexto. Proyecto sobre Visualización Matemática. Departamento de Matemática Educativa. México.

Hitt, F y Torres, A. (1994). *Visualizando las funciones con la PC*. Grupo editorial Iberoamérica. México.

House, P., Wallace, M., & Johnson, M. (1983). Problem Solving as a Focus: How? When? Whose Responsibility?. The agenda in action", *NCTM*, 9-19.

Kalman, J. (2003) El acceso a la cultura escrita: la participación social y la apropiación de conocimientos en eventos cotidianos de lectura y escritura*. Investigación Educativa*, 8(17), 37-66

Kant, I. (1928). Crítica de la razón pura. Traducción de Manuel G. Morente. Edición digital basada en la edición de Madrid, Libreria General de Victoriano Suárez. http://www.cervantesvirtual.com

Kaput, J. (1987). Representation systems and mathematics. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp.19-26). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associated.

Kaput, J. (1989). Linking representations in the symbol systems of algebra. In Kieran & Wagner (Eds.) *A research agenda for the learning and teaching of algebra* (pp. 167-194). Reston, VA: NTCM; Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kaput, J. (1994). Democratizing access to calculus: New routes to old roots. En A.H. Schoenfeld (Ed.), *Mathematics and cognitive science,* pp. 77-156. Washington, DC: Mathematical Association of America.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), Algebra in the early grades (pp. 5–17). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates/Taylor & Francis Group.

Kilpatrick, J. (1985). A Retrospective Account of the Twenty-five Years of Research on Teaching Mathematical Problem Solving. En E. A.Silver (Ed.), *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspective,* 1- 15. Hillsdale: Lawrence Erlbaum.

Kilpatrick, J (1998). La investigación en educación matemática: su historia y algunos temas de actualidad. En Kilpatrick, J, Gómez, P., y Rico, L.(Eds.) *Errores y dificultades de los estudiantes Resolución de problemas: Evaluación, Historia.*

Kleiner, I. (1989). Evolution of the function concept: A brief survey. The college *Mathematics Journal*. 20(4), 282-300.

Kozulin, A. (1994). *La psicología de Vygostky*. Madrid, España: Alianza.

Kozulin, A. (1998). *Instrumentos psicológicos.La educación desde una perspectiva sociocultural.* Buenos Aires. Editorial Paidós.

Kozulin, A. (2000). *Instrumentos psicológicos. La educación desde una perspectiva sociocultural*. Barcelona, España: Paidós.

Krings, H., Baumgartner, H. & Wild, C. (1978). *Conceptos fundamentales de filosofía*. Barcelona, España. Herder.

Kroll, H. (2004). El método de los estudios de caso. En Torrés, M. (coordinadora) *Observar, escuchar y comprender. Sobre la tradición cualitativa en la investigación social México*: RESEÑA, 2, nueva época, pp. 251-288. Porrúa, El Colegio de México, FLACSO.

Lesh, R. & Zawojewski, J. (2007). Problem solving and modeling. In F. K. Lester, Jr. (Eds.). *The Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 763-804). National Council of Teachers of Mathematics. Charlotte, NC: Information Age Publishing.

León, J. & Vergel, R. (1997). *Enseñanza del concepto de Función lineal en octavo grado de educación Básica Secundaria. Reporte de una experiencia.* (Tesis de especialización). Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá. Colombia.

Leontiev, A. (1978). *Activity, consciousness, and personality.* Englewood Cliffs, NY; EUA: Prentice-Hall.

López, J., y Sosa, L. (2007). *Dificultades conceptuales y procedimentales asociadas al concepto de función* (tesis de pregrado). Universidad Autónoma de Yucatán. Mérida, Yucatán.

Lozano, R. (2017). *Enseñanza de las funciones desde enfoques de representaciones y enfoque comunicacional (con uso de TICS) en cursos iniciales de matemáticas universitarias*. (Trabajo de maestría), Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Magiera, M., van den Kieboom, L., y Moyer, J. (2013). An exploratory study of preservice middle school teachers' knowledge of algebraic thinking. Educational Studies in Mathematics, 84, 93-113.

Maxwell, J. & Miller, B. (2008). Categorizing and connecting strategies in qualitative data analysis. En S. N. Hesse-Biber y P. Leavy (Eds.), *Handbook of emergent methods* (pp. 461-477). New York: GuilfordPress.

Mertens, D.M. (2005). *Research and evaluation in Education and Psycchology: Integrating diversity with quantitative, qualitative and mixed methods.* Thousand Oaks: Sage.

Merzbach, U & Boyer, C. (2011). A history of mathematics. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey.

Mesa, V. (2004). Characterizing Practices Associated with Functions in Middle School Textbooks: *An Empirical Approach. Educational Studies in Mathematic*, 56, (pp.255–286). Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.

Miles, M. & Huberman, A. (1984). *Qualitative data analysis. A sourcebook of new methods,* Beverly Hills, EUA: Sage.

Miles, M. & Huberman, A. (1994). *Qualitative Data Analysis: An Expanded Sourcebook*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications, Inc.

Miles, M., Huberman, A & Saldaña, J. (2014). *Qualitative Data Analysis: An methods Sourcebook*. Arizona state university: Sage.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia -MEN- (2004). *Pensamiento Variacional y Tecnologías Computacionales.* Bogotá: MEN. Recuperado de: http://www.colombiaaprende.edu.co/html/productos/1685/articles-113759_archivo.pdf

Ministerio de Educación Nacional de Colombia -MEN- (2006). Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Editor: Ministerio de Educación Nacional de Colombia.

Monk, S. (1992). Students' understanding of a function given by a physical model. En G. Harel y E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (MAA Notes, vol. 25, pp. 175-193.Washington, DC: Mathematical Association of America.

Monk, S., & Nemirovsky, R. (1994). The case of Dan: Student construction of a functional situation through visual attributes. CBMS Issues in Mathematics Education: Research in Collegiate Mathematics Education 1994, 4, 139–168.

Moreira, M. (1999). La Teoría del aprendizaje significativo. Programa Internacional de Doctorado en Enseñanza de las Ciencias. Universidad de Burgos, España; Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil. Texto de Apoyo n° 6.

Moreira, M. (2000). *Aprendizaje significativo: Teoría y práctica*. Madrid, España: Visor.

Moreira, M. A. (2003). *Aprendizaje Significativo: Fundamentación Teórica y Estrategias Facilitadoras*. Porto Alegre: Universidad Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS).

Moreira, M. (2010). ¿por qué conceptos? ¿por qué aprendizaje significativo? ¿por qué actividades colaborativas? ¿por qué mapas conceptuales? *Revista Qurriculum*, 23, pp. 9-23.

Moreira, M. (2012). La Teoría del Aprendizaje Significativo Crítico: un referente para organizar la enseñanza contemporánea. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 31, pp. 9-12.

Moreira, M (2013) Aprendizaje significativo en mapas conceptuales. *Mapas Conceituais e Aprendizagem Significativa* impartida en el *I Workshop sobre Mapeamento Conceitual*, realizado en São Paulo, Brasil.

Moreira, M. (2017). Aprendizaje significativo como un referente para la organización de la enseñanza. *Archivos de Ciencias de la Educación*, *11*(12), e029. https://doi.org/10.24215/23468866e029 .

Moreno-Armella, L.; Hegedus S. y Kaput, J. (2008). From static to dynamic mathematics: historical and representational perspectives. *Educational Studies in Mathematics 68, pp.* 99-111.

Moura, M y Dias, V. (2003). Investigando a aprendizagem do conceito de funçao a partir dos conhecimientos prévios e das interaçoes sociais. *Ciência & Educação,* 9 (1), p. 67-82.

Moura, M. (2010). *A actividade pedagógica na Teoría histórico-cultural*. Brasilia. Liver Livro Ltda.

National Council of Teachers of Mathematics. (1980). *An agenda for action: recommendation for school mathematics of the 1980*. Reston, VA: NCTM National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and standards of school mathematics. Reston, VA: Author

National Research Council (1996). *National Science Education Standards.* Washington, DC: National Academy Press.

Neira, G. (2017). *Dificultades, conflictos y obstáculos en las prácticas educativas universitarias de iniciación al cálculo diferencial –PUC- en estudiantes de ingeniería*. (Tesis doctoral). Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia

Nesher, P. & Kilpatrick, J. (Eds.). (1990). *Mathematics and Cognition: A researchSynthesis by the International Group for the Psychology of MathematicsEducation* Cambridge: Cambridge University.

Novak, J. (1988). Constructivismo Humano: Un Consenso Emergente, Enseñanza de las Ciencias, Vol. 6(3), pp. 213-223.

Novak, J. (1998). Conocimiento y aprendizaje. Los mapas conceptuales como herramientas facilitadoras para escuelas y empresas. Madrid: Alianza Editorial. Tradução para o espanhol do original Learning, creating, and using knowledge. Concept maps as facilitating tools in schools and corporations.

Orton, A. (1983). “Student´s understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics*, *14(3), pp. 235-250.*

Ospina, G. (2012). *Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto función lineal. (*Trabajo de maestría). Universidad Autónoma de Manizales, Colombia.

Parra, J. (2020). Significados sobre la derivada que manifiestan estudiantes universitarios. (Trabajo de maestría). Universidad de Antioquia, Colombia.

Pecharromán, C. (2013). Naturaleza de los objetos matemáticos: representación y significado. *Enseñanza de las Ciencias 31 (3), pp. 121-134.*

Peduzzi, L. (1997). Sobre a resolução de problemas no ensino da Física. *Caderno Catarinense de Ensino de Física, 14* (3): *229-253.*

Perales, F. (1993). La resolución de problemas: una revisión estructurada. *Enseñanza de las Ciencias, 11*(2): *170-178.*

Piaget, J. (1995). *Sociological Studies*. London. Routledge.

Piaget, J., & Inhelder, B. (1958). *The growth of logical thinking from childhood to adolescence* (A. Parson, Trad.). United Stated: Basic Book, Inc.

Pirie, S. (1988). Understanding - Instrumental, relational, formal, intuitive..., How can we know?' *For the Learning of Mathematics 8(3), 2-6*

Pirie, S., & Kieren, T. (1989). A recursive theory of mathematical understanding. *For the Learning of Mathematics, 9(3), 7-11.*

Pirie, S., & Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understanding: How can we characterise it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics, 26(2-3), pp. 165-190.*

Ponte, J. (1992). La historia del concepto de función y algunas implicaciones educativas. *The Mathematics Educator 3 (2), p p 3-8.*

Planas, N. (2010). Las Teorías socioculturales en la investigación en educación matemática: reflexiones y datos bibliométricos. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A., Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV (pp. 163-195)*. Lleida: SEIEM.

Planchart, M. (2005). La Modelación Matemática: Alternativa didáctica en la enseñanza de pre cálculo. *360° en Ciencias y matemáticas.* http://cremc.ponce.inter.edu/1raedicion/modelacion.htm.

Pozo, J. (1999). Más allá del cambio conceptual: El aprendizaje de la ciencia como cambio representacional. *Enseñanza de las Ciencias, 17* (3), pp. 513- 520.

Pozo, J., Pérez, M., Domínguez, J., Gómez, C. y Postigo, Y. (1994). *La solución de problemas*. Madrid: Santillana. 223p.

Pozo, J. y Rodrigo, M. (2014). Del cambio de contenido al cambio representaciona en el Conocimiento. *Infancia y Aprendizaje: Journal for the Study of Education and Development*, 24 (4), pp. 407- 423.

Prada, R., Hernández, C. y Ramírez, P. (2016). Comprensión de la noción de *función* y la articulación de los registros semióticos que la representan entre estudiantes que ingresan a un programa de ingeniería. *Revista Científica*, 25, pp.188-205. Doi: 10.14483/udistrital.jour.RC.2016.25.a3

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Coord.) *La educación matemática en la enseñanza secundaria*, pp. 61-94. Barcelona: Horsori / ICE.

Quezada, M. (1986). *Cálculo de primitivas en el bachillerato: su correlación con los algoritmos algebraicos y de cálculo diferencial.* Tesis de maestría. México: Cinvestav.

Radford, L. (2004). Del símbolo y de su objeto. Reflexiones en torno a la Teoría de la conceptualización de Cassirer. Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 7(2), 157-170.

Radford, L. (2006). Elementos de una Teoría cultural de la objetivación. *Relime*, *Número Especial*, pp. 103-129.

Radford, L., Furinghetti, F. & Katz, V. (2007). The Topos of Meaning or the Encounter of Past and Present, Educational Studies in Mathematics, 66, 107-110

Radford, L. (2009). ‘‘No! He starts walking backwards!’’: interpreting motion graphs and the question of space, place and distance. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, DOI 10.1007/s11858-009-0173-9.

Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education, 12*, pp. 1-19.

Radford, L. (2012). Early algebraic thinking: Epistemological, semiotic, and developmental issues. *ICME-12 Regular Lecture*. Seoul, South Korea. July 8-15, 2012.

Radford, L. (2014). De la Teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(2), pp. 132- 150.

Radford, L. (2017) *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos.* Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Rey, G., Boubée, C., Sastre-Vázquez, P. & Cañibano, A. (2009). Ideas para enseñar, aportes didácticos para abordar el concepto de función. *Revista iberoamericana de educación matemática, 20*, pp.153-162.

Rodríguez R., Ponce, y Pérez, G. (2016). La comprensión matemática de las funciones en interdisciplinariedad con la Física a través de problemas de la vida práctica. Unión, No.47: 176-191.

Rodríguez, L. (2011). Didáctica de las funciones en la enseñanza Media Superior. II Evento Internacional "La Matemática, la Física y la Informática en el siglo XXI". Holguín, Cuba.

Rückriem, G. (2009). La tecnología digital y la mediación: un desafío a la Teoría de la actividad. *Conferencia invitada de la facultad de psicología de la UNAM y de la Universidad Abierta y a Distancia*. Mexico.

Ruiz, L. (1993). *Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función: Análisis epistemológico y didáctico* (tesis doctoral). Universidad de Granada, España.

Ruiz, L. (1998). La noción de función: análisis epistemológico y didáctico. P*ublicaciones de la Universidad de Jaén*. España:

Salinas, P., y Alanís, J. A. (2009), Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del Cálculo. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 12(3), pp. 355-382.

Saa, A. Trochez, A. (2013). *Una propuesta de enseñanza de la función por tramos usando el periódico y Geogebra* (Trabajo de maestría), Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Sampieri, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2006). *Metodología de la investigación*. México: McGraw-Hill.

Sánchez I. y Ramis, F. (2005). Aprendizaje significativo basado en problemas. *Horizontes educacionales,* pp. 101-111

Santos -Trigo. (2008). La Resolución de Problemas Matemáticos: Avances y perspectivas en la Construcción de una Agenda de Investigación y Práctica. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Cinvestav-IPN

Santos-Trigo. (2014). Problem solving in mathematics education. En S. Lerman (ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 496-501). NY: Springer.

Sastre, V., Boubée, C., Rey, G., & Delorenzi, O. (2008). El concepto de función a través de la Historia. *Revista Iberoamericana De Educación Matemática* .16, pp.141 - 155. doi: http://www.fisem.org/www/union/revistas/2008/16/Union_016_014.pdf

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. New York: Academic Press.

Silva, V. G.; Zômpero, A. F & Laburú, C. E. (2014). Utilização de materiais potencialmente significativos sobre transferência de calor para alunos do ensino médio. Aprendizagem Significativa *Meaningful Learning Review* 4(1), pp. 81-97. http://www.if.ufrgs.br/asr/artigos/Artigo_ID52/v4_n1_a2014.pdf

Sfard, A. (1991). On the dual nature mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in* Mathematics, 22, p. 1-36.

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification The case of function. En Harel, G & Dubinsky, E (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (MAA Notes), 25(1), pp. 59- 84. Washington, DC: Mathematical Association of America.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. En Dubinsky, E. The concept of function. E (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (MAA Notes), 25(1), 25- 58. Washington, DC: Mathematical

Spivak, M. (2014). *Cálculo Infinitesimal*. 3a ed. Barcelona, España: Reverté.

Stake, R. (1994). Case Studies. En Denzin, N. y Lincoln, Y. (Eds.) *Handbook of Qualitative Research* (pp. 132-159). London: Sage.

Stake, R. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Ediciones Morata.

Steinbring, H. (2005). *The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction an Epistemological Perspective*. USA, Springer Association of America.

Stewart, J., Redlin, L, y Watson, S. (2012). *Precálculo. Matemáticas para el cálculo*. Cengage. México.

Stewart, J. (2012). *Cálculo de una variable transcendentes tempranas.* Toronto. Canadá.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics* 12,151–169.

Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421-456). Reston, VA:National Council of Teachers of Mathematics.

Thorpe, J. (1989). Algebra: What should we teach and how should we teach it? En S. Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra,* pp. 11-24. Reston, VA: National Council of Teachers of mathematics.

Ugalde, J. (2014). Funciones: desarrollo histórico del concepto y actividades de enseñanza aprendizaje. *Matemática, Educación e Internet 14 (1)*

Vasilachis de Gialdino, I. (2013). *Estrategias de la investigación cualitativa.* Buenos Aires: Gedisa Editorial.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 14, 293-305.

Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education,* 20(4), 356–366.

Vinner, S. (2002). The role of definitions and the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed.). *Avanced mathematical thinking (p. 65-81).* Dordrecht: Kluwer

Vrancken, S. Gregorini, M. Engler, A. Müller, D. Hecklein, M. (2006). Dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite. Recuperado de: http://www.soarem.org.ar/Documentos/29%20vrancken.pdf

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society.* Cambridge, Ma: Harvard University Press.

Vygotsky, L. (1979). Consciousness as a problem in the psychology of behavior. *Soviet Psychology*, 17(4), pp. 3-35.

Vygotsky, L. (1981). Pensamiento y Lenguaje. Buenos Aires: La Pléyade.

Vygotsky, L. S. (1982). Emotsii i ikh razvitije v detskom vozraste [Emotions and emotional development of children]. In V. V. Davydov (Ed.), *Sobranije Sochinenij* [Selected works], Vol. 2 (pp. 416–436). Moscow: Pedagogika.

Wertsch, J. (1993). *Voices of the mind: a sociocultural approach to mediated action*. Cambridge Ma: Harvard University Press.

Wittrock, M. (1990). *Procesos de Pensamiento en los estudiantes en la Investigación en la Enseñanza III*. Wittrock (ed.). Paidós, Barcelona.

Yepes, M. (2011). Aproximación a la comprensión del aprendizaje significativo de David Ausubel. *Ciencias de la educación*. 1(37), pp. 43-54.

Yin, R. (1984). *Case study research: design and methods.* Beverly Hills: Sage.

Youschevitch, A. (1976). The concept of function up to the middle of the 19th Century, *Archive for history of exact sciences 16*, pp. 36-85.