

Libros de **Cátedra**

# Control de sistemas SISO-LIT

Miguel Angel Mayosky

FACULTAD DE  
INGENIERÍA

**e**  
exactas

  
EDITORIAL DE LA UNLP



UNIVERSIDAD  
NACIONAL  
DE LA PLATA

# CONTROL DE SISTEMAS SISO-LIT

Miguel Angel Mayosky

Facultad de Ingeniería



UNIVERSIDAD  
NACIONAL  
DE LA PLATA

  
Edulp  
EDITORIAL DE LA UNLP

# Índice general

<b>1</b>	<b>Conceptos preliminares</b>	13
1.1	Realimentación. Un ejemplo simple	13
1.1.1	Un ejemplo: modelo no lineal y su linealización	16
1.2	Analogías	18
1.3	Control de Lazo Abierto	18
1.4	Introduciendo Realimentación	19
1.5	Tipos de sistemas de control	23
1.5.1	Estabilidad y performance	23
1.5.2	Sistemas mono y multivariables	24
1.5.3	Sistemas invariantes en el tiempo	24
1.5.4	Sistemas discretos y muestreados	25
1.6	Alcances y estructura del libro	26
1.7	Problemas	26
<b>2</b>	<b>Análisis de la respuesta temporal de sistemas SISO-LIT</b>	28
2.1	Ecuaciones diferenciales y modelos de sistemas	28
2.2	Propiedades de la función de transferencia	30
2.2.1	Una interpretación gráfica de la función de transferencia	32
2.3	Cálculo de la respuesta temporal	32
2.3.1	Polos reales de multiplicidad 1	33
2.3.2	Polos reales de multiplicidad n	33
2.3.3	Polos complejos conjugados	33
2.3.4	Tiempo de subida	36
2.3.5	Tiempo de pico y sobrepico asociado	36
2.3.6	Tiempo de establecimiento	37
2.3.7	Dinámica Dominante	38
2.4	Efecto de los ceros en la respuesta temporal	39
2.4.1	Efecto de ceros lentos. Sobrepicos y subpicos en la respuesta al escalón	40

2.5 Problemas	43
<b>3 Modelado de sistemas lineales</b>	<b>46</b>
3.1 Sistemas Eléctricos	46
3.2 Sistemas Mecánicos de Traslación	47
3.2.1 Ejemplo 1	48
3.2.2 Ejemplo 2	48
3.3 Sistemas mecánicos de rotación	51
3.3.1 Ejemplo 3	51
3.4 Sistemas hidráulicos	52
3.4.1 Ejemplo 4	53
3.5 Sistemas térmicos	55
3.5.1 Ejemplo 5	56
3.6 Servomotor de Contínua	57
3.6.1 Control por armadura	57
3.6.2 Control por campo	58
3.7 Problemas	59
<b>4 Error de estado estacionario</b>	<b>63</b>
4.1 Conceptos preliminares. Tipo de un sistema	63
4.1.1 Error de estado estacionario	65
4.1.2 Excitaciones estándar	65
4.2 Error en función del tipo de sistema y la excitación	66
4.2.1 Sistemas de tipo 0	66
4.2.2 Sistemas de tipo 1	67
4.2.3 Sistemas de tipo 2	67
4.3 Coeficientes generalizados de error	68
4.4 Indices de performance	69
4.5 Problemas	70
<b>5 Estabilidad de sistemas continuos</b>	<b>73</b>
5.1 Estabilidad BIBO	73
5.1.1 Sistemas Lineales	74
5.2 Estabilidad absoluta y relativa	75
5.3 Estabilidad Interna	75
5.4 Métodos de análisis de estabilidad	76
5.5 Criterio de Routh	77

5.5.1	Condiciones necesarias	77
5.5.2	Arreglo de Routh	78
5.5.3	Casos especiales	80
5.5.4	Sistemas con parámetros variables	81
5.6	Problemas	83
<b>6</b>	<b>Lugar de raíces</b>	<b>85</b>
6.1	Un ejemplo preliminar	85
6.2	Condiciones de módulo y fase	87
6.3	Reglas para la construcción del diagrama	89
6.3.1	Número de trayectorias	89
6.3.2	Inicio y fin de las trayectorias	89
6.3.3	Simetría respecto del eje real	89
6.3.4	Lugar de Raíces sobre el eje real	89
6.3.5	Número de asíntotas	90
6.3.6	Ángulo de las asíntotas	90
6.3.7	Intersección de las asíntotas sobre el eje real	91
6.3.8	Ángulos de arranque	92
6.3.9	Puntos de quiebre	92
6.3.10	Intersección con el eje imaginario	93
6.3.11	Efecto de la adición de polos y ceros en el semiplano izquierdo	94
6.4	Un ejemplo final	94
6.5	Problemas	95
<b>7</b>	<b>Criterio de Nyquist</b>	<b>98</b>
7.1	El principio del argumento	98
7.2	Aplicación al estudio de estabilidad	100
7.2.1	Trayectoria de Nyquist	101
7.2.2	Polos sobre el eje imaginario	104
7.2.3	Márgenes de estabilidad relativa	107
7.2.4	Un ejemplo final	109
7.3	Agregado de polos y ceros en el semiplano izquierdo	110
7.4	Problemas	111
<b>8</b>	<b>Análisis de estabilidad utilizando diagramas de Bode</b>	<b>113</b>
8.1	Trazado de Diagramas de Bode	113
8.1.1	Ganancias	114

8.1.2	Ceros Simples	114
8.1.3	Polos Simples	115
8.1.4	Polos Complejos Conjugados	118
8.1.5	Ceros de no mínima fase	119
8.2	Trazado del diagrama completo	120
8.3	Márgenes de estabilidad	121
8.4	Sistemas de Fase Mínima. Criterio de Bode	121
8.5	Problemas	123
<b>9</b>	<b>Compensación en cascada</b>	<b>125</b>
9.1	Limitaciones fundamentales en el control SISO	126
9.1.1	Rechazo a perturbaciones y funciones de sensibilidad	126
9.1.2	Errores de Modelado	127
9.1.3	Limitaciones estructurales	127
9.2	Compensación por atraso de fase	129
9.2.1	Celda básica del compensador	129
9.2.2	Diseño del compensador	131
9.2.3	Un ejemplo	133
9.3	Compensación por adelanto	135
9.3.1	Respuesta en frecuencia y fase máxima	135
9.3.2	Diseño en el lugar de raíces	137
9.3.3	Un ejemplo	139
9.3.4	Diseño en frecuencia	139
9.3.5	Una técnica alternativa de diseño de compensadores por adelanto	145
9.4	Controladores combinados Atraso-Adelanto	147
9.5	Problemas	148
<b>10</b>	<b>Controladores PID</b>	<b>151</b>
10.1	Acciones de Control	151
10.2	Singularidades del controlador	152
10.3	Ajuste empírico del controlador PID. Métodos de Ziegler y Nichols	153
10.3.1	Método 1: Plantas con respuesta sigmoidea	153
10.3.2	Método 2: Oscilación a lazo cerrado	154
10.4	Plantas lineales conocidas	157
10.5	Reset Windup	158
10.5.1	Estrategias anti reset-windup	159
10.5.2	Un ejemplo	161

10.6 Bumpless	162
10.7 Problemas	164
<b>11 Sistemas de control muestreados</b>	<b>167</b>
11.1 Muestreo impulsivo	168
11.1.1 Modelo matemático del proceso del muestreo	168
11.1.2 Espectro periódico	170
11.1.3 Una expresión alternativa	171
11.2 Reconstrucción	171
11.3 Problemas	173
<b>12 Propiedades de la transformada Z</b>	<b>175</b>
12.1 Mapeo entre S y Z	175
12.2 Propiedades Básicas	176
12.2.1 Linealidad	177
12.2.2 Convolución de Secuencias Temporales	177
12.2.3 Corrimiento temporal (“time shift”)	178
12.2.4 Escaleo (“Scaling”)	178
12.2.5 Teorema del valor final	178
12.2.6 Teorema del valor inicial	178
12.3 Transformada z inversa	179
12.3.1 Método de la división larga	179
12.3.2 Inversión por Residuos	180
12.4 Funciones de transferencia en el dominio z	180
12.5 Análisis de diagramas en bloques	182
12.5.1 Un ejemplo típico	184
12.6 Problemas	186
<b>13 Estabilidad de sistemas muestreados</b>	<b>188</b>
13.1 Sistemas muestreados y estabilidad BIBO	188
13.2 Métodos de análisis de estabilidad	190
13.2.1 Estabilidad absoluta. Test de Jury	190
13.2.2 Lugar de raíces	192
13.2.3 Métodos frecuenciales y la transformada w	192
13.3 Problemas	195
<b>14 Compensación de sistemas muestreados</b>	<b>197</b>
14.1 Diseño por equivalente discreto	197

14.1.1 Diferencias hacia atrás (" <i>Backwards difference</i> ")	198
14.1.2 Diferencias hacia adelante (" <i>Forward Difference</i> ")	199
14.1.3 Regla trapezoidal	199
14.1.4 Ejemplo	201
14.2 Diseño en el plano z	204
14.2.1 Ejemplo	204
14.3 Diseño en el plano w	208
14.3.1 Compensación en atraso en el plano w	210
14.4 Problemas	212
<b>15 Realización de compensadores discretos</b>	<b>215</b>
15.1 Tipos de realizaciones	215
15.1.1 Realizaciones directas	216
15.1.2 Realizaciones canónicas	216
15.2 Problemas asociado a la longitud de palabra finita	218
15.2.1 Truncado y redondeo	218
15.2.2 Truncado	219
15.2.3 Redondeo	219
15.3 Puntos de suma de error de cuantización	221
15.4 Sensibilidad frente a la cuantización de coeficientes	221
<b>16 Identificación de sistemas lineales</b>	<b>224</b>
16.1 Conceptos preliminares	224
16.1.1 Convolución	224
16.1.2 Correlación o Autocorrelación	226
16.1.3 Secuencia de ruido blanco	227
16.1.4 Correlación cruzada	228
16.2 La ecuación de Wiener-Hopf	228
16.3 Análisis espectral	230
16.4 Identificación paramétrica	231
16.4.1 Regresión Lineal y cuadrados mínimos	232
16.4.2 Identificación de sistemas dinámicos. Clases de modelos	233
16.5 Minimización del error de predicción	236
16.5.1 ARX	236
16.5.2 ARMAX	237
16.6 Diseño de la excitación	237
16.7 Pasos del proceso de identificación	238



A la memoria de José María "Chacho" Catalfo.

# Presentación

Este libro reúne los contenidos impartidos en las asignaturas “Principios de Control y Servomecanismos”, “Control y Servomecanismos A” y “Control Automático”, de la carrera de Ingeniería Electrónica de la Universidad Nacional de La Plata (UNLP) y “Control I” de la carrera de Ingeniería Electrónica de la Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco (UNPSJB), a lo largo de 40 años de docencia. Surgió, además, como una necesidad durante la cuarentena del año 2020, a fin de reforzar el material disponible ante el replanteo de las actividades en modalidad virtual.

El texto ha sido elaborado como un primer abordaje a la teoría del Control Automático en el contexto de una currícula de Ingeniería Electrónica. Como tal, el concepto fundamental es el de realimentación de estados. La realimentación es omnipresente en la naturaleza, y ha sido aprovechada por la Ingeniería desde tiempo inmemorial para el control de magnitudes físicas. El desarrollo de la teoría matemática de sistemas realimentados ha hecho posible un colosal avance tecnológico e industrial, con límites inimaginables. Este libro es la puerta de entrada a la Ingeniería de Control.

El abordaje “clásico” del control automático es básicamente lineal, esto es, supone que el sistema a controlar puede describirse en forma aproximada, alrededor de un punto de trabajo, mediante ecuaciones diferenciales lineales. En este libro se utilizan los conceptos de matemáticas, física y sistemas lineales para introducir formalmente los conceptos de *realimentación*, *respuesta de lazo cerrado*, *estabilidad* y *compensación*, de sistemas *lineales*, *invariantes en el tiempo*, *de una entrada y una salida (SISO-LIT)*, tanto continuos como discretos o muestreados. Requiere por lo tanto de conocimientos previos de ecuaciones diferenciales lineales, transformadas de Fourier, Laplace y Z, series de Taylor, modelos matemáticos, señales continuas, series discretas, convolución continua y discreta, respuesta temporal y en frecuencia, funciones de transferencia y álgebra de bloques.

El libro consta de tres partes bien diferenciadas, que son tratadas primero en el contexto de los sistemas continuos y luego para sistemas muestreados. En la primera parte se introducen los conceptos de lazo abierto y cerrado, y el cálculo de la respuesta temporal de sistemas SISO-LIT utilizando, como herramienta fundamental, la función de transferencia. El abordaje por ecuaciones de estado, si bien es mencionado, no se trata en profundidad. A partir de estas ideas se definen y analizan diversas medidas de performance y figuras de mérito (Sensibilidad, Rechazo a perturbaciones, Coeficientes de error, Error de estado estacionario, etc.). Además, se introducen y generalizan las ideas de modelado, linealización e identificación lineal, con énfasis en la evaluación y ponderación de dinámicas dominantes, perturbaciones y ruido.

La segunda parte introduce el fundamental concepto de Estabilidad de sistemas lineales, desarrollando exhaustivamente los principales métodos de análisis de estabilidad absoluta y relativa: criterio de Routh-Hurwitz, y métodos de Lugar de Raíces (Evans), Nyquist y Bode. Estos temas se apoyan fuertemente en los temas de la primera parte. Se enfatiza la integración de todas las herramientas, analizando su pertinencia en cada caso.

Finalmente, la tercera parte aborda el tema de síntesis de compensadores, analizando diferentes métodos y estructuras (atraso/adelanto, PID, etc.). Estas actividades de diseño son de indudable interés profesional, y abordan la solución de problemas abiertos de ingeniería.

Los temas arriba citados son abordados en la primera mitad del libro utilizando modelos continuos y transformadas de Laplace. En la segunda mitad, los temas son revisitados luego de repasar el teorema del muestreo y la transformada Z, agregando con ello un nuevo grado de libertad. De esta forma, al llegar a los sistemas discretos de control se tienen los conceptos básicos asentados, y los temas pueden abordarse en forma muy dinámica, a menudo como simple extensión de sus equivalentes continuos, *mutatis mutandis*.

El material presentado puede ser desarrollado en aproximadamente 20 semanas, lo que típicamente puede acomodarse en un semestre. Casi todos los capítulos se corresponden con una clase teórica. Los conceptos vertidos sientan las bases para abordar sistemas lineales de múltiples entradas y salidas, sistemas no lineales de control y estrategias de compensación avanzadas.

Miguel Mayosky

Febrero 2021.

## Agradecimientos

Este libro está dedicado a la memoria de José María Catalfo, mi director en los primeros años de mi carrera, y a quien perdimos demasiado pronto. Así que mi primer agradecimiento va para el entrañable Chacho, un ejemplo como profesional y ser humano. Nos ha hecho mucha falta.

No puedo dejar de mencionar aquí a mis compañeros de cátedra a lo largo de todos estos años: Al incansable Fernando Valenciaga, profesor Adjunto de la materia, y revisor del primer borrador de este libro. A Paul Puleston y Jorge Solsona, colegas y amigos en la vida. A Cristian Zujew, Remo Suppi, Daniel Fernández, Daniel Berns, Tania Salazar, Carolina Evangelista, Jerónimo Moré y a todos los auxiliares docentes cuyo invaluable esfuerzo ayudó a formar a tantas generaciones de ingenieros. Muchos de ellos son ahora profesores en prestigiosas universidades del país y el mundo.

Finalmente, a Daniela y Matilde, mi esposa e hija. Ellas están...siempre.

# CAPÍTULO 1

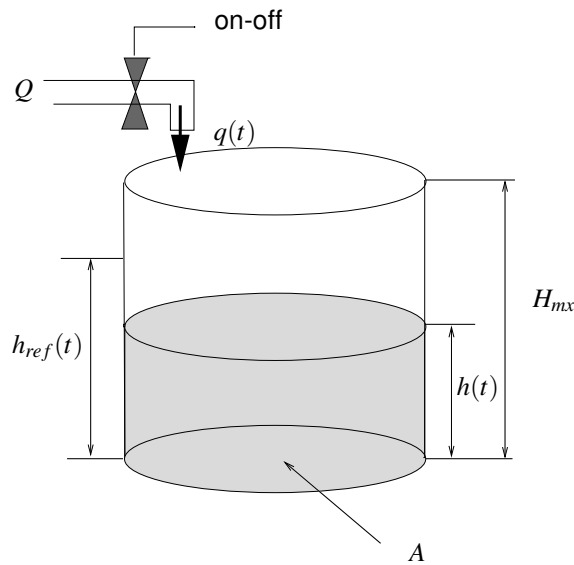
## Conceptos preliminares

### Introducción

En este capítulo se discutirán los principales temas a ser tratados en el libro, y se introducirá el concepto básico de realimentación. Se hará una clasificación informal de los diversos tipos de sistemas de control, y se centrará el análisis en los sistemas lineales invariantes en el tiempo, de una entrada y una salida.

### 1.1. Realimentación. Un ejemplo simple

El concepto de realimentación es fundamental en la teoría de sistemas dinámicos. La idea básica consiste en la utilización de la información del estado de un sistema para influir sobre sus entradas, y de esta forma modificar su respuesta dinámica, a fin de cumplir con una serie de especificaciones de diseño. La realimentación está presente en toda la Naturaleza, siendo particularmente importante en Biología y Fisiología. Por ejemplo, el ser humano trabaja con una temperatura corporal de 37 grados centígrados, aún si la temperatura exterior varía entre amplios límites. La regulación es tan exacta que una desviación de un par de grados denota invariablemente la presencia de alguna enfermedad o condición anómala. Para lograr esto, el cuerpo humano dispone de sensores de temperatura en la piel y otros órganos, información que es utilizada para modificar el metabolismo, por ejemplo, alterando el ritmo cardíaco y la temperatura de la sangre. Del mismo modo, cuando caminamos siguiendo una trayectoria trazada en el suelo, utilizamos la información estereoscópica brindada por los ojos para corregir la dirección del paso, al tiempo que se conserva el equilibrio y la velocidad deseada. La realimentación ha sido aprovechada por el hombre desde tiempo inmemorial para el control de magnitudes físicas,



**Figura 1.1:** Un ejemplo simple

y el desarrollo de una teoría matemática para el control de sistemas ha hecho posible un colosal desarrollo tecnológico e industrial, con límites inimaginables. En este libro comenzaremos a rasgar la superficie de esta teoría.

Ilustremos algunos conceptos a partir de un ejemplo simple. Supongamos que se desea llenar de agua, hasta una cierta altura deseada  $h_{ref}(t)$ , un recipiente cilíndrico cuya base tiene un área  $A$ . Para ello disponemos de un suministro de agua con un caudal  $q(t)$  y de una válvula *on-off*. Un esquema simplificado del sistema puede apreciarse en la figura 1.1. Suponiendo que el recipiente está originariamente vacío, en un dado instante de tiempo  $t$ , podemos plantear las siguientes ecuaciones:

$$q(t) = \frac{dv(t)}{dt} \Rightarrow v(t) = \int_0^t q(t)dt \quad (1.1)$$

$$v(t) = Ah(t) \quad (1.2)$$

donde  $h(t)$  es el nivel del agua en el instante  $t$  y  $v(t)$  es el volumen de líquido en el recipiente. La primera ecuación proviene de las leyes de física, en particular de la definición misma de caudal, mientras que la segunda es propia de la geometría del sistema bajo estudio. De estas dos ecuaciones puede obtenerse la evolución temporal de la altura del agua en el recipiente, esto es

$$h(t) = \frac{1}{A} \int_0^t q(t)dt \quad (1.3)$$

Esta ecuación nos permite comenzar a analizar algunos conceptos importantes. La expresión 1.3 es un *modelo matemático* del sistema, esto es, una representación matemática de algún aspecto del mismo. Es importante destacar que todo modelo permite sólo una visión *parcial* del sistema bajo estudio. Esta ecuación, por ejemplo, no dice nada sobre la temperatura del agua, el peso del recipiente, su color, etc. Todos los modelos tienen una *región de validez* donde predicen más o menos adecuadamente el comportamiento del sistema. Por ejemplo, la ecuación 1.3 predice que si  $q(t) = Q = cte$  el nivel del agua crecerá linealmente con el transcurso del tiempo, tendiendo a infinito cuando  $t \rightarrow \infty$ . Este modelo no predice que cuando  $h(t) \equiv H_{mx}$  el recipiente rebalsará. De la misma forma, sabemos que  $h(t)$  no puede ser negativo, aunque el modelo contemple esa posibilidad. Todos los modelos, no importa su complejidad, son siempre *locales* y funcionan alrededor de un determinado *punto de funcionamiento*. Este es un concepto importante: el modelo no es el sistema. El modelo predice más o menos exactamente el comportamiento de un aspecto del sistema en condiciones específicas de funcionamiento.

Puede apreciarse, además, que la ecuación 1.3 es una *ecuación diferencial* o, más exactamente en este caso, *integro-diferencial*. El uso de esta herramienta es necesario debido a que ningún sistema físico es capaz de cambiar su estado en forma instantánea (por ejemplo, llenar el recipiente en tiempo cero). Todos los sistemas físicos almacenan y disipan energía en alguna forma, es decir, poseen inercia. Desde el punto de vista de la respuesta en frecuencia, esto implica que la pendiente en alta frecuencia de la curva de amplitud versus frecuencia en un sistema físico siempre es negativa (energía finita). Una pendiente positiva o incluso nula implicaría que el sistema tiene ancho de banda infinito y por lo tanto podría responder infinitamente rápido a una excitación, cosa que no es físicamente posible. Las ecuaciones diferenciales nos permiten modelar la evolución temporal de sistemas con “inercia”.

Otra consideración interesante sobre la expresión 1.3 es que es una ecuación diferencial *lineal*, es decir, es una combinación lineal de derivadas de las variables involucradas. Los sistemas lineales son de fácil resolución, pero no existen en la naturaleza. ¿Por qué es entonces interesante estudiarlos? Si bien prácticamente la totalidad de los sistemas físicos son *no lineales*, a menudo puede plantearse un modelo *incremental* lineal alrededor de un punto de equilibrio, ya sea por observación o por linealización de sus ecuaciones. Es importante entonces aclarar que, aunque no se diga expresamente, cuando se plantea un modelo lineal todas las variables son *incrementales*, es decir, pequeños apartamientos de un punto de operación establecido. Por otra parte, si la estrategia de control es tal que logra mantener al sistema en el punto deseado de funcionamiento, el modelo lineal provee toda la información necesaria.

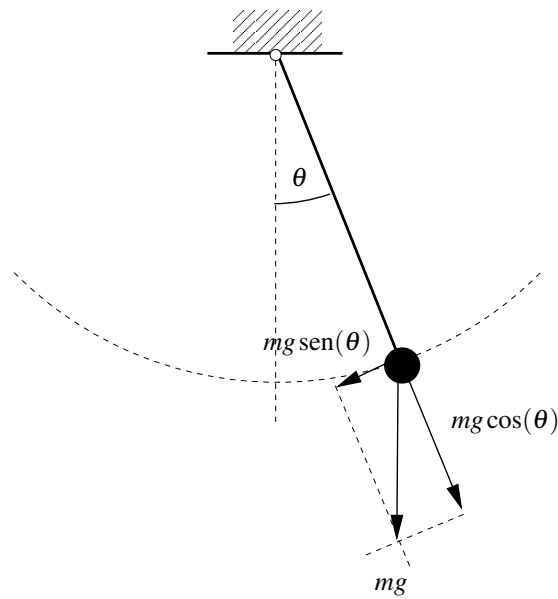


Figura 1.2: Un péndulo ideal

### 1.1.1. Un ejemplo: modelo no lineal y su linealización

Analicemos el comportamiento de un péndulo simple sin rozamiento (figura 1.2). Considerando la componente tangencial del peso podemos escribir:

$$ma_t = -mg \sin \theta \quad (1.4)$$

donde  $m$  es la masa (considerando despreciable la masa del hilo),  $a_t$  es la aceleración tangencial,  $g$  es la aceleración de la gravedad y  $\theta$  es el ángulo de apartamiento de la vertical. Recordando que  $a_t = l\ddot{\theta}$  podemos escribir

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta \quad (1.5)$$

o, en forma equivalente

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad (1.6)$$

Vemos que la ecuación diferencial que describe la dinámica del péndulo es *no lineal*, debido a que la variable  $\theta$  está afectada por el operador seno. También vemos que el sistema tiene dos puntos de equilibrio (las posiciones en las que se anula la aceleración), correspondientes a los puntos en los que  $\theta = 0$  (punto muerto inferior) y  $\theta = \pi$  (punto muerto superior) y sus múltiplos enteros. Es evidente que estas condiciones de equilibrio son diferentes. En efecto, pequeños apartamientos del punto muerto inferior darán lugar a oscilaciones alrededor del punto de equilibrio (que serán sinusoides automantenidas si no existe rozamiento), mientras que pequeños



apartamientos del punto muerto superior darán lugar a trayectorias que se alejan del mismo. Intuitivamente, el inferior es un punto de equilibrio *estable* y el superior es un punto de equilibrio *inestable*.

¿Es posible hallar una aproximación lineal al comportamiento del péndulo? Ciertamente que sí. Para ello, desarrollemos la no linealidad mediante la serie de Taylor alrededor de los puntos de equilibrio:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^n(x)|_{x=x_e} (x - x_e)^n \quad (1.7)$$

donde  $x_e$  es el punto de equilibrio elegido, y  $f^n$  es la derivada de orden  $n$  respecto de  $x$ . En nuestro caso

$$\sin \theta = \sin(\theta_e) + \cos(\theta_e)(\theta - \theta_e) - \frac{1}{2} \sin(\theta_e)(\theta - \theta_e)^2 + \dots \quad (1.8)$$

Vemos que para pequeños apartamientos del punto de equilibrio, los términos se van achicando mas y mas. Si despreciamos todos los términos superiores al término lineal podemos hacer una aproximación de primer orden, con lo cual la ecuación 1.6 nos queda, para el punto de equilibrio superior

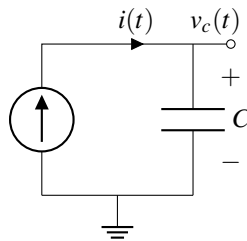
$$\ddot{\theta} = \frac{g}{l} \hat{\theta} \quad (1.9)$$

y para el punto de equilibrio inferior

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \hat{\theta} \quad (1.10)$$

En ambos casos tenemos ecuaciones diferenciales lineales, pero es importante destacar que son diferentes. La aproximación será válida en la medida que sea lícito despreciar los términos de orden superior. En este caso es evidente que la aproximación solo funcionará bien allí donde  $\sin(\theta) \cong \theta$ , es decir, para ángulos pequeños. Por ejemplo, si utilizamos esta expresión para describir el comportamiento alrededor del punto de equilibrio superior, para que el modelo lineal sea representativo debe llevarse el péndulo a la posición vertical, y luego asegurarse que los apartamientos serán “pequeños”.

Básicamente, los modelos pueden obtenerse a partir de dos metodologías. La primera (modelado propiamente dicho) resulta del conocimiento de las leyes físicas que rigen el comportamiento del sistema, y es la que hemos aplicado en el ejemplo actual. La segunda es una aproximación de tipo “caja negra”, que consiste en plantear un modelo genérico de orden suficientemente elevado y, a partir de un ensayo que provee registros de entradas y salidas, realizar



**Figura 1.3:** Circuito eléctrico análogo del ejemplo

un proceso de ajuste de parámetros (por cuadrados mínimos, por ejemplo) para minimizar el error entre los datos experimentales y los predichos por el modelo. A esta metodología se la conoce como *Identificación*.

## 1.2. Analogías

Volviendo al ejemplo del recipiente, es fácil advertir que el sistema se comporta como un *integrador*. En efecto, la ecuación es enteramente análoga a la tensión sobre un capacitor  $C$  excitado por un generador de corriente:

$$v_c(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt \quad (1.11)$$

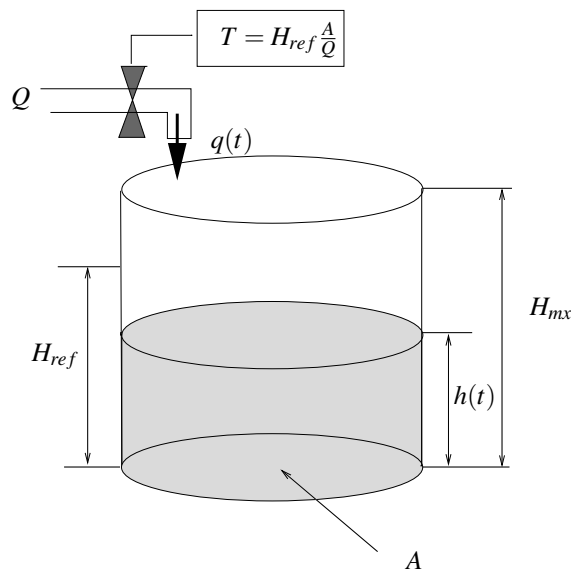
donde el valor del capacitor  $C$  hace las veces del área de la base, la corriente actúa como el caudal, y la tensión  $v_c$  sobre el capacitor es análoga a la altura del nivel de agua (figura 1.3). Ambos sistemas se dicen *análogos* y están regidos por las mismas leyes. Ésta no es la única analogía posible, pudiéndose plantear sistemas mecánicos, eléctricos, hidráulicos y térmicos equivalentes. Una vez obtenido el modelo, todos esos sistemas pueden tener el mismo tratamiento matemático para su estudio y diseño.

## 1.3. Control de Lazo Abierto

Supongamos ahora que  $q(t) = Q = cte$  y que  $h_{ref}(t) = H_{ref} = cte$ . Si consideramos el recipiente vacío en el instante inicial ( $h(0) = 0$ ), la ecuación 1.3 se transforma en

$$h(t) = \frac{1}{A} \int_0^t Q dt = \frac{Q}{A} t \quad (1.12)$$

donde vemos que la altura del agua crece linealmente con el tiempo, con una pendiente  $\frac{Q}{A}$ , esto es, en forma directamente proporcional al caudal de entrada e inversamente proporcional



**Figura 1.4:** Sistema de lazo abierto con temporizador

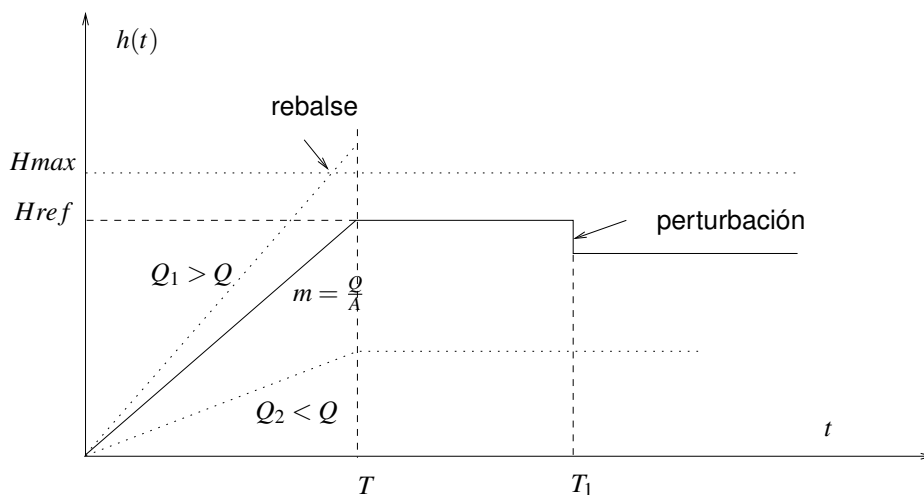
al área de la base. El recipiente puede llenarse manteniendo abierta la válvula un tiempo  $T = H_{ref} \frac{A}{Q}$ . Por lo tanto, el objetivo (llenar el tanque) podría conseguirse con un temporizador que mantuviera abierta la válvula  $T$  unidades de tiempo, como lo ilustra la figura 1.5. Este sistema, cuya respuesta se grafica en la figura 1.4, si bien puede ser utilizado en la práctica, posee varios problemas:

- Es altamente sensible a eventuales variaciones en el caudal, esto es, si  $q(t) < Q$  el recipiente no alcanzará a llenarse, y si  $q(t) > Q$  se superará la altura de referencia, pudiendo incluso llegar a rebalsar. Esto ocurre porque el sistema de control no está midiendo la altura del agua.
- El sistema es también muy sensible a perturbaciones. Por ejemplo, si una vez alcanzado el valor final se extrae agua del recipiente, como se aprecia en el instante  $T_1$ , el sistema es incapaz de restaurar la altura deseada.

Este tipo de sistemas, en los que *no se mide la variable controlada*, se denominan *Sistemas de Lazo abierto*.

## 1.4. Introduciendo Realimentación

A fin de mejorar las prestaciones, introduzcamos el concepto de realimentación. Para ello, incorporemos un sensor de nivel de agua, y remplacemos la válvula on-off por una válvula proporcional, es decir, una válvula en la que la apertura es proporcional a una señal de mando. La



**Figura 1.5:** Respuesta al escalón del sistema de lazo abierto

información sobre el nivel se compara (es decir, se resta) al valor deseado, y la diferencia (error) es amplificada para actuar sobre la válvula proporcional. La apertura de la válvula (y por lo tanto, el caudal de salida de la válvula) resulta entonces proporcional a la diferencia entre el nivel actual y el nivel deseado, como se aprecia en la figura 1.6. Las nuevas ecuaciones resultan

$$v(t) = \int_0^t q(t)dt \tag{1.13}$$

$$q(t) = K(h_{ref}(t) - h(t)) \tag{1.14}$$

$$v(t) = Ah(t) \tag{1.15}$$

donde  $K$  engloba las ganancias del amplificador, la válvula, etc. Juntando todo arribamos a la siguiente ecuación:

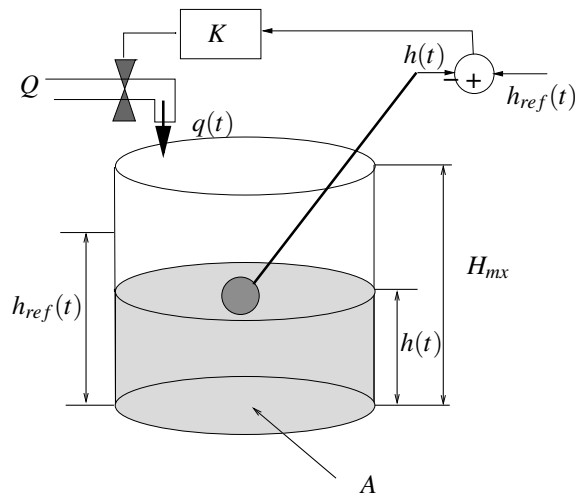
$$h(t) = \frac{1}{A} \int_0^t K(h_{ref}(t) - h(t))dt \tag{1.16}$$

Esta ecuación diferencial lineal a coeficientes constantes puede resolverse fácilmente utilizando la Transformada de Laplace. Recordando que las condiciones iniciales son nulas podemos escribir

$$H(s) = \frac{K}{A} \frac{1}{s} (H_{ref}(s) - H(s)) \tag{1.17}$$

$$H(s) \left(1 + \frac{K}{As}\right) = \frac{K}{As} H_{ref}(s) \tag{1.18}$$

$$\frac{H(s)}{H_{ref}(s)} = \frac{\frac{K}{As}}{\left(1 + \frac{K}{As}\right)} = \frac{\frac{K}{A}}{\left(s + \frac{K}{A}\right)} \tag{1.19}$$



**Figura 1.6:** Sistema de lazo cerrado con realimentación de nivel

Obsérvese que mientras el sistema de lazo abierto se comportaba como un integrador (un polo en  $s = 0$ ), el nuevo sistema de lazo cerrado tiene un polo en  $s = -\frac{K}{A}$ . La introducción de realimentación produce, en general, una alteración en la dinámica del sistema la cual, dependiendo el caso, puede ser beneficiosa o contraproducente.

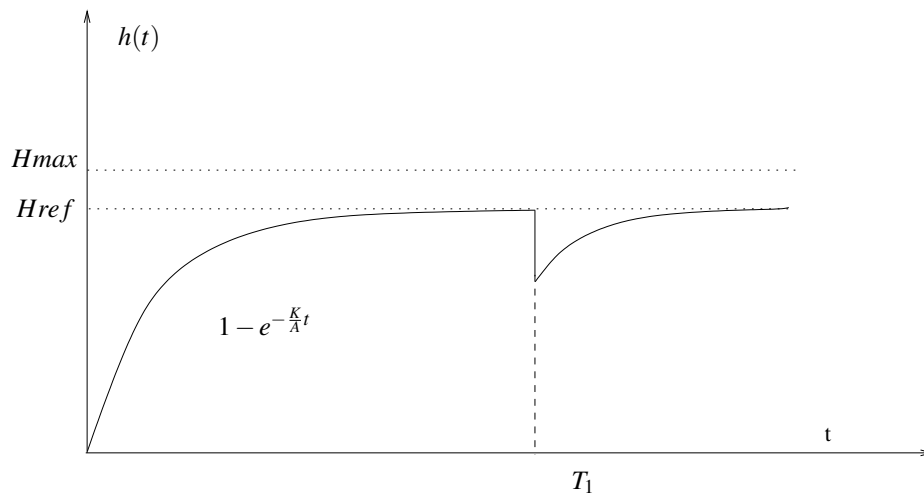
A partir de la última ecuación podemos calcular la altura del nivel para cualquier excitación  $H_{ref}(t)$  resolviendo la antitransformada de Laplace:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left( H_{ref}(s) \frac{\frac{K}{A}}{\left(s + \frac{K}{A}\right)} \right) \tag{1.20}$$

Por ejemplo, si  $H_{ref}$  es una *función escalón* unitario, cuya transformada de Laplace es  $1/s$ , resulta:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{\frac{K}{A}}{s \left(s + \frac{K}{A}\right)} \right) \tag{1.21}$$

La forma mas simple de resolver esta ecuación es aplicando el Teorema de los residuos:



**Figura 1.7:** Respuesta al escalón del sistema de lazo cerrado

$$\frac{\frac{K}{A}}{s(s + \frac{K}{A})} = \frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{(s + \frac{K}{A})} \quad (1.22)$$

$$R_1 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\frac{K}{A}}{(s + \frac{K}{A})} = 1 \quad (1.23)$$

$$R_2 = \lim_{s \rightarrow -\frac{K}{A}} \frac{\frac{K}{A}}{s} = -1 \quad (1.24)$$

$$\frac{\frac{K}{A}}{s(s + \frac{K}{A})} = \frac{1}{s} - \frac{1}{(s + \frac{K}{A})} \quad (1.25)$$

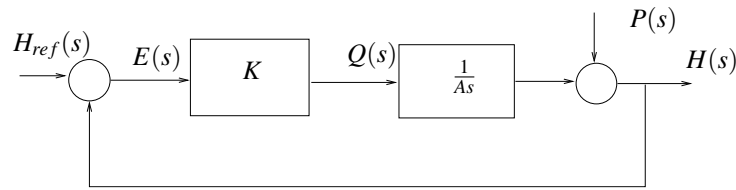
$$(1.26)$$

que puede antitransformarse fácilmente término a término, resultando

$$h(t) = 1 - e^{-\frac{K}{A}t} \quad (1.27)$$

La respuesta a un escalón en la referencia puede apreciarse en la figura 1.7. Obsérvese que el sistema es capaz de cumplir con el objetivo de llenar el tanque independientemente del valor de  $Q$ . Además, si una vez alcanzado el objetivo, aparece una perturbación que reduce el nivel de agua, como en el instante  $T_1$  en la figura, el sistema es capaz de responder abriendo nuevamente la válvula (ya que el error vuelve a ser distinto de cero) y restableciendo el nivel deseado, con la misma constante de tiempo. La mejora se ha logrado al costo de modificar la dinámica del sistema, que ya no se comporta como un integrador, ya que el polo se ha desplazado a  $-K/A$ .

Otro aspecto importante a destacar es que ahora la forma de la respuesta dinámica puede alterarse modificando el valor de  $K$ , que no depende del sistema físico en sí, y puede ser ele-



**Figura 1.8:** Diagrama de bloques del sistema realimentado

gido por el diseñador. De esta forma, si  $K$  aumenta la respuesta puede hacerse mas rápida y viceversa, ya que se altera la constante de tiempo de la exponencial.

Podemos llegar al mismo resultado trabajando directamente con el diagrama de bloques. En efecto, analizando el sistema podemos plantear el diagrama de la figura 1.8. El bloque  $\frac{1}{As}$  es el sistema de lazo abierto que tiene como salida la altura del fluido y como entrada el caudal  $q(t)$ . La salida es comparada con el nivel de referencia y es luego afectada por el bloque  $K$ , cuya salida es el caudal. Operando sobre este diagrama puede arribarse a las mismas ecuaciones que sobre el sistema físico:

$$H(s) = Q(s) \frac{1}{As} \tag{1.28}$$

$$E(s) = H_{ref}(s) - H(s) \tag{1.29}$$

$$Q(s) = KE(s) \tag{1.30}$$

$$H(s) = K(H_{ref}(s) - H(s)) \frac{1}{As} \tag{1.31}$$

$$H(s) \left(1 + \frac{K}{As}\right) = H_{ref}(s) \frac{K}{As} \tag{1.32}$$

$$H(s) = H_{ref}(s) \frac{\frac{K}{A}}{\left(s + \frac{K}{A}\right)} \tag{1.33}$$

## 1.5. Tipos de sistemas de control

### 1.5.1. Estabilidad y performance

No necesariamente la introducción de realimentación tendrá efectos benéficos sobre la respuesta del sistema. Por ejemplo, si en nuestro ejemplo el valor de  $K$  fuese negativo, es fácil advertir que la componente exponencial de la respuesta al escalón será creciente en lugar de decreciente, con lo cual el valor de la salida aumentará arbitrariamente, tendiendo teóricamente a infinito a medida que transcurre el tiempo (en realidad, lo que ocurrirá en este caso es que el sistema abandonará la zona de funcionamiento lineal, con lo que el modelo dejará de representar adecuadamente al sistema). En el ejemplo, la altura no puede superar  $H_{max}$ , es decir, el

sistema presenta un fenómeno de *saturación*, algo no contemplado en el modelo lineal. Diremos entonces que el sistema es *inestable*, aunque todavía no daremos una definición precisa de la estabilidad. Es importante poder predecir bajo qué condiciones un sistema puede ser inestable, y el estudio de la estabilidad de lazo cerrado ocupará varias semanas en este curso. Aun sin ser inestable, un valor positivo pero muy pequeño de  $K$  puede hacer que el transitorio de la respuesta sea inaceptablemente lento. De la misma manera, un valor positivo pero muy elevado de  $K$  podría comprometer la integridad de la válvula, al exigir demasiado a sus componentes mecánicos (excesivo esfuerzo de control). Los parámetros de la respuesta temporal, tales como tiempo de establecimiento, sobrepico, valor final, etc., son importantes para caracterizar las prestaciones de un sistema, y dentro de ciertos límites el diseñador puede alterarlos (como en este ejemplo) mediante la criteriosa introducción de dinámica, lo que se denomina *compensación*. En este libro se estudiarán diversas técnicas de compensación, tanto en el dominio del tiempo como de la frecuencia.

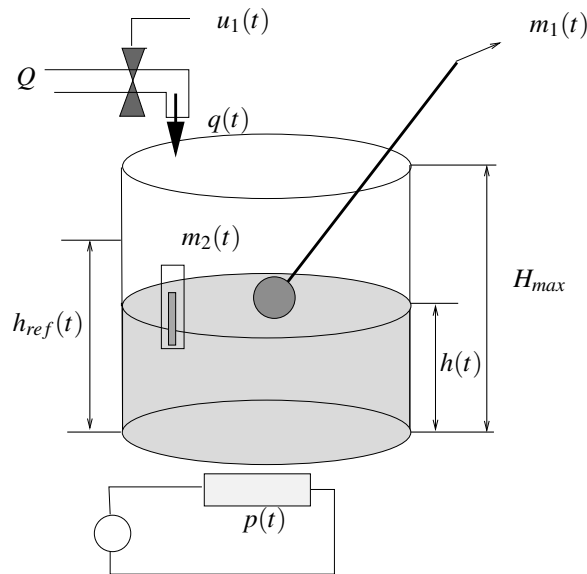
### 1.5.2. Sistemas mono y multivariables

El sistema del ejemplo posee una única entrada (la altura de referencia) y una única salida (el nivel de agua). A estos sistemas se los denomina SISO (*Single input-Single Output*). Sin embargo, pueden existir sistemas con entradas y salidas múltiples (MIMO: *Multiple input-Multiple output*). Por ejemplo, supóngase que, además de llenar el recipiente hasta la altura  $H_{ref}$ , quisiéramos que la temperatura del fluido fuese de  $T_{ref}$  grados (figura 1.9). Para ello, podríamos disponer un calefactor en la base del recipiente, y de un termómetro. Los lazos de control de nivel y el de control de temperatura no son independientes, ya que un aumento de temperatura produce una dilatación del fluido que afecta el nivel  $h(t)$ . De la misma manera, el ingreso de fluido frío en el recipiente altera la temperatura en el recipiente. Este sistema posee entonces dos salidas (nivel y temperatura) y dos entradas (caudal de entrada y potencia calefactora). En general, un sistema MIMO puede tener  $n$  entradas y  $m$  salidas. En este curso nos centraremos en sistemas SISO.

### 1.5.3. Sistemas invariantes en el tiempo

En el ejemplo hemos considerado que los coeficientes de las ecuaciones diferenciales eran constantes independientes del tiempo. A este tipo de sistemas se los denomina *LIT* (lineales e invariantes en el tiempo). Sin embargo hay muchos sistemas que no se comportan de esta forma. En nuestro ejemplo del tanque, el valor de  $K$  podría ser función del tiempo, con lo cual el polo del sistema cambiaría de posición en cada instante. Este sistema seguiría siendo lineal, pero sus coeficientes serían *variantes en el tiempo*. Un ejemplo clásico es un avión de caza: su masa (y



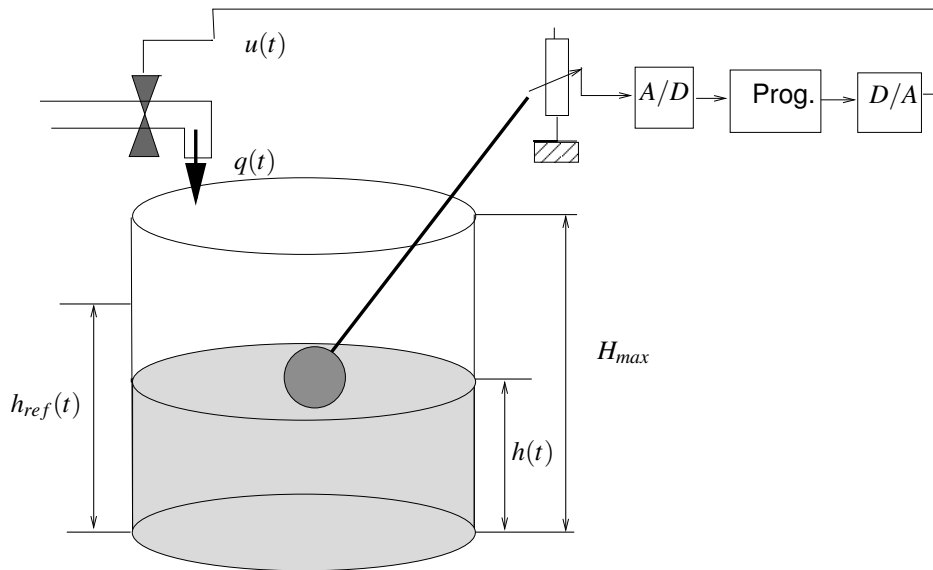


**Figura 1.9:** Sistema MIMO con dos entradas y dos salidas

por lo tanto su inercia) cambiará a medida que se consuma el combustible y se descarguen las armas. Otro ejemplo lo constituyen los sistemas *adaptivos o adaptativos*, donde el compensador modifica sus parámetros en función de una evaluación de las prestaciones del sistema.

#### 1.5.4. Sistemas discretos y muestreados

Supongamos que deseáramos que la apertura de la válvula del ejemplo fuera comandada por una computadora. Un esquema posible es el de la figura 1.10. Como la computadora sólo puede trabajar con números binarios, el nivel de líquido (que podría ser, por ejemplo, proporcional a un voltaje eléctrico) debería ser transformado en un número binario mediante un conversor analógico-digital. Este dispositivo transforma una tensión eléctrica continua en un valor numérico en algún formato digital. Este valor numérico podría entonces ser procesado por un programa ejecutado en la computadora. El resultado de este programa (a su vez un número binario) debería ser transformado nuevamente en una tensión o corriente eléctrica para actuar sobre la válvula proporcional. Esto se lleva a cabo mediante un conversor digital-analógico, que transforma un valor numérico en una señal eléctrica analógica de valor equivalente. Este proceso se repite periódicamente, cada  $T$  unidades de tiempo. Es evidente entonces que en el lazo de la figura 1.10 conviven dos tipos de señales diferentes: señales *continuas*, que existen para cualquier valor de  $t$ , y pueden tomar infinitos valores entre un máximo y un mínimo, y señales *discretas*, que sólo existen en determinados instantes  $T$  (instantes de muestreo) y pueden tomar uno de entre un número finito de valores, dependiendo del sistema de numeración binario (por ejemplo, si utilizamos una representación binaria en punto fijo y 8 bits, la señal discreta sólo puede tomar uno



**Figura 1.10:** Sistema de control muestreado

de entre 256 valores posibles). Evidentemente, hay una pérdida de información, ya que se ignora el comportamiento del sistema entre instantes de muestreo, y por otra parte, existe un *ruido de cuantización* producto del sistema de numeración utilizado. Es por lo tanto importante elegir adecuadamente el valor de  $T$  a fin de poder controlar el sistema adecuadamente, y disponer la dinámica del lazo a fin de obtener la respuesta deseada y rechazar el ruido de cuantización eficazmente.

## 1.6. Alcances y estructura del libro

En este primer curso de control automático nos concentraremos en sistemas SISO-LIT, continuos y muestreados. En la primera mitad del libro, estudiaremos modelos matemáticos, respuesta temporal, diversos métodos de análisis de estabilidad y compensación de sistemas continuos. Durante la segunda mitad se analizarán los mismos temas para el caso de sistemas muestreados. Se hará énfasis en adaptar las técnicas de análisis y diseño desarrolladas para sistemas continuos para su aplicación en sistemas muestreados.

## 1.7. Problemas

1. Recalcule el sistema de la figura 1.6, pero ahora suponga  $K$  negativo. ¿Qué ocurre con el polo del sistema? ¿Qué efecto tendrá este cambio en la respuesta temporal?
2. En el sistema de la figura 1.6 se supuso que la respuesta de la válvula es instantánea.

Supongamos que, para acercarnos un poco más a una situación real, modelamos la respuesta de la válvula mediante la expresión

$$aq(t) = u(t) - \dot{q}(t)$$

donde  $u(t)$  es la salida del bloque  $K$ , y  $a$  es una constante positiva. ¿Cómo cambia la relación entre  $H(s)$  y  $H_{ref}(s)$ ?

3. Modifiquemos el sistema de la figura 1.6, suponiendo que existe un agujero en el fondo, y que el caudal de sale por el mismo es proporcional a  $h(t)$ . ¿Cómo se modifican las ecuaciones del sistema? El tanque, ¿sigue siendo un integrador? ¿Qué pasa en ambos sistemas, cuando  $t \rightarrow \infty$ , si se cierra la válvula?
4. Supongamos ahora que en la figura 1.6 el tanque es esférico. Recalcule las ecuaciones dinámicas. ¿El sistema sigue siendo lineal? Realice una aproximación lineal del sistema alrededor de un punto de trabajo, digamos por ejemplo,  $H_{max}/2$ .

## Referencias

- [1] T. Kailath, “Linear Systems”, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA, 1980.
- [2] K. Ogata, “Modern Control Engineering”, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA, 3rd edition, 1997.
- [3] B. C. Kuo, “Automatic Control Systems”, Prentice-Hall International, London, England, 9th edition, 1962.
- [4] C. H. Houpis, S. N. Sheldon, J. J. D’Azzo, “Linear Control System Analysis and Design”. Fifth Edition, Revised and Expanded (Automation and Control Engineering). Taylor and Francis, 2003.
- [5] M. Gopal, I.J. Nagrath, “A Textbook of Control Systems Engineering”, New Age International (P) Ltd., 2010.
- [6] R. C. Dorf, R. H. Bishop, “Modern Control Systems”. Pearson 2008.

# CAPÍTULO 2

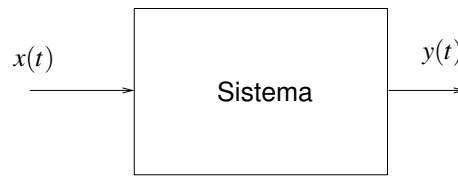
## Análisis de la respuesta temporal de sistemas SISO-LIT

### Introducción

En el capítulo anterior hemos visto que los sistemas lineales pueden ser modelados mediante una ecuación diferencial lineal, esto es, una ecuación diferencial en la que las señales de entrada y salida sólo son afectadas por operadores de escalado, integración y derivación. Además, si los coeficientes que afectan a las señales y sus sucesivas derivadas son constantes, el sistema será invariante en tiempo. La forma habitual de resolver ecuaciones diferenciales lineales e invariantes en el tiempo es la *Transformada de Laplace*. Al convertir las ecuaciones diferenciales en algebraicas, la Transformada de Laplace permite definir la *Función de Transferencia* del sistema, que será nuestra herramienta fundamental para el análisis de sistemas de lazo cerrado. En este capítulo se analizarán las propiedades básicas de la función de transferencia, y se utilizará para el cálculo de la respuesta temporal de sistemas. Los conceptos de *polo* y *cero de transmisión* serán discutidos en detalle, tanto para los sistemas de *fase mínima* como para los de *fase no mínima*.

### 2.1. Ecuaciones diferenciales y modelos de sistemas

Recordemos que siempre que hablamos de un modelo lineal de un sistema nos referimos al análisis del *comportamiento incremental* del mismo, es decir, suponemos que el sistema está trabajando en un punto de funcionamiento sobre el cual se producen pequeños desplazamientos,



**Figura 2.1:** Sistema SISO-LIT

que pueden ser descritos por una ecuación diferencial lineal (aunque generalmente se omite, las señales que aparecen en todas las ecuaciones están siempre referidas al punto de operación, p.ej.  $x(t) = X(t) - X_0$ ). En esas condiciones, la dinámica de un sistema con una entrada  $x(t)$  y una salida  $y(t)$  como el como el de la figura 2.1 puede ser descrita a través de una ecuación diferencial general de la forma:

$$a_0x(t) + a_1\dot{x}(t) + a_2\ddot{x}(t) + \dots + a_nx^{(n)}(t) = b_0y(t) + b_1\dot{y}(t) + b_2\ddot{y}(t) + \dots + b_my^{(m)}(t) \quad (2.1)$$

Los operadores de derivada son necesarios para representar el almacenamiento de energía en el sistema y consecuentemente la incapacidad de todos los sistemas reales de responder en forma instantánea a la entrada. Para resolver esta ecuación diferencial utilizamos la Transformada de Laplace:

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (2.2)$$

Si se consideran condiciones iniciales nulas, utilizando las propiedades de la Transformada de Laplace convertimos esta expresión en una ecuación algebraica de la forma:

$$a_0X(s) + a_1sX(s) + a_2s^2X(s) + \dots + a_ns^nX(s) = b_0Y(s) + b_1sY(s) + b_2s^2Y(s) + \dots + b_ms^mY(s) \quad (2.3)$$

Al despejar el cociente  $\frac{Y(s)}{X(s)}$  obtenemos la forma habitual de la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{a_0 + a_1s + a_2s^2 \dots + a_ns^n}{b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_ms^m} \quad (2.4)$$

Podemos dar entonces una primera definición: “La Función de transferencia es el cociente entre las transformadas de Laplace de la salida y la entrada del sistema, cuando se consideran condiciones iniciales nulas”.

Por supuesto, ésta no es la única forma de representar un sistema dinámico lineal. Una ecuación diferencial de grado  $n$  puede ser siempre expresada como un sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales de grado 1. En efecto, consideremos el sistema eléctrico mostrado en la figura 2.2. La ecuación que describe su operación es:

$$v(t) = i(t)R + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(t)dt \quad (2.5)$$

Haciendo el cambio de variables

$$x_1(t) = i(t) \quad (2.6)$$

$$x_2(t) = \int_0^t i(t) dt \quad (2.7)$$

$$\implies \dot{x}_2(t) = x_1(t) \quad (2.8)$$

podemos plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\dot{x}_1(t) = -\frac{R}{L}x_1(t) - \frac{1}{LC}x_2(t) + \frac{1}{L}v(t) \quad (2.9)$$

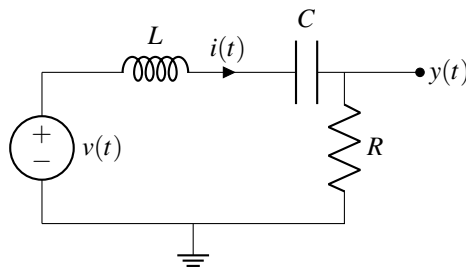
$$\dot{x}_2(t) = x_1(t) \quad (2.10)$$

$$y(t) = x_1(t)R \quad (2.11)$$

que puede ser escrita como una ecuación vectorial de primer orden:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{LC} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} v(t) \quad (2.12)$$

que se conoce como la *ecuación de estados* del sistema. A diferencia de la función de transferencia, que es única para un dado sistema, la ecuación de estados no es única. De hecho, cualquier combinación lineal de los estados arriba citados puede ser utilizado como un nuevo juego de variables de estado. En este curso no abundaremos sobre este tema.



**Figura 2.2:** Circuito eléctrico simple

## 2.2. Propiedades de la función de transferencia

A continuación resumiremos algunas propiedades de la función de transferencia del sistema:

- Si la función de transferencia proviene del modelado o identificación de un *sistema realizable* los coeficientes de los polinomios numerador y denominador son números reales. Esto

hace que las raíces de numerador y denominador sean invariablemente números reales (positivos o negativos) o complejos conjugados. Es decir, existirá una relación de simetría respecto del eje real en el plano  $s$ .

- La función de transferencia es independiente de las señales de entrada y salida.  $G(s)$  es una propiedad del sistema.
- La salida del sistema ante una excitación cualquiera puede obtenerse fácilmente calculando

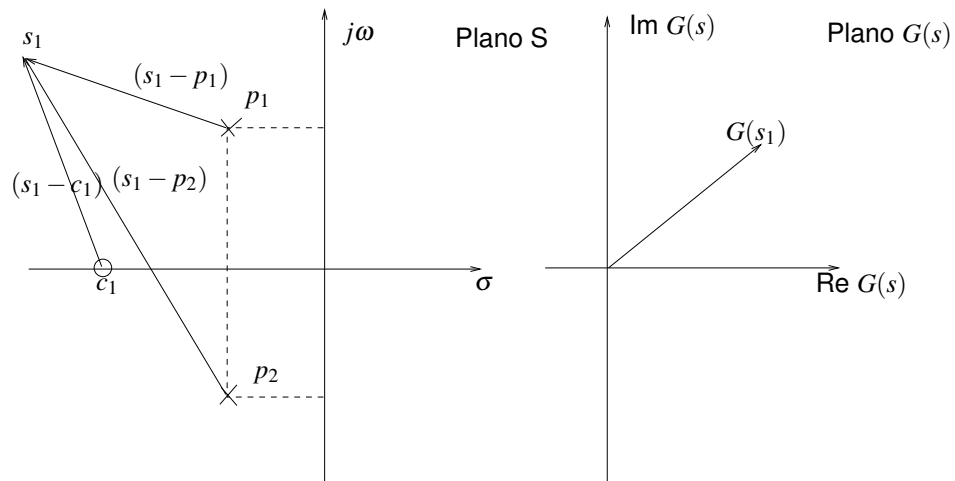
$$Y(s) = X(s)G(s) \quad (2.13)$$

y utilizando la antitransformada de Laplace:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(X(s)G(s)) \quad (2.14)$$

Esta expresión nos permite dar una definición alternativa de la función de transferencia. En efecto, considerando que si  $x(t)$  es un impulso su transformada de Laplace es  $X(s) = 1$  podemos decir que *la función de transferencia es la transformada de Laplace de la respuesta impulsiva del sistema*. Esta definición será de utilidad mas adelante.

- Los valores de  $s$  que anulan del denominador de la función de transferencia se denominan *polos*, mientras que las raíces del numerador se denominan *ceros de transmisión* o simplemente *ceros*. Si el orden del denominador es mayor que el del numerador (esto es, si el sistema tiene mayor cantidad de polos finitos que de ceros finitos) se dice que el sistema es *estrictamente propio*. Si el grado del numerador es igual al del denominador, el sistema es *propio*, mientras que si el sistema tiene mas ceros que polos es *impropio*. Todos los sistemas realizables son propios. Esto puede justificarse considerando que, en la medida que el sistema tenga mas polos que ceros, la curva de amplitud de la respuesta en frecuencia decaerá para frecuencias suficientemente elevadas, lo que implica que el sistema es de *banda limitada*. Tanto en los sistemas propios como impropios el ancho de banda es infinito, lo que implicaría que el sistema podría reaccionar instantáneamente ante una entrada, cosa que es físicamente imposible. A pesar de ello, a lo largo del texto aparecerán, ocasionalmente, funciones estrictamente propias e impropias. Esto ocurrirá cuando se desprece alguna dinámica, o bien cuando la función de transferencia es sólo válida en una banda de frecuencias. Un caso típico son los modelos del transistor para frecuencias bajas, medias y altas. Como dijimos con anterioridad, todos los modelos son aproximaciones locales, es decir tienen una región de validez limitada en la cual predicen adecuadamente el comportamiento del sistema.



**Figura 2.3:** Interpretación gráfica de la función de transferencia

### 2.2.1. Una interpretación gráfica de la función de transferencia

La expresión 2.4 puede ser factorizada a partir de las raíces del numerador y denominador como sigue:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = K \frac{\prod_{i=1}^n (s - c_i)}{\prod_{j=1}^m (s - p_j)} \tag{2.15}$$

donde  $K = a_n/b_m$  es una ganancia (que puede ser positiva o negativa). Los términos  $(s_1 - c_i)$  y  $(s_1 - p_j)$  son vectores tendidos desde el cero o polo y el punto  $s_1$  en consideración. El resultado de calcular la función de transferencia en un punto cualquiera del plano  $s$  será un vector  $G(s)$  cuyo módulo y fase vendrán dados por la expresión

$$|G(s)| = |K| \frac{\prod_{i=1}^n |(s - c_i)|}{\prod_{j=1}^m |(s - p_j)|} \tag{2.16}$$

$$\varphi(G(s)) = \varphi(K) + \sum_{i=1}^n \varphi(s - c_i) - \sum_{j=1}^m \varphi(s - p_j) \tag{2.17}$$

La figura 2.3 ilustra la operación realizada. Por ejemplo, cuando relevamos la *respuesta en frecuencia* de una función de transferencia hacemos este cálculo restringiendo el análisis al eje  $j\omega$  positivo.

## 2.3. Cálculo de la respuesta temporal

La respuesta temporal del sistema ante una excitación cualquiera se obtiene antitransformando  $Y(s)$ .

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(X(s)G(s)) \tag{2.18}$$



Como la expresión es racional en  $s$ , puede utilizarse la expansión en fracciones simples, anti-transformando las dinámicas individuales. Debido a la condición de simetría con respecto al eje real que detallábamos mas arriba, los polos del sistema sólo pueden ser reales (distintos o repetidos) o complejos conjugados. Por lo tanto, para calcular la salida de un sistema lineal, sólo es necesario saber calcular la respuesta a polos reales y a pares de polos complejos conjugados. Distinguiremos tres casos: polos reales distintos, polos reales múltiples y polos complejos conjugados.

### 2.3.1. Polos reales de multiplicidad 1

En el caso de polos reales de multiplicidad 1 los residuos se calculan como

$$R_i = \lim_{s \rightarrow s_i} (s - s_i) Y(s) \quad (2.19)$$

de forma tal que la respuesta temporal de cada término es

$$\mathcal{L}^{-1} \left( \frac{K}{(s+a)} \right) = K e^{-at} \quad (2.20)$$

es decir, una exponencial real que será decreciente si el polo está en el semiplano izquierdo (parte real negativa), creciente si tiene parte real positiva, y constante si  $a = 0$ . El caso de múltiples polos reales distintos es la extensión de este resultado, simplemente aplicando el teorema de residuos.

### 2.3.2. Polos reales de multiplicidad n

Si el desarrollo en fracciones simples contiene términos de la forma:

$$\frac{K}{(s+a)^n} \quad (2.21)$$

El residuo  $K$  se calcula por igualación de coeficientes, o mediante la fórmula

$$K = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{s \rightarrow a} \frac{d^{(n-1)}}{ds^{(n-1)}} [(s-a)^n Y(s)] \quad (2.22)$$

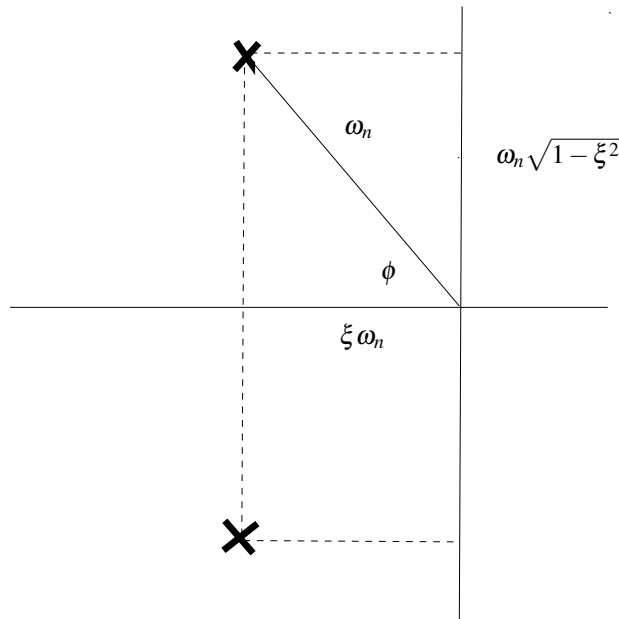
la respuesta temporal de cada término tomará la forma

$$\mathcal{L}^{-1} \left( \frac{K}{(s+a)^n} \right) = \frac{K}{n!} t^n e^{-at} \quad (2.23)$$

### 2.3.3. Polos complejos conjugados

Este caso es sensiblemente mas complejo. Para analizar el comportamiento primero escribiremos la expresión en su forma normalizada

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (2.24)$$



**Figura 2.4:** Ubicación de los polos complejos conjugados

donde  $\omega_n$  se denomina *frecuencia (o pulsación) de oscilación no amortiguada* y  $\xi$  es el *amortiguamiento*. Para calcular la ubicación de los polos obtenemos las raíces del polinomio denominador

$$s_{1,2} = -\xi \omega_n \pm 1/2 \sqrt{(2\xi \omega_n)^2 - 4\omega_n^2} = -\xi \omega_n \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1} \quad (2.25)$$

El caso  $\xi > 1$  (sistema sobreamortiguado) corresponde a dos polos reales y distintos mientras que  $\xi = 1$  (amortiguamiento crítico) corresponde a dos polos reales y coincidentes, dos casos que ya hemos visto. En el caso de  $\xi < 1$  (sistema subamortiguado) el argumento de la raíz es negativo, por lo que podemos escribir

$$s_{1,2} = -\xi \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad (2.26)$$

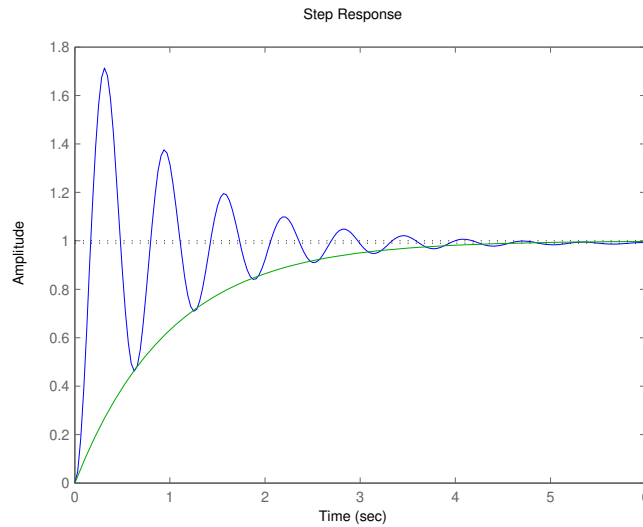
La figura 2.4 ilustra esta situación. Aquí puede hacerse un poco de luz sobre los nombres de las constantes normalizadas. Obsérvese que si el amortiguamiento es nulo ( $\xi = 0$ ) las raíces se encuentran sobre el eje  $j\omega$  y la respuesta es la de un oscilador puro de frecuencia  $\omega_n$ .

La respuesta al escalón de un sistema subamortiguado constará de una componente sinusoidal de frecuencia  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$  con una envolvente exponencial de constante de tiempo  $-\xi \omega_n$ . En términos generales

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2)} \right) = 1 - K e^{-\xi \omega_n t} \sin(\omega_d t + \phi) \quad (2.27)$$

El ángulo  $\phi$  es directamente

$$\phi = \text{tg}^{-1} \left( \frac{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}{\xi \omega_n} \right) = \text{tg}^{-1} \left( \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi} \right) \quad (2.28)$$



**Figura 2.5:** Respuesta al escalón. Se aprecia la respuesta completa y la envolvente  $e^{-\xi\omega_n t}$ .

o equivalentemente

$$\phi = \sin^{-1}(\sqrt{1 - \xi^2}) \quad (2.29)$$

Para calcular el valor de  $k$  utilizamos la condición que para  $t = 0$  la salida es nula. Por lo tanto

$$y(0) = 0 = 1 - K \sin(\sin^{-1}(\sqrt{1 - \xi^2})) \Rightarrow K = \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (2.30)$$

y la expresión completa resulta

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin\left(\omega_d t + \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi}\right)\right) \quad (2.31)$$

Esta respuesta (o respuestas similares) puede caracterizarse mediante algunos valores estandarizados, que en el caso lineal pueden calcularse a partir de la expresión de la respuesta y se aprecian en la figura 2.6. El *tiempo de subida*  $t_r$  es el tiempo transcurrido hasta que la respuesta alcanza un determinado porcentaje del valor final, habitualmente el 50% o el 100%. El (sobrepico)  $S_p$  es la altura del primer pico de la respuesta temporal. Este valor se produce para una *tiempo de pico*  $t_p$ . El *tiempo de establecimiento*  $t_s$  es el tiempo que la respuesta requiere para entrar en una determinada banda alrededor del valor final, por ejemplo el 5% o 2%.

### 2.3.4. Tiempo de subida

Para calcular el tiempo de salida al 100%, por ejemplo, simplemente igualamos la expresión de  $y(t)$  a 1:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 - \frac{e^{-\xi \omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_d t + \theta) \\ 0 &= \frac{e^{-\xi \omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_d t + \theta) \end{aligned}$$

lo que solo puede ocurrir si

$$\sin(\omega_d t + \theta) = 0$$

es decir

$$\omega_d t + \theta = 0, \pi, 2\pi \dots, n\pi$$

El tiempo de subida resulta entonces

$$t_r = \frac{(\pi - \theta)}{\omega_d} = \frac{(\pi - \theta)}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} \quad (2.32)$$

### 2.3.5. Tiempo de pico y sobrepico asociado

Para encontrar  $t_p$  debemos derivar la expresión de la respuesta con respecto al tiempo e igualarla a 0:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y(t)}{\partial t} &= \xi \omega_n \frac{e^{-\xi \omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_d t + \theta) - \\ &\quad - \omega_d \frac{e^{-\xi \omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \cos(\omega_d t + \theta) = 0 \end{aligned}$$

lo que resulta en

$$\tan(\omega_d t_p + \theta) = \frac{\omega_d}{\xi \omega_n} = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$$

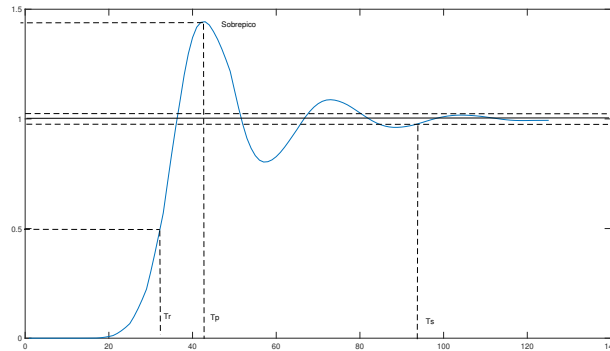
o equivalentemente

$$\omega_d t_p + \theta = \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \right)$$

pero sabemos que  $\theta = \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \right)$ , por lo que podemos escribir

$$\omega_d t_p = 0, \pi, 2\pi \dots$$

y concluimos que



**Figura 2.6:** Sistema subamortiguado de segundo orden. Sobrepico, tiempo de subida, tiempo de pico y tiempo de establecimiento

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} \quad (2.33)$$

Con este valor de  $t_p$  podemos calcular el sobrepico  $s_p$ , simplemente reemplazando su valor en la expresión de la respuesta temporal:

$$\begin{aligned} s_p &= 1 - y(t_p) = -\frac{e^{-\xi \omega_n t_p}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_d t_p + \theta) \\ &= -\frac{e^{-\frac{\xi \pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\pi + \theta) \end{aligned}$$

pero

$$\sin(\pi + \theta) = -\sin(\theta) = \sqrt{1-\xi^2}$$

con lo que se concluye que el valor del sobrepico es

$$s_p = e^{-\frac{\xi \pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad (2.34)$$

### 2.3.6. Tiempo de establecimiento

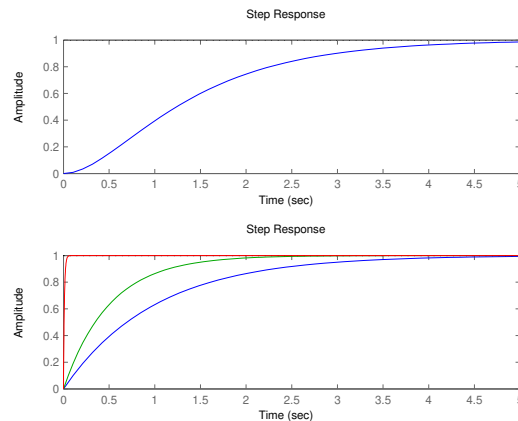
Una forma simple de estimar el tiempo de establecimiento es calcular el punto en el que la envolvente exponencial de la respuesta temporal entra en un determinado porcentaje  $a$  del valor final. En nuestro caso sería

$$e^{-\xi \omega_n t_s} = a$$

lo que resulta en

$$t_s = \frac{\ln(a)}{\xi \omega_n} \quad (2.35)$$

Por ejemplo, el tiempo al 2% del valor final sera  $\frac{\ln(0,02)}{\xi \omega_n} = \frac{4}{\xi \omega_n}$ .



**Figura 2.7:** Respuesta del sistema. Superior: total. Inferior: dinámicas individuales. La más rápida corresponde al polo en  $s=100$  y la más lenta al polo en  $s=1$

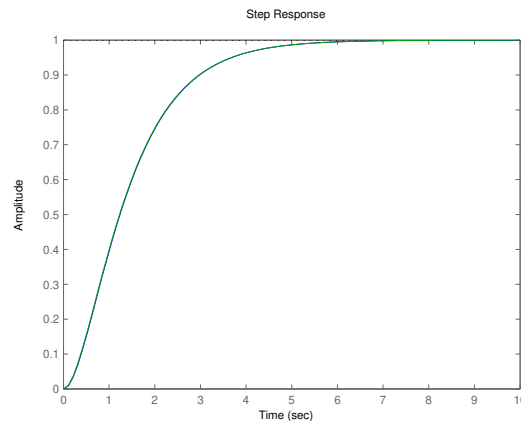
### 2.3.7. Dinámica Dominante

Dependiendo del ámbito de análisis, es a menudo posible despreciar el efecto de algunos polos y ceros de la función de transferencia, con lo cual el análisis puede calcularse sin incurrir en errores significativos. En muchas ocasiones las singularidades del sistema pueden separarse en una dinámica lenta, es decir, debida a polos y ceros de baja frecuencia, y una dinámica rápida, producida por los polos y ceros de alta frecuencia. Cuando se hace una *aproximación de polos dominantes*, en general se desprecia la dinámica de alta frecuencia, considerando que el transitorio asociado a la misma se extingue mucho más rápido que el debido a la dinámica lenta, o bien que su efecto en la respuesta en frecuencia se produce más allá del rango de frecuencias de interés. Es importante, sin embargo, conservar el efecto de la dinámica despreciada en el módulo de la función de transferencia. Ilustremos esto con un ejemplo. Supongamos

$$G(s) = \frac{200}{(s+1)(s+2)(s+100)} \quad (2.36)$$

Este sistema tiene, claramente, dos polos de baja frecuencia (en  $s = 1$  y  $s = 2$ ) y un tercer polo en una frecuencia 2 órdenes de magnitud superior ( $s = 100$ ). La figura 2.7 muestra la respuesta al escalón del sistema, así como las dinámicas individuales involucradas. Los correspondientes residuos son  $\frac{200}{99}$ ,  $-\frac{200}{98}$  y  $\frac{200}{(99)(98)}$ , respectivamente. Nótese que el residuo correspondiente al polo más rápido también es 100 veces más pequeño que los otros dos. Como puede apreciarse en la figura, la dinámica correspondiente al polo de alta frecuencia es tan pequeña y se extingue tan rápido en relación con las otras dos, que resulta razonable despreciarla. Para hacer eso despreciamos  $s$  frente a 100, resultando:

$$G(s) = \frac{200}{(s+1)(s+2)(s+100)} \cong \frac{200}{(s+1)(s+2)(100)} = \frac{2}{(s+1)(s+2)} \quad (2.37)$$



**Figura 2.8:** Respuesta del sistema completo y el aproximado

En la figura 2.8 se dibujan las dos curvas de respuesta. Puede apreciarse que las mismas son prácticamente coincidentes. Sin embargo, la determinación de qué dinámica puede despreciarse depende de la zona de trabajo. En este caso, se desprecia el polo en 100 pues se considera que en la zona de interés  $s \ll 100$ . Obviamente, si estuviésemos analizando el comportamiento en las inmediaciones de  $s = 100$  la aproximación sería diferente. El resultado es tanto mejor cuanto mayor sea la separación entre dinámica lenta y rápida.

## 2.4. Efecto de los ceros en la respuesta temporal

Como hemos analizado anteriormente, el efecto de los ceros tiene una implicancia directa en la respuesta temporal, al influir en el valor y el signo de los residuos asociados con la respuesta de cada polo del sistema. En el caso particular de un sistema de lazo cerrado, la ubicación de los ceros dependerá de dónde se inyecta la señal de entrada y de dónde se mide la salida. Mientras que el denominador de la función de transferencia de lazo cerrado es invariante a la elección de los puntos de entrada y salida (para cualquier función de transferencia que pueda plantearse en un lazo cerrado los polos siempre son las raíces de la ecuación característica  $(1 + G(s)H(s) = 0)$ ), los ceros dependerán de la elección de los puntos de entrada y salida. Analicemos el siguiente sistema

$$G(s) = \frac{2}{c} \frac{(s+c)}{(s+1)(s+2)} \quad (2.38)$$

Nos interesa analizar la forma de la respuesta temporal, por ejemplo al escalón, para  $-\infty < c < \infty$ . Si  $c$  es muy grande, de forma que podemos despreciar  $s$  frente a  $c$  en la región de interés, la función de transferencia y la respuesta al escalón serán similares a las del sistema sin ceros

finitos

$$G(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)} \quad (2.39)$$

$$y(t) = 1 - 2e^{-t} + e^{-2t} \quad (2.40)$$

Es inmediato ver que este sistema tiene dos ceros en infinito (cuando  $s \rightarrow \infty$  la función de transferencia vale 0). En el caso general la respuesta al escalón en el dominio  $s$  puede escribirse como

$$Y(s) = \frac{2}{c} \frac{(s+c)}{s(s+1)(s+2)} = \frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{(s+1)} + \frac{R_3}{(s+2)} \quad (2.41)$$

donde los residuos  $R_i$  vienen dados por

$$R_1 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2}{c} \frac{(s+c)}{(s+1)(s+2)} = 1 \quad (2.42)$$

$$R_2 = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{2}{c} \frac{(s+c)}{s(s+2)} = -2 \frac{(c-1)}{c} \quad (2.43)$$

$$R_3 = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{2}{c} \frac{(s+c)}{s(s+1)} = \frac{(c-2)}{c} \quad (2.44)$$

de forma tal que la respuesta temporal será

$$y(t) = 1 - 2 \frac{(c-1)}{c} e^{-t} + \frac{(c-2)}{c} e^{-2t} \quad (2.45)$$

### 2.4.1. Efecto de ceros lentos. Sobrepicos y subpicos en la respuesta al escalón

Hay dos casos que son de particular interés.

- $c$  pequeño y positivo. En este caso tenemos un cero de baja frecuencia en el semiplano izquierdo del plano  $s$  (cero de *mínima fase*). Entonces los coeficientes resultan:

$$-2 \frac{(c-1)}{c} \cong \frac{+2}{c} > 0 \quad (2.46)$$

$$\frac{(c-2)}{c} \cong \frac{-2}{c} < 0 \quad (2.47)$$

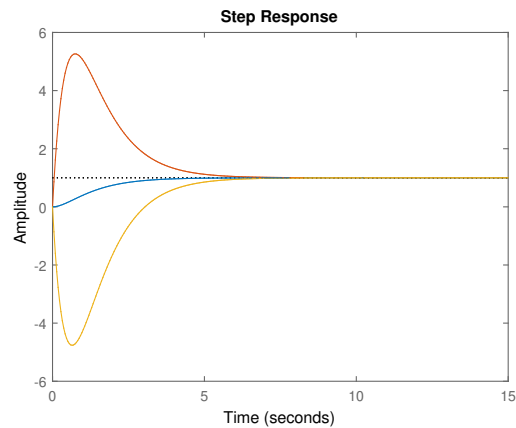
Los residuos tienen signo opuestos a los del sistema sin ceros finitos, pero sus magnitudes son tanto mayores cuanto mas pequeño sea  $c$ . Por esa razón tendremos un sobrepico (overshoot) en la respuesta al escalón.

- $c$  pequeño y negativo. En este caso tenemos un cero de baja frecuencia en el semiplano derecho del plano  $s$  (cero de *no mínima fase*). Los nuevos coeficientes serán:

$$-2 \frac{(c-1)}{c} \cong \frac{+2}{c} < 0 \quad (2.48)$$

$$\frac{(c-2)}{c} \cong \frac{-2}{c} > 0 \quad (2.49)$$





**Figura 2.9:** Respuesta al escalón. Trazo superior: cero de mínima fase en baja frecuencia. Media: sistema sin ceros finitos. Trazo inferior: sistema de no mínima fase. La ubicación del cero es  $c = 0.1r/s$ .

Los residuos tienen igual signo que los del sistema sin ceros finitos, con magnitudes mucho mayores en función de  $c$ . Por esa razón tendremos un subpico (undershoot) en la respuesta al escalón.

En la figura 2.9 se aprecian las tres respuestas. Es interesante notar el efecto de “respuesta inversa” en el caso del sistema de no mínima fase. La curva de respuesta temporal comienza con el signo contrario al del valor final. Si la curva se correspondiera, por ejemplo, a la evolución del PBI de un país con la implementación de un nuevo programa económico, esto indicaría que la situación económica empeoraría antes de empezar a mejorar. Si el ministro de economía no tiene un buen soporte político para afrontar este período, sus días están contados, aunque el efecto final de su plan fuera correcto. Los ceros de no mínima fase son muy frecuentes en los sistemas de control, Suelen aparecer cuando se aproxima el comportamiento de un sistema con retardo, por ejemplo debido al transporte de masa. Recordando el par transformado

$$\mathcal{L}\{f(t - \tau)\} = e^{-s\tau}F(s) \quad (2.50)$$

vemos que un sistema con un retardo puro puede modelarse mediante la expresión

$$G_1(s) = e^{-s\tau}G(s) \quad (2.51)$$

donde  $G(s)$  modela al sistema antes del retardo. Si desarrollamos el término  $e^{-s\tau}$  mediante la serie de Taylor

$$e^{-s\tau} = 1 - s\tau + s^2\tau^2 - \dots \quad (2.52)$$

y aproximamos el comportamiento a partir de los dos primeros términos de la serie resulta

$$G_1(s) \cong (1 - s\tau)G(s) \quad (2.53)$$

donde aparece el cero de no mínima fase. Muchas veces los retardos se modelan a partir de configuraciones “pasa todo” que tienen ceros en posición espejo con polos en el semiplano derecho. Nuevamente aquí aparecen ceros de no mínima fase. La razón del término “no mínima fase” quedará claro cuando hagamos el análisis en frecuencia de la función de transferencia.

El efecto de subpico en la respuesta temporal debido al cero de no mínima fase que aparece en este ejemplo puede generalizarse. Para demostrarlo, escribamos la función de transferencia como

$$G(s) = (s - z_0) \frac{N(s)}{D(s)} \quad (2.54)$$

con  $z_0 > 0$  y  $N(s), D(s)$  sin raíces en el semiplano derecho. En otras palabras,  $z_0$  es la única singularidad con parte real positiva. La respuesta al escalón es, como siempre

$$Y(s) = \frac{1}{s} G(s) = (s - z_0) \frac{N(s)}{sD(s)} \quad (2.55)$$

$$= \mathcal{L}\{y(t)\} = \int_0^{\infty} y(t) e^{-st} dt \quad (2.56)$$

Esta última expresión es válida para cualquier valor de  $s$ , en particular  $s = z_0$ . Como  $z_0$  es un cero de  $G(s)$  podemos escribir

$$Y(z_0) = 0 = \int_0^{\infty} y(t) e^{-z_0 t} dt \quad (2.57)$$

Como  $e^{-z_0 t} > 0 \forall t$  para que la integral se anule debe  $y(t)$  necesariamente cambiar de signo. Es decir que debe existir un subpico en la respuesta.

Otra forma de ver este fenómeno es observar que, para que exista subpico inicial en la respuesta, la derivada en el origen de  $y(t)$  debe ser de distinto signo que el valor final  $y(\infty)$ . Recordando los teoremas de valor final e inicial:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (2.58)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \quad (2.59)$$

podemos hacer algunas consideraciones iniciales en relación con la respuesta al escalón:

- El valor final será  $y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)/s = G(0)$
- La derivada temporal  $r$ -ésima de la respuesta es  $\frac{d^r y(t)}{dt^r} = \mathcal{L}^{-1}(s^r Y(s))$ . Si la entrada es un escalón, aplicando el teorema del valor inicial, la derivada  $r$ -ésima en  $t = 0$  es  $\lim_{s \rightarrow \infty} sY(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} G(s)$ . Nótese que todas las derivadas hasta el orden establecido por el grado relativo del sistema se anulan. En efecto,  $\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = K \frac{1}{s^{m-n}}$  para un sistema con  $m$  polos y  $n$  ceros. Podemos decir, entonces, que  $y^{(r)}(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^r G(s)$

- La condición de subpico puede escribirse como  $y^n(0)y(\infty) < 0$ . Por lo tanto debe cumplirse que  $G(0) \lim_{s \rightarrow \infty} s^r G(s) < 0$ , donde  $r$  es el grado relativo del sistema. Para que esto ocurra  $G(s)$  debe tener un número *impar* de ceros de no mínima fase.

## 2.5. Problemas

- Hallar la antitransformada de Laplace de la siguiente función:

$$F(s) = \frac{s}{s+1}$$

- Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = 0$$

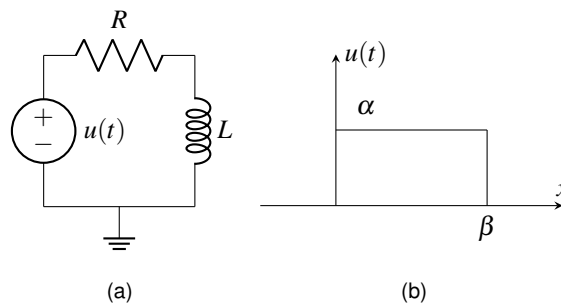
considerando  $x(0) = a = \text{cte}$  y  $\dot{x}(0) = b = \text{cte}$ .

- Aplicando el teorema del valor final, encontrar el valor final de  $f(t)$ , considerando que su transformada de Laplace está dada por:

$$F(s) = \frac{10}{s(s+1)}$$

Verificar tomando la transformada inversa de Laplace de  $F(s)$  y haciendo  $t \rightarrow \infty$ .

- Considere el circuito  $RL$  de la figura 2.10:



**Figura 2.10:** Problema 5. (a) Circuito eléctrico. (b) Excitación

Encontrar la corriente del circuito cuando la señal de entrada  $u(t)$  tiene la forma mostrada en la Figura 2.10(b).

- Usando la integral de convolución encontrar la respuesta  $y(t)$  del sistema lineal e invariante en el tiempo cuya respuesta al impulso es  $h(t) = e^{-\alpha t}$  si la señal de entrada es  $x(t) = e^{-\beta t}$ , tanto para el caso en que  $\alpha = \beta$  como en el caso en que  $\alpha \neq \beta$ .

6. Considere el sistema caracterizado por la ecuación diferencial:

$$y(t) = t^2 \frac{\partial^2 x(t)}{\partial t^2} + t \frac{\partial x(t)}{\partial t}$$

¿Es un sistema lineal ? ¿Es invariante en el tiempo?

7. Hallar la transformada de Fourier de la siguiente señal:

$$x(t) \begin{cases} 1 + \cos \pi t & |t| \leq 1 \\ 0 & |t| > 1 \end{cases}$$

8. Un termómetro necesita un minuto para indicar 98 % de la respuesta a una entrada escalón. Suponiendo al termómetro un sistema de primer orden, hallar la constante de tiempo.

9. Obtener la respuesta al impulso unitario y la respuesta al escalón unitario de un sistema cuya función de transferencia es:

$$G(s) = \frac{2(s+2)}{(s+1)(s+3)}$$

10. Obtener la respuesta al escalón unitario para:

$$G(s) = \frac{(s-2)}{(s+3)(s+1)}$$

11. Dada la función de transferencia

$$G(s) = \frac{(s-1)}{(s+1)}.$$

Hallar la respuesta al escalón unitario y discutir la característica en frecuencia de este filtro.

## Referencias

- [1] K. Ogata, "Modern Control Engineering", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA, 3rd edition, 1997.
- [2] B. C. Kuo, "Automatic Control Systems", Prentice-Hall International, London, England, 9th edition, 1962.
- [3] C. H. Houpis, S. N. Sheldon, J. J. D'Azzo, "Linear Control System Analysis and Design". Fifth Edition, Revised and Expanded (Automation and Control Engineering). Taylor and Francis, 2003.
- [4] C.H.Houpis, S.N.Sheldon, "Linear Control System Analysis and Design with MATLAB , Sixth Edition (Automation and Control Engineering, Book 53)". CRC Press, 2014.

- [5] G. F. Franklin, J. D. Powell, A. Emami-Naeini. "Feedback Control of Dynamic Systems". Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, fourth edition, 2002.
- [6] N. S. Nise, "Control System Engineering", John Wiley and Sons Inc., New York, 2011.
- [7] M. Gopal, I.J. Nagrath, " A Textbook of Control Systems Engineering", New Age International (P) Ltd., 2010.
- [8] G. Goodwin, S. Grabe.,M. Salgado, "Control System Design", Pearson Education, Upper Saddle River, NJ, eleventh/international edition, 2015
- [9] R. C. Dorf, R. H. Bishop, "Modern Control Systems". Pearson 2008.
- [10] J. Dorsey, "Continuous and Discrete Control Systems: Modeling, Identification, Design, and Implementation". McGraw-Hill Series in Electrical and Computer Engineering. Prentice-Hall, New York, NY, 2002.
- [11] J. B. Hoagg, D. S. Bernstein, "Nonminimum-Phase Zeros: Much to do about nothing". IEEE Control Systems Magazine, June 2007

# CAPÍTULO 3

## Modelado de sistemas lineales

### Introducción

En este capítulo se hará una introducción al modelado lineal de sistemas físicos. Se analizarán sistemas eléctricos, mecánicos de traslación y rotación, hidráulicos y térmicos. Además se analizarán algunos transductores utilizados frecuentemente. Considerando que el texto está orientado a estudiantes de ingeniería electrónica, se hará especial énfasis en el planteamiento de las ecuaciones diferenciales de un sistema a partir de analogías eléctricas. Sólo se discutirán sistemas lineales e invariantes en el tiempo, de forma tal que la herramienta básica para el cálculo de la respuesta será la transformada de Laplace.

### 3.1. Sistemas Eléctricos

Los elementos fundamentales en los sistemas eléctricos lineales son la resistencia  $R$ , la capacitancia  $C$  y la inductancia  $L$ . Las expresiones generales, ampliamente conocidas, para representar las relaciones entre corriente y tensión en estos componentes son

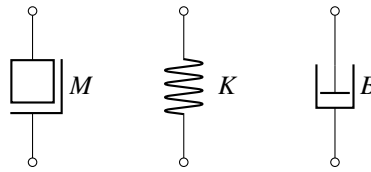
$$v_R(t) = Ri(t) \quad (3.1)$$

$$v_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (3.2)$$

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt + v_C(0) \quad (3.3)$$

Las reglas básicas para plantear las ecuaciones de un sistema eléctrico son las leyes de Kirchoff para mallas y nodos:

- La suma de las tensiones en una malla es igual cero.



**Figura 3.1:** Elementos básicos de un sistema mecánico de traslación

- La suma de las corrientes en un nodo es igual a cero.

## 3.2. Sistemas Mecánicos de Traslación

Los sistemas mecánicos de traslación obedecen a la ley de Newton: en un sistema en equilibrio, la sumatoria de fuerzas (aplicadas y resistentes) debe ser nula. Las tres cualidades que caracterizan a los elementos de un sistema de traslación mecánica son la masa, la elastancia y el amortiguamiento. Los elementos básicos que se derivan de estas propiedades constituyen los componentes del circuito mecánico a partir del cual pueden plantearse las ecuaciones dinámicas. Los mismos se aprecian en la figura 3.1.

Una fuerza  $f(t)$  aplicada sobre una masa le produce una aceleración. La fuerza resistente  $f_M$  es igual al producto masa por aceleración y se opone a la fuerza aplicada:

$$f_M = ma = m \frac{dv_a(t)}{dt} = m \frac{d^2 x_a}{dt^2} \quad (3.4)$$

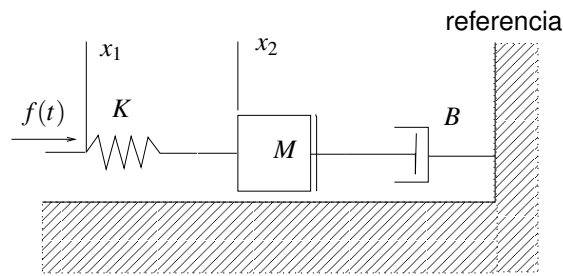
La elastancia, o coeficiente de firmeza elástica,  $K$ , representa la fuerza recuperadora de un resorte: si está estirado, tiende a contraerse y si está comprimido, tiende a estirarse. Idealmente, la fuerza recuperadora es constante para toda la zona de funcionamiento lineal del resorte y está dada por el producto de la firmeza  $K$  por la deformación del resorte (Ley de Hooke):

$$f_K = -K(x_c - x_d) \quad (3.5)$$

donde el signo negativo implica que la fuerza se opone a la deformación.

El amortiguamiento o fricción viscosa  $B$  caracteriza al elemento que absorbe energía. Esta fuerza amortiguadora es proporcional a la diferencia de velocidad entre dos cuerpos en rozamiento, y se supone que es lineal:

$$f_B = B(v_e - v_f) \quad (3.6)$$



**Figura 3.2:** Sistema mecánico simple

Existen otros tipos de fricción, como la *fricción seca*, pero por tratarse de un efecto no lineal no será incluido en esta discusión. Antes de plantear las ecuaciones diferenciales de un sistema mecánico de traslación puede dibujarse el dispositivo mecánico y su *circuito equivalente*. Para ello (analogía fuerza-corriente) se conectan los terminales de aquellos elementos que tengan el mismo desplazamiento; se plantea a continuación la ecuación relativa a cada nudo o posición igualando la suma de todas las fuerzas de una posición a cero. Las ecuaciones son similares a las ecuaciones de los nudos de un circuito eléctrico, con las fuerzas como corrientes, las velocidades como voltajes y los elementos mecánicos con sus operadores análogos como admitancias.

### 3.2.1. Ejemplo 1

Analicemos el sistema mecánico de la figura 3.2, al que supondremos inicialmente en reposo. Los desplazamientos presentes son  $x_1$  y  $x_2$ , referidos al cero de desplazamiento, indicado en el gráfico como una “pared”. Por lo tanto tenemos 3 nudos. La fuerza del resorte depende de la diferencia entre  $x_1$  y  $x_2$ , mientras que las fuerzas correspondientes a la masa y el amortiguador dependen de las derivadas de  $x_2$  solamente. La red mecánica correspondiente se aprecia en la figura 3.3. Podemos plantear entonces el siguiente sistema de ecuaciones:

$$f(t) = K(x_1 - x_2) \quad (3.7)$$

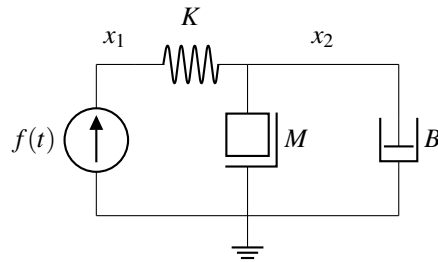
$$K(x_1 - x_2) = M \frac{d^2 x_2}{dt^2} + B \frac{dx_2}{dt} \quad (3.8)$$

Estas dos ecuaciones permiten hallar todos los desplazamientos y velocidades relativas.

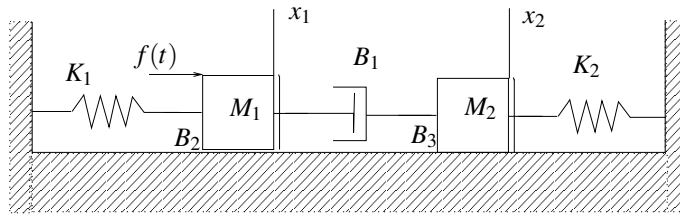
### 3.2.2. Ejemplo 2

En la figura 3.4 se aprecia un sistema con elementos múltiples. Dos masas  $M_1$  y  $M_2$  se unen a través de un amortiguador, y además se relacionan con las paredes (desplazamiento de referencia) mediante dos resortes. Las masas tienen rozamientos contra la pared con coeficientes  $B_1$  y





**Figura 3.3:** Circuito mecánico



**Figura 3.4:** Sistema mecánico con elementos múltiples

$B_2$ . Nuevamente tenemos dos desplazamientos  $x_1$  y  $x_2$ . El circuito mecánico correspondiente se ilustra en la figura 3.5, y las ecuaciones de nodos (sumatoria de fuerzas) son las siguientes:

$$M_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + B_1 \frac{dx_1}{dt} + Kx_1 + B_3 \frac{d(x_1 - x_2)}{dt} = f(t) \quad (3.9)$$

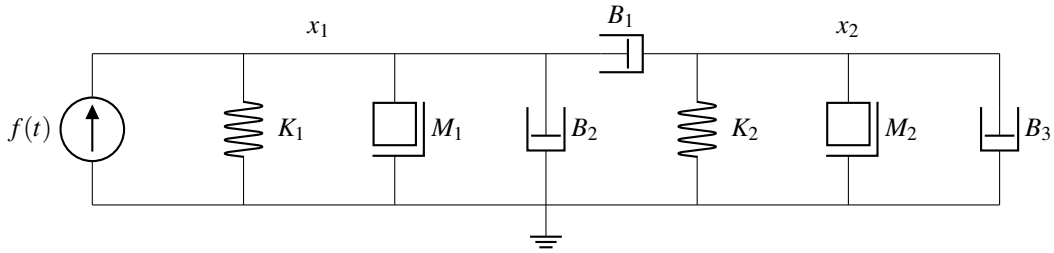
$$-B_3 \frac{d(x_1 - x_2)}{dt} + M_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + B_2 \frac{dx_2}{dt} + K_2 x_2 = 0 \quad (3.10)$$

Las mismas ecuaciones pueden escribirse en términos de las velocidades  $v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ :

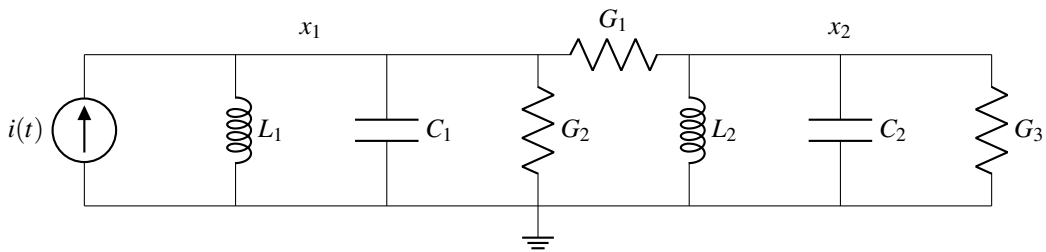
$$M_1 \frac{dv_1}{dt} + B_1 v_1(t) + K \int_0^t v_1(t) dt + B_3 (v_1(t) - v_2(t)) = f(t) \quad (3.11)$$

$$-B_3 (v_1(t) - v_2(t)) + M_2 \frac{dv_2(t)}{dt} + B_2 v_2(t) + K_2 \int_0^t v_2(t) dt = 0 \quad (3.12)$$

De estos dos ejemplos surge claramente que la red mecánica se comporta exactamente igual que una red eléctrica, y puede resolverse utilizando las mismas reglas. Se dice que ambos circuitos son *análogos*, porque están regidos por las mismas ecuaciones. De acuerdo a la elección de las variables, pueden plantearse diferentes analogías. En el presente caso (analogía fuerza-corriente) podemos utilizar la siguiente tabla:



**Figura 3.5:** Circuito mecánico correspondiente al ejemplo 2



**Figura 3.6:** Circuito eléctrico análogo correspondiente al ejemplo 2

Elem. mecánico		Elem. eléctrico	
Símbolo	Cantidad	Símbolo	Cantidad
$f$	Fuerza	$i$	Corriente
$v = \frac{dx}{dt}$	Velocidad	$e$ ó $v$	Voltaje
$M$	Masa	$C$	Capacidad
$K$	Coef. de firmeza	$\frac{1}{L}$	inductancia <sup>-1</sup>
$B$	Coef. de amortiguamiento	$G = \frac{1}{R}$	Conductancia

En esta tabla la fuerza  $f$  y la corriente  $i$  son análogas y se clasifican como variables “circulantes”. Hay una similitud física, ya que un instrumento de medida debe conectarse en serie en el circuito en ambos casos; es decir, un amperímetro y un dinamómetro en cada caso. De la misma manera, la velocidad entre dos puntos de un elemento es análoga al voltaje entre dos puntos del circuito eléctrico. De nuevo aparece la semejanza física, ya que un instrumento para medir estas magnitudes debe montarse entre los dos puntos adecuados. Tanto un voltímetro como un tacómetro miden respecto a un punto de referencia. Los nudos en la red mecánica son análogos a los nudos del circuito eléctrico. De esta forma puede dibujarse la red eléctrica de la figura 3.6, que está regida por ecuaciones que tienen la misma forma que las del circuito mecánico:

$$C_1 \frac{dv_1(t)}{dt} + G_1 v_1(t) + \frac{1}{L_1} \int_0^t v_1(t) dt + G_3 (v_1(t) - v_2(t)) = i(t) \quad (3.13)$$

$$-G_3 (v_1(t) - v_2(t)) + C_2 \frac{dv_2(t)}{dt} + G_2 v_2(t) + \frac{1}{L_2} \int_0^t v_2(t) dt = 0 \quad (3.14)$$

Históricamente, estas analogías dieron lugar a la aparición de las llamadas “computadoras analógicas”, que permitían simular el comportamiento de un sistema en el laboratorio a partir de la construcción de su circuito eléctrico equivalente. La ventaja es evidente; es mucho más sencillo, por ejemplo, modificar un valor de capacitancia que alterar la masa de un sistema mecánico.

### 3.3. Sistemas mecánicos de rotación

Los sistemas de rotación son similares a los de traslación, salvo que las ecuaciones deben plantearse en función de pares, y los desplazamientos, velocidades y aceleraciones son angulares. El par motor es igual a la suma de los pares resistentes. Los tres elementos correspondientes son el momento de inercia, el resorte y el amortiguador. La ecuación del par aplicado a un momento de inercia  $J$ , en función del desplazamiento angular  $\theta$ , de la velocidad  $\omega$  o la aceleración  $\alpha$  viene dada por

$$T_J = J\alpha = J \frac{d\omega}{dt} = J \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (3.15)$$

El par producido al deformar un resorte viene dado por

$$T_K = K(\theta_e - \theta_d) \quad (3.16)$$

mientras que el par de un amortiguador es

$$T_B = B(\omega_e - \omega_f) = B\left(\frac{d\theta_e}{dt} - \frac{d\theta_f}{dt}\right) \quad (3.17)$$

El tratamiento matemático, el planteamiento del circuito mecánico y su resolución son enteramente similares a los sistemas de traslación.

#### 3.3.1. Ejemplo 3

El sistema de la figura 3.7 posee dos discos que tienen un amortiguamiento mutuo entre sí, rozamiento respecto de una superficie, y ejes flexibles. Evidentemente existen tres desplazamientos angulares (y por lo tanto, tres ecuaciones), correspondientes a los dos extremos del primer amortiguador, y los desplazamientos angulares de cada momento de inercia. El circuito mecánico de rotación resultante puede verse en la figura 3.8, de donde se plantean las correspondientes ecuaciones:

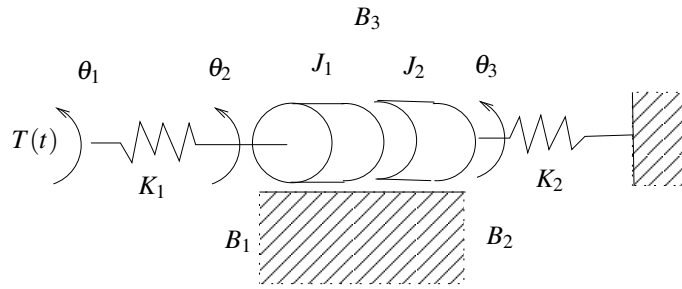


Figura 3.7: Sistema mecánico de rotación

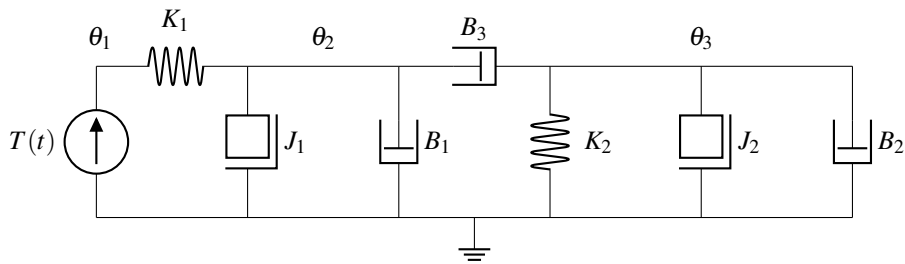


Figura 3.8: Circuito mecánico de rotación correspondiente al ejemplo 3

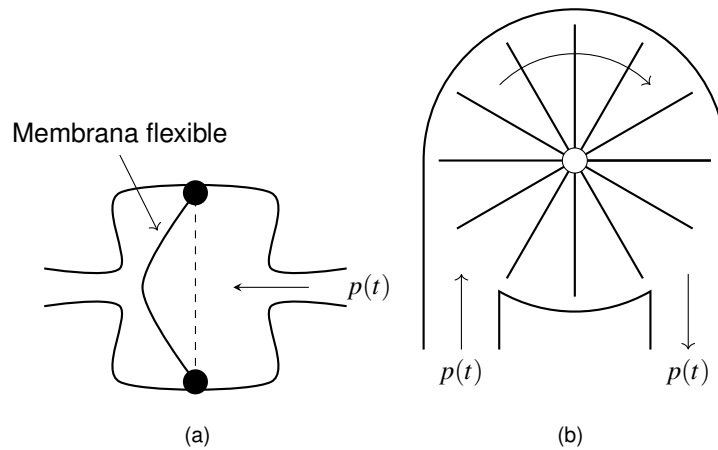
$$T(t) = K_1(\theta_1 - \theta_2) \tag{3.18}$$

$$0 = -K_1(\theta_1 - \theta_2) + B_1\dot{\omega}_2 + J_1\ddot{\alpha}_2 - B_3(\omega_2 - \omega_1) \tag{3.19}$$

$$0 = -B_3(\omega_2 - \omega_1) + J_2\ddot{\alpha}_3 + B_2\dot{\omega}_3 + K_2\theta_3 \tag{3.20}$$

### 3.4. Sistemas hidráulicos

La analogía entre sistemas hidráulicos y eléctricos es bastante intuitiva: los fluidos se mueven de la zona de alta presión a la de baja presión. En ese sentido, la diferencia de presión, o de alturas del pelo de agua entre recipientes, esto es, la diferencia de potencial gravitatorio, es equivalente a una diferencia de potencial eléctrico. En términos mas generales, un dispositivo que produzca presión hidráulica (una bomba, por ejemplo) será equivalente a una fuente de tensión. El flujo de líquido hace las veces de la corriente eléctrica, y la resistencia a la circulación de líquido (en una cañería o tubo, por ejemplo) puede asimilarse a una resistencia. En un sistema hidráulico la energía potencial se almacena mediante un reservorio (un tanque, por ejemplo) a una determinada altura. De igual manera, el comportamiento equivalente de un capacitor (como elemento concentrado) puede obtenerse con un diafragma flexible en el interior de un tubo, como puede apreciarse en la figura 3.9(a). El efecto inductivo (filtrado de las variaciones bruscas



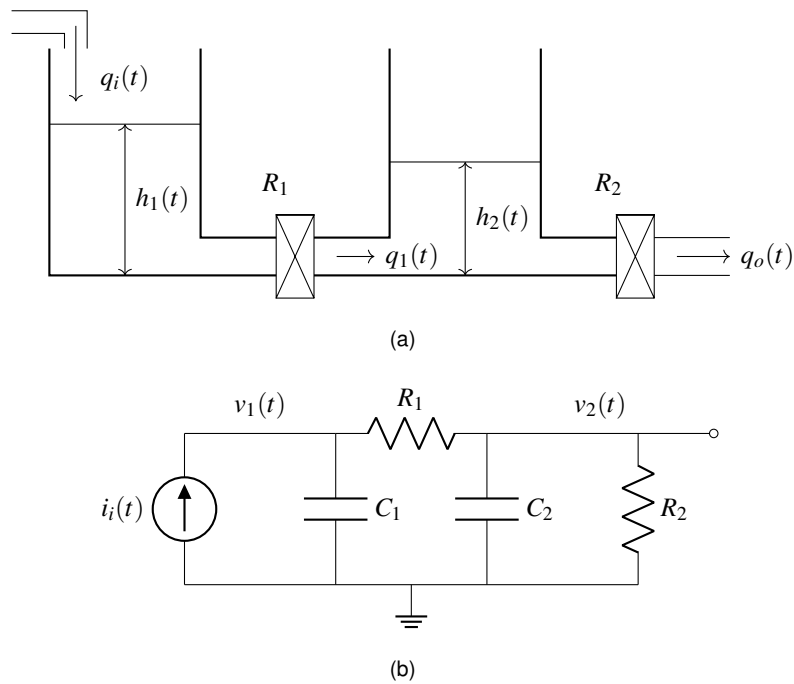
**Figura 3.9:** Elementos hidráulicos: (a) Capacidad. (b) Inductancia.

de corriente) puede asimilarse a una cañería muy larga, o a una rueda de paletas relativamente pesadas ubicadas en el camino del fluido, figura 3.9(b). La siguiente tabla refleja esta situación.

Elem. hidráulico		Elem. eléctrico	
Símbolo	Cantidad	Símbolo	Cantidad
$q$	caudal	$i$	Corriente
$p$	Presión	$e$ ó $v$	Voltaje
$V$	Volumen de fluido	$q$	Carga
$R$	Resistencia	$R$	Resistencia
$C_h$	Capacidad $C_h = V/p$	$C$	Capacidad
$L_h$	Inductancia $L_h = p/(\frac{\partial q}{\partial t})$	$L$	Inductancia

### 3.4.1. Ejemplo 4

El sistema del Capítulo 1 es un típico ejemplo de un sistema hidráulico. Siguiendo con esa idea, analicemos el sistema de la figura 3.10(a). Tenemos dos tanques de áreas  $A$  y  $B$  respectivamente, conectados entre sí mediante una válvula, y a su vez un drenaje a la salida con otra válvula de similares características. Se trata claramente de un sistema de segundo orden, ya que hay dos elementos capaces de almacenar energía. La presencia del drenaje del segundo tanque evidencia la ausencia de integradores puros (si desaparece el caudal de entrada, ambos tanques se vacían totalmente). En una primera aproximación, supongamos que los únicos elementos que ofrecen resistencia al fluido son las válvulas, y que la misma puede modelarse como una resistencia lineal  $R$ , despreciando efectos de orden superior. Tenemos entonces



**Figura 3.10:** Analogía hidráulica. (a) Sistema físico. (b) Circuito eléctrico equivalente.

$$q(t) = \frac{\partial v(t)}{\partial t} = A \frac{\partial h(t)}{\partial t} \quad (3.21)$$

En el primer tanque tenemos

$$(q_i(t) - q_1(t)) = A \frac{\partial h_1(t)}{\partial t} \quad (3.22)$$

y en el segundo

$$(q_1(t) - q_o(t)) = B \frac{\partial h_2(t)}{\partial t} \quad (3.23)$$

En las válvulas tenemos

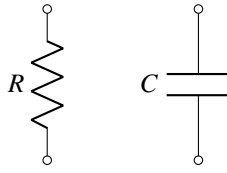
$$q_1(t) = \frac{h_1(t) - h_2(t)}{R_1} \quad (3.24)$$

$$q_2(t) = \frac{h_2(t)}{R_2} \quad (3.25)$$

Combinando estas expresiones llegamos a las ecuaciones diferenciales que describen al sistema:

$$\frac{\partial h_1(t)}{\partial t} = -\frac{h_1(t)}{R_1 A} + \frac{h_2(t)}{R_2 A} + \frac{q_i(t)}{A} \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial h_2(t)}{\partial t} = \frac{h_1(t)}{R_1 B} - 2 \frac{h_2(t)}{R_2 B} \quad (3.27)$$



**Figura 3.11:** Elementos de una red térmica

Comparemos este sistema con el equivalente eléctrico de la figura 3.10(b). La suma de corrientes en los nodos  $V_1$  y  $V_2$  es

$$i_i(t) = i_{c_1}(t) + i_{R_1}(t) \quad (3.28)$$

$$i_{R_1}(t) = i_{c_2}(t) + i_{R_2}(t) \quad (3.29)$$

y sabiendo que  $i_c(t) = C \frac{\partial v_c(t)}{\partial t}$  podemos escribir

$$\frac{\partial v_1(t)}{\partial t} = -\frac{v_1(t)}{C_1 R_1} + \frac{v_2(t)}{C_1 R_2} + \frac{i_i(t)}{C_1} \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial v_2(t)}{\partial t} = \frac{v_1(t)}{C_2 R_1} - 2\frac{v_2(t)}{C_2 R_2} \quad (3.31)$$

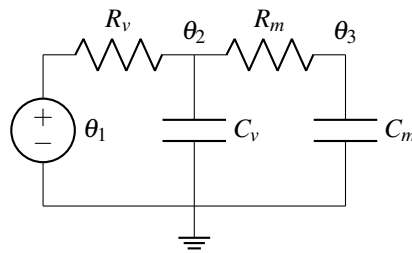
Comparando las expresiones 3.27 y 3.31 vemos que matemáticamente son idénticas. En este caso las tensiones de nodo representan las alturas, las capacidades las áreas de los tanques y las resistencias las equivalentes de las válvulas.

### 3.5. Sistemas térmicos

Para plantear las ecuaciones dinámicas de un sistema térmico en general se supone que las temperaturas de los cuerpos involucrados son uniformes. Igualmente, si se consideran regiones de aire o líquido puede tomarse su temperatura como uniforme si el fluido está perfectamente mezclado. La condición de equilibrio implica que el calor añadido a un sistema es igual a la suma del calor almacenado y el disipado; esto puede expresarse en función del flujo calórico. Los elementos constitutivos de un sistema térmico se aprecian en la fig 3.11.

El calor adicional almacenado en un cuerpo, cuya temperatura ha sido aumentada de  $\theta_1$  a  $\theta_2$  viene dada por

$$h = C(\theta_2 - \theta_1) \quad (3.32)$$



**Figura 3.12:** Circuito equivalente del termómetro de mercurio

donde  $h$  es la energía térmica y  $C$  es la capacidad térmica. Esta ecuación puede ponerse en función de la rapidez del flujo de calor de la siguiente forma:

$$q = C \frac{d(\theta_2 - \theta_1)}{dt} \quad (3.33)$$

La capacidad térmica puede expresarse como  $C = MS$ , donde  $M$  es la masa y  $S$  es el calor específico, una propiedad del material.  $C$  determina la cantidad de calor almacenado en un cuerpo; es análogo a la capacitancia eléctrica de un capacitor, que determina la carga almacenada.

La velocidad de flujo calorífico a través de un cuerpo en función de un gradiente térmico  $\theta_3 - \theta_4$  es:

$$q = \frac{\theta_3 - \theta_4}{R} \quad (3.34)$$

La resistencia térmica  $R$  determina la rapidez del flujo calorífico a través del cuerpo; es análoga a la resistencia de un elemento de un circuito eléctrico que determina el flujo de corriente. En un circuito térmico la temperatura es análoga al potencial eléctrico.

### 3.5.1. Ejemplo 5

Analicemos el caso de un termómetro de mercurio. El mismo es un recipiente con una pared delgada de vidrio, dentro del cual se encuentra el mercurio. En condiciones de reposo, la temperatura del mercurio es igual a la temperatura externa  $\theta_0$ , por lo cual no existe flujo de calor. Si sumergimos el termómetro dentro de un fluido a una temperatura  $\theta_1$ , existirá un flujo de calor, y un almacenamiento de calor tanto en la masa de vidrio y de mercurio. Existen por lo tanto 3 temperaturas:  $\theta_1$  (temperatura externa),  $\theta_2$  (temperatura del vidrio) y  $\theta_3$  (temperatura del mercurio), todas ellas referidas a la temperatura inicial de reposo,  $\theta_0$ . El circuito equivalente puede apreciarse en la figura 3.12, y las ecuaciones serán:

$$\frac{(\theta_1 - \theta_2)}{R_v} = C_s \frac{d\theta_2}{dt} + \frac{(\theta_2 - \theta_3)}{R_m} \quad (3.35)$$

$$\frac{(\theta_2 - \theta_3)}{R_m} = C_m \frac{d\theta_3}{dt} \quad (3.36)$$



### 3.6. Servomotor de Continua

Un conductor por el que circula una corriente, inmerso en un campo magnético, experimenta una fuerza proporcional a la magnitud del flujo, a la corriente, a la longitud del conductor y al seno del ángulo entre el conductor y la dirección del flujo. Cuando el conductor está a una distancia fija de un eje, alrededor del cual puede girar, se produce un par proporcional al producto de la fuerza y el radio. En un motor, el par resultante es la suma de los pares producidos en cada uno de sus conductores. Para un motor dado, las únicas cantidades ajustables son el flujo y la corriente de armadura. Por lo tanto el par puede expresarse como

$$T(t) = K_3 \phi i_m \quad (3.37)$$

Hay dos modos de operar un servomotor: uno de ellos con una corriente constante de excitación de campo ( $\phi = cte$ ) y voltaje variable aplicado en armadura (control por armadura) y otro con una corriente de armadura constante y un voltaje ajustable aplicado en los arrollamientos excitadores de campo (control por campo). Analicemos ambos modos separadamente.

#### 3.6.1. Control por armadura

En este caso la excitación de campo es constante, ya sea porque la corriente de campo es constante o porque el campo es producido por un imán permanente. En ese caso el par es únicamente proporcional a la corriente de armadura y viene dado por

$$T(t) = K_2 i_m \quad (3.38)$$

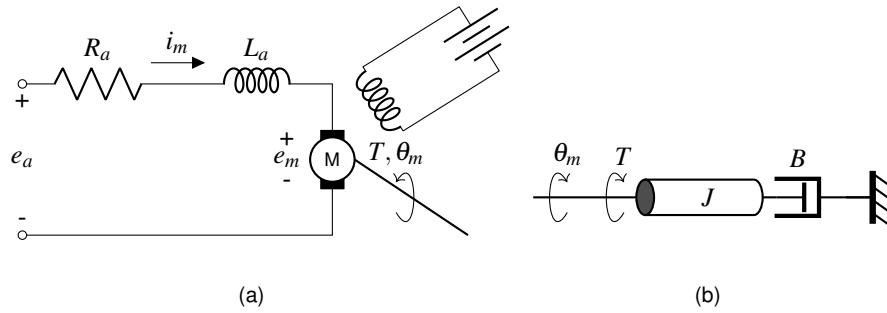
Cuando la armadura del motor está girando hay una fuerza contra electromotriz proporcional al producto del flujo y la velocidad; como en este caso el flujo es constante el voltaje inducido (reacción de inducido)  $e_m$  es directamente proporcional a la velocidad  $\omega_m$

$$e_m = K_1 \phi \omega_m = K_b \omega_m = K_b \frac{d\theta_m}{dt} \quad (3.39)$$

donde  $\theta_m$  es el ángulo de rotación. El control de velocidad del motor se obtiene ajustando el voltaje aplicado a la armadura. Su polaridad determina el sentido de la corriente y, por lo tanto, el sentido del par generado; éste, a su vez, determina el sentido de rotación del motor. En la figura 3.13(a) se ilustra el circuito esquemático del motor de continua gobernado por armadura. La ecuación del circuito de armadura es

$$e_a = L_m \frac{di_m}{dt} + R_m i_m + e_m \quad (3.40)$$

La corriente que circula por armadura produce el par. El torque requerido depende de la carga conectada al eje. Supongamos que la misma consta de un momento de inercia y un rozamiento



**Figura 3.13:** (a) Motor de continua controlado por armadura. (b) Carga aplicada al eje

(figura 3.13(b)). En ese caso la ecuación del par puede escribirse como

$$J \frac{d\omega_m}{dt} + B\omega_m = T(t) = K_2 i_m \quad (3.41)$$

La corriente  $i_m$  requerida (y por lo tanto,  $e_a$ ) puede obtenerse igualando las correspondientes ecuaciones:

$$i_m = \frac{J}{K_2} \frac{d\omega_m}{dt} + \frac{B}{K_2} \omega_m \quad (3.42)$$

$$\frac{di_m}{dt} = \frac{J}{K_2} \frac{d^2\omega_m}{dt^2} + \frac{B}{K_2} \frac{d\omega_m}{dt} \quad (3.43)$$

$$e_a = L_m \left( \frac{J}{K_2} \frac{d^2\omega_m}{dt^2} + \frac{B}{K_2} \frac{d\omega_m}{dt} \right) + R_m \left( \frac{J}{K_2} \frac{d\omega_m}{dt} + \frac{B}{K_2} \omega_m \right) + K_b \omega_m \quad (3.44)$$

$$= \frac{JL_m}{K_2} \frac{d^2\omega_m}{dt^2} + \frac{BL_m}{K_2} \frac{d\omega_m}{dt} + \frac{JR_m}{K_2} \frac{d\omega_m}{dt} + \frac{BR_m}{K_2} \omega_m + K_b \omega_m \quad (3.45)$$

$$= \frac{JL_m}{K_2} \frac{d^2\omega_m}{dt^2} + \frac{BL_m + JR_m}{K_2} \frac{d\omega_m}{dt} + \left( \frac{BR_m}{K_2} + K_b \right) \omega_m \quad (3.46)$$

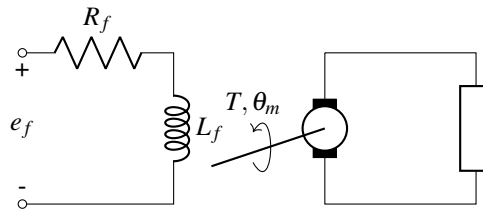
Esta expresión relaciona la tensión de control  $e_a$  con la velocidad del motor  $\omega_m$ . La ecuación puede ponerse en función de la posición simplemente recordando que  $\omega_m = \frac{d\theta_m}{dt}$ . A menudo la inductancia de armadura puede despreciarse ( $L_m = 0$ ), con lo que el término correspondiente a la derivada segunda desaparece. Esto es equivalente a despreciar el polo eléctrico del motor (esto es, el polo más rápido), suponiendo que la dinámica mecánica es la dominante.

### 3.6.2. Control por campo

Si la corriente  $i_m$  es constante, el par  $T(t)$  es proporcional solamente al flujo  $\phi$ . En la región no saturada, el flujo es directamente proporcional a la corriente de campo, con lo que la ecuación de par resulta

$$T(t) = K_3 \phi i_m = K_3 K_2 i_m i_f = K_f i_f \quad (3.47)$$

El control de velocidad del motor se obtiene ajustando el voltaje aplicado al campo; su magnitud y polaridad determinan la magnitud del par y el sentido de giro. En la figura 3.14 se ilustra esta



**Figura 3.14:** Motor de continua controlado por campo

configuración. Si  $L_f$  y  $R_f$  representan la inductancia y resistencia del bobinado de campo, la ecuación del circuito de excitación es

$$L_f \frac{di_f}{dt} + R_f i_f = e_f \quad (3.48)$$

Por lo tanto

$$J \frac{d\omega_m}{dt} + B\omega_m = K_f i_f \quad (3.49)$$

$$i_f = \frac{J}{K_f} \frac{d\omega_m}{dt} + \frac{B}{K_f} \omega_m \quad (3.50)$$

$$\frac{di_f}{dt} = \frac{J}{K_f} \frac{d^2\omega_m}{dt^2} + \frac{B}{K_f} \frac{d\omega_m}{dt} \quad (3.51)$$

$$e_f = L_f \left( \frac{J}{K_f} \frac{d^2\omega_m}{dt^2} + \frac{B}{K_f} \frac{d\omega_m}{dt} \right) + R_f \left( \frac{J}{K_f} \frac{d\omega_m}{dt} + \frac{B}{K_f} \omega_m \right) \quad (3.52)$$

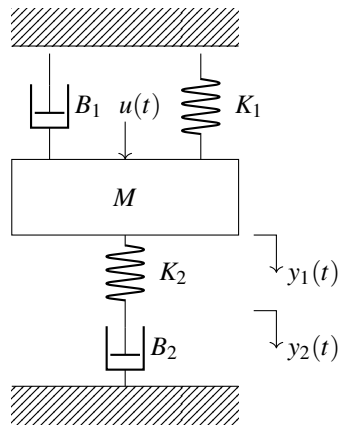
$$e_f = \frac{JL_f}{K_f} \frac{d^2\omega_m}{dt^2} + \frac{BL_f + JR_f}{K_f} \frac{d\omega_m}{dt} + \frac{BR_f}{K_f} \omega_m \quad (3.53)$$

Una ventaja del control de campo por sobre el control por armadura es que la potencia requerida por el arrollamiento de campo es en general mucho menor que la exigida por la armadura. Esto puede ser importante desde el punto de vista práctico.

Aunque se ha supuesto que la corriente de armadura es constante, en la práctica esto no se consigue fácilmente, ya que la fuerza contra electromotriz depende de la velocidad (salvo que pueda suponerse  $e_m \ll e_a$ ).

### 3.7. Problemas

1. Para el sistema traslacional de la figura 3.15 plantear las ecuaciones diferenciales que lo describen, y obtener la función de transferencia considerando como entradas y salidas las funciones  $u(t)$  e  $y_1(t)$ . Obtener, además, el modelo eléctrico equivalente.
2. El objeto del mezclador de la figura 3.16 es uniformizar la temperatura del fluido en el tanque. Si definimos



**Figura 3.15:** problema 1

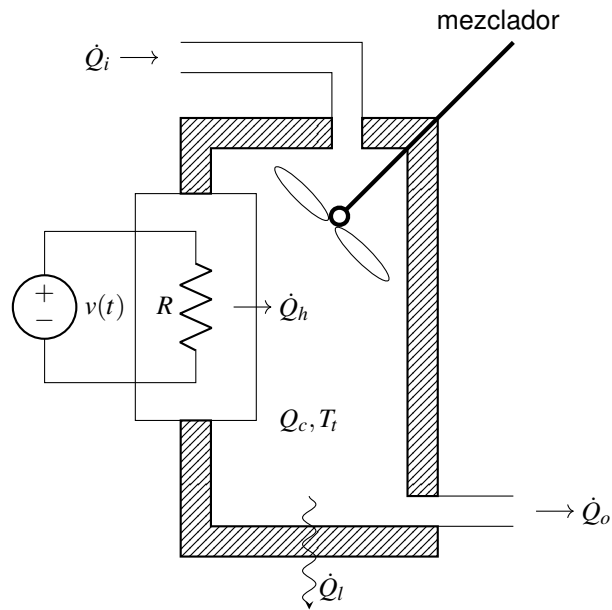
- $\dot{Q}_i$ , flujo de calor entrante (calorías por segundo)
- $\dot{Q}_h$ , flujo de calor producido por la resistencia calefactora
- $\dot{Q}_c$ , calor almacenado por unidad de tiempo
- $\dot{Q}_o$ , flujo de calor saliente
- $\dot{Q}_l$ , calor perdido a través de las paredes por unidad de tiempo
- $T_t$ , temperatura en el tanque y el líquido que sale
- $T_e$ , temperatura exterior

Encontrar la ecuación diferencial que relaciona un cambio en la temperatura en el tanque con cambios en  $\dot{Q}_i$  y en  $\dot{Q}_h$ .

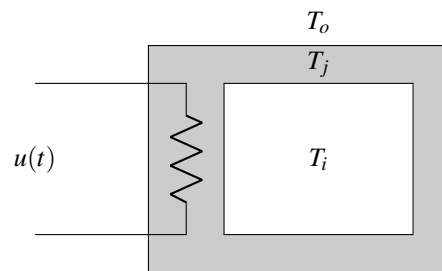
3. Para el horno eléctrico de la figura 3.17:

Halle la ecuación diferencial que describe el comportamiento de  $T_j(t)$  y la función de transferencia  $T_j(s)/U(s)$ .

- $u(t)$  es la cantidad de calor de entrada a la camisa.
- $T_o$ ,  $T_j$ ,  $T_i$  son las temperaturas en el exterior de la camisa, en la camisa y en el interior de la camisa, respectivamente.
- $A_i$ ,  $A_o$ : son las superficies interiores y exteriores de la camisa respectivamente.
- $C_i$ ,  $C_j$ : son las capacidades caloríficas del espacio interior y de la camisa respectivamente.
- $h_i$ ,  $h_o$  son los coeficientes de transmisión de calor para las superficie interior y exterior, respectivamente.



**Figura 3.16:** Circuito térmico del Problema 2



**Figura 3.17:** Problema 3

## Referencias

- [1] K. Ogata, "Modern Control Engineering", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA, 3rd edition, 1997.
- [2] B. C. Kuo, "Automatic Control Systems", Prentice-Hall International, London, England, 9th edition, 1962.
- [3] C. H. Houpis, S. N. Sheldon, J. J. D'Azzo, "Linear Control System Analysis and Design". Fifth Edition, Revised and Expanded (Automation and Control Engineering). Taylor and Francis, 2003.
- [4] C.H.Houpis, S.N.Sheldon, "Linear Control System Analysis and Design with MATLAB , Sixth Edition (Automation and Control Engineering, Book 53)". CRC Press, 2014.

- [5] G. F. Franklin, J. D. Powell, A. Emami-Naeini. "Feedback Control of Dynamic Systems". Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, fourth edition, 2002.
- [6] N. S. Nise, "Control System Engineering", John Wiley and Sons Inc., New York, 2011.
- [7] M. Gopal, I.J. Nagrath, " A Textbook of Control Systems Engineering", New Age International (P) Ltd., 2010.
- [8] R. C. Dorf, R. H. Bishop, "Modern Control Systems". Pearson 2008.
- [9] J. Dorsey, "Continuous and Discrete Control Systems: Modeling, Identification, Design, and Implementation". McGraw-Hill Series in Electrical and Computer Engineering. Prentice-Hall, New York, NY, 2002.

# CAPÍTULO 4

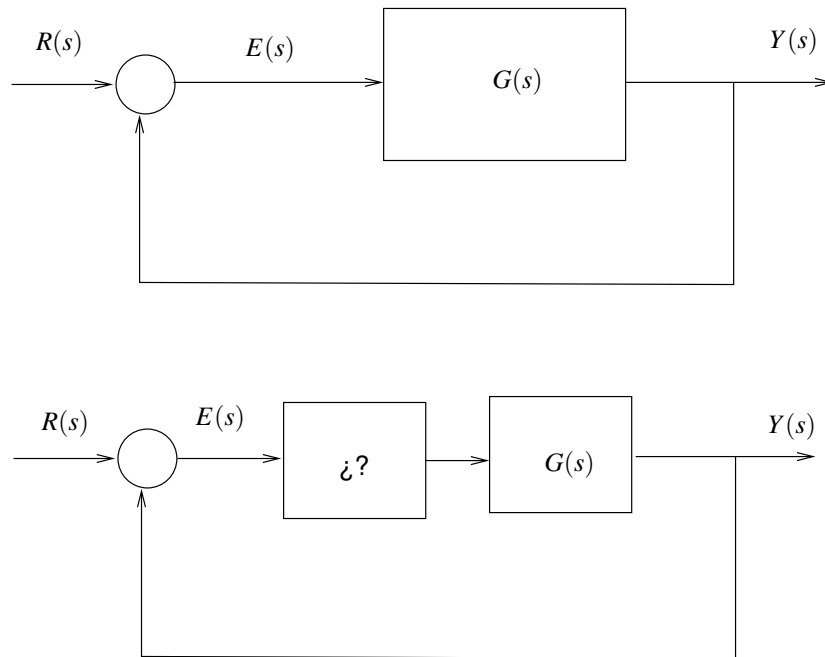
## Error de estado estacionario, coeficientes generalizados e índices de performance

### Introducción

En este capítulo estudiaremos diferentes medidas para evaluar y comparar las prestaciones de un sistema de lazo cerrado. En primer lugar analizaremos las características de *seguimiento* del sistema en el estado estacionario, es decir, una vez extinguido el período transitorio. Para ello se propondrán excitaciones estandarizadas, que permiten comparar sistemas entre sí, o las prestaciones de un mismo sistema en dos diferentes condiciones de funcionamiento. Luego extenderemos el análisis, por una parte, a fin de analizar excitaciones arbitrarias, y finalmente desarrollaremos herramientas para evaluar no solamente el estado estacionario, sino también la respuesta en régimen transitorio.

### 4.1. Conceptos preliminares. Tipo de un sistema

Comencemos analizando un ejemplo teórico. En la figura 4.1 se presenta un sistema de lazo cerrado donde la planta  $G(s)$  es simplemente una ganancia de valor 10. La función de transferencia de lazo cerrado será entonces:



**Figura 4.1:** Sistema de lazo cerrado sin dinámica

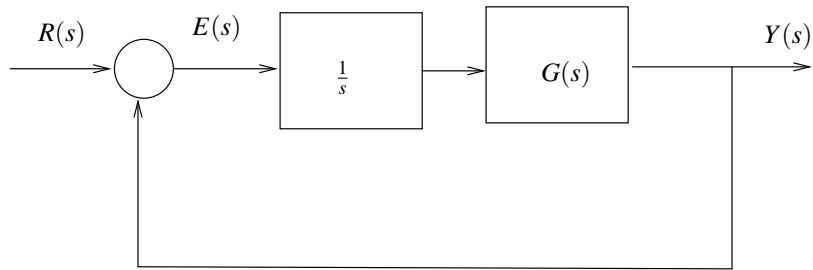
$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{10}{1 + 10} = \frac{10}{11} \quad (4.1)$$

Es decir que si en la entrada ponemos una señal de valor  $R = 1$ , a la salida tendremos un valor de  $Y = \frac{10}{11}$ . La señal de error valdrá  $E = R - Y = \frac{1}{11}$ . Efectivamente, vemos que  $EG = \frac{1}{11} 10 = \frac{10}{11}$ . En otros términos, este sistema posee un *error de estado estacionario* igual a  $1/11$  (el sistema no tiene dinámica, así que no hay período transitorio). Entonces podemos decir que este sistema sigue a una entrada constante con un error de estado estacionario finito. ¿Qué deberíamos colocar en serie con la planta para lograr que el error fuera nulo, es decir, que la entrada fuera igual a la salida? Un elemental análisis nos dice que el único operador lineal que puede hacer eso es un *integrador*  $H(s) = 1/s$ . En efecto, en el instante inicial (integrador descargado) aparecerá una señal no nula en la entrada del integrador, que hará que su salida aumente (figura 4.2). Este aumento aparecerá a su vez en la salida de la planta, reduciendo a su vez el valor de la señal error. Finalmente, cuando la salida alcance el valor de la entrada, el error será nulo y el integrador mantendrá en su salida un valor constante. Ahora el sistema tiene una función de transferencia de lazo abierto  $G(s)H(s) = 10\frac{1}{s}$  y la nueva función de transferencia de lazo cerrado será

$$T(s) = \frac{G(s)H(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{10}{(s + 10)} \quad (4.2)$$

La eliminación del error de estado estacionario se ha logrado con el costo de introducir dinámica en el sistema mediante el integrador. Esto a su vez ha producido la aparición de un polo de lazo cerrado en  $s = -10$ , y por lo tanto, de un transitorio. La presencia de integradores en la función





**Figura 4.2:** Eliminación del error de estado estacionario

de transferencia es de particular importancia a la hora de evaluar el error de estado estacionario. Se denomina *tipo de sistema* a la cantidad de integradores en la función de transferencia de lazo abierto. Si escribimos la misma como

$$G(s)H(s) = K \frac{\prod_{i=0}^n (s - c_i)}{s^r \prod_{j=0}^m (s - p_j)} \tag{4.3}$$

$r$  es el tipo de sistema. Es muy importante destacar que el tipo de sistema es el número de integradores de la función de transferencia de *lazo abierto*.

**4.1.1. Error de estado estacionario**

Llamamos Error de Estado Estacionario, o simplemente  $E_{ss}$  al valor de la señal  $e(t)$  una vez que el período transitorio se ha extinguido. Recordando la expresión del Teorema del Valor Final

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \tag{4.4}$$

Podemos escribir

$$E_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{R(s)}{1 + G(s)H(s)} \tag{4.5}$$

Vemos que  $E_{ss}$  depende no sólo del sistema sino de la excitación al mismo. Por lo tanto es necesario definir cuáles serán las señales que se utilizarán para obtener resultados comparables.

**4.1.2. Excitaciones estándar**

Por motivos prácticos e históricos, las excitaciones estandarizadas son el *escalón* ( $R(s) = 1/s$ ), la *rampa* ( $R(s) = 1/s^2$ ) y la *parábola* ( $R(s) = 1/s^3$ ). Por analogía con los servomecanismos mecánicos, el escalón se asocia a una referencia de *posición*, la rampa a una referencia de *velocidad* y la parábola a una de *aceleración*. Al ser señales de banda ancha, permiten ensayar al sistema en todo su rango de operación. Aquí vale una aclaración: el escalón, teóricamente, es una señal que cambia instantáneamente del valor 0 al 1. Hemos visto que una señal de tales características no es sintetizable en la práctica. Lo importante a tener en cuenta es la

dinámica relativa del escalón frente a la dinámica de la planta. Por ejemplo, si la planta tiene un tiempo de establecimiento del orden de los segundos, una señal que conmuta de 0 a 1 en algún microsegundo (lo que es electrónicamente fácil de hacer) es, a todos los efectos, un escalón.

## 4.2. Error en función del tipo de sistema y la excitación

Analizaremos ahora en detalle el error de estado estacionario para diferentes tipos de sistema, utilizando las excitaciones estandarizadas detalladas en la sección anterior.

### 4.2.1. Sistemas de tipo 0

Un sistema de tipo 0 no tiene polos en el origen del plano  $s$ . El error de estado estacionario al escalón, rampa y parábola será, respectivamente:

$$E_{ss(esc)} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1/s}{1 + G(s)H(s)} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)} = \frac{1}{1 + K_p} = cte \quad (4.6)$$

$$E_{ss(rmp)} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1/s^2}{1 + G(s)H(s)} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s)} = \frac{1}{K_v} = \infty \quad (4.7)$$

$$E_{ss(par)} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1/s^3}{1 + G(s)H(s)} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2G(s)H(s)} = \frac{1}{K_a} = \infty \quad (4.8)$$

Si el sistema es de tipo 0, tenemos que  $\lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s) = cte$ . El sistema puede seguir un escalón con error constante, y no puede seguir entradas mas exigentes como la rampa y la parábola. El hecho que el error tienda a infinito para  $t \rightarrow \infty$  indica que el error crece a medida que transcurre el tiempo. Los valores

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s) \quad (4.9)$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s) \quad (4.10)$$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2G(s)H(s) \quad (4.11)$$

se denominan *Coefficientes de error estático de posición, velocidad y aceleración*, respectivamente, y se utilizan convencionalmente para caracterizar o especificar sistemas. Para un sistema de tipo 0 entonces,  $K_p = cte$ ,  $K_v = 0$  y  $K_a = 0$ .

### 4.2.2. Sistemas de tipo 1

Un sistema de tipo 1 tiene un polo en el origen del plano  $s$ , por lo que  $\lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s) = \infty$ . El error de estado estacionario al escalón, rampa y parábola será, respectivamente:

$$E_{ss(esc)} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1/s}{1 + G(s)H(s)} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)} = \frac{1}{\infty} = 0 \quad (4.12)$$

$$E_{ss(rmp)} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1/s^2}{1 + G(s)H(s)} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s)} = \frac{1}{K_v} = cte \quad (4.13)$$

$$E_{ss(par)} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1/s^3}{1 + G(s)H(s)} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)H(s)} = \frac{1}{K_a} = \infty \quad (4.14)$$

En este caso tenemos  $K_p = \infty$ ,  $K_v = cte$  y  $K_a = 0$ . Un sistema de tipo 1 puede seguir a un escalón sin error de estado estacionario, a una rampa con un error constante y no puede seguir a una parábola.

### 4.2.3. Sistemas de tipo 2

Un sistema de tipo 2 tiene 2 polos en el origen del plano  $s$ . El error de estado estacionario al escalón, rampa y parábola será, respectivamente:

$$E_{ss(esc)} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1/s}{1 + G(s)H(s)} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)} = \frac{1}{1 + K_p} = 0 \quad (4.15)$$

$$E_{ss(rmp)} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1/s^2}{1 + G(s)H(s)} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s)} = \frac{1}{K_v} = 0 \quad (4.16)$$

$$E_{ss(par)} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1/s^3}{1 + G(s)H(s)} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)H(s)} = \frac{1}{K_a} = cte \quad (4.17)$$

Si el sistema es de tipo 2, tenemos que  $\lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s) = \infty$ . El sistema puede seguir a un escalón y a una rampa con error nulo, y puede seguir entradas en forma de parábola con error constante. Para un sistema de tipo 2 entonces,  $K_p = \infty$ ,  $K_v = \infty$  y  $K_a = cte$ .

	Tipo 0	Tipo 1	Tipo 2	...
escalón	cte	0	0	...
rampa	$\infty$	cte	0	...
parábola	$\infty$	$\infty$	cte	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...

**Cuadro 4.1:**  $E_{ss}$  en función del tipo de sistema y la excitación.

El cuadro 4.1 resume los resultados obtenidos. Este análisis se puede extender a sistemas de tipo mas alto y a entradas cada vez mas exigentes. Dos consideraciones son importantes de resaltar:

- El error de estado estacionario a una determinada excitación *sólo depende del tipo de sistema* (es decir, de la cantidad de integradores de la función de transferencia de lazo abierto), y no de la cantidad de polos y ceros del mismo. Los polos y ceros fuera del origen serán responsables de la forma y duración del período transitorio, *pero no tienen efecto en el comportamiento permanente*.
- El análisis pareciera sugerir que sería conveniente que el sistema de lazo abierto tuviera muchos polos en el origen, a fin de tener error nulo frente a excitaciones de orden elevado. Sin embargo, la presencia de integradores puede afectar seriamente la estabilidad del sistema (recuérdese que un polo en el origen agrega 90 grados de fase negativa a todas las frecuencias) o, aunque se asegure estabilidad, puede hacer que el sistema sea excesivamente lento en su respuesta temporal. Estos temas se retomarán cuando hablemos de estabilidad.

### 4.3. Coeficientes generalizados de error

A menudo resulta conveniente evaluar el comportamiento de error estacionario ante entradas diferentes de las estandarizadas. A tal fin se proponen los *Coeficientes Generalizados de Error*. Para comenzar el análisis, escribamos la señal  $e(t)$  a partir de la *integral de convolución*:

$$e(t) = \int_0^t r(t-\tau)g_e(\tau)d\tau \quad (4.18)$$

donde  $r(t)$  es la entrada al lazo, y  $g_e(t)$  es la respuesta impulsiva del error, esto es  $g_e(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{1+G(s)H(s)}\right)$ . El error de estado estacionario será el límite de la expresión 4.18 cuando  $t \rightarrow \infty$ :

$$e_{ss}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t r(t-\tau)g_e(\tau)d\tau \quad (4.19)$$

Ahora desarrollamos  $r(t-\tau)$  por serie de Taylor:

$$r(t-\tau) = r(t) - \tau\dot{r}(t) + \frac{\tau^2}{2}\ddot{r}(t) + \dots + (-1)^n \frac{\tau^n}{n!} r^{(n)}(t) + \dots \quad (4.20)$$

Si reemplazamos esta expresión en 4.19 tenemos

$$\begin{aligned} e_{ss}(t) = r_{ss}(t) \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t g_e(\tau)d\tau - \dot{r}_{ss}(t) \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \tau g_e(\tau)d\tau + \frac{\ddot{r}_{ss}(t)}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \tau^2 g_e(\tau)d\tau + \dots \\ \dots + (-1)^n \frac{r_{ss}^{(n)}(t)}{n!} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \tau^n g_e(\tau)d\tau + \dots \end{aligned} \quad (4.21)$$

que podemos escribir

$$\begin{aligned} e_{ss}(t) = r_{ss}(t) \int_0^\infty g_e(\tau)d\tau - \dot{r}_{ss}(t) \int_0^\infty \tau g_e(\tau)d\tau + \frac{\ddot{r}_{ss}(t)}{2} \int_0^\infty \tau^2 g_e(\tau)d\tau + \dots \\ \dots + (-1)^n \frac{r_{ss}^{(n)}(t)}{n!} \int_0^\infty \tau^n g_e(\tau)d\tau + \dots \end{aligned} \quad (4.22)$$

Vemos que en esta expresión la señal de entrada de estado estacionario  $r_{ss}(t)$  y sus derivadas se ven afectadas por coeficientes dados por

$$C_0 = \int_0^{\infty} g_e(\tau) d\tau \quad (4.23)$$

$$C_1 = - \int_0^{\infty} \tau g_e(\tau) d\tau \quad (4.24)$$

$$C_n = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{\infty} \tau^n g_e(\tau) d\tau \quad (4.25)$$

Los coeficientes  $C_i$  se denominan *Coficientes Generalizados de error*, y ponderan cómo aparecen en la expresión del error las sucesivas derivadas de la excitación. Afortunadamente, no es necesario realizar las operaciones de integración indicadas para calcular los  $C_i$ . En efecto, recordando la definición de Transformada de Laplace tenemos que

$$G_e(s) = \int_0^{\infty} g_e(t) e^{-st} dt \quad (4.26)$$

vemos que  $C_0$  puede calcularse como

$$C_0 = \lim_{s \rightarrow 0} G_e(s) \quad (4.27)$$

si derivamos con respecto a  $s$  la expresión de la transformada tenemos

$$\frac{\partial G_e(s)}{\partial s} = \int_0^{\infty} g_e(t) e^{-st} (-t) dt \quad (4.28)$$

Por lo tanto

$$C_1 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\partial G_e(s)}{\partial s} \quad (4.29)$$

y, en general

$$C_n = \frac{1}{n!} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\partial^n G_e(s)}{\partial s^n} \quad (4.30)$$

## 4.4. Indices de performance

En muchas ocasiones es importante evaluar el comportamiento de la señal error no sólo en estado estacionario sino también durante el transitorio. Por ejemplo, un transitorio oscilatorio muy prolongado puede comprometer la vida útil de los actuadores, e incluso puede saturarlos, sacando al sistema de la zona de funcionamiento lineal. En general, todas las medidas propuestas realizan algún tipo de integral "ponderada" del error. Por supuesto, una medida como

$$J = \int_0^{\infty} e(t) dt \quad (4.31)$$

no funciona, porque las áreas positivas y negativas tienden a cancelarse, y podría darse el caso de un sistema muy oscilatorio con un índice muy bajo. Para evitar esto, podemos plantear los

siguientes dos índices:

$$IAE = \int_0^{\infty} |e(t)| dt \quad (4.32)$$

$$ISE = \int_0^{\infty} e^2(t) dt \quad (4.33)$$

Expresiones del tipo ISE son muy aptas para estrategias de optimización, ya que son fácilmente derivables. Una solución de compromiso puede establecerse cuando se pueden tolerar grandes errores en el transitorio, siempre y cuando éste sea de corta duración. En ese caso podemos utilizar el tiempo como un factor de peso y escribir

$$ITAE = \int_0^{\infty} t |e(t)| dt \quad (4.34)$$

$$ITSE = \int_0^{\infty} t e^2(t) dt \quad (4.35)$$

es decir, el error está multiplicado por un término que penaliza mas y mas los errores que se producen para tiempos largos y atenúa los errores del transitorio inmediato.

La minimización de expresiones del tipo de la 4.32 y 4.33 puede dar lugar a esfuerzos de control importantes, a menudo incompatibles con los rangos dinámicos de sensores y actuadores. En tal caso podría incluirse en la figura de mérito un término que tenga en cuenta el tamaño de la acción de control  $u(t)$ , como por ejemplo:

$$J = \int_0^{\infty} \alpha e^2(t) + \beta u^2(t) dt \quad (4.36)$$

Los coeficientes  $\alpha$  y  $\beta$  ponderan el peso relativo del error y la acción de control en el índice de performance, y modelan la relación de compromiso entre ambos. Un ejemplo clásico es la relación entre velocidad y consumo de combustible en un vehículo. Si quiere construirse un vehículo "económico", se ponderará fuertemente la minimización del consumo de combustible, en detrimento de la velocidad. Si, por el contrario, se desea hacer un vehículo "deportivo", se privilegiará la velocidad al costo de un mayor consumo. De esta forma, en las figuras de mérito pueden incluirse aspectos muy variados, como costos económicos, de mercado, etc.

## 4.5. Problemas

1. En base a los coeficientes de error calcular el error de estado estacionario al escalón unitario, rampa y parábola, de los siguientes sistemas realimentados unitariamente:

$$G(s) = 10500 \frac{(s^2 + 2s + 2)}{(1 + 20s)}$$

$$G(s) = \frac{34,1}{s(s+5)}$$

2. Sea un servomecanismo de posición cuya función de transferencia de lazo abierto es:

$$G(s) = 1125 \frac{(s + 1/0.6)}{4s(s + 1/8)(s + 50)}$$

- ¿A qué tipo pertenece el sistema ?
  - Calcular el error de estado estacionario con una entrada de velocidad de 9 RPM.
3. Hallar los coeficientes estáticos de error y el error de estado estacionario al escalón, rampa y aceleración de sistemas con realimentación unitaria que tienen la función de transferencia de lazo abierto siguientes:

$$G(s) = \frac{10}{(0.2s + 1)(0.5s + 1)}$$

$$G(s) = \frac{12}{s(s + 2)(0.4s + 1)}$$

$$G(s) = \frac{15}{s(s + 3)(0.2s + 1)}$$

4. Dado el sistema

$$G(s) = \frac{10}{s}$$

en cascada con el sistema

$$G_c(s) = \frac{(1 + sK_e)}{(s + 2)}$$

y realimentado unitariamente, determinar el valor del factor  $K_e$  tal que la relación de amortiguamiento  $\xi$  sea 0.5. Calcular los valores del tiempo de establecimiento, máximo sobrepico y error de estado estacionario (para una entrada rampa unitaria) con y sin  $G_c(s)$ . Comente el efecto que tiene sobre el sistema dinámico la inclusión de  $G_c(s)$ .

5. Para el sistema

$$G(s) = \frac{1}{s(s + 4)}$$

$$H(s) = K$$

Calcule el valor del  $ISE = \int_0^\infty e^2(t)dt$  para  $K_1 = 7/4$  y  $K_2 = 3$  cuando la entrada es un escalón unitario. Obtenga la señal de salida del bloque  $H(s)$  (esto es, la acción de control  $u(t)$ ) para  $K_1$  y  $K_2$ . ¿Qué conclusiones puede elaborar? Compare los resultados.

## Referencias

- [1] K. Ogata, "Modern Control Engineering", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA, 3rd edition, 1997.

- [2] B. C. Kuo, "Automatic Control Systems", Prentice-Hall International, London, England, 9th edition, 1962.
- [3] C. H. Houpis, S. N. Sheldon, J. J. D'Azzo, "Linear Control System Analysis and Design". Fifth Edition, Revised and Expanded (Automation and Control Engineering). Taylor and Francis, 2003.
- [4] C.H.Houpis, S.N.Sheldon, "Linear Control System Analysis and Design with MATLAB , Sixth Edition (Automation and Control Engineering, Book 53)". CRC Press, 2014.
- [5] G. F. Franklin, J. D. Powell, A. Emami-Naeini. "Feedback Control of Dynamic Systems". Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, fourth edition, 2002.
- [6] N. S. Nise, "Control System Engineering", John Wiley and Sons Inc., New York, 2011.
- [7] M. Gopal, I.J. Nagrath, " A Textbook of Control Systems Engineering", New Age International (P) Ltd., 2010.
- [8] G. Goodwin, S. Grabe.,M. Salgado, "Control System Design", Pearson Education, Upper Saddle River, NJ, eleventh/international edition, 2015
- [9] R. C. Dorf, R. H. Bishop, "Modern Control Systems". Pearson 2008.



# CAPÍTULO 5

## Estabilidad de sistemas continuos

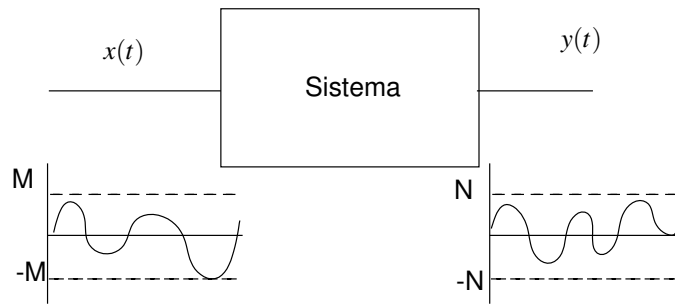
### Introducción

Hemos visto en capítulos anteriores que la respuesta temporal de un sistema lineal queda enteramente determinada por la ubicación de los ceros y polos de su función de transferencia. Además, se ha analizado cómo la ubicación de los polos del sistema varía cuando se cierra el lazo, modificando por lo tanto la forma de la respuesta. Como en un sistema lineal la misma es una combinación pesada de exponenciales reales y sinusoides con envolventes exponenciales, es evidente que si esas exponenciales son crecientes la salida del sistema se incrementará, teóricamente hasta infinito, o en la práctica hasta que se abandone la zona de funcionamiento lineal. Es importante saber bajo qué condiciones la respuesta de un sistema crecerá monótonamente, o cuándo oscilará sin amortiguamiento, haciendo al sistema inútil.

En las secciones que siguen, se dará una definición genérica de estabilidad. Luego se particularizará para el caso de sistemas lineales, concluyendo que para asegurar estabilidad es necesario que los polos de lazo cerrado tengan parte real negativa. Se definirán los conceptos de Estabilidad Absoluta, Relativa y Estabilidad Interna. Finalmente se describirá el método de Routh-Hurwitz, que permite saber si un polinomio posee todas sus raíces en el semiplano izquierdo, sin calcular la ubicación de las mismas.

### 5.1. Estabilidad BIBO

Existen múltiples definiciones de estabilidad. En este curso diremos que un sistema es estable si, cuando es excitado con una entrada acotada en amplitud (“Bounded Input”), la salida



**Figura 5.1:** Estabilidad BIBO. Sistema genérico

resultante también está acotada en amplitud (“Bounded Output”). Esta definición es muy general, ya que vale para sistemas tanto lineales como no lineales, y no hace ninguna consideración sobre la topología del sistema, salvo suponer que el sistema es SISO.

Formalmente, si ante una entrada  $x(t)$  tal que  $|x(t)| \leq M < \infty$  resulta que  $|y(t)| \leq N < \infty$  entonces el sistema será estable (figura 5.1). Es importante señalar que un sistema estable a lazo abierto puede ser inestable a lazo cerrado, y viceversa.

### 5.1.1. Sistemas Lineales

Veamos qué consecuencias tiene la definición de estabilidad BIBO en el caso de sistemas lineales. La salida de un sistema LIT viene dada por la integral de convolución:

$$y(t) = \int_0^{\infty} g(\tau)x(t - \tau)d\tau \tag{5.1}$$

donde  $g(\tau)$  es la respuesta impulsiva. Utilizando la desigualdad del triángulo tenemos

$$|y(t)| = \left| \int_0^{\infty} g(\tau)x(t - \tau)d\tau \right| \leq \int_0^{\infty} |g(\tau)||x(t - \tau)|d\tau \tag{5.2}$$

Acotando esta expresión de acuerdo a la definición de estabilidad BIBO resulta

$$\int_0^{\infty} |g(\tau)||x(t - \tau)|d\tau \leq M \int_0^{\infty} |g(\tau)|d\tau \tag{5.3}$$

$$M \int_0^{\infty} |g(\tau)|d\tau \leq N < \infty \tag{5.4}$$

$$\int_0^{\infty} |g(\tau)|d\tau \leq Q = \frac{N}{M} < \infty \tag{5.5}$$

Esta última expresión indica que el área bajo la curva de la respuesta impulsiva del sistema debe ser finita, es decir, la misma debe extinguirse a medida que  $t \rightarrow \infty$ . Para que ello ocurra, las exponenciales y envolventes exponenciales que conforman la respuesta impulsiva deben ser decrecientes, lo que implica que los polos del sistema deben tener parte real negativa. Por lo tanto, para que un sistema lineal sea estable se requiere que sus polos se encuentren en el semiplano izquierdo del plano  $s$ . Todos los métodos de análisis de estabilidad se basan en este requisito.

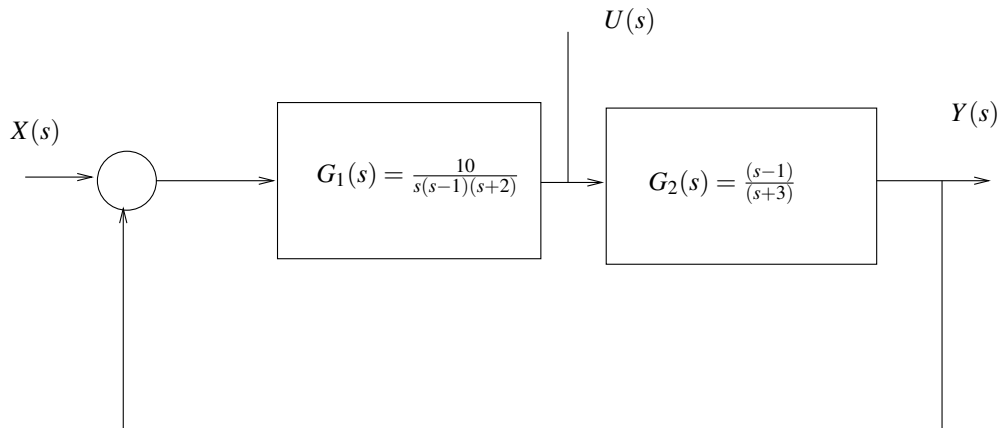


Figura 5.2: Sistema mal planteado

## 5.2. Estabilidad absoluta y relativa

Evidentemente, si un sistema no es estable es inestable. El concepto de *Estabilidad Absoluta* es una pregunta por sí o por no. Sin embargo, es a menudo de interés evaluar si un sistema es “mas estable” que otro, en el sentido de su proximidad con la condición de inestabilidad (polos sobre el eje  $j\omega$ ). La definición de esta “estabilidad relativa” implica necesariamente el establecimiento de una medida de “distancia” a la condición de inestabilidad. Intuitivamente, cuanto mayor sea esta distancia, mas estable será el sistema bajo estudio. Las medidas de estabilidad relativa mas utilizadas son los márgenes de ganancia y fase, que se desarrollarán extensamente al analizar métodos frecuenciales de análisis de estabilidad.

## 5.3. Estabilidad Interna

En el caso de sistemas de lazo cerrado, un sistema posee *estabilidad interna* si todas las funciones de transferencia que pueden plantearse en el lazo (tomando entradas y salidas en cualquier punto) son estables. Recordando que el denominador de todas las posibles funciones de transferencia de un lazo es siempre el mismo (la ecuación característica), el concepto de estabilidad interna está asociado a la eventual cancelación de polos inestables del sistema con ceros de no mínima fase. En efecto, considérese un sistema como el de la figura 5.2 con  $G_1(s) = \frac{10}{s(s-1)(s+2)}$  y  $G_2(s) = \frac{(s-1)}{(s+3)}$ .

La función de transferencia de lazo cerrado entre  $Y$  y  $X$  es

$$T(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} = \frac{10}{s^3 + 5s^2 + 6s + 10} \quad (5.6)$$

Los polos de esta expresión están en el semiplano izquierdo:

$$s_{1,2} = -0.4331286 \pm j1.4938256 \quad (5.7)$$

$$s_3 = -4.1337427 \quad (5.8)$$

Sin embargo, si tomamos como salida  $U(s)$  tenemos

$$T(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} = \frac{\frac{10}{s(s-1)(s+2)}}{1 + \frac{10}{s(s+3)}} \quad (5.9)$$

que tiene un polo en  $s = 1$  y por lo tanto es inestable. En realidad, el sistema es inestable, y la aparente estabilidad que aparece en la transferencia  $Y(s)/X(s)$  se debe a la cancelación entre el polo inestable y el cero de no mínima fase en  $s = 1$ . Cuando existen estas cancelaciones se dice que el sistema está mal planteado. Aunque la cancelación fuese exacta, vemos que hay señales internas del lazo que crecen exponencialmente. Estabilizar un sistema inestable pretendiendo cancelar la dinámica inestable con ceros de no mínima fase simplemente no funciona. Sin embargo, las cancelaciones en el semiplano izquierdo son perfectamente factibles. En efecto, aunque la cancelación no fuese exacta, el residuo resultante (que será tanto más pequeño cuanto más exacta sea la cancelación) estará asociado a una exponencial decreciente, y por lo tanto no comprometerá la estabilidad. A menudo la dinámica asociada puede despreciarse sin incurrir en errores importantes.

## 5.4. Métodos de análisis de estabilidad

A continuación desarrollaremos diversos métodos para el estudio de la estabilidad de lazo cerrado de un sistema. Aunque todos los métodos son coherentes en cuanto a los resultados que brindan, cada uno tiene un ámbito específico de aplicación. En esta capítulo y los dos siguientes analizaremos los siguientes métodos:

- Método de Routh-Hurwitz: permite saber si un polinomio posee o no raíces con parte real positiva, sin calcular su ubicación precisa. Es una forma tabular de calcular los discriminantes de Hurwitz. El método da información sobre estabilidad absoluta, y en sistemas con un grado de libertad permite calcular el rango de valores del parámetro libre que aseguran estabilidad.
- Método del Lugar de Raíces: Permite trazar en forma aproximada la trayectoria que describirán los polos de lazo cerrado de un sistema frente a un parámetro variable en la función de transferencia de lazo abierto (por ejemplo, una ganancia, la ubicación de un polo o un cero, o un coeficiente del numerador o denominador). El trazado permite no sólo inferir la

estabilidad relativa del sistema, sino también desarrollar un criterio acerca de cómo agregar dinámica en el lazo para cumplir con especificaciones en el plano  $s$ .

- Método o Criterio de Nyquist: Permite inferir la estabilidad de lazo cerrado de un sistema a partir del trazado del diagrama frecuencial polar del sistema de lazo abierto. Sobre el diagrama resultante pueden definirse fácilmente medidas de estabilidad relativa.
- Método de Bode: Permite inferir la estabilidad de lazo cerrado de un sistema a partir del trazado del diagrama de Bode en módulo y fase. Sobre la curva de respuesta en frecuencia es simple medir numéricamente los márgenes de estabilidad relativa. El trazado asintótico es sistemático, y provee suficiente precisión numérica en la mayoría de los casos de interés. En sistemas de fase mínima, el método se reduce al Criterio de Bode, que permite inferir estabilidad mediante la sola inspección del diagrama de amplitud.

## 5.5. Criterio de Routh

El método de Routh permite saber si un polinomio es Hurwitz (es decir, si tiene todas sus raíces en el semiplano izquierdo) sin la necesidad de calcular sus raíces. El método es de simple aplicación, y en el caso que el polinomio tenga algún parámetro variable, permite calcular el rango de valores del mismo para los cuales el sistema es estable.

### 5.5.1. Condiciones necesarias

El método parte del conocimiento de la ecuación característica del sistema:

$$F(s) = 1 + G(s)H(s) = 0 = a_0s^n + a_1s^{n-1} + a_2s^{n-2} + \dots + a_{n-1}s + a_n \quad (5.10)$$

Existen dos condiciones necesarias que  $F(s)$  debe cumplir para no tener raíces en el semiplano derecho:

- El polinomio debe estar completo, es decir  $a_i \neq 0$  para  $0 \leq i \leq n$ .
- Todos los  $a_i$  deben ser de igual signo.

Estas condiciones surgen de las propiedades de las raíces  $r_j$  de un polinomio. En efecto, sabemos que

$$\frac{a_n}{a_0} = -\prod_{i=1}^n r_i \tag{5.11}$$

$$\frac{a_{n-1}}{a_0} = \sum_{i \neq j} r_i r_j \tag{5.12}$$

$$\frac{a_{n-2}}{a_0} = -\sum_{i \neq j \neq k} r_i r_j r_k \tag{5.13}$$

$$\vdots \tag{5.14}$$

$$\frac{a_1}{a_0} = -\sum_{i=1}^n r_i \tag{5.15}$$

La única situación en la cual los coeficientes pueden tener signos diferentes, o se anulen, es cuando existen raíces con parte real de diferente signo. Estas condiciones son necesarias pero no suficientes: si hay coeficientes de distinto signo o nulos ya sabemos que el sistema es inestable, pero que las condiciones se cumplan no indica que el sistema sea estable.

### 5.5.2. Arreglo de Routh

Verificadas las condiciones necesarias, el paso siguiente es construir el siguiente arreglo bidimensional a partir de los coeficientes del polinomio. Ilustraremos su construcción con un polinomio de grado 6:

$$a_0 s^6 + a_1 s^5 + a_2 s^4 + a_3 s^3 + a_4 s^2 + a_5 s^1 + a_6 = 0 \tag{5.16}$$

El arreglo está ordenado en sentido vertical según las potencias decrecientes de  $s$ . La primera fila del arreglo está constituida por el coeficiente de la potencia más alta (en este caso  $a_0$ ) y los coeficientes de las potencias pares (en este caso) en orden decreciente. Alternativamente, si el polinomio fuera de orden impar, la fila estaría conformada por  $a_0$  y los coeficientes de las potencias impares en orden decreciente. La segunda fila estará compuesta por los coeficientes de las potencias impares (pares) en orden decreciente:

$s^6$	$a_0$	$a_2$	$a_4$	$a_6$
$s^5$	$a_1$	$a_3$	$a_5$	$0$
$s^4$	$A$	$B$	$C$	$0$
$s^3$	$D$	$E$	$0$	$\dots$
$s^2$	$F$	$G$	$0$	$\dots$
$s^1$	$H$	$0$	$\dots$	
$s^0$	$I$	$\dots$		

Para el cálculo de los restantes coeficientes, puede aplicarse la siguiente regla: se toman las dos filas inmediatamente superiores a la fila en estudio, y se combinan los dos elementos de la primera columna con los de la columna siguiente a la que se está calculando. En nuestro caso:

$$A = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} \quad B = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1} \quad C = \frac{a_1 a_6 - a_0 0}{a_1} \quad (5.17)$$

$$D = \frac{A a_3 - a_1 B}{A} \quad E = \frac{A a_5 - a_1 C}{A} \quad (5.18)$$

$$F = \frac{DB - AE}{D} \quad G = \frac{DC - A0}{D} \quad (5.19)$$

$$H = \frac{FE - DG}{F} \quad (5.20)$$

$$I = \frac{HG - F0}{H} \quad (5.21)$$

El arreglo siempre es triangular superior. El número de raíces con parte real positiva es igual al número de cambios de signo en la primera columna del arreglo de Routh. Veamos algunos ejemplos:

**Ejemplo 1:**

$$F(s) = s^4 + 3s^3 + 5s^2 + 2s + 1 = 0 \quad (5.22)$$

El polinomio está completo y todos los coeficientes son positivos. Por lo tanto no podemos decir nada en relación con la estabilidad hasta no hacer el arreglo de Routh:

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 5 & 1 \\ s^3 & 3 & 2 & \\ s^2 & \frac{13}{3} & 1 & \\ s^1 & \frac{17}{13} & & \\ s^0 & 1 & & \end{array}$$

Como no hay cambios de signo en la primera columna, el sistema es estable.

**Ejemplo 2:**

$$F(s) = s^3 + 3s^2 + 3s + 10 = 0 \quad (5.23)$$

Existen dos cambios de signo (de positivo a negativo en la tercera fila, y de negativo a positivo en la cuarta), por lo tanto hay dos raíces en el semiplano positivo.

$$\begin{array}{c|cc}
 s^3 & 1 & 3 \\
 s^2 & 3 & 10 \\
 s^1 & \frac{-1}{3} & \\
 s^0 & 10 & 
 \end{array}$$

### 5.5.3. Casos especiales

Es fácil ver que existen dos casos en los que no puede completarse el cálculo del arreglo de Routh:

- Un elemento nulo en la primera columna del arreglo: en este caso no se puede continuar, ya que al pretender calcular la fila siguiente, hay que dividir por cero.
- Toda una fila nula: la limitación es la misma. En general esta anomalía se produce cuando existe alguna relación de simetría en las raíces del polinomio.

Ambas situaciones son simples de solucionar. En el primer caso, existen dos alternativas. La primera es multiplicar a  $F(s)$  por un término de la forma  $(s+a)$ . Por ejemplo,  $a=1$  es una buena elección para simplificar los cálculos. Esto eleva en uno el grado del polinomio y en general soluciona el problema. La otra solución consiste en remplazar el elemento nulo por un pequeño valor positivo  $\varepsilon$  que tiende a cero. El arreglo se completa y luego se analiza el signo de los coeficientes de la primera columna cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Veamos un ejemplo:

#### Ejemplo 3:

$$F(s) = s^4 + 3s^3 + 5s^2 + 15s + 1 = 0 \quad (5.24)$$

$$\begin{array}{c|ccc}
 s^4 & 1 & 5 & 1 \\
 s^3 & 3 & 15 & \\
 s^2 & 0 \Rightarrow \varepsilon & 1 & \\
 s^1 & \frac{15\varepsilon-3}{\varepsilon} & & \\
 s^0 & 1 & & 
 \end{array}$$

Obsérvese que cuando  $\varepsilon$  tiende a cero, el coeficiente  $\frac{15\varepsilon-3}{\varepsilon}$  se hace negativo. Por lo tanto, el sistema tiene dos polos en el semiplano derecho.

En el segundo caso, el procedimiento a seguir involucra el uso de una ecuación auxiliar, que se obtiene de la fila inmediatamente anterior a la fila nula. La ecuación auxiliar se deriva respecto a  $s$ , y los coeficientes resultantes remplazan a los coeficientes nulos. Luego la construcción del



arreglo se continúa en la forma habitual. Las raíces de la ecuación auxiliar también son raíces de  $F(s)$ , lo que a veces, como veremos en el ejemplo 5, es útil para el análisis.

**Ejemplo 4:**

$$F(s) = s^5 + 3s^4 + 2s^3 + 6s^2 + 5s + 15 = 0 \tag{5.25}$$

$s^5$	1	2	5
$s^4$	3	6	15
$s^3$	0	0	← toda una fila nula
$s^2$			
$s^1$			
$s^0$			

La fila nula corresponde a la potencia  $s^3$ . La ecuación auxiliar se construye a partir de la fila anterior, es decir

$$A(s) = 3s^4 + 6s^2 + 15 \tag{5.26}$$

$$\frac{\partial A(s)}{\partial s} = 12s^3 + 12s \tag{5.27}$$

Los nuevos coeficientes que remplazan a los elementos nulos son entonces 12 y 12. El arreglo ahora queda

$s^5$	1	2	5
$s^4$	3	6	15
$s^3$	<b>12</b>	<b>12</b>	
$s^2$	3	15	
$s^1$	-48		
$s^0$	1		

Aparecen dos cambios de signo en la primera columna, por lo que el sistema tiene dos polos en el semiplano derecho (inestable).

**5.5.4. Sistemas con parámetros variables**

El método de Routh puede utilizarse para establecer el rango de valores admisibles que puede tomar un parámetro libre. Para ello, debe construirse el arreglo de Routh en función del parámetro, para luego calcular los valores que producen cambios de signo en la primera columna. Ilustremos el procedimiento mediante el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 5:**

Supongamos que tenemos un sistema de lazo abierto de la forma

$$G(s) = \frac{K}{(s+1)(s+2)(s+3)} \quad (5.28)$$

El sistema es estable a lazo abierto para cualquier valor de  $K$ , ya que sus tres polos se encuentran en el semiplano izquierdo. ¿Qué ocurrirá a lazo cerrado? Si calculamos la función de transferencia de lazo cerrado tenemos

$$T(s) = \frac{K}{(s+1)(s+2)(s+3) + K} = \frac{K}{s^3 + 6s^2 + 11s + (6+K)} \quad (5.29)$$

Vemos que el término independiente de la ecuación característica depende del parámetro libre  $K$ , y por lo tanto, la ubicación de los polos de lazo cerrado también variará con la ganancia. Por las condiciones necesarias del método, sabemos que  $K > -6$  para que no haya cambios de signo ni elementos nulos. Pero ésta no es la única condición de estabilidad. En efecto, si hacemos el arreglo de Routh

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 11 \\ s^2 & 6 & (6+K) \\ s^1 & \frac{(60-K)}{6} & \\ s^0 & (6+K) & \end{array}$$

Analicemos la primera columna. Si  $K$  es negativo y menor que  $-6$  el término correspondiente a  $s^0$  se hace negativo, pero el correspondiente a  $s^1$  es positivo. Por lo tanto hay una raíz en el semiplano derecho, que necesariamente (por las propiedades de los coeficientes de la función de transferencia) estará sobre el eje real. Por el contrario, si  $K$  es positivo y mayor que  $60$  el término correspondiente a  $s^1$  es negativo, pero el correspondiente a  $s^0$  es positivo. Hay por lo tanto dos raíces en el semiplano derecho. El rango de valores del parámetro  $K$  que aseguran estabilidad es entonces  $-6 < K < 60$ . Además, si  $K = 60$  se anula la fila correspondiente a  $s^1$ , por lo tanto las raíces de la ecuación auxiliar  $6s^2 + 66 = 0$  también son raíces de  $F(s)$ . Por lo tanto para la ganancia que inestabiliza al sistema, hay dos polos sobre el eje  $j\omega$  en  $s_{1,2} = \pm j\sqrt{11}$ . El comportamiento de las raíces de lazo cerrado a medida que se varía el parámetro  $K$  puede analizarse mediante el método del Lugar de Raíces, que será el tema del próximo capítulo.

## 5.6. Problemas

1. Utilizando el método de Routh-Hurwitz, determinar los rangos de estabilidad de los siguientes sistemas:

$$G(s)H(s) = \frac{10K}{(1 + 0.2s)(s^2 + 8s + 100)}$$

$$G(s)H(s) = \frac{4.7K}{(s + 583)(s + 5)(s + 166)}$$

$$G(s)H(s) = K \frac{(1 - 3s)}{(1 + 1.5s)(10s)}$$

$$G(s)H(s) = K \frac{(s^2 + 2s + 1)}{s(s + 4)(s + 1)}$$

$$G(s)H(s) = K \frac{(s^2 + 4s + 1000)}{(s + 1)(s + 5)(s + 11)}$$

2. Una transferencia tiene sus ceros en  $-20$  y  $-30$ , y sus polos en  $0$ ,  $-10$ ,  $-1$ ,  $-400$  y  $-2000$ . El sistema está realimentado unitariamente. Determinar los valores de ganancia para los cuales el sistema es estable.
3. Para el sistema

$$G(s) = 10 \frac{e^{-s\tau}}{s(s + 10)}$$

Aproximando el retardo por los dos primeros términos de su desarrollo en serie de Taylor ( $e^{s\tau} \cong 1 - s\tau$ ), encontrar los valores de  $\tau$  para los que el sistema de lazo cerrado es estable.

## Referencias

- [1] K. Ogata, "Modern Control Engineering", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA, 3rd edition, 1997.
- [2] B. C. Kuo, "Automatic Control Systems", Prentice-Hall International, London, England, 9th edition, 1962.
- [3] C. H. Houpis, S. N. Sheldon, J. J. D'Azzo, "Linear Control System Analysis and Design". Fifth Edition, Revised and Expanded (Automation and Control Engineering). Taylor and Francis, 2003.
- [4] C.H.Houpis, S.N.Sheldon, "Linear Control System Analysis and Design with MATLAB , Sixth Edition (Automation and Control Engineering, Book 53)". CRC Press, 2014.
- [5] G. F. Franklin, J. D. Powell, A. Emami-Naeini. "Feedback Control of Dynamic Systems". Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, fourth edition, 2002.

- [6] N. S. Nise, "Control System Engineering", John Wiley and Sons Inc., New York, 2011.
- [7] M. Gopal, I.J. Nagrath, " A Textbook of Control Systems Engineering", New Age International (P) Ltd., 2010.
- [8] G. Goodwin, S. Grabe.,M. Salgado, "Control System Design", Pearson Education, Upper Saddle River, NJ, eleventh/international edition, 2015
- [9] R. C. Dorf, R. H. Bishop, "Modern Control Systems". Pearson 2008.

# CAPÍTULO 6

## Lugar de raíces

### Introducción

El método de lugar de raíces o método de Evans permite hacer un trazado aproximado de las trayectorias que describen los polos de lazo cerrado de un sistema cuando existe un parámetro variable. El diagrama se realiza aplicando una serie de reglas simples, y calibrando adecuadamente algunos puntos importantes (puntos de quiebre, cortes a los ejes, etc.), el trazado puede ser suficientemente preciso como para obtener resultados numéricos. Las reglas de construcción del diagrama se basan en propiedades de la ecuación característica y sus raíces.

### 6.1. Un ejemplo preliminar

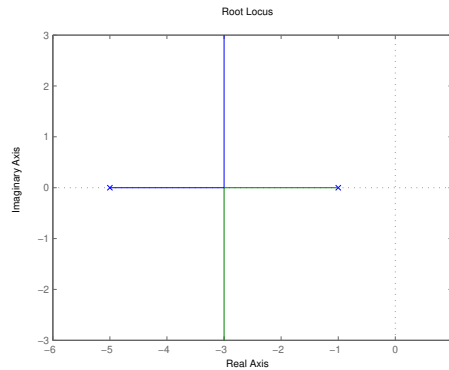
Para ilustrar la utilidad del método de lugar de raíces, comencemos con un ejemplo que, por su sencillez, puede ser resuelto numéricamente. Supongamos tener el siguiente sistema de lazo abierto:

$$G(s) = \frac{K}{(s+1)(s+5)} \quad (6.1)$$

El sistema es estable porque tiene todos sus polos en el semiplano izquierdo, independientemente del valor de  $K$ . Se pretende inferir la estabilidad de este sistema a lazo cerrado para  $0 < K < \infty$ . Calculando la función de transferencia de lazo cerrado tenemos

$$T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{K}{(s+1)(s+5)+K} = \frac{K}{s^2+6s+(5+K)} \quad (6.2)$$

donde vemos que el término independiente de la ecuación característica es función de  $K$ , y por lo tanto sus raíces se desplazarán a medida que  $K$  varíe. En este caso las raíces pueden calcularse



**Figura 6.1:** Lugar de raíces simple

numéricamente, y están en

$$s_{1,2} = -\frac{6}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{36 - 20 - 4K} = -3 \pm \sqrt{4 - K} \quad (6.3)$$

Para  $K = 0$  las raíces de la ecuación característica están en  $s = -1$  y  $s = -5$ , es decir, coinciden con las raíces de lazo abierto (de hecho, el lazo está abierto). Para  $0 < K < 4$  las raíces son reales, distintas y ubicadas a uno y otro lado del punto  $-3$ . Para  $K = 4$  el argumento de la raíz cuadrada se anula y se tiene un par de polos reales coincidentes en  $s = -3$ . Para  $K > 4$  el argumento de la raíz cuadrada se hace negativo, por lo que podemos escribir

$$s_{1,2} = -3 \pm j\sqrt{K - 4} \quad (6.4)$$

Es decir, tendremos raíces complejas conjugadas, con parte real constante e igual a  $-3$  y parte imaginaria creciente con  $K$ . El diagrama resultante puede apreciarse en la figura 6.1. Podemos inferir del gráfico que el sistema será estable para cualquier valor de  $K$  positivo, y que la respuesta impulsiva será una combinación de exponenciales decrecientes para ganancias bajas, y luego será una senoide con envolvente exponencial, que oscilará a una frecuencia cada vez mayor a medida que  $K$  aumenta.

Cuando el sistema posee gran cantidad de polos y ceros, el análisis exacto se torna complejo. Además, a menudo no es necesario tener precisión elevada en todo el rango de operación. El método de Lugar de Raíces permite hacer el trazado sin tener que calcular las raíces de la ecuación característica.

## 6.2. Condiciones de módulo y fase

Comenzaremos el análisis considerando una función de transferencia genérica de lazo cerrado:

$$T(s) = \frac{G(s)H(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (6.5)$$

correspondiente a un sistema con realimentación unitaria. Nótese que el numerador de esta expresión coincide con el numerador de la función de transferencia de lazo abierto, es decir, los ceros de lazo abierto siempre coinciden con los ceros de lazo cerrado. Por el contrario, los polos de lazo cerrado del sistema son las raíces de la ecuación característica

$$F(s) = 1 + G(s)H(s) = 0 \quad (6.6)$$

De esta expresión se advierte que los polos de lazo cerrado del sistema son aquellos valores de  $s$  que cumplen dos condiciones

$$\begin{cases} |G(s)H(s)| = 1 & \text{condición de módulo} \\ \angle G(s)H(s) = \pm(2r + 1)\pi & \text{condición de fase} \end{cases} \quad (6.7)$$

Obsérvese que las condiciones arriba citadas deben ser cumplidas por la función de transferencia de lazo abierto. Cuando existe un parámetro variable en el lazo, los polos de lazo cerrado modificarán su posición, describiendo una trayectoria conocida como Lugar de Raíces.

### Forma normalizada

En un sistema lineal, el parámetro variable puede ser una ganancia, la posición de un polo o de un cero, o un coeficiente de los polinomios numerador o denominador. El método requiere que la ecuación característica sea escrita en la forma

$$1 + G(s)H(s) = 1 + K \frac{N(s)}{D(s)} \quad (6.8)$$

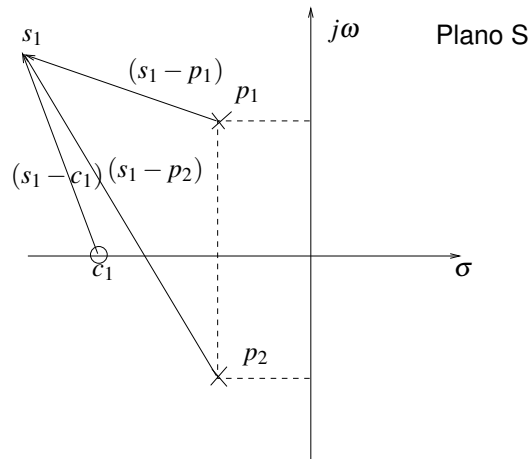
Cuando el parámetro variable es la ganancia de  $G(s)H(s)$  la ecuación característica ya se encuentra en esa forma. Si no es así, siempre puede ser llevada a esa forma, como se aprecia en el siguiente ejemplo.

### Ejemplo1

$$G(s)H(s) = 10 \frac{(s+1)}{(s+10)(s+K)} \quad (6.9)$$

La ecuación característica es

$$1 + G(s)H(s) = 1 + 10 \frac{(s+1)}{(s+10)(s+K)} = 0 = s(s+10) + K(s+10) + 10(s+1) \quad (6.10)$$



**Figura 6.2:** Interpretación gráfica del lugar de raíces

Ahora dividimos por los términos en los que no figura  $K$ :

$$1 + K \frac{(s + 10)}{s(s + 10) + 10(s + 1)} = 1 + K \frac{(s + 10)}{s^2 + 20s + 10} \tag{6.11}$$

Que se encuentra en la forma deseada. De ahora en mas, la función de transferencia de lazo abierto será  $K \frac{N(s)}{D(s)}$ . Cuando hablemos de polos y ceros del sistema hablemos de las raíces de  $D(s)$  y  $N(s)$ , respectivamente, y  $K$  será la ganancia.

**Una interpretación gráfica**

Una aproximación de “fuerza bruta” para el trazado del diagrama de lugar de raíces podría ser, entonces, recorrer todo el plano  $s$  y en cada punto analizar si el aporte en fase de todos los vectores tendidos desde los polos y ceros del sistema de lazo abierto suman un número impar de  $\pi$  radianes, y si su módulo suma 1. Por ejemplo, en figura 6.2 debería cumplirse que

$$\frac{|(s_1 - c_1)|}{|(s_1 - p_1)||s_1 - p_2|} = 1 \tag{6.12}$$

$$\angle(s_1 - c_1) - \angle(s_1 - p_1) - \angle(s_1 - p_2) = \pm(2r + 1)\pi \tag{6.13}$$

Este método es obviamente impracticable, pero el análisis permite elaborar algunas conclusiones interesantes. En todos los puntos del lugar de raíces (y sólo en ellos) deben verificarse las dos condiciones simultáneamente. En la práctica, la condición mas difícil de cumplir es la de fase, ya que si ésta se verifica, el módulo es simplemente una cuestión de escala. Es por esto que todas las reglas que enunciaremos se enfocan fundamentalmente en el cumplimiento de la condición de fase.



## 6.3. Reglas para la construcción del diagrama

El cumplimiento de las condiciones de módulo y fase permiten inferir una serie de simples reglas mediante las cuales es posible hacer un trazado aproximado del Lugar de raíces. A continuación describimos las más importantes.

### 6.3.1. Número de trayectorias

Como el numerador de la función de transferencia de lazo cerrado no se ve alterado por el parámetro, los ceros de lazo cerrado son fijos y coinciden con los de lazo abierto. Las variaciones en el parámetro modifican la ecuación característica, esto es, la ubicación de los polos de lazo cerrado. Por lo tanto, existirán tantas ramas como polos finitos tenga el sistema.

### 6.3.2. Inicio y fin de las trayectorias

Analizando la ecuación característica vemos que

$$1 + K \frac{N(s)}{D(s)} = 0 = D(s) + KN(s) \quad (6.14)$$

Para  $K = 0$  la ecuación se reduce a  $D(s) = 0$ . Pero  $D(s)$  es el denominador de la función de transferencia de lazo abierto. Es decir, el diagrama “arranca” en los polos de lazo abierto. Esto es razonable, ya que considerar  $K = 0$  es equivalente a abrir el lazo.

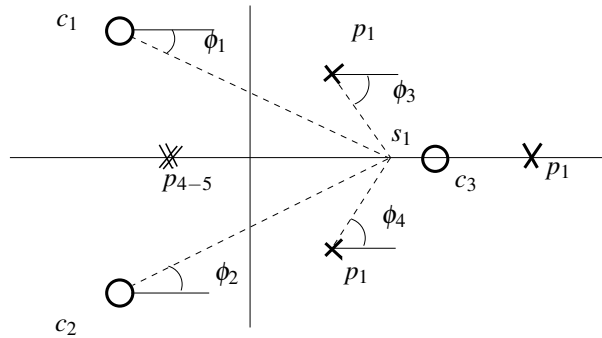
De la misma manera, para  $K \rightarrow \infty$  podemos despreciar  $D(s)$  frente a  $KN(s)$ . Por lo tanto la ecuación característica tiende a  $KN(s) = 0$  y los polos de lazo cerrado serían los ceros de lazo abierto. Es decir, el diagrama comienza en los polos de lazo abierto y termina en los ceros de lazo abierto. Si el sistema es estrictamente propio, con  $n$  polos y  $m$  ceros ( $n > m$ ), existirán  $m$  ramas que irán al encuentro de los ceros finitos, y  $n - m$  ramas que tenderán a infinito. Esas ramas tendrán un comportamiento asintótico.

### 6.3.3. Simetría respecto del eje real

Como los polos sólo pueden ser reales o complejos conjugados, el diagrama posee simetría con respecto al eje real.

### 6.3.4. Lugar de Raíces sobre el eje real

Circunscribamos nuestro análisis al eje real, y veamos qué ocurre con la condición de fase. La figura 6.3 ilustra un caso típico. Al desplazar el punto de prueba  $s_1$  sobre el eje real desde  $+\infty$  hasta  $-\infty$  y analizando la condición de fase se advierte que



**Figura 6.3:** Análisis sobre el eje real. El punto de estudio  $s_1$  se desplaza desde  $+\infty$  hasta  $-\infty$

- Los polos y ceros ubicados sobre el eje real, a la izquierda del punto en estudio, aportan fase nula.
- Los polos y ceros ubicados sobre el eje real, a la derecha del punto en estudio, aportan  $-\pi$  o  $+\pi$ , respectivamente. Obsérvese que si el número de singularidades (polos mas ceros) a la derecha es impar, la fase resultante será un múltiplo impar de  $\pi$ , cumpliendo con la condición de fase, mientras que si el número es par, será un múltiplo de  $2\pi$ .
- La fase de los polos y ceros complejos conjugados se cancela sobre el eje, por lo que no es necesario tenerlos en cuenta para el análisis.

La regla resultante es muy simple: si el número de singularidades (polos mas ceros) a la derecha del punto en estudio es impar, entonces el punto pertenece al lugar de raíces.

El análisis precedente supone que  $K$  es positivo, y por lo tanto no aporta fase. Si  $K$  fuese negativo, estaría aportando una fase de  $\pi$ , y la regla resultante sería la complementaria a la enunciada.

### 6.3.5. Número de asíntotas

Vimos que si el sistema es estrictamente propio, existirán ramas que van al encuentro de ceros en infinito. En un sistema con  $n$  polos finitos y  $m$  ceros finitos, la cantidad de ramas que van hacia infinito, y por lo tanto presentan un comportamiento asintótico es  $n - m$ .

### 6.3.6. Ángulo de las asíntotas

Las asíntotas dividen el plano  $s$  en sectores iguales. Para probar esto, escribamos la función de transferencia de lazo abierto en la siguiente forma:

$$K \frac{\prod_{i=1}^m (s - c_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)} \tag{6.15}$$

Ahora hagamos  $s \rightarrow \infty$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} K \frac{\prod_{i=1}^m (s - c_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)} \cong K \frac{s^m}{s^n} = \frac{K}{s^{n-m}} \quad (6.16)$$

Si a esta expresión le aplicamos la condición de fase (suponiendo  $K > 0$ ), tenemos

$$\angle \frac{1}{s^{n-m}} = (n-m)\angle s = (2r+1)\pi \quad (6.17)$$

Donde hemos aprovechado la condición de simetría del diagrama para poner  $-\pi$  en lugar de  $\pi$ . Los ángulos de las asíntotas resultan entonces

$$\phi_a = \frac{(2r+1)\pi}{(n-m)} \quad r = 1 \dots (n-m-1) \quad (6.18)$$

Es importante destacar que el ángulo de las asíntotas está determinado solamente por la *diferencia* entre el número de polos y ceros finitos del sistema (es decir, por la pendiente en alta frecuencia de la curva de respuesta en frecuencia). En efecto, un sistema con 3 polos y un sistema con 20 polos y 17 ceros tienen la misma cantidad de asíntotas, en los mismos ángulos.

### 6.3.7. Intersección de las asíntotas sobre el eje real

Debido a la simetría del diagrama, las asíntotas deben necesariamente cortarse sobre el eje real. Para calcular la ubicación de este punto, hacemos un razonamiento similar al anterior, pero en lugar de quedarnos sólo con la potencia más alta de  $s$  en los polinomios numerador y denominador, retendremos las dos potencias más altas. Específicamente, si expresamos la función de transferencia de lazo abierto como

$$K \frac{\prod_{i=1}^m (s - c_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)} = K \frac{s^m - s^{m-1} \sum c_i + \dots}{s^n - s^{n-1} \sum p_j + \dots} \quad (6.19)$$

donde hemos utilizado las propiedades de las raíces de un polinomio. Si hacemos el límite para  $s \rightarrow \infty$  podemos escribir

$$\lim_{s \rightarrow \infty} G(s)H(s) \cong K \frac{(s^m - s^{m-1} \sum c_i)}{(s^n - s^{n-1} \sum p_j)} = K \frac{(1 - s^{-1} \sum c_i)}{(s^{n-m} - s^{n-m-1} \sum p_j)} \quad (6.20)$$

El término  $s^{-1} \sum c_i$  tiende a cero cuando  $s \rightarrow \infty$ . En esas condiciones vale la siguiente propiedad

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - x) \cong \frac{1}{(1 + x)} \quad (6.21)$$

de forma tal que podemos escribir

$$K \frac{(1 - s^{-1} \sum c_i)}{(s^{n-m} - s^{n-m-1} \sum p_j)} \cong K \frac{1}{(s^{n-m} - s^{n-m-1} \sum p_j)(1 + s^{-1} \sum c_i)} \quad (6.22)$$

Multiplicando los dos paréntesis del denominador y quedándonos nuevamente con las dos potencias mas altas resulta

$$K \frac{1}{s^{n-m} - s^{n-m-1}(\sum p_j - \sum c_i) + \dots} \quad (6.23)$$

Considerando que el coeficiente de  $s^{n-m-1}$  es la suma de todas las raíces de un polinomio, podemos escribir

$$K \frac{1}{s^{n-m} - s^{n-m-1}(\sum p_j - \sum c_i) + \dots} \cong K \frac{1}{(s - \frac{\sum p_j - \sum c_i}{n-m})^{n-m}} \quad (6.24)$$

Si aplicamos a esta última expresión la condición de fase, la conclusión es análoga a la de la regla anterior (ecuación 6.16), con la diferencia que el punto está “desplazado” un valor

$$\sigma_a = \frac{\sum p_j - \sum c_i}{n-m} \quad (6.25)$$

que es justamente el punto de corte de las asíntotas sobre el eje real. Considerando que el diagrama es simétrico respecto del eje real, podemos hacer una simplificación adicional:

$$\sigma_a = \frac{\sum Re(p_j) - \sum Re(c_i)}{n-m} \quad (6.26)$$

### 6.3.8. Ángulos de arranque

Es a menudo importante saber con qué ángulo las trayectorias abandonarán un polo complejo. Este ángulo estará determinado por la fase aportada por todas las singularidades del sistema en las inmediaciones del polo de lazo abierto. Consideremos la figura 6.4, donde se ha trazado una circunferencia de radio  $\varepsilon$  alrededor del polo complejo  $p_1$ . En el punto de intersección de la trayectoria con el círculo deben verificarse las condiciones del lugar de raíces, es decir  $\theta_1 - (\phi_1 + \phi_2 + \phi_3) = -180$ . A medida que  $\varepsilon \rightarrow 0$  el vector  $v_1$  tiende a ser tangente a la trayectoria (y por lo tanto,  $\phi_1$  tiende a ser el ángulo de arranque), mientras que los restantes ángulos quedan determinados por las coordenadas de las singularidades de lazo abierto:

$$\phi_2 = -\pi/2 \quad (6.27)$$

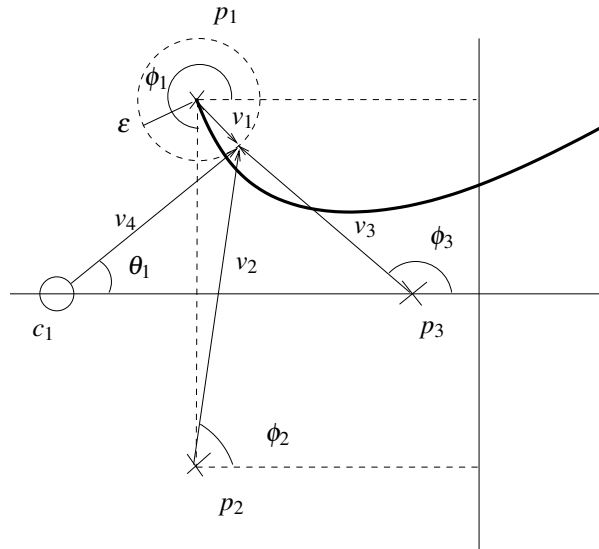
$$\phi_3 = \tan^{-1}\left(\frac{im(p_1)}{re(p_1) - re(p_3)}\right) \quad (6.28)$$

$$\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{im(p_1)}{re(c_1) - re(p_1)}\right) \quad (6.29)$$

$$\Rightarrow \phi_1 = 180 + \theta_1 - (\phi_2 + \phi_3) \quad (6.30)$$

### 6.3.9. Puntos de quiebre

Otro punto de interés es aquel donde las trayectorias se separan del eje real. Como en esos “puntos de quiebre” existen raíces múltiples, deben anularse tanto la ecuación característica



**Figura 6.4:** Cálculo del ángulo de arranque

como su derivada:

$$1 + KG(s) = 0 \tag{6.31}$$

$$\frac{\partial(1 + KG(s))}{\partial s} = K \frac{\partial G(s)}{\partial s} = 0 \tag{6.32}$$

Los puntos de quiebre son, entonces, puntos singulares de la función  $G(s) = -\frac{1}{K}$  que calculamos resolviendo

$$\frac{\partial G(s)}{\partial s} = 0 \tag{6.33}$$

Este análisis resulta en todos los máximos y mínimos de la función, tanto para valores de  $K$  positivos como negativos, correspondientes a los puntos de quiebre del diagrama de Lugar de Raíces ( $K > 0$ ) y su complementario ( $< 0$ ). Aquellos valores que se produzcan en el eje real sobre el lugar de raíces correspondiente serán los puntos de quiebre.

### 6.3.10. Intersección con el eje imaginario

La intersección con el eje imaginario puede obtenerse de diversas maneras. El valor de  $K$  correspondiente al cruce de las ramas por el eje  $j\omega$  puede calcularse fácilmente mediante el método de Routh. Una vez calculado este valor, pueden obtenerse las raíces de la ecuación característica, por ejemplo, con algún programa de cálculo de raíces. Otra forma es utilizar la ecuación auxiliar en el arreglo de Routh, lo que conduce a la resolución de una ecuación de orden reducido.

### 6.3.11. Efecto de la adición de polos y ceros en el semiplano izquierdo

El agregado de polos en el semiplano izquierdo tiene un efecto inestabilizador en el sistema, “torciendo” las ramas del diagrama hacia el semiplano derecho. El efecto, simple de ver agregando polos a un sistema de la forma  $G(s) = K/(s+a)$ , puede generalizarse para todo tipo de sistemas. De la misma forma, el agregado de ceros en el semiplano izquierdo tiene un efecto estabilizador, al desviar las ramas hacia el interior del semiplano izquierdo.

## 6.4. Un ejemplo final

A modo de conclusión, apliquemos las reglas obtenidas al análisis del siguiente sistema:

$$G(s) = K \frac{(s+8)}{(s+4)(s+6)(s^2+4s+8)} \quad (6.34)$$

El sistema tiene un cero en  $s = -8$  y cuatro polos en  $s_1 = -4$ ,  $s_2 = -6$  y  $s_{3,4} = -2 \pm j2$ .

- Con cuatro polos, existirán 4 ramas en el diagrama. Uno de los polos irá al encuentro del cero en  $s = -8$  y los otros tres irán a  $\infty$ . Por lo tanto existirán tres asíntotas.
- Existirá lugar de raíces entre los polos en  $s = -4$  y  $s = -6$ , y a la izquierda del cero en  $s = -8$ . De hecho, una de las ramas que van hacia  $\infty$  es el eje real negativo.
- Los ángulos de las asíntotas son  $\pi/3$ ,  $\pi$  y  $5\pi/3 = -\pi/3$
- Las asíntotas se cortan en  $\sigma_a = (-2 - 2 - 4 - 6 + 8)/3 = -2$
- El ángulo de partida en las singularidades complejas es  $\phi_a = 180^\circ + \text{atan}(1/3) - 90^\circ - 45^\circ - \text{atan}(1/2) = 36.87^\circ$
- Para calcular los puntos de quiebre derivamos  $G(s)$  respecto de  $s$ :

$$\frac{\partial G(s)}{\partial s} = \frac{1}{s^4 + 14s^3 + 72s^2 + 176s + 192} - \frac{(s+8)(4s^3 + 42s^2 + 144s + 176)}{(s^4 + 14s^3 + 72s^2 + 176s + 192)^2} = 0 \quad (6.35)$$

$$1 - \frac{(s+8)(4s^3 + 42s^2 + 144s + 176)}{(s^4 + 14s^3 + 72s^2 + 176s + 192)} = 0 \quad (6.36)$$

$$(s+8)(4s^3 + 42s^2 + 144s + 176) = (s^4 + 14s^3 + 72s^2 + 176s + 192) \quad (6.37)$$

$$3s^4 + 60s^3 + 408s^2 + 1152s + 1216 = 0 \quad (6.38)$$

Resolviendo esta última ecuación, los puntos de quiebre están en  $s = -5.35$  (salida) y  $s = -9.35$  (llegada)

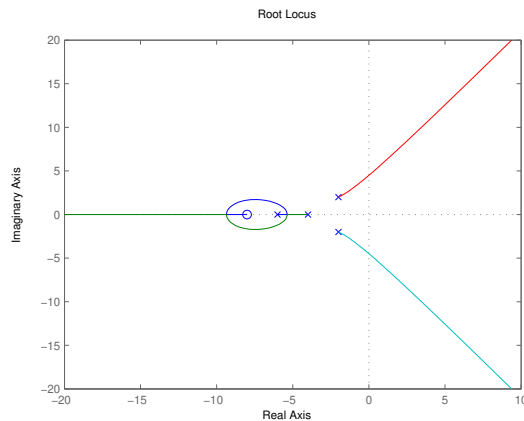


Figura 6.5: Ejemplo final

- La intersección con el eje real se calcula utilizando el método de Routh. La ecuación característica es:

$$(s^2 + 10s + 24)(s^2 + 4s + 8) + K(s + 8) = 0 \tag{6.39}$$

$$s^4 + 14s^3 + 72s^2 + (176 + K)s + (192 + 8K) = 0 \tag{6.40}$$

$s^4$	1	72	$(192 + 8K)$	
$s^3$	14	$(176 + K)$	0	
$s^2$	$\frac{832 - K}{14}$	$(192 + 8K)$	0	$\rightarrow K < 832$
$s^1$	$\frac{(\frac{832 - K}{14})(176 + K) - 14(192 + 8K)}{(\frac{832 - K}{14})}$	0		$\rightarrow K < 106.79$
$s^0$	$192 + 8K$			$\rightarrow K > -24$

El cruce de las raíces en el eje  $j\omega$  se produce entonces para  $K = 106.79$ . Utilizando la ecuación auxiliar

$$\frac{821 - 106.79}{14}s^2 + (192 + 8 * 106.79) = 0 \tag{6.41}$$

se verifica que la intersección se realiza en  $s = \pm j4.49$ .

El diagrama resultante se aprecia en la figura 6.5.

## 6.5. Problemas

- La función de transferencia siguiente corresponde al control de posición de una antena. Hallar el lugar de raíces.

$$G(s) = K \frac{10}{(1 + 0.2s)(s^2 + 8s + 100)}$$

$$H(s) = 1$$

2. Trazar el lugar de raíces del siguiente sistema. La transferencia corresponde al control de velocidad de un motor.

$$G(s) = \frac{K}{(s+583)(s+5)}$$

$$H(s) = \frac{4.7}{(s+166)}$$

3. El control de velocidad de una turbina hidráulica posee la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = K \frac{(1-3s)}{(1+1.5s)(10s)}$$

$$H(s) = 1$$

Hallar el lugar de raíces.

4. En base al lugar de raíces determinar para qué valores de  $K$  el sistema es estable.

$$G(s) = K \frac{(s^2+2s+1)}{s(s+4)(s+1)}$$

$$H(s) = 1$$

5. Dada la siguiente transferencia :

$$G(s) = K \frac{(s^2+4s+1000)}{(s+1)(s+5)(s+11)}$$

dibujar el lugar de raíces.

6. Dada la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{10K}{(s+1)(s+10)}$$

y considerando realimentación unitaria, elegir el valor de  $K$  (módulo y fase) tal que el sistema de lazo cerrado presente polos en  $s_1 = -8 + j4$  y  $s_2 = -8 - j4$ . Para ello, calcule el módulo y fase que aportan los polos de la planta en  $s_1$  y  $s_2$ . La fase restante para que estos puntos pertenezcan al lugar de raíces (es decir, que se cumplan las condiciones de módulo y fase) deben ser aportadas por  $K$ . Ahora

- Implemente  $K(s)$  como  $K(s) = \frac{(s+a)}{(s+b)}$ , con  $a$  y  $b$  reales. ¿Es el sistema de lazo cerrado estable?
- Si el sistema calculado en el punto anterior no es estable, recalcule para  $K(s) = C \frac{(s+a)}{(s+b)}$  con  $a$ ,  $b$  y  $C$  reales de forma tal que el sistema sea estable.  $C$  es un grado de libertad adicional. Utilícelo adecuadamente.



## Referencias

- [1] K. Ogata, "Modern Control Engineering", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA, 3rd edition, 1997.
- [2] B. C. Kuo, "Automatic Control Systems", Prentice-Hall International, London, England, 9th edition, 1962.
- [3] C. H. Houpis, S. N. Sheldon, J. J. D'Azzo, "Linear Control System Analysis and Design". Fifth Edition, Revised and Expanded (Automation and Control Engineering). Taylor and Francis, 2003.
- [4] C.H.Houpis, S.N.Sheldon, "Linear Control System Analysis and Design with MATLAB , Sixth Edition (Automation and Control Engineering, Book 53)". CRC Press, 2014.
- [5] G. F. Franklin, J. D. Powell, A. Emami-Naeini. "Feedback Control of Dynamic Systems". Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, fourth edition, 2002.
- [6] N. S. Nise, "Control System Engineering", John Wiley and Sons Inc., New York, 2011.
- [7] M. Gopal, I.J. Nagrath, " A Textbook of Control Systems Engineering", New Age International (P) Ltd., 2010.
- [8] G. Goodwin, S. Grabe.,M. Salgado, "Control System Design", Pearson Education, Upper Saddle River, NJ, eleventh/international edition, 2015
- [9] R. C. Dorf, R. H. Bishop, "Modern Control Systems". Pearson 2008.

# CAPÍTULO 7

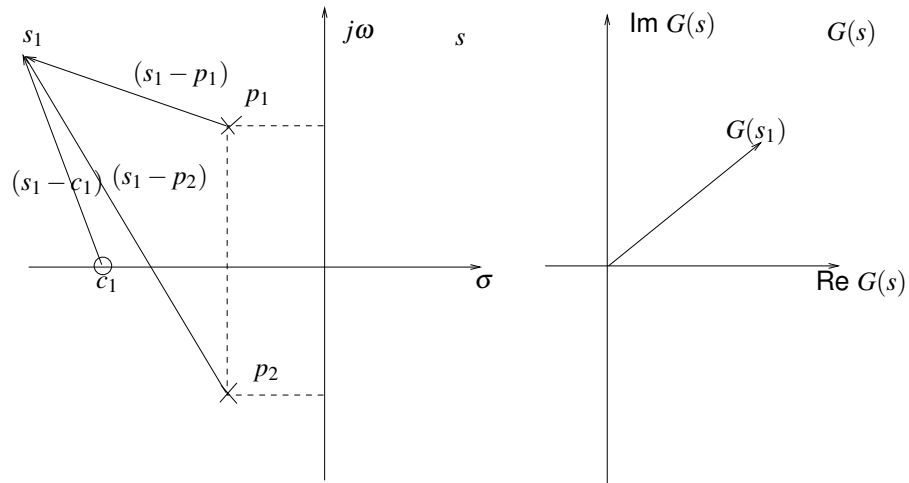
## Criterio de Nyquist

### Introducción

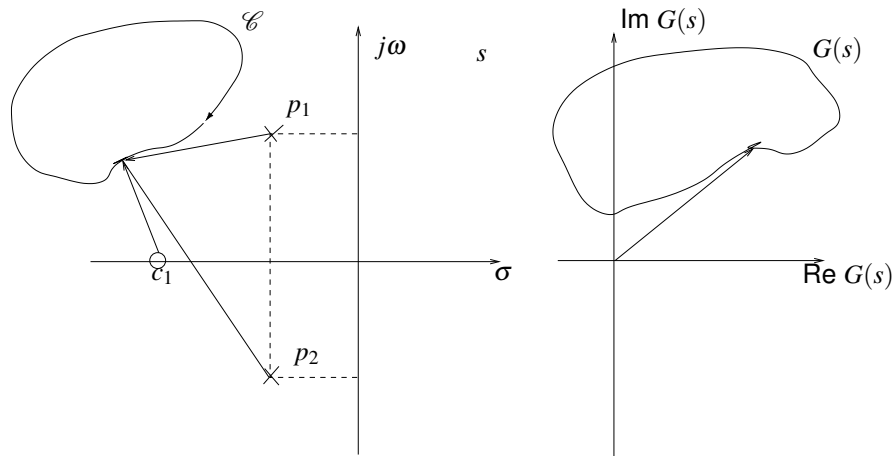
El método de Nyquist está basado en el trazado del diagrama polar de la respuesta en frecuencia de un sistema. Es una aplicación del *principio del argumento* al estudio de la estabilidad a lazo cerrado. La técnica permite establecer medidas cuantitativas de estabilidad relativa, facilitando así el diseño de técnicas de compensación. En este capítulo analizaremos el principio del argumento, su aplicación al estudio de la estabilidad, la trayectoria de Nyquist, casos especiales y ejemplos de aplicación. En la capítulo siguiente, se aplicarán los conceptos desarrollados al análisis de estabilidad mediante trazados de Bode. Estos permiten una construcción mas sistemática, y al mismo tiempo proveen información numérica en forma mas directa.

### 7.1. El principio del argumento

Hemos analizado en capitulos anteriores cómo una función racional  $F(s)$  puede ser vista como un *operador* que mapea el plano  $s$  en un nuevo plano  $Re(F(s)), Im(F(s))$ . En la figura 7.1 puede apreciarse una representación gráfica de esta operación. Resulta interesante analizar qué ocurre en el plano  $F(s)$  cuando en el plano  $s$  se recorre una trayectoria cerrada  $\mathcal{C}$ . El único requisito que pediremos es que la función  $F(s)$  sea *analítica* en todos los puntos de  $\mathcal{C}$ . En el caso de funciones racionales de  $s$ , esto equivale a decir que la trayectoria no pasa por encima de ningún polo de  $F(s)$ . Recordemos que una función es analítica en un punto si en el mismo existe la función y todas sus derivadas. Como sobre un polo  $F(s)$  tiende a infinito, se pierde la analiticidad. En la práctica esto implica que la trayectoria elegida debe “esquivar” los polos de  $F(s)$ . De esta manera se asegura que trayectorias cerradas en el plano  $s$  se mapean en



**Figura 7.1:** Mapeo entre el plano  $s$  y el plano  $G(s)$ .

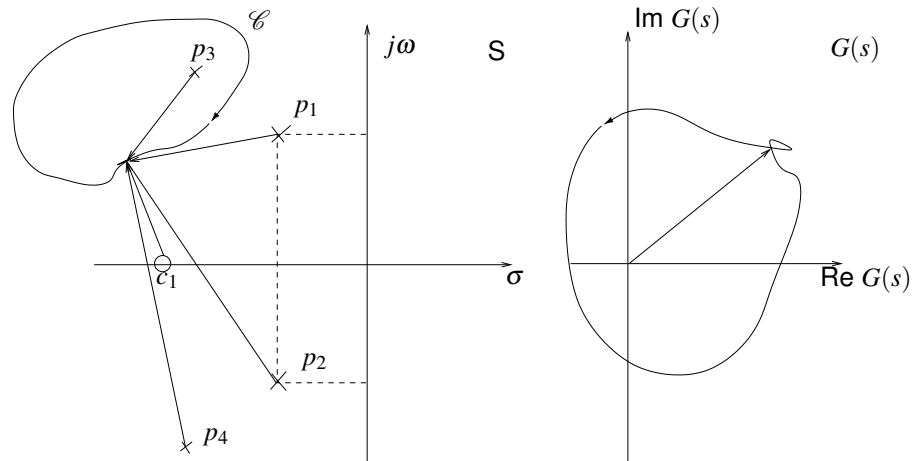


**Figura 7.2:** Mapeo de trayectorias cerradas.

trayectorias cerradas en el plano  $F(s)$ . Estas restricciones hacen de  $F(s)$  una *transformación conforme*, es decir que preserva los ángulos.

Analicemos, por ejemplo, la situación ilustrada en la figura 7.2. La trayectoria  $\mathcal{C}$  no encierra ninguna singularidad de  $F(s)$ . Si analizamos el *aporte acumulado de fase* de todas las singularidades “externas” a la trayectoria vemos que el mismo es nulo, es decir, en el plano  $F(s)$  la trayectoria resultante no encierra al origen de coordenadas.

La situación es diferente si la trayectoria encierra una singularidad de  $F(s)$ . En efecto, como puede apreciarse en la figura 7.3 el vector tendido desde el polo interior acumula una rotación neta de  $-2\pi$  al recorrer la trayectoria completa. La fase acumulada por todas las singularidades será entonces  $-2\pi$ , lo que implica que en el plano  $F(s)$  la trayectoria resultante rodeará una vez al origen, y que el sentido de recorrido será el contrario al de la trayectoria  $\mathcal{C}$ , debido a que el



**Figura 7.3:** Trayectoria encerrando un polo de lazo abierto.

aporte de fase de los polos es negativo.

Siguiendo el mismo razonamiento para ceros y múltiples singularidades en el interior de  $\mathcal{C}$ , podemos arribar fácilmente a la expresión matemática del *principio del argumento*:

$$N = Z - P \quad (7.1)$$

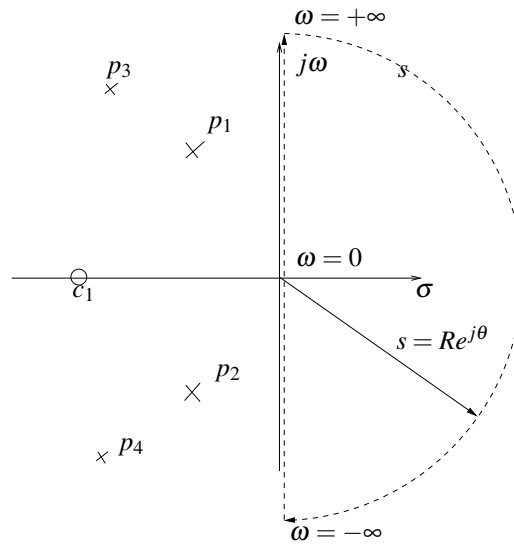
donde

- N: número de giros alrededor del origen de la trayectoria resultante en el plano  $F(s)$ . Este número puede ser positivo o negativo, dependiendo del signo de la fase acumulada.
- Z: número de ceros de  $F(s)$  encerrados por la trayectoria  $\mathcal{C}$ .
- P: número de polos de  $F(s)$  encerrados por la trayectoria  $\mathcal{C}$ .

Un valor negativo de  $N$  significa que la trayectoria resultante en el plano  $F(s)$  tiene el sentido contrario al de la trayectoria  $\mathcal{C}$ . Obsérvese que el concepto de punto “interior” a la trayectoria es convencional. Todo el análisis se hizo considerando como punto interior a la trayectoria aquel que se sitúa a la derecha de la misma, cuando se recorre  $\mathcal{C}$  en el sentido horario. Cualquier otra convención es válida, siempre que se respete a lo largo de todo el análisis.

## 7.2. Aplicación al estudio de estabilidad

Para utilizar el principio del argumento en el estudio de la estabilidad de un sistema, haremos dos consideraciones. En primer lugar, usaremos como  $F(s)$  la ecuación característica  $1 + G(s)H(s)$ . En segundo lugar, elegiremos una trayectoria  $\mathcal{C}$  que abarque todo el semiplano derecho del plano  $s$ . De esta forma, en la expresión del principio del argumento quedaría



**Figura 7.4:** Trayectoria de Nyquist.

- $Z$ =número de ceros de  $1 + G(s)H(s)$  en el semiplano derecho del plano  $s$ = número de **polos de lazo cerrado** en el semiplano derecho.
- $P$ =número de polos de  $1 + G(s)H(s)$  en el semiplano derecho del plano  $s$ = número de **polos de lazo abierto** en el semiplano derecho.

Como los polos de lazo abierto son conocidos, puede inferirse cuántos polos de lazo cerrado del sistema tienen parte real positiva.

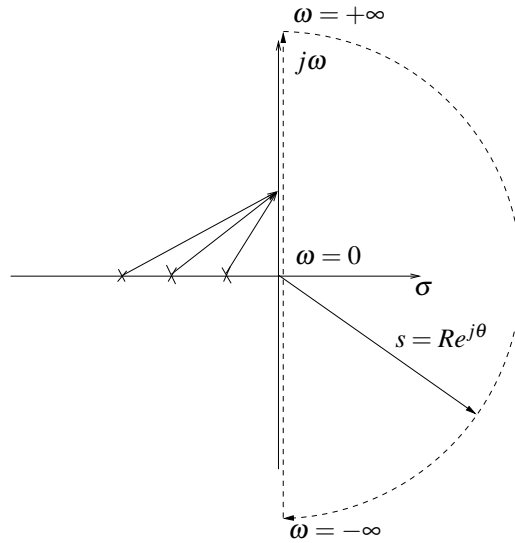
En la práctica, lo habitual es tomar  $F(s) = G(s)H(s)$ , evaluando los giros con respecto al punto  $-1$ .

### 7.2.1. Trayectoria de Nyquist

La trayectoria de Nyquist para un sistema sin polos sobre el eje  $j\omega$  puede apreciarse en la figura 7.4. Consta básicamente de tres zonas:

- Zona 1: El eje  $j\omega$  desde  $\omega = 0^+$  hasta  $\omega = +\infty$ .
- Zona 2: El eje  $j\omega$  desde  $\omega = -\infty$  hasta  $\omega = 0^-$ .
- Zona 3: Un arco de circunferencia de radio infinito, definido por la expresión  $s = Re^{j\theta}$ , con  $R \rightarrow \infty$

El sentido de giro es arbitrario, pero habitualmente se toma el sentido horario, ya que convencionalmente la respuesta en frecuencia se dibuja para frecuencias crecientes. Aquí pueden hacerse algunos comentarios:



**Figura 7.5:** Ejemplo 1.

- Evaluar  $G(s)H(s)$  en La zona 1 es equivalente a calcular la *respuesta en frecuencia* de la función de lazo abierto, una operación a la que estamos acostumbrados. Si la configuración cero-polar es intrincada, el diagrama de Bode puede ser utilizado para ayudar en el gráfico.
- La zona 2 es idéntica a la zona 1, con la diferencia que  $\omega < 0$ , es decir, hay  $180^\circ$  de fase adicionales. Por tal motivo la trayectoria es *siempre* la *imagen especular* de la correspondiente a la zona 1. Además, el sentido de recorrido es siempre el contrario.
- En todos los sistemas propios (mas polos que ceros) la zona 3 se mapea en el origen.

**Ejemplo1**

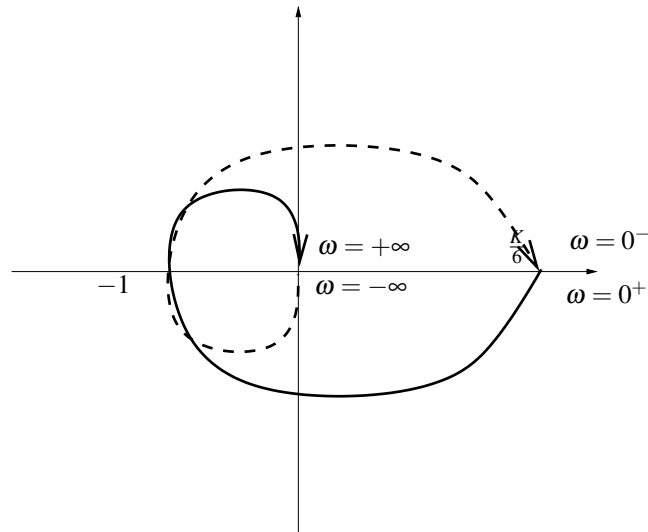
Sea el sistema

$$G(s)H(s) = \frac{K}{(s+1)(s+2)(s+3)} \tag{7.2}$$

En la figura 7.5 podemos ver la configuración cero-polar del sistema, junto con la trayectoria de Nyquist. Analicemos el aporte en módulo y fase de cada uno de los vectores según se recorre la Zona 1:

$\omega \rightarrow 0:$	$ G(s)  \rightarrow \frac{K}{6}$
$\omega \rightarrow \infty:$	$ G(s)  \rightarrow 0$
trayectoria $\mathcal{C}$ .	$\angle G(s) \rightarrow 0^\circ$
	$\angle G(s) \rightarrow -270^\circ$

Como el sistema sólo tiene polos, la fase negativa aumenta monótonamente. La zona 2 es,



**Figura 7.6:** Diagrama de Nyquist para el Ejemplo 1.

como siempre, la imagen en espejo de la zona 1. En la zona 3 tenemos que  $s = Re^{j\theta}$  y por lo tanto

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{K}{(Re^{j\theta} + 1)(Re^{j\theta} + 2)(Re^{j\theta} + 3)} = \frac{K}{R^3} e^{-j3\theta} \quad (7.3)$$

Esta expresión indica que, cuando en el plano  $s$  se recorren  $\pi$  radianes en el sentido horario, uniendo el punto correspondiente a  $+\infty$  con  $-\infty$ , en el plano  $G(s)$  se recorren  $3\pi$  radianes, en el sentido contrario al de  $\mathcal{C}$ , uniendo los puntos correspondientes. El diagrama resultante puede verse en la figura 7.6.

Trazado el diagrama, resta analizar la estabilidad. Debemos computar los giros realizados respecto al punto  $-1$ . Obsérvese que variar el valor de  $K$  es equivalente a modificar la escala del dibujo, sin cambiar su forma. Por esta razón, en lugar de redibujar el diagrama para cada valor de  $K$  a analizar, lo habitual es “mover” la posición del punto  $-1$  a lo largo del eje real negativo. Para ganancias bajas, el punto  $-1$  se encuentra “fuera” del diagrama, con lo cual  $N = 0$ . Como el sistema no tiene polos de lazo abierto dentro de la trayectoria de Nyquist,  $P = 0$  y por lo tanto  $Z = 0$ . El sistema es estable.

Para ganancias “altas” el punto correspondiente a  $-1$  queda “adentro” del diagrama. Esto puede verificarse trazando un rayo desde el punto  $-1$  y analizando cuántas trayectorias entran y salen del rayo. En este caso,  $N = 2$ , ya que se registran 2 giros en el mismo sentido de circulación que en la trayectoria de Nyquist. Como  $P = 0$  se concluye que  $Z = 2$ , es decir, existen 2 polos dentro de la trayectoria de Nyquist, es decir, dos polos en el semiplano derecho, y el sistema es inestable.

Si el punto  $-1$  coincidiera con el punto en el que las trayectorias correspondientes a la zonas 1

y 2 se intersectan, el sistema se encuentra en el límite de inestabilidad. Obsérvese que ese punto pertenece a la zona 1, que corresponde al eje  $j\omega$ . Es decir, en ese punto,  $G(j\omega)H(j\omega) = -1$ , es decir, el sistema tiene polos de lazo cerrado sobre el eje  $j\omega$ .

Si en lugar de cerrar la trayectoria de Nyquist abarcando el semiplano derecho la misma se cerrara abarcando el semiplano izquierdo, el análisis también puede hacerse sin inconvenientes. En este caso se requiere que todos los polos de lazo se encuentren dentro de la trayectoria para asegurar estabilidad. Las trayectorias correspondientes a las zonas 1 y 2 son las mismas que antes. Ahora, para ganancias bajas tenemos  $N = 0$ ,  $P = 3$  (hay 3 polos de lazo abierto en el interior de la trayectoria de Nyquist) y por lo tanto  $Z = 3$ , es decir, existen 3 polos de lazo cerrado en el interior del semiplano izquierdo, por lo que el sistema es estable. Para ganancias altas,  $N = -2$ , ya que la trayectoria resultante tiene sentido de giro contrario a la trayectoria de Nyquist, y por lo tanto  $Z = N + P = -2 + 3 = 1$ . Hay un polo estable, por lo que los 2 restantes deben estar en el semiplano derecho, haciendo al sistema inestable. Las conclusiones sobre estabilidad son, evidentemente, las mismas, independientemente de qué trayectoria se elija, siempre y cuando la misma abarque enteramente uno de los dos semiplanos. El resultado es también coincidente con el análisis realizado utilizando el Lugar de Raíces. La mínima ganancia que hace que  $N = -2$  es la que hace que dos ramas de diagrama de lugar de raíces crucen el eje  $j\omega$ .

### 7.2.2. Polos sobre el eje imaginario

Cuando existen polos sobre el eje  $j\omega$  la trayectoria de Nyquist debe ser modificada para preservar la analiticidad. Para lograr esto, definamos una zona 4, en la cual se rodean los polos sobre el eje usando una semicircunferencia  $s = re^{j\phi}$  con  $r \rightarrow 0$ . Esto puede apreciarse en la figura 7.7. Ilustremos el análisis con el siguiente ejemplo:

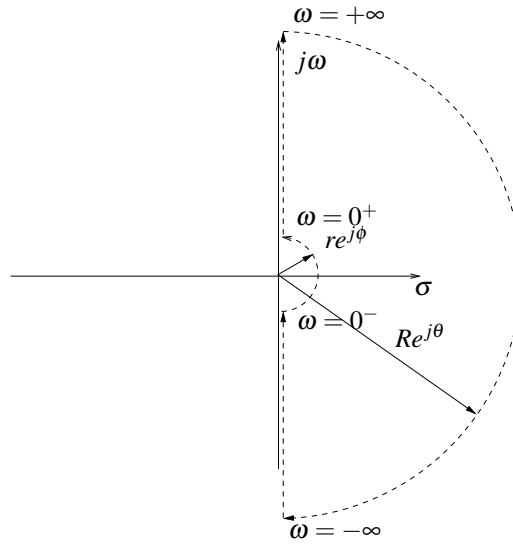
#### Ejemplo2

Sea el sistema

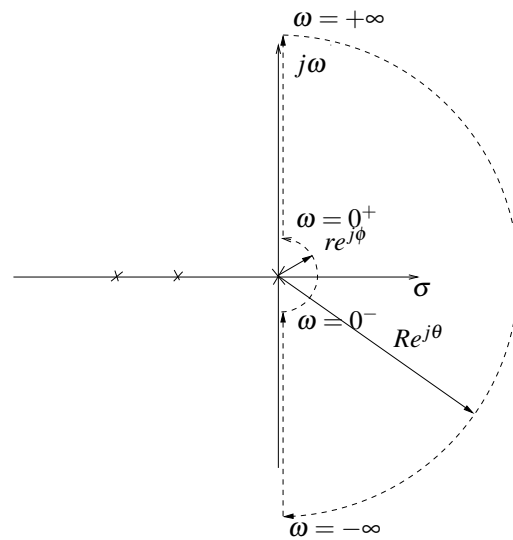
$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+2)(s+3)} \quad (7.4)$$

En la figura 7.8 podemos ver la configuración cero-polar del sistema, junto con la trayectoria de Nyquist. Analicemos el aporte en módulo y fase de cada uno de los vectores según se recorre la trayectoria  $\mathcal{C}$ .

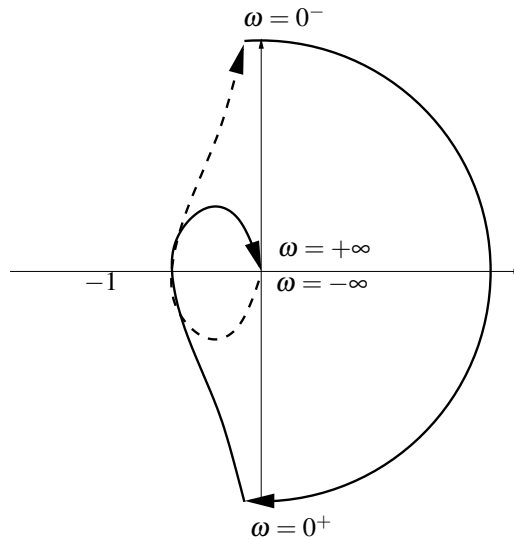




**Figura 7.7:** Trayectoria modificada



**Figura 7.8:** Ejemplo 2



**Figura 7.9:** Diagrama de Nyquist para el Ejemplo 2.

Zona 1:

$$\omega \rightarrow 0^+:$$

$$|G(s)| \rightarrow \infty$$

$$\angle G(s) \rightarrow -90^\circ$$

$$\omega \rightarrow \infty:$$

$$|G(s)| \rightarrow 0$$

$$\angle G(s) \rightarrow -270^\circ$$

Como el sistema sólo tiene polos, la fase negativa aumenta monótonamente. La zona 2 es, como siempre, la imagen en espejo de la zona 1. En la zona 3 tenemos que  $s = Re^{j\theta}$  y por lo tanto

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{K}{(Re^{j\theta})(Re^{j\theta} + 2)(Re^{j\theta} + 3)} = \frac{K}{R^3} e^{-j3\theta} \quad (7.5)$$

Esta expresión indica que, cuando en el plano  $s$  se recorren  $\pi$  radianes en el sentido horario, uniendo el punto correspondiente con  $+\infty$  con  $-\infty$ , en el plano  $G(s)$  se recorren  $3\pi$  radianes, en el sentido contrario al de  $\mathcal{C}$ , uniendo los puntos correspondientes.

En la zona 4 tenemos  $s = re^{j\phi}$  y por lo tanto

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{K}{Re^{j\phi}(Re^{j\phi} + 2)(Re^{j\phi} + 3)} = \frac{K}{6R} e^{-j\phi} \quad (7.6)$$

El módulo tiende a infinito, y la fase recorre  $\pi$  radianes cuando  $\phi$  rota  $\pi$  radianes, en sentido contrario al de la trayectoria de Nyquist, uniendo  $0^-$  con  $0^+$ . El diagrama completo resultante se aprecia en la figura 7.9. El análisis de estabilidad es enteramente similar al del ejemplo 1.

La trayectoria podría haberse cerrado usando una semicircunferencia que rodeara al polo con el sentido contrario. El análisis es similar, con dos consideraciones. El sentido de giro en la zona 4 es el contrario, y ahora el polo ha quedado dentro de la trayectoria de Nyquist. Teniendo en cuenta estas consideraciones, el análisis de estabilidad permite obtener las mismas conclusiones.

### 7.2.3. Márgenes de estabilidad relativa

Como explicáramos anteriormente, la condición  $|G(j\omega)H(j\omega)| = 1$ ,  $\angle G(j\omega)H(j\omega) = \pi$  se corresponde con polos de lazo cerrado sobre el eje  $j\omega$ , es decir, un sistema en el borde de la inestabilidad. Podemos definir entonces como una medida de estabilidad relativa la distancia a esta condición. Para hacer una medida estandarizada, fijaremos una de las condiciones y mediremos la restante.

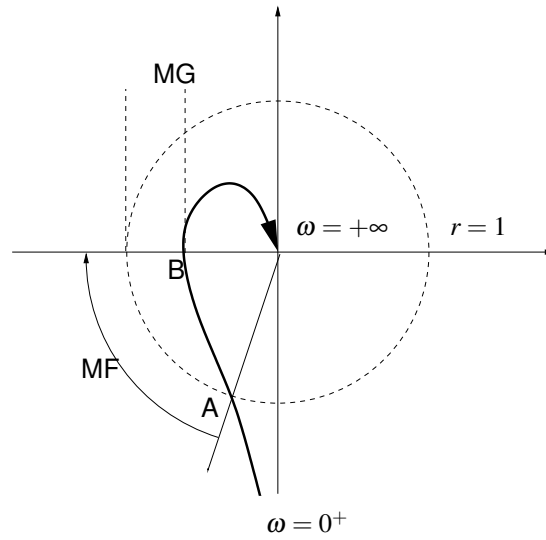
El lugar geométrico de  $|G(j\omega)H(j\omega)| = 1$  es un círculo de radio unitario centrado en el origen. La trayectoria correspondiente a la zona 1 intersectará a este círculo en un punto  $A$ , tal como puede apreciarse en la figura 7.10. La fase adicional necesaria en ese punto para cumplir con la condición  $\angle G(j\omega)H(j\omega) = \pi$  es el *Margen de Fase* del sistema. A continuación damos una definición más exacta:

*El margen de fase es la cantidad de fase en atraso a agregar, cuando  $|G(j\omega)H(j\omega)| = 1$ , para cumplir con  $\angle G(j\omega)H(j\omega) = \pi$ .*

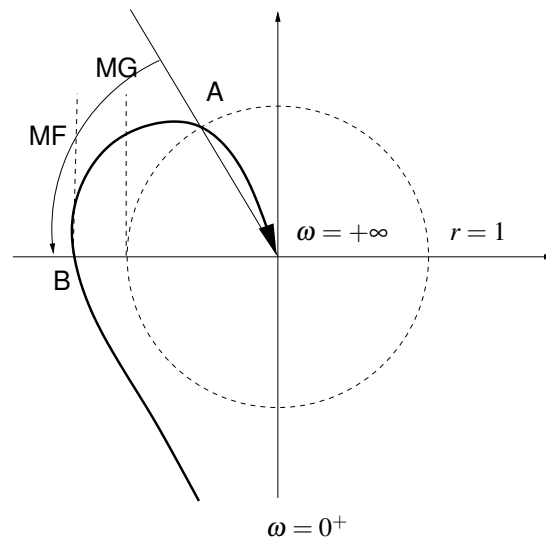
Según esta definición, si es necesario *agregar fase negativa* el margen es *positivo*. Si existiera un operador que solamente agregara fase (es decir, que sólo rotara el diagrama), el MF es la fase que habría que agregar para desestabilizar el sistema. De la misma manera, la condición  $\angle G(j\omega)H(j\omega) = \pi$  se corresponde con el semieje negativo. La trayectoria correspondiente a la zona 1 intersectará este semieje en un punto  $B$ . La atenuación o amplificación necesaria para llevar el punto  $B$  al punto  $-1$  es el *Margen de Ganancia* del sistema. Formalmente

*El margen de ganancia es la cantidad de ganancia a agregar, cuando  $\angle G(j\omega)H(j\omega) = \pi$  para cumplir con  $|G(j\omega)H(j\omega)| = 1$ .*

Entonces, en escala lineal  $MG = \frac{1}{|G(j\omega_B)H(j\omega_B)|}$ . Si debe *agregarse* ganancia, el margen es *positivo*. Si es necesario atenuar, el margen es negativo. Los signos se corresponden a los de la ganancia en decibelios (una atenuación es una ganancia negativa en escala logarítmica). Analizando las condiciones de estabilidad, puede llegarse a las conclusiones expresadas en el cuadro 7.1. En el caso en que los márgenes tengan signos diferentes, el criterio no decide y hay que recurrir a  $Z = N - P$ . Un sistema puede tener más de un margen de ganancia y fase. En estos casos de *estabilidad condicional* el análisis debe ser cuidadoso.



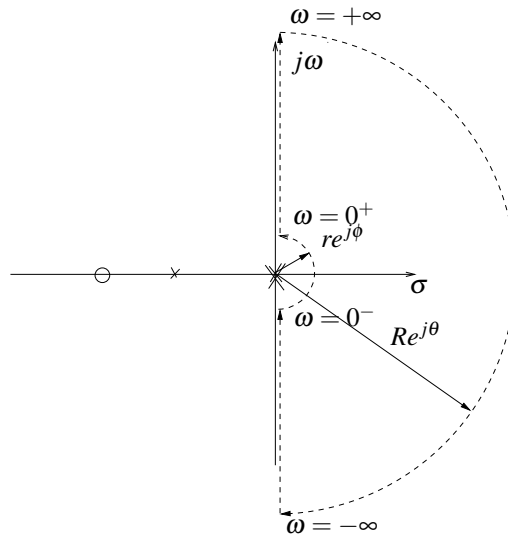
**Figura 7.10:** Márgenes de estabilidad relativa. Sistema estable.



**Figura 7.11:** Márgenes de estabilidad relativa. Sistema inestable

MG	MG	
>0	>0	Sistema estable
<0	<0	Sistema inestable
>0	<0	No decide
<0	>0	No decide

**Cuadro 7.1:** Márgenes de estabilidad



**Figura 7.12:** Ejemplo final. Trayectoria de Nyquist

### 7.2.4. Un ejemplo final

Sea el sistema

$$G(s) = K \frac{(s + 100)^2}{s^2(s + 10)} \tag{7.7}$$

Como el sistema tiene un par de polos en el origen, la trayectoria de Nyquist es la indicada en la figura 7.12. Analicemos las diferentes zonas de la trayectoria para trazar el diagrama en forma aproximada.

Zona 1:

$\omega \rightarrow 0$ :

$$|G(s)| \rightarrow \infty$$

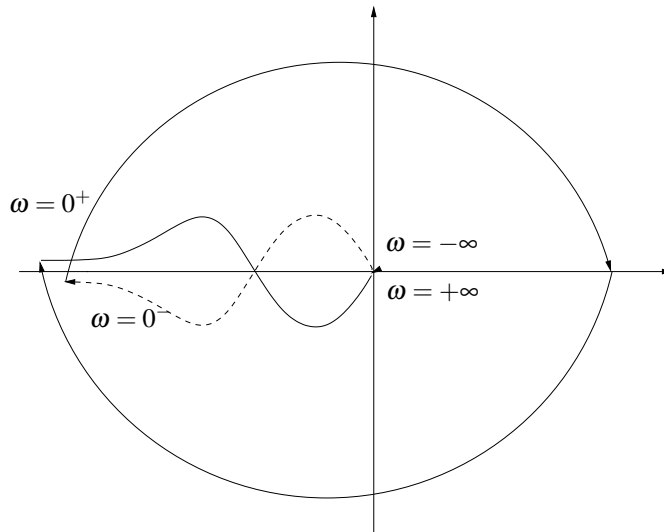
$$\angle G(s) \rightarrow -180^\circ$$

$\omega \rightarrow \infty$ :

$$|G(s)| \rightarrow 0$$

$$\angle G(s) \rightarrow -90^\circ$$

La fase comienza en  $-180^\circ$  debido a los dos polos en el origen. Si recorremos la trayectoria



**Figura 7.13:** Ejemplo final. Diagrama de Nyquist.

en el sentido indicado, lo que primero actúa es el polo en  $\omega = 10$ , por lo que la fase tiende a ser aun mas negativa, es decir, el diagrama “gira” en el sentido horario. En frecuencias mas altas comienza el aporte en fase del cero doble, con lo cual aparece una rotación en el sentido antihorario que hace que para  $\omega \rightarrow \infty$  la fase tienda a  $-90^\circ$ . La zona 2, como siempre, es la imagen en espejo de la zona 1.

La zona 3 se mapea en el origen del plano de coordenadas, al ser el sistema estrictamente propio. En la zona 4 tenemos

$$G(s) = K \frac{(re^{j\phi} + 10)}{re^{j2\phi}(re^{j\phi} + 10)} \tag{7.8}$$

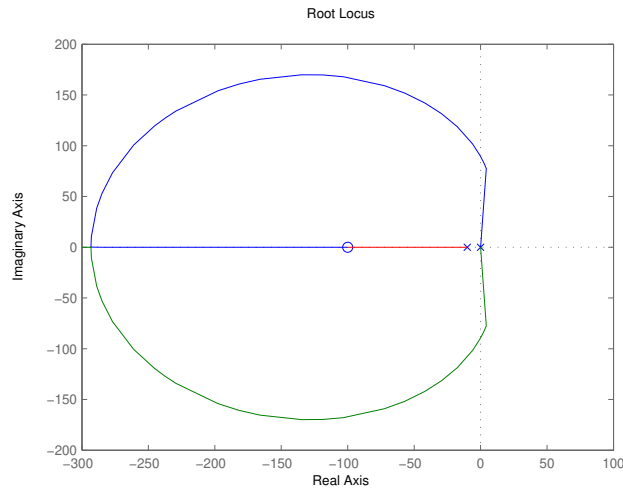
$$\lim_{r \rightarrow 0} G(s) = K \frac{100}{10r} e^{-j2\phi} \tag{7.9}$$

Cuando  $\phi$  recorre  $180^\circ$  uniendo  $\omega = 0^-$  con  $\omega = 0^+$ , en el plano  $G(s)$  la trayectoria rotará  $360^\circ$  en el sentido contrario.

Analicemos ahora la estabilidad. Para ganancias bajas,  $N = 2$  y como  $P = 0$  el sistema es inestable. Para ganancias altas,  $N = 0$  y el sistema se estabiliza. Esto, obviamente, coincide con el resultado obtenido con el análisis del lugar de raíces, ilustrado en la figura 7.14.

### 7.3. Agregado de polos y ceros en el semiplano izquierdo

Al igual que en el caso del Lugar de Raíces, para el diagrama de Nyquist pueden hacerse consideraciones similares en relación con el agregado de dinámica en el semiplano izquierdo. En efecto, el agregado de polos tiene un efecto desestabilizante, al rotar el diagrama en el sentido



**Figura 7.14:** Ejemplo final. Lugar de raíces

horario, reduciendo el Margen de fase y, eventualmente inestabilizando al sistema al “meter” el punto  $-1$  en el interior del diagrama. El efecto contrario (esto es, una rotación en el sentido antihorario, y por lo tanto, aumentando el margen de fase) puede lograrse agregando ceros en el semiplano izquierdo.

Es importante destacar que cuando se hace el trazado en forma manual, el diagrama se dibuja fuera de escala. Es por esta razón que, si bien las conclusiones sobre el comportamiento de lazo cerrado del sistema son correctas, en general no es posible hacer medidas directas (por ejemplo, de los márgenes de estabilidad) sobre el diagrama. Esto sí podrá hacerse sobre el diagrama de Bode, que se verá en el capítulo siguiente.

## 7.4. Problemas

1. Analizar la estabilidad por Nyquist de los siguientes sistemas. Determinar el rango de valores de  $K$  que aseguran estabilidad.

$$G(s)H(s) = \frac{10}{(1 + 0,2s)(s^2 + 8s + 100)}$$

$$G(s)H(s) = \frac{(1 - 3s)}{(1 + 1,5s)(10s)}$$

$$G(s)H(s) = \frac{4,7}{(s + 583)(s + 5)(s + 166)}$$

$$G(s)H(s) = \frac{10}{s(1 + 0,25s)(1 + 0,5s)}$$

2. Dada la función de transferencia:

$$G(s)H(s) = K \frac{1000}{(s+1)(s+5)(s+10)}$$

Trazar el lugar de raíces y ubicar los polos de lazo cerrado para :

- $K=0,8$  (el sistema de lazo cerrado tiene todos sus polos en el semiplano izquierdo).
- $K=1,015$  (el sistema de lazo cerrado tiene dos polos complejos conjugados con parte real cero).
- $K=2$  (el sistema de lazo cerrado presenta polos en el semiplano derecho).

En cada caso, trazar por inspección el diagrama de Nyquist.

## Referencias

- [1] K. Ogata, "Modern Control Engineering", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA, 3rd edition, 1997.
- [2] B. C. Kuo, "Automatic Control Systems", Prentice-Hall International, London, England, 9th edition, 1962.
- [3] C. H. Houpis, S. N. Sheldon, J. J. D'Azzo, "Linear Control System Analysis and Design". Fifth Edition, Revised and Expanded (Automation and Control Engineering). Taylor and Francis, 2003.
- [4] C.H.Houpis, S.N.Sheldon, "Linear Control System Analysis and Design with MATLAB , Sixth Edition (Automation and Control Engineering, Book 53)". CRC Press, 2014.
- [5] G. F. Franklin, J. D. Powell, A. Emami-Naeini. "Feedback Control of Dynamic Systems". Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, fourth edition, 2002.
- [6] N. S. Nise, "Control System Engineering", John Wiley and Sons Inc., New York, 2011.
- [7] M. Gopal, I.J. Nagrath, " A Textbook of Control Systems Engineering", New Age International (P) Ltd., 2010.
- [8] G. Goodwin, S. Grabe.,M. Salgado, "Control System Design", Pearson Education, Upper Saddle River, NJ, eleventh/international edition, 2015
- [9] R. C. Dorf, R. H. Bishop, "Modern Control Systems". Pearson 2008.



# CAPÍTULO 8

## Análisis de estabilidad utilizando diagramas de Bode

### Introducción

El diagrama de Bode permite trazar la respuesta en frecuencia de un sistema en forma sistemática y relativamente exacta. Al tratarse de un trazado logarítmico, la respuesta total puede construirse sumando gráficamente los aportes individuales de cada elemento de la función de transferencia. El trazado de Bode grafica amplitud en decibelios en función de la frecuencia en escala logarítmica, y la fase en escala lineal en función de la frecuencia en escala logarítmica. El uso de escalas logarítmicas permite hacer un trazado aproximado utilizando únicamente las asíntotas de baja y alta frecuencia. De esta forma es posible medir numéricamente los márgenes de estabilidad relativa. A continuación se hará un repaso del trazado de cada elemento, y luego se analizará su aplicación al estudio de estabilidad a lazo cerrado.

### 8.1. Trazado de Diagramas de Bode

El diagrama de Bode consta de dos subgráficos: el de amplitud versus frecuencia, y el de fase versus frecuencia. Es recomendable escribir la función de transferencia en la llamada “Forma de Bode”, en la cual todas las ganancias se concentran en un solo término:

$$G(j\omega) = K \frac{(j\omega)^q \prod_1^m (1 + \frac{j\omega}{c_i})}{(j\omega)^r \prod_1^n (1 + \frac{j\omega}{p_j})} \quad (8.1)$$

### 8.1.1. Ganancias

Una ganancia  $K$  tiene módulo constante, y una fase constante que puede ser  $0^\circ$  si la ganancia es positiva, y  $180^\circ$  o  $-180^\circ$  si la ganancia es negativa.

$$|K|_{db} = 20 \log(|K|) \quad (8.2)$$

$$\angle K = \begin{cases} 0 & K > 0 \\ -\pi & K < 0 \end{cases} \quad (8.3)$$

### 8.1.2. Ceros Simples

Analicemos ahora términos de la forma

$$\left(1 + \frac{j\omega}{\omega_c}\right) \quad (8.4)$$

Módulo:

$$\left|1 + \frac{j\omega}{\omega_c}\right| = \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2} \quad (8.5)$$

$$\left|1 + \frac{j\omega}{\omega_c}\right|_{db} = 20 \log\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}\right) = 10 \log\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right) \quad (8.6)$$

Cuando  $\omega \rightarrow 0$  tenemos la asíntota de baja frecuencia  $10 \log(1) = 0db$ .

Cuando  $\omega \rightarrow \infty$  tenemos la asíntota de alta frecuencia  $10 \log\left(\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right) = 20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$ . Esta expresión se anula para  $\omega = \omega_c$ . La asíntota de alta frecuencia es una recta que parte de  $\omega = \omega_c$  y crece con una pendiente de 20 decibeles por década.

Fase:

$$\angle\left(1 + \frac{j\omega}{\omega_c}\right) = \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \quad (8.7)$$

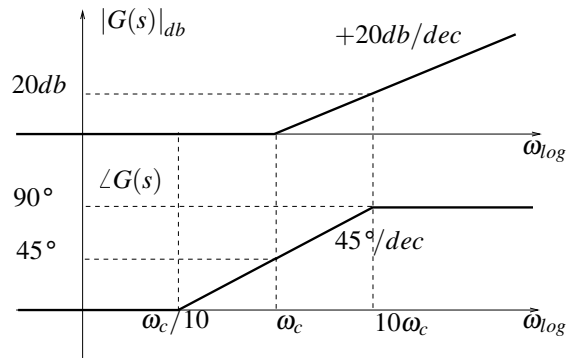
Cuando  $\omega = \omega_c$  hay un adelanto de fase de  $45^\circ$ . A frecuencias altas la fase tiende a  $+90^\circ$  y para frecuencias bajas tiende a  $0^\circ$ . La recta que mejor ajusta este comportamiento parte de  $0^\circ$  a la frecuencia  $\omega = \omega_c/10$ , pasa por  $45^\circ$  a  $\omega = \omega_c$  y termina en  $+90^\circ$  a  $\omega = 10\omega_c$ .

### Ceros simples en el origen

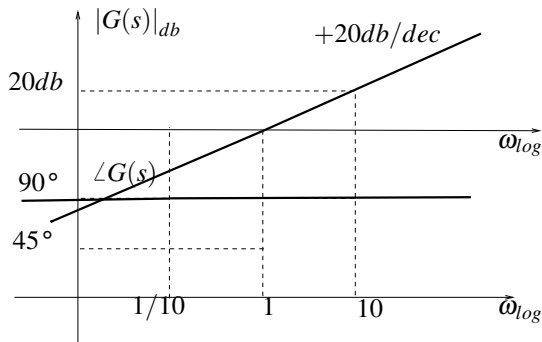
Un caso particular de análisis ocurre cuando existen ceros en el origen, de la forma  $j\omega$ . Como la escala de frecuencia es logarítmica, esta singularidad se ubicaría en  $\omega_{\log} = -\infty$  en el diagrama. Por lo tanto

$$|j\omega| = \omega \quad (8.8)$$

$$|j\omega|_{dB} = 20 \log(\omega) \quad (8.9)$$



**Figura 8.1:** Diagrama de Bode de un cero simple



**Figura 8.2:** Diagrama de Bode de un cero simple en el origen

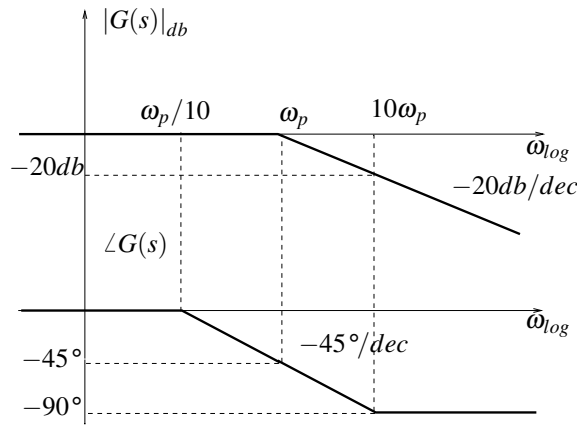
que representa (como era de esperar ya que es un cero simple) una recta con pendiente de +20 decibeles por década. Para poder trazar la recta, advertimos que la última expresión se anula para  $\omega = 1$ . Por lo tanto los ceros en el origen se grafican en el diagrama de Bode de amplitud como rectas con pendiente  $+20dB/dec$  que cortan el eje horizontal a  $\omega = 1$ . Con respecto a la fase, es simple ver que

$$\angle(j\omega) = +90^\circ \tag{8.10}$$

### 8.1.3. Polos Simples

En este caso tenemos términos de la forma

$$\frac{1}{(1 + \frac{j\omega}{\omega_p})} \tag{8.11}$$



**Figura 8.3:** Diagrama de Bode de un polo simple

Módulo:

$$\left| \frac{1}{(1 + \frac{j\omega}{\omega_p})} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\omega}{\omega_p})^2}} \quad (8.12)$$

$$\left| \frac{1}{(1 + \frac{j\omega}{\omega_p})} \right|_{db} = -20 \log \left( \sqrt{1 + (\frac{\omega}{\omega_p})^2} \right) = -10 \log \left( 1 + (\frac{\omega}{\omega_p})^2 \right) \quad (8.13)$$

Cuando  $\omega \rightarrow 0$  tenemos la asíntota de baja frecuencia  $10 \log(1) = 0db$ .

Cuando  $\omega \rightarrow \infty$  tenemos la asíntota de alta frecuencia  $-10 \log((\frac{\omega}{\omega_p})^2) = -20 \log(\frac{\omega}{\omega_p})$ . Esta expresión se anula para  $\omega = \omega_p$ . La asíntota de alta frecuencia es una recta que parte de  $\omega = \omega_p$  y decrece con una pendiente de 20 decibels por década.

Fase:

$$\angle \left( \frac{1}{(1 + \frac{j\omega}{\omega_p})} \right) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right) \quad (8.14)$$

Cuando  $\omega = \omega_p$  hay un atraso de fase de  $45^\circ$ . A frecuencias altas la fase tiene a  $-90^\circ$  y para frecuencias bajas tiende a  $0^\circ$ . La recta que mejor ajusta este comportamiento parte de  $0^\circ$  a la frecuencia  $\omega = \omega_p/10$ , pasa por  $-45^\circ$  a  $\omega = \omega_p$  y termina en  $-90^\circ$  a  $\omega = 10\omega_p$ .

### Polos simples en el origen

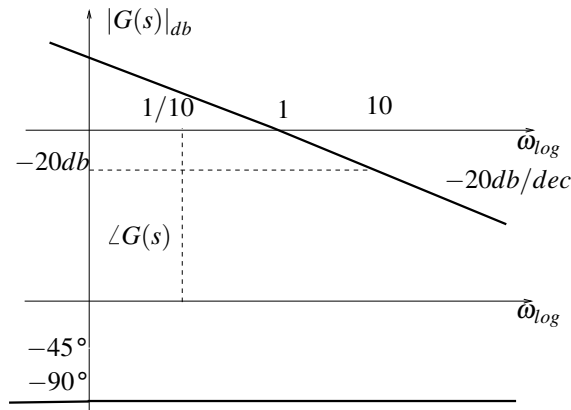
Al igual que en el caso de los ceros, los integradores o polos en el origen,

$$\frac{1}{j\omega} \quad (8.15)$$

presentan un comportamiento particular. Con respecto al módulo tenemos

$$\left| \frac{1}{(j\omega)} \right| = \frac{1}{\omega} \quad (8.16)$$

$$\left| \frac{1}{(j\omega)} \right|_{db} = -20 \log(\omega) \quad (8.17)$$



**Figura 8.4:** Diagrama de Bode de un polo simple en el origen (integrador)

que es una pendiente de  $-20dB/dec$  que corta el eje horizontal del diagrama de amplitud en  $\omega = 1$ . Con respecto a la fase, el análisis es similar

$$\angle\left(\frac{1}{j\omega}\right) = -\angle(j\omega) = -90^\circ \tag{8.18}$$

que es una fase constante de  $-90^\circ$  a todas las frecuencias. El efecto del integrador es desplazar el diagrama de fase  $90^\circ$  en atraso, en forma paralela a sí mismo. En consecuencia, el agregado de un integrador a un sistema reducirá su margen de fase en 90 grados. Vimos en el capítulo de error de estado estacionario que elevar el tipo de sistema (esto es, el número de polos en el origen) era beneficioso para la reducción del error. Sin embargo, su comportamiento en fase puede perjudicar la estabilidad. Por tal motivo, en general es necesario incorporar, además del integrador, algún elemento que aporte fase positiva, y compense a las frecuencias de interés su atraso de fase. Este efecto se analizará en detalle cuando se diseñen estrategias de compensación

**Polos y ceros múltiples en el eje real**

Conociendo el comportamiento de polos y ceros reales simples, el análisis de términos de la forma

$$\left(1 + \frac{j\omega}{j\omega_i}\right)^n \tag{8.19}$$

en el numerador o denominador es inmediato. Desde el punto de vista del diagrama de amplitud, las pendientes resultan multiplicadas por el valor  $n$ . Por ejemplo, si tengo un polo de multiplicidad  $n = 3$  la pendiente de caída será  $n20 \frac{dB}{dec} = 60 \frac{dB}{dec}$ . Lo mismo ocurre con la fase. Si un polo simple rota  $-90^\circ$  en dos décadas, en el mismo ancho de banda un polo de multiplicidad  $n = 3$  rotará  $270^\circ$ . Los resultados son evidentes del estudio precedente.

### 8.1.4. Polos Complejos Conjugados

En primer lugar, escribiremos los polos conjugados en la forma convencional que ya usamos en el capítulo 2:

$$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \Big|_{s=j\omega} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + j2\xi\frac{\omega}{\omega_n}} \quad (8.20)$$

Módulo

$$\left| \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + j2\xi\frac{\omega}{\omega_n}} \right| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad (8.21)$$

$$\begin{aligned} | \cdot |_{db} &= -20 \log\left(\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right) = \\ &= -20 \log\left(\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + 4\xi^2\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right) \end{aligned} \quad (8.22)$$

La particularidad de los polos complejos conjugados es que, dependiendo de los valores de  $\xi$  y  $\omega_n$  presentarán picos en la curva de respuesta en frecuencia. Para encontrar estos picos debe hacerse la derivada del argumento de la raíz cuadrada respecto de  $\frac{\omega}{\omega_n}$ :

$$2 \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right) \left(-2\frac{\omega}{\omega_n}\right) + 8\xi^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) = 0 \quad (8.23)$$

$$\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 = 1 - 2\xi^2 \quad (8.24)$$

con lo que obtenemos

$$\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad (8.25)$$

Para valores pequeños de  $\xi$  puede aproximarse  $\omega_p$  por  $\omega_n$ . Reemplazando en la expresión del módulo, la magnitud del pico es

$$| \cdot | = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (8.26)$$

El sobrepico será tanto mayor cuanto menor sea el amortiguamiento  $\xi$ . Volviendo a la expresión del módulo, para  $\omega \rightarrow 0$  tenemos una asíntota de 0db, mientras que si  $\omega \rightarrow \infty$  tenemos

$$-20 \log\left(\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right) \Big|_{\omega \rightarrow \infty} = -40 \log\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) \quad (8.27)$$

Esta última expresión se anula para  $\omega = \omega_n$ . La asíntota entonces parte de  $\omega = \omega_n$  y cae con una pendiente de 40 decibeles por década.

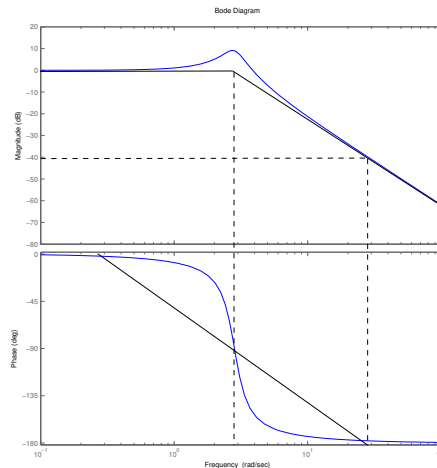
El comportamiento en fase viene dado por la expresión

$$\angle = \arctan\left(\frac{2\xi\frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right) \quad (8.28)$$

La fase es de  $-90^\circ$  a la frecuencia  $\omega_n$ , de  $0^\circ$  a bajas frecuencias y de  $-180^\circ$  en altas frecuencias. Cuanto menos amortiguado es el sistema, mas brusca será la transición de fase. Por ejemplo, si el sistema no tuviera amortiguamiento, es decir, si los polos estuvieran sobre el eje  $j\omega$ , la transición de  $0^\circ$  a  $-180^\circ$  sería instantánea. Si el sistema tuviera amortiguamiento crítico, es decir, dos polos reales coincidentes, tendríamos una asíntota de  $-90^\circ$  por década pasando por  $\omega = \omega_n$ . La asíntota de fase es una línea trazada entre las frecuencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , donde

$$\omega_1 = \omega_n \frac{\log_{10}\left(\frac{2}{5\zeta}\right)}{2} \tag{8.29}$$

$$\omega_2 = \omega_n \frac{2}{\log_{10}\left(\frac{2}{5\zeta}\right)} \tag{8.30}$$



### 8.1.5. Ceros de no mínima fase

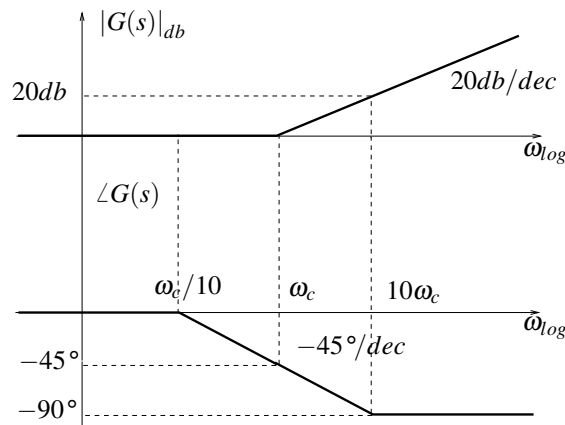
Como comentamos en capítulos anteriores, llamamos ceros de *no mínima fase* a aquellos situados en el semiplano derecho del plano  $s$ . Se trata por lo tanto de términos de la forma

$$\left(1 - \frac{j\omega}{\omega_c}\right) \tag{8.31}$$

Su aporte en módulo será:

$$\left|1 - \frac{j\omega}{\omega_c}\right| = \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2} \tag{8.32}$$

$$\left|1 - \frac{j\omega}{\omega_c}\right|_{db} = 20 \log \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}\right) = 10 \log \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right) \tag{8.33}$$



**Figura 8.5:** Diagrama de Bode de un cero de no mínima fase

El comportamiento en módulo es exactamente igual al de un cero de mínima fase. Cuando  $\omega \rightarrow 0$  tenemos la asíntota de baja frecuencia  $10\log(1) = 0\text{db}$ . Cuando  $\omega \rightarrow \infty$  tenemos la asíntota de alta frecuencia  $10\log((\frac{\omega}{\omega_c})^2) = 20\log(\frac{\omega}{\omega_c})$ . Esta expresión se anula para  $\omega = \omega_c$ . La asíntota de alta frecuencia es una recta que parte de  $\omega = \omega_c$  y crece con una pendiente de 20 decibels por década.

La fase, sin embargo, es diferente:

$$\angle(1 - \frac{j\omega}{\omega_c}) = \arctan(-\frac{\omega}{\omega_c}) = -\arctan(\frac{\omega}{\omega_c}) \quad (8.34)$$

El comportamiento en fase es similar al de un polo de mínima fase. Cuando  $\omega = \omega_c$  hay un atraso de fase de  $45^\circ$ . A frecuencias altas la fase tiende a  $-90^\circ$  y para frecuencias bajas tiende a  $0^\circ$ . La recta que mejor ajusta este comportamiento parte de  $0^\circ$  a la frecuencia  $\omega = \omega_c/10$ , pasa por  $-45^\circ$  a  $\omega = \omega_c$  y termina en  $-90^\circ$  a  $\omega = 10\omega_c$ .

Esta característica de los ceros de no mínima fase hace que sean potencialmente nocivos para la estabilidad del sistema.

## 8.2. Trazado del diagrama completo

Para el trazado del diagrama completo de una función de transferencia, se siguen tres pasos básicos:

- Escribir la función de transferencia en la forma de Bode. De esta forma todos los términos de ganancia quedan reunidos en un solo término, y la ganancia en baja frecuencia de ceros y polos es uno. Por lo tanto, variar la ganancia en un sistema es equivalente a subir o bajar el diagrama de módulo en forma paralela a sí mismo. El diagrama de fase no se vé



alterado, salvo que la ganancia fuera negativa.

- Trazar los términos individuales de la función de transferencia de acuerdo a lo indicado en las secciones anteriores.
- Sumar punto a punto los aportes individuales en módulo y fase.

### 8.3. Márgenes de estabilidad

El trazado de los márgenes de ganancia y fase es simple.

- La condición impuesta para medir el margen de fase es que el módulo sea uno. Esto ocurre cuando el diagrama de amplitud cruza la línea de 0db. En ese punto, se baja al diagrama de fase y se mide cuánta fase existe entre el diagrama y la línea de  $-180^\circ$ . Ese es el margen de fase.
- La condición impuesta para medir el margen de ganancia es que la fase sea  $-180^\circ$ . En el punto en el que el diagrama de fase corta la línea de  $-180^\circ$  se sube al diagrama de amplitud, y se mide qué ganancia hay que agregar para llegar al eje horizontal (línea de 0db). Ese es el margen de ganancia. Si a esa frecuencia el sistema está atenuando, el margen será positivo. En caso contrario, el margen será negativo (hay que atenuar para llegar a la condición de módulo uno).

Supongamos el sistema

$$G(s) = \frac{K}{s(s+10)(s+100)} \quad (8.35)$$

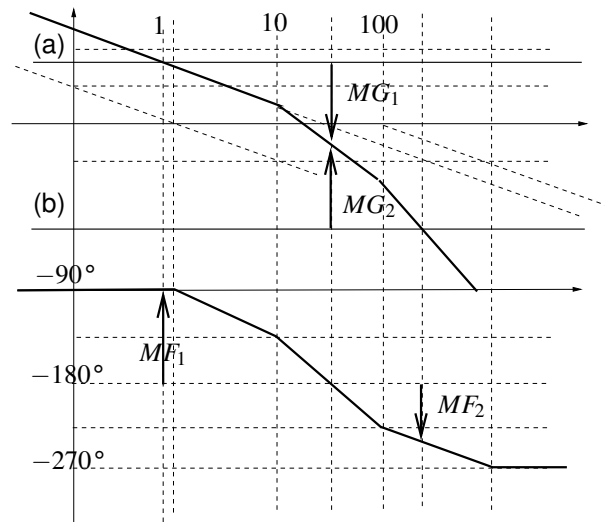
El primer paso será escribir la función de transferencia  $G(j\omega)$  en la forma de Bode:

$$G(j\omega) = \frac{K}{10 \times 100} \frac{1}{j\omega(1+j\frac{\omega}{10})(1+j\frac{\omega}{100})} \quad (8.36)$$

El diagrama de Bode para una ganancia genérica se grafica en la figura 8.6. Para ganancias bajas ((a) en la figura) se verifica que los márgenes de estabilidad son ambos positivos (sistema estable), mientras que para ganancias mayores que  $K = 40db$  ((b) en la figura) el sistema tiene ambos márgenes negativos y se inestabiliza.

### 8.4. Sistemas de Fase Mínima. Criterio de Bode

El criterio de Bode es una simplificación adicional válida para sistemas de fase mínima. Si ese es el caso, existe una relación biunívoca entre el diagrama de fase y el de amplitud, es decir,



**Figura 8.6:** Márgenes de Ganancia y Fase. Ejemplo

es suficiente con conocer uno de ellos para inferir el otro (la fase es la mínima). Obsérvese que esto no es válido en el caso de sistemas de fase no mínima, pues una pendiente de  $-45^\circ/dec$  puede corresponderse a un polo de fase mínima o a un cero de fase no mínima. En el caso de fase mínima, si el diagrama de amplitud está cortando el eje de  $0db$  con  $-20db/dec$  la fase está tendiendo a  $-90^\circ$  y por lo tanto el margen de fase es positivo y se está aproximando a  $90^\circ$  (sistema estable). De la misma manera, si el diagrama de amplitud corta con  $-60db/dec$  la fase tiende a  $-270^\circ$  y el sistema es inestable. Si corta con  $-40db/dec$  se está cercano al límite de estabilidad. Por lo tanto sólo es necesario ver la pendiente del diagrama de amplitud en el corte con el eje de  $0db$  para inferir la estabilidad del sistema: si se corta con  $-20db/dec$  (o mas positivo) el sistema es estable, y si corta con  $-60db/dec$  (o mas negativo) el sistema es inestable. Esta es una simplificación muy útil.

## 8.5. Problemas

1. Analizar la estabilidad de los siguientes sistemas. Comparar los resultados con los del capítulo anterior

$$G(s)H(s) = \frac{10}{(1+0,2s)(s^2+8s+100)}$$

$$G(s)H(s) = \frac{(1-3s)}{(1+1,5s)(10s)}$$

$$G(s)H(s) = \frac{4,7}{(s+583)(s+5)(s+166)}$$

$$G(s)H(s) = \frac{10}{s(1+0,25s)(1+0,5s)}$$

$$G(s)H(s) = \frac{10}{s(1+0,25s)(1+0,006s)}$$

$$G(s)H(s) = \frac{5(10s+1)}{s(100s+1)(s+1)(0,5s+1)}$$

$$G(s)H(s) = \frac{1}{(0,1s^2+0,7s+1)}$$

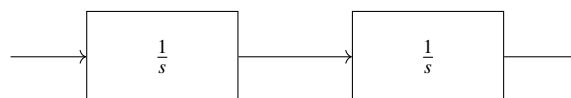
$$G(s)H(s) = \frac{1000(s+5)(s+40)}{s(s+200)(s+100)}$$

2. Estudie la estabilidad por Bode y Lugar de Raíces para valores positivos y negativos de k, para los siguientes sistemas:

$$G(s) = \frac{(s-2)}{(s+2)}$$

$$G(s) = \frac{1}{(s-2)(s+2)}$$

3. Dado el siguiente sistema:



**Figura 8.7:** Problema 3

Intercalando puntos de suma, ganancias y realimentando, cumplir las siguientes especificaciones:

- Error de estado estacionario nulo al escalón.
- Polos de lazo cerrado en  $s_{1,2} = -5 \pm j3$ .

¿Cuánto vale el error de estado estacionario a la rampa para el sistema diseñado?

## Referencias

- [1] K. Ogata, "Modern Control Engineering", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA, 3rd edition, 1997.
- [2] B. C. Kuo, "Automatic Control Systems", Prentice-Hall International, London, England, 9th edition, 1962.
- [3] C. H. Houpis, S. N. Sheldon, J. J. D'Azzo, "Linear Control System Analysis and Design". Fifth Edition, Revised and Expanded (Automation and Control Engineering). Taylor and Francis, 2003.
- [4] C.H.Houpis, S.N.Sheldon, "Linear Control System Analysis and Design with MATLAB , Sixth Edition (Automation and Control Engineering, Book 53)". CRC Press, 2014.
- [5] G. F. Franklin, J. D. Powell, A. Emami-Naeini. "Feedback Control of Dynamic Systems". Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, fourth edition, 2002.
- [6] N. S. Nise, "Control System Engineering", John Wiley and Sons Inc., New York, 2011.
- [7] M. Gopal, I.J. Nagrath, " A Textbook of Control Systems Engineering", New Age International (P) Ltd., 2010.
- [8] G. Goodwin, S. Grabe.,M. Salgado, "Control System Design", Pearson Education, Upper Saddle River, NJ, eleventh/international edition, 2015
- [9] R. C. Dorf, R. H. Bishop, "Modern Control Systems". Pearson 2008.

# CAPÍTULO 9

## Compensación en cascada

### Introducción

En este capítulo comenzaremos con el diseño de sistemas de control. Dadas una planta SISO-LIT y una serie de especificaciones de lazo cerrado, nuestra tarea será la de elegir una función  $H(s)$  en cascada con la planta tal que el conjunto  $G(s)H(s)$  las verifique. El esquema general es el planteado en la fig. 9.1 Obviamente, el principal requerimiento es que el sistema sea estable, pero además pueden establecerse otros objetivos de control. Entre ellos podemos citar:

- Características de estado estacionario: error de estado estacionario admisible para una excitación estándar, valores de los coeficientes estáticos o generalizados de error, etc.
- Rechazo a perturbaciones en el lazo.
- Ubicación de los polos dominantes de lazo cerrado.
- Márgenes de estabilidad relativos.
- Índices de performance.

En general, los problemas de estado estacionario están relacionados con el comportamiento en baja frecuencia del sistema, mientras que aquellos referidos a la respuesta dinámica dependen del comportamiento en alta frecuencia.

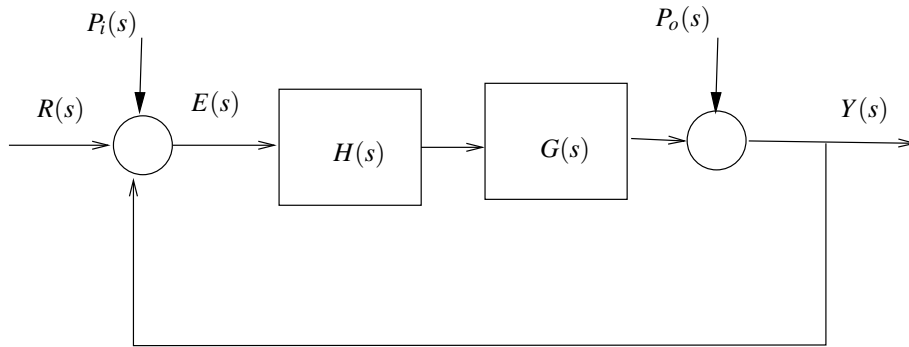


Figura 9.1: Esquema general de compensación en cascada

## 9.1. Limitaciones fundamentales en el control SISO

La estructura de control de la fig. 9.1 tiene algunas restricciones que limitan nuestras posibilidades de control. Como veremos, ellas se reflejan en las expresiones de la Sensibilidad y la Sensibilidad Complementaria, y fundamentalmente se relacionan con los siguientes aspectos:

- Perturbaciones y ruido
- Errores de modelado
- Limitaciones estructurales

El conocimiento de los valores aceptables en el ancho de banda del sistema a partir de estas limitaciones es esencial antes de encarar el diseño del controlador.

### 9.1.1. Rechazo a perturbaciones y funciones de sensibilidad

Una importante fuente de limitaciones de desempeño en un lazo de control son las perturbaciones: señales no deseadas, que no pueden manipularse, y que entran al lazo de control en diferentes puntos. En un sistema lineal las perturbaciones a la entrada ( $P_i(s)$ ) y a la salida ( $P_o(s)$ ) afectan a la salida de la planta según la expresión

$$Y(s) = S_I(s)P_i(s) + S_O(s)P_o(s) \quad (9.1)$$

donde

$$S_I(s) = \frac{G(s)H(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (9.2)$$

$$S_O(s) = \frac{1}{1 + G(s)H(s)} \quad (9.3)$$

que en este contexto llamaremos *Sensibilidad* y *Sensibilidad Complementaria*, respectivamente. Una relación fundamental y muy fácil de verificar es

$$S_I(s) + S_O(s) = 1 \quad (9.4)$$

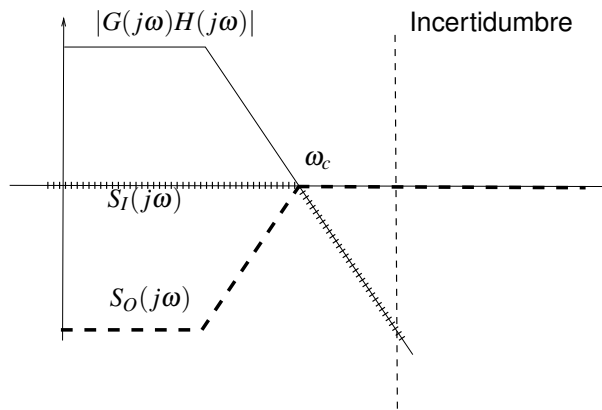
que evidencia que el aumento de una de ellas resulta en una disminución de la otra y viceversa. Ello impone una relación de compromiso en las prestaciones que pueden obtenerse. Por ejemplo, si la perturbación a la salida tiene su mayor energía en una cierta banda de frecuencia, se podría elegir  $S_O$  para que sea pequeña en esa banda. Eso automáticamente aumenta el valor de  $S_I$ , por lo que perturbaciones a la entrada en esa banda de frecuencias no podrán ser rechazadas en igual medida. Para aumentar el rechazo, puede incrementarse el producto  $G(s)H(s)$ ; esto significa que el ancho de banda del sistema debe aumentar, ya que el punto de corte de  $0dB$  se mueve hacia alta frecuencia como hemos visto cuando hablamos de estabilidad. La necesidad de rechazo a perturbaciones en el lazo de control impondrá, en general, un límite **inferior** en el ancho de banda del sistema a lazo cerrado. Esto, a su vez puede entrar en conflicto, por ejemplo, con el ruido en las mediciones. A menudo el rechazo a perturbaciones está limitado por el máximo ancho de banda admisible desde el punto de vista del ruido, y la incertidumbre en el modelo.

### 9.1.2. Errores de Modelado

Es habitual que la dinámica mejor conocida de un sistema sea la de baja frecuencia (dinámica dominante, ver capítulo 2). La incertidumbre suele ser mayor en los polos y ceros de alta frecuencia, y en general aumenta con  $j\omega$ . Para asegurar que la planta nominal y la planta con incertidumbre sean similares en la banda de trabajo (es decir, que el modelo sea representativo del sistema real), y también para evitar su efecto en la estabilidad relativa del sistema, esto es, que el módulo y fase de estos elementos afecte los márgenes de estabilidad, es deseable que la dinámica no modelada se produzca en una banda de frecuencia en la que el sistema nominal atenúe fuertemente (en un sistema propio, en alta frecuencia). Esto introduce un límite **superior** en el máximo ancho de banda admisible.

### 9.1.3. Limitaciones estructurales

Aun en ausencia de incertidumbre, existen límites en las prestaciones que podemos obtener a partir del modelo nominal de lazo abierto. Entre ellos podemos mencionar los retardos de transporte, los ceros de no mínima fase y los polos inestables.



**Figura 9.2:** Limitaciones al control SISO

**Retardos de transporte**

Los retardos puros  $e^{s\tau}$ , poseen una respuesta en frecuencia de la forma

$$|e^{j\omega\tau}| = 1 \tag{9.5}$$

$$\angle e^{j\omega\tau} = -\omega\tau \tag{9.6}$$

es decir, no aportan al diagrama de Bode de amplitud, pero agregan una fase en atraso lineal con la frecuencia. Esto implica que un sistema con retardo siempre puede hacerse inestable, simplemente aumentando la ganancia. El retardo siempre puede cancelar el margen de fase del sistema. Esto impone un límite al ancho de banda del sistema de lazo abierto.

**Ceros de fase no mínima**

Como vimos en la sección de respuesta en frecuencia, la presencia de ceros de fase no mínima introduce fase adicional en atraso en la respuesta en frecuencia, que puede ser contra-productiva en términos de estabilidad relativa. Es un problema similar al del retardo puro (pero menos severo), y de la misma forma limita el ancho de banda admisible del sistema.

Podemos resumir las limitaciones del control SISO con el gráfico de la fig. 9.2. Si analizamos  $S_I(j\omega)$ , vemos que si  $G(j\omega)H(j\omega) \gg 1$  entonces  $S_I(j\omega) \rightarrow 1$ . Por otra parte, si  $G(j\omega)H(j\omega) \ll 1$  entonces  $S_I(j\omega) \approx G(j\omega)H(j\omega)$ . Este comportamiento se vé en línea de puntos en la figura. Por otro lado, si  $G(j\omega)H(j\omega) \gg 1$  tenemos  $S_O(s) \approx \frac{1}{G(j\omega)H(j\omega)}$ , o equivalentemente  $-|G(j\omega)H(j\omega)|_{dB}$ , mientras que cuando  $G(j\omega)H(j\omega) \ll 1$  resulta  $S_O(j\omega) \approx 1$  (línea de trazos en la figura). También se indica la zona donde existe incertidumbre en el modelo o dinámica no modelada. Puede apreciarse claramente el efecto de la ganancia (subir o bajar el diagrama de  $G(j\omega)H(j\omega)$ ) con respecto a las restricciones.



## 9.2. Compensación por atraso de fase

Este tipo de compensador se utiliza en general cuando se desea mejorar el error de estado estacionario y el rechazo a perturbaciones, sin alterar la forma de la respuesta dinámica, ni la estabilidad relativa del sistema. Supongamos, por ejemplo, que tenemos un sistema  $G(s)$  y pretendemos mejorar su error de estado estacionario al escalón:

$$E_{ssesc} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\frac{1}{s}}{1 + G(s)} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)} \quad (9.7)$$

mediante la adición de un bloque  $H(s)$ . El nuevo error de estado estacionario será:

$$E_{ssesc} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\frac{1}{s}}{1 + G(s)H(s)} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)} \quad (9.8)$$

Es evidente que para reducir el error de estado estacionario  $H(s)$  debería ser “grande”. Por ejemplo,  $H(s)$  podría ser una ganancia suficientemente alta. Sin embargo, esto modificaría la respuesta dinámica del sistema, ya que los polos de lazo cerrado se moverían por sobre su lugar de raíces, modificando asimismo los márgenes de estabilidad relativa. Esta solución arreglaría el comportamiento de estado estacionario al costo de modificar la respuesta dinámica, que es justamente lo que no se quería hacer. Sin embargo, puede observarse en la ecuación 9.8 que, en realidad, sólo se requiere que  $H(s)$  sea grande cuando  $s \rightarrow 0$ . Si lográramos que  $H(s)$  introdujera ganancia en el lazo a bajas frecuencias, pero ganara 1 en alta frecuencia, podría lograrse la reducción en el error de estado estacionario, sin modificar la estabilidad relativa del sistema, o lo que es lo mismo, la ubicación de los polos dominantes de lazo cerrado. Por lo tanto  $H(s)$  es un filtro que gana en baja frecuencia lo necesario para llevar el error al valor deseado, y gana 1 en alta frecuencia. La única forma de lograr este comportamiento con un filtro lineal es mediante una transferencia que atrase fase en una banda de frecuencias, de allí el nombre del compensador.

### 9.2.1. Celda básica del compensador

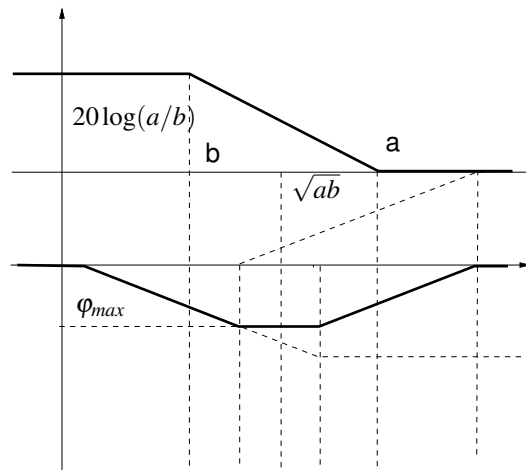
La transferencia más simple que presenta las características deseadas es:

$$H(s) = K \frac{s+a}{s+b} \quad (9.9)$$

En alta frecuencia se requiere que esta transferencia gane 1, por lo tanto

$$\lim_{s \rightarrow \infty} H(s) = 1 = K \quad (9.10)$$

lo que resulta en  $K = 1$ . En baja frecuencia se necesita una ganancia mayor que uno, por lo que  $a > b$ , lo que implica que el polo del compensador se ubica en una frecuencia más baja que



**Figura 9.3:** Diagrama de Bode del Compensador por atraso

el cero. Esto da lugar a un atraso de fase en baja frecuencia, a lo que el compensador debe su nombre. El objetivo del compensador es agregar ganancia en baja frecuencia, pero esto sólo puede lograrse mediante un atraso de fase asociado. El criterio general será que este atraso de fase se produzca en una banda de frecuencias donde no altere la estabilidad relativa del sistema. Tenemos entonces

$$H(s) = \frac{s+a}{s+b} \quad a > b \quad (9.11)$$

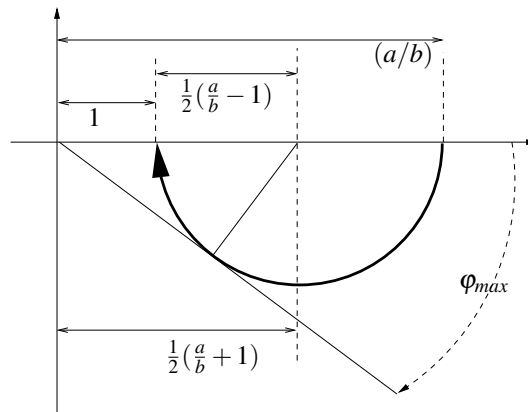
**Respuesta en frecuencia**

Para relevar la respuesta en frecuencia del compensador, lo escribimos en la forma de Bode:

$$H(j\omega) = \frac{a (1 + \frac{j\omega}{a})}{b (1 + \frac{j\omega}{b})} \quad (9.12)$$

Vemos que la ganancia en baja frecuencia está determinada solamente por la separación entre el polo y el cero. Esto es así por el requerimiento de ganancia unitaria en alta frecuencia. Por lo tanto, la ganancia requerida para reducir el error de estado estacionario impone la relación entre el polo y el cero, pero no la ubicación absoluta de los mismos. El problema tiene, por lo tanto, infinitas soluciones. Cualquier compensador en el que el cociente  $\frac{a}{b}$  aporte la ganancia requerida cumple con la especificación, en la medida que el atraso de fase no comprometa la estabilidad relativa. El diagrama de bode se aprecia en la figura 9.3

Para obtener una expresión de  $\phi_{max}$  hacemos el diagrama polar del compensador, que puede apreciarse en la figura 9.4. La trayectoria es una semicircunferencia, a partir de la cual puede determinarse el valor del seno de  $\phi_{max}$ :



**Figura 9.4:** Diagrama Polar del Compensador por atraso

$$\sin(\varphi_{max}) = \frac{a-b}{a+b} \quad (9.13)$$

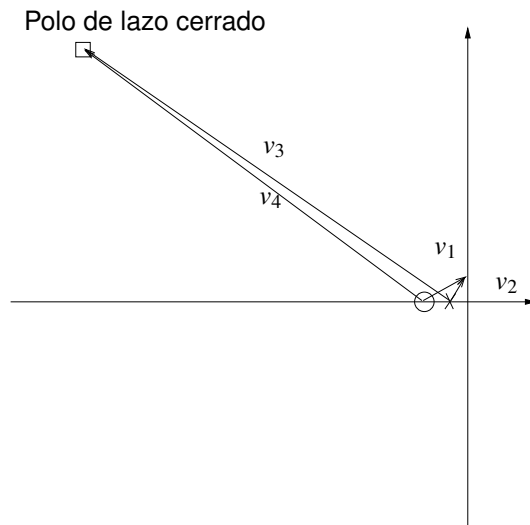
Esta es la fase máxima en atraso que introducirá el compensador. Es evidente que si este atraso se produjera a la frecuencia del margen de fase, la estabilidad relativa del sistema se vería comprometida.

### 9.2.2. Diseño del compensador

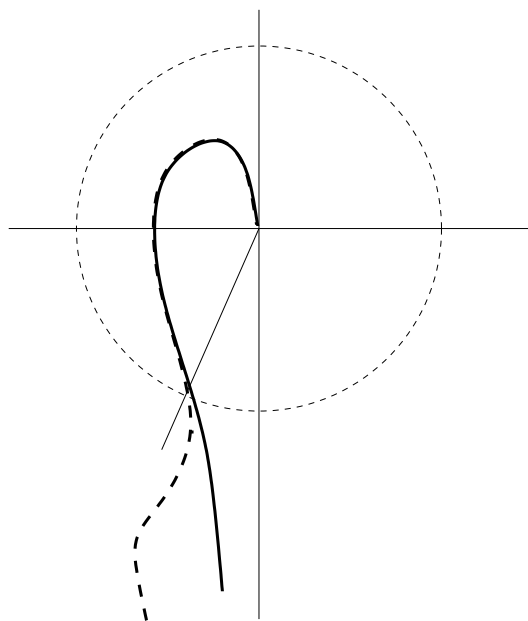
El diseño del compensador es simple, y consta de dos pasos:

- Elegir la relación entre el polo y el cero de forma tal de obtener el aumento de ganancia deseado en baja frecuencia
- Ubicar el compensador a la frecuencia más baja compatible con la tecnología de fabricación.

En el lugar de raíces, la situación típica se ilustra en la figura 9.5. La relación entre los módulos de los vectores  $v_1$  y  $v_2$  debe ser tal que se logre la ganancia deseada en baja frecuencia, mientras que a la frecuencia de los polos de lazo cerrado, los vectores  $v_3$  y  $v_4$  deben ser prácticamente iguales, de forma tal que los polos dominantes no varíen sensiblemente su posición. Por otro lado, analizando el diagrama de Nyquist, figura 9.6, el aumento de ganancia debe desaparecer antes que el diagrama corte el círculo de módulo uno, a fin de no modificar el margen de fase original.



**Figura 9.5:** Lugar de raíces. Efecto de la compensación



**Figura 9.6:** Diagrama de Nyquist. Sistema compensado por atraso

### 9.2.3. Un ejemplo

Dado el sistema

$$G(s) = \frac{K}{(s+4)(s+10)} \quad (9.14)$$

Las especificaciones del lazo cerrado son:

- Polos de lazo cerrado en  $s_{1,2} = -7 \pm j7$ ;
- Error de estado estacionario al escalón  $< 0.1$ .

La primera especificación es fácil de cumplir. En efecto, los polos deseados se encuentran sobre el lugar de raíces del sistema, por lo que pueden obtenerse con un simple ajuste de ganancia:

$$s_{1,2} = -7 \pm j\sqrt{K-9} = -7 \pm j7 \Rightarrow K = 58 \quad (9.15)$$

Sin embargo, con esta ganancia el error de estado estacionario al escalón es

$$E_{ssesc} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{58}{(s+4)(s+10)}} = \frac{40}{98} = 0.4 \quad (9.16)$$

que no cumple con la especificación. El sistema compensado debería tener un error de estado estacionario 4 veces menor:

$$E_{ssesc} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} H(s) \frac{58}{(s+4)(s+10)}} = \frac{40}{40 + H(0)58} = 0.1 \Rightarrow H(0) = 7 \quad (9.17)$$

con lo cual queda determinada la relación entre el cero y el polo ( $\frac{a}{b}$ ). Para simplificar los cálculos, tomemos  $\frac{a}{b} = 10$ .

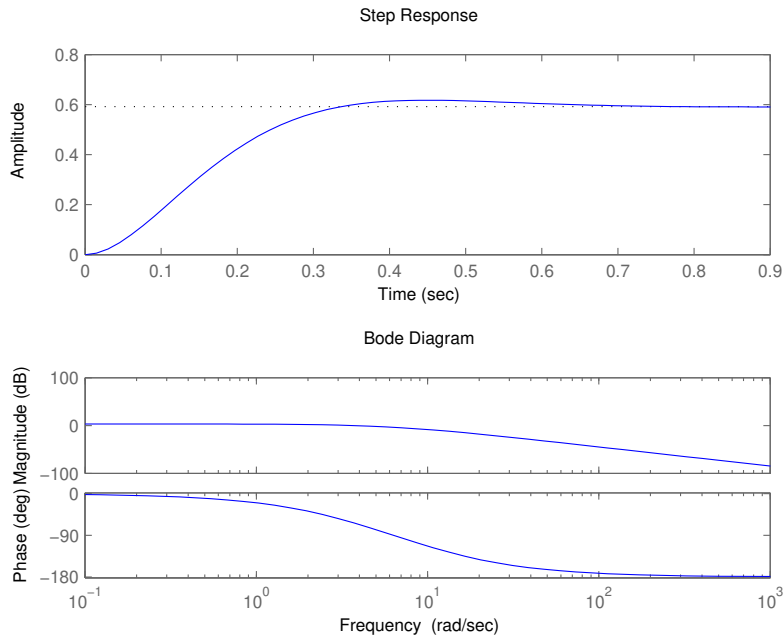
En la figura 9.7 puede apreciarse la respuesta al escalón y la repuesta en frecuencia del sistema sin compensar. Considerando que el polo de menor frecuencia de la planta está en  $s = 4$  elegimos  $a = 0.1$  lo que resulta en  $b = 0.01$ . El compensador será entonces

$$H(s) = \frac{(s+0.1)}{(s+0.01)} \quad (9.18)$$

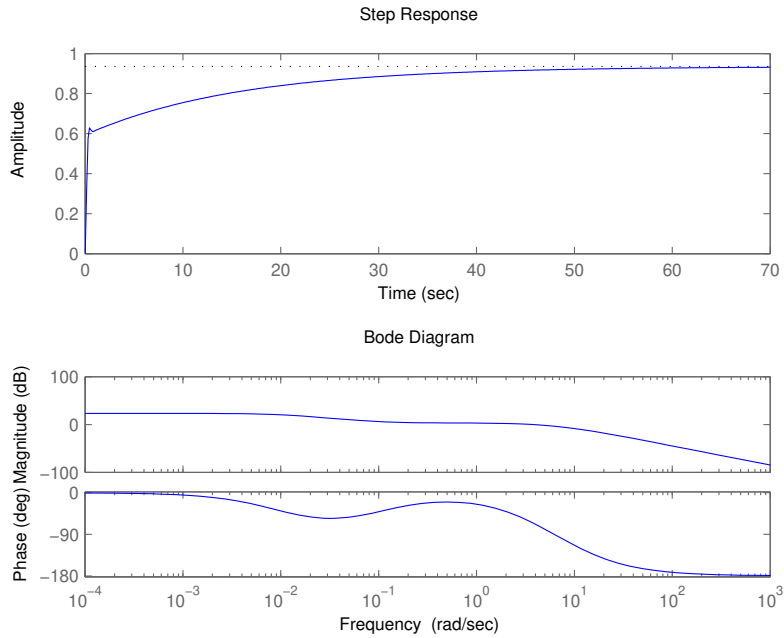
La respuesta temporal y en frecuencia del sistema compensado puede verse en la figura 9.8. Se aprecia que la respuesta temporal, y los márgenes de estabilidad son prácticamente iguales a los del sistema sin compensar, pero el error de estado estacionario es ahora mucho menor.

Si en lugar de reducir el error de estado estacionario al escalón quisiéramos anularlo, la única salida es elevar el tipo de sistema, esto es, fijar la posición del polo del compensador en el origen. En ese caso el compensador queda en la forma

$$H(s) = K \frac{(s+a)}{s} = K + \frac{Ka}{s} \quad (9.19)$$



**Figura 9.7:** Ejemplo1. Sistema sin compensar



**Figura 9.8:** Ejemplo1. Sistema compensado

donde apreciamos que la acción de control tiene dos componentes: una proporcional al error y otra proporcional a la integral del error

$$u(t) = Ke(t) + Ka \int_0^t e(t) dt \quad (9.20)$$

Esta variante del compensador por atraso se llama compensador Proporcional-Integrador, o simplemente *PI*. Produce un atraso de fase de 90 grados en baja frecuencia, que es cancelado por el cero en  $s = -a$ .

### 9.3. Compensación por adelanto

El compensador por adelanto de fase está indicado en el problema dual al del caso anterior, esto es, un sistema con adecuado comportamiento de estado estacionario, pero deficiente comportamiento dinámico. Esto puede manifestarse en una respuesta temporal inadecuada, o en la necesidad de aumentar los márgenes de estabilidad relativa. El compensador agrega fase positiva en una banda de frecuencias. En el lugar de raíces, esto se traduce en una desviación de las trayectorias hacia el interior del semiplano izquierdo. En la respuesta en frecuencia, el adelanto de fase del compensador puede utilizarse para aumentar el margen de fase del sistema, y por lo tanto, mejorar la estabilidad relativa. En efecto, supongamos la situación ilustrada en la figura 9.9(a). Si se pretende aumentar el margen de fase, una solución podría ser reducir la ganancia del sistema (figura 9.9(b)). Sin embargo, esta reducción produciría también un aumento en el error de estado estacionario. Para evitar eso, podría utilizarse una red en adelanto, que agregue fase positiva a la frecuencia del margen de fase, pero deje inalterado el comportamiento en baja frecuencia (figura 9.9(c)). A diferencia del caso anterior, el compensador tiene el cero a una frecuencia inferior a la del polo, y se ubica a frecuencias altas (cerca de la frecuencia de corte del sistema a controlar). La forma genérica del compensador es la misma:

$$H(s) = K \frac{(s+a)}{(s+b)} \quad (9.21)$$

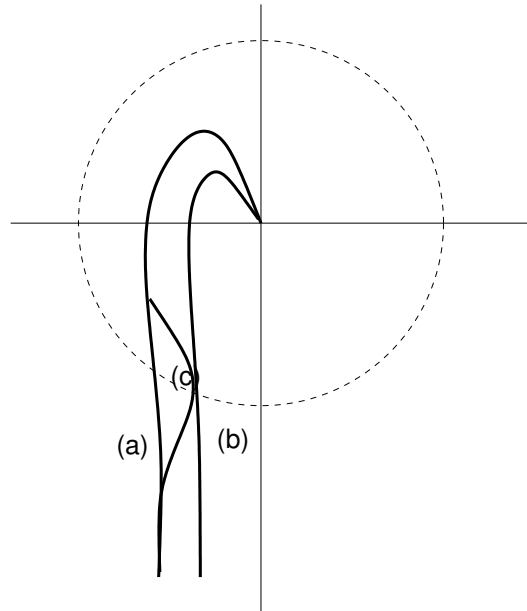
Ahora se requiere que en baja frecuencia la ganancia valga 1, por lo que  $K = \frac{b}{a}$ .

#### 9.3.1. Respuesta en frecuencia y fase máxima

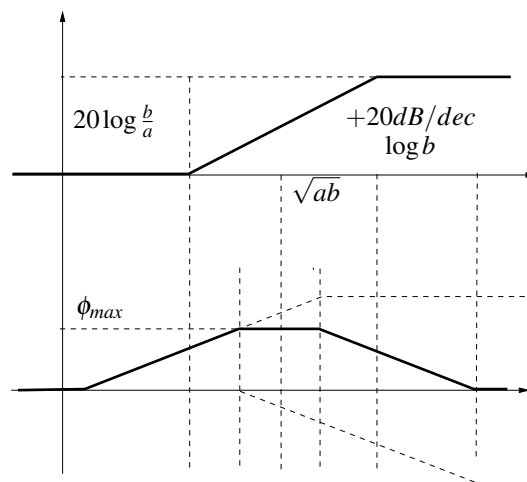
Reescribiendo el compensador en la forma de Bode tenemos

$$H(j\omega) = \frac{(1 + \frac{j\omega}{a})}{(1 + \frac{j\omega}{b})} \quad (9.22)$$

La curva de respuesta en frecuencia puede verse en la figura 9.10

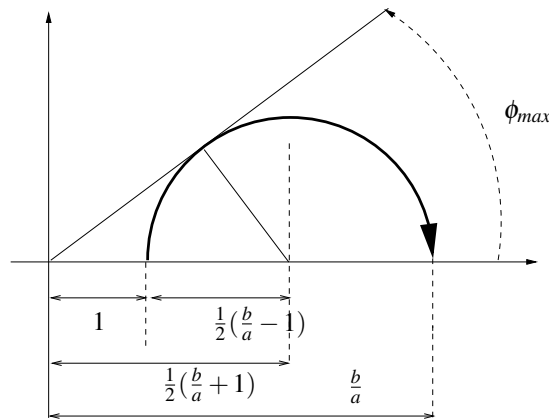


**Figura 9.9:** Diagrama polar del compensador en adelanto.



**Figura 9.10:** Respuesta en frecuencia del compensador en adelanto.





**Figura 9.11:** Diagrama polar del compensador en adelanto.

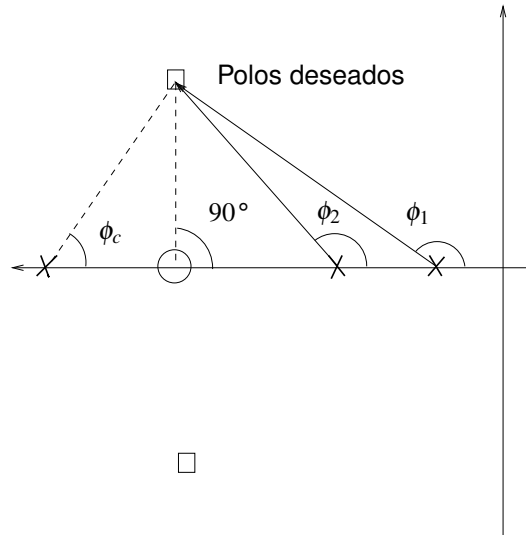
El aumento de ganancia en alta frecuencia aumentará el ancho de banda del sistema compensado, con lo cual es mismo será mas rápido, pero al mismo tiempo mas ruidoso. La fase máxima, al igual que en el compensador de atraso, se obtiene del diagrama polar del sistema, figura 9.11, y resulta ser, nuevamente,  $\sin \phi_{max} = \frac{b-a}{b+a}$ .

El diseño del compensador por adelanto de fase es sensiblemente mas complejo que el de atraso. En este capítulo propondremos distintos métodos, dependiendo de las especificaciones del problema a resolver.

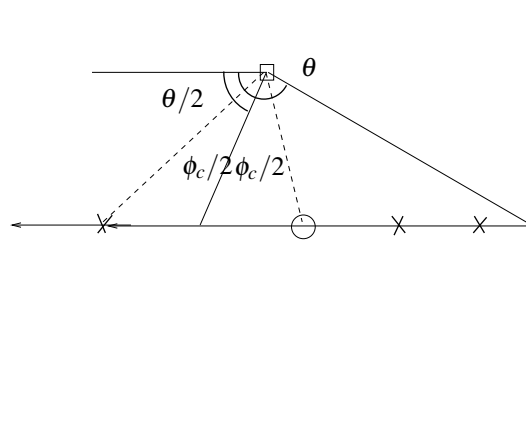
### 9.3.2. Diseño en el lugar de raíces

En este caso la especificación está asociada a la posición deseada de los polos dominantes de lazo cerrado. En esa ubicación se calcula la fase  $\phi_p$  que la planta está aportando, y la diferencia con  $(r+1)\pi$  (condición de fase del lugar de raíces), digamos  $\phi_c$ , debe ser aportada por el compensador. Cualquier compensador que aporte esa fase resolverá el problema. La solución mas simple es fijar con algún criterio la ubicación de una de las singularidades de  $H(s)$  y calcular la restante. Por ejemplo, podría fijarse el cero del compensador exactamente debajo de los polos deseados, tal que la fase aportada por el mismo sea  $+90^\circ$ . Luego la fase del polo será  $\phi_b = \phi_c - 90^\circ$ , y esto determina su ubicación. En la figura 9.12 se aprecia esta solución.

De todos los compensadores posibles, la técnica de la bisectriz permite obtener el que aporta la fase mínima, esto es, el que posee el cero y el polo mas cercanos entre sí. Una vez obtenida  $\phi_c$ , se traza un segmento desde el origen del plano del coordenadas y el polo deseado, y una paralela al eje real pasando por el mismo. Luego se toma la línea bisectriz al ángulo  $\theta$  obtenido, tomando  $\frac{\phi_c}{2}$  a ambos lados de la bisectriz. Los cortes de estas dos líneas con el eje real determinan la ubicación del polo y el cero del compensador.



**Figura 9.12:** Cero a  $90^\circ$  del polo deseado



**Figura 9.13:** Método de la Bisectriz.

### 9.3.3. Un ejemplo

Supongamos el siguiente sistema:

$$G(s) = K \frac{1}{(s+1)(s+10)} \quad (9.23)$$

Se desea que los polos de lazo cerrado se encuentren en  $s_{1,2} = -15 \pm j15$ . Calculando el aporte de las singularidades de la planta tenemos

$$\phi_1 = \tan^{-1} \frac{15}{14} = -133^\circ \quad (9.24)$$

$$\phi_2 = \tan^{-1} \frac{15}{5} = -108^\circ \quad (9.25)$$

$$\phi_p = \phi_1 + \phi_2 = -241^\circ \quad (9.26)$$

con lo cual la fase a aportar por el compensador será

$$\phi_c = \phi_a + \phi_b = 61^\circ \quad (9.27)$$

Si elegimos  $\phi_a = 90^\circ$  resulta  $a = -15$ ,  $\phi_c = -29^\circ$  y por lo tanto,  $b = -42$ . El compensador resultante es

$$H(s) = 2.8 \frac{(s+15)}{(s+42)} \quad (9.28)$$

Para el método de la bisectriz resulta  $\theta = 135^\circ$ ,  $\frac{\phi_c}{2} = 30.5^\circ$  y por lo tanto  $a = 12.89$  y  $b = 34.9$ . El compensador resulta

$$H(s) = 2.7 \frac{(s+12.89)}{(s+34.9)} \quad (9.29)$$

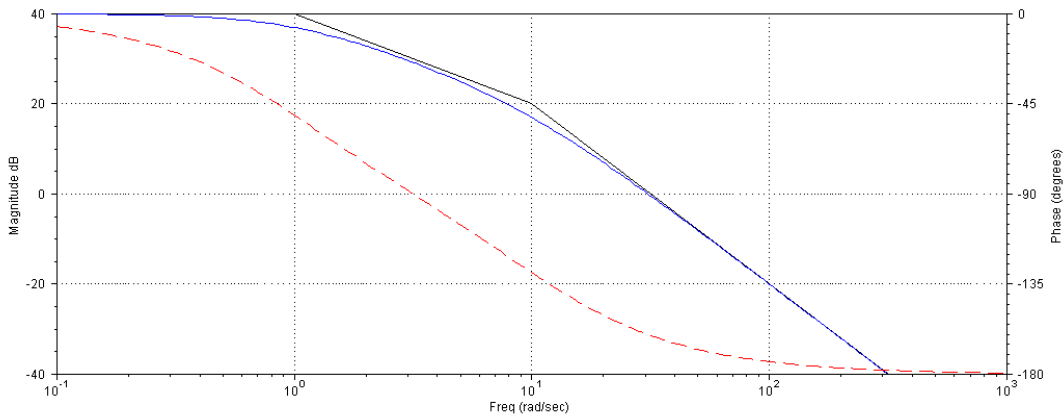
Tal vez la solución mas simple consista en cancelar el polo de la planta en  $s = -15$  con el cero del compensador, y elegir el polo del mismo de forma tal que el lugar de raíces del nuevo sistema (que ahora sólo tendrá dos polos) pase por el lugar deseado. En ese caso,  $a = -15$ ,  $b = -29$  y el compensador es

$$H(s) = 2.9 \frac{(s+10)}{(s+29)} \quad (9.30)$$

### 9.3.4. Diseño en frecuencia

Cuando las especificaciones están en términos del Margen de Fase, es necesario realizar el diseño sobre el diagrama de Bode de la planta. Analicemos por ejemplo el siguiente sistema:

$$G(s) = 1000 \frac{1}{(s+1)(s+10)} \quad (9.31)$$



**Figura 9.14:** Respuesta en frecuencia del sistema sin compensar

con el requerimiento de un margen de fase mayor a  $60^\circ$ . Si hacemos el diagrama de Bode del sistema (figura 9.14), vemos que el margen de fase del sistema sin compensar es de, aproximadamente,  $20^\circ$  a  $\omega = 30.64 \text{ rad/s}$ . Para cumplir con la especificación el compensador deberá aportar la diferencia de fase correspondiente, unos  $45^\circ$ . Diseñaremos un compensador para aportar  $45^\circ$  a  $\omega = 30.54 \text{ rad/s}$ . Esto es relativamente sencillo. De la expresión de  $\phi_{max}$  tenemos que

$$\sin(\phi_{max}) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{b-a}{b+a} \quad (9.32)$$

$$b = a \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = 5.83a \quad (9.33)$$

$$30.64 = \sqrt{ab} = \sqrt{a^2 5.83} = 2.4142a \quad (9.34)$$

$$\Rightarrow a = 12.7 \quad (9.35)$$

$$b = 74 \quad (9.36)$$

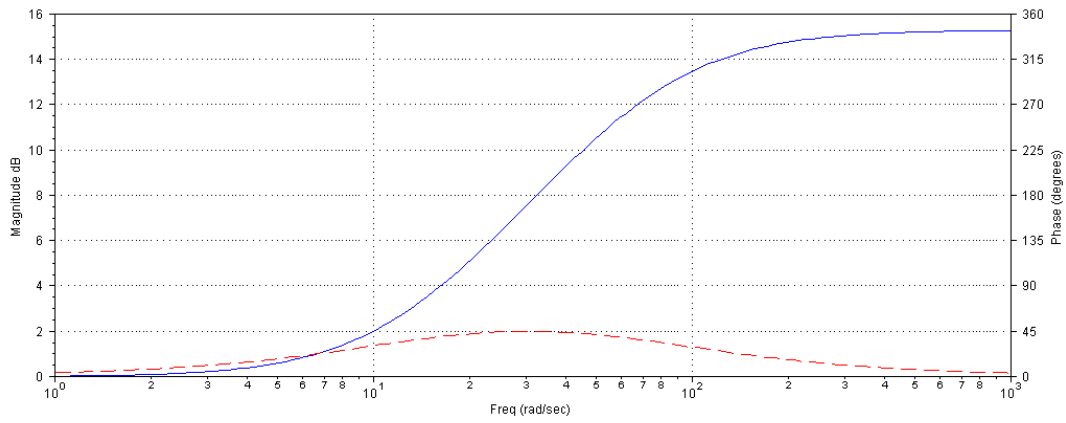
El compensador resulta

$$H(s) = 5.83 \frac{(s+12.7)}{(s+74)} \quad (9.37)$$

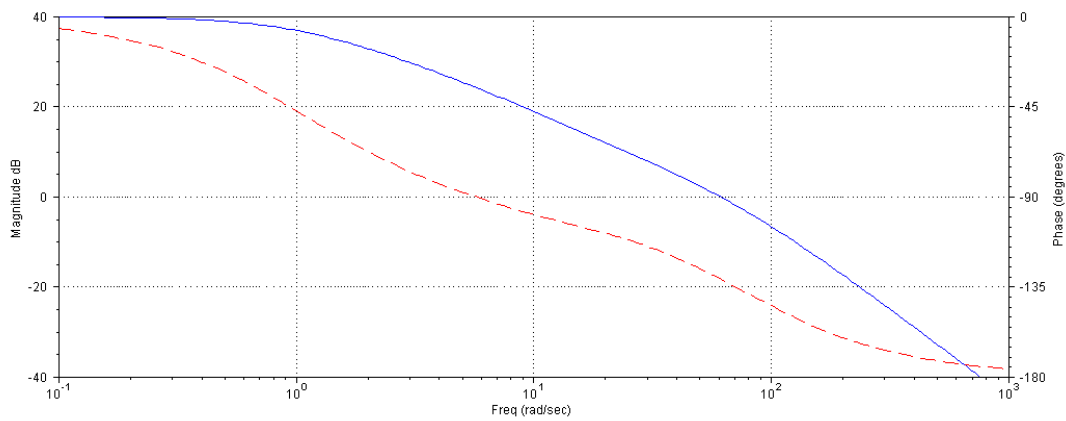
y su respuesta en frecuencia puede verse en la figura 9.15. El sistema compensado  $G(s)H(s)$  tiene el diagrama de Bode ilustrado en la figura 9.16. Ahora el margen de fase es (nuevamente) de  $50^\circ$ , *lo que no cumple con las especificaciones*. Qué ocurrió?

El problema aparece debido a que, por la característica de amplitud del compensador, el punto de corte de  $0 \text{ dB}$  del sistema compensado se corre hacia alta frecuencia (en este ejemplo  $\omega = 62 \text{ rad/s}$ ). Esto tiene dos efectos:

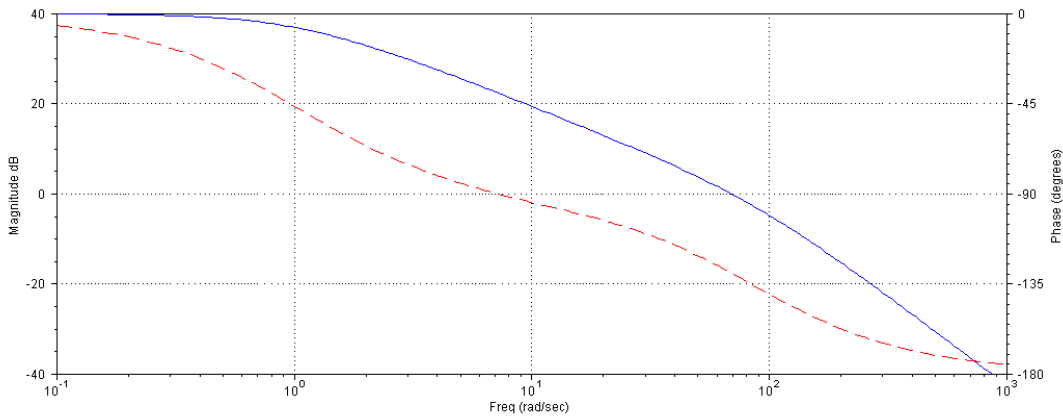
- a la nueva frecuencia de corte, la planta está aportando más fase negativa
- a la nueva frecuencia de corte, el compensador ya no está aportando su fase máxima



**Figura 9.15:** Respuesta en frecuencia del primer compensador.



**Figura 9.16:** Primer intento. El MF ha aumentado, pero no se cumplen las especificaciones



**Figura 9.17:** Compensador rediseñado para aportar 50°

Dentro del conjunto de líneas de acción posibles para solucionar el problema podemos citar las siguientes:

- Aumentar la *distancia entre el polo y el cero* del compensador (es decir,  $\phi_{max}$ ), en el conocimiento que en la nueva frecuencia de corte de 0dB el compensador no estará aportando su fase máxima. Normalmente se comienza con una fase en exceso de 5°, pero esto depende del comportamiento de la planta en esa banda de frecuencias.
- Modificar la *ubicación* del compensador, desplazándolo hacia alta frecuencia, de modo tal que a la nueva frecuencia de corte el compensador esté aportando aproximadamente su fase máxima.

En nuestro ejemplo, rediseñemos el compensador para aportar 50°, conservando la frecuencia de corte original. Esto resulta en

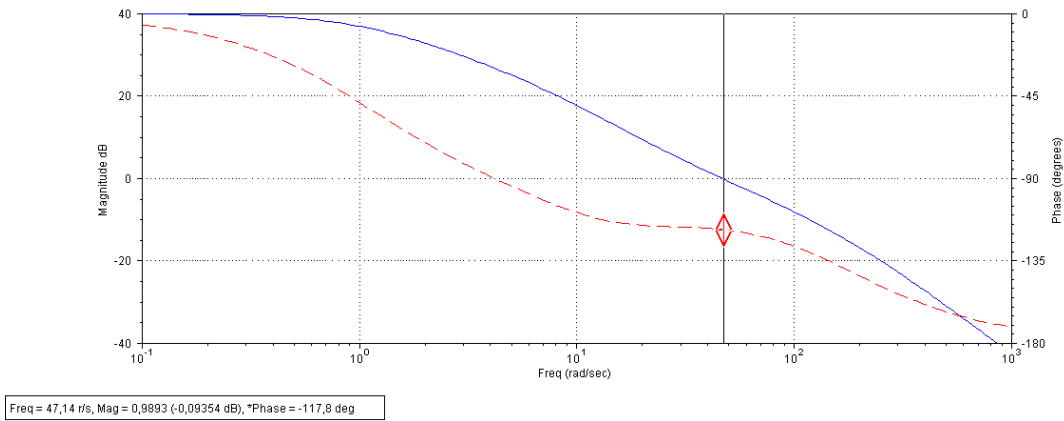
$$H(s) = 7.52 \frac{s + 11.17}{s + 84.022} \tag{9.38}$$

El diagrama resultante se aprecia en la figura 9.17. El margen de fase resultante es de 50°, que sigue sin verificar las especificaciones. Si ahora desplazamos el compensador una octava hacia alta frecuencia tenemos

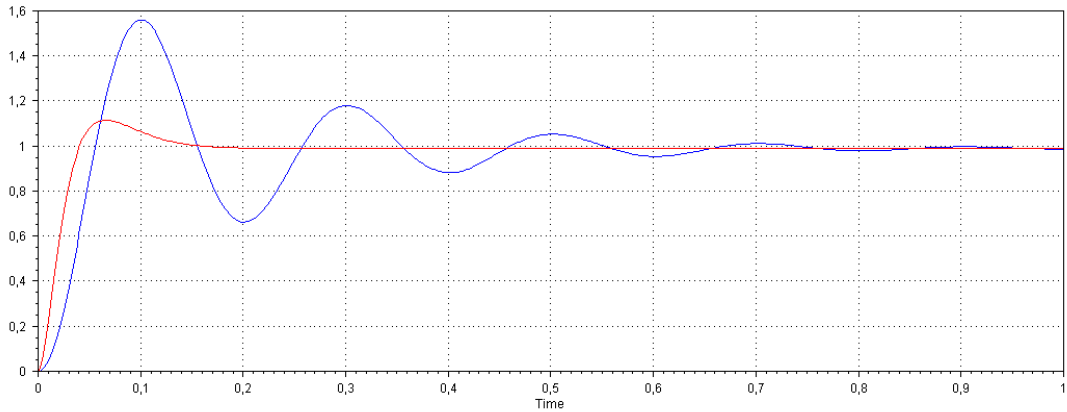
$$H(s) = 7.52 \frac{(s + 22.34)}{(s + 168)} \tag{9.39}$$

resulta un margen de fase de 62.2° a  $\omega = 47.14r/s$ , lo cual excede las especificaciones (figura 9.18). El proceso de ajuste normalmente converge rápidamente.

En la figura 9.19 puede apreciarse la respuesta al escalón de lazo cerrado del sistema compensado. El sistema compensado es más rápido que el original (producto del aumento en el



**Figura 9.18:** Diseño final



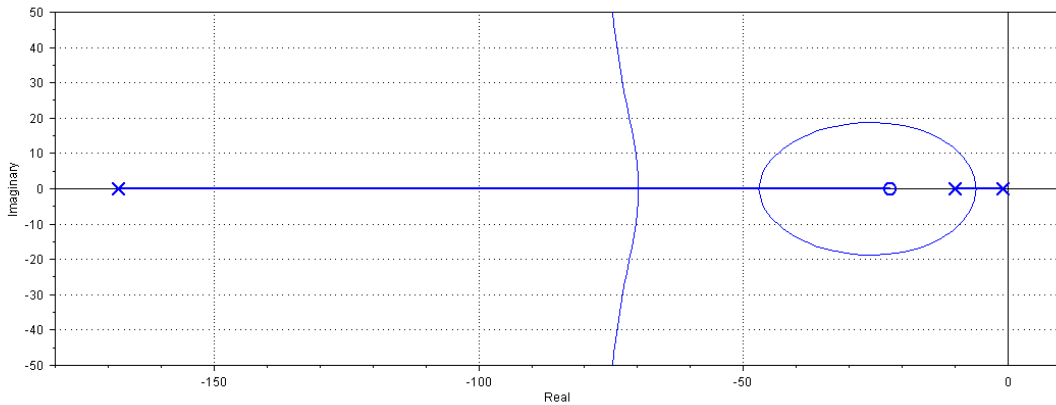
**Figura 9.19:** Respuesta temporal a lazo cerrado.

ancho de banda) y a su vez es mucho menos oscilatorio, debido a la mejora en la estabilidad relativa.

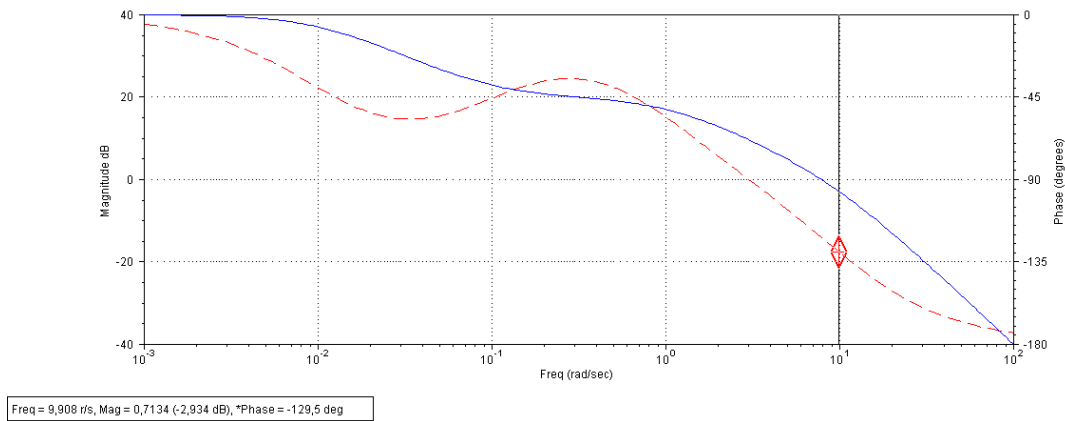
En la figura 9.20 puede verse el diagrama de lugar de raíces del sistema compensado. El compensador ha llevado las ramas del diagrama hacia el interior del semiplano izquierdo, lo cual ha aumentado su estabilidad relativa.

**Solución por atraso de fase**

El problema podría haberse resuelto de otra forma, utilizando un compensador por atraso de fase. En efecto, podría haberse disminuido la ganancia de modo tal de obtener el margen de fase deseado, y agregado luego un compensador por atraso de fase para recuperar la ganancia de baja frecuencia original. En nuestro ejemplo el cálculo es simple. Sobre el diagrama de fase hallamos la frecuencia a la que la fase de la planta es  $-120^\circ$ , en este caso  $\omega = 7.3r/s$ . La atenuación necesaria es aquella que hace que a esa frecuencia se produzca el corte de  $0dB$ . En



**Figura 9.20:** Lugar de raíces del sistema compensado.



**Figura 9.21:** Problema resuelto con un compensador por atraso

nuestro ejemplo  $K = 0.1$ . Ahora diseñamos un compensador en atraso que gane exactamente el valor de  $K$  en baja frecuencia. Por ejemplo:

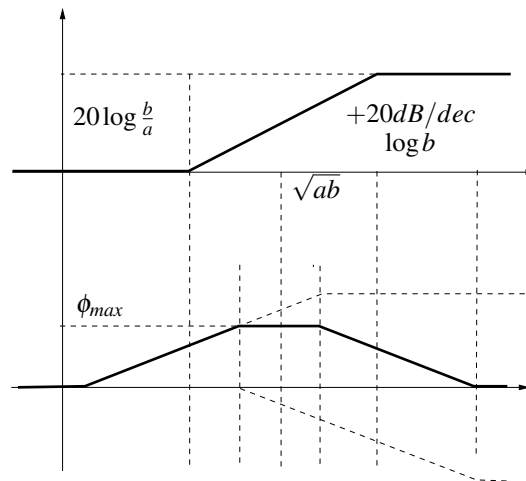
$$H(s) = \frac{(s + .1)}{(s + .01)} \tag{9.40}$$

El compensador final es la combinación de la atenuación requerida para lograr el margen de fase, y el compensador por atraso para recuperar el comportamiento en baja frecuencia:

$$H(s) = 0.1 \frac{(s + .1)}{(s + .01)} \tag{9.41}$$

La respuesta resultante se aprecia en la figura 9.21.





**Figura 9.22:** Compensador en adelanto.

### Controlador PD

Podemos simplificar en cierto modo el compensador por adelanto eliminando un grado de libertad, al llevar el polo de alta frecuencia a infinito. El compensador resultante,  $H(s) = K_1 + K_2 s$  posee una acción de control que es proporcional a la señal error y a su derivada:

$$u(t) = K_1 e(t) + K_2 \frac{\partial e(t)}{\partial t} \tag{9.42}$$

y se lo denomina controlador proporcional derivativo, o simplemente *PD*. Agrega  $90^\circ$  de fase desde una década después de la frecuencia del cero, con lo cual su efecto estabilizador es importante.

### 9.3.5. Una técnica alternativa de diseño de compensadores por adelanto

Si la cantidad de fase a agregar es menor a  $45^\circ$ , podemos plantear una técnica de compensación simplificada, que conserva (aproximadamente) la frecuencia del margen de fase del sistema sin compensar. En efecto, si analizamos la respuesta en frecuencia del compensador, que se repite por simplicidad en la figura 9.22, vemos que desde una década antes de la frecuencia del cero la pendiente es nula y la fase varía entre  $0^\circ$  y  $45^\circ$ . Por lo tanto, si el compensador se elige de forma tal que la frecuencia de su cero se ubique hasta una década por encima del punto de corte de  $0 \text{ dB}$  de la planta (al que llamaremos  $\omega_{MF}$ ), podremos agregar fase positiva sin alterar significativamente la frecuencia a la que se mide el margen de fase.

Supongamos que, para cumplir con las especificaciones, el compensador debe agregar una fase  $\phi_c$  a la frecuencia  $\omega_{MF}$ . La fase  $\phi(\omega)$  del compensador por adelanto será

$$\phi(\omega) = \phi_z(\omega) - \phi_p(\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{b}\right) \quad (9.43)$$

donde  $\phi_z$  y  $\phi_p$  son las fases aportadas por el cero y el polo del compensador, ubicadas en  $\omega = a$  y  $\omega = b$ , respectivamente. Si elegimos un valor de  $a \geq \omega_{MF}$  y queremos aportar  $\phi_c$  a la frecuencia  $\omega_{MF}$ , el valor de  $b$  queda determinado como

$$\phi(\omega_{MF}) = \phi_c = \tan^{-1}\left(\frac{\omega_{MF}}{a}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega_{MF}}{b}\right) \quad (9.44)$$

$$\frac{\omega_{MF}}{b} = \tan\left(\tan^{-1}\left(\frac{\omega_{MF}}{a}\right) - \phi_c\right) \quad (9.45)$$

$$(9.46)$$

con lo que obtenemos

$$b = \frac{\omega_{MF}}{\tan\left(\tan^{-1}\left(\frac{\omega_{MF}}{a}\right) - \phi_c\right)} \quad (9.47)$$

Esta expresión puede simplificarse aún mas si elegimos  $a = \omega_{MF}$ . En ese caso resulta

$$b = \frac{a}{\tan\left(\frac{\pi}{4} - \phi_c\right)} \quad (9.48)$$

En este caso habría que elegir una fase  $\phi_c$  un poco mayor que la estrictamente necesaria, ya que el cero agregará 3db a la frecuencia  $\omega_{MF}$ . El procedimiento de diseño es el siguiente:

1. Trazar el diagrama de Bode del sistema sin compensar, determinando  $MF$  y  $\omega_{MF}$ .
2. Determinar  $\phi_c = MF_{deseado} - MF$  mas un margen de seguridad, típicamente  $5^\circ$ . Debe verificarse que  $\phi_c \leq \pi/4$ .
3. Ubicar el cero del compensador  $a = \omega_{MF}$ , el polo en  $b = \frac{a}{\tan\left(\frac{\pi}{4} - \phi_c\right)}$  y la ganancia como  $b/a$ .

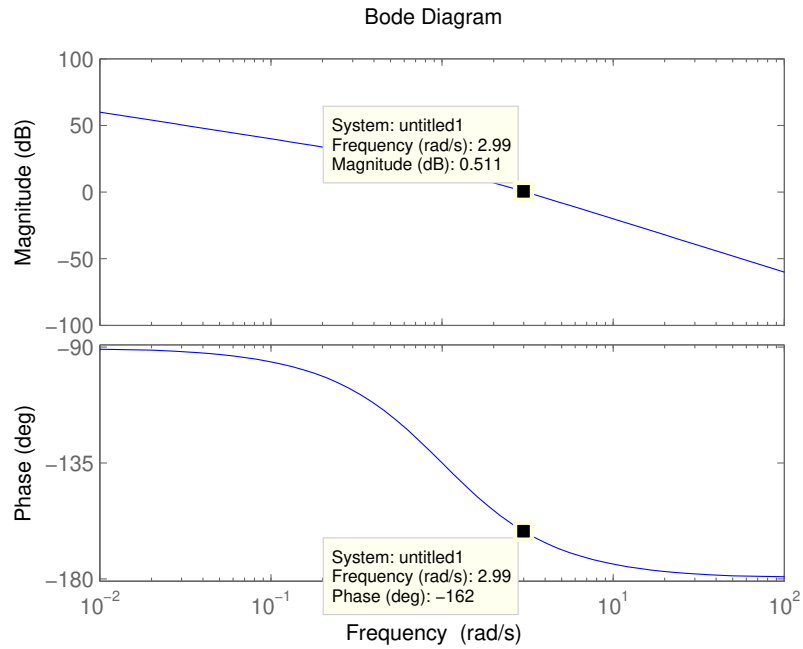
### Un ejemplo

Supongamos que la planta tiene la función de transferencia

$$G(s) = \frac{10}{s(s+1)} \quad (9.49)$$

Puede apreciarse de la respuesta en frecuencia, fig 9.23, que  $\omega_{MF} \cong 3r/s$  y el  $MF$  es de unos  $18^\circ$ . Supongamos que deseamos compensar para lograr  $MF_{deseado} = 50^\circ$ . Tomamos  $\phi_c = 50^\circ - 18^\circ + 5^\circ = 37^\circ$ , resultando el compensador

$$H(s) = 5.671 \frac{(s+3)}{(s+17.01)} \quad (9.50)$$

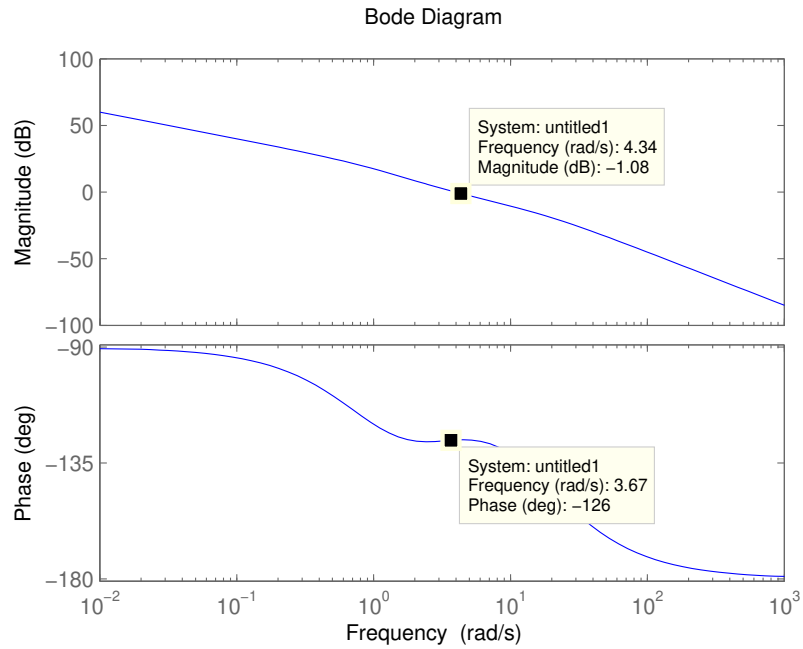


**Figura 9.23:** Planta sin compensar

La respuesta en frecuencia puede apreciarse en la figura 9.24. El nuevo margen de fase es de  $54^\circ$ , a  $\omega = 4r/s$ .

## 9.4. Controladores combinados Atraso-Adelanto

A menudo las especificaciones combinan condiciones de estado estacionario y estabilidad relativa. Es habitual que pueda resolverse alguno de los problemas con un ajuste de ganancia, de forma tal que sólo es necesario agregar un compensador. Sin embargo, puede darse el caso en el que sea necesario agregar celdas de compensación por atraso y por adelanto. Un caso típico aparece cuando, aparte de las condiciones de precisión de estado estacionario y estabilidad relativa se requiere asegurar, por ejemplo, una cierta ganancia a frecuencias medias. Si las celdas de compensación están suficientemente distanciadas entre sí, pueden sintetizarse las etapas de adelanto y atraso en forma independiente, como dos problemas de compensación aislados. Cuando eso no es posible, debe realizarse en primer lugar una de las compensaciones (por ejemplo, la de atraso) y luego tomar la planta con el primer compensador como la nueva planta para la segunda etapa de compensación (la de adelanto).



**Figura 9.24:** Planta compensada

## 9.5. Problemas

1. Una planta a controlar tiene la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{8}{s(0.5s + 1)}$$

Diseñar un compensador de adelanto de fase para alcanzar las especificaciones siguientes, utilizando el trazado asintótico de Bode:

- $MF \geq 50^\circ$
- $MG \geq 10dB$

2. Sea la función de transferencia de lazo abierto de un sistema sin compensar:

$$G(s) = \frac{2}{s(0.25s + 1)(0.1s + 1)}$$

Determinar si se puede diseñar un compensador de adelanto de fase para un  $MG > 40^\circ$ . En caso contrario indicar algunas de las soluciones posibles.

3. Sea el sistema del problema 1, se desea mantener el coeficiente de amortiguamiento igual a 0.5 y además conseguir que la frecuencia natural sin amortiguación del par de polos complejos conjugados dominantes del sistema compensado adecuadamente sea  $\omega_n = 4$  rad/seg. Sintetizar un compensador para que la ganancia sea la menor posible.

4. Sea un sistema realimentado unitariamente cuya transferencia de lazo abierto es:

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)(s+10)}$$

Se desea que la relación de amortiguación de los polos dominantes sea  $\xi = 0.5$  y  $\omega_n = 5$  rad/seg. Diseñar el compensador para estas condiciones.

5. En un sistema de control con realimentación unitaria la función de transferencia de lazo abierto es:

$$G(s) = \frac{2}{s(0.25s+1)(0.0625s+1)}$$

Proyectar un compensador para disminuir 10 veces el error de estado estacionario a la rampa sin modificar el comportamiento transitorio.

6. Dado el sistema

$$G(s) = \frac{4}{s(s+0.5)}$$

Se desea que  $\xi = 0.5$  y además que  $\omega_n = 5$  rad/seg, cumpliendo también con  $K_v = 80$ . Diseñar el compensador adecuado para cumplir con las especificaciones dadas.

7. Dado el sistema

$$G(s) = \frac{1}{(s^2-1)}$$

diseñar un compensador, con el mínimo número de singularidades, para que el error de estado estacionario al escalón unitario sea nulo. Obtener explícitamente la ubicación de las singularidades y el valor de ganancia del compensador.

8. Dado el sistema

$$G(s) = 1/s^2$$

compensar para que el error de estado estacionario a la parábola sea nulo. Trazar el diagrama de Bode del sistema compensado.

9. Dado el sistema

$$G(s) = -\frac{(s-50)}{s(s+10)}$$

compensar para que el error de estado estacionario a la rampa del sistema compensado sea 10 veces menor que el error de estado estacionario del sistema sin compensar y los polos de lazo cerrado presenten un  $\xi = 0.5$ .

10. Dado el sistema

$$G(s) = \frac{1}{s}$$

compensar, empleando el mínimo número de singularidades, de manera tal que el error de estado estacionario a la rampa unitaria sea nulo.

## Referencias

- [1] K. Ogata, "Modern Control Engineering", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA, 3rd edition, 1997.
- [2] B. C. Kuo, "Automatic Control Systems", Prentice-Hall International, London, England, 9th edition, 1962.
- [3] C. H. Houpis, S. N. Sheldon, J. J. D'Azzo, "Linear Control System Analysis and Design". Fifth Edition, Revised and Expanded (Automation and Control Engineering). Taylor and Francis, 2003.
- [4] C.H.Houpis, S.N.Sheldon, "Linear Control System Analysis and Design with MATLAB , Sixth Edition (Automation and Control Engineering, Book 53)". CRC Press, 2014.
- [5] G. F. Franklin, J. D. Powell, A. Emami-Naeini. "Feedback Control of Dynamic Systems". Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, fourth edition, 2002.
- [6] N. S. Nise, "Control System Engineering", John Wiley and Sons Inc., New York, 2011.
- [7] M. Gopal, I.J. Nagrath, " A Textbook of Control Systems Engineering", New Age International (P) Ltd., 2010.
- [8] G. Goodwin, S. Grabe.,M. Salgado, "Control System Design", Pearson Education, Upper Saddle River, NJ, eleventh/international edition, 2015
- [9] R. C. Dorf, R. H. Bishop, "Modern Control Systems". Pearson 2008.
- [10] J. Dorsey, "Continuous and Discrete Control Systems: Modeling, Identification, Design, and Implementation". McGraw-Hill Series in Electrical and Computer Engineering. Prentice-Hall, New York, NY, 2002.

# CAPÍTULO 10

## Controladores PID

### Introducción

En este capítulo se analizarán los controladores PID, un tipo de compensador de atraso-adelanto que es ampliamente utilizado en ambientes industriales. La razón de su popularidad es la existencia de métodos de ajuste semi-empírico de sus parámetros iniciales que no requieren el conocimiento exacto del modelo matemático de la planta, y se basan en ensayos experimentales, a menudo de fácil implementación. Ese ajuste inicial es habitualmente seguido por un proceso de sintonía fina. En las secciones que siguen se analizará la estructura del controlador, algunos métodos de ajuste empírico y un método de sintonía que permite imponer no sólo el margen de fase deseado, sino también a qué frecuencia se produce. Se estudiará el fenómeno de *reset windup*, producido por la presencia de no linealidades en el lazo, y se detallarán algunas estrategias para reducir su efecto. Finalmente se discutirán algunas cuestiones de implementación práctica.

### 10.1. Acciones de Control

En un controlador PID se combinan tres acciones de control:

- Una acción *proporcional* al error, esto es  $u_1(t) = K_1 e(t)$ ,
- Una acción proporcional a la *integral* del error,  $u_2(t) = K_2 \int_0^t e(t) dt$ ,
- Una acción proporcional a la *derivada* del error,  $u_3(t) = K_3 \frac{de(t)}{dt}$ .

La acción de control completa será

$$u(t) = K_1 e(t) + K_2 \int_0^t e(t) dt + K_3 \frac{de(t)}{dt} = K_p \left( e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t) dt + T_d \frac{de(t)}{dt} \right) \quad (10.1)$$

donde  $K_p$  se denomina *constante proporcional*,  $T_i$  es el *tiempo integral* y  $T_d$  es el *tiempo derivativo*. Observar que, efectivamente,  $T_i$  y  $T_d$  tienen unidades de tiempo, mientras que  $K_p$  es adimensional.

## 10.2. Singularidades del controlador

Aplicando la transformada de Laplace a esta última ecuación, y considerando condiciones iniciales nulas podemos escribir

$$U(s) = K_p \left( E(s) + \frac{1}{T_i} \frac{E(s)}{s} + T_d s E(s) \right) \quad (10.2)$$

$$PID(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) = K_p \frac{T_i T_d s^2 + T_i s + 1}{T_i s} \quad (10.3)$$

Lo primero que podemos apreciar en esta última ecuación es que la transferencia es *impropia*, es decir, el número de ceros es superior al número de polos. Esto hace que sea *no realizable*. En realidad, existirán polos en alta frecuencia que se omiten por estar habitualmente más allá de la banda pasante de la planta. Podemos ver al compensador PID como un compensador por atraso-adelanto como los analizados en el capítulo anterior, donde se han eliminado dos grados de libertad, al fijar el polo de baja frecuencia en  $\omega = 0$  y el de alta frecuencia en  $\omega = \infty$ .

Calculando la ubicación de los ceros, esto es las raíces del numerador, vemos que

$$s_{1-2} = -\frac{1}{2T_d} \pm \frac{1}{2T_i T_d} \sqrt{T_i^2 - 4T_i T_d} \quad (10.4)$$

Pueden diferenciarse 3 casos:

- Cuando  $T_i > 4T_d$  los ceros son reales y distintos. En este caso se ve claramente la presencia de un compensador por atraso de fase en baja frecuencia y un compensador por adelanto en alta frecuencia. Además, si  $T_i$  es muy grande, resulta que el cero de baja frecuencia depende fundamentalmente de  $T_i$  y el de alta frecuencia lo hace de  $T_d$ . Tenemos entonces un ajuste más o menos independiente de las secciones de atraso y adelanto del compensador, que pasa a comportarse como un par atraso-adelanto convencional.
- Cuando  $T_i = 4T_d$  los ceros son coincidentes. Esta es la configuración usada por la mayoría de los ajustes empíricos.
- Cuando  $T_i < 4T_d$  los ceros son complejos conjugados. Esta configuración no se utiliza en la práctica.



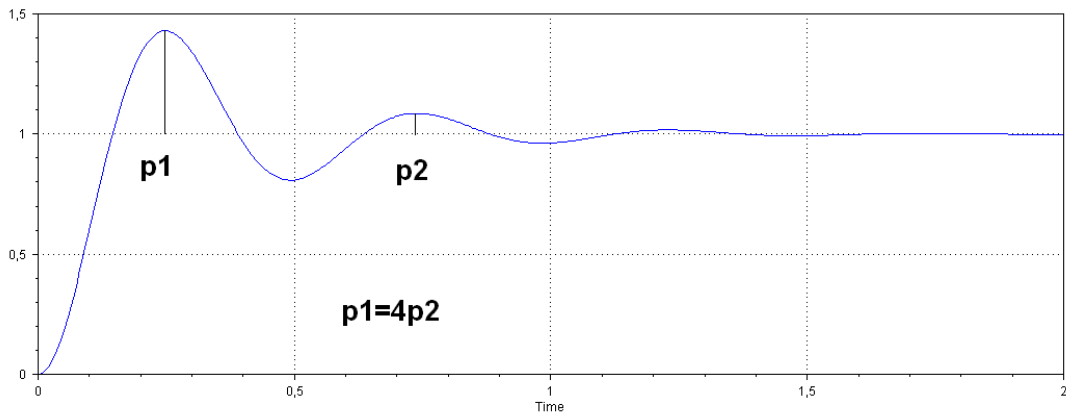


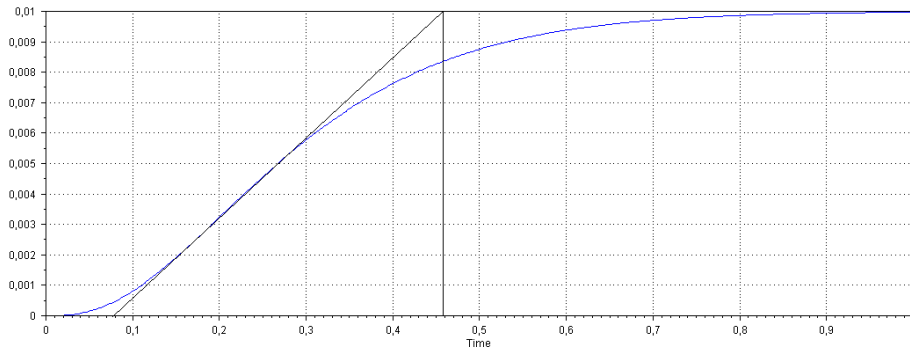
Figura 10.1: Respuesta de quarter decay

### 10.3. Ajuste empírico del controlador PID. Métodos de Ziegler y Nichols

Los métodos de Ziegler y Nichols fueron desarrollados para realizar la “primera sintonía” o “ajuste inicial” del controlador PID. El objetivo de estos ajustes es el *rechazo a perturbaciones en escalón a la salida del lazo con una dinámica de “quarter decay”*, esto es, una respuesta oscilatoria amortiguada en la que el primer pico es cuatro veces más grande que el segundo. Un ejemplo puede apreciarse en la figura 10.1. Este objetivo de control es llamativo, porque para tener esta relación en la respuesta al escalón el sobrepico debe ser muy importante (por ejemplo, si se tratara de un sistema lineal de segundo orden, el sobrepico es del 80%). Sin embargo, es importante notar que en un sistema industrial rara vez se tendrá un escalón en la referencia en el instante inicial. Normalmente el sistema es llevado a su punto de funcionamiento lentamente, y una vez allí se pretende rechazar perturbaciones con la dinámica “quarter decay”, que es considerada una buena relación de compromiso entre velocidad y precisión. Indudablemente, este tipo de respuesta no sería adecuada, por ejemplo, en un servomecanismo de posición.

#### 10.3.1. Método 1: Plantas con respuesta sigmoidea

En este método se supone que la planta tiene una respuesta a un escalón de lazo abierto en forma de  $S$  (respuesta sigmoidea). En ese caso se traza una tangente a la curva de respuesta en el punto de inflexión, lo que determina un ángulo  $\alpha$  y un *retardo equivalente*  $L$ . Si llamamos  $R = \text{tg}(\alpha)$  los parámetros del controlador surgen de las siguientes expresiones:



**Figura 10.2:** Respuesta sigmoidea a lazo abierto

$$K_p = \frac{1.2}{RL} \tag{10.5}$$

$$T_i = 2L \tag{10.6}$$

$$T_d = 0.5L \tag{10.7}$$

Obsérvese que  $T_i = 4T_d$ , es decir, los ceros del controlador son coincidentes.

**Ejemplo:**

Supongamos la planta

$$G(s) = \frac{10}{(s + 10)^3} \tag{10.8}$$

La respuesta al escalón puede verse en la figura 10.2. De esta figura se obtiene  $L = 0.08$  y  $\tan \alpha = \frac{0.01}{0.38} = 0.026$ . Los parámetros del controlador resultan:

$$K_p = 570 \tag{10.9}$$

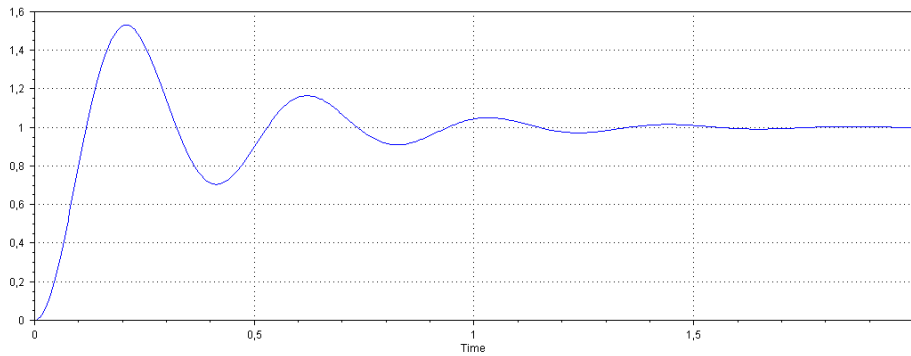
$$T_i = 0.16 \tag{10.10}$$

$$T_d = 0.04 \tag{10.11}$$

y la respuesta de lazo cerrado se aprecia en la figura 10.3, que cumple muy aproximadamente con la respuesta deseada.

**10.3.2. Método 2: Oscilación a lazo cerrado**

En este método la planta es llevada a oscilación automantenida a lazo cerrado utilizando un controlador proporcional puro (obviamente, la planta debe poder ser llevada a oscilación de esta



**Figura 10.3:** Respuesta de lazo cerrado

forma, y la misma debe ser segura, es decir, no comprometer su integridad). En esas condiciones se mide la ganancia  $K_c$  que produce la oscilación, y el período  $T_c$  de la misma. El nuevo juego de valores será

$$K_p = 0.6K_c \quad (10.12)$$

$$T_i = 0.5T_c \quad (10.13)$$

$$T_d = 0.125T_c \quad (10.14)$$

Nuevamente resulta  $T_i = 4T_d$ , lo que indica que los ceros del controlador son coincidentes.

### Ejemplo:

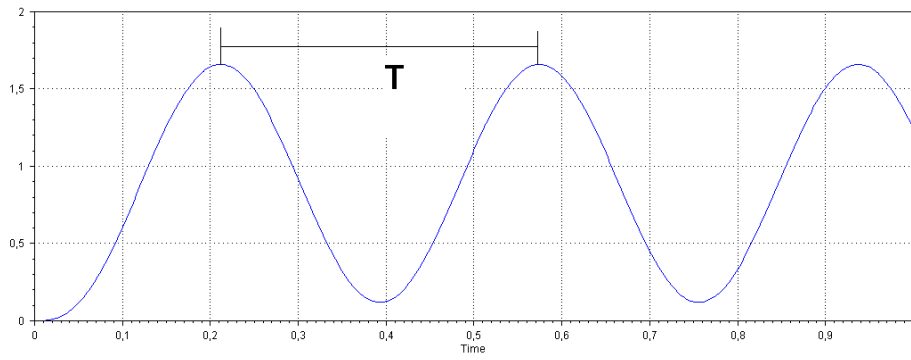
Si utilizamos la misma planta que en el ejemplo anterior, los valores de  $K_c$  y  $T_c$  pueden obtenerse en forma gráfica (figura 10.4) o bien del arreglo de Routh, dado que el sistema es lineal. Los valores resultantes son  $K_c = 800$  y  $T_c = 0.3627$ . Los parámetros del controlador son

$$K_p = 480 \quad (10.15)$$

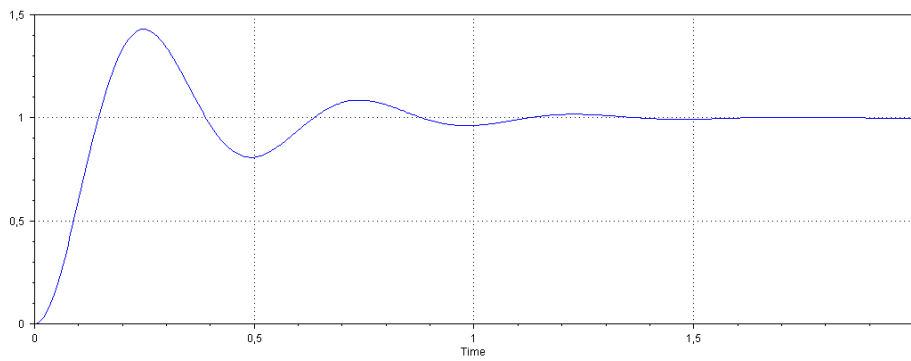
$$T_i = 0.181 \quad (10.16)$$

$$T_d = 0.045 \quad (10.17)$$

y la respuesta temporal a lazo cerrado puede verse en la figura 10.5. Como era de esperarse, las respuestas según los dos métodos son prácticamente iguales.



**Figura 10.4:** Oscilación de lazo cerrado obtenida con un control proporcional



**Figura 10.5:** Respuesta de lazo cerrado

## 10.4. Plantas lineales conocidas

Si la planta tiene una función de transferencia conocida, el compensador PID puede imponer un cierto Margen de Fase a una frecuencia especificada  $\omega_1$ . Para probar esto, comencemos evaluando  $PID(s)$  en  $s = j\omega$ :

$$PID(j\omega) = K_p \left( 1 + \frac{1}{j\omega T_i} + j\omega T_d \right) = K_p \left( 1 + j \left( \omega T_d - \frac{1}{\omega T_i} \right) \right) \quad (10.18)$$

de forma tal que la fase  $\phi$  y el módulo del compensador  $|PID(j\omega)|$  son

$$tg(\phi) = \omega T_d - \frac{1}{\omega T_i} \quad (10.19)$$

$$|PID(j\omega)| = K_p \sqrt{1 + \left( \omega T_d - \frac{1}{\omega T_i} \right)^2} = K_p \sqrt{1 + tg(\phi)^2} = \frac{K_p}{\cos(\phi)} \quad (10.20)$$

Supongamos que hemos cumplido con la especificación, es decir, a la frecuencia  $\omega_1$  tenemos  $MF_1$ . Si esto es así, tenemos que

$$\angle PID(j\omega_1)G(j\omega_1) = \angle PID(j\omega_1) + \angle G(j\omega_1) = -180 + MF_1 \quad (10.21)$$

Por hipótesis la planta  $G(s)$  es conocida, por lo que podemos despejar el módulo y la fase del controlador

$$|PID(j\omega_1)| = \frac{1}{|G(j\omega_1)|} \quad (10.22)$$

$$\angle PID(j\omega_1) = -180 + MF_1 - \angle G(j\omega_1) = \phi_1 \quad (10.23)$$

Por lo tanto

$$K_p = \frac{\cos(\phi_1)}{|G(j\omega_1)|} \quad (10.24)$$

Para calcular los dos parámetros restantes solo tengo una ecuación:

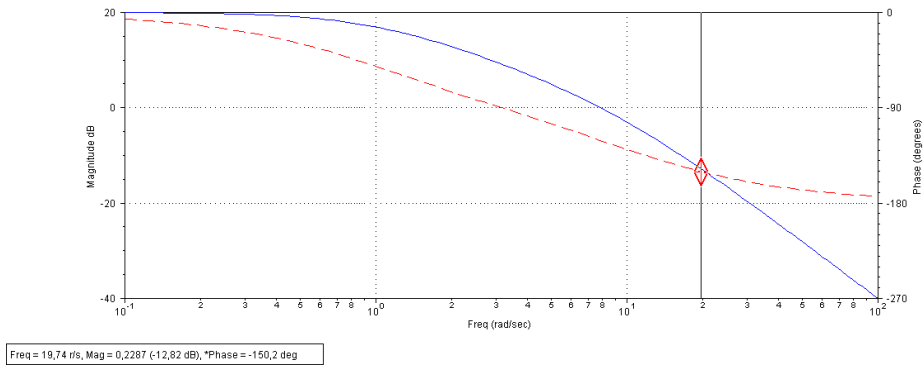
$$tg(\phi_1) = \omega_1 T_d - \frac{1}{\omega_1 T_i} \quad (10.25)$$

Esto indica que hay infinitas soluciones posibles. Puede imponerse un valor de  $T_i$  y calcularse  $T_d$  o viceversa, o bien puede imponerse una relación entre  $T_i$  y  $T_d$ . Por ejemplo, si quisiera hacerse un controlador en el estilo de Ziegler y Nichols, podría imponerse  $T_i = 4T_d$ .

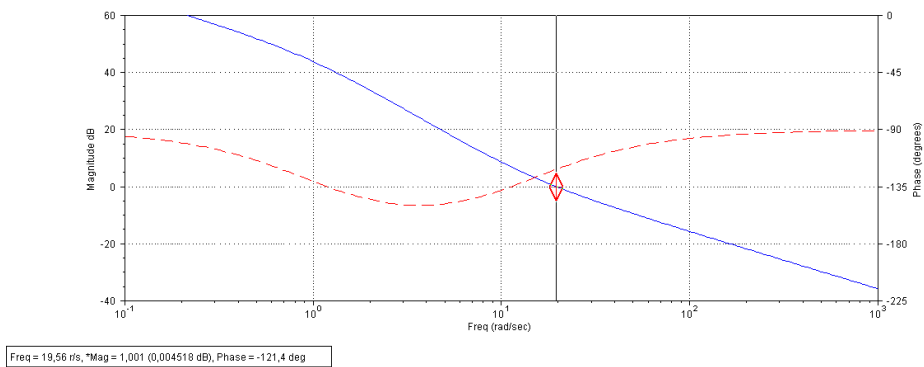
### Ejemplo:

Supongamos

$$G(s) = \frac{100}{(s+1)(s+100)} \quad (10.26)$$



**Figura 10.6:** Sistema sin compensar



**Figura 10.7:** Sistema compensado

y deseamos un  $MF = 60^\circ$  a  $\omega = 20r/s$ . El diagrama de Bode se grafica en la figura 10.6. A  $\omega = 20r/s$  el módulo de la planta es 0.2287 y su fase, aproximadamente  $-150^\circ$ . Por lo tanto tenemos

$$\phi_1 = -180^\circ + 150^\circ + 60^\circ = 30^\circ \quad (10.27)$$

$$K_p = \frac{0.866}{0.2287} = 3.78 \quad (10.28)$$

$$0.577 = 20T_d - \frac{1}{20T_i} \quad (10.29)$$

Si imponemos  $T_i = 4T_d$  tenemos  $T_i = 0.173$  y  $T_d = 0.043$ .

La respuesta resultante se aprecia en la figura 10.7, donde se verifica que las especificaciones se han cumplido satisfactoriamente.

## 10.5. Reset Windup

Este fenómeno aparece como una alteración en la respuesta temporal de un lazo controlado con un PID debida a la presencia de una no linealidad, por ejemplo, una saturación del tipo

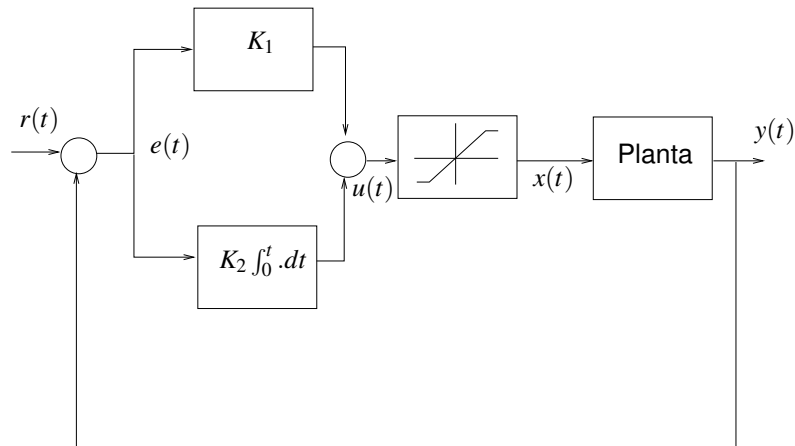
$$x(t) = \begin{cases} X_M & u(t) > U_M \\ u(t) & U_m \leq u(t) \leq U_M \\ X_m & u(t) < U_m \end{cases} \quad (10.30)$$

El efecto puede manifestarse como un sobrepico en la respuesta temporal, o también como un aumento en el tiempo de establecimiento. Para analizarlo, supongamos tener una saturación en el actuador y, por simplicidad, un controlador PI (sin acción derivativa). El esquema se ilustra en la figura 10.8. Supongamos además que las condiciones iniciales son nulas, esto es, tanto el integrador como la planta están descargados y tienen salida nula en  $t = 0$ . Si en esas condiciones aparece un escalón en la entrada, como la salida es nula el escalón pasa directamente a la señal error. Por lo tanto aparece en la salida de la acción proporcional (escalado por  $K_p$ ) y comienza a ser integrado por el integrador, de forma tal que su salida resulta una rampa. Supongamos que la combinación del escalón y la rampa alcanzan para saturar al actuador. La consecuencia es que la planta será excitada con un escalón cuyo valor será el valor de saturación del actuador. La salida de la planta comenzará a aumentar como respuesta a este escalón. Esta salida se restará al escalón de la entrada, con lo cual el error disminuirá. Esto hace que la señal en la salida de la acción proporcional disminuya, pero no será así en la salida del integrador, que solo cambiará su tasa de crecimiento, pero seguirá creciendo en la medida que su entrada mantenga el signo. Nuevamente, si la combinación de ambas acciones de control alcanza para saturar al actuador, la planta seguirá viendo un escalón en su entrada, como si no existiera realimentación, pudiendo resultar en un sobrepico. Si la salida del integrador alcanza para entrar en saturación, la planta continuará respondiendo como si estuviera excitada por un escalón a lazo abierto ya que, de hecho, la realimentación no está funcionando. La salida del integrador sólo disminuirá cuando el signo de la señal a su entrada cambie, y aun en ese caso, habrá que esperar a que la señal a la entrada del actuador disminuya por debajo del valor de saturación. La respuesta alterada aparece por la acción combinada del integrador del PI y la presencia de la no linealidad.

Para minimizar este efecto, lo correcto sería desconectar la acción integral cuando se detecta que la salida del controlador saturará al actuador. De esta forma, apenas la señal error cambia de signo, el actuador sale de saturación, sin tener que esperar que el integrador se descargue. A este mecanismo se lo denomina “anti Reset-Windup” y es una opción configurable en la mayoría de los controladores PID industriales. Veamos algunas alternativas.

### 10.5.1. Estrategias anti reset-windup

A continuación se discutirán algunas alternativas para minimizar el *reset-windup* en controladores PID. La primera técnica, denominada *Integración Condicional* o “*clamping*”, es simple-



**Figura 10.8:** Sistema con saturación en el actuador y compensación PI

mente la desconexión de la acción integral cuando la salida del controlador excede los límites de funcionamiento lineal. La segunda, llamada "tracking anti-windup" o "back-calculation", reduce en forma progresiva la entrada al integrador cuando actúa la saturación.

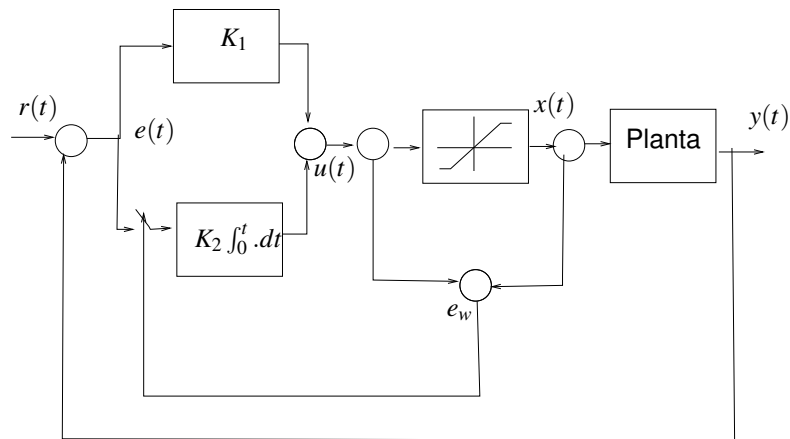
### Integración condicional

Como se indicaba en la sección anterior, la estrategia más simple es desconectar la acción integral cuando se detecta que la salida del controlador saturará al actuador. El esquema puede apreciarse en la figura 10.9. Mientras  $e_w$  sea cero (no hay saturación) la llave está cerrada. Una señal  $e_w$  distinta de cero abre la llave, desconectando la acción integral. En rigor, se trata de un control de "estructura variable", ya que la acción integral se activa (o no) dependiendo de la región de funcionamiento actual. Esta estructura asegura que mientras la salida del controlador está experimentando saturación no hay un incremento adicional en la salida del integrador. Si el error disminuye por debajo del nivel que produce la saturación en la salida del controlador, el integrador comienza a actuar nuevamente. A veces resulta interesante la adición de una histéresis para evitar el efecto de "chattering" en los bordes de la no linealidad.

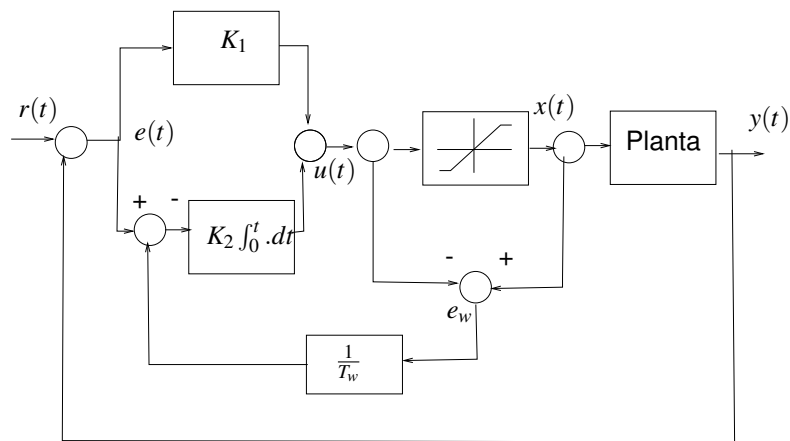
### Back calculation

La figura 10.10 muestra otra alternativa para controlar el reset-windup. Las salidas del controlador y la saturación se comparan, y la diferencia  $e_s$  se realimenta a través de una ganancia, a fin de reducir la señal de entrada al integrador. En cierta forma, es una versión "continua" de la estrategia del punto anterior. La velocidad de la corrección puede ajustarse con la ganancia  $\frac{1}{T_w}$ . Cuanto mayor sea este término, más violenta será la acción correctiva. En la zona lineal de la saturación, la corrección es nula. El lazo de anti-windup tratará de llevar  $e_s$  a cero, lo que





**Figura 10.9:** Anti reset-windup por Integración Condicional



**Figura 10.10:** Anti reset-windup por "Back Calculation"

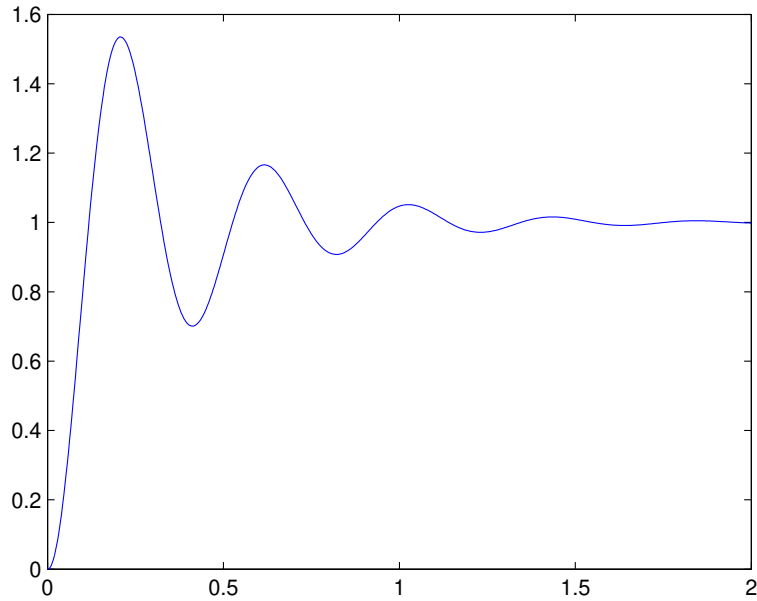
mantendrá la salida del controlador en el borde de la zona de saturación. Esto permite que el sistema salga de la zona de saturación rápidamente cuando el error cambia de signo. Una regla empírica para el ajuste inicial de la ganancia es  $T_w = \sqrt{T_i \cdot T_d}$ , lo que habitualmente resulta en un valor bastante elevado.

### 10.5.2. Un ejemplo

Supongamos una planta lineal de la forma:

$$G(s) = \frac{10}{s^3 + 30s^2 + 300s + 1000} \tag{10.31}$$

con un controlador PID con parámetros  $K_p = 480$ ,  $T_i = 0.18$  y  $T_d = 0.04$ . La respuesta del sistema lineal (sin saturación) puede verse en la figura 10.11, que representa un ajuste típico de Ziegler & Nichols.



**Figura 10.11:** Sistema compensado sin saturación. Ajuste por Z & N.

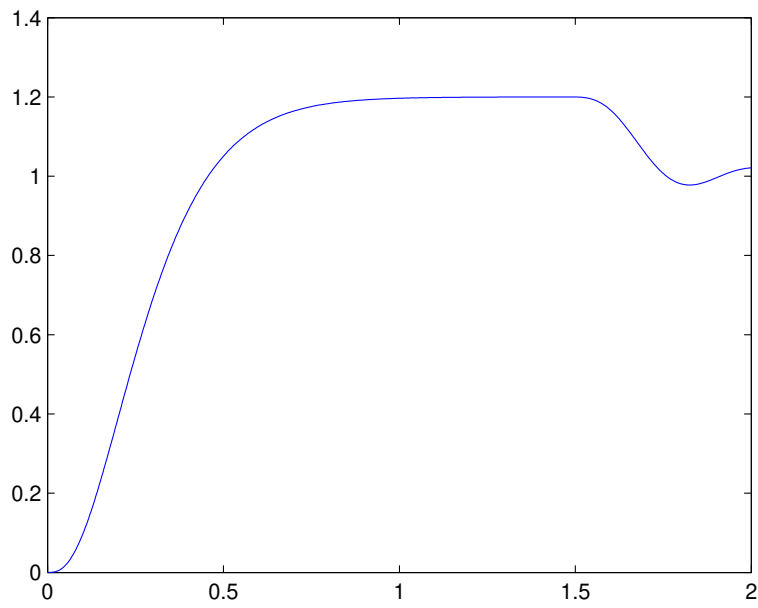
Consideremos ahora una saturación en la salida del controlador, con valores  $X_M = 120$  y  $X_m = -120$ . Si incluimos la no linealidad con el controlador diseñado, la respuesta puede apreciarse en la figura 10.12. Puede verse que en el inicio de la respuesta el sistema está respondiendo (a lazo abierto) a un escalón de magnitud 120, que es precisamente el límite superior de la saturación. Obsérvese además que el tiempo de establecimiento se ha prolongado notablemente.

En la figura 10.13 puede apreciarse la respuesta con la técnica de Integración condicional. Es evidente que el tiempo de establecimiento se ha reducido notablemente, a valores similares a los del sistema sin saturación. Esto es debido a que el integrador del PID se desconecta apenas se detecta que se ha saturado al actuador. Evidentemente la forma de la respuesta temporal también se ha visto afectada.

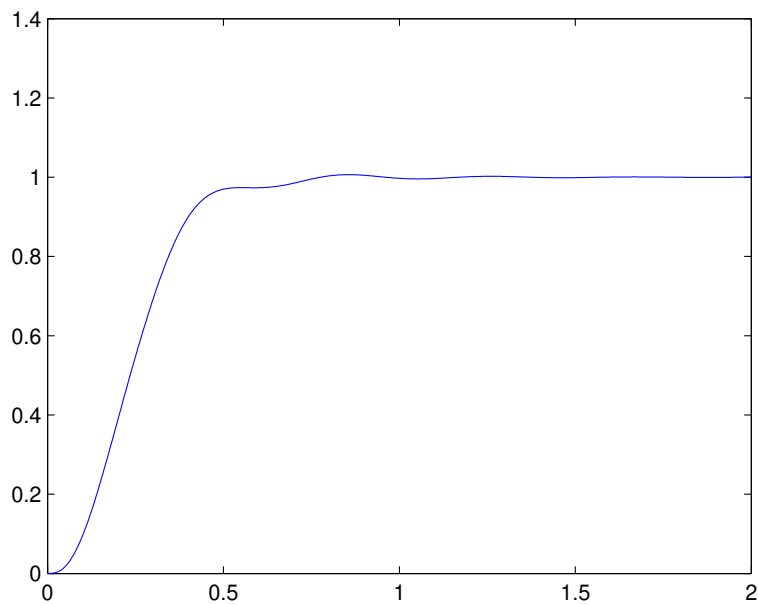
Por último, en la figura 10.14 puede apreciarse la estrategia de "back calculation", con una ganancia de  $1/T_w = 11.78$ . La respuesta es similar a la del caso anterior, pero con un comportamiento algo más suave.

## 10.6. Bumpless

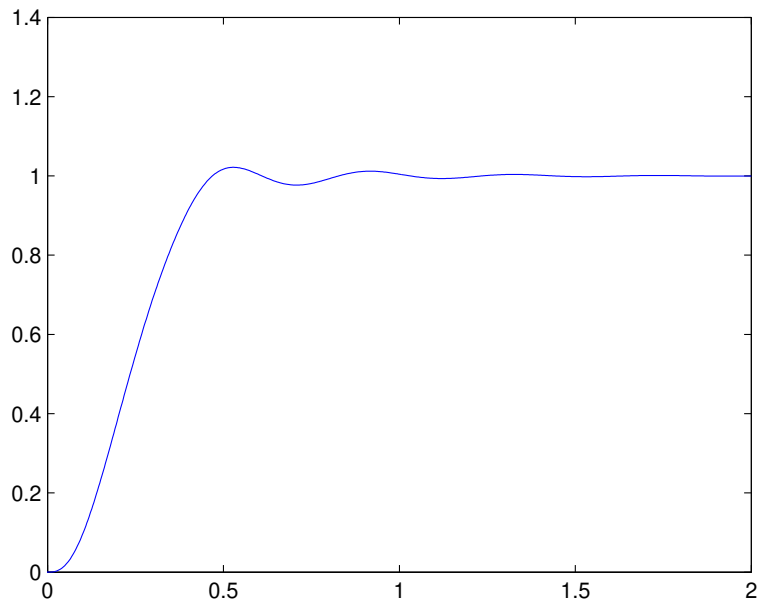
Un problema diferente aparece con la acción derivativa cuando el sistema es llevado a su punto de funcionamiento a lazo abierto. En efecto, en muchos casos el sistema se coloca en su



**Figura 10.12:** Sistema compensado con saturación en el actuador.



**Figura 10.13:** Sistema compensado con Integración Condicional



**Figura 10.14:** Sistema compensado con "back calculation".

punto de operación mediante un cuidadoso proceso a lazo abierto, y recién entonces se cierra el lazo, en general para mejorar el rechazo a perturbaciones. Si las condiciones iniciales del derivador no han sido ajustadas adecuadamente, en el instante en el que se cierra el lazo la situación es equivalente a excitar al derivador con un escalón. Esto produce un impulso a la salida del mismo, que puede ser altamente pernicioso ya que en general satura a los actuadores y saca a la planta de su zona de funcionamiento lineal. El mecanismo "bumpless", habitualmente incluido en los controladores comerciales, permite ajustar las condiciones iniciales del derivador para minimizar este problema.

## 10.7. Problemas

1. Trazar el lugar de las singularidades de un controlador PID si  $T_d = \text{cte}$  y  $0 < T_i < \infty$ .
2. Dada la planta:

$$G(s) = \frac{5}{(s+1)(s+5)}$$

Compensar el sistema empleando un controlador PI para que los polos de lazo cerrado tengan un  $\omega_n = 1$  rad/seg. ¿Cuál es el error de estado estacionario al escalón unitario antes y después de compensar?

3. Dada la planta:

$$G(s) = \frac{e^{-0.1s}}{(s+1)(s+10)}$$

Diseñar un compensador PID para que el margen de fase del sistema compensado sea de  $30^\circ$  a  $\omega_1 = 2$  rad/seg.

4. Dada la planta:

$$G(s) = \frac{5}{s(s+3)}$$

Diseñar un compensador PID para que la respuesta al escalón unitario presente un sobrepico del 7% y un tiempo de establecimiento al 2% de 2 seg.

5. Al aplicar el método de Ziegler y Nichols un proceso comienza a oscilar con un valor de banda proporcional de 30% y un período de 11.5 minutos. Hallar el valor de los parámetros del controlador PID.

## Referencias

- [1] K. Ogata, "Modern Control Engineering", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA, 3rd edition, 1997.
- [2] B. C. Kuo, "Automatic Control Systems", Prentice-Hall International, London, England, 9th edition, 1962.
- [3] C. H. Houpis, S. N. Sheldon, J. J. D'Azzo, "Linear Control System Analysis and Design". Fifth Edition, Revised and Expanded (Automation and Control Engineering). Taylor and Francis, 2003.
- [4] C.H.Houpis, S.N.Sheldon, "Linear Control System Analysis and Design with MATLAB , Sixth Edition (Automation and Control Engineering, Book 53)". CRC Press, 2014.
- [5] G. F. Franklin, J. D. Powell, A. Emami-Naeini. "Feedback Control of Dynamic Systems". Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, fourth edition, 2002.
- [6] N. S. Nise, "Control System Engineering", John Wiley and Sons Inc., New York, 2011.
- [7] M. Gopal, I.J. Nagrath, " A Textbook of Control Systems Engineering", New Age International (P) Ltd., 2010.
- [8] G. Goodwin, S. Grabe.,M. Salgado, "Control System Design", Pearson Education, Upper Saddle River, NJ, eleventh/international edition, 2015
- [9] R. C. Dorf, R. H. Bishop, "Modern Control Systems". Pearson 2008.

- [10] K. J. Astrom, T. Haggund, "PID Controllers". International Society for Measurement and Control. 1995.
- [11] A. Visioli, "Practical PID Control". Springer Verlag, 2006

# CAPÍTULO 11

## Sistemas de control muestreados

### Introducción

En este capítulo comenzaremos con el tratamiento de sistemas de control en los que el compensador está implementado mediante un filtro digital. En este tipo de sistemas están presentes dos clases diferentes de señales:

- *Señales Continuas*, que tienen un valor definido para todo instante de tiempo, y pueden tomar infinitos valores diferentes dentro de sus límites.
- *Señales Discretas*, que solo tienen un valor definido en ciertos instantes de tiempo, y pueden tomar valores entre un número finito de posibilidades, dependiendo de la representación numérica utilizada.

La aparición de señales discretas en el lazo agrega grados de libertad al sistema, y tiene efecto sobre su estabilidad y comportamiento dinámico. Un ejemplo típico puede verse en la figura 11.1. La señal error (señal continua) es convertida a una secuencia numérica (señal discreta) mediante un conversor analógico-digital. Las muestras actuales y pasadas del error y la acción de control son combinadas en un filtro digital (lineal en nuestro caso) para generar una nueva acción de control, que es a su vez una secuencia numérica. La misma es convertida en una señal continua mediante un conversor digital-analógico, para finalmente actuar sobre la planta. Evidentemente, la operación de muestreo involucra una pérdida de información, ya que entre instantes de muestreo se desconoce el valor de la señal continua asociada. Debe asegurarse una correcta elección del período de muestreo a fin de evitar comprometer la estabilidad y prestaciones del lazo.

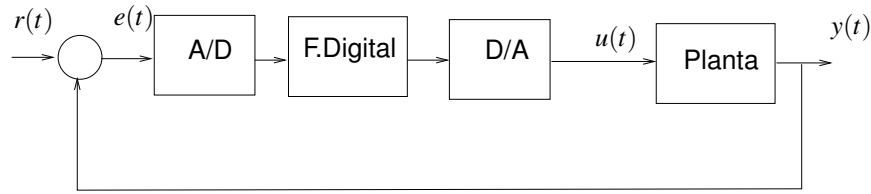


Figura 11.1: Un lazo típico de control muestreado

## 11.1. Muestreo impulsivo

En lo que sigue supondremos que el muestreo es *impulsivo*, es decir, el valor de la señal continua es capturado en forma instantánea. En la práctica, lo que se pretende es que el tiempo de adquisición sea despreciable frente a la dinámica de la planta. Asimismo, si existen varios muestreadores en el lazo, se considerará que la frecuencia de muestreo es única y los muestreadores son sincrónicos entre sí, es decir, todas las muestras se adquieren exactamente en el mismo instante de tiempo.

### 11.1.1. Modelo matemático del proceso del muestreo

La operación del muestreador ideal puede asimilarse a una multiplicación entre la señal continua  $u(t)$  y un tren de impulsos de la forma

$$\delta_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT) \quad (11.1)$$

donde  $\delta(t - kT)$  es un impulso desplazado  $kT$  unidades de tiempo y  $T$  es el período de muestreo. Una representación gráfica del proceso se aprecia en la figura 11.2. En la señal resultante,  $u^*(t)$ , la señal continua modula el tren de impulsos. A continuación desarrollaremos diferentes expresiones para  $U^*(s)$ , la transformada de Laplace de la señal muestreada. En primer lugar escribamos la expresión de  $u^*(t)$ :

$$u^*(t) = u(t)\delta_T(t) = u(t) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT)\delta(t - kT) \quad (11.2)$$

El valor de  $U^*(s)$  se obtiene aplicando la definición de transformada de Laplace:

$$U^*(s) = \int_0^{\infty} u^*(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} u(kT)\delta(t - kT)e^{-st} dt = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT) \int_0^{\infty} \delta(t - kT)e^{-st} dt \quad (11.3)$$

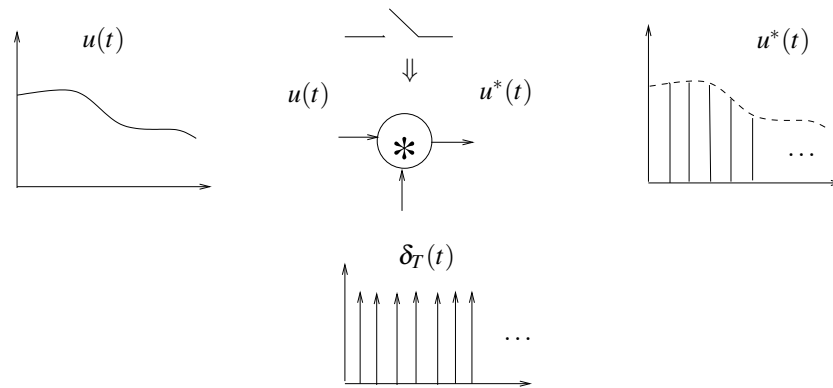
Haciendo el cambio de variables  $p = t - kT$  resulta que

$$t = p + kT \quad (11.4)$$

$$dt = dp \quad (11.5)$$

y por lo tanto





**Figura 11.2:** Muestreo impulsivo como modulación

$$U^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT)e^{-skT} \int_0^{\infty} \delta(p)e^{-sp} dp \tag{11.6}$$

y como la transformada de Laplace de un impulso vale 1 se obtiene la siguiente expresión

$$U^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT)e^{-skT} \tag{11.7}$$

Recordando que el término  $e^{-skT}$  representa un retardo puro de  $k$  períodos de muestreo, esta expresión es fácil de comprender: la muestra  $k$ -ésima es retardada  $kT$  unidades de tiempo. Debe observarse que, si bien la expresión es simple, la variable  $s$  aparece en un exponente, y por tanto no tiene la forma polinomial a la que estamos acostumbrados en sistemas continuos. Para recuperar una expresión polinomial, podemos hacer el cambio de variables  $z = e^{sT}$  con lo que obtenemos la expresión de la transformada Z de la señal:

$$U(z) = U^*(s)|_{z=e^{sT}} = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT)z^{-k} \tag{11.8}$$

Esta primera expresión relaciona el espectro de la señal muestreada con las muestras de la señal continua. Veamos un ejemplo que nos será de utilidad mas adelante. Supongamos la señal

$$u(t) = e^{-at} \tag{11.9}$$

cuya transformada de Laplace es  $U(s) = \frac{1}{(s+a)}$ . Al muestrear esta señal tenemos

$$u(kT) = e^{-akT} \tag{11.10}$$

$$U^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT} e^{-skT} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(s+a)kT} \tag{11.11}$$

Para obtener una expresión mas compacta podemos buscar la convergencia de la serie:

$$U^*(s) = 1 + e^{-(s+a)T} + e^{-(s+a)2T} + e^{-(s+a)3T} + \dots \quad (11.12)$$

$$U^*(s)e^{-(s+a)T} = e^{-(s+a)T} + e^{-(s+a)2T} + e^{-(s+a)3T} + e^{-(s+a)4T} + \dots \quad (11.13)$$

$$U^*(s)(1 - e^{-(s+a)T}) = 1 \quad (11.14)$$

$$U^*(s) = \frac{1}{1 - e^{-(s+a)T}} \quad (11.15)$$

que podemos escribir en función del variable  $z$  como

$$U(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}e^{-aT}} = \frac{z}{z - e^{-aT}} \quad (11.16)$$

Obsérvese que el polo de esta expresión depende del polo  $a$  de la señal original, pero también del período de muestreo  $T$ . Una vez elegido el período de muestreo el término  $e^{-aT}$  es una constante. Tenemos entonces el siguiente par transformado:

$$\frac{1}{s+a} \iff \frac{z}{z - e^{-aT}} \quad (11.17)$$

### 11.1.2. Espectro periódico

Considerando que la señal  $\delta_T(t)$  es periódica de período  $T$  podemos plantear una expresión alternativa a la ecuación 11.7. En efecto, podemos desarrollar  $\delta_T(t)$  en serie de Fourier:

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega_s t} \quad (11.18)$$

donde los coeficientes  $C_n = 1/T$  en el caso de muestreo impulsivo y  $\omega_s = 2\pi/T$  es la pulsación de muestreo. La expresión de  $U^*(s)$  resulta

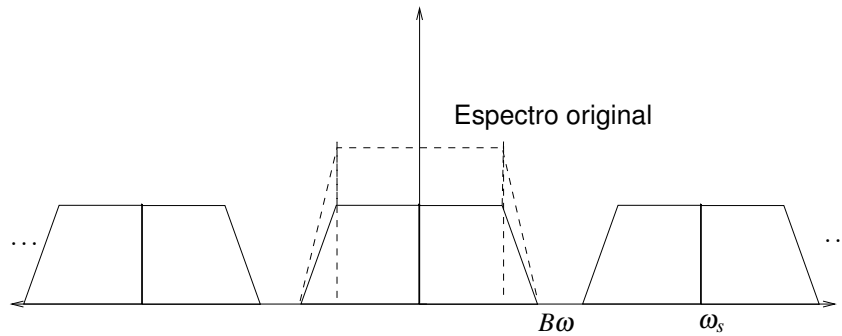
$$U^*(s) = \int_0^\infty u(t) \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega_s t} \right) e^{-st} dt \quad (11.19)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \int_0^\infty u(t) e^{-(s-jn\omega_s)t} dt \quad (11.20)$$

Puede apreciarse que la integral en esta última expresión es una transformada de Laplace convencional, donde en lugar de la variable independiente  $s$  se ha utilizado la variable  $s - jn\omega_s$ . Por lo tanto podemos escribir

$$U^*(s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n U(s - jn\omega_s) \quad (11.21)$$

Esta es una expresión alternativa a la 11.7, y relaciona el espectro de la señal muestreada con el de la señal continua original. Específicamente, el espectro de la señal muestreada consta de *infinitas copias del espectro original* (ponderados por los  $C_n$ ) desplazadas un número entero



**Figura 11.3:** Espectro periódico

de pulsaciones de muestreo (figura 11.3). Esta expresión es muy interesante. En efecto, si el espectro de la señal original está limitado a un ancho de banda  $B\omega$ , es evidente que  $\omega_s$  debe ser mayor a dos veces el valor de  $B\omega$  para que las copias contiguas de los espectros no se superpongan, efecto conocido como *Aliasing* (Shannon). Si el espectro original no es de banda limitada, es habitual forzar esta situación incluyendo un filtro *anti-aliasing* que atenúa fuertemente las componentes de señal por encima de un dado ancho de banda. Para evitar que el diseño del filtro anti-aliasing sea muy crítico (si se desea que la caída en frecuencia del filtro sea muy abrupta, su rotación de fase será importante, lo que puede afectar a la estabilidad del sistema), puede sobremuestrearse, es decir, muestrear a una frecuencia muy por encima de lo estrictamente necesario. Esto aumenta la separación entre copias del espectro, con lo que los requerimientos del filtro anti-aliasing pueden relajarse. Luego puede hacerse un proceso de decimado sobre las muestras resultantes, a fin de recuperar una tasa de muestreo razonable.

### 11.1.3. Una expresión alternativa

La expresión 11.17 nos permite plantear una expresión adicional para  $U(z)$  útil para transformar funciones de transferencia desde el plano  $s$  al plano  $z$ . En efecto, si  $U(s)$  es una expresión racional en  $s$  podemos escribir

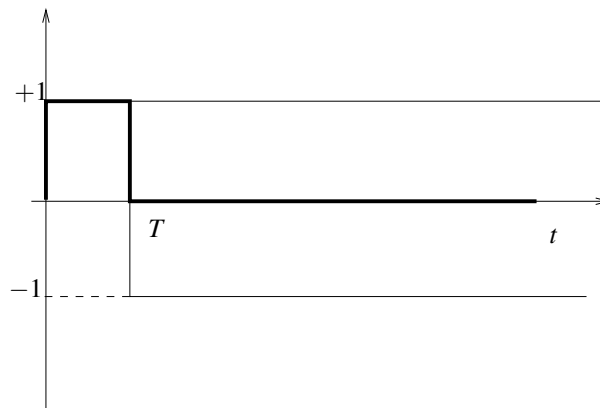
$$U(s) = K \frac{\prod_{i=0}^m (s - c_i)}{\prod_{j=0}^n (s - p_j)} = \sum_{j=0}^n \frac{R_j}{(s - p_j)} \quad (11.22)$$

donde los  $R_j$  son los residuos correspondientes a los polos  $p_j$  de  $U(s)$ . Usando 11.17 tenemos

$$U(z) = \sum_{j=0}^n R_j \frac{z}{(z - e^{-p_j T})} \quad (11.23)$$

## 11.2. Reconstrucción

Revisemos la función del conversor digital analógico de la figura 11.1. Idealmente, este dispositivo debería recuperar el espectro de banda base a partir del espectro periódico de la señal



**Figura 11.4:** Respuesta impulsiva del ZOH

muestreada. Un filtro tipo “cajón” de esas características no es físicamente sintetizable. En efecto, para tener un flanco vertical tal filtro debería ser no causal. En realidad, la operación del conversor D/A es más apropiadamente descrita como un “reconstructor” de señal, es decir, un dispositivo que “rellena” de alguna forma el espacio entre muestras. En el caso más típico (de hecho, el único que se utiliza en la práctica) se utiliza un reconstructor de orden cero (ZOH) que mantiene el valor de la muestra entre instantes de muestreo. Un reconstructor de orden uno uniría las muestras con rectas, uno de orden dos lo haría con parábolas, etc. El reconstructor de orden cero es, efectivamente, un filtro pasabajos. Para demostrarlo calcularemos su función de transferencia, y luego trazaremos su respuesta en frecuencia. Para calcular  $ZOH(s)$  recordaremos que la función de transferencia es la transformada de Laplace de la respuesta al impulso. Si excitamos al ZOH con un impulso de área uno, su salida mantendrá el valor 1 durante un período de muestreo, y luego se anulará (figura 11.4). Podemos escribir esto como un escalón en tiempo 0, al que le restaremos un escalón retardado un período de muestreo. Entonces

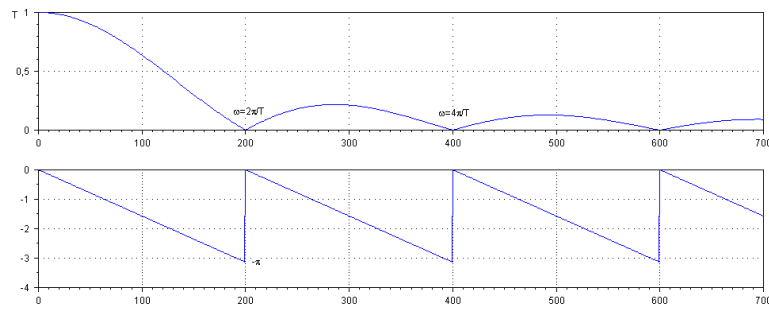
$$ZOH(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-sT}}{s} = \frac{(1 - e^{-sT})}{s} \quad (11.24)$$

Para verificar que el ZOH se comporta como un filtro pasabajos evaluemos esta expresión en  $j\omega$ :

$$ZOH(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} = e^{-j\frac{\omega T}{2}} \frac{(e^{j\frac{\omega T}{2}} - e^{-j\frac{\omega T}{2}}) T}{j\omega T} \quad (11.25)$$

$$= T e^{-j\frac{\omega T}{2}} \frac{\sin(\frac{\omega T}{2})}{\frac{\omega T}{2}} = T e^{-j\frac{\omega T}{2}} \text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right) \quad (11.26)$$

donde  $\text{sinc}(\alpha) = \sin(\alpha)/\alpha$ . El módulo y la fase del reconstructor serán entonces



**Figura 11.5:** Respuesta en frecuencia del ZOH

$$|ZOH(j\omega)| = T \left| \text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right) \right| \quad (11.27)$$

$$\angle ZOH(j\omega) = -\frac{\omega T}{2} \quad (11.28)$$

$$(11.29)$$

El gráfico de la respuesta en frecuencia se aprecia en la figura 11.5. Obsérvese que los saltos abruptos que muestra la fase son debidos al cambio de signo que experimenta la señal *sinc* cuando se calcula su valor absoluto. El reconstructor es, efectivamente, un filtro pasabajos y como tal, atrasa fase. La frecuencia de corte se produce para  $\frac{\omega T}{2} = \pi$  es decir,  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , y a esa frecuencia la fase es  $-\pi$ . Por lo tanto, al aumentar la frecuencia de muestreo también se aumenta la frecuencia de corte del filtro. Esto tiene un efecto inmediato sobre la cantidad de fase en atraso que introduce el reconstructor dentro de la banda pasante de la planta: cuanto mas rápido se muestree, menos fase en atraso introducirá el reconstructor. Por lo tanto, un sistema estable puede ser inestabilizado por una incorrecta elección de  $T$ . En efecto, si la fase introducida por el reconstructor anula el margen de fase de la planta, el sistema se inestabilizará.

### 11.3. Problemas

1. Considere el sistema

$$G(s) = \frac{10}{(s+1)}$$

Elija una frecuencia de muestreo tal que la respuesta en frecuencia de la primera copia del espectro periódico atenúe  $40dB$  a la frecuencia del corte de  $0dB$  del espectro de banda base. ¿Es ésta una frecuencia de muestreo adecuada? Justifique su respuesta

2. Para el mismo sistema del problema anterior, supongamos ahora que el espectro de banda base se recupera con un reconstructor de orden cero.

- Calcular el margen de fase de  $G(s)$  (realimentación unitaria) y la frecuencia a la cual se produce.
  - Elegir la frecuencia de muestreo de forma tal que el reconstructor sólo sume  $1^\circ$  de fase en atraso a la frecuencia del margen de fase. Compare esa frecuencia de muestreo con la calculada en el punto anterior y elabore conclusiones.
3. Para el sistema del primer problema, elija una frecuencia de muestreo tal que el sistema de lazo cerrado se inestabilice. Para ello, debe asegurarse de anular el margen de fase de la planta continua con el atraso de fase del reconstructor. Analice qué está pasando desde el punto de vista temporal en el lazo, suponiendo un impulso en la entrada.

## Referencias

- [1] K. Ogata, "Modern Control Engineering", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA, 3rd edition, 1997.
- [2] B. C. Kuo, "Automatic Control Systems", Prentice-Hall International, London, England, 9th edition, 1962.
- [3] C. H. Houpis, S. N. Sheldon, J. J. D'Azzo, "Linear Control System Analysis and Design". Fifth Edition, Revised and Expanded (Automation and Control Engineering). Taylor and Francis, 2003.
- [4] C.H.Houpis, S.N.Sheldon, "Linear Control System Analysis and Design with MATLAB , Sixth Edition (Automation and Control Engineering, Book 53)". CRC Press, 2014.
- [5] G. F. Franklin, J. D. Powell, A. Emami-Naeini. "Feedback Control of Dynamic Systems". Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, fourth edition, 2002.
- [6] R. C. Dorf, R. H. Bishop, "Modern Control Systems". Pearson 2008.
- [7] J. Dorsey, "Continuous and Discrete Control Systems: Modeling, Identification, Design, and Implementation". McGraw-Hill Series in Electrical and Computer Engineering. Prentice-Hall, New York, NY, 2002.
- [8] C. L. Phillips and H. T. Nagle, "Digital Control System Analysis and Design". Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, third edition, 1998. International Edition.
- [9] J.R. Ragazzini, G.F Franklin, "Sampled-Data Control Systems". McGraw-Hill, 1958

# CAPÍTULO 12

## Propiedades de la transformada Z

### Introducción

En este capítulo se discutirán (en forma bastante informal) algunas propiedades de la transformada Z, necesarias para continuar con nuestro estudio de la respuesta, estabilidad y compensación de sistemas muestreados. En primer lugar se analizará el mapeo entre el plano S y el Z, detallando cómo la transformada Z permite resolver en forma elegante y eficiente el problema del espectro periódico resultante del muestreo impulsivo. Las propiedades de la transformada se analizarán en forma sumaria, y sólo se analizarán aquellas propiedades estrictamente necesarias para el tratamiento de sistemas de lazo cerrado. Se detallarán diversos métodos para el cálculo de la transformada Z inversa, y se definirá el concepto de Función de Transferencia en Z.

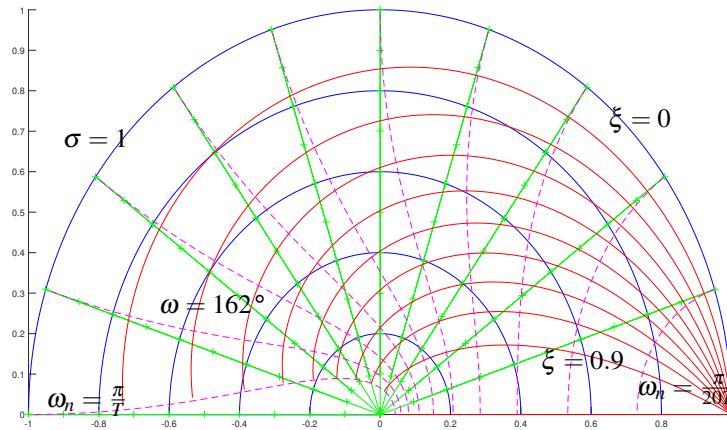
### 12.1. Mapeo entre S y Z

Recordando la definición de la variable Z

$$Z = e^{sT} = e^{\sigma T} e^{j\omega T} \quad (12.1)$$

podemos resaltar el mapeo de algunos lugares geométricos particulares.

- El origen del plano de coordenadas  $s = 0$  se corresponde con el punto  $z = 1 + j0$ .
- El eje imaginario ( $\sigma = 0, -\infty \leq j\omega \leq \infty$ ) se corresponde con el círculo unitario en z. El punto  $j\omega = \frac{\pi}{T}$  se mapea en  $z = -1$ , al igual que el punto  $j\omega = \frac{-\pi}{T}$ . Las sucesivas bandas del espectro periódico (de ancho  $\frac{2\pi}{T}$ ) se superponen sobre el mismo lugar geométrico en z. De hecho, relevar la respuesta en frecuencia de un sistema muestreado (que posee un



**Figura 12.1:** Gráfico Normalizado del Círculo Unitario. Azul: curvas de  $\sigma$  constante. Verde: curvas de  $\omega$  constante. Rojo: curvas de  $\xi$  constante. Magenta: curvas de  $\omega_n$  constante.

espectro formado por infinitas copias del espectro de banda base desplazadas un número entero de pulsaciones de muestreo) implica recorrer infinitas veces el círculo unitario.

- Rectas de  $\sigma = cte$  se mapean en círculos concéntricos, que estarán en el interior del círculo unitario si  $\sigma < 0$  y fuera del mismo si  $\sigma > 0$ .
- Rectas de  $j\omega = cte$  se mapean en rayos que pasan por el origen del plano z.
- Rectas de  $\xi = cte$  (que pasan por el origen del plano s) se mapean en trocoides en el plano z.

Un diagrama normalizado donde aparecen tabulados curvas de  $\xi = cte$  y  $\omega = cte$  se ilustra en la figura 12.1 La intuición parece indicar que, de acuerdo con este mapeo, un sistema muestreado estable debería tener sus polo de lazo cerrado en el interior del círculo unitario. Esa presunción es correcta, y será demostrada mas adelante. En las subsecciones que siguen a menudo se utilizará la notación mas compacta

$$f(kT) \equiv f_k \tag{12.2}$$

## 12.2. Propiedades Básicas

La mayoría de las propiedades surgen de la aplicación de la definición de transformada z.

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k} \tag{12.3}$$

Por conveniencia, algunas de las propiedades se enunciarán sin demostración formal.



### 12.2.1. Linealidad

La transformada z es un operador lineal. Por lo tanto, debe verificarse que

$$\mathcal{Z}\{\alpha f_1(kT) + \beta f_2(kT)\} = \alpha F_1(z) + \beta F_2(z) \quad (12.4)$$

Para demostrarlo, aplicamos la definición de transformada z:

$$\mathcal{Z}\{\alpha f_1(kT) + \beta f_2(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha f_1(kT) + \beta f_2(kT))z^{-k} \quad (12.5)$$

$$= \alpha \sum_{k=0}^{\infty} f_1(kT)z^{-k} + \beta \sum_{k=0}^{\infty} f_2(kT)z^{-k} \quad (12.6)$$

$$= \alpha F_1(z) + \beta F_2(z) \quad (12.7)$$

Esta propiedad permite aplicar el principio de superposición al resolver un lazo muestreado, es decir, calcular la respuesta total del sistema como la suma de las respuestas parciales a las diferentes excitaciones.

### 12.2.2. Convolución de Secuencias Temporales

Esta propiedad es enteramente similar a la transformada de la integral de convolución en sistemas continuos. En efecto, lo que queremos probar es que

$$\mathcal{Z}\left\{\sum_{j=0}^{\infty} c_j h_{k-j}\right\} = C(z)H(z) \quad (12.8)$$

Aplicando la definición de Transformada z tenemos

$$\mathcal{Z}\left\{\sum_{j=0}^{\infty} c_j h_{k-j}\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_j h_{k-j} z^{-k} \quad (12.9)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} c_j \sum_{k=0}^{\infty} h_{k-j} z^{-k} \quad (12.10)$$

$$(12.11)$$

Haciendo el cambio de variables  $p = k - j$  tenemos

$$\mathcal{Z}\left\{\sum_{j=0}^{\infty} c_j h_{k-j}\right\} = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^{-j} \sum_{p=0}^{\infty} h_p z^{-p} \quad (12.12)$$

$$= C(z)H(z) \quad (12.13)$$

El producto de transformadas se corresponde a la convolución discreta de las correspondientes secuencias. Esta propiedad es la que permite resolver diagramas de flujo y plantear funciones de transferencia entre secuencias discretas.

### 12.2.3. Corrimiento temporal (“time shift”)

$$\mathcal{L}\{f_{k+n}\} = F(z)z^n \quad (12.14)$$

Aplicando la transformada z tenemos y haciendo el cambio de variables  $p = k + n$

$$\mathcal{L}\{f_{k+n}\} = \sum_{k=0}^{\infty} f_{k+n}z^{-k} = z^n \sum_{k=0}^{\infty} f_p z^{-p} = F(z)z^n \quad (12.15)$$

La ecuación es válida tanto para valores positivos de  $n$  (adelantos) como para valores negativos (atrasos). Esta propiedad permite hallar la ecuación de diferencias correspondiente a una dada función de transferencia en z. Esto se tratará en detalle cuando se defina la función de transferencia discreta.

### 12.2.4. Escaleo (“Scaling”)

$$\mathcal{L}\{r^{-k}f_k\} = F(rz) \quad (12.16)$$

La demostración es simple:

$$\mathcal{L}\{r^{-k}f_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} r^{-k}f_k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k (rz)^{-k} = F(rz) \quad (12.17)$$

### 12.2.5. Teorema del valor final

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z) \quad (12.18)$$

Esta propiedad es la que permite el cálculo del error de estado estacionario.

### 12.2.6. Teorema del valor inicial

$$\lim_{k \rightarrow 0} f_k = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) \quad (12.19)$$

La demostración es trivial. En efecto, si se desarrolla la serie

$$F(z) = f_0 + \frac{f_1}{z} + \frac{f_2}{z^2} + \frac{f_3}{z^3} + \frac{f_4}{z^4} + \dots \quad (12.20)$$

es evidente que todos los términos se anulan cuando  $z \rightarrow \infty$ , salvo el primero, que es justamente el valor inicial.

### 12.3. Transformada z inversa

Formalmente, la expresión de la transformada inversa es

$$f_k = \frac{1}{2\pi j} \oint F(z) z^k \frac{dz}{z} \tag{12.21}$$

Sin embargo, esta expresión rara vez se utiliza en la práctica. A continuación se describirán dos métodos de aplicación cuando la función a antitransformar es un cociente de polinomios en z, una situación habitual en sistemas de control.

#### 12.3.1. Método de la división larga

Este método se basa en la observación que, según la definición de transformada z

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k} = f_0 + \frac{f_1}{z} + \frac{f_2}{z^2} + \frac{f_3}{z^3} + \frac{f_4}{z^4} + \dots \tag{12.22}$$

los coeficientes de las potencias negativas de z en el desarrollo de la serie son directamente los valores temporales de la secuencia discreta. Por lo tanto, en el caso de una función racional puede hacerse la división entre los polinomios numerador y denominador. Este método no brinda una expresión cerrada de la respuesta temporal, pero es útil para antitransformar en tiempo real.

#### Ejemplo

$$F(z) = \frac{z}{(z-0.5)} \tag{12.23}$$

Si hacemos la división entre el numerador y el denominador tenemos

$$\begin{array}{r} z \\ \hline z - 0.5 \\ \hline z \quad -0.5 \\ \hline \phantom{z} +0.5 \\ \phantom{z} +0.5 \quad -0.25z^{-1} \\ \hline \phantom{z} \phantom{+0.5} +0.25z^{-1} \quad +0.125z^{-2} \\ \phantom{z} \phantom{+0.5} \phantom{+0.25z^{-1}} \vdots \end{array}$$

Puede apreciarse entonces que las muestras de la señal son  $1 - 0.5 - 0.25 - \dots$  y por lo tanto

$$f_k = 2^{-k} \tag{12.24}$$

### 12.3.2. Inversión por Residuos

Este método de inversión surge de analizar la transformada  $z$  de una secuencia  $f_k = r^{-k}$ . En este caso tenemos

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} r^{-k} z^{-k} = 1 + (rz)^{-1} + (rz)^{-2} + \dots \quad (12.25)$$

$$F(z)(rz)^{-1} = (rz)^{-1} + (rz)^{-2} + (rz)^{-3} \dots \quad (12.26)$$

$$F(z)(1 - (rz)^{-1}) = 1 \quad (12.27)$$

$$F(z) = \frac{1}{1 - (rz)^{-1}} = \frac{z}{z - \frac{1}{r}} \quad (12.28)$$

Por lo tanto, para antitransformar  $F(z)$  aplicamos el teorema de residuos a  $\frac{F(z)}{z}$ . Luego pasamos el denominador  $z$  al lado derecho, de forma de lograr una expansión de la forma

$$F(z) = \sum_{i=0}^n R_i \frac{z}{z - p_i} \quad (12.29)$$

y antitransformamos término a término usando el par  $R \frac{z}{z-p} \Leftrightarrow R p^{-k}$ .

#### Ejemplo

$$U(z) = \frac{T}{2} \frac{z(z+1)}{(z-0.5)(z-1)} \quad (12.30)$$

$$\frac{U(z)}{z} = \frac{T}{2} \frac{(z+1)}{(z-0.5)(z-1)} = \frac{R_1}{z-0.5} + \frac{R_2}{z-1} \quad (12.31)$$

$$R_1 = \lim_{z \rightarrow 0.5} \frac{T}{2} \frac{(z+1)}{(z-1)} = -\frac{3}{2}T \quad (12.32)$$

$$R_2 = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{T}{2} \frac{(z+1)}{(z-0.5)} = 2T \quad (12.33)$$

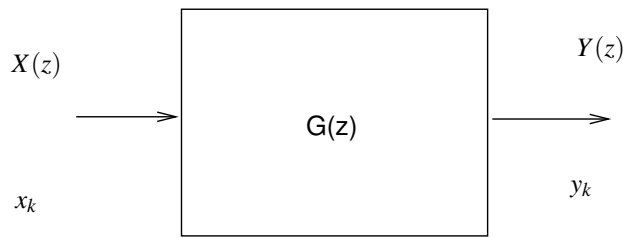
$$U(z) = -\frac{3}{2}T \frac{z}{z-0.5} + 2T \frac{z}{z-1} \quad (12.34)$$

$$\Rightarrow u_k = -\frac{3}{2}T 2^{-k} + 2T \Big|_{k \geq 0} \quad (12.35)$$

### 12.4. Funciones de transferencia en el dominio $z$

De forma totalmente análoga con su correspondiente continuo, definiremos la función de transferencia de un sistema discreto como el cociente entre las transformadas  $z$  de la salida y la entrada del mismo, considerando condiciones iniciales nulas. Refiriéndonos a la figura 12.2 tenemos que

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (12.36)$$



**Figura 12.2:** Funciones de Transferencia en Z

En un sistema continuo, si la ecuación diferencial que describe el comportamiento del sistema es lineal, la función de transferencia es un cociente de polinomios en la variable  $s$ . De la misma forma, un sistema muestreado es descrito por una *ecuación de diferencias lineal*, es decir, una combinación lineal de muestras actuales y pasadas de entradas y salidas. En ese caso la función de transferencia en  $z$  también será un cociente de polinomios.

Es importante destacar que sólo puede hablarse de transformada  $F(z)$  cuando tenemos una secuencia discreta  $f_k$ . No tiene sentido hablar de la transformada  $z$  de una señal continua. La función de transferencia en el dominio  $z$  relaciona secuencias entre sí, y sólo puede plantearse entre dos secuencias. Esto significa que en un lazo de control donde coexisten señales continuas y discretas no va a ser posible plantear funciones de transferencia entre dos puntos cualquiera del lazo, sino solamente entre puntos donde se encuentren disponibles las correspondientes secuencias.

Utilizando algunas de las propiedades analizadas en esta clase podemos obtener, a partir de una función de transferencia discreta, la combinación de muestras (esto es, la ecuación de diferencias) que permite implementarla. Analicemos el siguiente ejemplo:

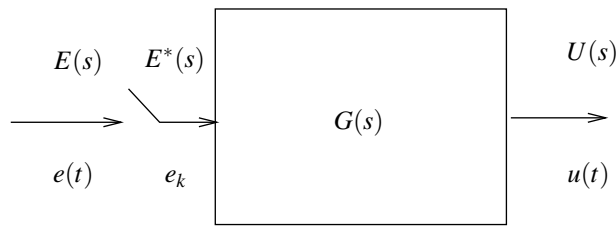
$$G(z) = \frac{z + 3z^2 + 5z^3}{1 + 4z + 5z^2 + 3z^3} \quad (12.37)$$

El primer paso para obtener la ecuación de diferencias es dividir numerador y denominador por la potencia más alta de  $z$ , en este caso  $z^3$ . Esto debe hacerse para que los polinomios numerador y denominador queden expresados en potencias negativas de  $z$ . De esta forma la ecuación de diferencias quedará en forma causal, es decir, no dependerá de muestras futuras de las señales. Por lo tanto tenemos

$$G(z) = \frac{z^{-2} + 3z^{-1} + 5}{z^{-3} + 4z^{-2} + 5z^{-1} + 3} = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (12.38)$$

El paso siguiente es despejar  $y_k$ . Para ello escribimos

$$\begin{aligned} X(z)z^{-2} + 3X(z)z^{-1} + 5X(z) &= Y(z)z^{-3} + 4Y(z)z^{-2} + 5Y(z)z^{-1} + 3Y(z) \\ Y(z) &= \frac{1}{3} (X(z)z^{-2} + 3X(z)z^{-1} + 5X(z) - Y(z)z^{-3} - 4Y(z)z^{-2} - 5Y(z)z^{-1}) \\ \Rightarrow y_k &= \frac{1}{3} (x_{k-2} + 3x_{k-1} + 5x_k - y_{k-3} - 4y_{k-2} - 5y_{k-1}) \end{aligned} \quad (12.39)$$



**Figura 12.3:** Sistema continuo excitado por una secuencia

La salida en el instante actual es una suma de productos (un filtro digital lineal) que combina muestras actuales y pasadas de la entrada y muestras pasadas de la salida. En este caso, se necesitarán cinco posiciones de memoria (o registros, si están disponibles) para recordar las señales pasadas. En cada instante de muestreo debe actualizarse el valor de estas variables a la espera de la siguiente muestra de la entrada.

## 12.5. Análisis de diagramas en bloques

Como mencionamos anteriormente, sólo es posible definir funciones de transferencia entre secuencias de entrada y salida de un (sub)sistema. Esto es particularmente importante en sistemas de lazo cerrado donde conviven señales continuas y discretas. Comencemos nuestro análisis con el sistema ilustrado en la figura 12.3. En este caso tenemos

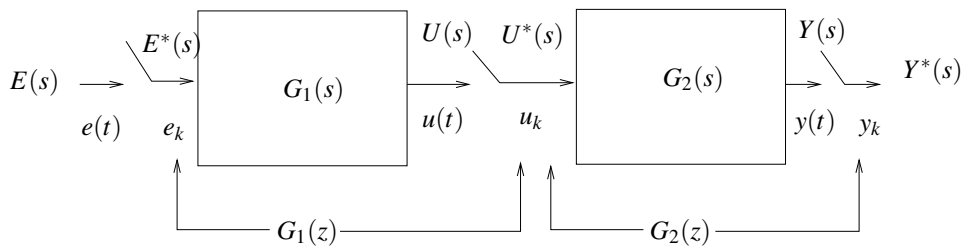
$$U(s) = G(s)E^*(s) \tag{12.40}$$

La señal  $U(s)$  es continua, ya que es el resultado de aplicar un filtro continuo (analógico) a una señal de espectro periódico ( $E^*(s)$ ). Es diferente el caso de la figura 12.4. Aquí tenemos dos sistemas continuos que tienen un muestreador intercalado entre ellos. Como ya dijimos, suponemos que todos los muestreadores son sincrónicos (es decir, tienen igual frecuencia de muestreo y además se cierran (abren) simultáneamente). Entonces

$$U(s) = E^*(s)G_1(s) \tag{12.41}$$

$$U^*(s) = [E^*(s)G_1(s)]^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n E^*(s - jn\omega_s) G_1(s - jn\omega_s) \tag{12.42}$$

Es fácil ver que  $E^*(s) \equiv E^*(s - jn\omega_s)$ . En efecto, al ser  $E^*(s)$  una señal de espectro periódico, un desplazamiento de un número entero de frecuencias de muestreo deja al espectro inalterado. Una forma alternativa de ver este efecto es considerar que la situación es análoga a poner dos muestreadores sincrónicos en serie. Teniendo esto en cuenta tenemos



**Figura 12.4:** Conexión en serie con muestreo intermedio

$$U^*(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n E^*(s - jn\omega_s) G_1(s - jn\omega_s) = E^*(s) \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n G_1(s - jn\omega_s) \quad (12.43)$$

$$= E^*(s) G_1^*(s) \quad (12.44)$$

Podemos escribir esto como una regla general:

$$[U^*(s)G(s)]^* = U^*(s)G^*(s) \quad (12.45)$$

Esta expresión nos permitirá resolver diagramas de flujo con facilidad. En efecto, retomando la figura 12.4, ahora tenemos

$$Y(s) = U^*(s)G_2(s) = E^*(s)G_1^*(s)G_2(s) \quad (12.46)$$

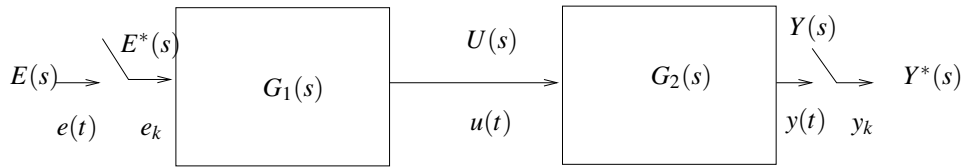
$$Y^*(s) = [U^*(s)G_2(s)]^* = E^*(s)G_1^*(s)G_2^*(s) \quad (12.47)$$

y la función de transferencia será

$$\frac{Y^*(s)}{E^*(s)} = G_1^*(s)G_2^*(s) \quad (12.48)$$

$$\frac{Y(z)}{E(z)} = G_1(z)G_2(z) \quad (12.49)$$

Aunque a primera vista resulten parecidos, la situación es diferente en el esquema de la figura 12.5. En efecto, al no existir un muestreador entre el bloque  $G_1(s)$  y  $G_2(s)$  las funciones de transferencia no pueden separarse:



**Figura 12.5:** Conexión en serie sin muestreo intermedio

$$U(s) = E^*(s)G_1(s) \tag{12.50}$$

$$Y(s) = U(s)G_2(s) = E^*(s)G_1(s)G_2(s) \tag{12.51}$$

$$Y^*(s) = [E^*(s)G_1(s)G_2(s)]^* = E^*(s)[G_1G_2(s)]^* \neq E^*(s)G_1^*(s)G_2(s)^* \tag{12.52}$$

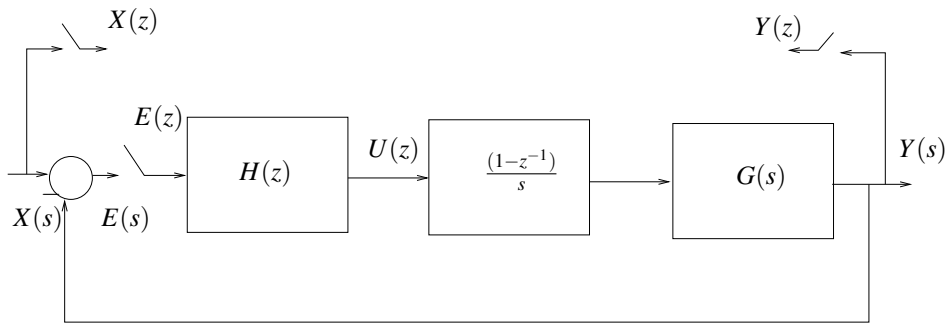
$$\frac{Y(z)}{E(z)} = \mathcal{Z}(G_1G_2(s)) \tag{12.53}$$

### 12.5.1. Un ejemplo típico

La figura 12.6 ilustra un típico sistema de control muestreado de lazo cerrado. La señal error  $e(t)$  es muestreada y la secuencia resultante  $e_k$  es utilizada por un compensador discreto de función de transferencia  $H(z)$ . Este operador discreto genera en su salida una secuencia  $u_k$  que es convertida en una señal continua mediante un reconstructor de orden cero  $ZOH(s)$ . Su salida es la entrada de la planta continua  $G(s)$ . Obsérvese que, en realidad, no puede definirse la función de transferencia de lazo cerrado, ya que no disponemos de secuencias de entrada y salida. Esto se soluciona fácilmente insertando dos muestreadores ficticios que producen las secuencias de entrada y salida de la planta. Como estos muestreadores no se encuentran dentro del lazo no afectan ni la forma de la respuesta ni la estabilidad.

La clave para resolver el lazo está en recordar que el numerador del reconstructor,  $(1 - e^{-sT}) \equiv (1 - z^{-1})$  es una función de espectro periódico, mientras que el denominador  $s$  no lo es. En consecuencia, durante el análisis el numerador del reconstructor se agrupará con la parte discreta del lazo, y su denominador se agrupará con la parte continua, esto es, la planta  $G(s)$ . Tenemos





**Figura 12.6:** Lazo típico de control muestreado

entonces

$$E(s) = X(s) - Y(s) \tag{12.54}$$

$$E(z) = X(z) - Y(z) \tag{12.55}$$

$$U(z) = E(z)H(z) \tag{12.56}$$

$$Y(s) = U(z)(1 - z^{-1}) \frac{G(s)}{s} \tag{12.57}$$

$$Y(z) = \mathcal{Z} \left\{ U(z)(1 - z^{-1}) \frac{G(s)}{s} \right\} \tag{12.58}$$

$$Y(z) = U(z)(1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} = (X(z) - Y(z))H(z)(1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} \tag{12.59}$$

con lo que la función de transferencia de lazo cerrado queda

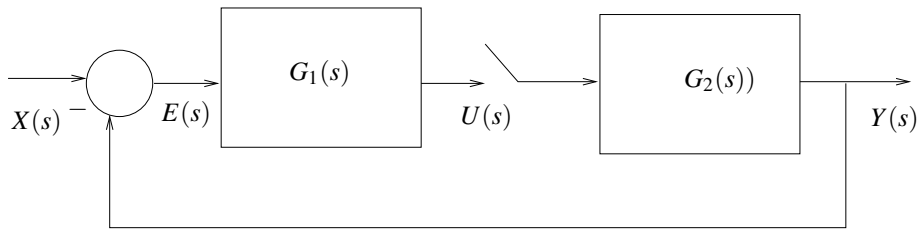
$$T(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{H(z)(1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\}}{1 + H(z)(1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\}} \tag{12.60}$$

Este es un resultado interesante, ya que guarda similitud con la función de transferencia de lazo cerrado de un sistema continuo. En efecto, la transferencia es el cociente entre la transferencia directa entre entrada salida, y uno mas la transferencia de lazo abierto. En este caso todo ocurre igual que en los sistemas continuos, y  $T(z)$  es un cociente entre dos polinomios. Sin embargo, no siempre ocurre así. Por ejemplo, en el sistema ilustrado en la figura 12.7 existe una función de transferencia continua que actúa sobre el error antes del muestreo. Por ejemplo, este bloque podría corresponderse con un filtro antialiasing. Obsérvese que en ese caso

$$U(s) = (X(s) - Y(s))G_1(s) = X(s)G_1(s) - Y(s)G_1(s) \tag{12.61}$$

$$U^*(s) = [X(s)G_1(s)]^* - [Y(s)G_1(s)]^* \tag{12.62}$$

y no será posible separar las señales de los sistemas, por lo que no podremos arribar a una expresión para  $T(z)$ . El problema no es tan serio como parece, pues siempre será posible calcular



**Figura 12.7:** Lazo con filtro analógico previo al muestreo

la función de transferencia de lazo abierto. La forma más sencilla es obtener la transferencia entre bornes del muestreador, en este caso  $G_1(s)G_2(s)$  y por lo tanto

$$G(z) = \mathcal{Z} \{G_1(s)G_2(s)\} \tag{12.63}$$

Como muchos de los métodos de análisis de estabilidad se basan en consideraciones sobre la función de transferencia de lazo abierto, siempre será posible estudiar la estabilidad de lazo cerrado, aun cuando no se disponga de  $T(z)$ .

## 12.6. Problemas

1. Calcular los valores de  $m(k)$  para un escalón en  $e(k)$ :

$$m(k) = 2e(k) - 1.9796e(k-1) + 0.99m(k-1)$$

2. Dada la función de transferencia

$$D(z) = 1.2 + 0.1 \frac{z}{(z-1)}$$

Encontrar la respuesta al escalón del filtro. ¿Cuál es su ganancia en continua?. ¿Cuánto vale en infinito?

3. Encontrar la antitransformada Z de:

$$F(z) = \frac{(z-0.8)}{(z-0.99)(z-0.5)}$$

4. Encontrar la transformada Z de las siguientes funciones. Compare la localización polo-cero de  $E(z)$  en el plano  $z$  con aquellas de  $E(s)$  y  $E^*(s)$  en el plano  $s$ . Sea  $T = 0.1s$ . Calcule las

ganancias cuando  $s = 0$  y  $s \rightarrow \infty$ , y cuando  $z = 1$  y  $z \rightarrow \infty$ .

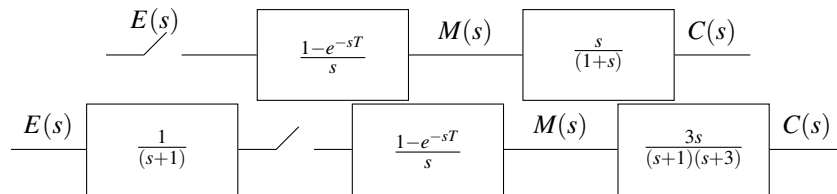
$$E(s) = \frac{1}{s(s+1)^2}$$

$$E(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

$$E(s) = \frac{(s+1)}{s(s+2)}$$

$$E(s) = \frac{(S+1)}{(s^2 + 2s + 26)}$$

5. Considerando un período de muestreo  $T = 1s$ , encontrar la respuesta en los instantes de muestreo ante una entrada  $E(s) = \frac{1}{s}$  para los siguientes sistemas:



**Figura 12.8:** Problema 4

## Referencias

- [1] J. Dorsey, "Continuous and Discrete Control Systems: Modeling, Identification, Design, and Implementation". McGraw-Hill Series in Electrical and Computer Engineering. Prentice-Hall, New York, NY, 2002.
- [2] C. L. Phillips and H. T. Nagle, "Digital Control System Analysis and Design". Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, third edition, 1998. International Edition.
- [3] J.R. Ragazzini, G.F Franklin, "Sampled-Data Control Systems". McGraw-Hill, 1958

# CAPÍTULO 13

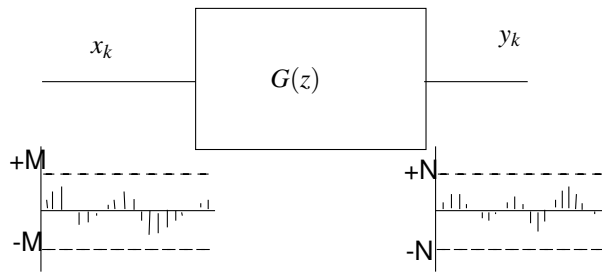
## Estabilidad de sistemas muestreados

### Introducción

En este capítulo se analizarán las condiciones que debe cumplir un sistema lineal muestreado para ser estable. Muchos de los conceptos y métodos que se desarrollarán aquí tienen un correlato directo con las técnicas oportunamente analizadas para sistemas continuos. En primer lugar, se dará una definición de estabilidad BIBO (entrada acotada-salida acotada), y para el caso de sistemas muestreados lineales se relacionará esta definición con la ubicación de los polos de lazo cerrado en el plano  $Z$ . Luego se discutirán diversos métodos para inferir la estabilidad del lazo. Los mismos pueden ser clasificados en tres categorías: métodos propios del dominio  $Z$ , métodos que se trasladan sin modificación del dominio  $s$  al dominio  $z$ , y métodos desarrollados en el dominio  $s$  que pueden utilizarse mediante la aplicación de una transformación adicional (transformada  $W$ ).

### 13.1. Sistemas muestreados y estabilidad BIBO

La definición de estabilidad que utilizaremos es la misma propuesta para sistemas continuos: Un sistema muestreado será estable si, cuando se lo excita con una secuencia acotada en amplitud, su secuencia de salida también estará acotada en amplitud. La situación se ilustra en la figura 13.1. Entonces, si cuando  $|x_k| < M < \infty$  resulta que  $|y_k| < N < \infty, \forall k$ , el sistema será estable.



**Figura 13.1:** Estabilidad BIBO

Si particularizamos para sistemas lineales, la secuencia  $y_k$  está dada por la sumatoria de convolución entre la entrada  $x_k$  y la respuesta impulsiva del sistema  $g_k$ :

$$y_k = \sum_{j=0}^{\infty} g_j x_{k-j} \quad (13.1)$$

$$|y_k| = \left| \sum_{j=0}^{\infty} g_j x_{k-j} \right| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |g_j| |x_{k-j}| < M \sum_{j=0}^{\infty} |g_j| \quad (13.2)$$

y si imponemos la condición de estabilidad resulta

$$M \sum_{j=0}^{\infty} |g_j| < N < \infty \quad (13.3)$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} |g_j| < Q = \frac{N}{M} < \infty \quad (13.4)$$

Es decir, la suma del valor absoluto de todas las muestras de la respuesta impulsiva del sistema debe ser finita. Como teníamos que

$$G(z) = K \frac{\prod_{i=1}^n (z - c_i)}{\prod_{j=0}^m (z - p_j)} = \sum_{j=0}^m R_j \frac{z}{(z - p_j)} \quad (13.5)$$

donde los  $R_j$ , como ya vimos, son los residuos de  $G(z)/z$ , y los términos de la forma  $\frac{z}{(z-p_j)}$  se corresponden con secuencias  $(p_j)^k$ , resulta que para que estas secuencias sean decrecientes con  $k$  es necesario que se verifique que  $|p_j| < 1$ . Es decir, los polos del sistema muestreado deben estar en el interior del círculo unitario en el plano  $z$ . Este resultado concuerda con lo discutido en la clase anterior, donde se verificó el mapeo entre el semiplano izquierdo del plano  $s$  y el interior del círculo unitario en  $z$ .

## 13.2. Métodos de análisis de estabilidad

### 13.2.1. Estabilidad absoluta. Test de Jury

El Test de Jury es un método tabular que permite establecer si un sistema tiene sus polos en el interior del círculo unitario, sin calcular efectivamente su posición. En ese sentido, tiene la misma funcionalidad del método de Routh, aunque el análisis es un tanto mas complejo. El procedimiento parte de la ecuación característica del sistema:

$$F(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + a_2z^{n-2} + \dots + a_{n-1}z + a_n = 0 \tag{13.6}$$

con  $a_0 > 0$ . A continuación se construye un arreglo bidimensional de la siguiente forma:

$z^0$	$z^1$	$z^2$	$z^3$	...	$z^{n-1}$	$z^n$
$a_n$	$a_{n-1}$	$a_{n-2}$	$a_{n-3}$	...	$a_1$	$a_0$
$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	...	$a_{n-1}$	$a_n$
$b_{n-1}$	$b_{n-2}$	$b_{n-3}$	$b_{n-4}$	...	$b_0$	
$b_0$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	...	$b_{n-1}$	
$c_{n-2}$	$c_{n-3}$	...	$c_1$	$c_0$		
$c_0$	$c_1$	...	$c_{n-3}$	$c_{n-2}$		
$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$		
$q_2$	$q_1$	$q_0$				

En la primera fila figuran los coeficientes de la ecuación característica, ordenados según potencias crecientes de  $z$ . En la segunda fila están los mismos coeficientes, pero en orden inverso. Las filas  $b_i$  tienen un elemento menos, esto es, el arreglo es triangular superior. Para calcular los coeficientes  $b_k$  se construye un determinante que contiene, como primera columna, las dos primeras columnas de las filas de coeficientes  $a_i$ . Como segunda columna se toman los dos elementos de la columna  $n - k$ , es decir, contando  $k$  elementos desde el final de la fila  $a$ . Es decir

$$b_k = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1-k} \\ a_0 & a_{k+1} \end{vmatrix} \tag{13.7}$$

El proceso se repite para las filas restantes, hasta llegar a una fila con sólo 3 elementos,  $q_0$ ,  $q_1$  y  $q_2$ . Las condiciones para que el sistema sea estable son:

- $|a_n| < a_0$
- $P(z)|_{z=1} > 0$

- $P(z)|_{z=-1} \begin{cases} > 0 & \text{si n par} \\ < 0 & \text{si n impar} \end{cases}$
- $|b_{n-1}| > |b_0|$
- $|c_{n-2}| > |c_0|$
- $\vdots$
- $|q_2| > |q_0|$

**Ejemplo**

Sea la siguiente ecuación característica

$$P(z) = z^4 - 1.2z^3 + 0.07z^2 + 0.3z - 0.08 = 0 \tag{13.8}$$

El arreglo de Jury es

$z^0$	$z^1$	$z^2$	$z^3$	$z^4$
-0.08	0.3	0.07	-1.2	1
1	-1.2	0.07	0.3	-0.08
$b_3$	$b_2$	$b_1$	$b_0$	
$b_0$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	
$q_2$	$q_1$	$q_0$		

donde

$$b_3 = \begin{vmatrix} -0.08 & 1 \\ 1 & -0.08 \end{vmatrix} = -0.9936 \tag{13.9}$$

$$b_2 = \begin{vmatrix} -0.08 & -1.2 \\ 1 & 0.3 \end{vmatrix} = 1.176 \tag{13.10}$$

$$b_1 = \begin{vmatrix} -0.08 & 0.07 \\ 1 & 0.07 \end{vmatrix} = -0.0756 \tag{13.11}$$

$$b_0 = \begin{vmatrix} -0.08 & 0.3 \\ 1 & -1.2 \end{vmatrix} = -0.204 \tag{13.12}$$

$$q_2 = \begin{vmatrix} -0.9936 & -0.204 \\ -0.204 & -0.9936 \end{vmatrix} = 0.9456 \tag{13.13}$$

$$q_2 = \begin{vmatrix} -0.9936 & -0.0756 \\ -0.204 & 1.176 \end{vmatrix} = 2.140 \quad (13.14)$$

$$q_3 = \begin{vmatrix} -0.9936 & 1.176 \\ -0.204 & -0.0756 \end{vmatrix} = 0.315 \quad (13.15)$$

Para el análisis de estabilidad debe verificarse

- $0.08 < 1$
  - $P(1) = 0.09$
  - $P(-1) = 1.39$
  - $0.9936 > 0.204$   
 $0.9456 > 0.315$
- ⇒ Sistema estable.

### 13.2.2. Lugar de raíces

Como la ecuación característica es un polinomio en  $z$ , siempre es posible escribirlo en la forma  $1 + k \frac{N(z)}{D(z)}$ , por lo que el método del lugar de raíces puede ser aplicado sin ninguna modificación en el plano  $z$ . Todas las reglas son válidas, salvo que el lugar geométrico que define el límite de estabilidad es ahora el círculo unitario en lugar del eje  $j\omega$ . Los puntos de intersección deberán obtenerse, por ejemplo, calculando la ganancia crítica con el test de Jury, reemplazando este valor en la ecuación característica, y calculando sus raíces. Esta situación hace que el cálculo de compensadores en el lugar de raíces en  $z$ , por ejemplo, se lleve a cabo exactamente en la misma forma que en sistemas continuos. En efecto, determinada la ubicación deseada de los polos de lazo cerrado, se calcula la fase que aportan las singularidades de la planta en ese punto, y la fase adicional necesaria para cumplir con la condición de fase debe ser aportada por las singularidades del compensador.

### 13.2.3. Métodos frecuenciales y la transformada $w$

A diferencia del método del lugar de raíces, los métodos basados en la respuesta en frecuencia no son directamente transportables al dominio  $z$ . Por una parte, las señales muestreadas son de espectro periódico, con lo cual los gráficos frecuenciales se tornan excesivamente complejos. Por otra parte, como para relevar la respuesta en frecuencia en  $z$  debe recorrerse infinitas veces el círculo unitario, analizando en cada punto el aporte en fase y módulo de las singularidades del



sistema, desaparece la posibilidad de hacer un trazado asintótico. La transformada  $W$  soluciona este problema, al mapear el círculo unitario entre  $\omega = -\pi/T$  y  $\omega = +\pi/T$  en un plano auxiliar, donde las propiedades geométricas coinciden con las del plano  $s$  para sistemas continuos. En efecto, el interior del círculo unitario se corresponde con el semiplano izquierdo del plano  $W$ , con lo cual el límite de estabilidad es el eje imaginario  $jIm(W)$ . En el plano auxiliar pueden aplicarse los métodos de Routh, Nyquist, Bode en forma totalmente análoga al plano  $s$ . En realidad, la transformada  $W$  no es estrictamente una transformada, sino un cambio de variables:

$$w = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} \quad (13.16)$$

Puede apreciarse que el punto  $z = 1$  se mapea en  $w = 0$  y el punto  $z = -1$  se corresponde con  $w = \infty$ . Los puntos donde  $|z| < 1$  se mapean en el interior del semiplano izquierdo en  $w$  (parte real negativa), y aquellos con  $|z| > 1$  con el semiplano derecho. Tenemos entonces un lugar geométrico que guarda gran similitud con el plano  $s$  para sistemas continuos. La idea es convertir  $G(z)$  en una  $G(w)$  mediante la transformación

$$z = \frac{1 + \frac{T}{2}w}{1 - \frac{T}{2}w} \quad (13.17)$$

y luego aplicar los métodos desarrollados para sistemas continuos a  $G(w)$ .

### Ejemplo

Analizar la estabilidad del sistema

$$G(s) = \frac{1}{s(s+10)} \quad (13.18)$$

Cuando es muestreado con  $T = 0.01 \text{seg}$ .

La función de transferencia del sistema muestreado sin compensar es

$$(1-z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} = (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s^2(s+10)}\right\} \quad (13.19)$$

donde el término  $(1-z^{-1})$  corresponde al numerador de la función de transferencia del reconstructor y su denominador divide a  $G(s)$ . Aplicando residuos tenemos

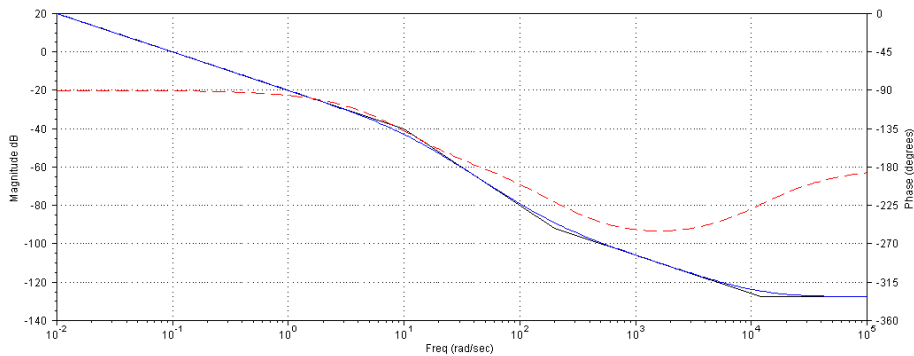
$$\frac{1}{s^2(s+10)} = \frac{\frac{1}{10}}{s^2} + \frac{\frac{-1}{100}}{s} + \frac{\frac{1}{100}}{(s+10)} \quad (13.20)$$

Entonces resulta

$$G(z) = \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s^2(s+10)}\right\} = \frac{\frac{Tz}{10}}{(z-1)^2} + \frac{\frac{-z}{100}}{(z-1)} + \frac{\frac{z}{100}}{(z-e^{10T})} \quad (13.21)$$

con lo que la expresión de  $G(z)$  resulta

$$\frac{(z-1)}{z} \frac{\frac{Tz}{10}}{(z-1)^2} + \frac{\frac{-z}{100}}{(z-1)} + \frac{\frac{z}{100}}{(z-e^{10T})} = 4.837 \times 10^{-5} \frac{(z+0.9672)}{(z-1)(z-0.9048)} \quad (13.22)$$



**Figura 13.2:** Diagrama de Bode en el plano  $w$

Ahora pasamos al plano  $w$ . Aplicando la transformación

$$z = \frac{200 + w}{200 - w} \quad (13.23)$$

resulta

$$G(w) = -4.163 \times 10^{-7} \frac{(w + 1,2 \times 10^{+04})(w - 200)}{w(w + 9,992)} \quad (13.24)$$

En este punto pueden hacerse algunas verificaciones sencillas para asegurar que no se han cometido errores. Si el sistema está adecuadamente muestreado, es decir, la frecuencia de muestreo es suficientemente alta en relación con el polo de frecuencia más alta de la planta analógica, deben verificarse las siguientes condiciones:

- Los polos de la planta se mapean prácticamente en el mismo lugar en  $w$ . En este caso, el polo en el origen se conserva y el polo en  $s = 10$  se mapea en  $w = 9.992$ .
- La ganancia de Bode en continuo es también muy similar (1 en el sistema continuo y  $(-4.163 \times 10^{-7})(1,2 \times 10^{+04})(-200) = 0.9991200$  en el sistema muestreado).
- Aparece un cero de no mínima fase a la frecuencia  $2/T$  ( $-200$  en este caso) con una multiplicidad igual al grado relativo de la transferencia en  $z$ , en este caso, 1.
- Aparecen ceros en alta frecuencia, en general muy por encima del polo más alto de la planta continua (12000 frente a 10 en este ejemplo).
- El comportamiento en baja frecuencia de  $G(s)$  y  $G(w)$  es muy similar, tanto más cuanto más elevada sea la frecuencia de muestreo.

Sobre este sistema hacemos el diagrama de Bode en forma convencional, tal como se ilustra en la figura 13.2. El sistema es estable con un margen de fase de 90 grados. Algunas observaciones son de interés. Aunque el sistema continuo es incondicionalmente estable para cualquier valor de ganancia positiva, el sistema muestreado puede inestabilizarse para un valor de ganancia suficientemente alto ya que, por efecto del cero de no mínima fase (que siempre aparecerá

si  $G(s)$  es estrictamente propia) existe una fase adicional en atraso, que en este caso hace que la fase total del sistema supere los 180 grados. Este cero está siempre a una frecuencia  $\frac{2}{T}$ , por lo tanto su efecto se producirá a frecuencias cada vez mas altas conforme se reduzca el período de muestreo. Esto es una regla general: cuanto mas rápido se muestree, mas similares serán los comportamientos de  $G(s)$  y  $G(w)$ . Podemos ver esto analizando la relación entre  $s$  y  $w$  sobre el eje  $j\omega$ :

$$w = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} = \frac{2}{T} \frac{1 - e^{-j\omega T}}{1 + e^{-j\omega T}} \tag{13.25}$$

$$= \frac{2}{T} \frac{e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}}{e^{j\omega T/2} + e^{-j\omega T/2}} \frac{2j}{2j} \tag{13.26}$$

$$= j \frac{2}{T} \tan(\omega T/2) \tag{13.27}$$

Si  $T$  es muy chico podemos aproximar la tangente por el ángulo y resultaría

$$w = j \frac{2}{T} \tan(\omega T/2) \approx \frac{2}{T} \omega \frac{T}{2} = j\omega \tag{13.28}$$

Es decir, si el muestreo es suficientemente rápido  $\omega$  y  $w$  coinciden. Esto es equivalente a decir que las bandas del espectro periódico son tan anchas que podemos despreciar el efecto de las copias de alta frecuencia. Esta situación es muy interesante, ya que en este caso los márgenes de estabilidad relativa son prácticamente iguales, y podemos incluso llevar las especificaciones del sistema continuo al plano  $w$  sin ninguna modificación. En ese caso, podemos compensar en el plano  $w$  y luego, con la transformación inversa, obtener la función de transferencia del compensador  $H(z)$ .

### 13.3. Problemas

1. Considere el siguiente sistema, con  $K > 0$ . Determine los valores de  $K$  para los cuales el sistema de lazo cerrado es estable.

$$G(z) = \frac{K}{z(z - 0.2)(z - 0.4)}$$

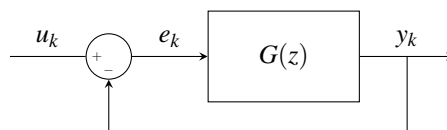


Figura 13.3: Problema 1

2. Determine la curva de Nyquist para el sistema:

$$G(z) = \frac{1}{(z-0.5)}$$

3. Determine la estabilidad y el valor de estado estacionario de la salida del sistema descrito en la figura con :

$$G(z) = \frac{1}{z(z-0.5)}$$

cuando  $U_C$  es una función escalón y

$$H_r(z) = K$$

$$H_r(z) = K \frac{z}{(z-1)}$$

con  $k > 0$ .

4. Para el sistema muestreado de lazo abierto

$$G(z) = K \frac{(z+0.9)}{(z-0.1)(z-0.9)}$$

Determine el rango de valores de  $k$  que aseguran estabilidad a lazo cerrado.

- Encontrando las raíces de la ecuación característica
- Empleando el criterio de Routh-Hurwitz
- Empleando el test de estabilidad de Jury

## Referencias

- [1] K. Ogata, "Modern Control Engineering", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA, 3rd edition, 1997.
- [2] B. C. Kuo, "Automatic Control Systems", Prentice-Hall International, London, England, 9th edition, 1962.
- [3] J. Dorsey, "Continuous and Discrete Control Systems: Modeling, Identification, Design, and Implementation". McGraw-Hill Series in Electrical and Computer Engineering. Prentice-Hall, New York, NY, 2002.
- [4] C. L. Phillips and H. T. Nagle, "Digital Control System Analysis and Design". Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, third edition, 1998. International Edition.
- [5] J.R. Ragazzini, G.F Franklin, "Sampled-Data Control Systems". McGraw-Hill, 1958

# CAPÍTULO 14

## Compensación de sistemas muestreados

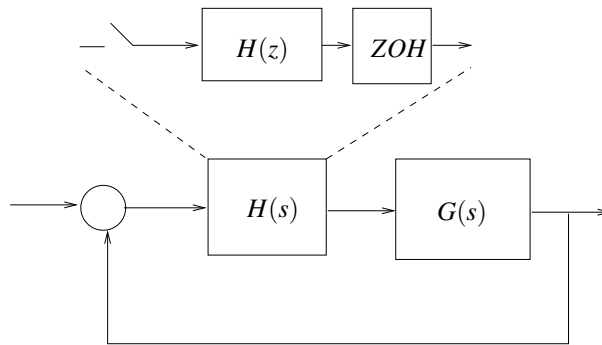
### Introducción

En este capítulo se analizarán diferentes técnicas para la compensación de sistemas muestreados de lazo cerrado. En primer lugar, se propondrá un método aproximado, en el cual se discretizará un controlador analógico, utilizando diferentes aproximaciones. En segundo lugar, se analizará el diseño en el plano  $z$ , utilizando el lugar de raíces. Finalmente, se estudiará el diseño en el plano  $w$ , de utilidad cuando las especificaciones sean expresadas en términos frecuenciales.

### 14.1. Diseño por equivalente discreto

Esta es una técnica aproximada que consiste en discretizar un compensador que ha sido diseñado suponiendo que el lazo es continuo. El método es aproximado ya que, por una parte, se utiliza una aproximación al operador derivada o integral (según el caso), y por otra parte, porque se desprecia el atraso de fase introducido por el reconstructor de orden cero. Como hemos visto en clases anteriores, para poder hacer esto último se requiere que la frecuencia de muestreo se eleve en relación con el ancho de banda del sistema continuo. Los errores cometidos tienden a cero en la medida que la frecuencia de muestreo tienda a infinito.

La idea del método es simple. En primer lugar se diseña un compensador continuo que cumpla con las especificaciones del problema. Ese compensador será luego aproximado por un



**Figura 14.1:** Diseño por equivalente discreto

muestreador, un compensador discreto y un reconstructor de orden cero, como se aprecia en la figura 14.1. Veremos a continuación las técnicas de aproximación mas comunes.

### 14.1.1. Diferencias hacia atrás (“Backwards difference”)

Esta técnica surge de usar la aproximación de Euler para la derivada:

$$\left. \frac{df(t)}{dt} \right|_{t=kT} \approx \frac{f(kT) - f((k-1)T)}{T} \tag{14.1}$$

La derivada exacta se calcularía haciendo el límite para  $T \rightarrow 0$ . Aplicando la transformada  $z$  tenemos

$$\mathcal{Z} \left\{ \frac{f(kT) - f((k-1)T)}{T} \right\} = F(z) \frac{1 - z^{-1}}{T} \tag{14.2}$$

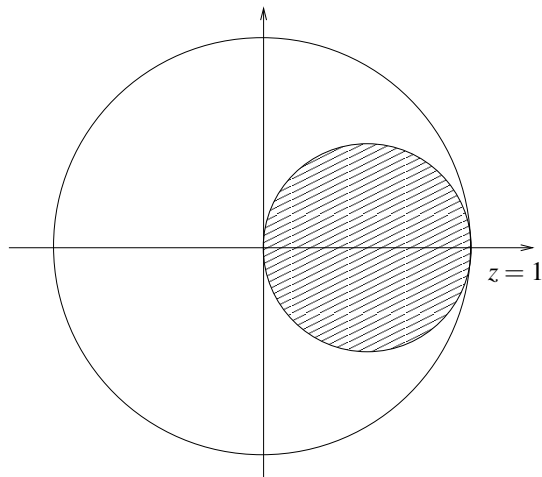
Para hallar la expresión aproximada del compensador analógico  $H(s)$ , simplemente reemplazamos  $s \rightarrow \frac{z-1}{zT}$ . Todas las aproximaciones introducen distorsión, ya que el mapeo entre los planos  $s$  y  $z$  no es el previsto por  $z = e^{sT}$ . De hecho, si calculamos el mapeo inverso tenemos

$$zTs = z - 1 \tag{14.3}$$

$$z(sT - 1) = -1 \tag{14.4}$$

$$z = \frac{1}{1 - sT} \tag{14.5}$$

que puede apreciarse en la zona sombreada de la figura 14.2. Si la frecuencia de muestreo es elevada, los polos tienden a ubicarse mas y mas cercanos a  $z = 1$ , que es justamente donde la distorsión es menor. Obsérvese que el mapeo aproximado, si bien introduce distorsión, es estable.



**Figura 14.2:** Mapeo de la aproximación por diferencias hacia atrás

### 14.1.2. Diferencias hacia adelante (“*Forward Difference*”)

Una aproximación similar puede proponerse utilizando la muestra siguiente en lugar de la anterior. En ese caso tenemos

$$\left. \frac{df(t)}{dt} \right|_{t=kT} \approx \frac{f((k+1)T) - f(kT)}{T} \tag{14.6}$$

$$\mathcal{Z} \left\{ \frac{f((k+1)T) - f(kT)}{T} \right\} = F(z) \frac{z-1}{T} \tag{14.7}$$

Obviamente, para implementar esta expresión en tiempo real hay que considerar un retardo de un período de muestreo. En este caso se reemplazaría  $s \rightarrow \frac{z-1}{T}$ . El mapeo inverso resulta

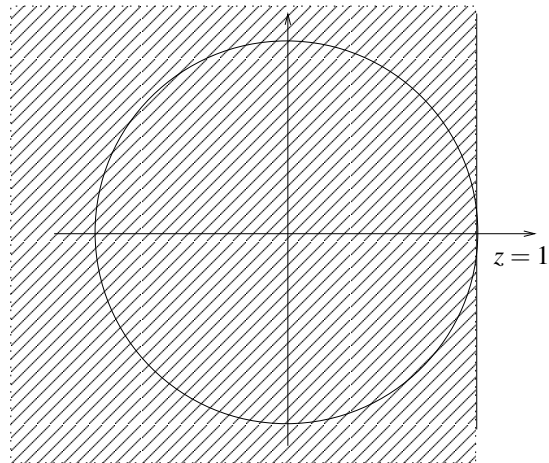
$$Ts = z - 1 \tag{14.8}$$

$$z = Ts + 1 \tag{14.9}$$

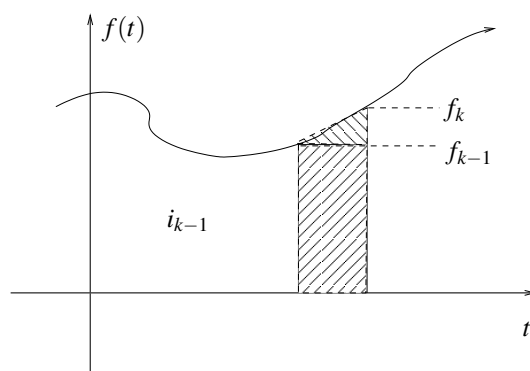
Mientras las dos aproximaciones dan resultados equivalentes si el período de muestreo es elevado, la técnica de diferencias hacia adelante es desaconsejable ya que, como se aprecia en la última expresión y en la figura 14.3, puede dar lugar a mapeos inestables (fuera del círculo unitario).

### 14.1.3. Regla trapezoidal

Esta técnica surge de aproximar la integral de una función mediante la regla del trapecio. Supongamos que  $i(kT)$  es una aproximación a la integral (área bajo la curva) de una función  $f(t)$  a partir de sus muestras en  $t = kT$ , como se aprecia en la figura 14.4. La ecuación de diferencias sería

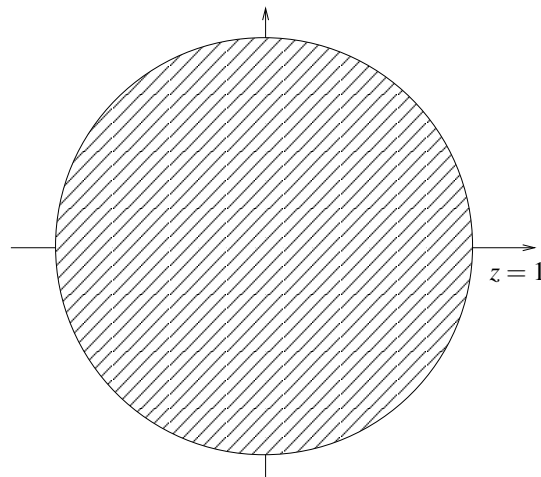


**Figura 14.3:** Mapeo de la aproximación por diferencias hacia adelante



**Figura 14.4:** Cálculo de la integral por regla trapezoidal





**Figura 14.5:** Mapeo de la aproximación por regla trapezoidal

$$i(kT) = i((k-1)T) + f((k-1)T)T + \frac{(f(kT) - f((k-1)T))T}{2} \quad (14.10)$$

$$i(kT) = i((k-1)T) + (f(kT) + f((k-1)T))\frac{T}{2} \quad (14.11)$$

$$I(z) = I(z)z^{-1} + F(z)\frac{(1+z^{-1})T}{2} \quad (14.12)$$

$$I(z)(1-z^{-1}) = F(z)(1+z^{-1})\frac{T}{2} \quad (14.13)$$

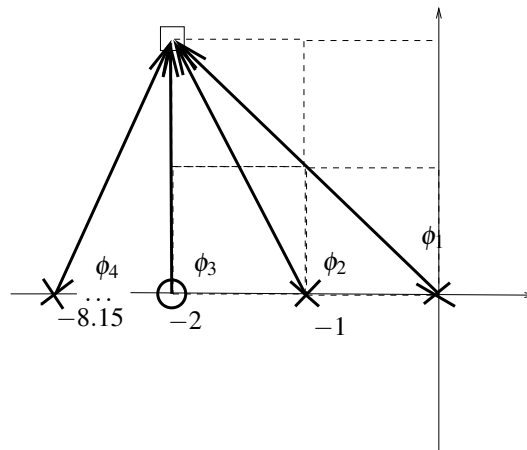
$$\frac{I(z)}{F(z)} = \frac{T}{2} \frac{z+1}{z-1} \rightarrow \frac{1}{s} \quad (14.14)$$

Esta es una aproximación a la función de transferencia del integrador. La técnica consiste, entonces en reemplazar  $s$  por  $\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$ . Nótese que ésta es la misma expresión que define a la transformada  $w$ . Sin embargo, el contexto es diferente. En el caso de la transformada  $w$  no se está haciendo ninguna aproximación: sólo se hace un cambio de variables para aprovechar las propiedades del lugar geométrico resultante. Por el contrario, cuando se utiliza la expresión para aproximar el integrador, la misma introduce distorsión. El mapeo resultante se aprecia en la figura 14.5. Si bien los lugares geométricos tienen los mismos límites, debe recordarse que en la aproximación todo el plano  $s$  se corresponde a un único giro al círculo unitario (el mapeo correcto serían los infinitos giros resultantes del espectro periódico).

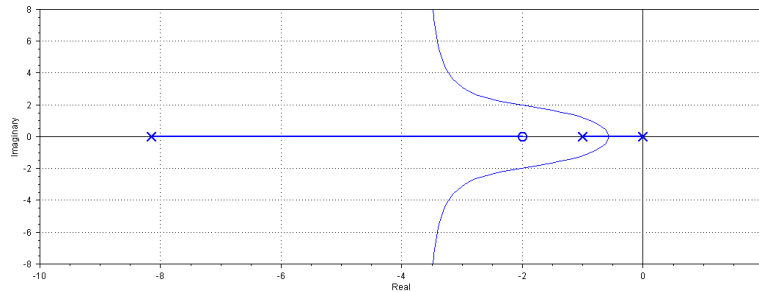
#### 14.1.4. Ejemplo

Veamos un ejemplo simple, aplicando las diferentes aproximaciones. Sea el sistema

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)} \quad (14.15)$$



**Figura 14.6:** Cálculo del aporte de fase del compensador



**Figura 14.7:** Lugar de raíces del sistema compensado

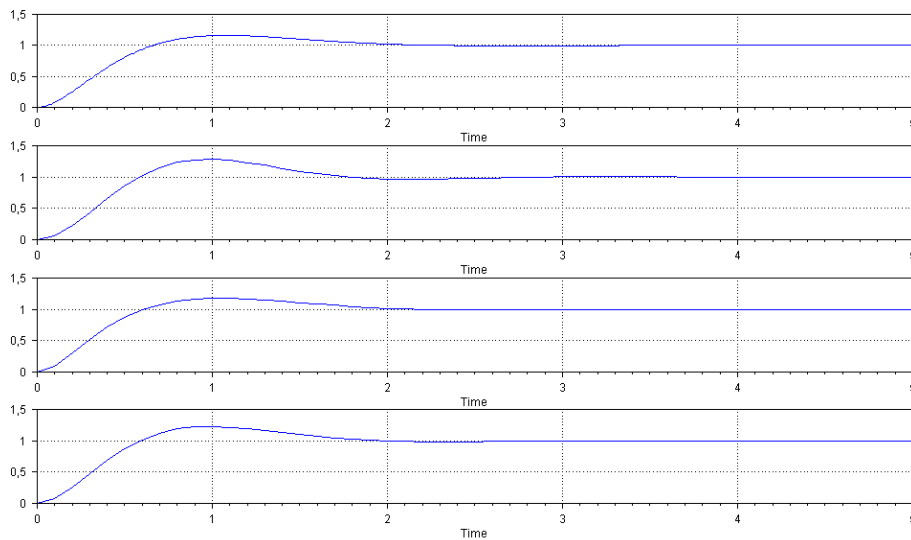
y se requiere que los polos de lazo cerrado se ubiquen en  $s_{1,2} = -2 \pm j2$ . De la figura 14.6 vemos que la fase aportada por la planta en los polos deseados de lazo cerrado es

$$\phi_1 = -135^\circ \phi_2 = -117^\circ \phi_{planta} = -135^\circ - 117^\circ = -252^\circ \tag{14.16}$$

El compensador debe agregar la fase positiva necesaria para que este en ese punto la fase total sea  $-180^\circ$ , es decir  $\phi_{comp} = -180^\circ + 252^\circ = +72^\circ$ . Si ubicamos el cero del compensador en  $s = -2$  tal que su aporte de fase resulte  $\phi_3 = +90^\circ$  resulta que el polo del compensador debe aportar  $\phi_4 = 72^\circ - 90^\circ = 18^\circ$  y por lo tanto deberá ubicarse en  $-2 - 2/tg(18) = -8.15$ . El compensador continuo resulta

$$H(s) = 20 \frac{(s+2)}{(s+8.15)} \tag{14.17}$$

El lugar de raíces del sistema continuo puede verse en la figura 14.7. Supongamos que el período de muestreo es  $T = 0.1s$ . De esta forma,  $\omega_s = \frac{2\pi}{T} = 63r/s$ , lo que permite hacer la aproximación sin problemas. Analicemos el resultado para cada una de las aproximaciones. Con la frecuencia de muestreo elegida los resultados deberían ser muy similares.



**Figura 14.8:** Respuesta temporal. De arriba hacia abajo: controlador continuo, diferencias hacia atrás, hacia adelante y trapezoidal.

#### diferencias hacia atrás

Con el período de muestreo elegido tenemos  $s \rightarrow 10 \frac{(z-1)}{z}$ . El compensador resulta

$$H(z) = 20 \frac{10 \frac{(z-1)}{z} + 2}{10 \frac{(z-1)}{z} + 8.15} = 13.223 \frac{(z-0.83)}{(z-0.55)} \quad (14.18)$$

#### diferencias hacia adelante

En este caso hacemos  $s \rightarrow 10(z-1)$ . El compensador queda

$$H(z) = 20 \frac{10(z-1) + 2}{10(z-1) + 8.15} = 20 \frac{(z-0.8)}{(z-0.185)} \quad (14.19)$$

#### regla trapezoidal

Finalmente, aquí reemplazamos  $s \rightarrow 20 \frac{z-1}{z+1}$ . El compensador discreto es

$$H(z) = 20 \frac{20 \frac{z-1}{z+1} + 2}{20 \frac{z-1}{z+1} + 8.15} = 15.63 \frac{(z-0.818)}{(z-0.42)} \quad (14.20)$$

En la figura 14.8 pueden apreciarse las respuestas al escalón del controlador continuo y las tres aproximaciones discretas. Las respuestas son muy similares, y se verifica que la mejor aproximación es, como se esperaba, la de la regla trapezoidal.

## 14.2. Diseño en el plano $z$

Como las reglas para la construcción del diagrama de Lugar de Raíces no cambian al trabajar con sistemas muestreados, el diseño en el plano  $z$  es enteramente similar al desarrollado para el plano  $s$ . Elegidos los polos deseados de lazo cerrado, se calcula la fase que debe aportar el compensador y luego se sintetiza una red polo-cero que la verifique. Resumiremos el cálculo a través de un ejemplo numérico.

### 14.2.1. Ejemplo

Dado el sistema

$$G(s) = \frac{2500}{s(s+25)} \quad (14.21)$$

se pretende compensar para lograr polos de lazo cerrado en  $z_{1,2} = 0,5 \pm j0,4$ .

El sistema continuo sin compensar presenta la respuesta a un escalón de lazo cerrado ilustrada en la figura 14.9 en trazo continuo. Vemos que para la actual ganancia, la respuesta es subamortiguada, con un sobrepico cercano al 50%.

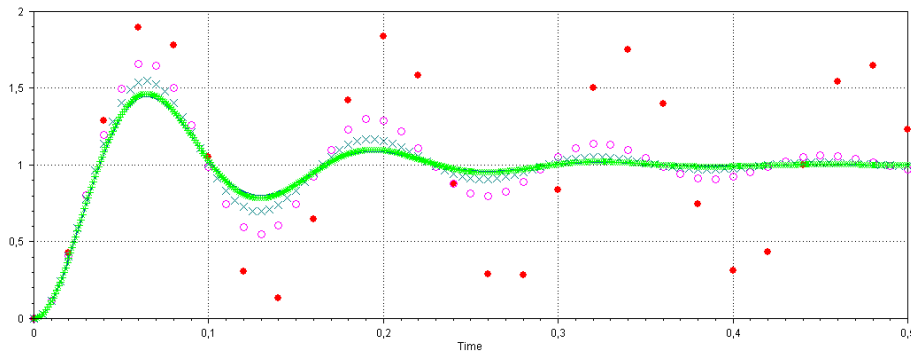
El primer paso del análisis consistirá en elegir adecuadamente el período de muestreo. Para ello analicemos la respuesta del sistema muestreado sin compensar para diferentes períodos de muestreo. La función de transferencia del sistema muestreado sin compensar será

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} = \frac{(z-1)}{z} \mathcal{Z} \left\{ \frac{2500}{s^2(s+25)} \right\} \quad (14.22)$$

$$= \frac{(z-1)}{z} \left\{ \frac{100zT}{(z-1)^2} + \frac{-4z}{(z-1)} + \frac{4z}{(z-e^{-25T})} \right\} \quad (14.23)$$

$$= \frac{4(z(25T + e^{-25T} - 1) + (1 - e^{-25T}(1 + 25T)))}{(z-1)(z - e^{-25T})} \quad (14.24)$$

donde la ganancia, la ubicación de un cero y un polo dependen del período de muestreo. En la figura 14.9 vemos, superpuesta con la respuesta del sistema continuo, la respuesta al escalón a lazo cerrado para  $T = 0,02s, T = 0,01s, T = 0,005s$  y  $T = 0,001s$ . Puede apreciarse que la respuesta para  $T = 0.001s$  prácticamente coincide con la del sistema continuo, mientras que en los restantes casos el sistema muestreado se torna cada vez mas oscilatorio a medida que se reduce la frecuencia de muestreo. Esta diferencia se debe al atraso de fase introducido por el reconstructor de orden cero. Al disminuir la frecuencia de muestreo, el reconstructor agrega mas fase negativa en la banda pasante de la planta, lo que afecta negativamente a la estabilidad relativa del sistema. En particular, para  $T = 0.02$  el sistema presenta una oscilación muy poco amortiguada, lo que indica que prácticamente todo el margen de fase de la planta ha sido anulado por el reconstructor.



**Figura 14.9:** Respuesta al escalón. Trazo continuo: sistema analógico.  $T=0,001(\cdot)$ ,  $T=0,005(x)$ ,  $T=0,01(o)$  y  $T=0,02(*)$

Elegiremos en este caso un período de muestreo  $T = 0.01s$ . Entonces  $\omega_s = 2\pi/T = 628r/s$ , que es 25 veces mas rápido que el polo mas rápido de la planta. Esto es habitualmente considerado una adecuada frecuencia de muestreo, a pesar que, como puede verse en la figura 14.9, la respuesta es bastante mas oscilatoria que la del sistema continuo. El único inconveniente será que el compensador discreto tendrá que compensar un sistema mas oscilatorio.

Con la frecuencia de muestreo elegida, la función de transferencia de lazo abierto resulta

$$G(z) = 0,1152 \frac{(z+0,9201)}{(z-1)(z-0,7788)} \tag{14.25}$$

El diagrama de lugar de raíces del sistema muestreado sin compensar puede apreciarse en la figura 14.10. Para la ganancia actual, los polos de lazo cerrado están muy cerca del círculo unitario, lo que explica el comportamiento fuertemente subamortiguado del sistema.

El compensador debe desviar las ramas del diagrama hacia el interior del círculo unitario. Como primer paso, calculamos la fase de la planta en los polos deseados. Refiriéndonos a la figura 14.11, tenemos que

$$\phi_1 = 15,73^\circ \tag{14.26}$$

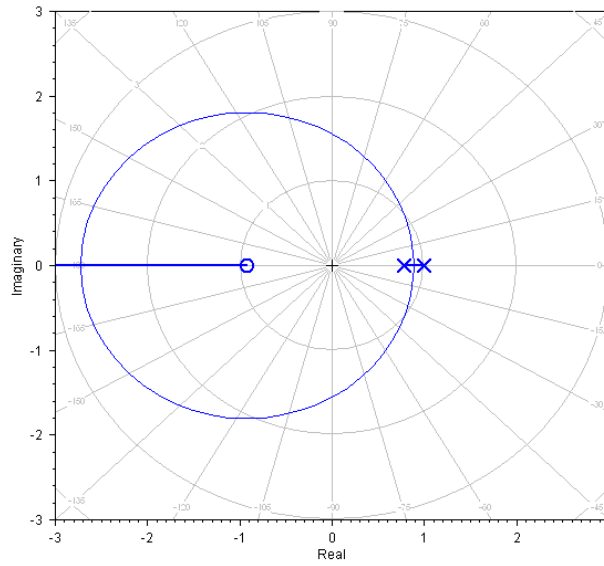
$$\phi_2 = -141,34^\circ \tag{14.27}$$

$$\phi_3 = -124,87^\circ \tag{14.28}$$

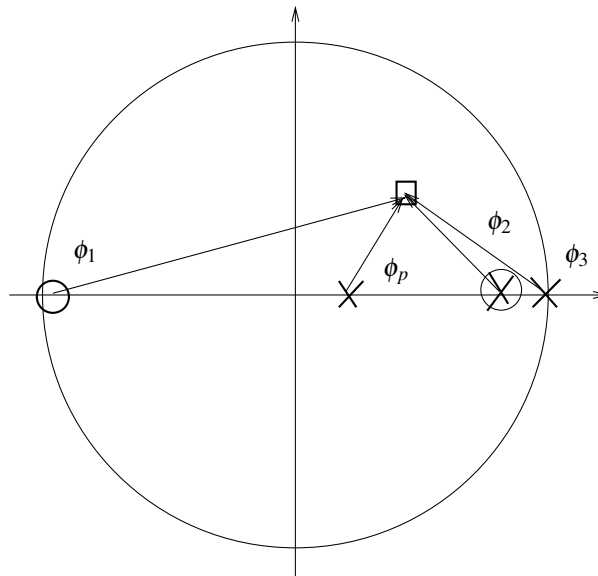
$$\phi_t = -250,48^\circ \tag{14.29}$$

$$\Rightarrow \phi_{comp} = \phi_z - \phi_p = -180^\circ + 250,48^\circ = 70,48^\circ \tag{14.30}$$

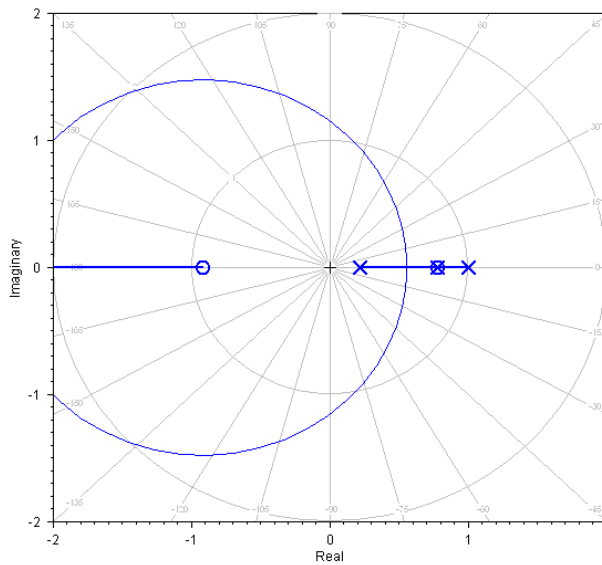
Para diseñar el compensador, cancelaremos el polo de la planta en  $z = 0,7788$  y calculamos la posición del polo, que resulta en  $z = 0.214$ . Haciendo el cálculo de ganancia para ubicar los



**Figura 14.10:** Lugar de raíces del sistema muestreado sin compensar ( $T=0,01$ )



**Figura 14.11:** Cálculo del compensador



**Figura 14.12:** Lugar de raíces del sistema compensado

polos de lazo cerrado en el lugar especificado llegamos al siguiente compensador:

$$H(z) = 1.87 \frac{(z - 0,7788)}{(z - 0.214)} \tag{14.31}$$

El lugar de raíces del sistema compensado puede verse en la figura 14.12.

Para la implementación en tiempo real del compensador, dividimos numerador y denominador por  $z$  y antitransformamos

$$H(z) = \frac{1,87 - 1,456356z^{-1}}{1 - 0,214z^{-1}} = \frac{U(z)}{E(z)} \tag{14.32}$$

$$U(z) - 0.214z^{-1}U(z) = 1.87E(z) - 1.456356z^{-1}E(z) \tag{14.33}$$

$$u_k = 0,214u_{k-1} + 1.87e_k - 1,456356e_{k-1} \tag{14.34}$$

La última expresión es la ecuación de recurrencias (o de diferencias) del compensador. En este caso requiere la entrada actual, la entrada en el instante de muestreo anterior, y la salida calculada en el instante de muestreo anterior. La respuesta temporal se grafica en la figura 14.13, donde se compara con la respuesta del sistema no compensado. Evidentemente, la compensación por adelanto ha aumentado la estabilidad relativa del sistema, reduciendo el sobrepico. Asimismo, se aprecia que el sistema compensado es un poco más rápido que el sistema original, debido al aumento del ancho de banda.

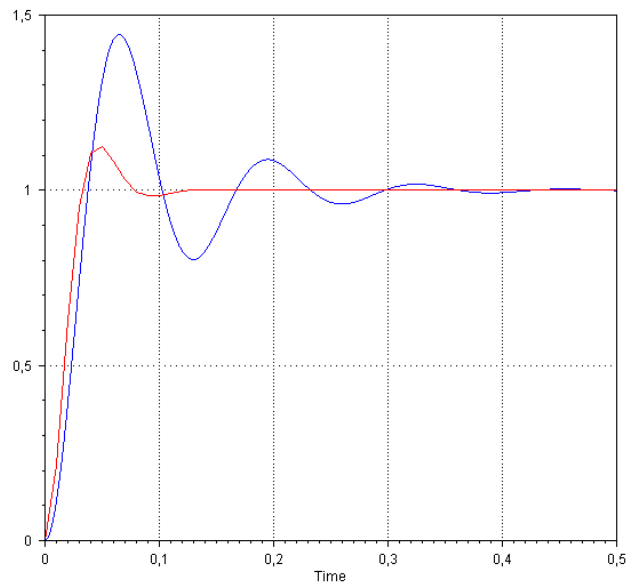


Figura 14.13: Respuesta al escalón del sistema compensado

### 14.3. Diseño en el plano $w$

Cuando las especificaciones del problema de control están relacionadas con parámetros de la respuesta en frecuencia, es necesario trabajar en el plano  $w$ . Si la frecuencia de muestreo es adecuada, vimos que las especificaciones pueden trasladarse directamente como especificaciones en el diagrama de Bode en  $w$ . El compensador resultante es luego convertido en una expresión en  $z$  utilizando la transformación correspondiente. Veamos el procedimiento con un ejemplo numérico.

Considérese la misma función de transferencia del caso anterior:

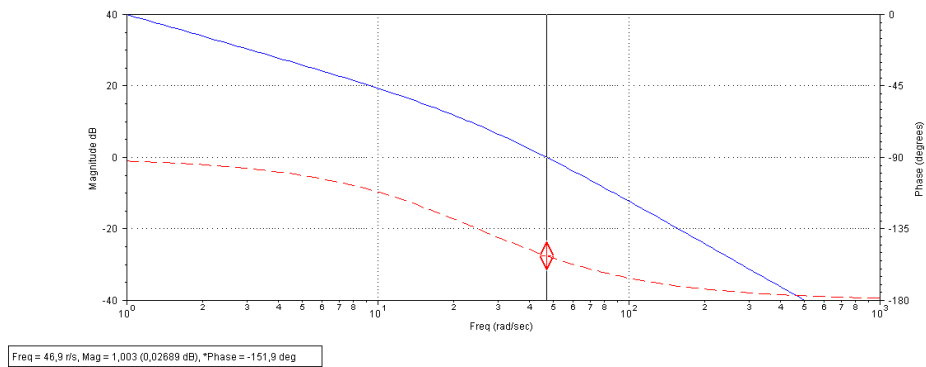
$$G(s) = \frac{2500}{s(s+25)} \quad (14.35)$$

Supongamos que el problema requiere que el margen de fase del sistema compensado sea de  $45^\circ$ , sin alterar el comportamiento de baja frecuencia. El diagrama de Bode del sistema continuo puede verse en la figura 14.14, donde se aprecia que el margen de fase es de aproximadamente  $28^\circ$  a la  $\omega = 48r/s$ . Considerando el mismo período de muestreo del ejemplo anterior ( $T = 0.01s$ ) tenemos

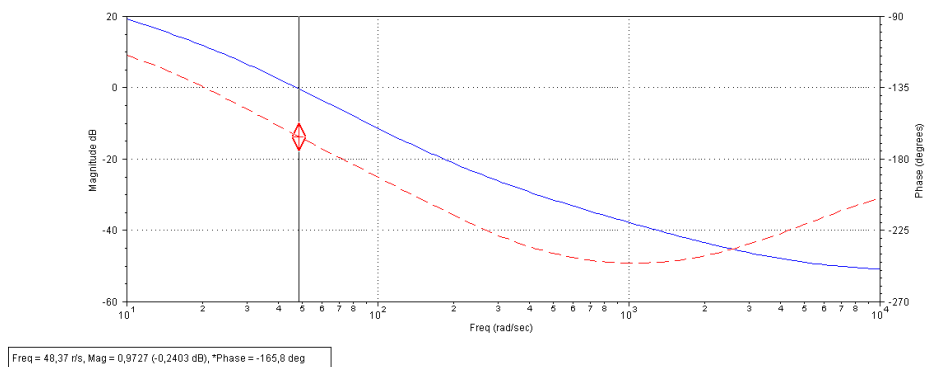
$$G(z) = 0,1152 \frac{(z+0,9201)}{(z-1)(z-0,7788)} \quad (14.36)$$

de forma tal que, utilizando la transformación  $z = \frac{(200+w)}{(200-w)}$  resulta





**Figura 14.14:** Diagrama de Bode del sistema continuo sin compensar.



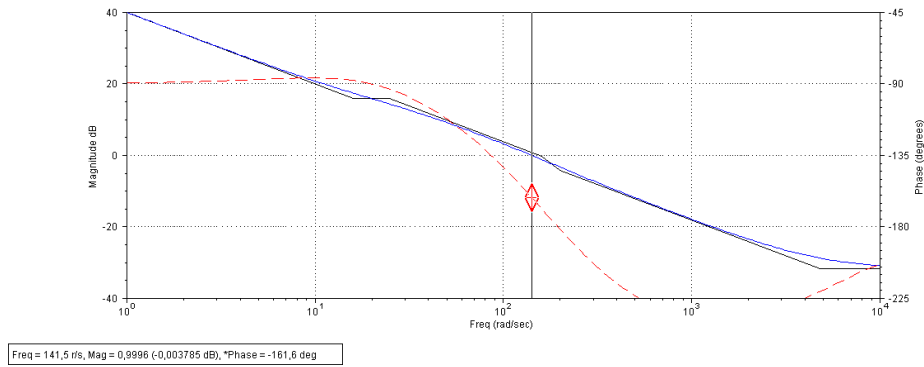
**Figura 14.15:** Diagrama de Bode del sistema muestreado (plano  $w$ ) sin compensar

$$G(w) = -0,002588 \frac{(w + 4805)(w - 200)}{w(w + 24,87)} \quad (14.37)$$

El diagrama de Bode del sistema en el plano  $w$  se aprecia en la figura 14.15. Vemos que ahora el margen de fase se ha reducido a aproximadamente  $15^\circ$ . Esto es debido a la fase negativa introducida por el reconstructor de orden cero. En efecto, considerando que la fase del reconstructor es  $\phi = -\omega T/2$  vemos que a la frecuencia del margen de fase tenemos

$$\phi = \frac{48r/s \times 0.01s \times 360}{2 \times 2 \times \pi} = 13.75^\circ \quad (14.38)$$

que es exactamente la diferencia entre los dos valores del margen de fase. Como la frecuencia de muestreo es adecuada, pueden trasladarse las especificaciones del plano  $s$  al plano  $w$ . Por lo tanto se diseñará un compensador que lleve el margen de fase de los actuales  $15^\circ$  a  $45^\circ$ , es decir, que agregue unos  $30^\circ$  de fase. Ahora el diseño es enteramente similar al detallado en



**Figura 14.16:** Diagrama de Bode del sistema muestreado compensado (primer intento)

el capítulo 9. Comencemos diseñando un compensador que agregue  $45^\circ$  a  $w = 48r/s$ :

$$H(w) = 10 \frac{w + w_z}{w + w_p} \tag{14.39}$$

$$48 = \sqrt{w_z \times 10w_z} = w_z \sqrt{10} \approx 3w_z \tag{14.40}$$

$$w_z = \frac{48}{3} = 16 \tag{14.41}$$

Nuestro primer intento de compensador será entonces

$$H(w) = 10 \frac{(w + 16)}{(w + 160)} \tag{14.42}$$

La figura 14.16 ilustra el diagrama de bode del sistema compensado. Vemos que las especificaciones no se cumplen, ya que el nuevo margen de fase es solamente de  $19^\circ$ . El punto de corte de 0dB se ha corrido hacia alta frecuencia, donde el compensador ya no aporta su fase máxima y la planta aporta mas fase negativa. Este es el problema clásico del diseño de compensadores por adelanto de fase en el dominio de la frecuencia. Intentaremos solucionarlo desplazando el compensador hacia alta frecuencia, sin alterar la relación entre el polo y el cero. Por ejemplo, el compensador

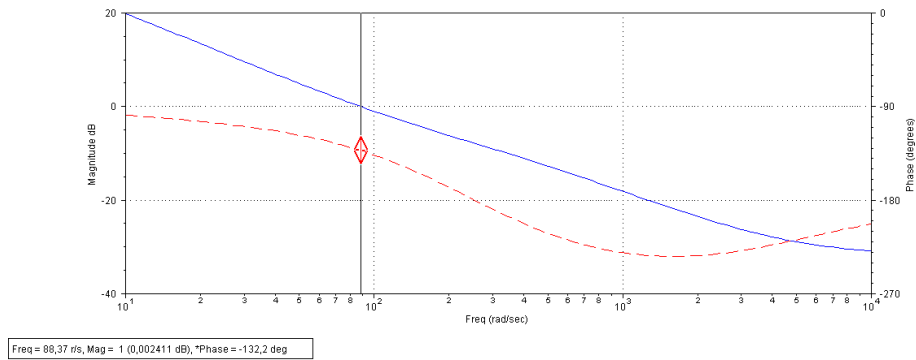
$$H(w) = 10 \frac{(w + 30)}{(w + 300)} \tag{14.43}$$

logra que el margen de fase sea de  $48^\circ$  (figura 14.17, excediendo los requisitos especificados. Para la implementación física, aplicamos la transformación inversa  $w = 200 \frac{z-1}{z+1}$  para obtener

$$H(z) = 4.6 \frac{z - 0.6522}{z + 0.2} \tag{14.44}$$

### 14.3.1. Compensación en atraso en el plano w

Como hemos dicho, el procedimiento de compensación en el plano  $w$  es enteramente similar al caso continuo. Sin embargo, a la hora de retornar al plano  $z$  para la implementación física



**Figura 14.17:** Diagrama de Bode del sistema muestreado compensado. Resultado final

del controlador pueden aparecer algunos problemas. Como éstos son mas evidentes en el caso de la compensación por atraso, analizaremos un ejemplo simple, utilizando la misma planta y la misma frecuencia de muestreo del caso anterior.

Supongamos que la especificación fuera reducir 10 veces el error de estado estacionario a la rampa, sin alterar el margen de fase del sistema original. Esto puede hacerse fácilmente con un compensador por atraso de fase que gane 10 veces en baja frecuencia. En el plano  $w$ , un posible compensador sería el siguiente:

$$H(w) = (w + 0.1)/(w + 0.01) \tag{14.45}$$

Al hacer la transformación correspondiente,  $z = 200 \frac{z-1}{z+1}$  tenemos

$$H(z) = \frac{200 \frac{z-1}{z+1} + 0.1}{200 \frac{z-1}{z+1} + 0.01} = \frac{200,1 z - 0,999000499}{200,01 z - 0.999900005} \tag{14.46}$$

Si bien el resultado es correcto, puede apreciarse que la posición del cero y del polo del compensador son prácticamente coincidentes. Considerando que la ganancia es prácticamente unitaria, la ecuación de diferencias quedaría

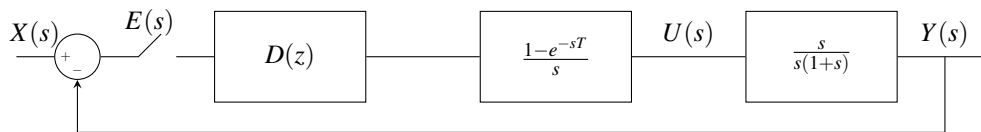
$$u_k = e_k - 0,9990e_{k-1} + 0.9999u_{k-1} \tag{14.47}$$

Si el sistema de representación adoptado no permite discriminar entre 0.9990 y 0,9999, el polo y el cero del compensador se cancelarán y el compensador simplemente copiará la entrada en la salida. Por ejemplo, si trabajara en punto fijo, y ocho bits de precisión, la diferencia mínima entre dos números es  $2^{-8} = 0,00390625$ , con lo cual los dos coeficientes quedarán iguales. Estas son fallas difíciles de detectar, ya que tanto el compensador como el algoritmo pueden ser correctos, y la compensación no funciona simplemente porque el polo y el cero están “demasiado” cercanos. Las soluciones dependen del contexto tecnológico. Si no se puede cambiar la precisión numérica, debe recalcularse el compensador teniendo en cuenta la diferencia mínima que

puede existir entre dos números. En caso contrario, debe evaluarse la posibilidad de expresar los números con mayor cantidad de bits (ya sea cambiando de procesador o escribiendo rutinas de librería en doble precisión) o migrar a un sistema de representación en punto flotante.

## 14.4. Problemas

1. Para el sistema de la figura, con  $T = 1s$  :



**Figura 14.18:** Problema 1

- El margen de fase del sistema sin compensar es aproximadamente  $30^\circ$ . Diseñar un compensador para llevarlo a aproximadamente  $50^\circ$ .
2. Para el sistema sin compensar del problema anterior con  $T = 0,1$  seg. el margen de fase es aproximadamente  $50^\circ$ . Se desea que el error de estado estacionario sea constante para una entrada rampa unitaria con  $K_v = 4$ , siendo por tanto el error de 0.25. En estas condiciones:
    - Incremente la ganancia de la planta tal que se obtenga  $K_v = 4$ . Luego encuentre el nuevo margen de fase.
    - Diseñe un compensador tal que el sistema tenga un margen de fase de  $50^\circ$  con  $K_v = 4$ .
  3. Considere el sistema del ejercicio 1. Diseñe un controlador PID para lograr un margen de fase de  $60^\circ$ .
  4. La siguiente red de adelanto:

$$H(s) = 4 \frac{(s+1)}{s+2}$$

provee alrededor de  $20^\circ$  de avance de fase a  $\omega_c = 1.6$  rad/seg. Aproxime la red para  $T = 0.25s$  usando:

- Diferencias hacia atrás.
- Diferencias hacia adelante.
- Aproximación trapezoidal.

Repita los puntos anteriores duplicando  $T$ , y saque conclusiones.

5. Un controlador PI continuo está dado por la función de transferencia:

$$H_{PI} = K \left( 1 + \frac{1}{sT_I} \right)$$

Utilice la aproximación bilineal para encontrar un controlador de tiempo discreto.

6. Obtenga la ecuación recursiva de un PID, usando las diferentes aproximaciones discutidas en el capítulo.
7. Dada la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{4 \times 10^{-4}}{s^2 + 0.0326s + 2.54 \times 10^{-4}}$$

Considere las siguientes especificaciones para el sistema a lazo cerrado:

- Error de estado estacionario a un escalón en la referencia.
- La frecuencia de cruce de  $0dB$  ( $\omega_1$ ) del sistema compensado debe ser  $0.025r/s$ .
- El margen de fase debe ser, aproximadamente,  $50^\circ$ .

Diseñe un controlador PI tal que la totalidad de las especificaciones sean satisfechas. Determine los polos y ceros del sistema en lazo cerrado. Elija una adecuada frecuencia de muestreo y aproxime el controlador de tiempo continuo empleando la aproximación trapezoidal. Justifique la elección del período de muestreo realizada.

## Referencias

- [1] K. Ogata, "Modern Control Engineering", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA, 3rd edition, 1997.
- [2] B. C. Kuo, "Automatic Control Systems", Prentice-Hall International, London, England, 9th edition, 1962.
- [3] C.H.Houpis, S.N.Sheldon, "Linear Control System Analysis and Design with MATLAB , Sixth Edition (Automation and Control Engineering, Book 53)". CRC Press, 2014.
- [4] G. F. Franklin, J. D. Powell, A. Emami-Naeini. "Feedback Control of Dynamic Systems". Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, fourth edition, 2002.
- [5] R. C. Dorf, R. H. Bishop, "Modern Control Systems". Pearson 2008.
- [6] J. Dorsey, "Continuous and Discrete Control Systems: Modeling, Identification, Design, and Implementation". McGraw-Hill Series in Electrical and Computer Engineering. Prentice-Hall, New York, NY, 2002.

- [7] C. L. Phillips and H. T. Nagle, "Digital Control System Analysis and Design". Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, third edition, 1998. International Edition.
- [8] J.R. Ragazzini, G.F Franklin, "Sampled-Data Control Systems". McGraw-Hill, 1958

# CAPÍTULO 15

## Realización de compensadores discretos

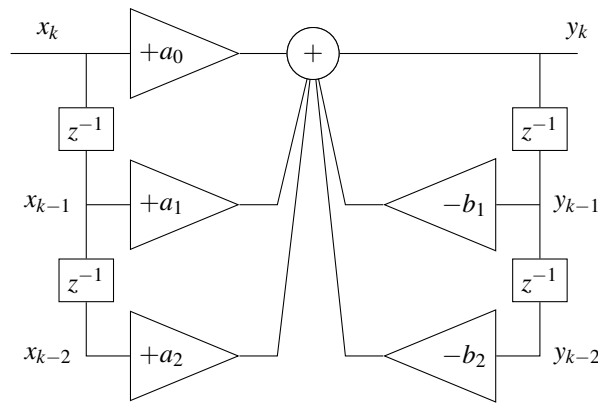
### Introducción

En este capítulo se analizarán diferentes estrategias para la implementación de compensadores digitales. Veremos que para una misma función de transferencia en el dominio  $Z$  es posible plantear distintas alternativas de realización, que presentan propiedades diferentes en el uso de memoria, número de operaciones aritméticas y sensibilidad en la ubicación de singularidades. Además, se estudiarán los efectos debidos al redondeo (o alternativamente, el truncado) de coeficientes, señales y operaciones matemáticas. Veremos que este fenómeno puede ser asimilado a la aparición de un *ruido de cuantización*, que se propaga en el cálculo del compensador y debe ser tenido en cuenta, sobre todo cuando se trabaja con pocos bits de precisión numérica.

### 15.1. Tipos de realizaciones

Una misma función de transferencia  $H(z)$  puede ser implementada mediante diferentes estrategias. Hasta ahora hemos visto realizaciones *directas*, esto es, aquellas en las que los coeficientes de los polinomios numerador y denominador de la función de transferencia aparecen explícitamente en la ecuación recursiva. En lo que sigue, y por razones que serán evidentes mas adelante, analizaremos la implementación de una sección de segundo orden, es decir una función de la forma

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}{1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}} = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (15.1)$$



**Figura 15.1:** Realización directa

### 15.1.1. Realizaciones directas

En las realizaciones directas los términos  $a_i$  y  $b_i$  aparecen como multiplicadores:

$$a_0X(z) + a_1z^{-1}X(z) + a_2z^{-2}X(z) = Y(z) + b_1z^{-1}Y(z) + b_2z^{-2}Y(z) \quad (15.2)$$

$$\implies y_k = a_0x_k + a_1x_{k-1} + a_2x_{k-2} - b_1y_{k-1} - b_2y_{k-2} \quad (15.3)$$

El resultado puede interpretarse gráficamente en la figura 15.1. La operación del filtro requiere, para esta sección de segundo orden, de cuatro posiciones de memoria, cinco multiplicaciones y cuatro sumas. En la figura, los bloques identificados como  $z^{-1}$  corresponden a retardos de un período de muestreo, o equivalentemente, a una posición de memoria para almacenar valores pasados de las señales  $x$  e  $y$ .

### 15.1.2. Realizaciones canónicas

Una forma alternativa de implementar la sección de segundo orden puede obtenerse definiendo una señal intermedia  $m_k$ . En efecto, si proponemos

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}{1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}} = \frac{Y(z)}{M(z)} \frac{M(z)}{X(z)} \quad (15.4)$$

y en forma mas o menos arbitraria definimos

$$\frac{Y(z)}{M(z)} = a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} \quad (15.5)$$

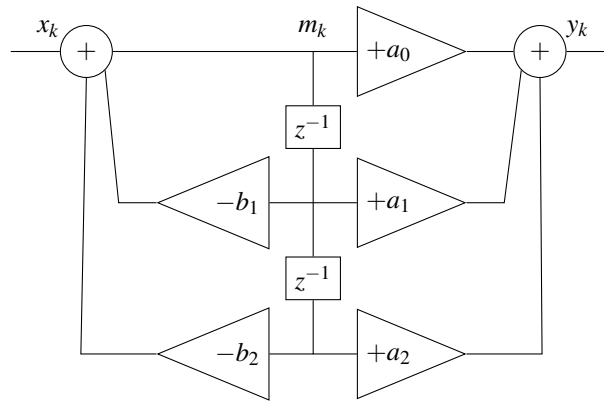
$$\frac{M(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}} \quad (15.6)$$

obtenemos

$$y_k = a_0m_k + a_1m_{k-1} + a_2m_{k-2} \quad (15.7)$$

$$m_k = x_k - b_1m_{k-1} - b_2m_{k-2} \quad (15.8)$$





**Figura 15.2:** Realización canónica 1

y la realización puede apreciarse en la figura 15.2. Obsérvese que, comparado con la realización directa, esta estrategia reduce la cantidad de memoria necesaria a la mitad. Esto ocurre porque lo que se almacena es  $m_{k-i}$  (una combinación de  $x$  e  $y$ ), en lugar de las señales de entrada y salida. A las realizaciones que minimizan alguno de los parámetros del filtro (posiciones de memoria, número de multiplicaciones, número de sumas) se las denomina *realizaciones canónicas*. Otra forma canónica puede obtenerse agrupando los términos con igual potencia de  $z$ :

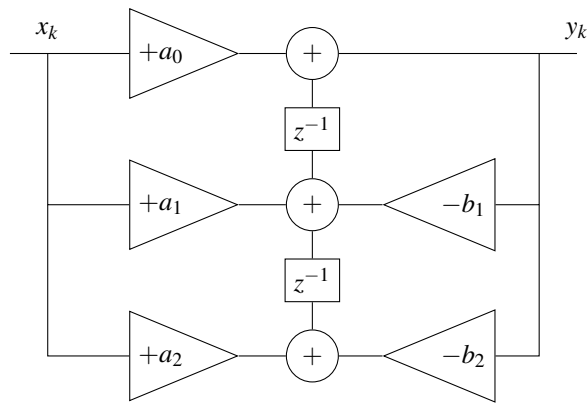
$$a_0X(z) + a_1z^{-1}X(z) + a_2z^{-2}X(z) = Y(z) + b_1z^{-1}Y(z) + b_2z^{-2}Y(z) \quad (15.9)$$

$$Y(z) = a_0X(z) + (a_1X(z) - b_1Y(z))z^{-1} + (a_2X(z) - b_2Y(z))z^{-2}$$

$$Y(z) = a_0X(z) + ((a_1X(z) - b_1Y(z)) + (a_2X(z) - b_2Y(z))z^{-1})z^{-1} \quad (15.10)$$

que se aprecia en la figura 15.3. Puede observarse que es la versión transpuesta del filtro anterior, donde se invierte el flujo de la señal, los puntos de distribución se convierten en puntos de suma y viceversa. Este filtro también optimiza el número de posiciones de memoria.

Si bien el resultado de todas estas estrategias es el mismo, debe advertirse que la utilización de un número menor de posiciones de memoria puede ser importante. Por una parte, si el filtro va a ser implementado en un dispositivo de lógica programable (FPGA), puede ser importante reducir al mínimo la utilización de registros (flip-flops). Por otra parte, si el filtro va a ser implementado mediante un programa, reducir la cantidad de posiciones de memoria puede resultar en que el compensador pueda ser calculado utilizando sólo los registros del procesador, sin acceder a posiciones de RAM para guardar los resultados intermedios. Esto puede traducirse en una reducción importante en el tiempo de cómputo, ya que los registros del procesador constituyen la memoria más rápida de la computadora.



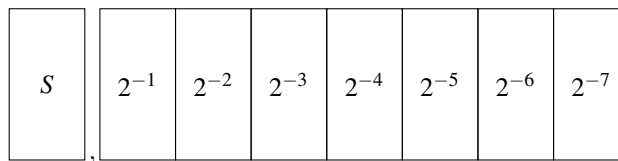
**Figura 15.3:** Realización canónica 2

## 15.2. Problemas asociados a la longitud de palabra finita

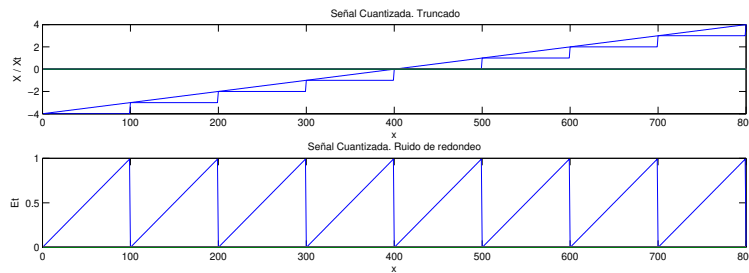
Hasta ahora hemos considerado que las señales discretas y los coeficientes de los compensadores digitales estaban expresadas con infinita precisión. Sin embargo, en una realización práctica tanto los dispositivos de conversión analógica/digital y digital/analógica, así como los dispositivos de memoria y las operaciones matemáticas se realizan con longitud de palabra finita. El efecto puede ser asociado a la inyección de un *ruido de cuantización*, cuyas características dependerán del tipo de operación de cuantización elegido. Por otra parte, los efectos de palabra finita en la implementación de los compensadores digitales pueden alterar la ubicación efectiva de las singularidades del compensador, de forma tal que el filtro que finalmente se calcule en tiempo real difiera del cálculo teórico. En esta sección se analizarán criterios para minimizar tal diferencia.

### 15.2.1. Truncado y redondeo

Podemos ver un número real como un número binario de infinitos bits de precisión. Cuando este número es expresado en un número  $n$  (finito) de bits, necesariamente debe tomarse la decisión de qué hacer con los bits que se descartan. Claramente (al igual que en los números decimales) las posibles elecciones son dos: o se desprecian los bits menos significativos (truncado), o se *redondea* el resultado al entero de  $n$  bits más cercano. En lo que sigue supondremos que trabajamos con números menores a uno en complemento a dos, tal como se indica en la figura 15.4. Este formato se adopta para evitar la aparición de "overflow", esto es, desborde sobre el bit de signo. El "overflow" debe ser evitado a toda costa en un compensador digital, porque su aparición supone una rotación de  $180^\circ$ , que puede tener severas consecuencias en lo referente a la estabilidad de lazo cerrado.



**Figura 15.4:** Interpretación de una palabra de 8 bits como un número en punto fijo menor a uno.



**Figura 15.5:** Truncado. Arriba: Señal continua y señal truncada. Abajo: Ruido de truncado

### 15.2.2. Truncado

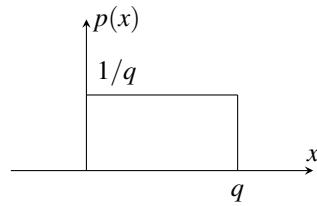
En el caso del truncado, cuando el número se lleva a  $n$  bits simplemente se desprecian los bits menos significativos. Si el bit menos significativo es de magnitud  $q$ , la situación es como se ilustra en la figura 15.5. El número truncado es siempre menor que el número real, y sólo coinciden en el caso en que éste pueda ser expresado en  $n$  bits. En la figura puede verse la diferencia entre la señal real y la truncada, y puede advertirse que es un diente de sierra de magnitud  $q$ . Así que podríamos modelar el proceso de truncado como la adición, a la señal original, de un "ruido de truncado". Si hacemos la simplificación de que todos los valores de este ruido son equiprobables, podemos inferir la función de probabilidades del ruido de truncado como se aprecia en la figura 15.6. La probabilidad está uniformemente distribuida entre 0 y  $q$ , y por lo tanto debe tener un valor de  $\frac{1}{q}$  para que el área valga uno. La media y la varianza serán entonces:

$$m = \int_0^q x_q \frac{1}{q} dx_q = \frac{x_q^2}{2} \frac{1}{q} \Big|_0^q = \frac{q^2}{2} \frac{1}{q} = \frac{q}{2} \tag{15.11}$$

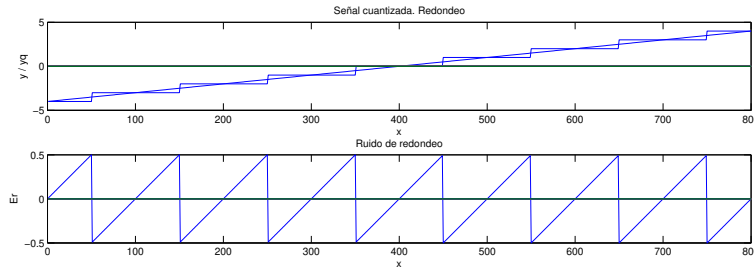
$$\sigma^2 = \int_0^q (x_q - \frac{q}{2})^2 \frac{1}{q} dx_q = \int_{-\frac{q}{2}}^{\frac{q}{2}} r^2 \frac{1}{q} dr = \frac{r^3}{3} \frac{1}{q} \Big|_{-\frac{q}{2}}^{\frac{q}{2}} = \frac{q^2}{12} \tag{15.12}$$

### 15.2.3. Redondeo

El redondeo en números binarios es exactamente igual a cuando se redondean decimales. En el caso binario, si el bit mas significativo de la porción que quiere redondearse es 1 (indicando que lo que se quiere despreciar es superior a la mitad del bit menos significativo que pretende



**Figura 15.6:** Truncado. Función de distribución de probabilidades.

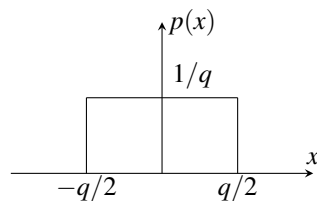


**Figura 15.7:** Truncado. Arriba: Señal continua y señal redondeada. Abajo: Ruido de redondeo

conservarse, entonces ese bit se incrementa en uno. Por el contrario, si el bit mas significativo de la porción que quiere despreciarse es 0, significa que lo que se quiere despreciar es inferior a la mitad del bit menos significativo, y por lo tanto no se altera. La decisión se toma, por lo tanto, en la mitad del bit menos significativo, y por lo tanto el valor medio del ruido de redondeo es nulo. En la figura 15.7 puede apreciarse este hecho. El ruido es de igual magnitud absoluta que en el caso de redondeo, pero con media cero. Nuevamente, considerando el ruido equiprobable, esto es, con distribución plana entre  $-\frac{1}{q}$  y  $\frac{1}{q}$ , el valor medio y la varianza resultan (figura 15.8):

$$m = \int_{-\frac{1}{q}}^{\frac{1}{q}} x_q \frac{1}{q} dx_q = \frac{x_q^2}{2} \frac{1}{q} \Big|_{-\frac{1}{q}}^{\frac{1}{q}} = 0 \tag{15.13}$$

$$\sigma^2 = \int_{-\frac{1}{q}}^{\frac{1}{q}} (x_q)^2 \frac{1}{q} dx_q = \frac{x_q^3}{3} \frac{1}{q} \Big|_{-\frac{1}{q}}^{\frac{1}{q}} = \frac{q^2}{12} \tag{15.14}$$



**Figura 15.8:** Redondeo. Función de distribución de probabilidades.

### 15.3. Puntos de suma de error de cuantización

Los errores de cuantización pueden aparecer en diversos lugares del lazo:

- Al muestrear el error, aparece un ruido de cuantización, generalmente de truncado, debido a la operación del Conversor Análogo-digital. Obsérvese que en este caso el ruido de cuantización ingresa en el mismo punto que el error, de forma tal que es imposible rechazarlo.
- En cada una de las operaciones de multiplicación. Al multiplicar dos números de  $n$  bits, el resultado quedará en doble precisión ( $2n$  bits). Por lo tanto, debe truncarse o redondearse el resultado luego de cada multiplicación. En muchas arquitecturas el acumulador de salida de la Unidad Aritmético Lógica (ALU) es de múltiple precisión, de forma tal de reducir la necesidad de cuantizar en cada multiplicación. Aún así (tarde o temprano), la operación de truncado o redondeo es inevitable.
- Al almacenar los coeficientes del compensador, los mismos deben ser cuantizados, por lo que serán diferentes de los valores calculados. Por lo tanto, los polos y ceros del compensador diferirán de los calculados teóricamente.
- Al realizar la conversión digital-analógica, si el conversor no es de igual precisión que el resultado final del programa de control. Este ruido aparece a la salida del conversor, por lo que es posible rechazarlo en alguna medida.

### 15.4. Sensibilidad frente a la cuantización de coeficientes

Al cuantizar los coeficientes del compensador en los polinomios numerador y denominador, la ubicación de las correspondientes raíces diferirá de los calculados en el diseño. Es interesante hacer un estudio de sensibilidad en la ubicación de estas raíces (polos y ceros) a fin de inferir estrategias de implementación. Supongamos que tenemos un polinomio de la forma

$$f(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k \quad (15.15)$$

Factorizando este polinomio a partir de sus raíces  $\lambda_i$  se obtiene

$$f(z) = K \prod_{i=1}^n (z - \lambda_i) \quad (15.16)$$

donde se evidencia que  $f(\lambda_i) = 0$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Cuando se aplica una perturbación  $\Delta a_k$  al coeficiente  $a_k$ , la ecuación 15.15 se transforma en

$$\hat{f}(z) = f(z) + \Delta a_k z^k \quad (15.17)$$

Todas las raíces de este polinomio diferirán de las de 15.15. En particular, la raíz  $\lambda_i$  pasará a ser  $\lambda_i + \Delta\lambda_i$ , donde el término  $\Delta\lambda_i$  puede ser real o complejo. La nueva expresión resulta

$$\hat{f}(\lambda_i + \Delta\lambda_i) = f(\lambda_i + \Delta\lambda_i) + \Delta a_k (\lambda_i + \Delta\lambda_i)^k = 0 \quad (15.18)$$

Podemos simplificar un poco esta última ecuación desarrollando el término  $f(\lambda_i + \Delta\lambda_i)$  alrededor de  $f(\lambda_i)$ , despreciando los términos de orden superior, lo que puede hacerse si suponemos que  $\Delta a_k$  y  $\Delta\lambda_i$  son suficientemente pequeños. En ese caso tenemos

$$f(\lambda_i + \Delta\lambda_i) = f(\lambda_i) - \left. \frac{\partial f(z)}{\partial z} \right|_{z=\lambda_i} \Delta\lambda_i + \text{t.o.s} \quad (15.19)$$

donde  $f(\lambda_i) = 0$  ya que  $\lambda_i$  es una raíz del polinomio no perturbado. De la ecuación 15.16 puede apreciarse que al hacer la derivada por la regla de la cadena y evaluarla en  $\lambda_i$ , todos los términos se anulan excepto aquel correspondiente al término  $(z - \lambda_i)$ , resultando

$$\left. \frac{\partial f(z)}{\partial z} \right|_{z=\lambda_i} = \prod_{i \neq j}^n (\lambda_i - \lambda_j) \quad (15.20)$$

con lo que la ecuación 15.18 resulta

$$-\prod_{i \neq j}^n (\lambda_i - \lambda_j) \Delta\lambda_i + \Delta a_k \lambda_i^k = 0 \quad (15.21)$$

o equivalentemente

$$\prod_{i \neq j}^n (\lambda_i - \lambda_j) \Delta\lambda_i = \Delta a_k \lambda_i^k \quad (15.22)$$

A fin de obtener una expresión normalizada de la sensibilidad, dividiremos a ambos lados de la igualdad por el término  $\lambda_i a_k$ . De esta forma resulta:

$$\frac{\Delta\lambda_i}{\lambda_i} = \left( \frac{\lambda_i^{k-1} a^k}{\prod_{i \neq j}^n (\lambda_i - \lambda_j)} \right) \frac{\Delta a_k}{a_k} \quad (15.23)$$

Por lo tanto, la expresión de la sensibilidad resulta

$$S_{a_k}^{\lambda_i} = \frac{\lambda_i^{k-1} a^k}{\prod_{i \neq j}^n (\lambda_i - \lambda_j)} \quad (15.24)$$

Esta expresión permite dar algunas reglas generales de implementación. Supongamos que  $f(z)$  es el polinomio denominador de la función de transferencia. Sus raíces son, por lo tanto, los polos del sistema. Si esta transferencia es estable dichos polos estarán en el interior del círculo unitario. Entonces, la diferencia  $\lambda_i - \lambda_j$  puede ser, a lo sumo, igual a dos. Pero si los polos tienen igual signo, su diferencia será siempre inferior a uno. En el caso mas desfavorable, si existen muchos polos ( $n$  grande) de igual signo, el denominador puede hacerse muy chico (es el producto de muchos números menores a uno), y la sensibilidad será entonces muy grande. Para que la sensibilidad sea lo mas pequeña posible, entonces, pueden seguirse las siguientes dos recomendaciones:

- Implementar las funciones de transferencia de orden elevado como estructuras en serie o paralelo de secciones de primer orden (polos simples) o de segundo orden (polos complejos conjugados). Esto es, reducir el valor de  $n$  en la expresión de la sensibilidad.
- En cada sección, agrupar las singularidades de forma que se encuentren lo más separadas que sea posible entre sí, es decir, hacer que la diferencia  $\lambda_i - \lambda_j$  sea lo mas grande posible.

## Referencias

- [1] J. Dorsey, "Continuous and Discrete Control Systems: Modeling, Identification, Design, and Implementation". McGraw-Hill Series in Electrical and Computer Engineering. Prentice-Hall, New York, NY, 2002.
- [2] C. L. Phillips and H. T. Nagle, "Digital Control System Analysis and Design". Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, third edition, 1998. International Edition.
- [3] J.R. Ragazzini, G.F Franklin, "Sampled-Data Control Systems". McGraw-Hill, 1958

# CAPÍTULO 16

## Identificación de sistemas lineales

### Introducción

En este capítulo se expondrán nociones generales sobre la Identificación de Sistemas Lineales. En primer lugar, se repasarán algunos conceptos importantes y se definirá la nomenclatura a utilizar, que será algo diferente a la empleada en el resto del libro. Seguidamente, se abordarán técnicas de identificación no paramétrica, en las que el objetivo es recuperar, a partir de un ensayo de la planta desconocida, la respuesta impulsiva del sistema, o su correspondiente transformada de Fourier. Luego se analizarán técnicas de identificación paramétrica, en las que se supondrá una forma específica de modelo tanto para la señal como para el ruido, y se ajustarán sus parámetros para minimizar una figura de mérito. Finalmente, se discutirá el diseño de la excitación y las características del ensayo, a fin de relevar la mayor información posible del sistema en la forma más conveniente. El enfoque de la clase es eminentemente práctico, y está orientado a la utilización del *toolbox* de identificación de Matlab.

### 16.1. Conceptos preliminares

#### 16.1.1. Convolución

Hemos visto en capítulos anteriores que la respuesta de un sistema causal SISO-LIT puede obtenerse a partir de la integral de convolución:

$$y(t) = \int_0^{\infty} g(\tau)x(t - \tau)d\tau \quad (16.1)$$



donde  $x(t)$  e  $y(t)$  son las señales de entrada y salida del sistema, respectivamente, y  $g(\tau)$  es su respuesta impulsiva, que describe completamente sus propiedades. En el contexto de la identificación de sistemas trabajaremos a partir de un ensayo experimental, con muestras de las señales de entrada y salida. Al trabajar con muestras, en lugar de la integral de convolución utilizaremos su equivalente discreto, esto es, la convolución discreta:

$$y(kT) = \sum_{j=0}^{\infty} g(jT)x((k-j)T) \quad (16.2)$$

$g(t)$  y  $g(jT)$  son, en general, diferentes. A modo de ejemplo, supongamos tener el siguiente sistema continuo:

$$G(s) = 10 \frac{1}{(s+10)} \quad (16.3)$$

Esta expresión se corresponde con la siguiente ecuación diferencial:

$$\dot{y} = x - 0.1y \quad (16.4)$$

Supongamos que queremos hallar una aproximación discreta de esta expresión a partir de las muestras de  $x$  e  $y$ . Para ello, remplacemos la derivada continua por su aproximación discreta utilizando la regla de Euler,  $\dot{y} \approx \frac{y_k - y_{k-1}}{T}$ , donde  $T$  denota el período de muestreo y el subíndice  $k$  identifica la muestra en el instante  $kT$ . De esta forma tenemos

$$y_k \approx x_k - 0.1 \left( \frac{y_k - y_{k-1}}{T} \right) \quad (16.5)$$

$$y_k \left( 1 + \frac{0.1}{T} \right) \approx x_k + \frac{0.1}{T} y_{k-1} \quad (16.6)$$

$$y_k \approx \frac{T}{T+0.1} x_k + \frac{0.1}{T+0.1} y_{k-1} = ax_k + by_{k-1} \quad (16.7)$$

A esta última expresión se la denomina ecuación recursiva, y expresa la salida actual en función de las muestras actuales y pasadas de entradas y salidas. Como regla general, si en la ecuación diferencial está presente la derivada n-ésima, en la ecuación recursiva aparecerá la muestra correspondiente n períodos de muestreo en el pasado. Los coeficientes de la ecuación recursiva dependen de la ecuación diferencial que le dio origen, pero también del período de muestreo  $T$ . Si ahora remplazamos  $y_{k-1}$  por su correspondiente ecuación recursiva,

$$y_{k-1} \approx ax_{k-1} + by_{k-2} \quad (16.8)$$

la reemplazamos en la ec 16.7 y así sucesivamente, llegamos a la expresión 16.1 de la convolución discreta.

Aunque en general el número de términos de la respuesta impulsiva es infinito, si el sistema es estable la misma se atenúa en el tiempo, de modo tal que luego de un número finito de muestras, sus valores son despreciables. En términos prácticos, por lo tanto, los límites de la sumatoria son finitos. Supongamos que la respuesta se extingue luego de los primeros  $M$  términos. Tenemos entonces

$$y(kT) = \sum_{j=0}^M g(jT)x((k-j)T) \quad (16.9)$$

$$= g(0)x(kT) + g(1)x((k-1)T) + \dots + g(N)x((k-N)T) \quad (16.10)$$

Definamos el operador retardo  $q^{-r}$  de la siguiente forma

$$f((k-N)T) = q^{-N}f(kT) \quad (16.11)$$

esto es,  $q^{-1}$  “retrasa” la señal un período de muestreo. Si bien hemos definido este operador como  $z$  en capítulos anteriores, mantendremos la notación  $q$  para utilizar la misma convención que en los libros clásicos de identificación. Si aplicamos este operador en la ecuación 16.10 podemos escribir

$$y(kT) = g(0)x(kT) + g(1)q^{-1}x(kT) + g(2)q^{-2}x(kT) + \dots + g^N q^{-N}x(kT) \quad (16.12)$$

$$= G(q)x(kT) \quad (16.13)$$

y a  $G(q) = g(0) + g(1)q^{-1} + g(2)q^{-2} + \dots + g(N)q^{-N}$  se lo denomina función de transferencia del sistema. A fin de ser consistentes con la literatura disponible (a riesgo de ser algo confusos con la notación habitualmente utilizada en control) definamos el tiempo discreto  $t = kT$ , con lo que esta última ecuación resulta  $y(t) = g(q)x(t)$ .

La ecuación 16.2 induce a pensar que, conociendo  $x(t)$  e  $y(t)$  es posible despejar el valor de  $g(t)$  en forma mas o menos directa. Sin embargo, la presencia de ruido en las mediciones hace que, en general, estos métodos directos de identificación no sean aplicables en la práctica. Si consideramos que el ruido es de naturaleza aleatoria y no puede ser medido directamente, será necesario utilizar otras herramientas a fin de desafectar su influencia en el proceso de identificación. Para ello, debemos repasar algunos conceptos importantes.

### 16.1.2. Correlación o Autocorrelación

Recordemos que la *función de correlación*  $r_{uu}(\tau, t)$  de una señal  $u(t)$  se define como

$$r_{uu}(\tau, t) = E [u(t)u(t + \tau)] \quad (16.14)$$

donde  $\tau$  es el retardo. El operador  $E[.]$  es la *esperanza*, o en otras palabras, el valor medio:

$$r_{uu}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(t)u(t + \tau)dt \quad (16.15)$$

Obsérvese que ésta es una función de  $\tau$  y no de  $t$ , lo que le otorga a la correlación la propiedad de invariancia en el tiempo o estacionalidad. La correlación está midiendo la similitud entre una señal y una versión desplazada de la misma, y será máxima cuando  $\tau \equiv 0$ , en cuyo caso coincidirá con el valor cuadrático medio. La integral está aplicada entre los límites  $[-T, T]$  con  $T \rightarrow \infty$ , lo que implica que los transitorios temporales son excluidos. La contraparte discreta de esta expresión será

$$r_{uu}(l) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N + 1} \sum_{i=-N}^N u(i)u(i+l) \quad (16.16)$$

Nótese que para una secuencia finita  $u(t)$  con  $N$  elementos, la autocorrelación puede calcularse como

$$r_{uu}(l) = E [u(i)u(i+l)^T] \quad (16.17)$$

donde  $u(i)$  es la subsecuencia desde  $-N$  hasta  $N - l$ , y  $u(i+l)$  es la subsecuencia entre  $-N+l$  y  $N$ . La correlación es una función par ( $r_{uu}(l) = r_{uu}(-l)$ ).

### 16.1.3. Secuencia de ruido blanco

Es importante analizar en este momento las denominadas *secuencias de ruido blanco*. Llamaremos así a una secuencia con media nula, varianza finita y términos serialmente no correlacionados. En términos formales entonces una secuencia de ruido blanco  $w(t)$  posee las siguientes propiedades:

$$E [w(t)] = 0 \quad (16.18)$$

$$E [w(t)w^T(t+l)] = \begin{cases} Q & l = 0 \\ 0 & l \neq 0 \end{cases} \quad (16.19)$$

### 16.1.4. Correlación cruzada

La correlación puede definirse asimismo entre dos señales diferentes. En este caso tenemos

$$r_{uy}(\tau, t) := E[u(t)y(t + \tau)] \quad (16.20)$$

$$r_{uy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(t)y(t + \tau) dt \quad (16.21)$$

$$r_{uy}(l) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N + 1} \sum_{i=-N}^N u(i)y(i+l) \quad (16.22)$$

Es importante destacar aquí la similitud entre correlación y convolución. Efectivamente, es fácil ver que las operaciones involucradas son, esencialmente, las mismas. La similitud será explotada en la ecuación de Wiener-Hopf, que resulta clave en identificación no paramétrica.

## 16.2. La ecuación de Wiener-Hopf

Por la definición de convolución discreta (ecuación 16.2) tenemos que

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k)u(t-k) \quad (16.23)$$

Es evidente que

$$y(i+l) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k)u(i+l-k) \quad (16.24)$$

Utilizando esta última expresión, la correlación cruzada entre las secuencias  $u$  e  $y$  será

$$r_{uy}(l) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N + 1} \sum_{-N}^N u(i) \sum_{k=0}^{\infty} g(k)u(i+l-k) \quad (16.25)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} g(k) \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N + 1} \sum_{-N}^N u(i)u(i+l-k) \quad (16.26)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} g(k)r_{uu}(l-k) \quad (16.27)$$

A esta última expresión se la llama ecuación de Wiener-Hopf. Nótese la similitud con la ecuación 16.2, donde  $r_{uy}(\cdot)$  reemplaza a  $y(t)$  y  $r_{uu}(\cdot)$  reemplaza a  $u(\cdot)$ . La ecuación de Wiener-Hopf puede utilizarse para la reconstrucción de  $g(t)$  a partir de los pares entrada-salida observados experimentalmente. En efecto, si el sistema es estable tenemos que

$$r_{uy}(l) = \sum_{k=0}^s g(k)r_{uu}(l-k) \quad (16.28)$$

Supongamos que realizamos un ensayo tomando  $N$  pares entrada salida. Luego de remover el transitorio (digamos  $M$  muestras) tenemos las siguientes secuencias

$$u(M), u(M+1), \dots, u(N) \quad (16.29)$$

$$y(M), y(M+1), \dots, y(N) \quad (16.30)$$

Las funciones de correlación pueden calcularse, aproximadamente, como

$$r_{uu}(l) \cong \frac{1}{N-M+1-l} \sum_{i=M}^{N-l} u(i)u(i+l) \quad (16.31)$$

$$r_{uy}(l) \cong \frac{1}{N-M+1-l} \sum_{i=M}^{N-l} u(i)y(i+l) \quad (16.32)$$

Substituyendo estos valores en la ecuación de Wiener-Hopf llegamos a las siguientes  $s+1$  ecuaciones ( $l = 0, 1, \dots, s$ )

$$\begin{aligned} r_{uy}(0) &= g(0)r_{uu}(0) + g(1)r_{uu}(-1) + g(2)r_{uu}(-2) + \dots + g(s)r_{uu}(-s) \\ r_{uy}(1) &= g(0)r_{uu}(1) + g(1)r_{uu}(0) + g(2)r_{uu}(-1) + \dots + g(s)r_{uu}(1-s) \\ r_{uy}(2) &= g(0)r_{uu}(2) + g(1)r_{uu}(1) + g(2)r_{uu}(0) + \dots + g(s)r_{uu}(2-s) \\ &\vdots \\ r_{uy}(s) &= g(0)r_{uu}(s) + g(1)r_{uu}(s-1) + g(2)r_{uu}(s-2) + \dots + g(s)r_{uu}(0) \end{aligned} \quad (16.33)$$

que puede re-escribirse en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} r_{uy}(0) \\ r_{uy}(1) \\ r_{uy}(2) \\ \vdots \\ r_{uy}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{uu}(0) & r_{uu}(-1) & r_{uu}(-2) & \dots & r_{uu}(s) \\ r_{uu}(1) & r_{uu}(0) & r_{uu}(-1) & \dots & r_{uu}(1-s) \\ r_{uu}(2) & r_{uu}(1) & r_{uu}(0) & \dots & r_{uu}(2-s) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{uu}(s) & r_{uu}(s-1) & r_{uu}(s-2) & \dots & r_{uu}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(0) \\ g(1) \\ g(2) \\ \vdots \\ g(s) \end{bmatrix} \quad (16.34)$$

Por lo tanto, la respuesta impulsiva puede obtenerse mediante la inversión de una matriz, recordando que  $r_{uu}(-l) = r_{uu}(l)$  y, por lo tanto, la matriz de autocorrelación es simétrica.

$$g = R_{uu}^{-1} r_{uy} \quad (16.35)$$

En particular, si  $u(t)$  es un impulso  $r_{uu}(0) = 1$  y  $r_{uu}(k) = 0 \forall k \neq 0$ , y la matriz resulta diagonal, con lo que el cálculo se simplifica notablemente. Otra señal que posee la misma cualidad es una secuencia de ruido blanco. Utilizar ruido blanco como entrada, sin embargo, tiene algunos

inconvenientes. Por ejemplo, pueden aparecer señales de amplitud muy grande, lo que resulta impráctico desde muchos puntos de vista. Además, una señal verdaderamente aleatoria es imposible de generar en la práctica. Una alternativa práctica es una secuencia binaria suficientemente larga como para exhibir las adecuadas características en su correlación. Por ejemplo, pueden utilizarse secuencias del tipo

$$u(t) = u(t - 1) * \text{sign}(w(t) - p_0) \quad (16.36)$$

donde  $w(t)$  es ruido blanco, y  $0 \leq p_0 \leq 1$  es la probabilidad de conmutación. Veremos esto en detalle mas adelante.

En este punto surge naturalmente una pregunta: ¿Cuál es la ventaja de utilizar la ecuación de Wiener-Hopf en lugar de la expresión original de convolución discreta? La respuesta está en su comportamiento frente al ruido. En efecto, si la medida de la salida es ruidosa, las muestras observadas pueden escribirse como los valores reales mas un término de ruido

$$y(t) = \bar{y}(t) + v(t) \quad (16.37)$$

Al calcular la correlación cruzada tenemos

$$r_{uy}(l) \cong \frac{1}{N - M + 1 - l} \sum_{i=M}^{N-l} u(i) [\bar{y}(i+l) + v(t)] \quad (16.38)$$

$$\cong r_{u\bar{y}}(l) + r_{uv}(l) \quad (16.39)$$

de forma tal que, en la medida en que  $v$  esté no correlacionado con  $u$  y tenga media nula, el segundo término tiende a anularse, y el efecto del ruido es filtrado.

### 16.3. Análisis espectral

Utilizando la transformada discreta de Fourier, definiremos ahora el espectro y el espectro cruzado de potencia como

$$\Phi_{uu}(\omega) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} r_{uu}(l) e^{-j\omega l} \quad (16.40)$$

$$\Phi_{uy}(\omega) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} r_{uy}(l) e^{-j\omega l} \quad (16.41)$$

Ya que, como vimos, la función de autocorrelación es siempre una función par, su transformada de Fourier sólo contiene los términos coseno, con lo que  $\Phi_{uu}(\omega)$  es siempre real. Por el contrario,

$\Phi_{uy}(\omega)$  es, en general, una función compleja de  $\omega$ , con parte real e imaginaria o, lo que es lo mismo, módulo y fase.

Por ejemplo, si tenemos ruido blanco sabemos que

$$r_{ww}(0) = E[w(t)w(t)] = \sigma_w^2 \quad (16.42)$$

$$r_{ww}(l-k) = 0 \quad l \neq k \quad (16.43)$$

$$\Rightarrow \Phi_{ww}(\omega) = \sigma_w^2 \quad (16.44)$$

lo que equivale a un espectro plano en frecuencia. Esto no es sintetizable en la práctica.

Encontremos ahora la relación entre  $\Phi_{uu}(\omega)$  y  $\Phi_{uy}(\omega)$ . Partiremos de la expresión de  $\Phi_{uy}(\omega)$ :

$$\Phi_{uy}(\omega) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} r_{uy}(l)e^{-j\omega l} \quad (16.45)$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} g(k)r_{uu}(l-k)e^{-j\omega l} \quad (16.46)$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} g(k)e^{-j\omega k}r_{uu}(l-k)e^{-j\omega(l-k)} \quad (16.47)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} g(k)e^{-j\omega k} \sum_{l=-\infty}^{\infty} r_{uu}(l-k)e^{-j\omega(l-k)} \quad (16.48)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} g(k)e^{-j\omega k} \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} r_{uu}(\lambda)e^{-j\omega\lambda} \quad (16.49)$$

$$= G(e^{j\omega})\Phi_{uu}(\omega) \quad (16.50)$$

A partir de esta última expresión, podemos estimar  $G(e^{j\omega})$  simplemente haciendo:

$$\hat{G}(e^{j\omega}) = \frac{\Phi_{uy}(\omega)}{\Phi_{uu}(\omega)} \quad (16.51)$$

El análisis debe repetirse para cada frecuencia de interés.

## 16.4. Identificación paramétrica

Las técnicas analizadas en las secciones anteriores permiten obtener las muestras de la respuesta impulsiva, o el módulo y fase de la función de transferencia estimada del sistema. No proveen, sin embargo, una expresión racional de la función de transferencia, es decir, los valores de los coeficientes del modelo que genera la respuesta impulsiva. En esta sección, por el contrario, supondremos que existe un modelo matemático del sistema, y propondremos métodos para estimar sus parámetros.

### 16.4.1. Regresión Lineal y cuadrados mínimos

Los modelos utilizados en identificación paramétrica o identificación basada en modelos relacionan una variable observada  $y(t)$  con  $p$  variables explicativas, también denominadas *regresores*,  $\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_p(t)$ . La variable  $t$  puede ser interpretada como el tiempo, pero en realidad simplemente es un índice. Además, se supone que existe sólo un parámetro desconocido  $\vartheta_i$  por regresor. Cualquier relación lineal puede entonces ser modelada como

$$y(t) = \phi_1(t)\vartheta_1 + \dots + \phi_p(t)\vartheta_p + e(t) \quad (16.52)$$

donde  $e(t)$  es un error no observable.

Supongamos que tenemos  $N$  medidas de entradas y salidas ( $t = 1, \dots, N$ ) y definamos

$$y = [y(1), y(2), \dots, y(N)]^T \quad (16.53)$$

$$e = [e(1), e(2), \dots, e(N)]^T \quad (16.54)$$

$$\vartheta = [\vartheta_1, \dots, \vartheta_p]^T \quad (16.55)$$

los cuales son vectores columna de las dimensiones apropiadas. Sea  $\Phi$  una matriz de dimensión  $N \times p$  con elementos  $\Phi_{t,j} \equiv \phi_j(t)$ ,  $j = 1, \dots, p$ . Por lo tanto el modelo puede ser escrito en notación matricial como

$$y = \Phi\vartheta + e \quad (16.56)$$

Una forma razonable de estimar las incógnitas a partir de los datos medidos es proponer que el *error de predicción o residuo*

$$\varepsilon(t) = y(t) - \Phi\vartheta \quad (16.57)$$

sea lo menor posible. Esto implica elegir el vector  $\vartheta$  de forma tal de minimizar el funcional

$$J(\vartheta) \equiv \sum_{t=1}^N \varepsilon^2(t) = \sum_{t=1}^N (y(t) - \Phi\vartheta)^2 \quad (16.58)$$

o, en forma matricial

$$J(\vartheta) \equiv \varepsilon^T \varepsilon = (y^T - \vartheta^T \Phi^T)(y - \Phi\vartheta) \quad (16.59)$$

Al igual que en caso escalar,  $J$  será mínimo si y sólo si el gradiente de  $J$  respecto de  $\vartheta$  es nulo y la segunda derivada es positiva. Recordando las siguientes relaciones generales

$$\frac{\delta a^T \vartheta}{\delta \vartheta} = a \quad (16.60)$$

$$\frac{\delta \vartheta^T A \vartheta}{\delta \vartheta} = (A + A^T)\vartheta \quad (16.61)$$



podemos escribir

$$J(\vartheta) = y^T y - y^T \Phi \vartheta - \vartheta^T \Phi^T y + \vartheta^T \Phi^T \Phi \vartheta \quad (16.62)$$

$$= y^T y - 2\vartheta^T \Phi^T y + \vartheta^T \Phi^T \Phi \vartheta \quad (16.63)$$

con lo cual tenemos

$$\frac{\delta J(\vartheta)}{\delta \vartheta} = -2\Phi^T y + 2\Phi^T \Phi \vartheta \quad (16.64)$$

El gradiente de  $J$  será nulo si

$$\Phi^T \Phi \hat{\vartheta} = \Phi^T y \quad (16.65)$$

a las que se denomina *ecuaciones normales*. El vector de parámetros estimado por cuadrados mínimos será entonces

$$\hat{\vartheta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T y \quad (16.66)$$

suponiendo que la matriz de dimensiones  $p \times p$ ,  $(\Phi^T \Phi)$  sea invertible. A menudo ocurre que los errores de predicción no son igualmente confiables. Por ejemplo, podría ocurrir que los datos recientes sean mas confiables que los anteriores o viceversa. Podríamos incluir una matriz  $W$  que “pesara” en forma individual cada error de predicción. En ese caso el vector de parámetros se obtendría mediante la expresión

$$\hat{\vartheta}_W = (\Phi^T W \Phi)^{-1} \Phi^T W y \quad (16.67)$$

con  $W$  positiva definida.

## 16.4.2. Identificación de sistemas dinámicos. Clases de modelos

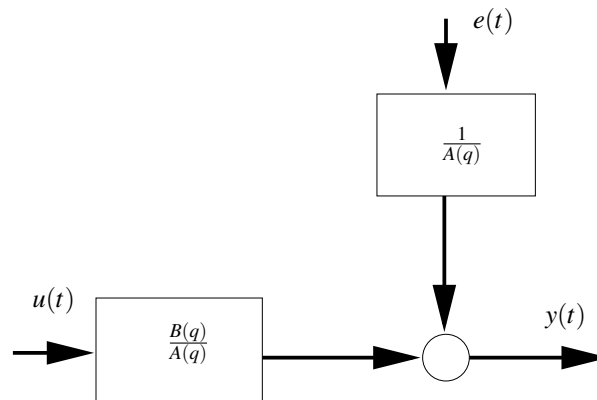
Todos los modelos que se plantearán a continuación son casos especiales de la siguiente expresión general:

$$A(q)y(t) = \frac{q^{-n_k} B(q)}{F(q)} u(t) + \frac{C(q)}{D(q)} e(t) \quad (16.68)$$

donde  $q^{-n_k}$  es un retardo puro y  $e(t)$  es ruido blanco. En aplicaciones prácticas, sin embargo, y para evitar sobreparametrizaciones, cuando  $A(q) \neq 1$  invariablemente  $F(q) = 1$  y viceversa. Analizaremos ahora algunos casos particulares frecuentes en la literatura.

### Estructura ARX

En este caso  $F(q)$ ,  $C(q)$  y  $D(q)$  valen 1. Entonces



**Figura 16.1:** Estructura ARX

$$A(q)y(t) = B(q)u(t) + e(t) \quad (16.69)$$

$$y(t) = \frac{B(q)}{A(q)}u(t) + \frac{1}{A(q)}e(t) \quad (16.70)$$

$$(16.71)$$

donde  $A(q)$  representa la parte *autorregresiva (AR)*, es decir, una combinación lineal de las salidas actuales y pasadas, y  $B(q)$  representa la parte *exógena (X)* (una combinación lineal de las entradas externas). El modelo de la planta es por lo tanto, un filtro IIR (respuesta al impulso infinita). En general, entonces, definiremos este modelo como  $ARX(n_a, n_b, n_k)$  donde  $n_k$  especifica el número de muestras de tiempo muerto o retardo. Un caso particular ocurre cuando  $n_a = 0$ , en cuyo caso el modelo de la planta es un filtro FIR (respuesta al impulso finita):

$$y(t) = B(q)u(t) + e(t) \quad (16.72)$$

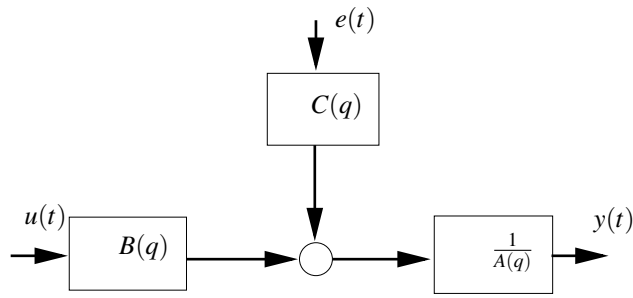
### Estructura ARMAX

Puede extenderse el resultado anterior incluyendo un término autorregresivo con respecto al error:

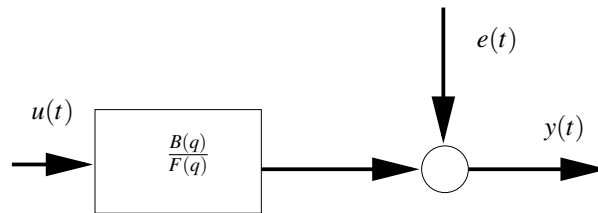
$$A(q)y(t) = B(q)u(t) + C(q)e(t) \quad (16.73)$$

$$y(t) = \frac{B(q)}{A(q)}u(t) + \frac{C(q)}{A(q)}e(t) \quad (16.74)$$

Este modelo incluye un término que es un promedio móvil del ruido blanco. Obsérvese que los modelos ARX y ARMAX tienen el denominador común  $A(q)$ , tanto para las entradas medidas como para el ruido, es decir que el ruido está afectado por el sistema.



**Figura 16.2:** Estructura ARMAX



**Figura 16.3:** Modelo de error de salida

**Estructura OE**

Si eliminamos esa característica y consideramos que el ruido es básicamente ruido blanco en la medición, tenemos el modelo de error de salida (*Output Error*):

$$y(t) = \frac{B(q)}{F(q)}u(t) + e(t) \tag{16.75}$$

**Estructura Box-Jenkins**

Esta estructura es una extensión natural del modelo OE, en el que se incluye una versión filtrada (ARMA) del ruido blanco:

$$y(t) = \frac{B(q)}{F(q)}u(t) + \frac{C(q)}{D(q)}e(t) \tag{16.76}$$

Debe recordarse que en la práctica los datos de entrada y salida son pre-filtrados a fin de eliminar offsets (restando el valor medio) y tendencias de baja frecuencia (mediante un filtro pasa altos), ya que los modelos que hemos presentado no tienen en cuenta efectos no-estacionarios.

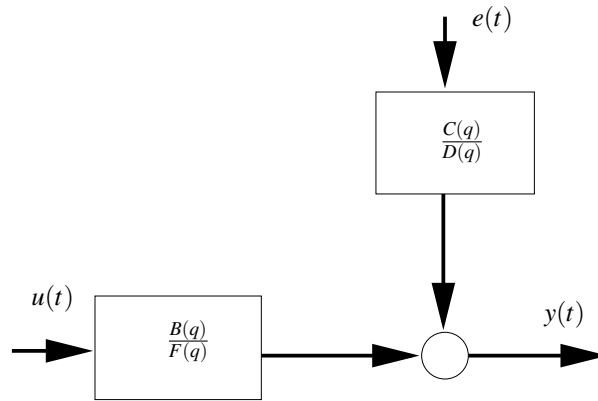


Figura 16.4: Estructura Box-Jenkins

## 16.5. Minimización del error de predicción

Dada una estructura para la función de transferencia del sistema y el efecto del ruido de medición, la estrategia de identificación es relativamente simple: para ciertos valores iniciales de los parámetros, se calcula la salida del modelo, y su diferencia con las salidas medidas. Luego se realiza un proceso de optimización por cuadrados mínimos de los parámetros libres para reducir este error. Para ello, se calcula el error cuadrático y se lo deriva respecto del vector de parámetros. Se iguala la derivada a cero y se despejan los valores de los parámetros.

### 16.5.1. ARX

La salida de un modelo ARX puede ser reescrita como una regresión lineal

$$y(t, \vartheta) = \Phi(t)^T \vartheta \tag{16.77}$$

donde

$$\Phi(t)^T = [-y(t-1), -y(t-2), \dots, -y(t-n_a), u(t-1), u(t-2), \dots, u(t-n_b)] \tag{16.78}$$

$$\vartheta = [a_1, a_2, \dots, a_{n_a}, b_1, b_2, \dots, b_{n_b}] \tag{16.79}$$

Supongamos tener los registros  $u(0), \dots, u(N), y(0), \dots, y(N)$  con  $N \gg (n_a, n_b)$ . En el caso en que  $n_a > n_b$  la matriz de regresores quedaría

$$\Phi = \begin{bmatrix} -y(n_a-1) & \dots & -y(0) & u(n_a-1) & \dots & u(n_a-n_b) \\ -y(n_a) & & -y(1) & u(n_a) & \dots & u(n_a-n_b+1) \\ -y(n_a+1) & & \vdots & & \vdots & \\ \vdots & & & & & \\ -y(N-1) & \dots & -y(N-n_a) & u(N-1) & \dots & u(N-n_b) \end{bmatrix} \tag{16.80}$$

En este caso, entonces, el vector de parámetros óptimo puede obtenerse aplicando directamente cuadrados mínimos.

### 16.5.2. ARMAX

Este caso es sensiblemente más complejo, porque por la estructura del modelo se requieren los valores de  $e(t-1), e(t-2), \dots, e(t-n_c)$ , que no están disponibles (por definición, no existe una medición directa del ruido). En este caso es habitual utilizar en su lugar el error de predicción,  $\varepsilon(t-1, \vartheta), \varepsilon(t-2, \vartheta), \dots, \varepsilon(t-n_c, \vartheta)$  donde  $\varepsilon(t, \vartheta) = y(t) - \hat{y}(t, \vartheta)$  y  $\vartheta = [a_1, \dots, a_{n_a}, b_1, \dots, b_{n_b}, c_1, \dots, c_{n_c}]^T$ . Sin embargo, los valores de  $\varepsilon$  dependen de  $\vartheta$ , con lo cual la regresión ya no es lineal. En efecto, si definimos

$$\begin{aligned} \Phi(t, \vartheta)^T = & [-y(t-1), -y(t-2), \dots, -y(t-n_a), \\ & u(t-1), u(t-2), \dots, u(t-n_b), \\ & \varepsilon(t-1, \vartheta), \varepsilon(t-2, \vartheta), \dots, \varepsilon(t-n_c, \vartheta)] \end{aligned}$$

podemos escribir

$$\hat{y}(t, \vartheta) = \Phi(t, \vartheta)^T \vartheta \quad (16.81)$$

que a menudo es denominada *regresión pseudo-lineal*, ya que la relación con el vector de parámetros es no lineal. Claramente, no existen métodos directos y hay que recaer en métodos iterativos. Usualmente, la primera iteración se realiza como en el caso ARX, y luego se itera hasta que el procedimiento converge o se cumple el número máximo de iteraciones. Un procedimiento similar debe hacerse para resolver modelos OE y Box-Jenkins.

## 16.6. Diseño de la excitación

Un aspecto clave para garantizar el éxito del procedimiento de identificación es el correcto diseño de la señal de excitación. La secuencia binaria pseudo aleatoria (PRBS) debe cumplir ciertas características para asegurar que todos los modos de oscilación del sistema sean excitados. La amplitud, duración y probabilidad de cambio de la PRBS deben definirse en función de la dinámica del sistema a identificar. Esto puede resultar paradójico: ¿para identificar el modelo debo conocer el sistema?. En efecto, debe tenerse una idea aproximada de las constantes de tiempo más lentas y más rápidas del sistema a fin de asegurarse que la PRBS será efectiva. Esto a menudo proviene de conocimiento previo del sistema, aunque puede requerir adicionalmente de un ensayo preliminar.

Los parámetros a definir en el diseño de la secuencia pseudo aleatoria son:

- Ancho del pulso mas corto ( $T_c$ ). Este parámetro está directamente relacionado con la constante de tiempo mas rápida que se pretende identificar. La PRBS debe ser diseñada para que posea una densidad espectral de potencia con suficiente energía en alta frecuencia (modos no dominantes). Si la constante de tiempo mas rápida del sistema es  $\tau_m$ , un valor posible podría ser, por ejemplo,  $T_c = \frac{\tau_m}{2}$ .  $T_c$  es el reloj de la secuencia.
- Duración del ensayo ( $T_t$ ). Éste está determinado por  $\tau_M$ , la constante de tiempo mas lenta que se pretende identificar, y a su vez determina el número total de eventos de la secuencia  $n_s$ , de forma tal que  $T_t = n_s T_c$ . Un criterio válido podría ser  $T_t \approx 3\tau_M$ . El valor de  $\tau_M$  puede ser establecido, por ejemplo, a partir de la respuesta al escalón del sistema.
- Probabilidad de cambio ( $p$ ). Si  $p$  tiende a uno, la secuencia conmutará cada  $T_c$  unidades de tiempo, lo cual concentrará su densidad de potencia en las frecuencias altas. Del mismo modo, si  $p$  tiende a cero, los cambios serán poco frecuentes, con lo cual tendremos una señal de baja frecuencia que excitará sólo a los polos dominantes. Una probabilidad  $p = 0.5$  establece un equilibrio en el espectro de la excitación.
- Amplitud del pulso ( $\Delta P$ ). Esto está determinado por la zona de trabajo que se pretende identificar. Debe tenerse en cuenta que el comportamiento del sistema debe ser aproximadamente lineal, con lo cual la amplitud no puede ser arbitrariamente grande.

## 16.7. Pasos del proceso de identificación

- Diseñar el experimento y coleccionar datos de entrada y salida del proceso a identificar
- Examinar los datos. Eliminar "offsets" (valores de continúa), "trends" (derivadas de baja frecuencia) y "outliers" (valores impulsivos que resulten evidentemente erróneos); seleccionar porciones útiles de los datos y eventualmente aplicar filtros para resaltar los rangos de frecuencia importantes.
- Seleccionar una estructura del modelo, a partir del conocimiento del tipo de ruido presente.
- Calcular el mejor modelo para la estructura seleccionada de acuerdo a los datos y al criterio de optimización
- Examinar las propiedades del modelo obtenido. Si la aproximación no es buena intentar otras estructuras o diferentes métodos de estimación.

En general, el conocimiento "a priori" del sistema nunca es nulo, y a menudo guía el proceso de identificación. Esta información previa es a menudo útil a la hora de estimar el orden del modelo. En efecto, un modelo de orden demasiado bajo será incapaz de reflejar la dinámica

del sistema adecuadamente. Pero un modelo de orden excesivamente alto puede dar lugar a cancelaciones (o cuasi cancelaciones) entre polos y ceros, o resultar en un modelo que intenta identificar la dinámica del ruido, fenómeno conocido como "sobreparametrización". Muchos de estos problemas pueden solucionarse simplemente observando la respuesta al escalón de la planta a identificar y estimando la dinámica dominante. Como consecuencia, el modelo final de un sistema físico suele ser una combinación de modelado e identificación. La dinámica de baja frecuencia es a menudo reconocible fácilmente, mientras que la de alta frecuencia recae en procedimientos iterativos. La experiencia es invaluable.

## Referencias

- [1] J. Dorsey, "Continuous and Discrete Control Systems: Modeling, Identification, Design, and Implementation". McGraw-Hill Series in Electrical and Computer Engineering. Prentice-Hall, New York, NY, 2002.
- [2] C. L. Phillips and H. T. Nagle, "Digital Control System Analysis and Design". Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, third edition, 1998. International Edition.
- [3] J.R. Ragazzini, G.F Franklin, "Sampled-Data Control Systems". McGraw-Hill, 1958
- [4] L. Ljung, "System Identification: Theory for the User". Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, fourth edition, 1999.
- [5] A. K. Tangirala, "Principles of System Identification: Theory and Practice". CRC Press, 2014.
- [6] Deba, Anisa, Roychoudhury, Srimanti, "Control system analysis and identification with MATLAB ". CRC Press, 2019.

# El autor

## **Mayosky, Miguel Angel**

Es Ingeniero en Telecomunicaciones (UNLP 1983), y Doctor en Informática por la Universidad Autónoma de Barcelona (UAB, 1990). Es Profesor Titular (categoría I) de la UNLP e Investigador Superior de la Comisión de Investigaciones Científicas de la provincia de Buenos Aires (CICp-BA). Ha trabajado en importantes centros de investigación, entre los que merecen destacarse la Organización Europea para la Investigación Nuclear (CERN, Ginebra, Suiza) y el Fermi National Accelerator Laboratory (Fermilab, Batavia, Illinois, USA). Es autor de libros, artículos en revistas internacionales con referato y congresos nacionales e internacionales. Ha dirigido becarios, tesis, investigadores formados y proyectos de Investigación y Desarrollo. Ha sido Director de la Escuela de Posgrado de la Facultad de ingeniería UNLP y Director del Instituto de Investigaciones en Electrónica, Control y Procesamiento de Señales (LEICI UNLP-Conicet). Recibió el Premio Labor Científica, Tecnológica y Artística de la UNLP, en la Categoría Investigador Formado, en 2013. Su líneas de investigación abarcan el procesamiento analógico y digital de señales aplicadas al control automático y la Instrumentación Electrónica.



Mayosky, Miguel Angel

Control de sistemas SISO-LIT / Miguel Angel Mayosky. - 1a ed. - La Plata : Universidad Nacional de La Plata ; EDULP, 2022.

Libro digital, PDF/A - (Libros de cátedra)

Archivo Digital: descarga

ISBN 978-950-34-2100-0

1. Ingeniería Electrónica. I. Título.

CDD 621.38

Diseño de tapa: Dirección de Comunicación Visual de la UNLP

Universidad Nacional de La Plata – Editorial de la Universidad de La Plata

48 N.º 551-599 / La Plata B1900AMX / Buenos Aires, Argentina

+54 221 644 7150

edulp.editorial@gmail.com

www.editorial.unlp.edu.ar

EduLP integra la Red de Editoriales Universitarias Nacionales (REUN)

Primera edición, 2022

ISBN 978-950-34-2100-0

© 2022 - EduLP

**e**  
**exactas**

**EduLP**  
EDITORIAL DE LA UNLP



UNIVERSIDAD  
NACIONAL  
DE LA PLATA