



Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas.
Universidad Nacional de La Plata.

Tesis para obtener el grado académico de
Licenciado en Astronomía

**Estrellas de quarks superconductoras de color
magnetizadas: estudio de estabilidad y modos de
oscilación no-radiales**

Marcos O. Celi

Director: Dr. Mauro Mariani

Co-Directora: Dra. Milva G. Orsaria

La Plata, Argentina

Marzo 2022

Resumen

Las *estrellas de neutrones* son los objetos más densos del universo, con radios de poco más de una decena de kilómetros y masas alrededor de $1,4 M_{\odot}$. Estos objetos, además de tener altas densidades, poseen campos magnéticos intensos de hasta 10^{15} G en su superficie, dando lugar a los denominados *magnetares*. Bajo estas condiciones, la teoría de la Cromodinámica Cuántica predice que la materia hadrónica puede sufrir una transición hacia una fase de quarks deconfinados o una fase superconductor de color, denominada *CFL*. Dicha predicción, en conjunto con la hipótesis de estabilidad de la materia extraña de quarks, abre paso a la posibilidad de formación de objetos compactos compuestos íntegramente por materia de quarks, llamados *estrellas de quarks*.

Por otro lado, en la última década, las observaciones de púlsares masivos de $\sim 2 M_{\odot}$ y las detecciones de eventos de ondas gravitacionales por parte del observatorio LIGO-Virgo han impuesto fuertes restricciones sobre las estrellas de neutrones. Estas restricciones han hecho que los astrofísicos se replanteen la composición de estos laboratorios astrofísicos naturales, y por consiguiente su *ecuación de estado*, aún desconocida.

En este contexto, en este trabajo de Tesis de Licenciatura estudiaremos estrellas de quarks superconductoras de color con campos magnéticos intensos. Para ello, adoptamos el *modelo de bolsa del MIT* en el marco de la CFL para construir la ecuación de estado de la materia de quarks y consideramos dos escenarios de interés astrofísico para el campo magnético: uno correspondiente al caso de púlsares convencionales y otro para el caso de magnetares. El objetivo central de este trabajo es estudiar la estructura, composición y modos de oscilación de estos objetos, calculando cantidades observables que satisfagan las restricciones astrofísicas actuales y que, en el futuro, puedan ser contrastadas con nuevas observaciones provenientes de la incipiente astrosismología de estrellas de neutrones.

Los resultados obtenidos muestran que, de acuerdo a ciertas combinaciones de parámetros de nuestro modelo, las estrellas de quarks magnetizadas superconductoras de color satisfacen las restricciones impuestas por las observaciones de púlsares masivos y los eventos de ondas gravitacionales GW170817 y GW190425. Además, las cantidades asociadas al modo fundamental f de oscilación de estos objetos ajustan a las relaciones universales para objetos compactos, es decir, re-

laciones independientes de la ecuación de estado subyacente de la materia densa.

En el contexto de la nueva era de la astronomía multimensajera de ondas gravitacionales y de la futura astrosismología de estrellas de neutrones, esperamos que nuestros resultados puedan ser revisados y contrastados con nuevas observaciones en el corto plazo y que contribuyan al conocimiento del comportamiento de la materia densa y los objetos compactos.

Abstract

Neutron stars are the densest objects in the universe, with radii of around tens of kilometers and masses of around $1.4 M_{\odot}$. These objects, in addition to having high densities, have intense magnetic fields up to 10^{15} G on their surface, giving rise to the so-called *magnetars*. Under these conditions, Quantum Chromodynamics theory predicts that hadronic matter can undergo a transition to a deconfined quark phase or a color superconducting phase, called *CFL*. This prediction, together with the stability of the strange quark matter hypothesis, allows the formation of compact objects composed purely of quark matter, called *quark stars*.

On the other hand, in the last decade, observations of massive $\sim 2 M_{\odot}$ pulsars and detections of gravitational wave events by the LIGO-Virgo observatory have placed strong constraints on the neutron stars. These constraints have made astrophysicists rethink the composition of these natural astrophysical laboratories and, therefore, also rethink their still unknown *equation of state*.

In this context, in this thesis, we will study color superconducting quark stars with intense magnetic fields. To do this, we adopt the *MIT bag model* within the CFL framework to construct the equation of state of quark matter considering two scenarios of astrophysical interest for the magnetic field: one corresponding to the case of conventional pulsars and another for the case of magnetars. The main objective of this work is to study the structure, composition, and oscillation modes of these objects, calculating observable quantities that satisfy current astrophysical constraints and that, in the future, can be tested against new observations from the incipient asteroseismology of neutron stars.

The results obtained show that, according to specific combinations of parameters of our model, color superconducting magnetized quark stars satisfy the constraints imposed by the observations of massive pulsars and gravitational wave events GW170817 and GW190425. Furthermore, the quantities associated with the oscillation fundamental *f*-mode of these objects fit the universal relationships for compact objects, that is, relationships independent of the underlying equation of state of dense matter.

In the context of the new era of multi-messenger gravitational wave astronomy and the future asteroseismology of neutron stars, we hope that our results can be reviewed and contrasted with new observations in the short term and that they

contribute to the understanding of the behavior of dense matter and compact objects.

Índice general

1. Introducción	1
2. Materia de Quarks y Contexto Astrofísico	10
2.1. Modelo de bolsa de MIT como EdE	12
2.1.1. Materia de quarks magnetizada	14
2.1.2. CFL en la EdE magnetizada	17
2.2. Las ecuaciones TOV	19
2.3. Modos de oscilación y Ondas gravitacionales	21
3. Análisis y Resultados	26
3.1. Construcción de las EdEs	26
3.2. Solución de las ecuaciones TOV	30
3.3. Modo f de oscilación	34
4. Conclusiones	40
A. Sistema de unidades geométricas	43
Bibliografía	45

Índice de figuras

1.1. Diagrama esquemático de la evolución de una estrella masiva. . .	3
1.2. Diagrama de fases de la QCD	5
1.3. Esquema comparativo entre EQs y ENs y Estrellas Híbridas de quarks-hadrones.	7
2.1. Modelo Estándar de partículas elementales	11
2.2. Modelo simple para el acoplamiento de los sistemas estrella y espacio-tiempo	23
3.1. Ventana de estabilidad de la materia	27
3.2. Masa máxima de las EQs	28
3.3. Conjuntos de parámetros seleccionados	29
3.4. Ecuaciones de estado	31
3.5. Relación masa-radio	32
3.6. Relación masa-radio amplificada	33
3.7. Relación frecuencia de oscilación-masa	34
3.8. Relación frecuencia de oscilación-masa amplificada	35
3.9. Relación tiempo de amortiguamiento-masa	36
3.10. Relaciones universales para la frecuencia	37
3.11. Relaciones universales para el tiempo de amortiguamiento	38

Índice de cuadros

3.1. Parámetros de las EdEs seleccionados	30
A.1. Cuadro de conversión a unidades geométricas.	43

Capítulo 1

Introducción

En el año 1934, Baade y Zwicky propusieron que, como consecuencia de un evento de supernova tipo II, podía formarse, a modo de remanente, un tipo de objeto compacto, llamado *estrella de neutrones* (EN) (Baade y Zwicky, 1934). Las ENs habían sido originalmente propuestas por Landau (Haar, 2013) en el año 1932, casi al mismo tiempo que fue descubierto experimentalmente el neutrón (Chadwick, 1932). En su propuesta, Landau explicó que mediante la presión que realizan los neutrones degenerados, las ENs pueden alcanzar el equilibrio hidrostático, de manera similar a lo que ocurre en las enanas blancas con la presión de degeneración electrónica.

El desarrollo y mayor entendimiento de la Relatividad General ¹ hicieron posible que en el año 1939, Tolman (Tolman, 1939), Oppenheimer y Volkoff (Oppenheimer y Volkoff, 1939) propusieran, casi en simultaneo y de forma independiente, las ecuaciones que describen la estructura de objetos con características similares a las de las ENs. Para obtener indicios teóricos de la existencia de este tipo de objetos en la Naturaleza es necesario utilizar las ecuaciones relativistas de estructura estelar y las ecuaciones de la Relatividad General para espacio-tiempos estacionarios y objetos esféricamente simétricos. Estos trabajos mostraron que las ENs no pueden tener masas arbitrariamente grandes y seguir siendo estables. En particular, Oppenheimer y Volkoff usaron las ecuaciones de equilibrio hidrostático para calcular modelos de ENs de una manera simple, sin considerar que los neutrones podían interactuar entre sí. De los resultados de sus cálculos concluyeron que la masa gravitacional máxima de una EN estática y estable era $M \sim 0,7 M_{\odot}$ ($M_{\odot} \simeq 2 \times 10^{30}$ kg), lo cual se conoce como el límite de masa Oppenheimer-Volkoff. En 1959, Cameron logró extender este límite a $2 M_{\odot}$, in-

¹La Teoría de la Relatividad General fue desarrollada por A. Einstein entre los años 1907 y 1915. En 1919, los datos provenientes de un eclipse solar obtenidos por Eddington, Dyson y Davidson mostraron que la deflexión de la luz estelar de fondo medida al pasar por el sol coincidía con la predicción teórica de la Teoría de la Relatividad General. En 1923, Einstein publica *El fundamento de la Teoría General de la Relatividad* (Einstein, 1923).

cluyendo interacciones nucleares entre los neutrones que componen estas estrellas (Cameron, 1959).

Con el trabajo de Landau, que daba las primeras pautas de cómo debía ser la materia en el interior de las ENs, la propuesta de mecanismo de formación hecha por Baade y Zwicky y el desarrollo de las ecuaciones de equilibrio hidrostático en la Relatividad General obtenidas por Tolmann, Oppenheimer y Volkoff (conocidas como ecuaciones TOV), la comunidad científica comenzó a tener nociones teóricas básicas sobre la física de las ENs. Sin embargo, durante décadas no hubo evidencias observacionales de su existencia. Esto cambió en 1967 -poco más de 30 años después de la propuesta de Landau-, cuando Bell y Hewish (Hewish et al., 1968) descubrieron una señal que consistía en una serie interminable de cortas emisiones de ondas de radio separadas en forma uniforme. Luego de varias propuestas de interpretación de esta señal, se concluyó que esta era la primera evidencia observacional de la existencia de ENs.

Actualmente, los modelos teóricos de evolución estelar predicen que estrellas con una masa $M < 10 M_{\odot}$ en la Secuencia Principal terminarán su evolución como enanas blancas (Córscico et al., 2019). En cambio, aquellas que tengan masas entre $10 M_{\odot} \lesssim M \lesssim 12 M_{\odot}$ tendrán como producto final una EN. Para masas mayores, si queda algún remanente compacto, se formará una EN o un agujero negro dependiendo de la metalicidad y velocidad de rotación del objeto progenitor. Sin embargo, aún existen discusiones respecto de las condiciones necesarias para la formación de uno u otro objeto (Athem Alsabti, 2015).

Durante la evolución estelar, las estrellas que tienen masa suficiente como para terminar en ENs poseen temperaturas internas tan altas (mayores que 10^8 K) como para quemar los elementos resultantes del proceso de reacción nuclear denominado *triple- α* ². Luego, mediante sucesivas etapas de reacciones nucleares, se forman elementos cada vez más pesados que se distribuyen en capas concéntricas más internas, hasta llegar a formar núcleos de hierro. Al finalizar estas etapas, la estrella queda compuesta por capas de distintos elementos, tales como hidrógeno, helio, carbono, neón, oxígeno y silicio, con un núcleo de hierro inerte. El isótopo de hierro ^{56}Fe es el elemento más estable de todos los núcleos ordinarios que puede producirse en sistemas astrofísicos³. Las reacciones nucleares que involucran al ^{56}Fe son procesos endotérmicos y, por lo tanto, en el interior de las estrellas no sigue habiendo fusión nuclear que genere elementos más pesados a partir de él. En las capas más externas, los elementos más livianos se siguen fusionando y formando elementos más pesados, haciendo que la masa del núcleo aumente

²El proceso *triple- α* es el proceso por el cual tres núcleos de helio se transforman en un núcleo de carbono.

³El ^{62}Ni es el más estable de todos los elementos, pero es difícil que se produzca en sistemas astrofísicos como las EN.

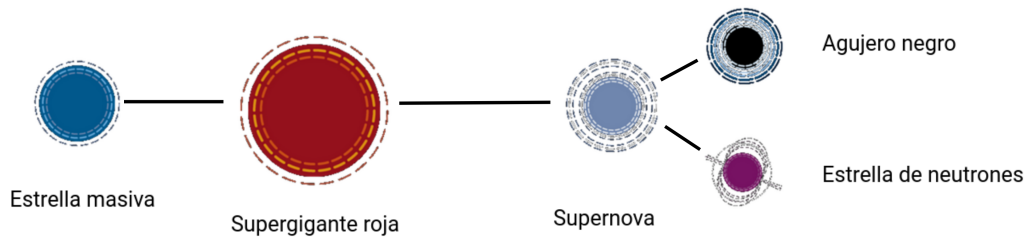


Figura 1.1: Diagrama esquemático de la evolución de una estrella masiva. En esta tesis nos centraremos solamente en uno de los posibles objetos compactos remanentes: las ENs. Imagen tomada de Wikipedia. URL: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Ciclo_de_vida_de_las_estrellas.png

hasta que la fuerza de gravedad lo comprima y desencadene una Supernova tipo II, que deja como remanente compacto una proto-estrella de neutrones (PEN). La Fig. 1.1 muestra un esquema simplificado de la evolución de una estrella masiva hasta llegar a EN.

Inicialmente, la PEN tiene un núcleo extremadamente denso, rodeado de una envoltura de baja densidad que sigue acretando materia del colapso. Además, los protones de los núcleos atómicos se combinan con los electrones capturados, formando neutrones y emitiendo neutrinos. En este proceso, el núcleo de hierro inerte captura electrones emitiendo energía extra en forma de neutrinos mediante la reacción:



El interior de las PEN es opaco a los neutrinos, es decir, el camino libre medio de los neutrinos es mucho menor que el radio de la PEN, y esto hace que queden atrapados en él. En la periferia la situación es diferente y, al ser posible la emisión de neutrinos, se produce una disminución en la presión, haciendo que la PEN se contraiga rápidamente. Luego de pocos segundos, las condiciones de opacidad cambian, se hace posible el escape de neutrinos y por lo tanto aumenta considerablemente la tasa de enfriamiento de la estrella. Dicho proceso se mantendrá hasta lograr el equilibrio hidrostático -unos 50 segundos luego de haberse formado la PEN-. Este equilibrio se alcanza debido a la presión que se genera como consecuencia de que los neutrones son fermiones y su comportamiento está regido por el principio de exclusión de Pauli. En este punto, la estrella alcanza una temperatura del orden de

$$T \sim 6 \times 10^5 \text{ K} \sim 6 \times 10^{-5} \text{ MeV} , \quad (1.2)$$

Si bien la temperatura es lo suficientemente alta como para emitir en el espectro

de rayos X, dado que $T \ll T_{\text{Fermi}}$ (siendo T_{Fermi} la temperatura de Fermi) es posible considerar la aproximación $T = 0$ para describir el comportamiento de la materia dentro de una EN.

Al finalizar este proceso de enfriamiento, queda formada una EN estable, de aproximadamente 10 km de radio y masas de alrededor de 1,5-2 M_{\odot} . Estos valores dan, en promedio, una densidad extremadamente alta para estos objetos, $\rho_{\text{EN}} \sim 4 \times 10^{17} \text{ kg/m}^3$. Esta densidad resulta del orden de la densidad de saturación nuclear, $\rho_{\text{nuc}} = 2,3 \times 10^{17} \text{ kg/m}^3$, que representa la densidad de los núcleos atómicos.

Además de las altas densidades, otra de las características relevantes de las ENs son sus intensos campos magnéticos (CMs). No se comprende muy bien el mecanismo capaz de generarlos, aunque la manera más sencilla de explicarlos es que sean consecuencia de la compresión del flujo magnético ocurrida durante el colapso de la estrella progenitora. Sin embargo, ese mecanismo sólo permite explicar CMs de $10^{11} - 10^{13} \text{ G}$ en la superficie de las ENs y existen evidencias observacionales de CMs superficiales de hasta 10^{15} G ⁴. Estos objetos con CMs tan intensos se denominan *magnetares*. Para lograr explicar CMs de este orden se debe considerar el efecto dínamo, dependiente de la relación entre la rotación y la convección de materia dentro de la EN. Si una PEN entrega un 10 % de su energía cinética al CM es posible explicar CMs superficiales de hasta 10^{15} G . (Duncan y Thompson, 1992).

Debido a los valores extremos que toman las magnitudes mencionadas en el interior de las ENs, no se conoce con precisión la naturaleza, propiedades y características de la materia que compone a estos objetos; para estudiarla y construir modelos consistentes es necesario adentrarse en la teoría de la Cromodinámica Cuántica (QCD, por sus siglas en inglés)

La QCD es una teoría de campos que describe el funcionamiento de la fuerza fuerte, una de las cuatro fuerzas fundamentales de la naturaleza. En esta teoría, se les asigna a los quarks -partículas fundamentales que componen los neutrones- un nuevo tipo de carga, llamada *carga de color*. A diferencia de la carga eléctrica que contempla cargas de dos naturalezas diferentes (positiva y negativa), la carga de color puede encontrarse en tres colores diferentes, *rojo*, *verde* y *azul*, por convención.

Una manera de representar el comportamiento de la materia que predice la QCD es a través de un diagrama de fases, esquemáticamente representado en la Fig. 1.2. Un diagrama de fases nos permite inferir ciertos comportamientos de la materia cuando se encuentra sujeta a distintas condiciones para determinadas cantidades termodinámicas, como pueden ser la temperatura y la presión.

⁴Ver <http://www.physics.mcgill.ca/pulsar/magnetar/main.html>

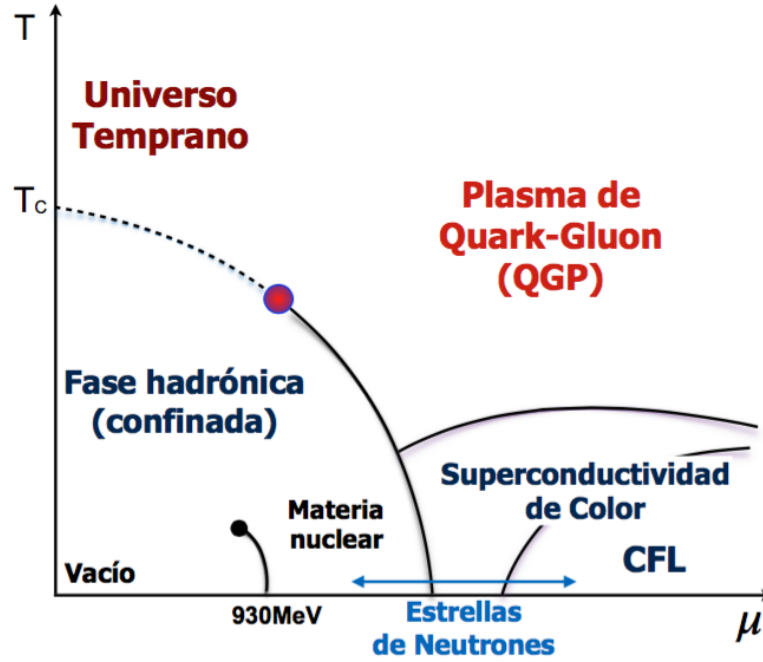


Figura 1.2: Diagrama de fases esquemático de la QCD. Gráfico del potencial químico, μ , en el eje horizontal y la temperatura, T , en el eje vertical. La temperatura en el interior de una EN es lo suficientemente baja para considerar la aproximación $T = 0$, por lo que podemos ubicar a la materia que la forma sobre el eje del potencial químico. La materia podría tener una o más transiciones de fase a medida que aumenta la densidad.

En este diagrama de fases (ver Fig. 1.2) podemos observar que para bajos potenciales químicos y altas temperaturas estamos en las condiciones del Universo temprano (línea punteada). Simulaciones numéricas de la QCD, experimentos de colisiones de iones pesados y numerosos estudios teóricos sugieren que en este régimen, la materia sufriría una transición de fase a la materia de quarks denominada *crossover* (ver Orsaria et al. (2019) y sus referencias). El punto rojo se denomina *punto crítico terminal* y corresponde a una transición de fase de segundo orden.

Hacia el otro lado de diagrama, podemos ver que a medida que disminuye la temperatura y para potenciales químicos relativamente bajos, la materia se encuentra formando un gas de hadrones. Si se mantiene baja la temperatura y se aumenta el potencial químico (o, equivalentemente, la presión), entramos en el régimen de las ENs. En esta región del diagrama empiezan a aparecer los núcleos atómicos. Si la presión sigue aumentando ocurre una transición de fase de primer orden (línea continua) que 'desarma' los hadrones y quedan libres los quarks que los conformaban. Si la densidad aumenta aún más, ocurre una segunda transición de fase y la materia de quarks entra en una fase superconductor de color, llamada Color Flavor Locked (CFL). En la superconductividad de color los quarks

se juntan formando pares de Cooper análogos a los de la superconductividad electromagnética ordinaria.

En el marco de la QCD también existe la denominada *hipótesis de materia extraña de quarks* (Witten, 1984). De acuerdo con dicha hipótesis, los núcleos ordinarios son estabilizados producto de su pequeño tamaño o son metaestables con tiempos de vida que exceden ampliamente la edad del Universo. La materia extraña de quarks sería, entonces, más estable que la materia nuclear. Si esta hipótesis es correcta, es probable que muchas estrellas que consideramos ENs en realidad estén compuestas íntegramente por quarks (Farhi y Jaffe, 1984), llamadas *estrellas de quarks* (EQs) (Fig. 1.3). Estudios teóricos sugieren, incluso, que el estado fundamental de la materia de quarks desconfina podría ser un superconductor de color, es decir, estar en la zona del diagrama correspondiente a la fase CFL (Alford et al., 2008).

El primer modelo de EQs fue propuesto por Itoh en el año 1970 (Itoh, 1970), y aunque hasta el día de hoy se continúa trabajando en modelos teóricos de EQs, aún no se ha encontrado evidencia observacional de su existencia. En las EQs, la materia no se mantendría unida por la atracción gravitacional, sino por la interacción fuerte entre los quarks, de allí que sea necesario recurrir a la QCD para estudiar estos objetos. Siguiendo lo sugerido por el diagrama de fases de la QCD, las hipotéticas EQs podrían ser superconductoras de color si la materia CFL fuera más estable que la materia nuclear. Por lo tanto, enfocaremos este trabajo en el estudio de las EQs superconductoras de color.

Para trabajar con estos objetos, necesitamos conocer la ecuación de estado (EdE) que nos describa el comportamiento de la materia en un régimen de densidades muy altas y temperaturas bajas. La EdE nos brinda una relación entre las magnitudes termodinámicas que caracterizan la materia, como la temperatura (T), la presión (P), la densidad de número de partículas (ρ), la densidad de energía, (ε), el potencial químico (μ), el volumen (V). Luego, con la EdE podemos determinar el estado termodinámico del sistema que estemos considerando. Para construir la EdE debemos, además, estudiar cómo afecta la presencia de un CM intenso a las cantidades termodinámicas que estamos considerando.

Además, como estudiaremos EQs debemos incluir en la EdE la descripción microscópica de los quarks. Para hacerlo, utilizaremos el modelo de bolsa de MIT propuesto por Chodos et al. (1974a). Este es un modelo fenomenológico de quarks relativistas basado en una descripción hadrónica anterior (Chodos et al., 1974b) que considera interacciones fuertes de partículas con sus campos confinados a una región finita del espacio, llamada *bolsa*.

Por otro lado, para estudiar objetos compactos como las ENs o EQs debemos ubicarnos en el marco de la Relatividad General, debido a los grandes potenciales

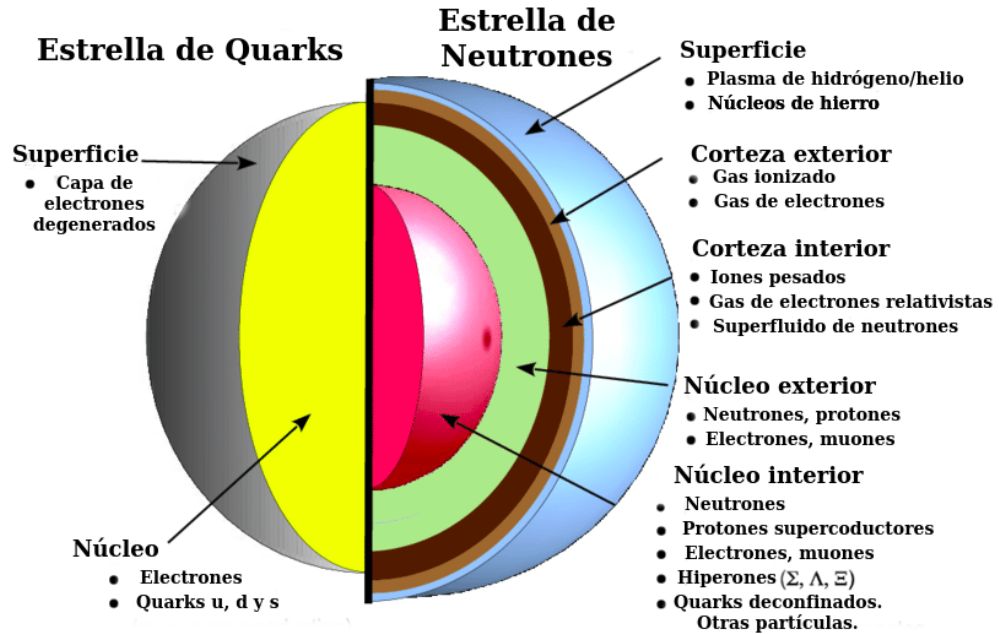


Figura 1.3: Esquema comparativo entre EQs y ENs y Estrellas Híbridas de quarks-hadrones. Imagen tomada y traducida de Weber et al. (2014).

gravitatorios que se generan en sus proximidades. A partir de las EdE propuestas podremos resolver las ecuaciones de TOV y calcular cantidades físicas relevantes de estos objetos tales como la masa, y el radio, entre otras.

Finalmente, dado que las ENs aisladas pueden oscilar, estudiaremos sus modos de oscilación, calculando sus frecuencias de oscilación y sus tiempos de amortiguamiento. Si bien existen varios modos de oscilación posibles, los modos de oscilación no radiales para estrellas no rotantes pueden ser los modos de gravedad g , los modos de presión p o el modo fundamental f . En el contexto de nuestro trabajo sólo nos enfocaremos en el modo f , porque concentra la mayor cantidad de la energía potencialmente detectable. El estudio de los modos de oscilación no radiales es de particular interés debido a emiten ondas gravitacionales. Aunque las frecuencias asociadas a estos modos están por debajo de la sensibilidad de los detectores actuales (como LIGO), proyectos futuros permitirán medir ondas gravitacionales en los rangos de frecuencia asociadas a estas oscilaciones. Se espera que el detector de ondas gravitacionales Einstein, cuya fecha de lanzamiento aún no está definida, sea capaz de detectar las oscilaciones no-radiales del modo f , si es que las predicciones de emisión de energía para estos modos son correctas (Morozova et al., 2018).

Por otro lado, no obstante las observaciones de ENs siguen presentando gran-

des dificultades, en los últimos años se han desarrollado laboratorios y observatorios que permiten avanzar en la observación de las ENs como nunca antes había sido posible. Desde el año 2016, con la primera detección de ondas gravitacionales (Abbott y et al., 2016) y con los nuevos telescopios orientados a la observación de ENs, como NICER (lanzado en 2017), se han obtenido mediciones de púlsares de $\sim 2 M_{\odot}$ (Arzoumanian et al., 2018; Fonseca et al., 2021), de eventos de ondas gravitacionales en fusiones de ENs, como GW170817 (Abbott et al., 2017) y GW190425 (Abbott et al., 2020), y observaciones de púlsares en rayos-X (Miller y et al., 2019; Riley y et al., 2019; Riley et al., 2021; Miller et al., 2021). Estas observaciones han permitido establecer cotas cada vez más precisas a los radios, y masas de las ENs, que allanan el camino hacia la obtención de una EdE que describa el comportamiento de la materia en las extremas condiciones en las que se encuentran en el interior de estos objetos compactos.

En resumen, los objetivos de este trabajo son los siguientes:

- Proponer EdEs que permitan recrear las condiciones dentro de un objeto compacto como una EQ, con el objetivo de avanzar hacia un comprensión más profunda de la QCD en condiciones extremas, estudiando la estabilidad de la materia en el marco de la hipótesis de materia extraña de quarks y la factibilidad de reproducir objetos como los que han sido observados.
- Estudiar los efectos y la relevancia astrofísica de considerar una fase superconductora de color y CMs intensos en la materia de quarks.
- Resolver las ecuaciones TOV considerando dichas EdEs, para obtener cantidades observables de interés, tales como la masa y el radio de las EQs correspondientes a las familias generadas por cada EdE.
- Calcular la frecuencia de oscilación y el tiempo de amortiguamiento del modo f para las EQs calculadas anteriormente, con el objetivo de obtener potenciales observables para los detectores de ondas gravitacionales futuros.

Este trabajo de tesis se organiza en cuatro capítulos. Además de este capítulo introductorio, tendremos:

- **Capítulo 2:** En esta sección describiremos parte por parte las componentes del modelo utilizado para la construcción de la EdE y plantearemos las ecuaciones que necesitaremos para describir EQs superconductoras de color magnetizadas.
- **Capítulo 3:** En este capítulo presentaremos los resultados microfísicos y astrofísicos de nuestro trabajo, estudiando la estabilidad de la materia extraña en el marco del modelo utilizado, y analizando los resultados obtenidos

para la estructura y modos de oscilación para las configuraciones estables de EQs.

- **Capítulo 4:** En el último capítulo se hará un resumen del trabajo realizado y se presentarán las conclusiones del mismo. Además, se planteará el camino a seguir en trabajos futuros.

Capítulo 2

Materia de Quarks y Contexto Astrofísico

Como ya anticipamos en la Introducción (Capítulo 1), la información fundamental desde el punto de vista de la microfísica para abordar el estudio de la estructura y composición de los objetos compactos es la EdE. Esta establece la relación entre la densidad de energía, la presión y otras cantidades termodinámicas asociadas a la materia densa que compone a estos objetos. Para construir la EdE es necesario considerar modelos para las partículas del sistema que vamos a estudiar y herramientas de mecánica estadística.

Para describir el comportamiento de las partículas subatómicas utilizaremos, como base, el Modelo Estándar. Este modelo propone la existencia de doce partículas elementales con sus correspondientes antipartículas: seis quarks (up, down, strange, charm, bottom y top) y seis leptones (electrón, neutrino electrónico, muón, neutrino muónico, tau y neutrino tau), ver Fig. 2.1. En particular, por ser las EQs nuestro objeto de estudio, nos centraremos en los quarks más livianos, u , d , s , y en los leptones cargados más livianos (electrón y muón) ya que los procesos de equilibrio químico que ocurren en el interior de estos objetos compactos involucran sólo a estas partículas.

Además, la interacción entre las partículas del modelo estándar está regida por las cuatro fuerzas fundamentales de la naturaleza. Estas fuerzas tienen asociadas partículas que hacen de mediadores: el gravitón para la fuerza gravitacional (aún sin evidencia observacional), los fotones para la fuerza electromagnética, los bosones W^\pm y Z para la fuerza débil y los gluones para la fuerza fuerte. Las interacciones fuertes son las que producen que los quarks se agrupen para formar hadrones y mesones. De acuerdo con la QCD, serán estables aquellas partículas que tengan color blanco o neutro. Como en esta teoría de las interacciones fuertes el color de un quark puede tomar uno de tres valores o cargas de color, los tres quarks que conforman los bariones deben tener tres colores distintos, o en el caso

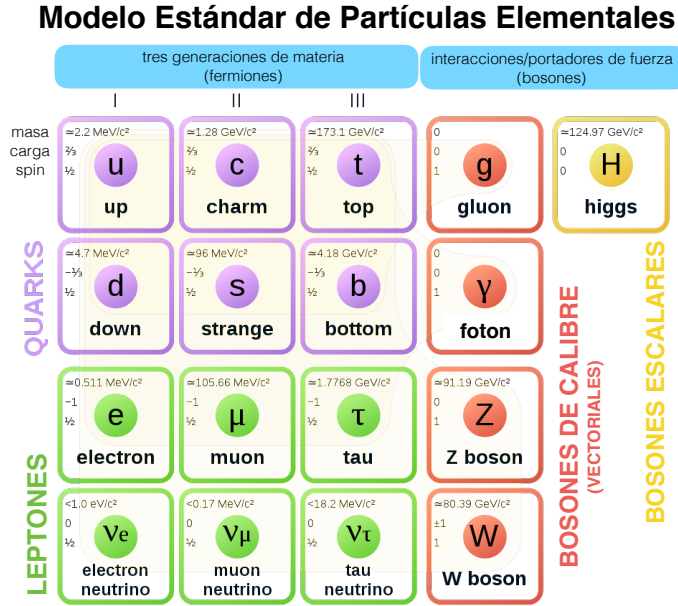


Figura 2.1: Esquema del modelo estándar de partículas elementales. Además de las partículas representadas en la imagen, los leptones y quarks tienen sus respectivas antipartículas. Imagen adaptada de wikipedia. URL: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Standard_Model_of_Elementary_Particles.svg

de los mesones -que están formados por dos quarks- deben estar compuestos por un quark y su correspondiente anti-quark. Esta propiedad, asociada con el color, es la responsable de generar el *confinamiento*, es decir que no pueden existir de manera aislada partículas con color no-blanco, como quarks o gluones (Forshaw, 1997). Sólo podrían existir en condiciones de extrema temperatura o densidad, como es el caso de la colisión de iones pesados o del interior de una EN. Además, los quarks pueden considerarse partículas prácticamente libres a cortas distancias, fenómeno conocido como *libertad asintótica*. Al separarse, la intensidad de la interacción que los mantiene unidos aumenta, debido al fenómeno de *confinamiento* mencionado anteriormente.

En los casos de bajas densidades y bajas temperaturas, como las distancias entre los quarks aumentan, la constante de acoplamiento de la interacción fuerte aumenta y la teoría se vuelve altamente no-perturbativa (ver Orsaria et al. (2019) y referencias allí mencionadas). Como consecuencia de esto, la descripción de la materia en este régimen se dificulta y se torna necesario recurrir a modelos efectivos, con lagrangianos más simples que el de la QCD pero que conservan algunas propiedades fundamentales de la teoría. Algunos ejemplos de modelos efectivos de la QCD son: el modelo de bolsa del MIT (Chodos et al., 1974a), el modelo de Nambu Jona-Lasinio, local y no local (ver, por ejemplo, Contrera et al., 2010; Orsaria et al., 2013; Ranea-Sandoval et al., 2019) y el modelo de Metodo

de Campo correlacionador (ver, por ejemplo, Nefediev et al., 2009; Mariani et al., 2017, 2019a), entre otros.

En esta tesis, construiremos la EdE para materia de quarks magnetizada, considerando el modelo de bolsa del MIT, suponiendo una fase superconductora de color -la fase CFL- de la cual daremos detalles en las próximas subsecciones.

2.1. Modelo de bolsa de MIT como EdE

Para hacer una descripción macroscópica de un sistema compuesto por un número muy grande de partículas (del orden del número de Avogadro), es decir, una descripción en términos de parámetros globales que tienen interpretación en escalas astronómicas, usamos a la termodinámica como herramienta. Estas partículas obedecen las leyes de la mecánica (clásica o cuántica, dependiendo de las magnitudes involucradas); luego, un estudio de ellas debe basarse en un análisis de la dinámica de un sistema de muchas partículas. La Mecánica Estadística establece una conexión entre ambos niveles de descripción. Por lo tanto, con el objetivo de obtener una descripción macroscópica a partir de la descripción microscópica del sistema brindada por el modelo de bolsa del MIT, es necesario situarnos en el marco de la Mecánica Estadística. Dado que no tenemos cantidades fijas de partículas ni energías determinadas, debemos utilizar el ensamble gran canónico.

En el ensamble gran canónico podemos obtener la función de partición del sistema como

$$Z(V, \beta, \mu) = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\{n_i\}} \prod_i e^{-\beta n_i (\epsilon_i - \mu)} \quad (2.1)$$

donde V es el volumen del sistema, N es el número total de partículas del gas, la productoria se extiende sobre cada microestado i para una partícula, n_i es el número de partículas en el microestado i y ϵ_i es la energía de una partícula en dicho microestado. $\{n_i\}$ es el conjunto de todos los posibles números de ocupación para cada uno de los microestados, y β es la inversa de la constante de Boltzmann multiplicada por la temperatura. Para un gas de Fermi, debido al principio de exclusión de Pauli, el número de ocupación de partículas n_i para cada estado i está limitado a 0 o 1. Por lo tanto, la Ec. (2.1) se convierte en

$$Z(V, \beta, \mu) = \prod_i \sum_{n_i=0,1} e^{-\beta n_i (\epsilon_i - \mu)} = \prod_i \{1 + e^{-\beta (\epsilon_i - \mu)}\} = \exp \sum_i \ln [1 + e^{-\beta (\epsilon_i - \mu)}] \quad (2.2)$$

Sabiendo que el estado i de una sola partícula para un gas ideal puede tomarse como un estado de onda plana de cantidad de movimiento \vec{k} , podemos reemplazar

la suma de los estados i por una integral en k de la siguiente forma (Kodama, 2002)

$$\sum_i \rightarrow \frac{gV}{2\pi\hbar} \int d^3k, \quad (2.3)$$

donde g es el factor de degeneración que será 2 en el caso de fermiones sin carga de color, y 6 en el caso de los quarks. Además, consideraremos el sistema natural de unidades en el cual $\hbar = c = 1$. Con estas consideraciones, podemos escribir

$$\ln Z(V, \beta, \mu) = \frac{gV}{2\pi\hbar} \int d^3k \ln [1 + e^{-\beta(\varepsilon_k - \mu)}], \quad (2.4)$$

donde $\varepsilon_k = \sqrt{k^2 + m^2}$ es la energía del estado con momento \vec{k} y m es la masa de la partícula. En el ensamble gran canónico podemos calcular todas las cantidades termodinámicas derivadas del gran potencial, obtenido a partir de la función de partición Z , Ec. (2.2). El gran potencial tiene la forma:

$$\Omega = -PV = \ln Z(V, \beta, \mu), \quad (2.5)$$

donde P es la presión del sistema. Usando la relación de Euler, podemos escribir

$$\Omega(V, \beta, \mu) = U - TS - \mu N, \quad (2.6)$$

donde la energía total del sistema es

$$U = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z(V, \beta, \mu)|_{\mu}, \quad (2.7)$$

el numero total de partículas del sistema está dado por

$$N = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \ln Z(V, \beta, \mu)|_{\beta}, \quad (2.8)$$

y la entropía puede despejarse de la Ec. (2.6). Luego, para construir la EdE nos basaremos en las Ecs. (2.5) y (2.6).

El modelo de bolsa (*bag*) del MIT fue originalmente propuesto en 1974 (Chodos et al., 1974b) para describir el comportamiento microscópico de los hadrones y luego adaptado para describir a los quarks (Chodos et al., 1974a). Este modelo ha sido utilizado para explicar el comportamiento de la materia de quarks en numerosos trabajos (Alcock et al., 1986; Glendenning et al., 1995; Zdunik et al., 2000; Nicotra et al., 2006; Negreiros et al., 2009; Isayev, 2015; Banerjee et al., 2021). El modelo busca representar fenomenológicamente la libertad asintótica y el confinamiento de los quarks a través de la contribución a la densidad de energía y presión de un parámetro libre llamado *Bag*. Recordando que el tensor

momento-energía de un fluido perfecto en reposo es

$$T_{\mu\nu} = \text{diag}(\epsilon, P, P, P), \quad (2.9)$$

donde ϵ es la densidad de energía y P la presión, la constante de bolsa se interpreta como una contribución positiva a la densidad de energía ϵ y una contribución negativa a la presión P dentro de la bolsa. De esta forma, el efecto del *Bag* se considera agregando un término a $T_{\mu\nu}$ de la forma *Bag* $g_{\mu\nu}$ (donde $g_{\mu\nu}$ representa a la métrica del espacio-tiempo), lo cual resulta en un cambio en la presión y la densidad de energía del sistema, dado por:

$$P = \sum_f P_f - \text{Bag}, \quad (2.10)$$

$$\epsilon = \sum_f \epsilon_f + \text{Bag}, \quad (2.11)$$

donde en nuestro caso hemos agregado el subíndice f para representar los sabores de los quarks que tendremos en cuenta en la EdE: u , d y s . Así, en el caso de CM nulo, la presión de cada sabor de quarks podrá calcularse usando la (Ec. 2.4) junto con la Ec. (2.10), que, combinada con las Ecs. (2.5) y (2.6), permitirá obtener la EdE de la materia de quarks en el marco de este modelo.

2.1.1. Materia de quarks magnetizada

Si consideramos un elemento de volumen sumergido en un CM constante, homogéneo y en la dirección del eje z , el momento de las partículas eléctricamente cargadas es cuantizado en los niveles de Landau en la dirección perpendicular a dicho CM. Para una partícula con carga q , el momento transverso magnético es:

$$k_{\perp}^2(\nu) = 2\nu|q|B, \quad (2.12)$$

donde

$$\nu = n + \frac{1}{2} - \text{sgn}(q)\frac{g s}{2}, \quad (2.13)$$

siendo n el número cuántico angular, s la proyección del spin, g el factor de degeneración de spin de la partícula, y $\text{sgn}(x)$ es la función signo (Landau y Lifshitz, 1981). Tomamos $s = \pm 1$, $g = 2$ para partículas de spin $1/2$ (Mariani et al., 2019b), y $s = \pm 3, \pm 1$, $g = 2/3$ para partículas con spin $3/2$ (Belinfante, 1953; Torres del Castillo y Velázquez Castro, 2004).

Debido a la cuantización de Landau, la integral de volumen en el espacio de

momentos de la Ec. (2.3) se reemplaza por

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k f(k) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dk_z d^2k_\perp f(k) = \frac{|qB|}{2\pi^2} \sum_{-s}^{+s} \sum_{n=0}^{\nu \leq \nu_{\text{máx}}} \int_0^{k_{F,z}(\nu)} dk_z f(\nu, k_z). \quad (2.14)$$

La presencia de un CM rompe con la simetría esférica del sistema y por lo tanto se genera una anisotropía en la presión; de esta forma debemos separar a la presión en dos componentes: una presión paralela al CM (P_\parallel) y una presión perpendicular (P_\perp). Luego el tensor momento-energía. queda

$$T_{\mu\nu}^{\text{materia}} = \text{diag}(\epsilon, P_\perp, P_\perp, P_\parallel). \quad (2.15)$$

Además, se debe considerar la contribución puramente electromagnética a la presión y densidad de energía para un CM en la dirección del eje z :

$$T_{\mu\nu}^{\text{CM}} = \text{diag}(B^2/2, B^2/2, B^2/2, -B^2/2). \quad (2.16)$$

EL tensor momento-energía total resulta:

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{\text{materia}} + T_{\mu\nu}^{\text{CM}}. \quad (2.17)$$

El gran potencial se relacionará con las componentes de la presión como:

$$\begin{aligned} P_\parallel &= -\Omega, \\ P_\perp &= -\Omega - \mathcal{M}B, \end{aligned}$$

siendo $\mathcal{M} = -\partial\Omega/\partial B$ la magnetización. El gran potencial Ω puede escribirse como (Strickland et al., 2012)

$$\Omega = \frac{|qB|}{2\pi^2} \sum_{-s}^{+s} \sum_{n=0}^{\nu \leq \nu_{\text{máx}}} \int_0^{k_{F,z}(\nu)} dk_z \frac{k_z^2}{E_F}, \quad (2.18)$$

donde

$$E_F = \sqrt{k_z^2 + \bar{m}^2(\nu)}, \quad (2.19)$$

es el espectro de energías,

$$\bar{m}^2(\nu) = m^2 + k_\perp(\nu)^2, \quad (2.20)$$

define la componente z del momento de Fermi,

$$k_{z,F}(\nu) = \sqrt{\mu^2 - \bar{m}^2(\nu)}, \quad (2.21)$$

y ν_{\max} el valor hasta el cual los niveles de Landau están poblados,

$$\nu_{\max} = \left\lfloor \frac{\mu^2 - m^2}{2|q|B} \right\rfloor, \quad (2.22)$$

donde $\lfloor x \rfloor$ es el mayor entero menor o igual a x .

Resolviendo la integral de la Ec. (2.18) y usando las expresiones de las Ecs. (2.7) y (2.8) en el límite de temperatura cero, podemos escribir las cantidades termodinámicas que nos interesan para la materia extraña de quarks magnetizada (MEQM) como (Strickland et al., 2012):

$$n = \frac{\gamma_c |q| B}{2\pi^2} \sum_{-s}^{+s} \sum_{n=0}^{\nu \leq \nu_{\max}} k_{z,F}, \quad (2.23)$$

$$\epsilon = \frac{\gamma_c |q| B}{4\pi^2} \sum_{-s}^{+s} \sum_{n=0}^{\nu \leq \nu_{\max}} \left[E_F k_{z,F} + \bar{m}^2 \ln \left(\frac{E_F + k_{z,F}}{\bar{m}} \right) \right], \quad (2.24)$$

$$P_{\parallel} = \frac{\gamma_c |q| B}{4\pi^2} \sum_{-s}^{+s} \sum_{n=0}^{\nu \leq \nu_{\max}} \left[E_F k_{z,F} - \bar{m}^2 \ln \left(\frac{E_F + k_{z,F}}{\bar{m}} \right) \right], \quad (2.25)$$

$$P_{\perp} = \frac{\gamma_c |q|^2 B^2}{2\pi^2} \sum_{-s}^{+s} \sum_{n=0}^{\nu \leq \nu_{\max}} v \ln \left(\frac{E_F + k_{z,F}}{\bar{m}} \right), \quad (2.26)$$

donde q es la carga de la especie de quark considerada y γ_c es el factor de degeneración de color. Tomamos $\gamma_c = 3$.

Además, el modelado de CMs en el interior de las ENs implica la presencia de componentes toroidales y poloidales que garanticen la estabilidad de la estrella. Cada una de estas componentes rompe la simetría esférica del objeto y produce distintos tipos de deformaciones (Braithwaite y Spruit, 2006; Ciolfi y Rezzolla, 2013; Sur et al., 2020). Sin embargo, si ambas componentes son del mismo orden, es posible que estas deformaciones se compensen y, globalmente, la simetría esférica se conserve. Bajo estas consideraciones, trabajaremos dentro de la aproximación de *campo caótico* (Flores et al., 2020; Zel'dovich y Novikov, 2014). Bajo esta aproximación, aunque localmente adoptemos un CM con una dirección privilegiada en el eje z , globalmente las direcciones cambian de manera aleatoria en el interior de la estrella, compensando las anisotropías y permitiendo mantener la hipótesis de simetría esférica del objeto compacto. Esta hipótesis permite, además, promediar las componentes de las presiones perpendicular y paralela, y construir una presión efectiva local (Bednarek et al., 2003; Flores et al., 2016; Mariani et al., 2019b):

$$P = \frac{T_{11} + T_{22} + T_{33}}{3} = \frac{2P_{\perp} + P_{\parallel}}{3} + \frac{B^2}{6}. \quad (2.27)$$

Por último, para modelar la intensidad del CM en el interior de la estrella, utilizaremos una parametrización que supone un CM variable, que va desde un valor que podemos asociar al del CM en el centro de la EQ, B_{cen} , disminuyendo hasta el valor en la superficie, B_{sup} :

$$B = B_{sup} + B_{cen} \left(1 - e^{(\beta((\mu - m_n)^\alpha)/m_n)}\right), \quad (2.28)$$

donde $\alpha = 2,5$ y $\beta = -4,08 \times 10^{-4}$ están ajustado adecuadamente para reproducir valores del CM parametrizado en función de la densidad en Dexheimer et al. (2012) y m_n es la masa del neutrón.

2.1.2. CFL en la EdE magnetizada

Tal como comentamos cuando discutimos el diagrama de fases de la QCD en el Capítulo 1, probablemente la materia a altas densidades y temperaturas sea un superconductor de color. En la QCD cualquier interacción atractiva quark-quark en este tipo de regímenes llevaría a la aparición de condensados llamados di-quarks (Barrois, 1977).

Esto puede entenderse si hacemos una analogía con la superconductividad ordinaria. Cooper demostró que en un superconductor ordinario, una atracción arbitrariamente pequeña entre los electrones de un metal puede hacer que un estado de electrones apareado tenga una energía más baja que la energía de Fermi (Bardeen et al., 1957). Un superconductor de color esta formado por pares de Cooper, similar a los condensados de electrones en la superconductividad ordinaria. Al contrario de lo que sucede con los electrones, la superconductividad de color es una teoría más compleja, ya que en la formación de los di-quarks están involucrados tres sabores y tres colores diferentes. Los di-quarks o condensados de quarks se presentan en diversas variedades, cada una de las cuales es una fase separada de la materia.

Debido a las altas densidades en el interior de las EQs, podría formarse un estado particularmente simétrico de condensados de quarks llamado *color-flavor locked*, CFL. Dado que cada uno de los quarks livianos u , d y s pueden describirse según los colores rojo, verde y azul y que todos los quarks en la fase CFL se encuentran formando di-quarks, estos pares superconductores deben describirse con una matriz de 9x9 patrones posibles de apareamiento. La formación de di-quarks reduce la energía del sistema para los apareamientos de color predominantes (ud , us , ds), en una cantidad denominada *brecha de superconductividad*. Esta cantidad, que denotaremos con la letra Δ , es una función del potencial químico, pero puede tratarse como un parámetro libre del modelo. Este enfoque fenomenológico es útil y una buena aproximación en el contexto físico de las EQs (Noronha y Shovkovy,

2007).

Para incluir el efecto de la superconductividad del color de manera fenomenológica, se trabaja a segundo orden en el término asociado con la brecha de superconductividad, lo que simplifica considerablemente el cálculo de las diferentes cantidades termodinámicas del sistema (Alford et al., 2001). De esta forma, es posible considerar el gran potencial de un estado ficticio de quarks no apareados que se transforma a un estado superconductor una vez que los quarks involucrados en el apareamiento alcanzan un momento de Fermi común. Así, de manera análoga a lo que sucede en la superconductividad ordinaria, los di-quarks formados en la fase CFL son pares de Cooper convencionales con momento cero.

Más específicamente, el gran potencial, Ω_{CFL} (y a partir de él todas las cantidades termodinámicas de interés) puede ser calculado partiendo de un Ω_{libre} de quarks sin aparearse, suponiendo que estos quarks tienen un momento común de Fermi. Teniendo en cuenta que la energía de ligadura de los pares de di-quarks esta dada por $3(\Delta\bar{\mu}/\pi)^2$ (Alford y Rajagopal, 2002), y que

$$\bar{\mu} = \frac{1}{N} \sum_i \mu_i \quad (2.29)$$

es el potencial químico promedio relacionado con los N quarks que participan de la formación de di-quarks, el potencial químico para los quarks u , d y s está definido por sus cargas eléctrica y de color de la forma (González Felipe et al., 2011):

$$\mu_i = \mu_B - Q\mu_e + T_3\mu_3 + T_8\mu_8, \quad (2.30)$$

con

$$\begin{aligned} Q &= \text{diag}(2/3, -1/3, -1/3), \\ T_3 &= \text{diag}(1/2, -1/2, 0), \\ T_8 &= \text{diag}(1/3, 1/3, -2/3), \end{aligned}$$

donde Q es la matriz diagonal que corresponde a la carga eléctrica. Los potenciales de color μ_3 y μ_8 están asociados a las dos cargas de color del grupo $SU(3)_c$ que conmutan entre sí, T_3 y T_8 son las matrices diagonales de carga de color, generadoras de $SU(3)_c$.

La expresión de Ω_{CFL} queda:

$$\Omega_{CFL} = \Omega_{libre} - \frac{3}{\pi^2} \Delta^2 \bar{\mu}^2 + Bag, \quad (2.31)$$

donde Ω_{libre} se calcula a partir de la Ec. (2.18) de la sección 2.1.1.

La formación de una fase superconductor de color rompe la simetría de color

$SU(3)_c$, por lo que los di-quarks no son incoloros o "blancos", como en el caso de las partículas estables observadas en la naturaleza como el neutrón o el protón. Por lo tanto, en la fase CFL no sólo será necesario garantizar la neutralidad de carga eléctrica de la materia sino, además, la neutralidad de carga de color.

La neutralidad de carga eléctrica exige que

$$2n_u - n_d - n_s = 3n_e, \quad (2.32)$$

donde las densidades de número de partícula n_i están dadas por la Ec. (2.23). Cabe destacar que la Ec. (2.32), se obtiene minimizando el gran potencial total, esto es, incluyendo la contribución de los electrones en la Ec. (2.31), con respecto al potencial químico del electrón, μ_e . De la misma manera, para que la materia tenga carga de color nula hay que minimizar el gran potencial total respecto de μ_8 y μ_3 .

Como consecuencia de la imposición de la neutralidad de cargas eléctrica y de color, debe suceder que la densidad bariónica n_B sea igual a la densidad de cada quark. Luego,

$$n_u = n_d = n_s = n_B. \quad (2.33)$$

donde n_i , se calcula minimizando la expresión de la Ec. (2.31) respecto a cada potencial químico μ_i , con $i = u, d, s$.

Finalmente, la EdE para materia CFL magnetizada (MCFLM) se obtiene de las Ecs. (2.5) y (2.6).

2.2. Las ecuaciones TOV

Los potenciales gravitatorios intensos presentes en las ENs nos obligan a hacer un análisis gravitacional en el marco de la teoría de la Relatividad General propuesta por Einstein entre 1915 y 1916 (Einstein, 1915). Dicha teoría nos propone que el campo gravitatorio debe ser interpretado como una modificación del espacio-tiempo generada por la presencia de materia-energía. Utilizado la convención de unidades $G = c = 1$ (para una discusión más detallada sobre el uso de este sistema de unidades ver el Apéndice A), la manera en que esto sucede está descrito por las ecuaciones tensoriales de campo de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (2.34)$$

donde $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$ es el tensor de curvatura de Einstein y $T_{\mu\nu}$ el tensor momento-energía. $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci, R es el escalar de Ricci y $g_{\mu\nu}$ es el tensor de la métrica. Tanto el tensor como el escalar de Ricci se obtienen a partir

de contracciones del tensor de Riemann y están relacionados con la geometría del espacio-tiempo.

De acuerdo con el teorema de Birkhoff, la geometría del espacio-tiempo fuera de un cuerpo rotante y esféricamente simétrico está dada por la métrica de Schwarzschild (Weber, 2017)

$$ds^2 = -e^{2\phi(r)} dt^2 + e^{2\lambda(r)} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (2.35)$$

con

$$e^{2\phi(r)} = e^{-2\lambda(r)} = 1 - \frac{2M}{r} \quad (2.36)$$

siendo M la masa gravitacional fuente del campo.

En el interior del objeto es necesario el planteo de una métrica diferente. Necesitamos que esta métrica sea capaz de describirnos un perfil de presión y densidad de energía estática. La formulación más general para esta situación se obtiene a partir de la Ec. (2.35), considerando a la masa gravitacional, M , como una función $m(r)$ que representa la masa contenida en una esfera de radio r . Luego, la Ec. (2.36) queda:

$$e^{2\phi(r)} = e^{-2\lambda(r)} = 1 - \frac{2m(r)}{r}. \quad (2.37)$$

Suponiendo que el fluido dentro de una estrella es un fluido ideal, el tensor momento-energía resulta

$$T_{\mu\nu} = (\epsilon(r) + P(r))u_\mu u_\nu + P(r)g_{\mu\nu}, \quad (2.38)$$

siendo P , u_μ y ϵ la presión, la tetra-velocidad y la densidad de energía del fluido, respectivamente.

Luego, a partir de las ecuaciones de Einstein para un cuerpo esféricamente simétrico y considerando un fluido ideal obtenemos las ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff:

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \epsilon(r), \quad (2.39)$$

$$\frac{dP(r)}{dr} = -[\epsilon(r) + P(r)] \frac{m(r) + 4\pi r^3 P(r)}{r(r - 2m(r))}. \quad (2.40)$$

La Ec. (2.39) es la ecuación de continuidad de masa y la Ec. (2.40) es la ecuación de equilibrio hidrostático.

Consideraremos como condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} P(R) &= 0, \\ m(0) &= 0. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Resolver el sistema de ecuaciones conformado por las Ecs. (2.39) y (2.40) nos permite conocer la relación masa-radio del objeto de estudio. Para poder hacerlo, además de imponer las condiciones de contorno 2.41 necesitamos conocer la relación $P(\epsilon)$, es decir, la EdE de la materia que compone a dichos objetos. Luego, para poder conocer la estructura de las ENs necesitamos proponer una EdE y resolver las ecuaciones TOV.

Es importante mencionar que, una vez obtenidas la solución de las ecuaciones TOV, consideraremos como estrellas estables a aquellas que cumplan con la relación $\partial M/\partial \epsilon_c > 0$, donde ϵ_c es la densidad de energía central de la estrella correspondiente. Este es el criterio tradicional para analizar la estabilidad de estrellas que poseen una sola fase, es decir, están conformadas solo por hadrones o solo por quarks. Para este tipo de configuraciones, la estabilidad se puede evaluar mediante las ecuaciones TOV analizando familias de soluciones estáticas con diferentes ϵ_c , de modo que las soluciones inestables cumplen con la relación $\partial M/\partial \epsilon_c < 0$ (Shapiro y Teukolsky, 2008). Sin embargo, esta condición simple puede no cumplirse, por ejemplo en el caso de estrellas formadas por una fase hadrónica y una de quarks, en cuyo caso la estabilidad se extiende inclusive para configuraciones en las que $\partial M/\partial \epsilon_c < 0$, modificando el diagrama masa-radio (Pereira et al., 2018). Esta situación debe ser contemplada en el caso en el que la transición de una fase de materia a otra sea abrupta (Mariani et al., 2019b). En esta tesis, el máximo en cada curva de familia de estrellas determinará la última estrella estable de dicha familia, de acuerdo al criterio de estabilidad tradicional.

2.3. Modos de oscilación y Ondas gravitacionales

Debido a que para estudiar a las ENs debemos pararnos en el marco de la Relatividad General, el análisis de los modos de oscilación debe también hacerse en ese contexto. Así, no solamente tendremos oscilaciones en el fluido de la estrella, sino que estas oscilaciones también se transferirán al espacio-tiempo generando las denominadas ondas gravitacionales (OGs). Por lo tanto, tendremos dos sistemas dinámicos acoplados.

A estos modos de oscilación se los conoce como *Modos Cuasinormales* (MCNs) y, al estar emitiendo OGs, disipan energía. En consecuencia, los MCNs describen perturbaciones de un campo que decae con el tiempo y sus frecuencias propias

son complejas, con una parte real que representa a la frecuencia de oscilación ν y una parte imaginaria, que da cuenta de la tasa de amortiguamiento τ .

Para entender el acoplamiento entre las oscilaciones del fluido de la estrella y las del espacio-tiempo, utilizaremos un sistema más simple (ver Fig. 2.2) pero que comparte las propiedades fundamentales de una EN oscilando. Este modelo simple consiste en dos cuerdas: una de longitud finita representando a la estrella y otra de longitud semi-infinita que representa al espacio-tiempo. Para representar la eficiencia de la transmisión de la perturbación de una cuerda a la otra se utiliza un resorte; cuanto mayor sea la constante del resorte, mayor será la eficiencia. Para este sistema existe un conjunto de frecuencias que no excitan la cuerda semi-infinita, aquellas en las que uno de los nodos se encuentra en el punto del acoplamiento. Para todos los demás casos existe un conjunto de frecuencias para el cual la parte imaginaria (el factor de amortiguamiento de la oscilación, como veremos en detalle más adelante) decrece si la eficiencia de transmisión de la perturbación disminuye, es decir si se reduce la constante del resorte, y otro conjunto de frecuencias, en el que pasa lo contrario. El primer conjunto corresponde a los modos de fluido (f , p , g , entre otros). El segundo conjunto corresponde a modos que no existen en contextos no relativistas y se los llama modos w . Los modos de fluido son generados principalmente por perturbaciones en el fluido y los modos w son generados por oscilaciones de la métrica del espacio-tiempo. Además, en los modos de fluido las perturbaciones espacio-temporales son pequeñas, mientras que en los modos w ocurre lo contrario (Kokkotas y Schutz, 1992; Kokkotas y Schmidt, 1999).

Si suponemos la presencia de un campo gravitatorio débil, podemos expresar a la métrica del espacio-tiempo como una métrica de fondo, representado por la métrica de Minkowski, $\eta_{\mu\nu}$, y una perturbación $h_{\mu\nu}$ a la misma (Carroll, 2019):

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1. \quad (2.42)$$

Dada esta métrica, al resolver las ecuaciones de campo de Einstein presentadas en la Ec. (2.34) de la sección (2.2) se encuentra que las soluciones en el vacío son OGs, que pueden interpretarse como una propagación de la perturbación en el espacio-tiempo que viaja a la velocidad de la luz.

Luego, para estudiar los modos de oscilación de un cuerpo esféricamente simétrico debemos, entonces, tener en cuenta los dos tipos de perturbaciones mencionados anteriormente mediante las ecuaciones propuestas por Detweiler y Lindblom (1985). Consideraremos un espacio-tiempo con una métrica de Schwarzschild

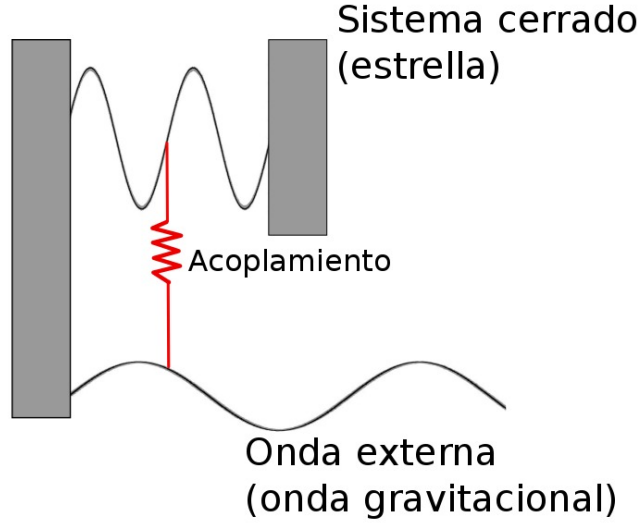


Figura 2.2: Modelo simple para el acoplamiento de los sistemas estrella y espacio-tiempo. La cuerda de longitud finita representa la estrella, el resorte representa el acoplamiento y la cuerda de longitud infinita representa espacio-tiempo. la oscilación de la cuerda asociada a la estrella representa las oscilaciones del fluido y las oscilaciones de la cuerda asociada al espacio-tiempo representan las OGs. (Imagen tomada de Schutz (2008))

de fondo sin perturbar, $g_{\mu\nu}^{(fondo)}$, y una perturbación, $h_{\mu\nu}$:

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(fondo)} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1. \quad (2.43)$$

Las representaciones matriciales de $g_{\mu\nu}^{(fondo)}$ y $h_{\mu\nu}$ son:

$$g_{\mu\nu}^{(fondo)} = \begin{pmatrix} -e^{2\phi(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\lambda(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (2.44)$$

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} H_0 e^{2\phi(r)} & H_1 & 0 & 0 \\ H_1 & H_2 e^{2\lambda(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 K \sin^2 \theta \end{pmatrix} Y_{lm}(\theta, \phi). \quad (2.45)$$

Las funciones H_0 , H_1 , H_2 y K dependen del tiempo y son las funciones de perturbación propuestas por Thorne y Campolattaro (1967) y Y_{lm} son los armónicos

esféricos. Las funciones de perturbación están dadas por:

$$\begin{aligned}
 H_1' &= -r^{-1} [l + 1 + 2Me^{\lambda}r^{-1} + 4\pi r^2 e^{\lambda}(P - \epsilon)] H_1 + r^{-1} e^{\lambda} [H_0 + K \\
 &\quad - 16\pi(\epsilon + P)V(r)], \\
 K' &= r^{-1} H_0 + \frac{1}{2} l(l+1)r^{-1} H_1 - \left[(l+1)r^{-1} - \frac{1}{2}\phi' \right] K - 8\pi(\epsilon + P)e^{\lambda/2} r^{-1} W(r), \\
 W' &= - (l+1)r^{-1} W(r) + r e^{\lambda/2} \left[\gamma^{-1} P^{-1} e^{-\phi/2} X - l(l+1)r^{-2} V(r) + \frac{1}{2} H_0 + K \right], \\
 X' &= -lr^{-1} X + (\epsilon + p)e^{\phi/2} \left\{ \frac{1}{2} \left(r^{-1} - \frac{1}{2}\phi' \right) H_0 + \frac{1}{2} \left[r\omega^2 e^{-\phi} + \frac{1}{2} l(l+1)r^{-1} \right] H_1 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} (2\phi' - r^{-1}) K - \frac{1}{2} l(l+1)\phi' r^{-2} V - r^{-1} [4\pi(\epsilon + P)e^{\lambda/2} + \omega^2 e^{\lambda/2 - \phi} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2r^2} (r^{-2} e^{-\lambda/2} \phi') \right] W,
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

donde γ es el factor adiabático y $W(r)$ y $V(r)$ son funciones que caracterizan la perturbación del fluido (Detweiler y Lindblom, 1985).

Para modelar las perturbaciones al fluido usaremos el vector desplazamiento Lagrangiano, cuyas componentes fueron derivadas por Detweiler y Lindblom (1985):

$$\begin{aligned}
 \xi^r &= \frac{1}{r^2} e^{-\lambda(r)} W(r) Y_{lm}(\theta, \phi), \\
 \xi^\theta &= -\frac{1}{r^2} V(r) \frac{\partial}{\partial \theta} Y_{lm}(\theta, \phi), \\
 \xi^\phi &= -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} V(r) \frac{\partial}{\partial \theta} Y_{lm}(\theta, \phi).
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

El problema de calcular los modos de oscilación se reducirá, entonces, a resolver numéricamente las ecuaciones diferenciales (2.46). Las oscilaciones no radiales caracterizadas anteriormente emitirán OGs siempre y cuando tengan momentos cuadrupolares gravitacionales no nulos, es decir, cuando la perturbación asociada con el índice del armónico esférico de la Ec. (2.45) sea $l \geq 2$ (Schutz, 2000).

En nuestro caso, nos restringiremos al estudio del modo fluido f y de los momentos cuadrupolares, $l = 2$, que se corresponden con la mayor emisión de energía mediante OGs.

Obtener observables como los MCNs es fundamental para el avance en el desarrollo de una EdE que pueda describir la materia en el interior de una EN. Sin embargo, como estas cantidades dependen de la EdE que estamos considerando, la sola medición de las magnitudes físicas observables asociadas a los MCNs presenta una indeterminación al relacionarlas con cantidades de interés, como la masa del objeto fuente de los MCNs. A modo de ejemplo: supongamos que en un futuro sea posible medir la frecuencia de oscilación del modo f . No sería posible,

entonces, determinar la masa del objeto a partir de esta medición pues para cada EdE posible tendría una masa distinta. No obstante, es posible hallar relaciones con menor dependencia de la EdE utilizada. En particular, existen relaciones empíricas que conectan la frecuencia y el tiempo de amortiguamiento con la masa y el radio de la estrella. Estas *relaciones universales* fueron halladas por Andersson y Kokkotas en el año 1998 (Andersson y Kokkotas, 1998).

$$\omega = a_1 + b_1 \sqrt{\frac{M}{R^3}}, \quad (2.48)$$

$$\frac{R^4}{M^3 \tau} = a_2 + b_2 \frac{M}{R}, \quad (2.49)$$

Utilizaremos dos ajustes para las relaciones empíricas dadas por las Ecs. (2.48) y (2.49): uno para materia hadrónica (BFG fit) (Benhar et al., 2004) y otro para materia de quarks (CFL fit) (Flores y Lugones, 2017). Por lo tanto, estudiaremos como ajusta nuestro modelo de EdE superconductora de color magnetizada con estas relaciones universales para el modo f .

Capítulo 3

Análisis y Resultados

En este capítulo, presentamos los resultados para la EdE, la estructura y los modos de oscilación de EQs superconductoras de color magnetizadas. Para hallar dichos resultados, se utilizaron dos programas escritos en FORTRAN90, conectados por un código de BASH que permite recorrer los parámetros libres del modelo y automatizar la ejecución secuencial de los dos programas. De esta manera, se calcula una EdE para una combinación de parámetros a partir de la corrida de uno de ambos programas y una vez obtenida, se ejecuta el segundo programa que resuelve las ecuaciones TOV y encuentra las frecuencias del modo de fluido fundamental f . Al finalizar la ejecución del segundo programa, se repite el proceso para una combinación diferente de parámetros. Una explicación más detallada del funcionamiento particular de cada programa puede encontrarse en las subsecciones correspondientes a cada etapa del cálculo.

3.1. Construcción de las EdEs

Para calcular las EdEs se modificó un código en FORTRAN90 desarrollado por el Grupo de Gravitación, Astrofísica y Cosmología de la Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas de la Universidad Nacional de La Plata, adaptándolo a las necesidades de esta tesis. El código permite construir una EdE para un conjunto de parámetros libres del modelo considerado. El programa consiste -a grandes rasgos- en resolver las ecuaciones de neutralidad de carga para las distintas partículas consideradas (quarks u , d y s , neutrones, electrones y muones), recorriendo distintos valores del potencial químico bariónico ($950 \text{ MeV} \leq \mu \leq 2000 \text{ MeV}$). Luego, a partir de lo obtenido al resolver las ecuaciones de neutralidad de carga, se calculan las cantidades termodinámicas con las que se construye el Gran Potencial (Ec. (2.5)) y se determina la EdE para las condiciones consideradas. Con el código de BASH escrito para la realización de este trabajo, se varían los parámetros del modelo para calcular el conjunto de EdEs que utilizaremos en el

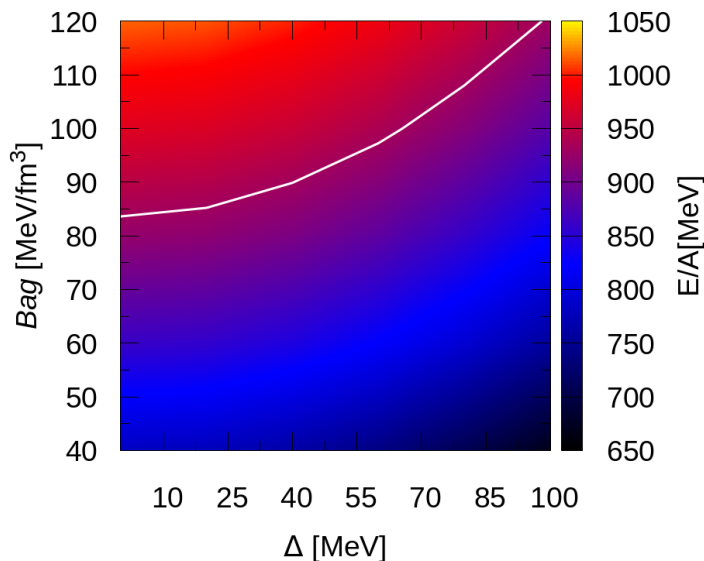


Figura 3.1: Energía por barión en un mapa de color para distintas combinaciones de los parámetros libres del modelo, considerando un escenario de EQs con CM bajo. La curva blanca representa la curva de nivel correspondiente a la energía por barión del ^{56}Fe . La región definida por debajo de dicha curva representa la ventana de estabilidad de nuestro modelo.

análisis correspondiente a esta sección.

En primer lugar, estudiamos la estabilidad de la materia extraña de quarks en función de los parámetros libres del modelo: la constante de Bag y la brecha de superconductividad Δ . Para que las EQs puedan existir es necesario que la materia sea estable, es decir, que cumpla con la condición de estabilidad absoluta de la hipótesis de materia extraña de quarks. Para estudiar las condiciones de estabilidad de la materia debemos calcular su energía por barión, E/A , a $P = 0$, que corresponde a las condiciones presentes en la superficie de una EQ. Debido a que las restricciones observacionales están impuestas para ENs con CMs bajos, utilizamos un valor de CM $B = 1 \times 10^{12}$ G constante para este estudio.

Sabemos que la materia extraña de quarks cumple la relación de energía por barión dada por Wen (2013),

$$\left. \frac{E}{A} \right|_{\text{MCFLM}} < \left. \frac{E}{A} \right|_{\text{MEQM}} < \left. \frac{E}{A} \right|_{\text{MCFL}} < \left. \frac{E}{A} \right|_{\text{MEQ}}, \quad (3.1)$$

donde MEQ, CFLM, MEQM y MCFLM corresponden a materia extraña de quarks, materia CFL, materia extraña de quarks magnetizada y materia CFL magnetizada, respectivamente. Es interesante notar en esta relación que solo la presencia de CM disminuye la energía por barión del sistema, independientemente de la

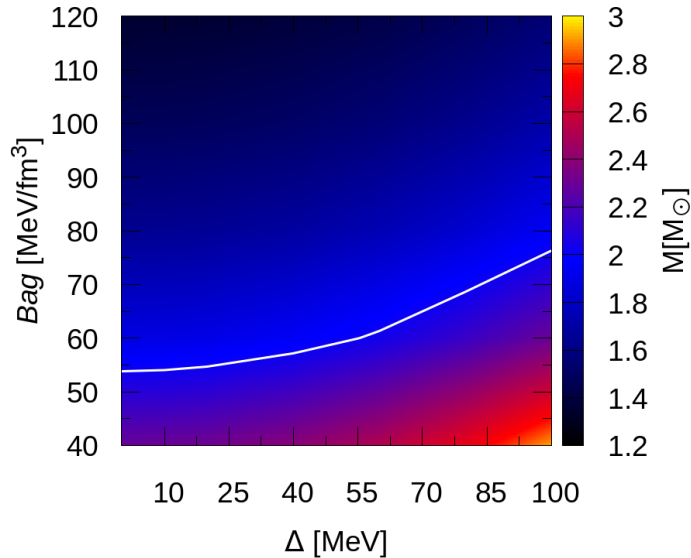


Figura 3.2: Masa máxima que pueden alcanzar las EQs en un mapa de color para distintas combinaciones de los parámetros libres del modelo, considerando un escenario de EQs con CM bajo. La curva blanca representa la curva de nivel correspondiente a la masa $M = 2,01 M_{\odot}$. La región por debajo de la curva blanca representa los valores permitidos para los parámetros dada por dicha cota para la masa

superconductividad de color. Necesitaremos encontrar combinaciones de parámetros tales que la energía por barión de la materia de quarks en el régimen de CFL magnetizado sea menor que la masa del ^{56}Fe . Es decir:

$$\left. \frac{E}{A} \right|_{MCFLM} < \left. \frac{E}{A} \right|_{^{56}\text{Fe}} \approx 930 \text{ MeV} \quad (3.2)$$

En la Fig. 3.1, presentamos la densidad de energía por barión como función de los parámetros libres de nuestro modelo; esto nos permite encontrar la ventana de estabilidad de nuestro modelo; es decir, la región en la que la materia CFL magnetizada cumple la hipótesis de estabilidad. Podemos ver que tendremos materia estable sin importar el valor de Δ si $Bag < 83,61 \text{ MeV}/\text{fm}^3$. Para Bag mayores necesitaremos valores de Δ más grandes, hasta llegar a $\Delta \simeq 100 \text{ MeV}$ para $Bag \simeq 120 \text{ MeV}/\text{fm}^3$.

Además de satisfacer la hipótesis de estabilidad, las familias de EQs construidas con dicha EdE deben respetar la restricción de $2,01 M_{\odot}$, para cumplir con los límites impuestos por las observación del púlsar J0740+6620 (Arzoumanian et al., 2018; Fonseca et al., 2021). En la Fig 3.2 presentamos la masa máxima obtenida para las EQs en función de los parámetros del modelo estudiado. Se puede ver que, para satisfacer la cota dada por las observaciones astrofísicas,

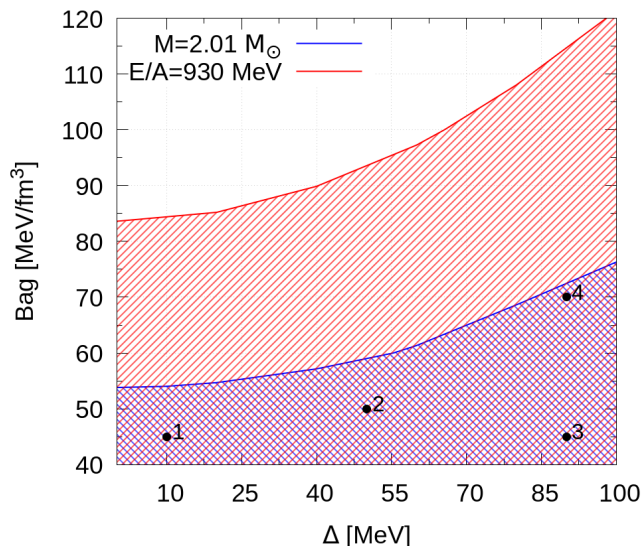


Figura 3.3: Plano Bag - Δ con las restricciones dadas por la hipótesis de materia extraña y observaciones astrofísicas para la masa máxima. La región donde ambas regiones coloreadas se superponen es la región en la que se cumple simultáneamente $E/A < 930 \text{ MeV}$ y $M_{\text{max}} \geq 2,01 M_{\odot}$. Los puntos negros indican los cuatro conjuntos de parámetros elegidos (ver Cuadro 3.1).

hallamos una región en el espacio de los parámetros en la cual es necesario aumentar el parámetro Δ a medida que tomamos valores mayores del parámetro de Bag . Además, concluimos que los valores de dicho parámetro están acotados entre $53,81 \text{ MeV/fm}^3 < Bag < 76,30 \text{ MeV/fm}^3$.

Finalmente, tendremos que cruzar los resultados presentados en las Figs. 3.1 y 3.2 para poder elegir los conjuntos de parámetros con los que trabajaremos de aquí en adelante. Únicamente podremos elegir combinaciones de parámetros que satisfagan ambas restricciones en simultáneo. En la Fig. 3.3 se puede ver la región del plano Δ - Bag en la que existen EdEs que puedan representar escenarios físicos realistas. Además de satisfacer estas condiciones, los conjuntos de parámetros fueron seleccionados tal que sea posible estudiar los efectos de cada parámetro de manera desacoplada: un par de conjuntos compartirán el mismo valor de Δ mientras que el otro par compartirá el mismo valor de la constante de Bag . En dicha figura, los puntos negros numerados marcan los conjuntos de parámetros elegidos. Los cuatro conjuntos de parámetros seleccionados se detallan en el Cuadro 3.1.

A partir de la parametrización propuesta para el CM, Ec. (2.18), consideraremos dos escenarios astrofísicos diferentes: EQs con CM bajo ($B_{\text{sup}} = 1 \times 10^{12} \text{ G}$, $B_{\text{cen}} = 1 \times 10^{15} \text{ G}$), asociado a los púlsares convencionales, y EQs con CM alto ($B_{\text{sup}} = 5 \times 10^{15} \text{ G}$, $B_{\text{cen}} = 3 \times 10^{18} \text{ G}$), asociado a los magnetares.

En la Fig. 3.4 mostramos las relaciones P - ϵ de las EdEs elegidas para un escenario de CM bajo con línea sólida y escenario de CM alto con línea punteada.

EdE	Δ [MeV]	B_{ag} [MeV/fm ³]	E/A [MeV]	M_{max} [M_{\odot}]
1	10	45	801.9	2.17
2	50	50	794.8	2.18
3	90	45	712.0	2.60
4	90	70	809.9	2.03

Cuadro 3.1: Parámetros de las EdEs seleccionados. Todos los conjuntos cumplen la hipótesis de materia extraña y satisfacen la restricción $M_{\text{max}} \geq 2,01 M_{\odot}$.

En esta figura, podemos apreciar que la materia de quarks no se ve afectada en forma significativa por el efecto del CM. Además, se puede apreciar al comparar las EdEs 1 y 3 que el aumento del valor de Δ genera una ecuación de estado considerablemente más *dura*¹. Al comparar las EdEs 3 y 4 vemos, además, que al aumentar el valor del B_{ag} , manteniendo fijo el de Δ , se obtienen EdEs más blandas. Puede verse, también, de las EdEs 2 y 3 que variaciones relativamente pequeñas en ambos parámetros tienen como consecuencia pequeños cambios en las EdEs.

3.2. Solución de las ecuaciones TOV

Una vez seleccionadas las EdEs estamos en condiciones de resolver las ecuaciones TOV (Sección 2.2). Estas ecuaciones forman un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas. Las resolveremos numéricamente utilizando un programa escrito en FORTRAN90 mediante el método de Runge-Kutta de orden 4 (Press et al., 2007). La solución nos permite encontrar relaciones masa-radio y el perfil radial de masas para el cálculo de modos de oscilación para familias de EQs.

En dicho código, la EdE puede ser ingresada en formato de aproximación analítica o de tabla de datos. En nuestro caso, las ecuaciones que construimos en la Sección 3.1 se calcularon numéricamente en formato de tabla. Luego, se ingresa la tabla de entrada con los valores de presión, P , y densidad de energía, ϵ , brindados por la EdE. El procedimiento consiste en tomar de la tabla un valor de presión bajo que será utilizado como presión central de la EQ. A partir de este valor, se realiza la integración de las Ecs. (2.40) desde el centro hacia la superficie. Terminado esto, se continúa con la siguiente estrella, cuya presión central será mayor a la anterior. Este proceso se realiza sucesivamente hasta la última estrella, cuya presión central es la mayor en la EdE ingresada. De esta manera, se obtiene

¹Se dice que una EdE es más *dura* cuando dada una densidad de energía fija, le corresponde una presión mayor. Caso contrario, se dice que la EdE es más *blanda*. Como verificaremos más adelante, cuanto más dura resulta una EdE, mayor masa máxima se obtendrá para la correspondiente familia de estrellas.

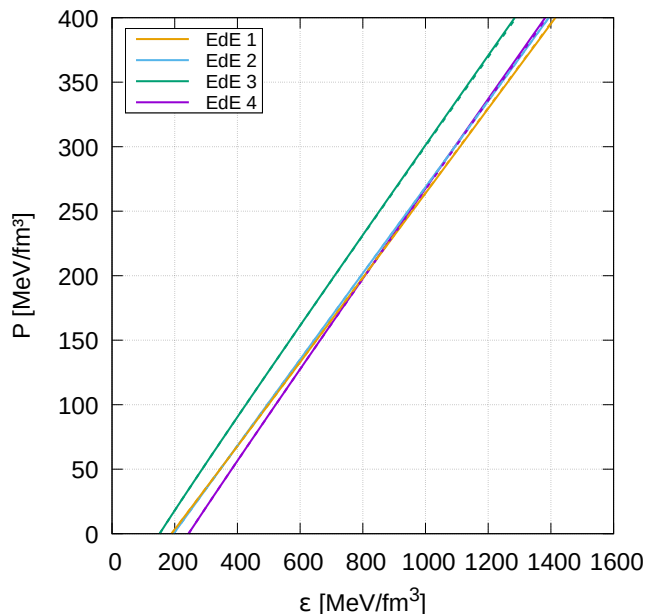


Figura 3.4: EdE para los conjuntos elegidos. En línea sólida se muestran las EdE para CM bajo y con línea punteada para CM alto. Puede apreciarse que el efecto del CM en las EdEs no es muy significativo.

una familia de EQs para la EdE dada. Realizaremos este procedimiento para las cuatro EdE mostradas en el Cuadro 3.1, considerando los dos escenarios de CM.

Una vez integradas las ecuaciones TOV, podremos obtener las relaciones masa-radio para las distintas familias de EQs generadas a partir de cada EdE. En la Fig. 3.5 presentamos los resultados para la relación masa-radio para las cuatro EdEs consideradas. Tanto en esta figura como en todos los resultados presentados de aquí en adelante, las curvas corresponden con soluciones estables, de acuerdo con el criterio de estabilidad presentado en la Sección 2.2. En esta figura presentamos, además, las restricciones a las masas y radios impuestas por las observaciones más recientes de ENs: los púlsares de $\sim 2 M_{\odot}$ (Arzoumanian et al., 2018; Fonseca et al., 2021), los eventos GW170817 (Abbott et al., 2017) y GW190425 (Abbott et al., 2020), y las observaciones de NICER (Miller y et al., 2019; Riley y et al., 2019; Riley et al., 2021; Miller et al., 2021). A partir de nuestros resultados, puede verse que la EdE 3 alcanza una masa máxima de $M_{max} \approx 2,6 M_{\odot}$, mientras que las otras tres EdEs tienen valores de masa máxima $M_{max} < 2,2 M_{\odot}$ (ver Cuadro 3.1); este resultado puede explicarse a partir de la discusión en la sección previa, acerca de la particular dureza de la EdE 3. De las curvas obtenidas a partir de las EdEs 1 y 3 puede apreciarse que, para igual valor de Bag , un aumento en el valor de Δ permite obtener masas más elevadas: $M_{max} \approx 2,6 M_{\odot}$ contra $M_{max} \approx 2,17 M_{\odot}$, respectivamente. Al comparar lo obtenido a partir de las EdEs 3 y 4, vemos que si se mantiene constante el valor de Δ , se obtienen masas más altas si se dismi-

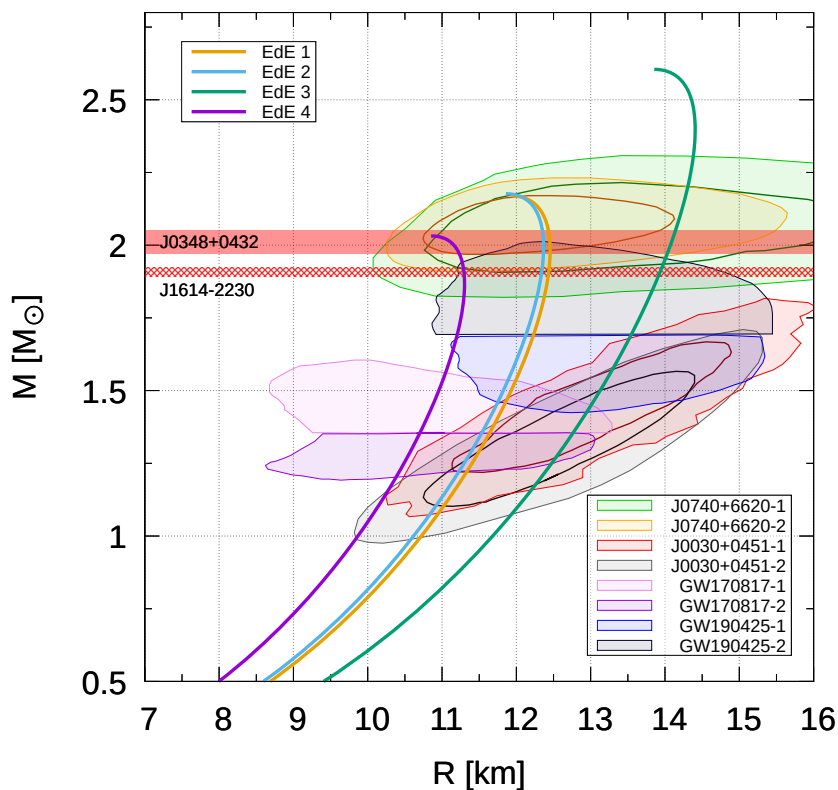


Figura 3.5: Relación masa-radio para las distintas EdEs seleccionadas. Las nubes y barras representan las restricciones a las masas y radios impuestas por distintas observaciones de púlsares. Las líneas continuas representan nuestros resultados para los escenarios con CMs bajos y las punteadas aquellos con CMs altos. Sin embargo, producto de la poca influencia del CM en las EQs, no es posible apreciar las diferencias (Ver Fig. 3.6.)

nuye el valor del Bag : $M_{max} \approx 2,6 M_{\odot}$ para $Bag = 45$ y $M_{max} \approx 2,03 M_{\odot}$ para $Bag = 70$. En la Fig. 3.6 puede verse un detalle amplificado de la región alrededor de la M_{max} correspondiente a cada EdE. En esta figura, pueden apreciarse en detalle las pequeñas diferencias debido a la presencia del CM alto. Las relaciones masa-radio obtenidas a partir de las EdE 1 y 4 son las que se ven más afectadas con respecto al escenario de CM bajo; sin embargo en el caso de la EdE 1 el CM alto produce un aumento en la masa máxima alcanzada, mientras que para la de EdE 4 el resultado es el contrario. Las relaciones masa-radio de las EdEs 2 y 3 presentan variaciones apenas perceptibles. Para cada EdE, la diferencia en la relación masa-radio para los dos valores de CM considerados es menor al 1%.

Es importante mencionar que si bien todas las EdEs satisfacen las restricciones que hemos considerado en la Sección 3.1, dado que las observaciones más recientes han logrado imponer restricciones más precisas, que no sólo involucran masas sino también radios de los objetos estudiados, el análisis de las EdEs que proponíamos

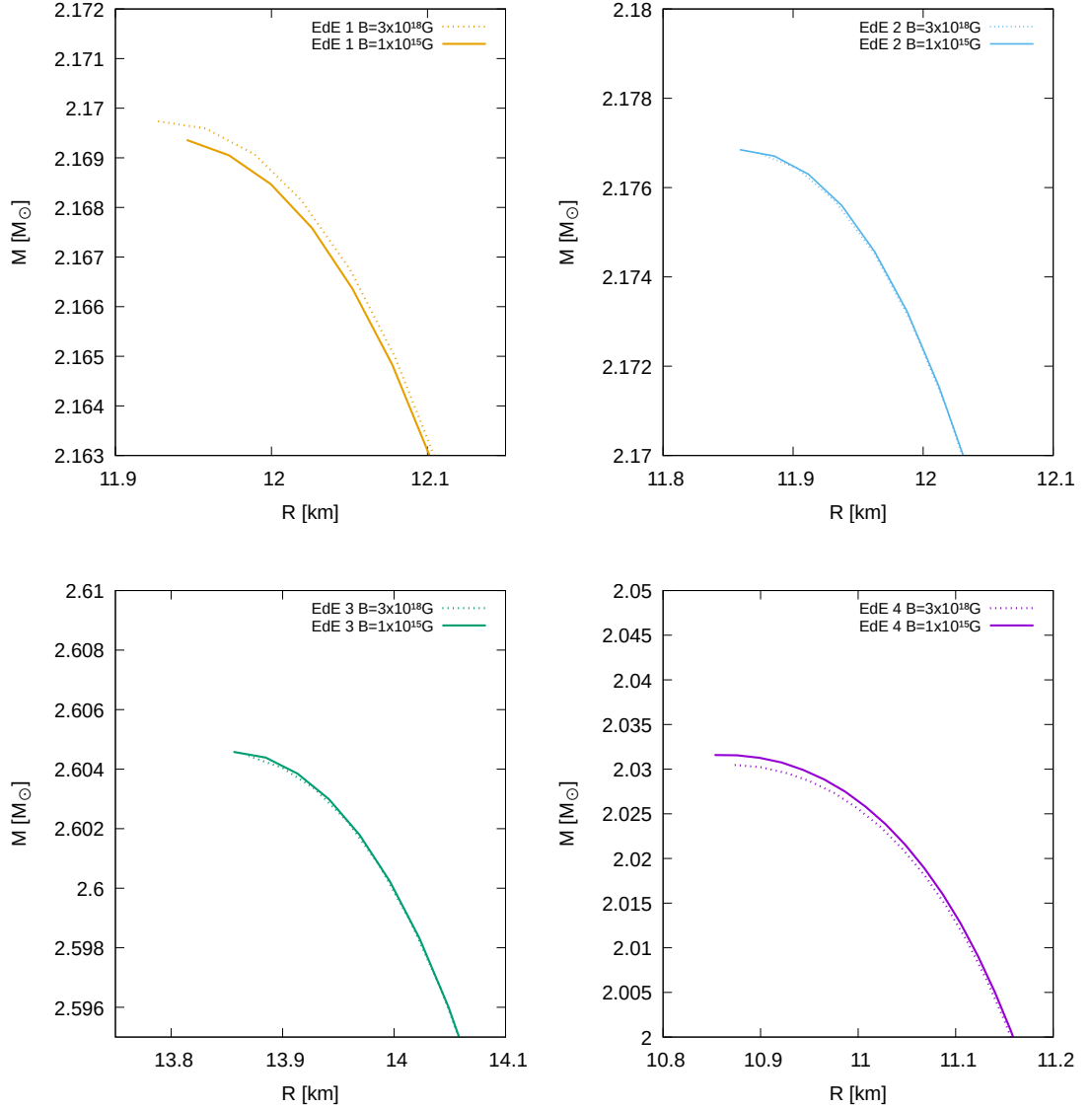


Figura 3.6: Relación masa-radio ampliada en la región alrededor de la M_{max} para los cuatro pares de EdEs seleccionadas. Es posible apreciar el efecto del CM en las EQs. Puede observarse que este efecto es pequeño y que mayor CM no implica necesariamente mayor M_{max} . Además, se observa que las estrellas construidas con las EdEs 1 y 4 se ven más afectadas por la influencia del CM.

debe también ser lo más preciso posible. Vemos, así, que la EdE 4 no satisface la restricción impuesta por la observación del púlsar J0030+0451. Sin embargo, dado que uno de los principales objetivos de este trabajo es poder estudiar los efectos al variar los parámetros del modelo propuesto, la EdE 4 no deja de aportarnos información útil para este propósito.

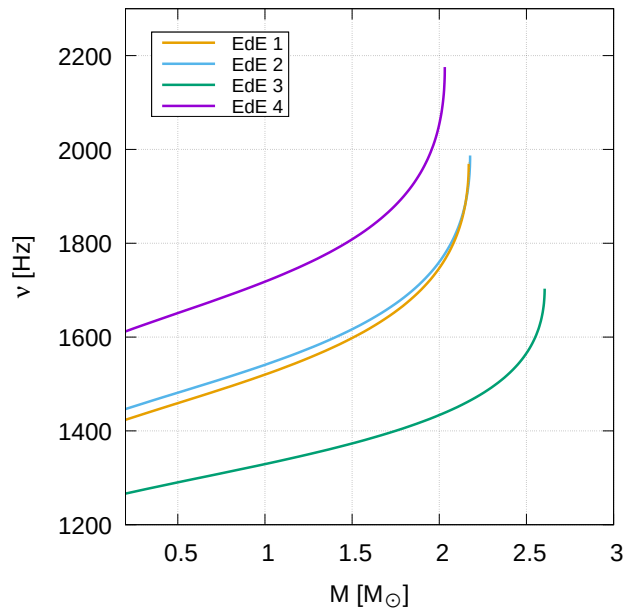


Figura 3.7: Relación frecuencia de oscilación-masa para los cuatro pares de EdEs seleccionadas. En línea continua se muestran las curvas correspondientes a escenarios de CM bajo y el línea punteada las correspondientes a CM alto; dada la poca influencia del CM sobre los resultados, no logran apreciarse las diferencias (ver detalle en Fig. 3.8). Podemos observar que las EdEs que generan EQs con M_{max} mayores tendrán frecuencias de oscilación más bajas.

3.3. Modo f de oscilación

Para calcular el modo f de oscilación utilizaremos un código en FORTRAN90 realizado en el marco del trabajo de Tesis Doctoral del Dr. Lucas Tonetto, en el Centro de Ciências Naturais e Humanas de la Universidade Federal do ABC, San Pablo, Brasil, cuyos resultados fueron publicados en Tonetto y Lugones (2020). A partir de la resolución de las TOV, el programa -conectado con el mismo código en BASH mencionado en la sección anterior- resuelve las Ecs. (2.46) y obtiene una cantidad compleja cuya parte real representa la frecuencia de oscilación, ν , y su parte imaginaria, la inversa del tiempo de amortiguamiento, $1/\tau$.

El código funciona resolviendo las ecuaciones diferenciales de perturbación en el interior del objeto mediante el método de *shooting*, a partir de una aproximación inicial. Esta aproximación se obtiene calculando la frecuencia de oscilación newtoniana. En el marco de esta Tesis de Licenciatura se modificó el programa original para adaptarse a las EdE en formato tabla, agregando una subrutina de lectura y una de interpolación. Además, fue automatizado para que permita asociarse con los demás programas utilizados en el desarrollo de este trabajo, haciendo posible el cálculo de frecuencias para las familias de estrellas correspondientes a cada EdE.

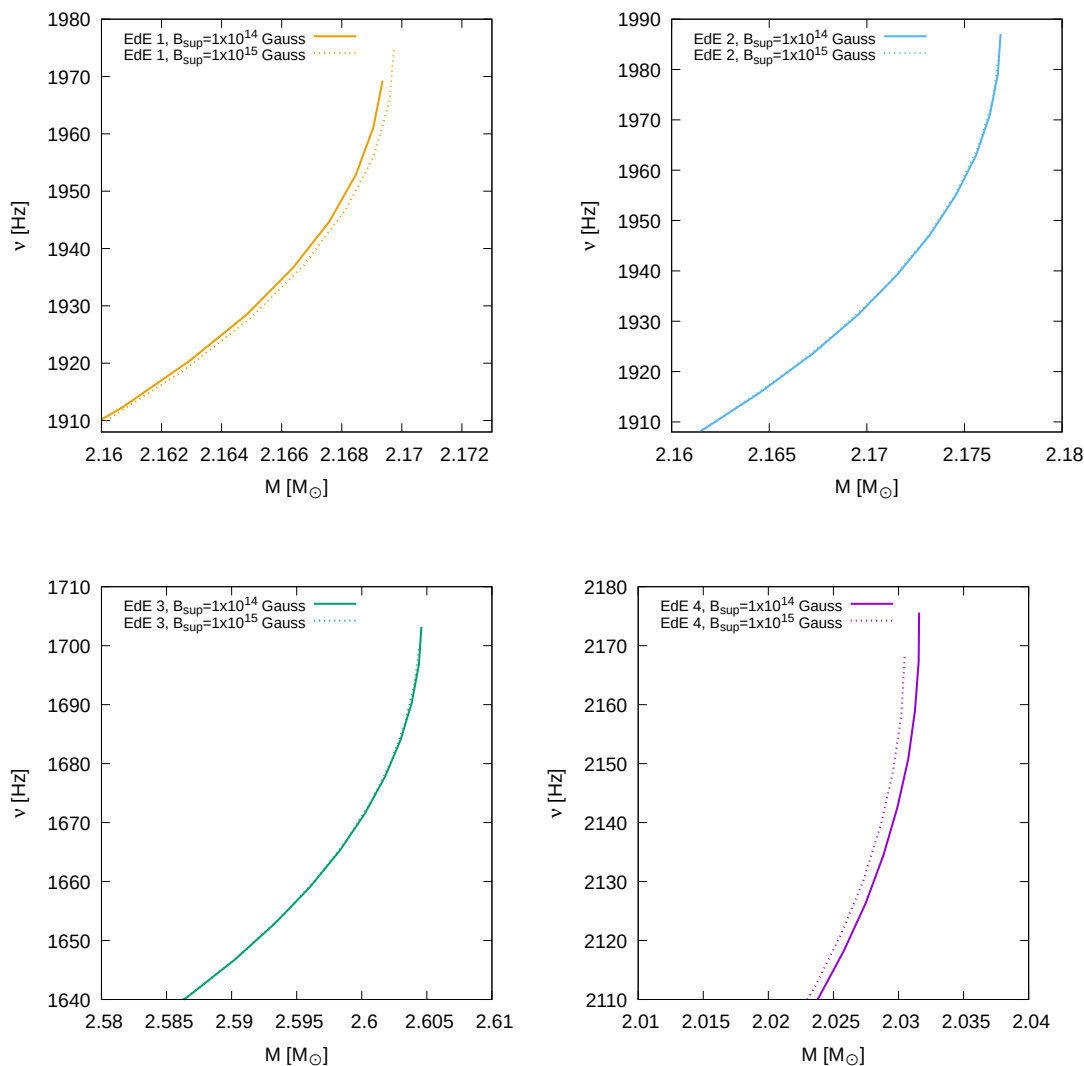


Figura 3.8: Relación frecuencia de oscilación-masa ampliada. Se muestra un detalle para las relación ν -masa para los cuatro pares de EdEs seleccionadas, y así poder apreciar el efecto del CM en las EQs. Puede observarse que las diferencias son pequeñas. Además, al igual que en las relaciones masa-radio (ver Fig. 3.6) se observa que los pares de EdEs 1 y 4 son más sensibles a la presencia del CM.

Se hallaron los valores de ν y τ para la familia de EQs de cada EdE seleccionada y se construyeron las relaciones ν -masa y τ -masa, presentados en las Fig. 3.7 y Fig. 3.9, respectivamente. Respecto al resultado para la relación ν -masa, Fig. 3.7, en el rango de masas presentado, considerando todos los conjuntos, obtenemos frecuencias en el rango aproximado 1200-2200 Hz. Si comparamos los resultados obtenidos para cada EdE puede apreciarse que las frecuencias de oscilación no sólo son crecientes con la masa de la EQ, sino que familias de objetos con masas máximas más altas corresponderán a EQs con frecuencias de oscilación menores, en comparación con EQs de la misma masa para curvas masa-radio con masas máximas menores. Por ejemplo, para una EQ de $2 M_{\odot}$ tendremos frecuencias de

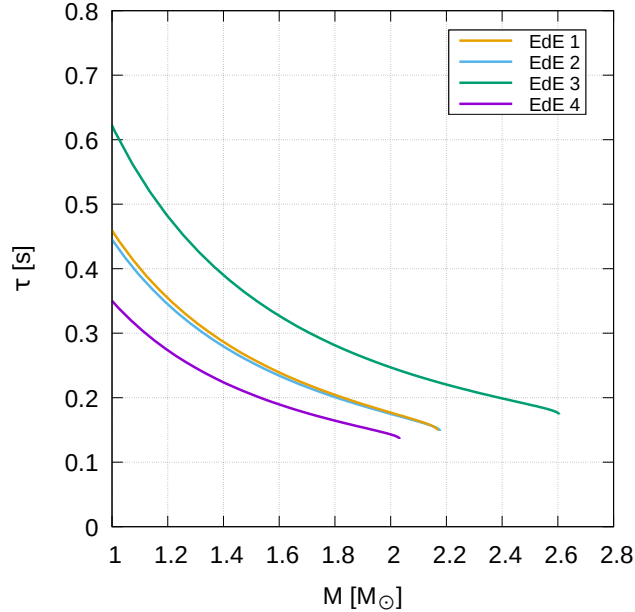


Figura 3.9: Relación tiempo de amortiguamiento-masa para los cuatro pares de EdEs seleccionadas. En línea continua se muestran las curvas correspondientes a escenarios de CM bajo y el línea punteada las correspondientes a CM alto; sin embargo dada la poca influencia del CM sobre los resultados no logran apreciarse las diferencias. Podemos observar que las EdEs que generan EQs con M_{max} mayores tendrán tiempos de amortiguamiento mayores.

oscilación de aproximadamente 2100 Hz para la EdE 4, 1780 Hz para las EdEs 1 y 2, y 1450 Hz para la EdE 3, mientras que las masas máximas alcanzadas a partir de cada EdE son de $M_{max} \approx 2,03 M_{\odot}$, $M_{max} \approx 2,17 M_{\odot}$, y $M_{max} \approx 2,6 M_{\odot}$, respectivamente. Trabajos previos tanto para estrellas puramente hadrónicas, híbridas o de quarks obtienen rangos cualitativamente similares a estas frecuencias (Benhar et al., 2007; Flores y Lugones, 2017; Tonetto y Lugones, 2020; Rodríguez et al., 2021; Flores et al., 2020; Sotani y Harada, 2003); por lo tanto, si bien los resultados son, en cada caso, modelo dependientes y cuantitativamente diferentes, no hay diferencias significativas que permitan distinguir entre la composición interna o modelos de EdE ante una eventual detección de este modo. En particular, Flores y Lugones (2017) estudia EQs superconductoras de color sin considerar el CM y obtiene resultados consistentes con los obtenidos en este trabajo para las frecuencias asociadas al modo f .

En la Fig. 3.7 se observa que la variación entre conjuntos posee la misma tendencia que en los resultados previos: la EdE 4 se encuentra en un extremo de los resultados, la EdE 1 en el otro y las EdEs 2 y 3 superpuestas con valores intermedios. Comparando las EdEs 1 y 3, se desprende que un aumento del parámetro Δ genera valores menores de frecuencias; comparando las EdEs 3 y 4, observamos que un aumento del Bag produce un aumento en el valor obtenido

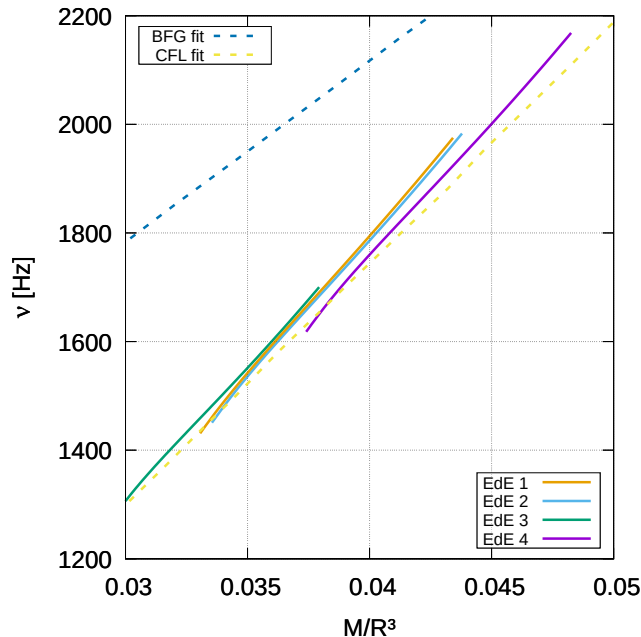


Figura 3.10: Relaciones universales para la frecuencia en el plano frecuencia del modo f -densidad media de la EQ. En la figura se muestran, además, dos ajustes realizados a partir de las relaciones universales propuestas por Andersson y Kokkotas (1998), uno para materia hadrónica, *BFG fit*, (Benhar et al., 2004) y otro para materia de quarks, *CFL fit*, (Flores y Lugones, 2017). Se observa que las relaciones ν -densidad media obtenidas en este trabajo para el conjunto de EdEs consideradas se agrupan, previsiblemente, en una zona cercana al ajuste de materia de quarks.

para las frecuencias. Por otro lado, así como la presencia de un CM intenso en una EQ no modificaba apreciablemente la relación masa-radio (Sección 3.2), lo mismo sucede con la frecuencia de oscilación del modo f (ver detalle en Fig. 3.8).

Para el caso de la relación tiempo de amortiguamiento-masa, presentado en la Fig. 3.9, nuestros resultados se ubican en el rango 0,1-0,6 segundos. Un análisis análogo al realizado con las frecuencias de oscilación puede hacerse con los tiempos de amortiguamiento. En este caso, los tiempos de amortiguamiento son decrecientes con la masa de la EQ y se obtienen tiempos de amortiguamiento mayores para EdEs que alcancen a masas máximas mayores para EQs de la misma masa. Estos resultados también resultan cualitativamente equivalentes con los trabajos mencionados previamente (Benhar et al., 2007; Flores y Lugones, 2017; Tonetto y Lugones, 2020; Flores et al., 2020). Esto implica que este tipo de análisis frente a una detección exclusiva del modo f no permitiría diferenciar entre distintos tipos de objetos compactos y diferentes composiciones internas.

Respecto a los efectos de los parámetros del modelo, un aumento del parámetro Δ produce mayores tiempo de amortiguamiento y un aumento del *Bag* los disminuye. En este caso, la variación en la intensidad del CM tampoco genera

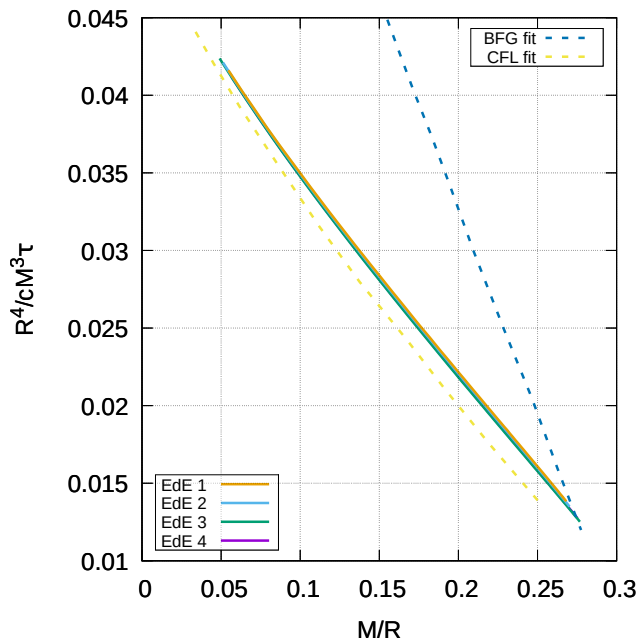


Figura 3.11: Relaciones universales para el tiempo de amortiguamiento en el plano tiempo de amortiguamiento normalizado-compacticidad. En la figura se muestran, además, dos ajustes realizados a partir de las relaciones universales propuestas por Andersson y Kokkotas (1998), uno para materia hadrónica, *BFG fit*, (Benhar et al., 2004) y otro para materia de quarks, *CFL fit*, (Flores y Lugones, 2017). Se presentan las relaciones tiempo de amortiguamiento-compacticidad obtenidas en este trabajo para el conjunto de EdEs consideradas. Puede verse que éstos se agrupan en una zona cercana al ajuste de materia de quarks.

diferencias apreciables.

En las Figs. 3.10 y 3.11 puede verse que si en lugar de analizar las relaciones frecuencia-masa o tiempo de amortiguamiento-masa estudiamos la dependencia de la frecuencia con la densidad media, M/R^3 , y la dependencia del tiempo de amortiguamiento normalizado, $R^4/cM^3\tau$, con la compacticidad, M/R , las curvas de todas las EdEs se agrupan en una región muy pequeña. Por lo tanto se observa que se satisfacen las relaciones universales presentadas en la Sección 2.3 y desarrolladas por Andersson y Kokkotas (1998) y que los resultados pierden dependencia con las EdEs. Además, en dichas figuras mostramos dos ajustes para las relaciones empíricas dadas por las Ecs. (2.48) y (2.49): uno para ENs compuestas por materia hadrónica (*BFG fit*) (Benhar et al., 2004) y otro para EQs (*CFL fit*) (Flores y Lugones, 2017). Puede apreciarse que ambos ajustes están en regiones apreciablemente diferentes del plano y que -como era de esperar- los resultados de este trabajo se encuentran en la zona cercana al ajuste para materia de quarks. Luego, a partir de esta diferencia en los distintos ajustes, estudiando las relaciones universales no sólo sería posible obtener parámetros estructurales del objeto detectado, como la masa o el radio, sino también clasificar dicho objeto

compacto y encontrar potencial evidencia observacional de materia de quarks en su interior.

Capítulo 4

Conclusiones y trabajo a futuro

En este trabajo de Tesis de Licenciatura hemos estudiado estrellas superconductoras de color magnetizadas, haciendo foco en su composición, estructura y sus modos f de oscilación. En particular, construimos un modelo de EdE para materia de quarks magnetizada bajo la aproximación de $T = 0$. Para hacerlo, usamos el modelo de Bolsa del MIT en el cual incluimos el CM mediante una forma funcional exponencial, lo cual nos permitió modelar el perfil del CM desde el centro hasta la superficie de las EQs (Sección 2.1). Además, según el diagrama de fases de la QCD, las condiciones de alta densidad y baja temperatura, coincidentes con las que se encuentran en el interior de las EQs, son tales que la materia debería estar en una fase superconductora de color, llamada CFL (Sección 2.1.2). Por este motivo, estudiamos EQs magnetizadas en la fase CFL. Como esta fase está formada por di-quarks que rompen la simetría de color, tuvimos que imponer la neutralidad de color junto con la neutralidad de carga eléctrica, teniendo en cuenta los potenciales químicos correspondientes y la brecha de superconductividad Δ que se genera por la presencia de los condensados de quarks. Por otro lado, hemos considerado dos escenarios astrofísicos posibles para el estudio de las estrellas superconductoras de color magnetizadas: uno asociado a púlsares convencionales, correspondiente a CM bajo, y otro correspondiente a los magnetares, es decir CMs muy intensos.

Luego, analizamos los parámetros libres del modelo: el Bag y la brecha de superconductividad Δ (Sección 3.1). Teniendo en cuenta que de acuerdo a la hipótesis de materia extraña de quarks la energía por barión de este tipo de materia es menor a la del ^{56}Fe , estudiamos diferentes combinaciones de parámetros que garanticen dicha condición, a fin de construir EQs autoligadas. Por otro lado, también analizamos para qué combinaciones de parámetros es posible obtener EQs que satisfagan las condiciones de masa impuestas por las observaciones del púlsar J0740+6620 con una masa de, al menos, $2,01 M_{\odot}$ (Miller et al., 2021; Riley et al., 2021). Una vez estudiadas estas restricciones, elegimos cuatro conjuntos

de parámetros representativos del modelo propuesto para construir ocho EdEs diferentes, correspondientes a CM bajo y magnetares. Con las ocho EdE, resolvimos las ecuaciones TOV y comparamos las familias de EQs obtenidas con las observaciones de ENs vigentes, que corresponden a CM bajo y que nos imponen cotas a las masas y radios posibles de estos objetos (Sección 3.2).

Finalmente, resolvimos las ecuaciones de Detweiler y Lindblom (1985), Ecs. (2.46), para hallar el modo f de oscilación con sus respectivas frecuencias y tiempos de amortiguamiento para cada familia de EQs (Sección 3.3). Por último, hemos comparado los resultados obtenidos con las relaciones universales establecidas por Andersson y Kokkotas (1998) y ajustes hechos para distintos tipos de EdEs (Benhar et al., 2004; Flores y Lugones, 2017).

Los resultados obtenidos muestran que la introducción de una fase superconductora de color produce efectos significativos, no sólo en el cálculo de la estabilidad de la materia, sino también en observables astrofísicos como la masa máxima que es posible alcanzar, los radios o las frecuencias de oscilación del modo f .

Por otro lado, la inclusión de un CM intenso no modifica apreciablemente ni la EdE de la materia de quarks (figura 3.4) y, en consecuencia, los observables astrofísicos que se obtienen al resolver las ecuaciones TOV (figura 3.6) y las frecuencias del modo f de oscilación (figura 3.8) presentan muy poca diferencia con el caso de CM bajo.

Con respecto a las relaciones masa-radio obtenidas para las cuatro EdEs con CM bajo consideradas, podemos apreciar que las mismas cumplen las restricciones observacionales (figura 3.5), salvo en el caso de la EdE 4. La curva correspondiente a familia de EQs construida con dicha EdE tiene un comportamiento marginal, ya que se encuentra en el límite de las relaciones masa-radio impuestas por las observaciones de GW17081-1 y GW190425-1. Sin embargo, la EdE 4 resulta de utilidad para analizar el comportamiento de los parámetros Bag y Δ en el conjunto de EdEs representativas y por este motivo no ha sido descartada.

Al calcular las frecuencias y tiempos de amortiguamiento asociados al modo f de los MCNs para las cuatro EdEs consideradas, obtuvimos valores compatibles con los rangos de trabajos previos en los que se estudiaron también EQs y otro tipo de objetos compactos como estrellas híbridas o puramente hadrónicas. Esto implica que, mediante este análisis comparativo, no hay diferencias significativas que provengan de cantidades asociadas al modo f que provean indicios claros acerca la composición de estas estrellas. Por lo tanto, si hubiese alguna manera de detectar la emisión del modo f , mediante la simple determinación de la frecuencia o tiempo de amortiguamiento sería imposible distinguir si dichas señales provienen de una EQ, de neutrones o híbrida (Sección 2.3). Observamos, además, que las EdEs más *duras*, esto es, aquellas que proporcionan curvas de masa-radio con

mayores masas máximas, dan lugar a frecuencias de oscilación más bajas y a tiempos de amortiguamiento menores que para el caso de las EdEs más *blandas* (Fig. 3.7).

Por último, los MCNs obtenidos se ajustan muy bien a las relaciones universales encontradas por Andersson y Kokkotas (1998) y al mismo tiempo, se encuentran dentro del área delimitada por los ajustes CFL hechos para EdEs de quarks (Figs. 3.10, 3.11). A diferencia del análisis en los planos frecuencia-masa y tiempo de amortiguamiento-masa, el estudio de las relaciones universales permitiría no solo obtener parámetros del objeto detectado, como la masa o el radio, sino también realizar una clasificación acerca de la composición interna del objeto. En este sentido, la posibilidad de comenzar a detectar modos de oscilación de ENs aisladas con la próxima generación de observatorios de OGs abre la puerta a la astrosismología de ENs, en particular, con el telescopio Einstein, con el que se estima que se tendrá una sensibilidad suficiente para detectar el modo fundamental f ; esperamos que nuestros resultados puedan aportar y ser examinados en este contexto.

Como trabajo a futuro, proponemos utilizar modelos más realistas para describir el comportamiento de los quarks, alternativos al modelo de *bag*, como por ejemplo el modelo de Nambu-Jona-Lasinio, en su versión no local (Coppola et al., 2017). Además, pretendemos abordar EdEs que cuenten con transiciones de fase entre materia de quarks y hadrónica, para construir estrellas híbridas en lugar de las EQs consideradas en este trabajo. Otro aspecto que puede ser abordado en un futuro es el cálculo de otros MCNs, en particular el modo g , asociado con la transición de fase hadron-quark de primer orden. La detección de un modo g resulta de particular importancia pues permitiría determinar la existencia y las propiedades de una transición de fase hadron-quark en el interior de una EN (Ranea-Sandoval et al., 2018b,a; Rodríguez et al., 2021).

Apéndice A

Sistema de unidades geométricas

El sistema de unidades geométricas es un sistema de unidades naturales en el que las unidades físicas básicas se eligen de modo que la velocidad de la luz en el vacío, c , y la constante gravitacional, G , se establezcan iguales a la unidad,

$$c = 1,$$

$$G = 1.$$

Cantidad	Dimensiones en el SI	Dimensión en UG	Factor multiplicativo
t	$[T]$	$[L]$	c
R	$[L]$	$[L]$	1
M	$[M]$	$[L]$	Gc^{-2}
ϵ	$[ML^{-1}T^{-2}]$	$[L^{-2}]$	Gc^{-4}
P	$[ML^{-1}T^{-2}]$	$[L^{-2}]$	Gc^{-4}

Cuadro A.1: Cuadro de conversión a unidades geométricas. En la primer columna se detallan las cantidades físicas. En la segunda columna se presentan las unidades de cada una en el Sistema Internacional (SI) de unidades. En la tercer columna se indican las unidades geométricas (UG) de cada cantidad física. Y, en la última columna se muestra el factor de conversión de del SI a UG.

Este sistema es útil en física, especialmente en las teorías de la Relatividad Especial y General. Muchas ecuaciones en la física relativista se simplifican cuando se expresan en unidades geométricas, ya que de esta forma G y c desaparecen. Por esta razón, muchos libros y artículos sobre física relativista usan unidades geométricas. En unidades geométricas, cada intervalo de tiempo se interpreta como la distancia recorrida por la luz durante ese intervalo de tiempo dado. Es decir, un segundo se interpreta como un segundo de luz, por lo que el tiempo tiene las unidades geométricas de longitud. Esto es consistente con la noción de que, de acuerdo con la relatividad especial, el tiempo y la distancia están en pie de igualdad. La energía y el momento se interpretan como componentes del

tetra-momento, y la masa es la magnitud de este vector, por lo que en unidades geométricas todos deben tener la dimensión de longitud. Podemos convertir una masa expresada en kilogramos a la masa equivalente expresada en metros multiplicando por el factor de conversión G/c^2 .

En el Cuadro A.1 se encuentran las cantidades físicas, utilizadas en este trabajo, en unidades correspondientes al Sistema Internacional (SI), en unidades geométricas (UG) y su correspondiente factor de conversión.

Bibliografía

- Abbott, B. P. y et al. (2016). Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. Phys. Rev. Lett., 116:061102.
- Abbott, B. P. et al. (2017). Gw170817: Observation of gravitational waves from a binary neutron star inspiral. Phys. Rev. Lett., 119:161101.
- Abbott, B. P. et al. (2020). GW190425: Observation of a Compact Binary Coalescence with Total Mass $\sim 3.4 M_{\odot}$. ApJ, 892(1):L3.
- Alcock, C., Farhi, E., y Olinto, A. (1986). Strange stars. Astrophys. J., 310:261–272.
- Alford, M. y Rajagopal, K. (2002). Absence of two-flavor color-superconductivity in compact stars. Journal of High Energy Physics, 2002(6):031.
- Alford, M., Rajagopal, K., Reddy, S., y Wilczek, F. (2001). Minimal color-flavor-locked-nuclear interface. Physical Review D: Particles, Fields, Gravitation and Cosmology, 64(7):074017.
- Alford, M. G., Schmitt, A., Rajagopal, K., y Schäfer, T. (2008). Color superconductivity in dense quark matter. Reviews of Modern Physics, 80(4):1455–1515.
- Andersson, N. y Kokkotas, K. D. (1998). Towards gravitational wave asteroseismology. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 299(4):1059–1068.
- Arzoumanian, Z. et al. (2018). The NANOGrav 11-year data set: High-precision timing of 45 millisecond pulsars. The Astrophysical Journal Supplement Series, 235(2):37.
- Athem Alsabti, A. (2015). Handbook of Supernovae. In IAU General Assembly, volume 29, page 2253696.
- Baade, W. y Zwicky, F. (1934). Remarks on super-novae and cosmic rays. Phys. Rev., 46:76–77.

- Banerjee, A., Tangphati, T., y Channuie, P. (2021). Strange quark stars in 4d einstein–gauss–bonnet gravity. The Astrophysical Journal, 909(1):14.
- Bardeen, J., Cooper, L. N., y Schrieffer, J. R. (1957). Microscopic theory of superconductivity. Phys. Rev., 106:162–164.
- Barrois, B. C. (1977). Superconducting quark matter. Nuclear Physics B, 129(3):390–396.
- Bednarek, I., Brzezina, A., Mańka, R., y Zastawny-Kubica, M. (2003). The influence of asymmetry on a magnetized proto-neutron star. Nuclear Physics A, 716:245–256.
- Belinfante, F. J. (1953). Intrinsic Magnetic Moment of Elementary Particles of Spin 3/2. Physical Review, 92:997–1001.
- Benhar, O., Ferrari, V., y Gualtieri, L. (2004). Gravitational wave asteroseismology reexamined. Phys. Rev. D, 70(12):124015.
- Benhar, O., Ferrari, V., Gualtieri, L., y Marassi, S. (2007). Quark matter imprint on gravitational waves from oscillating stars. General Relativity and Gravitation, 39(9):1323–1330.
- Braithwaite, J. y Spruit, H. C. (2006). Evolution of the magnetic field in magnetars. A&A, 450(3):1097–1106.
- Cameron, A. G. (1959). Neutron Star Models. ApJ, 130:884.
- Carroll, S. M. (2019). Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity. Cambridge University Press.
- Chadwick, J. (1932). Possible Existence of a Neutron. Nature, 129:312.
- Chodos, A., Jaffe, R. L., Johnson, K., Thorn, C. B., y Weisskopf, V. F. (1974a). New extended model of hadrons. Physical Review D: Particles, Fields, Gravitation and Cosmology, 9(12):3471–3495.
- Chodos, A., Jaffe, R. L., Johnson, K., Thorn, C. B., y Weisskopf, V. F. (1974b). New extended model of hadrons. Phys. Rev. D, 9(12):3471–3495.
- Ciolfi, R. y Rezzolla, L. (2013). Twisted-torus configurations with large toroidal magnetic fields in relativistic stars. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters, 435(1):L43–L47.

- Contrera, G. A., Orsaria, M., y Scoccola, N. N. (2010). Nonlocal Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio model with wave function renormalization at finite temperature and chemical potential. Physical Review D: Particles, Fields, Gravitation and Cosmology, 82(5):054026.
- Coppola, M., Allen, P., Grunfeld, A. G., y Scoccola, N. N. (2017). Magnetized color superconducting quark matter under compact star conditions: Phase structure within the $su(2)_f$ njl model. Phys. Rev. D, 96:056013.
- Córsico, A. H., Althaus, L. G., Miller Bertolami, M. M., y Kepler, S. O. (2019). Pulsating white dwarfs: new insights. Astronomy & Astrophysics Reviews, 27(1):7.
- Detweiler, S. y Lindblom, L. (1985). On the nonradial pulsations of general relativistic stellar models. The Astrophysical Journal, 292:12–15.
- Dexheimer, V., Negreiros, R., y Schramm, S. (2012). Hybrid stars in a strong magnetic field. European Physical Journal A, 48:189.
- Duncan, R. C. y Thompson, C. (1992). Formation of Very Strongly Magnetized Neutron Stars: Implications for Gamma-Ray Bursts. ApJ, 392:L9.
- Einstein, A. (1915). Die Feldgleichungen der Gravitation. Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin), pages 844–847.
- Einstein, A. (1923). Die grundlage der allgemeinen relativitätstheorie. In Das Relativitätsprinzip, pages 81–124. Springer.
- Farhi, E. y Jaffe, R. L. (1984). Strange matter. Phys. Rev. D, 30(11):2379–2390.
- Flores, C. V., Castro, L. B., y Lugones, G. (2016). Properties of strongly magnetized ultradense matter and its effects on magnetar pulsations. Phys. Rev. C, 94(1):015807.
- Flores, C. V., Lopes, L. L., Castro, L. B., y Menezes, D. P. (2020). Gravitational wave signatures of highly magnetized neutron stars. European Physical Journal C, 80(12):1142.
- Flores, C. V. y Lugones, G. (2017). Constraining color flavor locked strange stars in the gravitational wave era. Phys. Rev. C, 95(2):025808.
- Flores, C. V. y Lugones, G. (2017). Constraining color flavor locked strange stars in the gravitational wave era. Phys. Rev. C, 95:025808.

- Fonseca, E. et al. (2021). Refined Mass and Geometric Measurements of the High-mass PSR J0740+6620. ApJL, 915(1):L12.
- Forshaw, J. (1997). An Introduction to QED and QCD. <https://www.hep.manchester.ac.uk/u/forshaw/NorthWest/QED.pdf>.
- Glendenning, N. K., Kettner, C., y Weber, F. (1995). From strange stars to strange dwarfs. Astrophys. J., 450:253–261.
- González Felipe, R., Manreza Paret, D., y Pérez Martínez, A. (2011). Magnetized color flavor locked state and compact stars. The European Physical Journal A, 47(1).
- Haar, D. (2013). Collected Papers of L.D. Landau. Elsevier Science.
- Hewish, A., Bell, S. J., Pilkington, J. D. H., Scott, P. F., y Collins, R. A. (1968). Observation of a Rapidly Pulsating Radio Source. Nature, 217(5130):709–713.
- Isayev, A. A. (2015). Stability of magnetized strange quark matter in the MIT bag model with a density dependent bag pressure. Phys. Rev. C, 91:015208.
- Itoh, N. (1970). Hydrostatic Equilibrium of Hypothetical Quark Stars. Progress of Theoretical Physics, 44(1):291–292.
- Kodama, T. (2002). Introduction to relativistic gases. In AIP Conference Proceedings, volume 631, pages 3–26. American Institute of Physics.
- Kokkotas, K. D. y Schmidt, B. G. (1999). Quasi-Normal Modes of Stars and Black Holes. Living Reviews in Relativity, 2(1):2.
- Kokkotas, K. D. y Schutz, B. F. (1992). w -modes - A new family of normal modes of pulsating relativistic stars. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 255:119–128.
- Landau, L. y Lifshitz, E. (1981). Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory. Course of Theoretical Physics. Elsevier Science.
- Mariani, M., Orsaria, M., y Vucetich, H. (2017). Constant entropy hybrid stars: a first approximation of cooling evolution. Astronomy & Astrophysics, 601:A21.
- Mariani, M., Orsaria, M. G., Ranea-Sandoval, I. F., y Guilera, O. M. (2019a). Hybrid magnetized stars within the Field Correlator Method. Boletín de la Asociación Argentina de Astronomía La Plata Argentina, 61:231–233.

- Mariani, M., Orsaria, M. G., Ranea-Sandoval, I. F., y Lugones, G. (2019b). Magnetized hybrid stars: effects of slow and rapid phase transitions at the quark-hadron interface. *MNRAS*, 489(3):4261–4277.
- Miller, M. C. y et al. (2019). PSR j0030+0451 mass and radius from NICER data and implications for the properties of neutron star matter. *Astrophys. J. Lett.*, 887(1):L24.
- Miller, M. C. et al. (2021). The Radius of PSR J0740+6620 from NICER and XMM-Newton Data. *ApJ*, 918(2):L28.
- Morozova, V., Radice, D., Burrows, A., y Vartanyan, D. (2018). The gravitational wave signal from core-collapse supernovae. *The Astrophysical Journal*, 861(1):10.
- Nefediev, A. V., Simonov, Y. A., y Trusov, M. A. (2009). Deconfinement and Quark-Gluon Plasma. *International Journal of Modern Physics E*, 18(3):549–599.
- Negreiros, R. P., Weber, F., Malheiro, M., y Usov, V. (2009). Electrically charged strange quark stars. *Physical Review D*, 80(8):083006.
- Nicotra, O. E., Baldo, M., Burgio, G. F., y Schulze, H. J. (2006). Hybrid proto-neutron stars with the MIT bag model. *Phys. Rev. D*, 74:123001.
- Noronha, J. L. y Shovkovy, I. A. (2007). Color-flavor locked superconductor in a magnetic field. *Phys. Rev. D*, 76(10):105030.
- Oppenheimer, J. R. y Volkoff, G. M. (1939). On massive neutron cores. *Phys. Rev.*, 55:374–381.
- Orsaria, M., Rodrigues, H., Weber, F., y Contrera, G. A. (2013). Quark-hybrid matter in the cores of massive neutron stars. *Physical Review D: Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*, 87(2):023001.
- Orsaria, M. G., Malfatti, G., Mariani, M., Ranea-Sandoval, I. F., García, F., Spinella, W. M., Contrera, G. A., Lugones, G., y Weber, F. (2019). Phase transitions in neutron stars and their links to gravitational waves. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 46(7):073002.
- Pereira, J. P., Flores, C. V., y Lugones, G. (2018). Phase Transition Effects on the Dynamical Stability of Hybrid Neutron Stars. *The Astrophysical Journal*, 860(1):12.

- Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., y Flannery, B. P. (2007). Numerical recipes 3rd edition: The art of scientific computing. Cambridge university press.
- Ranea-Sandoval, I. F., Guilera, O. M., Mariani, M., y Orsaria, M. G. (2018a). Oscillation modes of hybrid stars within the relativistic Cowling approximation. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 2018(12):031.
- Ranea-Sandoval, I. F., Mariani, M., y Guilera, O. M. (2018b). Oscilaciones de estrellas híbridas utilizando la aproximación de Cowling. Boletín de la Asociación Argentina de Astronomía La Plata Argentina, 60:86–88.
- Ranea-Sandoval, I. F., Orsaria, M. G., Malfatti, G., Curin, D., Mariani, M., Anibal Contrera, G., y Guilera, O. M. (2019). Effects of Hadron-Quark Phase Transitions in Hybrid Stars within the NJL Model. Symmetry, 11(3):425.
- Riley, T. E. y et al. (2019). A NICER view of PSR j0030+0451: Millisecond pulsar parameter estimation. Astrophys. J. Lett., 887(1):L21.
- Riley, T. E. et al. (2021). A NICER View of the Massive Pulsar PSR J0740+6620 Informed by Radio Timing and XMM-Newton Spectroscopy. ApJ, 918(2):L27.
- Rodríguez, M. C., Ranea-Sandoval, I. F., Mariani, M., Orsaria, M. G., Malfatti, G., y Guilera, O. M. (2021). Hybrid stars with sequential phase transitions: the emergence of the g_2 mode. J. Cosmology Astropart. Phys., 2021(2):009.
- Schutz, B. (2000). Gravitational Radiation. In Murdin, P., editor, Encyclopedia of Astronomy and Astrophysics, page 2110.
- Schutz, B. F. (2008). Asteroseismology of neutron stars and black holes. In Journal of Physics Conference Series, volume 118 of Journal of Physics Conference Series, page 012005.
- Shapiro, S. L. y Teukolsky, S. A. (2008). Black holes, white dwarfs, and neutron stars: The physics of compact objects. John Wiley & Sons.
- Sotani, H. y Harada, T. (2003). Nonradial oscillations of quark stars. Phys. Rev. D, 68:024019.
- Strickland, M., Dexheimer, V., y Menezes, D. P. (2012). Bulk properties of a fermi gas in a magnetic field. Physical Review D, 86(12):125032.
- Sur, A., Haskell, B., y Kuhn, E. (2020). Magnetic field configurations in neutron stars from MHD simulations. MNRAS, 495(1):1360–1371.

- Thorne, K. S. y Campolattaro, A. (1967). Non-Radial Pulsation of General-Relativistic Stellar Models. I. Analytic Analysis for $L \gg 2$. The Astrophysical Journal, 149:591.
- Tolman, R. C. (1939). Static solutions of einstein's field equations for spheres of fluid. Phys. Rev., 55:364–373.
- Tonetto, L. y Lugones, G. (2020). Discontinuity gravity modes in hybrid stars: Assessing the role of rapid and slow phase conversions. Phys. Rev. D, 101:123029.
- Torres del Castillo, G. y Velázquez Castro, J. (2004). Schrodinger-Pauli equation for spin-3/2 particles. Rev. Mex. Fis., 50:306 – 310.
- Weber, F. (2017). Pulsars as astrophysical laboratories for nuclear and particle physics. Routledge.
- Weber, F., Contrera, G. A., Orsaria, M. G., Spinella, W., y Zubairi, O. (2014). Properties of high-density matter in neutron stars. Modern Physics Letters A, 29(23):1430022.
- Wen, X.-J. (2013). Color-flavor locked strange quark matter in a strong magnetic field. Phys. Rev. D, 88(3):034031.
- Witten, E. (1984). Cosmic separation of phases. Phys. Rev. D, 30:272–285.
- Zdunik, J. L., Bulik, T., Kluźniak, W., Haensel, P., y Gondek-Rosińska, D. (2000). On the mass of moderately rotating strange stars in the MIT bag model and LMXBs. A&A, 359:143–147.
- Zel'dovich, Y. y Novikov, I. (2014). Stars and Relativity. Dover Books on Physics. Dover Publications.