GEOACTA, vol, 12, n.1 (1984) pag.231 a 246

INTERPRETACION Y UTILIDAD DE LAS MATRICES DE VARIANZA-COVARIANZA EN UN PROCESO DE AJUSTE Y SU APLICACION PARA LA DETECCION DE ERRORES SISTEMATICOS

OSCAR N. SCHVARZER

Instituto Geográfico Militar

Buenos Aires, República Argentina

RESUMEN

Se determinan las esperanzas matemáticas, desvíos estandar y coeficientes de correlación de las variables correspondientes a serie de mediciones, utilizando matrices de covarianzas y sus determinantes, a efectos de obtener conclusiones prácticas sobre el comportamiento estadístico de los errores.

Se determina en que grado los desvíos son esencialmente aleatorios o presentan una influencia sistemática, obteniéndose la conclusión de que tal situación puede analizarse mediante una interpretación adecuada de los coeficientes de correlación y las propiedades de los estimadores.

Se analizan las ventajas de este enfoque, comparándolo con el método tradicional.

ABSTRAC

The mathematic hopes, the standard deviations and correlation coefficient of the variables corresponding to a series of measurements, using matrices of covariances and its determinants, to the effect of obtaining practical conclusions on the statistical behaviour of error are determined.

The degree in which deviations are essentially contingen is determined as well as if they present a systematic influence,thus obtaining that situation can be analyzed through an adquate interpretation of the correlation coefficient and the properties of the estimators.

The advantages of theis approach compared with the traditional method are analyzed.

INTRODUCCION

Uno de los tópicos centrales de investigación mundial en Geodesia durante la última década, es el cálculo de las componentes de varianza-covarianza dentro de un proceso de ajuste. El vertiginoso desarrollo de este tema se debe al aporte de Forstner(1979), Frohlich (1980), Koch (1981), Grafarend (1981), Persson (1981) y otros.

Es conocido el aspecto altamente engorroso del cálculo cuando se aplica el método clásico señalado por Gauss. Aunque, afortunadamente en el presente, el procesamiento de datos se encuentra casi siempre sistematizado, mediante programas que utilizan distintas formas del cálculo matricial, resulta de interés comparativo recordar la aplicación de los coeficientes dados en forma simbólica según la notación Gaussiana. Antiguamente debían calcularse los términos expresados por la nomenclatura tradicional como los $[bs]$ $[cd]$; $[\alpha\alpha]$; $[\alpha\beta]$; etc., cuya obtención se hacía extensa y laboriosa.

Sería útil recordar la teoría del método matricial con el objeto de clarificar la nomenclatura adoptada para los distintos parámetros y definir ciertos términos estadísticos, poniendo además en evidencia:

1°) Las numerosas ventajas y gran cantidad de información útil que proporciona si se lo interpreta mediante un análisis adecuado:

2°) La posibilidad de obtener métodos que nos permitan detectar posibles errores sistemáticos, encubiertos por los accidentales a partir de datos proporcionados por las matrices de varianza-covarianza y otros procedimientos. Este punto es de capital importancia ya que el tratamiento estadístico de los errores posee validez cuando éstos presentan un caracter esencialmente aleatorio.

Dada una variable aleatoria $\tilde{x}$ que podría tomar los valores x_i de las n observaciones de una magnitud (muestra) con sus correspondientes probabilidades P(xi) que en nuestro caso puden asimilarse a los pesos divididos por la sumatoria del total de ellos.

$$P(x_i) \longrightarrow \frac{P_i}{[P]} \quad \text{para n suficientemente grande}$$

Pi: Peso de la observación i

$[P]$: sumatoria de los pesos de todas las observaciones.

Definimos como esperanza matemática de la variable $\tilde{x}$ a:

$$E(\tilde{x}) = \mu(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(x_i) \qquad (1)$$

La varianza de $\tilde{x}$ será:

$$\sigma^2(\tilde{x}) = E\,[\tilde{x} - E(\tilde{x})]^2 \qquad (2)$$

Siendo la desviación estándar o tipo

$$\sigma(\tilde{x})=\sqrt{\sigma^2(\tilde{x})} \qquad (3)$$

Dadas dos variables aleatorias $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$ se define como covarianza de las mismas.

$$\sigma(\tilde{x}\tilde{y})=E\left\{[\tilde{x}-E(\tilde{x})].[\tilde{y}-E(\tilde{y})]\right\} \qquad (4)$$

Siendo el coeficiente de correlación entre $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$

$$\rho(\tilde{x}\tilde{y})=\frac{\sigma(\tilde{x}\tilde{y})}{\sigma(\tilde{x})\sigma(\tilde{y})}=E\left\{\frac{[\tilde{x}-E(\tilde{x})]}{\sigma(\tilde{x})}\cdot\frac{[\tilde{y}-E(\tilde{y})]}{\sigma(\tilde{y})}\right\} \qquad (5)$$

Es fácil ver que la expresión (1) representa a la media aritmética ponderada, es decir al valor más probable (VMP) de acuerdo al criterio de los mínimos cuadrados.
La (2) es una medida de la dispersión media (puede tomarse como índice de precisión) ya que es la suma de los cuadrados de los desvíos por sus probabilidades, o sea multiplicada por sus respectivos pesos sobre la sumatoria de ellos $[P]$
Es inmediato que la (3) es equivalente al error cuadrático medio de la unidad de peso (para n suficientemente grande).

Se puede deducir de la (4) que si son probables o frecuentes las coincidencias de los desvíos (de ambas variables) en tamaño y signo tendremos una covarianza elevada y en caso contrario pequeña o sea que ésta dará el grado de dependencia estadística en el comportamiento de estas variables, es decir la relación de naturaleza estocástica que existe entre ambas series de residuos, pudiendo suponerse la posibilidad de la existencia de una influencia sistemática (cuando la covarianza es elevada).

Con respecto a la expresión (5) se concluye que si tiende a 1 ó (-1) las variables están fuertemente correlacionados mientras que si es próxima a cero, por el contrario ésta será muy débil. Debemos tener en cuenta que esta dependencia es de naturaleza estadística.

Sea el siguiente sistema de n ecuaciones de observación con r incógnitas tal que n > r.

$$\begin{array}{c} a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots + l_1 = V_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots + l_2 = V_2 \\ \text{-----------} \\ a_n x + b_n y + c_n z + \ldots + l_n = V_n \end{array}$$

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_r\text{---} \\ a_2 & b_2 & c_2\text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ a_n & b_n & c_n\text{---} \end{bmatrix} \quad X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \text{---} \end{bmatrix} \quad L=\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \text{---} \\ l_n \end{bmatrix} \quad V=\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \text{---} \\ V_n \end{bmatrix}$$

Matriz de los coeficientes	Vector de los parámetros incógnitas	Vector de los términos independientes	Vector de los residuos

Este sistema de ecuaciones de observación, puede expresarse matricialmente y a partir de éstas se obtiene la expresión matricial que representa al sistema de ecuaciones normales, al cual se llega minimizando la $[vv]$ dada por el producto entre vectores $V^t.V$

Sistema de ec. de observación: $AX+L=V \qquad X^TA^T+L^T=V^T$

$$V^TV=[vv] \qquad V^TV=(X^TA^T+L^T).(AX+L)$$

Condición de mín.cuad.para observ. de igual peso. $D(V^TV)=0 \Rightarrow d(V^TV)=0$ Cond. de min. cuadr.

$$dX^TA^T(AX+L)+(X^TA^T+L^T)A\,dX=0$$

$$dX^T[(A^TA)X+(A^TL)]+[X^T(A^TA)+(L^TA)]\,dX=0$$

(1) $(A^TA)X+(A^TL)=0 \qquad (A^TA)=N$

(2) $X^T(A^TA)+(L^TA)=0 \qquad (A^TL)=K$

(1') $NX+K=0 \Rightarrow \qquad X=-(N^{-1}.K)$

Analizando las dimensiones: $A^T(n,r).\,A(r,n)=N(n,n) \qquad A^T(n,r).L(r,1)=K(n,1)$

$$N(n,n).\,X(n,1)+K(n,1)=O(n,1) \qquad -(N^{-1}(n,n).\,K(n,1)=X(n,1)$$

Siendo $\sigma_0^2=\frac{V^TV}{n-r}$ (3) Varianza de referencia o de la unidad de peso. Si se tienen distintos pesos se debe introducir la matriz diagonal de ponderación W_p obteniéndose

$$V^T.Wp.V=[^pv.v] \qquad N=A^T.Wp.A \Rightarrow \qquad \sigma_0^2=\frac{V^TWp.V}{n-r}$$

N: Matriz de los coeficientes de las ecuaciones normales.

$Q_{\Delta\Delta} = N^{-1}$ Matriz de los cofactores de los parámetros incógnitas.

$$\boxed{\Sigma xx=\sigma_0^2.Q_{\Delta\Delta}}$$

Σxx: Matriz de Varianza-Covarianza de los parámetros incógnitas.

En el caso de compensar planimétricamente a un conjunto de puntos dados por sus coordenadas geográficas, pueden obtenerse sus elipses de error mediante las siguientes expresiones.

La orientación del eje mayor (o del menor, según la solución que se adopte)

$$\alpha_0=\frac{1}{2}\operatorname{arc.tg}\frac{2Q_{\varphi\lambda}}{Q_{\varphi\varphi}-Q_{\lambda\lambda}}$$

Semieje mayor

$$Ao=\sqrt{\sigma_0^2.Q\,max.} \qquad \text{Siendo la matriz de cofactores } Q_{\Delta\Delta}=\begin{pmatrix} Q_{\varphi\varphi} & Q_{\varphi\lambda} \\ Q_{\varphi\lambda} & Q_{\lambda\lambda} \end{pmatrix}$$

Semieje menor

$$Bo=\sqrt{\sigma_0^2.Q\,min.}$$

Siendo

$$Q_{min.}^{max.}=\frac{Q_{\varphi\varphi}+Q_{\lambda\lambda}}{2}\pm\frac{\sqrt{(Q_{\varphi\varphi}-Q_{\lambda\lambda})^2+4Q_{\varphi\lambda}^2}}{2}$$

Se ha introducido esta síntesis teórica para unificar criterios sobre interpretación, definiciones y nomenclatura, teniendo en cuenta que casi no existe bibliografía en castellano sobre este tema.

PARTE PRACTICA

Se efectúa la compensación de una parábola, tomándose un ejemplo simple que permita obtener conclusiones evidentes. Se miden coordenadas de puntos de la cónica con el objeto de obtener una expresión que sea lo más ajustada posible a su verdadera ecuación. En otras palabras efectuaremos una compensación, a efectos de determinar los valores más probables, de los coeficientes que definen la ecuación de dicha parábola.

El estudio propuesto consiste en resolver el problema tomando primero las coordenadas medidas de cuatro puntos, luego de cinco, seis, siete, etc. y estudiar como varían los resultados obtenidos en función del número de ecuaciones de observación.
Expresando la ecuación como $p=f(q)$, se tiene

$$p=Aq^2+Bq+C$$
$$Aq^2+Bq+C-p=0$$

Siendo A, B, y C los coeficientes a determinar, usaremos la siguiente nomenclatura.

$$A=x \qquad B=y \qquad C=z \qquad -p=l$$
$$q_i^2=a_i \qquad q_i=b_i \qquad 1=c_i$$

$$a_1x+b_1y+c_1z+l_1=V_1$$
$$a_2x+b_2y+c_2z+l_2=V_2$$
$$\text{-----------------}$$
$$a_nx+b_ny+c_nz+l_n=V_n$$

En los valores de las coordenadas medidas (x e y) se introduce intencionalmente un error sistemático aproximadamente del orden del 10% el cual se hace incidir ligeramente intensificado en la observación N° 5 y las adyacentes, con el objeto de analizar como éste influye en los valores calculados. Además, suponiendo que el mismo es desconocido se ensaya un método que nos permita detectarlo.
Valores medidos en los que se ha introducido el mencionado error.

$q_1=-6,82$	$q_2=-5,08$	$q_3=-2,82$	$q_4=1,52$	$q_5=-0,8$
$p_1=57,2$	$p_2=31,12$	$p_3=6,48$	$p_4=-12,40$	$p_5=-6,8$
$q_6=4,25$	$q_7=6,67$	$q_8=11,58$	$q_9=9,59$	
$p_6=-4,68$	$p_7=14,24$	$p_8=85,6$	$p_9=52,08$	

Nota: En el presente desarrollo sólo se utilizan los primeros siete pares de valores.

Planteadas las ecuaciones de observación, se obtienen matricialmente las normales y luego las matrices de varianza-covarianza extrayéndose toda la información que éstas proporcionan.

Se repite el cálculo para 4, 5, 6 y 7 ecuaciones de error u observación.
Los resultados y sus variaciones pueden apreciarse en el cuadro 1.
Nota: En el trabajo original se ha tomado una cantidad mucho mayor de valores que aquí no se introducen por razones de espacio, presentando sólo los más significativos de acuerdo a los puntos

que se desean analizar.

En el mencionado cuadro puden observarse los valores que van tomando algunos indicadores como las esperanzas E $(\tilde{x})$, E$(\tilde{y})$, E$(\tilde{z})$, la varianza de referencia σ_0^2, los desvíos estandar σ_0, σ_x, σ_y y σ_z los coeficientes de correlación ρ_{xy}, ρ_{xz}, ρ_{yz}, y de los determinantes Det N y Det N^{-1} todos en función de n(n° de observaciones). El significado de cada una de estas magnitudes se aclara en la introducción teórica de la primera parte.

Es evidente que en la fila "3" (observación) en que n=r no es posible efectuar ningún tipo de compensación.

De la fila "7" se deduce la expresión más probable (ajustada) de la ecuación de la parábola p= f(q), es:

$$p=0{,}999q^2-3{,}027q-9{,}976$$

Analizando la línea correspondiente a 5 ecuaciones de error, se observa que σ_0, σ_x, σ_y y σ_z son relativamente bajos y a pesar que ellos representan índices de precisión, no ponen en evidencia al error sistemático introducido. Los coeficientes de correlación ρ_{xz} y ρ_{yz} no presentan valores elevados, los cuales podrían sugerir una dependencia estadística o influencia sistemática. No ocurre lo mismo con el valor de $\rho_{xy} = 0{,}9 \simeq 1$, que es cercano al máximo indicando una fuerte correlación. No obstante por sí solo sería insuficiente para proporcionar el indicio de un error sistemático.

De acuerdo a lo anterior se puede apreciar la importancia de estudiar como varían los estimadores anteriores al ir tomando distintos valores de n y resolviendo el problema para cada uno de ellos. Esta tarea se realizaría sin dificultad confeccionando un programa que obtenga todos estos valores para cada ecuación de observación que se agrega, en un entorno de la medición donde se presenta algún problema, valor excedido o sospecha de error sistemático, de la misma manera que la mayoría de los programas para el procesamiento de observaciones Doppler (satelitarias) suelen resolver el problema para cada nuevo paso recibido.

Es conveniente efectuar una representación gráfica que puede ser realizada por el mismo plotter del equipo.
Resulta de interés aclarar que las mediciones han sido efectuadas con reglas distintas, pero de calidades equivalentes y en igualdad de condiciones. Esta precaución se tomó con el objeto de garantizar el caracter aleatorio de los errores, evitando correlaciones indeseadas y asegurar que los pesos sean aproximadamente iguales, ya que las ecuaciones de observación poseen la misma estructura.

Es evidente que los resultados (valores más probables de los coeficientes), podrán tener distintos pesos, los cuales se pueden calcular a partir de la matriz de varianza-covarianza. Este desarrollo se ha omitido ya que sería independiente del tema analizado y excedería los límites de esta presentación.

Ha sido introducida la simulación de un error sistemático de aproximadamente un 10 % el cual ha sido ligeramente intensificado en un entorno de la observación 5. Se analizan los resultados obtenidos de aplicar métodos que permiten detectar esta fluctuación. Luego de esta comprobación deberá estudiarse la causa y zona de influencia del error el cual puede existir (en forma aproximadamente constante) en un campo mucho más amplio que el correspondiente a la variación localizada. Para ello podrían utilizarse otros métodos más complejos de medición y detección de errores sistemáticos.

n	$E(\tilde{x})$	$E(\tilde{y})$	$E(\tilde{z})$	σ_o^2	σ_o	σ_x	σ_y	σ_z	ρ_{xy}	ρ_{xz}	ρ_{yz}	Det N	Det N^{-1}= Det $Q_{\Delta\Delta}$	Observaciones
3	1,1039	-2,0458	- 7,9759	$\to\infty$	$\to\infty$	$\to\infty$	$\to\infty$	$\to\infty$	$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{\infty}{\infty}$	345,0090	0,0029	Siendo n=r (1)
4	1,0003	-3,0405	-10,0842	0,0048	0,0695	0,0047	0,0258	0,0542	0,903	0,361	-0,033	34570,490	0,000029	
5	0,9959	-3,0539	-10,0075	0,0158	0,1259	0,0078	0,0456	0,0785	0,913	-0,170	0,127	57603,02	0,0000174	
6	1,0018	-3,0165	- 9,9928	0,0146	0,1210	0,0040	0,0168	0,0737	0,125	-0,685	0,205	469053,51	0,0000021	
7	0,9993	-3,0277	- 9,9762	0,0134	0,1159	0,0025	0,0097	0,0679	0,054	-0,761	0,021	2185472,68	0,00000046	

CUADRO 1

Si bien el hecho de medir ambas coordenadas de cada punto de la parábola, constituye un enfoque más generalizado, este procedimiento presenta algunos inconvenientes.

1°) Al no medirse, una sola magnitud que constituya el término independiente de cada ecuación, no se tendría un sistema de observaciones indirectas (puras), sino un caso combinado de mediciones indirectas condicionadas. Esto haría necesario efectuar un nuevo enfoque en el planteo, para asegurar la misma bondad del proceso de ajuste.

2°) Si se midiere un solo valor (por ejemplo la ordenada p) se obtendría una mayor homogeneidad en los pesos, que afectan a los residuos (vi) de cada ecuación. Además, se observa que dicha ordenada p, no aparece afectada de cuadrados (como ocurre con la absisa q), simplificándose el análisis de posibles linealizaciones y propagaciones de varianzas (relacionadas con los pesos).

Estos inconvenientes se resuelven (en parte), designando las coordenadas q. a priori y por lo tanto excentas de error. Tal procedimiento no proporciona una solución total, ya que la determinación gráfica de un punto, sobre el eje horizontal correspondiente a una absisa q , se verá afectada de cierto desvío. Este problema se ha minimizado aceptablemente, extremando las precauciones en la determinación geométrica de su posición, hasta el grado en que su indeterminación, sea de un orden de magnitud menor que el correspondiente a la vacilación con que se mide la ordenadas p. De acuerdo a ésto, se tiene la certeza que del modelo adoptado,se desprenderán resultados que, dentro de los límites analizados,pueden considerarse válidos. Con esto se trata de destacar que se han extremado al máximo las precauciones tomadas con las condiciones de estudio, para garantizar la confianza en las conclusiones obtenidas.

Si bien la varianza de la unidad de peso σ_o^2 , en función del número de observaciones, constituye el estimador básico, también será significativa la variación de la matriz de cofactores $Q_{\Delta\Delta}$ de manera que será apreciable la información obtenida a partir de la de covarianzas Σ_{xx} (como se verá más adelante), recordando que es $\Sigma_{xx} = \sigma^2_o \times Q_{\Delta\Delta}$.

Como ejemplo podemos citar algunos problemas que han surgido de pruebas efectuadas recientemente, en la determinación de coordenadas por sistema Doppler, en un punto fijo (de primer orden de la red). Estas se hacen paradójicamente, cada vez más incorrectas, a medida que aumenta el número de pasos procesados. Aunque todavía no se ha determinado con exactitud, la causa de tal incongruencia, podría suponerse que existe alguna influencia sistemática, como posibles perturbaciones ionosféricas, alguna pequeña incorrección a los parámetros de transformación utilizados, etc. ¿Cómo puede asegurarse que en la determinación del posicionamiento de un punto desconocido (sin elementos de referencia) no ocurran circunstancias similares?. Tanto para este caso, como para analizar el problema anterior, resulta óptimo efectuar algún procedimiento equivalente a los test de hipótesis, como los desarrollados a continuación, ya que los programas determinan las coordenadas para cada nuevo paso aceptado (proporcionando las sucesivas matrices de varianza-covarianza). Así lo hemos ensayado, graficando la variación de los coeficientes de correlación (en función del número de pasos), obteniéndose información aparentemente satisfactoria para reforzar la suposición de la existencia de errores sistemáticos.

El núcleo central de este trabajo está dado por la forma, particular de aplicar ciertos principios estadísticos (como la propiedad de "estimación centrada"), demostrados por esta misma teoría y el análisis adecuado de los resultados con el objeto de sacar conclusiones útiles. También se trata de poner de relieve la sensibilidad con que varían ciertos estimadores ante una pequeña fluctuación del error sistemático, las propiedades de los determinantes de las matrices de los coeficientes de las ecuaciones normales y de su inversa de cofactores (N y N^{-1} respectivamente) y la rapidez de crecimiento de los coeficientes de correlación en las cercanías de la intensificación de la influencia sistemática.

La coincidencia de dos o más de los resultados obtenidos por estos métodos pronosticaría la existencia de esta tendencia con un alto grado de certeza. Es obvio que estos procedimientos pueden ser modificados y adaptados a cada situación particular.

Resulta evidente la utilidad de detectar influencias sistemáticas (que en muchos casos presentan gran dificultad para ser descubiertas), ya que la teoría estadística de los errores parte de la hipótesis que éstos son de naturaleza totalmente aleatoria. A partir de esta premisa se infieren las características de la función de densidad de probabilidades, como por ejemplo se postula en la teoría de Gauss, obteniéndose mejores resultados en tanto mas se ajusten las condiciones reales a esta suposición.

CRITERIO PARA LA DETECCION DE ERRORES SITEMATICOS

Teniendo en cuenta que no siempre son importantes los valores de algunos estimadores sino sus variaciones en función del número n de observaciones, obtendremos conclusiones de las mismas.

Como primer paso se procede a graficar $|\rho_{xy}|$, $|\rho_{xz}|$ y $|\rho_{yz}|$ en función de n. Se utilizan los coeficientes de correlación, ya que éstos pueden dar idea de una posible dependencia estadística o sistemática. Aunque esta función no es continua se unen los puntos aislados obteniéndose una curva (ficticia) para visualizar un modelo hipotético analógico, que dé una idea de cual sería su variación progresiva (Ver gráfico 1).

<u>Interpretación</u>

Se observa que $|\rho_{xy}|$ toma valores elevados para n igual a 4 y 5, decayendo hacia el punto 6. Igualmente se evidencia que $|\rho_{xz}|$ se hace considerablemente grande para n igual a 6 y 7, creciendo desde 5.

Estas apreciables variaciones de las correlaciones sugieren la posible existencia de una influencia sistemática, pero no son suficientes por sí solas para asegurarla (las mismas podrían deberse, entre otras causas, a interdependencias geométricas propias de la estructura de una red).

De acuerdo a lo anterior, es necesario hacer un análisis mediante otros métodos. Para ello pueden utilizarse las propiedades que califican a los estimadores, principalmente la de estimación centrada. Esta es especialmente aplicable a una pequeña cantidad de observaciones. Consiste en que si las distribuciones son centradas o sea que no existe un apartamiento sistemático, la esperanza matemática del estimador es idéntica al parámetro para cualquier número (inclusive pequeño) de observaciones.

$$E\hat{p} = P$$

$$\left.\begin{matrix} E\hat{p}_{n1} \cong P \\ E\hat{p}_{n2} \cong P \end{matrix}\right\} : (n_2 > n_1) \Longrightarrow \nexists\ \varepsilon S$$

$$\bar{x}p = E(\bar{x})$$

$$\left.\begin{matrix} E(\bar{x})_{n1} - E(\bar{x})_{n2} \cong 0 \\ E(\bar{x})_{n1} - E(\bar{x})_{n3} \cong 0 \end{matrix}\right\} : (n_1 < n_2 < n_3) \Longrightarrow \nexists\ \varepsilon S$$

en cambio $\left.\begin{matrix} E(\bar{x})_{n1} - E(\bar{x})_{n3} = \Delta_{13} \neq 0 \\ E(\bar{x})_{n2} - E(\bar{x})_{n3} = \Delta_{23} \neq 0 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \exists (\text{posible } \varepsilon S)$

Si $\Delta_{13} \cong \Delta_{23} \cong \Delta_{ij} \cong \Delta \neq 0 \Longrightarrow \exists\ \varepsilon S$

Siendo:

$\hat{p}$: Estimador

P: Parámetro

$E(\bar{x})_{ni}$: Esperanza del VMP para ni observaciones

$\bar{x}_p$: Media aritmética ponderal

$E\hat{p}_{ni}$: Esperanza del estimador para ni elementos

$E(\bar{x})$: Esperanza de la variable aleatoria (conjunto de mediciones)

εS: Error sistemático

Δ: Descentración equivalente al εS

El mismo análisis podría hacerse con la varianza.
Llamando $\bar{x}$ al valor más probable de $\tilde{x}$ anteriormente simbolizado por $E(x)$, se tiene la siguiente variable aleatoria de acuerdo al cuadro anterior.

$\bar{x}_{n4} = 1,0003$ $\qquad$ $E(\bar{x})_4 = 1,0003$

$\bar{x}_{n5} = 0,9959$ $\qquad$ $E(\bar{x})_{4,5} = 0,9979$

$\bar{x}_{n6} = 1,0018$ $\qquad$ $E(\bar{x})_{4,5,6} = 1,0005$

$\bar{x}_{n7} = 0,9993$ $\qquad$ $E(\bar{x})_{4,5,6,7} = 0,9998$

Luego de calculada la esperanza del valor más probable se tiene:

$$\Delta_1 = E(\bar{x})_4 - E(\bar{x})_{4,5,6,7} = 0,0005$$

$$\Delta_2 = E(\bar{x})_{4,5} - E(\bar{x})_{4,5,6,7} = 0,0019$$

$$\Delta_3 = E(\bar{x})_{4,5,6} - E(\bar{x})_{4,5,6,7} = 0,0007$$

Analizando se observa que en el punto 4, Δ_1 es muy próximo a cero verificándose el cumplimiento de la estimación centrada.

En cambio el valor Δ_2 se hace considerable (aproximadamente 4 veces mayor que el anterior) lo que implica una descentración apreciable.

En cuanto a la $E(x)_{4,5,6}$, se obtiene un Δ_3 pequeño algo mayor que el primero.

En base a estos resultados se puede inferir un error sistemático, cuya mayor influencia se centraliza en un entorno del punto 5 y siendo que esta condición concuerda con lo manifestado en el análisis gráfico anterior sería válido aceptar la existencia de tal influencia.

Este procedimiento se basa en el hecho de que el $E(x)_{4,5,6,7}$ por ser el de mayor peso y tener más probabilidad de estar más cercano al valor verdadero se lo toma como representativo del parámetro P de la distribución mientras que los anteriores, desempeñan el papel de estimadores $\hat{P}$.

Para obtener una confirmación total de la existencia de errores sistemáticos, acentuados en las proximidades del punto 5 se puede recurrir a la interpretación de otros datos proporcionados por la Matriz de Varianza-Covarianza.

<u>Propiedades de los determinantes de las matrices derivadas de las ecuaciones normales.</u>

Otro procedimiento consiste en calcular los determinantes de las matrices de los coeficientes de las ecuaciones normales (N) y de cofactores ($Q=N^{-1}$) para distintos valores de n y luego representar graficamente estos valores.

Se comprueba que el determinante de N crece rapidamente a medida que aumenta el peso del valor más probable de las incógnitas y disminuye el error medio de la unidad de peso (desvío tipo). Inversamente el det. de la matriz de los cofactores ($Q=N^{-1}$) decrece bruscamente, conjuntamente con la variación de las magnitudes mencionadas anteriormente. Esta demostración se omite por apartarse del tema.

Es decir $\alpha = \dfrac{d(\mathrm{Det.}N)}{dn} > 0$ $\qquad$ $\beta = \dfrac{d(\mathrm{Det.}N^{-1})}{dn} < 0$

Siendo: $|\alpha|$ y $|\beta|$ Valores generalmente muy grandes.
O sea que dichas variables pueden considerarse índices de precisión (por lo menos cualitativamente) de alta sensibilidad ya que $|\alpha|$ y $|\beta|$ son valores generalmente grandes.

Esta situación se puede observar en el gráfico 2 en el que se representó a ambos determinantes y el desvío de la unidad de peso (error medio).

Analizando este gráfico vemos que dicho error medio toma su valor máximo para n=5 observaciones, mientras que entre los puntos 4 y 5 las curvas representativas de los determinantes tienden a horizontalizarse.

Esto puede interpretarse para Det $N=f_1(n)$ como que en este intervalo la precisión casi no aumenta, ya que es desvirtuada por el aumento de el error. Igualmente para la curva Det $N^{-1}=f_2(n)$ocurre como si la determinación deja de decrecer aunque aumente n, ya que hay un desvío sistemático que tiende a reforzarla. Concluyendo, el análisis de estos tres gráficos nos lleva a la misma consideración anterior.

Es decir que la existencia de un error sistemático cuya incidencia se intensifica en la observación 5 queda definitivamente confirmada.

En el gráfico 3 se representa la esperanza E(x)=f(n) donde se observa que ésta oscila en forma amortiguada en torno al valor verdadero y su máximo apartamiento se verifica en el punto 5.

En el gráfico 4 se observa la variación del desvío standard (error medio) que en coincidencia con lo esperado presenta un máximo en la observación 5.

Es evidente que, prácticamente, todos los estimadores ponen el manifiesto en su variación a la influencia sistemática que podría haber quedado encubierta, si por ejemplo se hubieran analizado los resultados en forma estática, para un valor de n determinado.

CONCLUSIONES FINALES

a. La utilización e interpretación adecuada de la matriz de varianza-covarianza en un proceso de compensación puede proporcionarnos en forma práctica y directa, una gran variedad de información como por ej.: Valores más probables de las incógnitas, varianzas de la unidad de peso (referencia) y de las incógnitas, covarianzas de las mismas, errores cuadráticos medios y de la unidad de peso y de cada una de las incógnitas, pesos de las mismas, coeficientes de correlación, valores de las determinantes de las matrices de los coeficientes de las ecuaciones normales y su inversa (de cofactores), promedio de los valores absolutos de los desvíos. Además se obtienen los valores compensados (para igual y distinto peso) no sólo de incógnitas calculadas sino también de valores observados, elipses de error con sus orientaciones, etc.

b. Es posible detectar errores sistemáticos como en el ejemplo anterior, teniendo en cuenta la variación de los coeficientes de correlación y otras magnitudes en función del número de observaciones, al igual que las propiedades de los estimadores (estimación centrada, etc.).

c. Es factible hacer una representación de las elipses de error teniendo en cuenta su distribución en cuanto a magnitud y orientación de manera que, además de obtener una visualización de la distribución de los errores, se puede estimar la variación de precisión en función de la posición planimétrica de cada punto compensado con respecto a los fijos.

BIBLIOGRAFIA

-Bjerhammar E.A.,1973: Theory of errors and generalized matrix inverses, Elsevier, New York.

-Bonford, G.; 1980; Geodesy, 4th edition; Clarendon Press, Oxford USA.

-Forsther, W., 1979: Ein verfahren Tur Schatzung von varianz und kovarianz-komponenten, Allgemeine Vernessungsnachrichten, 86: 446-453.

-Frohlich, H., 1979: Answertung von eichmessungen elektrooptischer distanzmeBgera te mit dem programmsystem celoem, Nachrichten aus dem offentlichen Vermessungschienst des Landes Nordrhein Westfalen, 12 : 203-208.

-Godzic J, Wahl B., 1977: Compensación de observaciones correlacionadas - Algebra matricial y cracoviana, Fundación del Instituto de Mejoramiento Profesional del Colegio de Ingenieros de Venezuela (FIMP), Universidad de Zulia, Maracaibo, Venezuela.

-Grafarend, E. Kleusberg, A., and Schaffrin, B. 1980: Variance-covarianza component estimation of Helmert Type, Zeitschrift fur Vermessungswesen, 105: 161-180.

-Grafarend E.W., 1981: Adjustment procedures of geodetic networks presentado en II TH International Symposium on geodetic and computations, International Association of Geodesy, Munich, Federal Republic of Germany.

-Karl - Rudolf Koch, 1981: Different aspects for the analysis of geodetic networks; presentado en VI TH. International Symposium on geodetic and computations, International Association of Geodesy, Munich, Federal Republic of Germany.

-Levallois, J.J., Géodésia classique bidimensionnelle Tome 2 Collection Scientifique de L'Institut Geographique National; Boulevard Saint Germain-París.

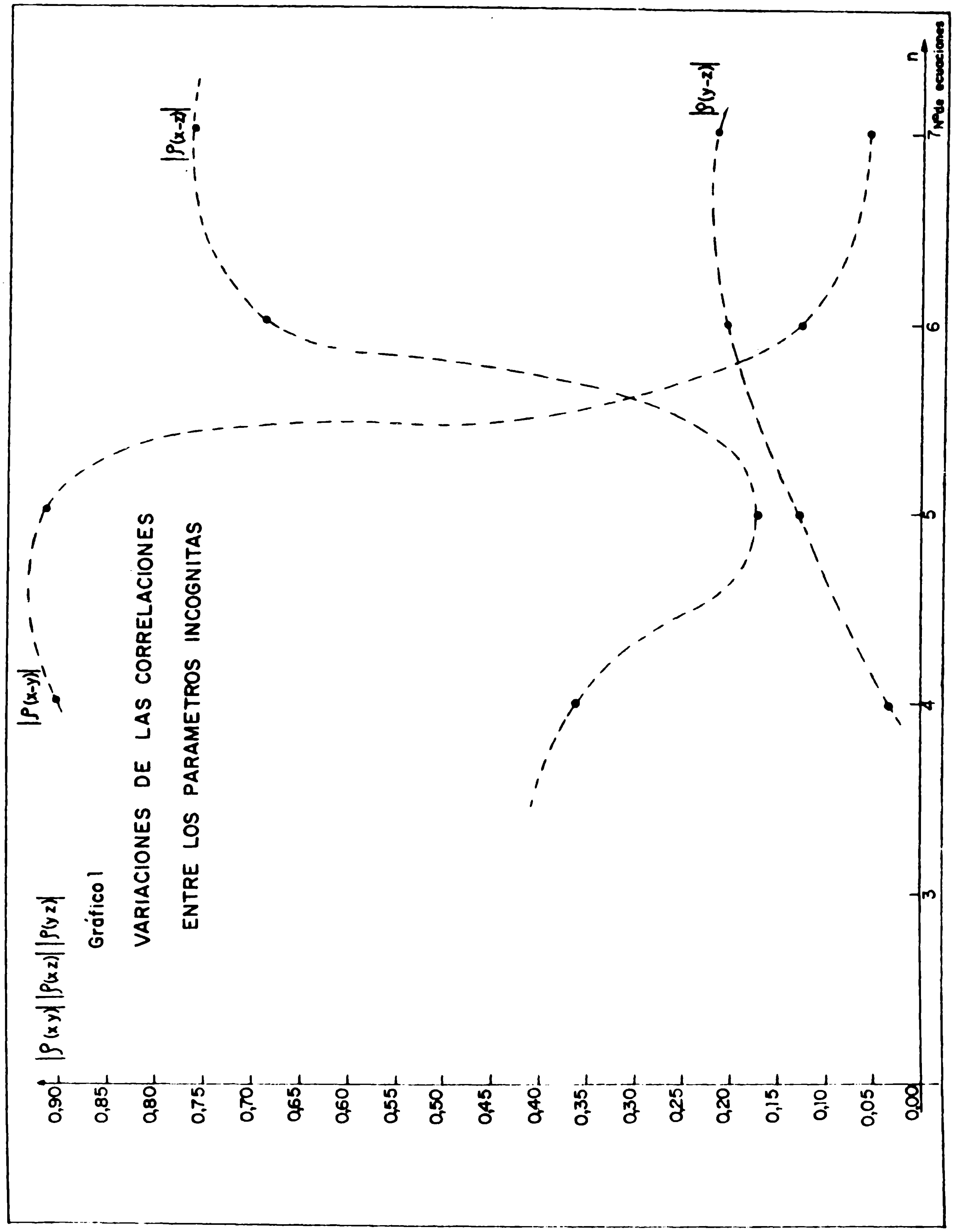
-Moritz, H., 1971: Least squares estimation in physical geodesy, Preparated for Air Force Cambridge Research Laboratories United States Air Force, Bealfor, Massachusetts, 01730.

-Persson, C.G., 1981: On the estimation of variance components in linear models and related problems, Ph.D.thesis, Stöckholm.

-Saxena, N.K. 1972: Improvement of a geodetic triangulation through control points established by means of satellites. The Ohio State University Research Foundation Columbus, Ohio 43212.

-Searle, S.R. and Henderson, H.V., 1979: Dispersion matrices for variance components models, Journal of the American Statistical Association, 74, 465-470.

-Tienstra J.M.,1976: Theory of adjustment of normally distributec observations, Argus, Amsterdam.


|ρ(x y)| |ρ(x z)| |ρ(y z)|
Gráfico 1
VARIACIONES DE LAS CORRELACIONES
ENTRE LOS PARAMETROS INCOGNITAS
|ρ(x-y)|
|ρ(x-z)|
|ρ(y-z)|
0,90
0,85
0,80
0,75
0,70
0,65
0,60
0,55
0,50
0,45
0,40
0,35
0,30
0,25
0,20
0,15
0,10
0,05
0,00
3
4
5
6
7
n
Nº de ecuaciones

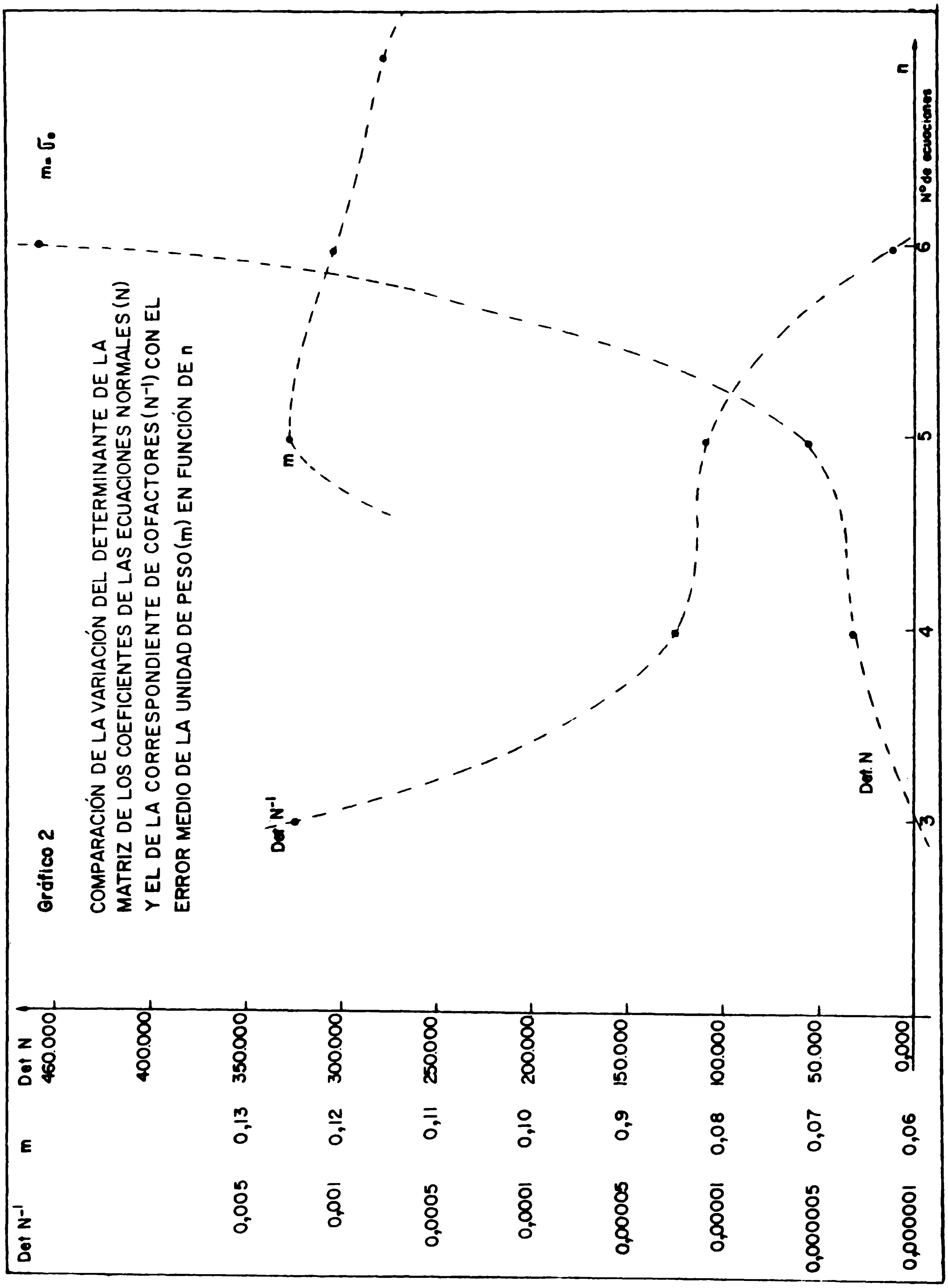
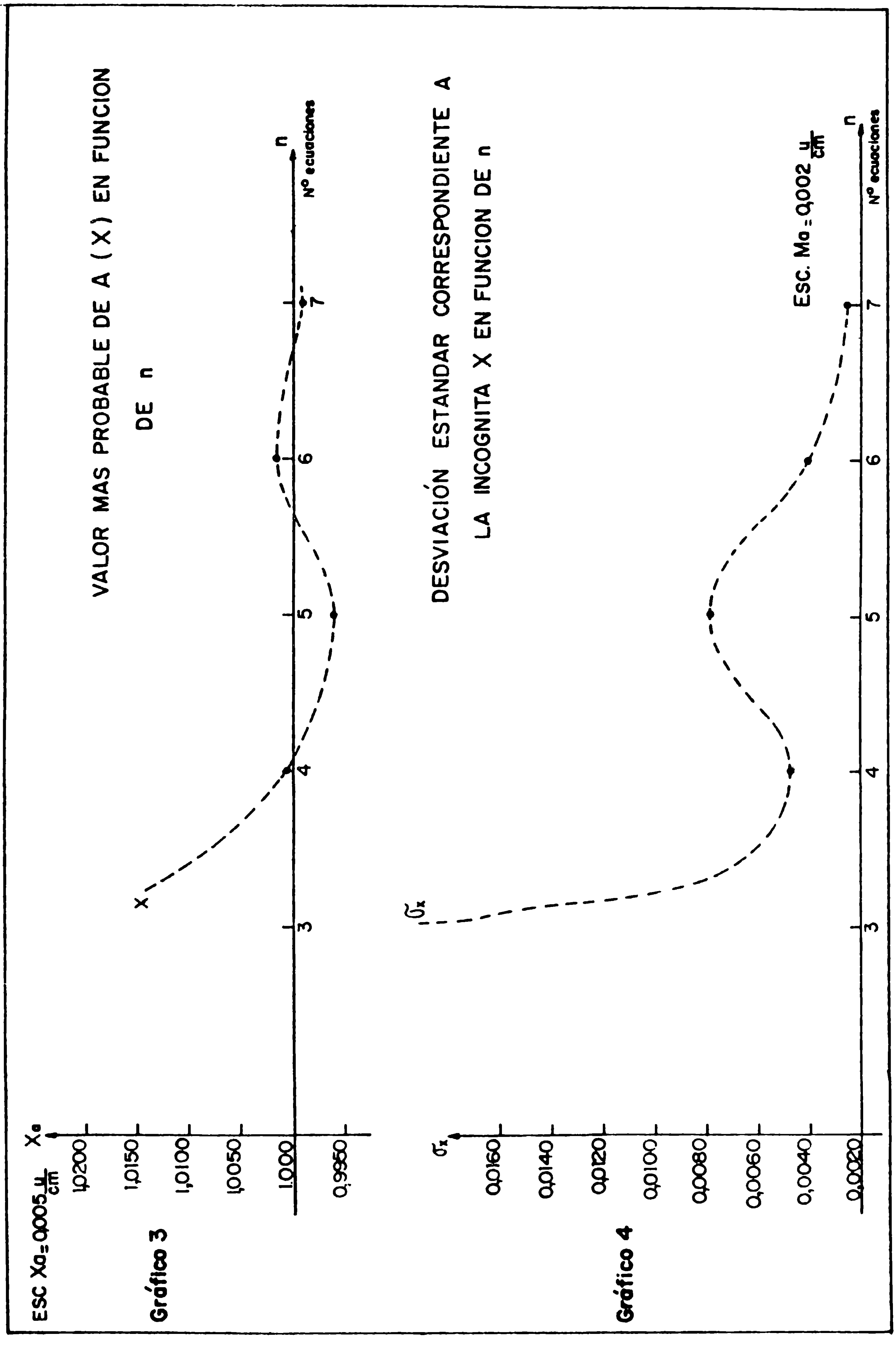


Gráfico 2

COMPARACIÓN DE LA VARIACIÓN DEL DETERMINANTE DE LA MATRIZ DE LOS COEFICIENTES DE LAS ECUACIONES NORMALES (N) Y EL DE LA CORRESPONDIENTE DE COFACTORES (N^{-1}) CON EL ERROR MEDIO DE LA UNIDAD DE PESO (m) EN FUNCIÓN DE n


VALOR MAS PROBABLE DE A (X) EN FUNCION
DE n
ESC X_a = 0,005 u/cm
Gráfico 3
X_a
1,0200
1,0150
1,0100
1,0050
1,000
0,9950
X
3
4
5
6
7
n
Nº ecuaciones
DESVIACIÓN ESTANDAR CORRESPONDIENTE A
LA INCOGNITA X EN FUNCION DE n
ESC. Ma = 0,002 u/cm
Gráfico 4
σ_x
0,0160
0,0140
0,0120
0,0100
0,0080
0,0060
0,0040
0,0020
3
4
5
6
7
n
Nº ecuaciones